

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
Εθνικό και Καποδιστριακό  
Πανεπιστήμιο Αθηνών

---

Γραφικά με Η/Υ

Αθήνα 2023

Αντώνης Κομινάτος-Γεννατάς & Ιωάννης Τσαγκαρόπουλος

Επιβλέπουσα: Μ. Μητρούλη



# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Μετασχηματισμοί στο Επίπεδο – Παραστάσεις με Πίνακες</b>	<b>5</b>
1.1	Βασικοί μετασχηματισμοί αξόνων συντεταγμένων . . . . .	5
1.1.1	Παράλληλη μεταφορά αρχής συντεταγμένων . . . . .	5
1.2	Αλλαγή κλίμακας αξόνων συντεταγμένων . . . . .	6
1.2.1	Στροφή των αξόνων συντεταγμένων . . . . .	6
1.2.2	Συμμετρία ως προς άξονα . . . . .	8
1.2.3	Αντίστροφοι μετασχηματισμοί αξόνων συντεταγμένων . . . . .	8
1.3	Βασικοί γεωμετρικοί μετασχηματισμοί. . . . .	8
1.3.1	Μεταφορά σχήματος . . . . .	8
1.3.2	Αλλαγή κλίμακας (Μεγέθυνση - σμίκρυνση) . . . . .	8
1.3.3	Στροφή σχήματος γύρω από την αρχή των αξόνων . . . . .	9
1.3.4	Συμμετρία ως προς άξονα . . . . .	10
1.3.5	Αντίστροφοι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί . . . . .	11
1.4	Πίνακες μετασχηματισμών . . . . .	11
1.4.1	Πίνακες μετασχηματισμού αξόνων συντεταγμένων . . . . .	11
1.5	Σύνθεση μετασχηματισμών . . . . .	14
1.6	Παραδείγματα μετασχηματισμών στο επίπεδο . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Πίνακες μετασχηματισμών στο χώρο τριών διαστάσεων</b>	<b>29</b>
2.1	Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί . . . . .	29
2.1.1	Μεταφορά . . . . .	29
2.2	Στροφή . . . . .	30
2.2.1	Στροφή γύρω από τον άξονα $x$ . . . . .	31
2.3	Συμμετρία ως προς επίπεδο . . . . .	31
2.3.1	Μετασχηματισμοί αξόνων συντεταγμένων . . . . .	32
2.4	Παραδείγματα μετασχηματισμών στο χώρο . . . . .	32



## Κεφάλαιο 1

# Μετασχηματισμοί στο Επίπεδο – Παραστάσεις με Πίνακες

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τα δύο είδη μετασχηματισμών, δηλαδή τους βασικούς μετασχηματισμούς αξόνων συντεταγμένων και τους βασικούς γεωμετρικούς μετασχηματισμούς. Οι αντίστοιχοι μετασχηματισμοί των δύο παραπάνω κατηγοριών είναι:

Μετασχηματισμοί αξόνων	Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί
1. Μεταφορά αρχής.	1. Μεταφορά σχήματος.
2. Αλλαγή κλίμακας αξόνων συντεταγμένων.	2. Αλλαγή κλίμακας συντεταγμένων, σχετικά με την παράσταση ενός αντικειμένου (μεγέθυνση – σμίκρυνση).
3. Στροφή των αξόνων συντεταγμένων.	3. Στροφή σχήματος γύρω από την αρχή των αξόνων.
4. Συμμετρία ως προς άξονα.	4. Συμμετρία ως προς άξονα.
5. Αντίστροφος των 1 έως 4 μετασχηματισμοί.	5. Αντίστροφος των 1 έως 4 μετασχηματισμοί.

Μέχρι τώρα θεωρούσαμε ότι η αρχή των αξόνων, οι άξονες καθώς και η κλίμακα επί των αξόνων, συμπίπτουν με την αρχή, τους άξονες και την κλίμακα της οθόνης. Το σύστημα συντεταγμένων της οθόνης καλείται και σύστημα του παρατηρητή. Γενικά δεν υπάρχει σύμπτωση του αρχικού (πραγματικού) συστήματος με το σύστημα του παρατηρητή. Τέλος, ο όρος “βασικοί μετασχηματισμοί” προκύπτει από τη δυνατότητα κάθε άλλος μετασχηματισμός να μπορεί να αντιμετωπιστεί με συνδυασμό των αντίστοιχων βασικών μετασχηματισμών.

### 1.1 Βασικοί μετασχηματισμοί αξόνων συντεταγμένων

#### 1.1.1 Παράλληλη μεταφορά αρχής συντεταγμένων

Έστω  $(t_x, t_y)$  οι συντεταγμένες της νέας αρχής σχετικά με την παλαιά. Στο νέο σύστημα οι συντεταγμένες αρχής του παλαιού είναι  $(-t_x, -t_y)$ . Άρα για το σημείο  $P(x, y)$  θα έχουμε σαν συντεταγμένες του στο σύστημα  $x'Oy'$  τις εξής:

$$(x' = x - t_x, y' = y - t_y).$$

# *Parallel metafora*

Συμβολισμός μετασχηματισμού:

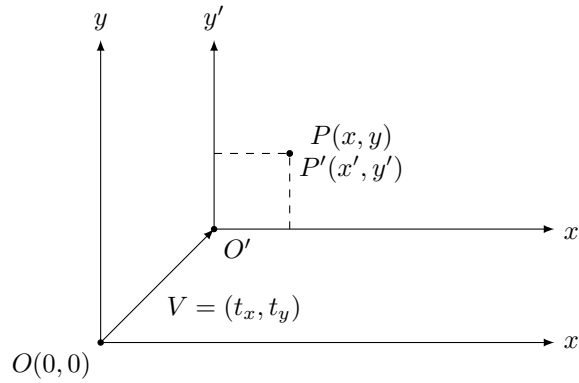
Επομένως έχουμε:

όπου

$\bar{T}_v$

$$(x', y') = \bar{T}_v(x, y)$$

$$x' = x - t_x \text{ και } y' = y - t_y$$



Σχήμα 1.1: Παράλληλη μεταφορά αρχής συντεταγμένων

## 1.2 Αλλαγή κλίμακας αξόνων συντεταγμένων

Θεωρώντας ότι το σύστημα συντεταγμένων δεν αλλάζει ούτε σε θέση ούτε σε διεύθυνση μπορούμε να αλλάξουμε τις μονάδες μέτρησης κατά μήκος των δύο αξόνων. Έστω  $S_x$  και  $S_y$  οι "κλίμακες" (παράγοντες) βάσει των οποίων προκύπτουν, οι νέες μονάδες μέτρησης.

Συμβολισμός μετασχηματισμού:

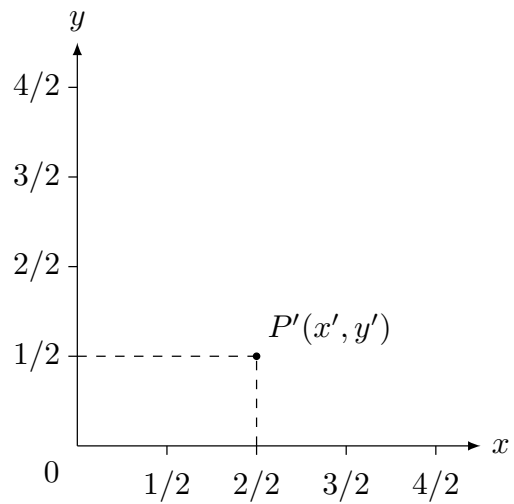
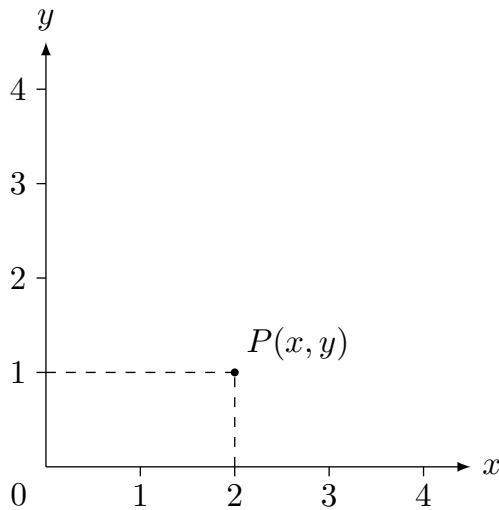
$$\bar{S}_{S_x, S_y}$$

Επομένως έχουμε:

$$(x', y') = \bar{S}_{S_x, S_y}(x, y)$$

όπου

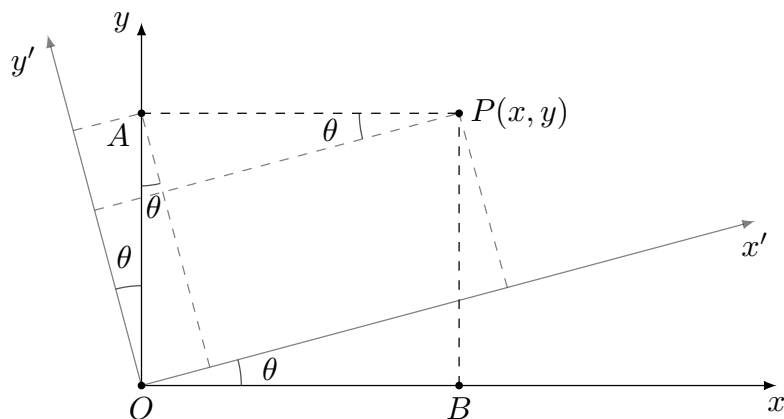
$$x' = \frac{1}{S_x}x \text{ και } y' = \frac{1}{S_y}y.$$

Σχήμα 1.2: Παράδειγμα αλλαγής κλίμακας αξόνων συντεταγμένων για  $S_x = 2$  και  $S_y = 2$ .

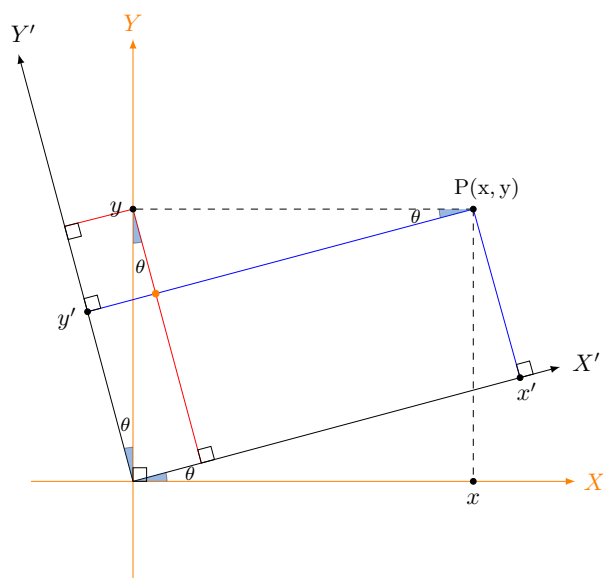
# *Allagi klimakas ajwnwn*

### 1.2.1 Στροφή των αξόνων συντεταγμένων

Έστω ότι το σύστημα  $xOy$  στρέφει κατά γωνία  $\theta$  γύρω από το  $O$ .



Σχήμα 1.3: Στροφή συστήματος αξόνων κατά γωνία  $\theta$  γύρω από την αρχή των αξόνων  $O$ .



Σχήμα 1.4: Στροφή συστήματος αξόνων κατά γωνία  $\theta$  γύρω από την αρχή των αξόνων  $O$ .

# *strofi systimatos ajwnwn*

Συμβολισμός μετασχηματισμού:

$\bar{R}_\theta$

Επομένως:

$(x', y') = \bar{R}_\theta(x, y)$

ΝΑ μπουν τα B' κλπ στο σχήμα Από το σχήμα έχουμε ότι

$$OB' = y \sin \theta \quad \text{και} \quad B'X' = x \cos \theta$$

Άρα  $x' = OX = OB' + B'X = x \cos \theta + y \sin \theta$ . Άρα  $y' = OY = A'O - A'Y = y \cos \theta - x \sin \theta$ .

### 1.2.2 Συμμετρία ως προς άξονα

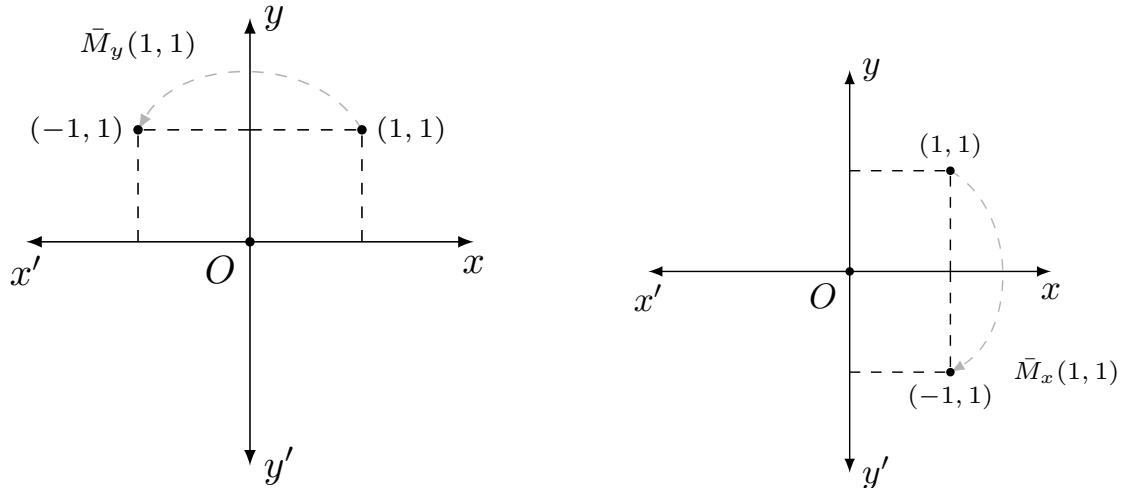
Συμβολισμός μετασχηματισμού:

Επομένως:

$\bar{M}_x$

$$(x', y') = \bar{M}_x(x, y) \text{ όπου } x' = x, y' = -y$$

$$(x', y') = \bar{M}_y(x, y) \text{ όπου } x' = -x, y' = y$$



Σχήμα 1.5: Παράδειγμα συμμετρίας ως προς άξονα

### 1.2.3 Αντίστροφοι μετασχηματισμοί αξόνων συντεταγμένων

Μεταφορά (μεταφορά στην αντίθετη κατεύθυνση):

Κλίμακα:

Στροφή(στροφή στην αντίθετη κατεύθυνση):

Συμμετρία:

$$\bar{T}_v^{-1} = \bar{T}_{-v}$$

$$\bar{S}_{S_x, S_y}^{-1} = \bar{S} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ S_x & S_y \end{pmatrix}$$

$$\bar{R}_\theta^{-1} = \bar{R}_{-\theta}$$

$$\bar{M}_x^{-1} = \bar{M}_x \text{ και } \bar{M}_y^{-1} = \bar{M}_y$$

## 1.3 Βασικοί γεωμετρικοί μετασχηματισμοί.

Στους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς πρόκειται ουσιαστικά για "αλλαγή της θέσης" στην οποία βρίσκεται ένα επίπεδο σχήμα, θεωρώντας τους άξονες και γενικά το σύστημα συντεταγμένων σταθερό.

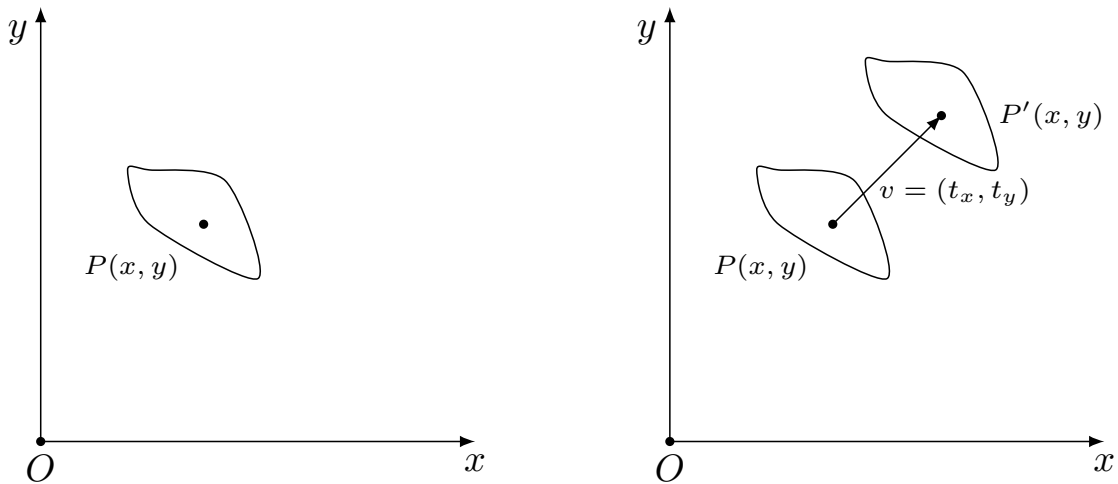
### 1.3.1 Μεταφορά σχήματος

Συμβολισμός:  $T_v : P' = T_v(P)$  όπου  $x' = x + t_x$  και  $y' = y + t_y$ .

### 1.3.2 Αλλαγή κλίμακας (Μεγέθυνση - σμίκρυνση)

Ο μετασχηματισμός κλίμακας είναι εδώ μια διαδικασία "μεγέθυνσης" ή "σμίκρυνσης" των διαστάσεων ενός σχήματος. Κρατώντας σταθερή την αρχή και τους άξονες δίνουμε μία μεγέθυνση όλης της περιοχής του σχήματος κατά  $S_x$  στη διεύθυνση του θετικού άξονα  $x$  και αντίστοιχα κατά  $S_y$  στη διεύθυνση του θετικού άξονα  $y$ . Φυσικά επειδή εδώ πρόκειται για μεγέθυνση ισχύει  $S_x > 1$  και  $S_y > 1$ . Αντίθετα όταν πρόκειται για σμίκρυνση έχουμε  $S_x < 1$  και  $S_y < 1$ . Τέλος υπάρχουν και συνδυασμοί των τεσσάρων περιπτώσεων.

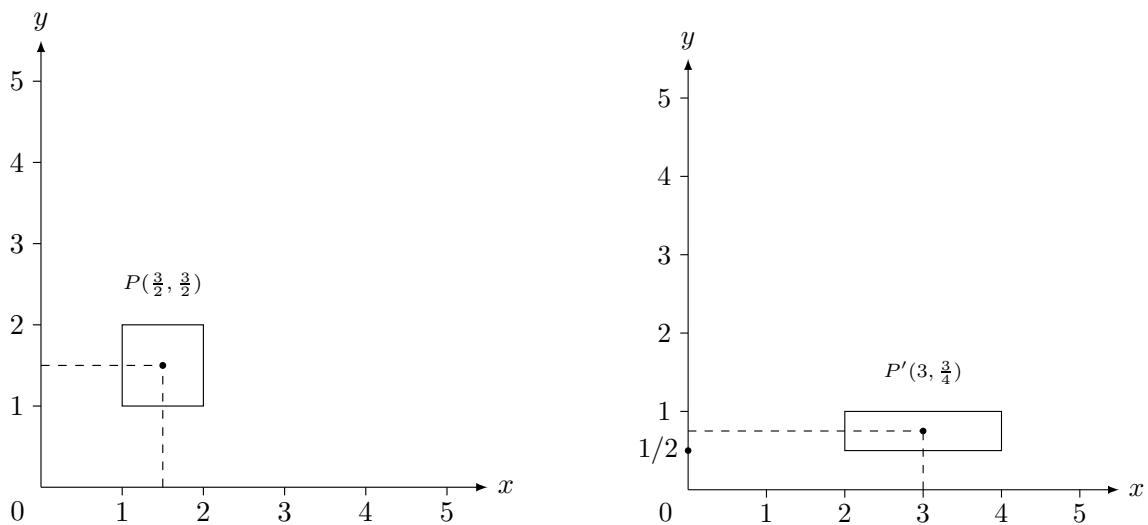




Σχήμα 1.6: Παράδειγμα μεταφοράς σχήματος κατά διάνυσμα  $v = (t_x, t_y)$

Συμβολισμός μετασχηματισμού:  $S_{S_x, S_y} : P' = S_{S_x, S_y}(P)$  όπου  $x' = S_x \cdot x$  και  $y' = S_y \cdot y$ .

Παράδειγμα για  $S_x = 2$  και  $S_y = \frac{1}{2}$ :



Σχήμα 1.7: Παράδειγμα αλλαγής κλίμακας συντεταγμένων (Σμίκρυνση στον  $y$  και μεγέθυνση στον  $x$ )

Παρατήρηση. Σε αυτό το μετασχηματισμό το μόνο σημείο που δεν μετασχηματίζεται είναι η αρχή των αξόνων.

### 1.3.3 Στροφή σχήματος γύρω από την αρχή των αξόνων

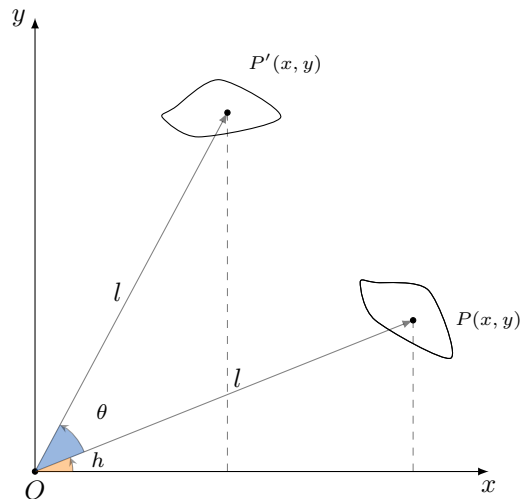
Συμβολισμός μετασχηματισμού:

$R_\theta$  και επομένως  $P' = R_\theta(P)$  με :

$$x = l \cosh l = \sqrt{x^2 + y^2}, y = l \sinh$$

Άρα τελικά :

$$x' = l \cos(\theta + h) = l(\cosh \cos \theta - \sinh \sin \theta) = x \cos \theta - y \sin \theta$$



Σχήμα 1.8: Στροφή σχήματος γύρω από την αρχή των αξόνων κατά γωνία  $\theta$

Ομοίως προκύπτει ότι  $y' = x \sin \theta + y \cos \theta$ .

### 1.3.4 Συμμετρία ως προς άξονα

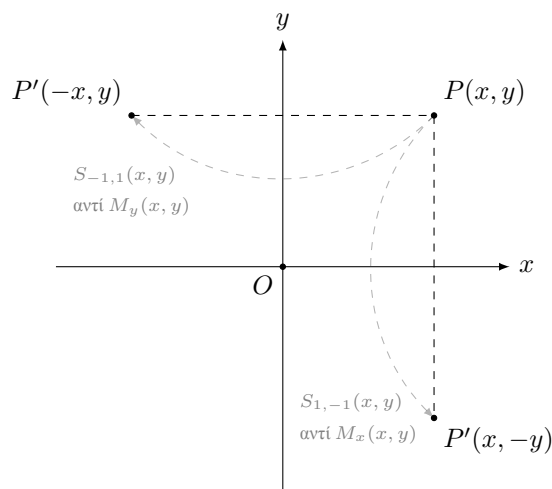
Συμβολισμός μετασχηματισμού:

$M_x, M_y$

$P' = M_x(P)$  όπου  $x' = x$  και  $y' = -y$

$P' = M_y(P)$  όπου  $x' = -x$  και  $y' = y$ .

Τη συμμετρία μπορούμε εδώ να τη θεωρήσουμε σαν μετασχηματισμό κλίμακας με  $S_x = 1, S_y = -1$  για την περίπτωση  $M_x$  και  $S_x = -1, S_y = 1$  για την  $M_y$ .



Σχήμα 1.9: Παραδείγματα συμμετρίας σημείου ως προς άξονες

### 1.3.5 Αντίστροφοι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί

$$\begin{aligned} \text{Μεταφορά:} \quad T_v^{-1} &= T_{-v} \\ \text{Κλίμακα:} \quad S_{S_x, S_y}^{-1} &= S \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{S_x, S_y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Στροφή:} \quad R^{-1} &= R_{-\theta} \\ \text{Συμμετρία:} \quad M_x^{-1} &= M_x \text{ και } M_y^{-1} = M_y \end{aligned}$$

Είναι φανερό ότι οποιοσδήποτε μετασχηματισμός είτε αξόνων είτε γεωμετρικός μπορεί να πραγματοποιηθεί με επαναληπτική εφαρμογή των παραπάνω 10 συνολικά (και 10 αντιστρώφων) βασικών μετασχηματισμών. Γενικά μπορούμε να πούμε ότι αυτές οι απεικονίσεις είναι της μορφής:

$(x, y) \rightarrow (f_1(x, y), f_2(x, y))$  όπου  $f_1$  και  $f_2$  είναι και οι δύο γραμμικές απεικονίσεις ως προς  $x$  και  $y$ . Τέτοιου είδους απεικονίσεις μπορούν να παρασταθούν απλά με πίνακες μετασχηματισμών.

## 1.4 Πίνακες μετασχηματισμών

Εδώ τα σημεία παριστάνονται με διανύσματα για να μπορούμε να εφαρμόσουμε πράξεις πινάκων.

### 1.4.1 Πίνακες μετασχηματισμού αξόνων συντεταγμένων

α) Μεταφορά αρχής:

$$\bar{T}_v = \begin{bmatrix} -t_x \\ -t_y \end{bmatrix} \text{ ή } \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t_x \\ -t_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - t_x \\ y - t_y \end{bmatrix}$$

β) Μετασχηματισμός κλίμακας:

$$\bar{S}_{S_x, S_y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{S_x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{S_y} \end{bmatrix} \text{ ή } \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{S_x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{S_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{S_x} \\ \frac{y}{S_y} \end{bmatrix}$$

γ) Στροφή αξόνων:

$$\bar{R}_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \text{ ή } \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos \theta + y \sin \theta \\ -x \sin \theta + y \cos \theta \end{bmatrix}$$

δ) Συμμετρία ως προς άξονα (x):

$$\bar{M}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ ή } \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

Πριν προχωρήσουμε στους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς πρέπει να αναφέρουμε ότι εκτός από τη μεταφορά όλες οι απεικονίσεις είναι ομοιόμορφες (τετραγωνικοί πίνακες  $2 \times 2$ ). Είναι γνωστό ότι απεικονίσεις σημείων οι οποίες πραγματοποιούνται με πίνακες έχουν πάντοτε ένα σταθερό σημείο (Fixpoint) την αρχή των αξόνων δηλαδή:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

για τυχαία  $a, b, c, d$ . Εάν τώρα θέλουμε να παραστήσουμε με πίνακες και μετασχηματισμούς όπου όλα τα σημεία μπορούν να σταθερό σημείο να βρίσκεται εκτός του επιπέδου απεικόνισης. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε εδώ τις "ομογενείς συντεταγμένες". Εισάγουμε δηλαδή μια τρίτη διάσταση και σχεδιάζουμε στο επίπεδο  $z = 1$  (το θεωρούμε σαν βασικό επίπεδο). Οι μετασχηματισμοί πραγματοποιούνται τώρα στο χώρο με πίνακες  $3 \times 3$  το δε σταθερό σημείο  $(0, 0, 0)$  βρίσκεται εκτός του επιπέδου σχεδίασης  $z = 1$ . Πίνακες

των οποίων η τελευταία γραμμή είναι  $(0, 0, 1)$  απεικονίζουν σημεία του επιπέδου  $z = 1$  και στο επίπεδο  $z = 1$  διότι:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

Οι παραπάνω μετασχηματισμοί α) έως δ) γίνονται:

α')

$$\bar{T}_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -t_x \\ 0 & 1 & -t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -t_x \\ 0 & 1 & -t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - t_x \\ y - t_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

β')

$$\bar{S}_{S_x, S_y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{S_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{S_y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

γ')

$$\bar{R}_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

δ')

$$\bar{M}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ανάλογα κατασκευάζονται και οι πίνακες των αντίστροφων μετασχηματισμών αξόνων.

### 3.3.2 Πίνακες γεωμετρικών μετασχηματισμών.

α)

$$T_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

β)

$$S_{S_x, S_y} = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

γ)

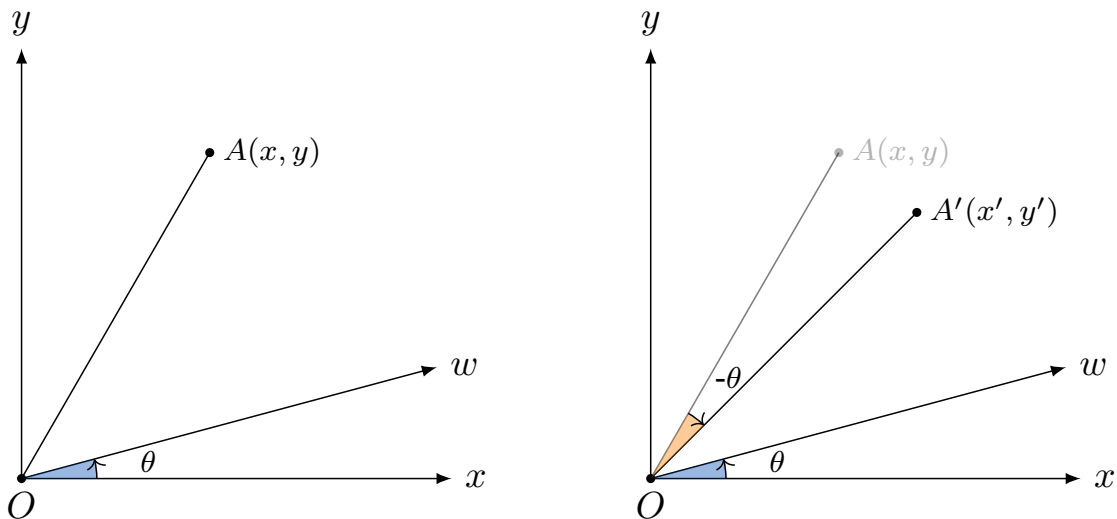
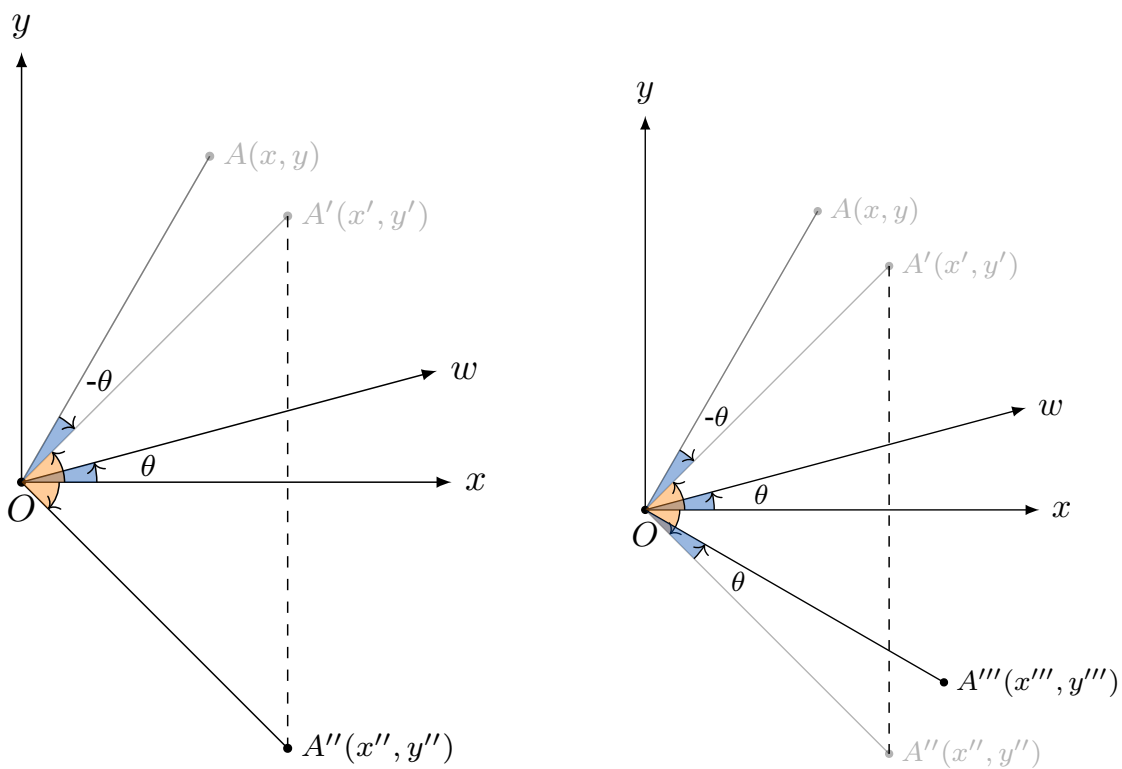
$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

δ)

$$M_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ανάλογα κατασκευάζονται και οι πίνακες των αντίστροφων γεωμετρικών μετασχηματισμών.

*Παράδειγμα.* Να υπολογιστεί ο πίνακας μετασχηματισμού της συμμετρικής απεικόνισης εικόνας ως προς άξονα  $w$  ο οποίος σχηματίζει γωνία  $\theta$  με τον θετικό άξονα των  $x$ .

Σχήμα 1.10: Παράδειγμα μεταφοράς σχήματος κατά διάνυσμα  $v = (t_x, t_y)$ Σχήμα 1.11: Παράδειγμα μεταφοράς σχήματος κατά διάνυσμα  $v = (t_x, t_y)$ 

Όπως φαίνεται και στο σχήμα ?? ο μετασχηματισμός μπορεί να προκύψει ως εξής:

1. Στροφή της εικόνας κατά γωνία  $-\theta$ .  $(R_{-\theta})$
2. Συμμετρία ως προς άξονα  $x$ .  $(M_x)$
3. Στροφή της εικόνας κατά γωνία  $\theta$ .  $(R_\theta)$

$$\text{Βήμα 1: } \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) & 0 \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \Pi_1 \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Βήμα 2: } \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \Pi_2 \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Βήμα 3: } \begin{bmatrix} x''' \\ y''' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{bmatrix} = \Pi_3 \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{bmatrix}$$

Άρα τελικά:

$$\begin{bmatrix} x''' \\ y''' \\ 1 \end{bmatrix} = \Pi_3(\Pi_2(\Pi_1 \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}))$$

Επειδή ο πολλαπλασιασμός πινάκων είναι πράξη προσεταιριστική, θα έχουμε:

$$\begin{bmatrix} x''' \\ y''' \\ 1 \end{bmatrix} = (\Pi_3 \cdot \Pi_2 \cdot \Pi_1) \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

και επομένως μπορούμε να υπολογίσουμε το γινόμενο  $\Pi_3\Pi_2\Pi_1$  το οποίο θα αποτελεί και τον ζητούμενο πίνακα  $\Pi$ .

$$\begin{aligned} \Pi &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) & 0 \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta & 0 \\ 2 \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta - \cos^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## 1.5 Σύνθεση μετασχηματισμών

Είναι φανερό ότι κάνοντας χρήση της προσεταιριστικής ιδιότητας του πολλαπλασιασμού πινάκων μπορούμε να παραστήσουμε **μία ακολουθία μετασχηματισμών** (που εφαρμόζονται πάνω σε μία εικόνα) **με έναν μόνο πίνακα**.

Έστω γενικά  $M_1, M_2, \dots, M_n$  μετασχηματισμοί που εφαρμόζονται με τη σειρά αυτή πάνω σε μία εικόνα. Οι αντίστοιχοι ομογενείς πίνακες είναι  $\Pi_i, i = 1(\text{ή } n)$ . Ο συνολικός μετασχηματισμός κάθε σημείου της εικόνας μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \Pi_n(\Pi_{n-1}(\dots(\Pi_2(\Pi_1 \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix})))) = ((\Pi_n\Pi_{n-1})\Pi_{n-2}) \dots \Pi_1 \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

ή απλά:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \Pi_n\Pi_{n-1}\Pi_{n-2} \dots \Pi_1 \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

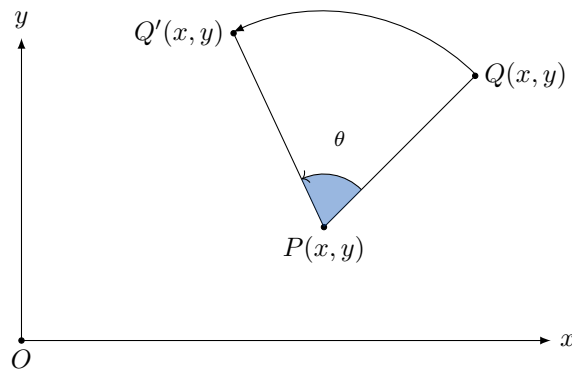
Βασικοί μετασχηματισμοί	Γενικευμένοι μετασχηματισμοί
$R_\theta$ (Στροφή κατά $\theta$ ως προς το $(0, 0)$ σταθερό)	$R_{\theta,P}$ (στροφή κατά $\theta$ ως προς το $P$ σταθερό)
$S_{S_x, S_y}$ (Scaling κατά $S_x, S_y$ - διατηρείται σταθερό το $P$ )	$S_{S_x, S_y, P}$ (scaling κατά $S_x, S_y$ - διατηρείται σταθερό το $P$ )
$M_x, M_y$ (Συμμετρικό ως προς τους άξονες $x, y$ )	$M_{W,\theta}$ (Συμμετρικό ως προς τον άξονα $W$ που πήρα από τον $(0, 0)$ και σχηματίζει γωνία $\theta$ με τον $Ox$ )
	$M_L$ (Συμμετρικό ως προς τον άξονα $L$ που τέμνει του $y$ στο $(0, b)$ και σχηματίζει γωνία $\theta$ με τον $Ox$ )

Σχήμα 1.12: Λίστα Γεωμετρικών Μετασχηματισμών

Ο συνολικός μετασχηματισμός λοιπόν παρουσιάζεται με έναν πίνακα ο οποίος υπολογίζεται μία φορά και στη συνέχεια πολλαπλασιάζεται με τα εκάστοτε σημεία της εικόνας.

## 1.6 Παραδείγματα μετασχηματισμών στο επίπεδο

*Παράδειγμα.* Περιγράψτε το μετασχηματισμό που περιστρέφει ένα δοσμένο σημείο  $Q(x, y)$  κατά γωνία  $\theta$  ως προς ένα δοσμένο κέντρο περιστροφής  $P(h, k)$  (σχήμα 3.10). Υπολογίστε το σχετικό πίνακα  $R_{\theta,P}$  που θα εκτελεί το συγκεκριμένο μετασχηματισμό.

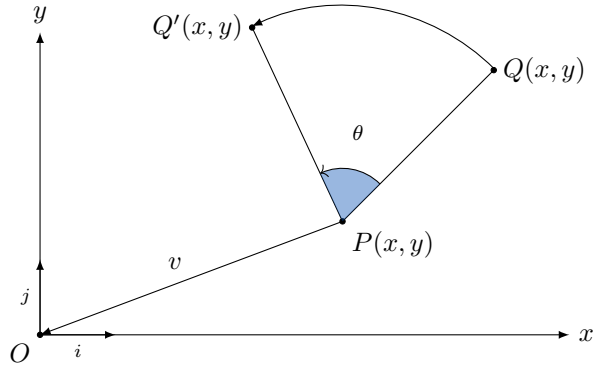
Σχήμα 1.13: πίνακας μετασχηματισμού **what**

*Λύση.* Εφαρμόζουμε γεωμετρικούς μετασχηματισμούς. Θα προσπαθήσουμε να αναγούμε το ζητούμενο μετασχηματισμό σε σύνθεση βασικών μετασχηματισμών. Εκτελούμε τα ακόλουθα βήματα:

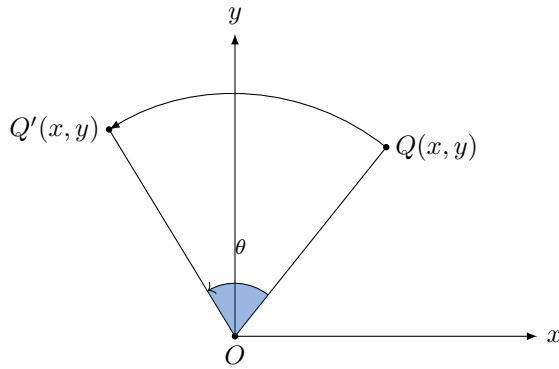
Βήμα 1: Μεταφέρουμε το κέντρο περιστροφής  $P$  στην αρχή των αξόνων. Η μεταφορά θα γίνει κατά διάνυσμα  $V$  όπου  $V = -h\hat{i} - k\hat{j}$ , όπου  $\hat{i}, \hat{j}$  τα μοναδιαία διανύσματα στους άξονες  $x$  και  $y$  αντίστοιχα (Σχήμα 3.11).

Βασικός πίνακας μετασχηματισμού:  $T_v$

Βήμα 2: Εκτελούμε περιστροφή κατά γωνία  $\theta$  ως προς την αρχή των αξόνων εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό  $R_\theta$  (Σχήμα 3.12).

Σχήμα 1.14: πίνακας μετασχηματισμού **what**

Βασικός πίνακας μετασχηματισμού:  $R_\theta$

Σχήμα 1.15: πίνακας μετασχηματισμού **what**

Βήμα 3: Μεταφέρουμε το  $P$  στην αρχική του θέση. Η μεταφορά θα γίνει κατά διάνυσμα  $-V$  (Σχήμα 3.13).

Βασικός πίνακας μετασχηματισμού:  $T_{-V}$

Ο ζητούμενος μετασχηματισμός προκύπτει ως σύνθεση των παραπάνω:

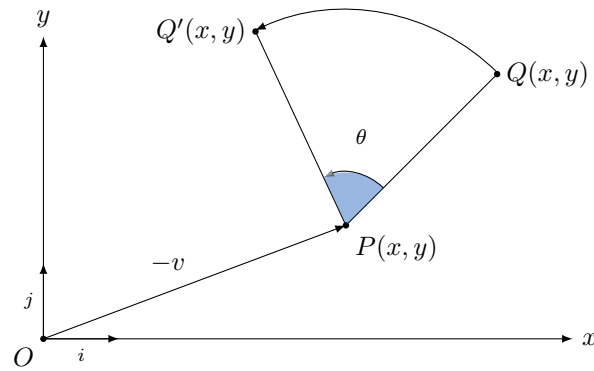
$$R_{\theta, P} = T_{-V} \circ R_\theta \circ T_V$$

Εφαρμόζοντας τους βασικούς γνωστούς πίνακες προκύπτει ότι:

$$R_{\theta, P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -h & -k & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ h & k & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & -h \cos \theta + k \sin \theta + h \\ \sin \theta & \cos \theta & -h \sin \theta - k \cos \theta + k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Οι συντεταγμένες του καινούργιου σημείου  $Q'(x', y')$  προκύπτουν από την επίδραση του  $R_{\theta, P}$  πάνω στο αρχικό σημείο  $Q(x, y)$ :



Σχήμα 1.16: πίνακας μετασχηματισμού **what**

$$\text{Τελικά: } \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = R_{\theta, P} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

*Παράδειγμα.* Εκτελέστε περιστροφή  $45^\circ$  του τριγώνου  $A(0, 0)$ ,  $B(1, 1)$ ,  $C(5, 2)$

(α) ως προς την αρχή των αξόνων και

(β) ως προς το σημείο  $P(-1, -1)$ .

*Λύση.* Το τρίγωνο περιγράφεται υπό μορφή πίνακα ως εξής:

$$ABC = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Κάθε στήλη του παραπάνω πίνακα δημιουργείται από τις ομογενείς συντεταγμένες κάθε κορυφής.

α) Για την περιστροφή ως προς την αρχή των αξόνων θα επιδράσουμε πάνω στον  $ABC$  με το γνωστό πίνακα  $R_{45^\circ}$ . Οι συντεταγμένες των κορυφών του καινούργιου τριγώνου προκύπτουν ως εξής:

$$\begin{aligned} A'B'C' &= R_{45^\circ} \cdot ABC = \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ & 0 \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{7\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Επομένως, οι συντεταγμένες των νέων κορυφών ισούνται με:

$$A'(0, 0), \quad B'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad C'\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{7\sqrt{2}}{2}\right)$$

β) Εφαρμόζουμε το παράδειγμα 1 για  $\theta = 45^\circ$  και  $P(-1, -1)$ . Ο πίνακας που θα εκτελεί το ζητούμενο μετασχηματισμό θα δίνεται από τη σχέση:

$$R_{45^\circ, P} = T_{-V} \cdot R_{45^\circ} \cdot T_V$$

όπου το  $V$  στην προκειμένη περίπτωση ισούται με  $i + j$ . Έτσι:

$$\begin{aligned} R_{45^\circ, P} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -(-1) \\ 0 & 1 & -(-1) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Οι συντεταγμένες του καινούργιου τριγώνου προκύπτουν από τη σχέση:

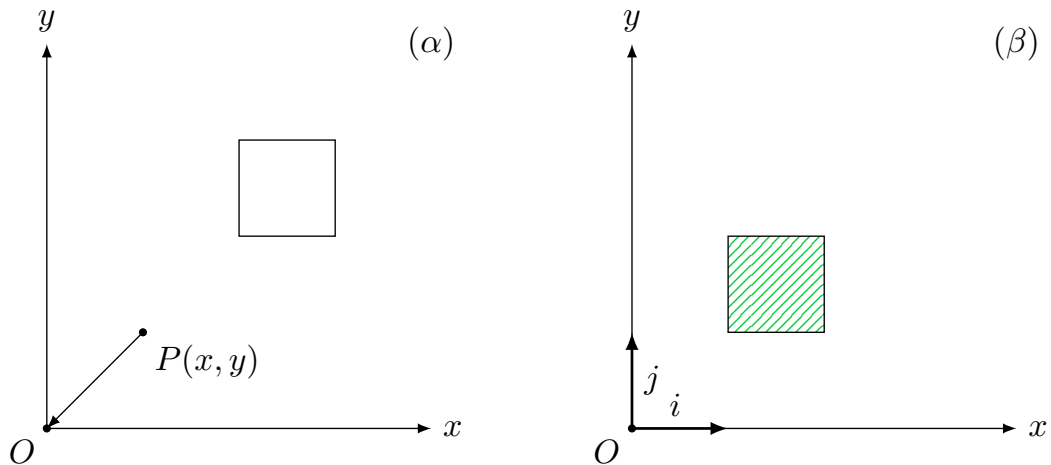
$$A'B'C' = R_{45^\circ, P} \cdot ABC$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} - 1 \\ -1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{9\sqrt{2}}{2} - 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

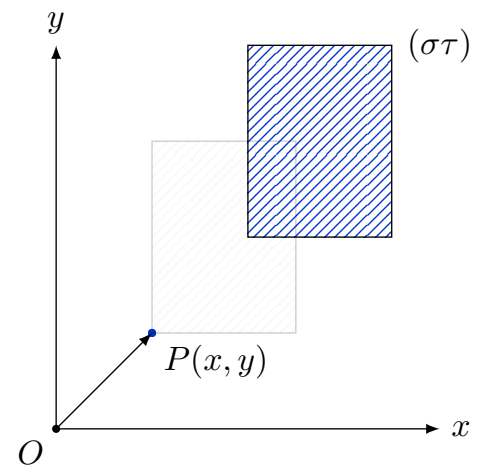
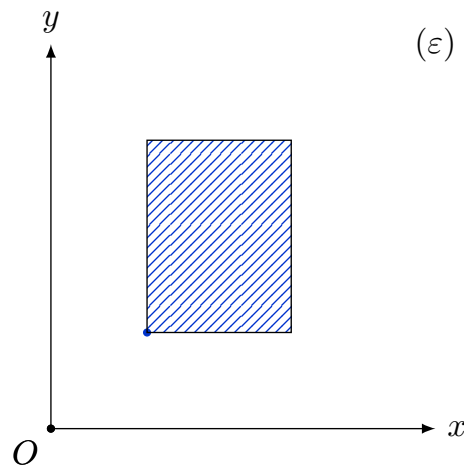
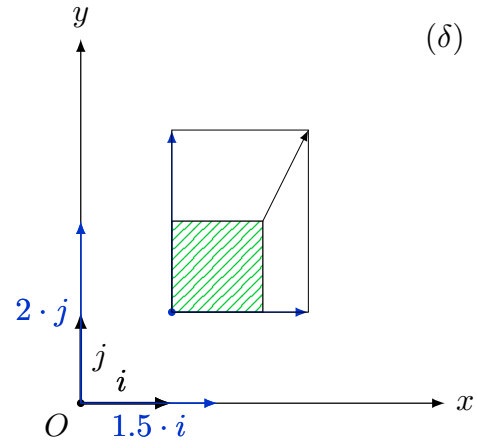
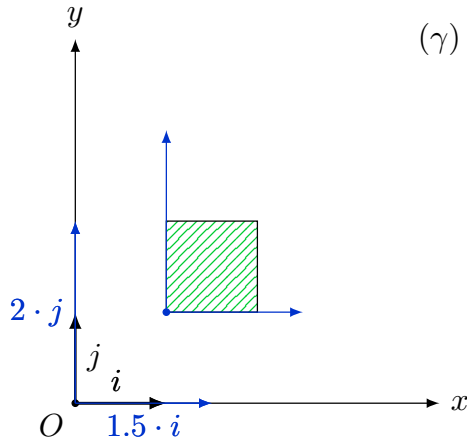
Τελικά οι καινούργιες κορυφές δίνονται από τους τύπους:

$$A'(-1, -\sqrt{2} - 1), \quad B'(-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -1), \quad C'(\frac{3\sqrt{2}}{2} - 1, \frac{9\sqrt{2}}{2} - 1)$$

*Παράδειγμα.* Περιγράψτε το μετασχηματισμό που εκτελεί scaling ενός αντικειμένου ως προς ένα δοσμένο σταθερό σημείο  $P(h, k)$  (Σχήμα 3.14). Το scaling να γίνει κατά  $a$  μονάδες στον άξονα  $x$  και κατά  $b$  μονάδες στον άξονα  $y$ . Υπολογίστε το σχετικό πίνακα  $S_{a,b,P}$  που θα εκτελεί το συγκεκριμένο μετασχηματισμό.



Λύση.



Εφαρμόζουμε γεωμετρικούς μετασχηματισμούς. Θα προσπαθήσουμε να αναγάγουμε το ζητούμενο μετασχηματισμό σε σύνθεση βασικών μετασχηματισμών και ιδιαίτερα του βασικού scaling ως προς την αρχή των αξόνων. Εκτελούμε τα ακόλουθα βήματα:

Βήμα 1: Μεταφέρουμε το σταθερό σημείο  $P$  στην αρχή των αξόνων. Η μεταφορά θα γίνει κατά διάνυσμα  $-V$ , όπου  $V = h\hat{i} + k\hat{j}$ ,  $\hat{i}$  και  $\hat{j}$  τα μοναδιαία διανύσματα στους άξονες  $x$  και  $y$  αντίστοιχα (Σχήμα 3.14(b)).

Βασικός πίνακας μετασχηματισμού:  $T_{-V}$

Βήμα 2: Εκτελούμε scaling ως προς την αρχή των αξόνων με  $s_x = a$  και  $s_y = b$  (Σχήμα 3.14(c)).

Βασικός πίνακας μετασχηματισμού:  $S_{s_x, s_y}$

Βήμα 3: Επαναφέρουμε το σημείο  $P$  στην αρχική του θέση. Η μεταφορά θα γίνει τώρα κατά διάνυσμα  $V$  (Σχήμα 3.14(d)).

Βασικός πίνακας μετασχηματισμού:  $T_V$

Ο ζητούμενος μετασχηματισμός θα προκύψει σαν σύνθεση των παραπάνω βασικών μετασχηματισμών:

$$S_{a,b,P} = T_V \circ S_{s_x, s_y} \circ T_{-V}$$

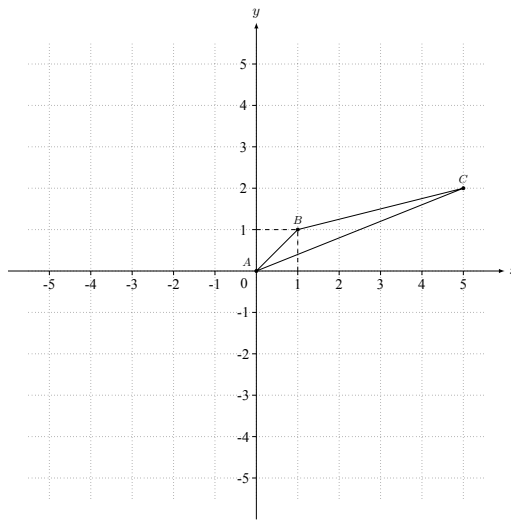
Αντικαθιστώντας τους βασικούς πίνακες μετασχηματισμών στην παραπάνω σχέση προκύπτει ότι:

$$S_{a,b,P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -h \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & -ah + h \\ 0 & b & -bk + k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

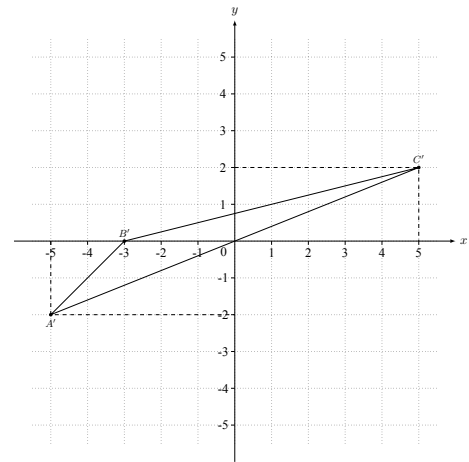
Οι συντεταγμένες των καινούργιων σημείων του αντικειμένου προκύπτουν από την επίδραση του  $S_{a,b,P}$  πάνω στο αρχικό αντικείμενο.

Βασική παρατήρηση: Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό  $S_{a,b,P}$  μπορούμε να τροποποιήσουμε τις διαστάσεις ενός αντικειμένου διατηρώντας σταθερό ένα συγκεκριμένο σημείο του  $P$ .

*Παράδειγμα.* Να διπλασιαστεί το μήκος των πλευρών του τριγώνου με κορυφές  $A(0,0)$ ,  $B(1,1)$  και  $C(5,2)$  διατηρώντας την κορυφή  $C(5,2)$  σταθερή.



(a)



(b)

*Λύση.*

Αρχικό μήκος πλευράς  $BC$ :

$$\sqrt{(5-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{17}$$

Μεγεθυνόμενο το τρίγωνο του (σχήματος) γίνεται:

Τελικό μήκος πλευράς  $BC'$ :

$$\sqrt{(5-(-3))^2 + (2-0)^2} = 2\sqrt{17}$$

Από το παράδειγμα 3 χρησιμοποιούμε τον πίνακα  $S_{a,b,P}$  όπου  $a = b = 2$  και  $P = C(5,2)$ . Στην προκείμενη περίπτωση το διάνυσμα μεταφοράς είναι  $v = 5\hat{i} + 2\hat{j}$  (σχήμα 3.15 (a)). Ο πίνακας  $S_{2,2,C}$  παίρνει την ακόλουθη τιμή:

$$S_{2,2,C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Επιδρούμε με τον πίνακα  $S_{2,2,C}$  πάνω στο τρίγωνο  $ABC$  και προκύπτει:

$$A'B'C' = S_{2,2,C} \cdot ABC = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -2 & 5 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Τελικά οι συντεταγμένες του καινούργιου τριγώνου δίνονται από τις σχέσεις:

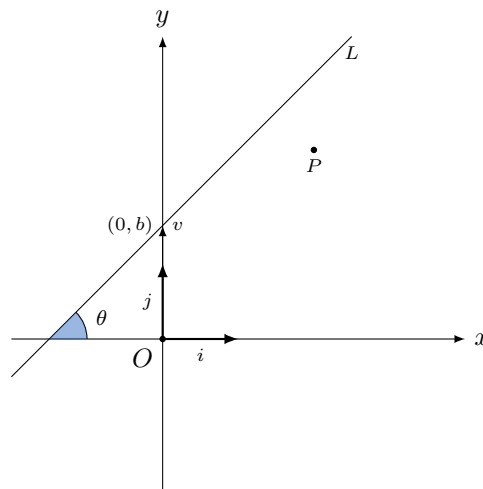
$$A' = (-5, -2), \quad B' = (-3, 0), \quad C' = (5, 2)$$

*Παράδειγμα.* Περιγράψτε το μετασχηματισμό  $M_L$ , που βρίσκεται το συμμετρικό ενός αντικειμένου ως προς μία ευθεία  $L$ , που τέμνει τον άξονα των  $y$  στο  $(0, b)$  και σχηματίζει με τον άξονα των  $x$  γωνία  $\theta$ .

*Λύση.* Εφαρμόζουμε γεωμετρικούς μετασχηματισμούς. Θα προσπαθήσουμε να ανάγουμε το ζητούμενο μετασχηματισμό σε σύνθεση βασικών μετασχηματισμών και ιδιαίτερα της βασικής συμμετρίας ως προς τους άξονες  $x$  και  $y$ . Εκτελούμε τα ακόλουθα βήματα:

Βήμα 1: Μεταφέρουμε το σημείο  $(0, b)$  στην αρχή των αξόνων. Η μεταφορά θα γίνει κατά διάνυσμα  $-v$ , όπου  $v = b\hat{i}, \hat{i}, \hat{j}$  τα μοναδιαία στους άξονες  $x$  και  $y$  αντίστοιχα.

Βασικός πίνακας μετασχηματισμού:  $T_{-v}$



Σχήμα 1.17: πίνακας μετασχηματισμού **what**

Βήμα 2: Στρέφουμε κατά γωνία  $-\theta$  ώστε η ευθεία  $L$  να ευθυγραμμιστεί με τον άξονα των  $x$ .

Βασικός πίνακας μετασχηματισμού:  $R_{-\theta}$

Βήμα 3: Παίρνουμε το συμμετρικό ως προς τον άξονα των  $x$ .

Βασικός πίνακας μετασχηματισμού:  $M_x$

Βήμα 4: Εκτελούμε στροφή κατά γωνία  $\theta$ .

Βασικός πίνακας μετασχηματισμού:  $R_\theta$

Βήμα 5: **Συμμετρικό** ως προς άξονα  $x$ .

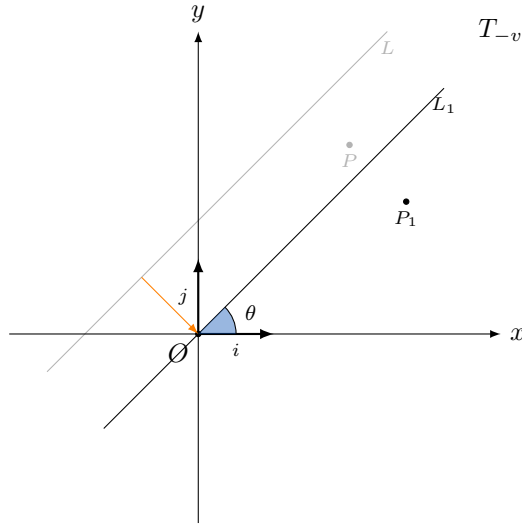
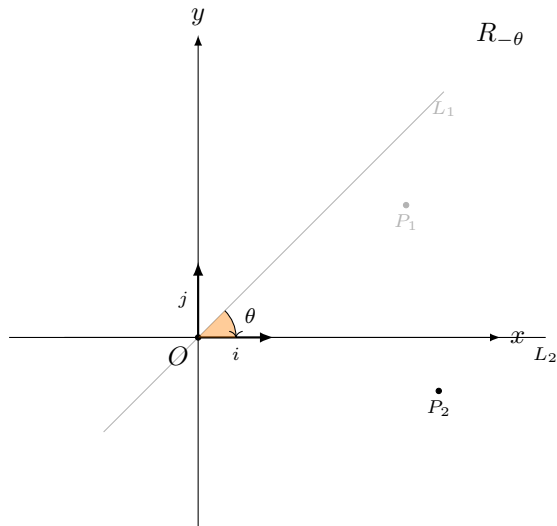
Βασικός πίνακας μετασχηματισμού:  $M_x$

Βήμα 6: Επαναφέρουμε το σημείο  $(O, b)$  στην αρχική του θέση. Η μεταφορά θα γίνει κατά διάνυσμα  $v$ .

Βασικός πίνακας μετασχηματισμού:  $T_v$

Ο ζητούμενος μετασχηματισμός θα προκύψει σαν σύνθεση των παραπάνω βασικών μετασχηματισμών.

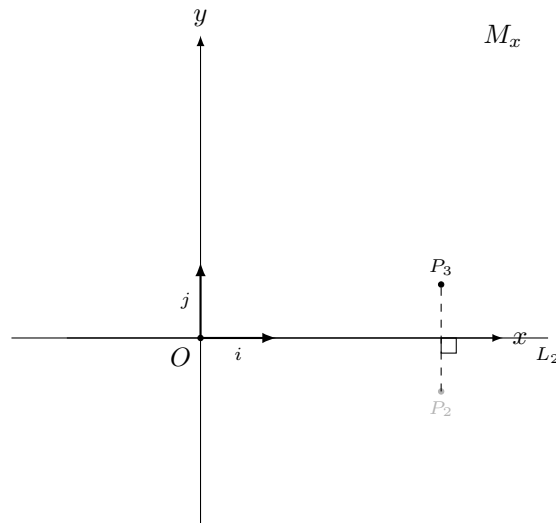
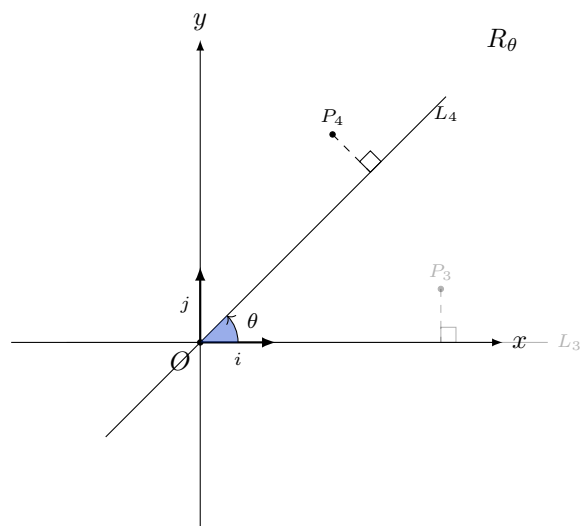
$$M_L = T_v \cdot R_\theta \cdot M_x \cdot R_{-\theta} \cdot T_{-v} \quad (1)$$

Σχήμα 1.18: πίνακας μετασχηματισμού **what**Σχήμα 1.19: πίνακας μετασχηματισμού **what**

Εάν τώρα υποθέσουμε ότι η κλίση της ευθείας  $L$  είναι  $m$ , δηλαδή  $\tan \theta = m$ , και κατά συνέπεια  $\sin \theta = \frac{m}{\sqrt{m^2 + 1}}$ ,  $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{m^2 + 1}}$ , η σχέση (1) γίνεται:

$$M_L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Με υπολογισμούς προκύπτει:

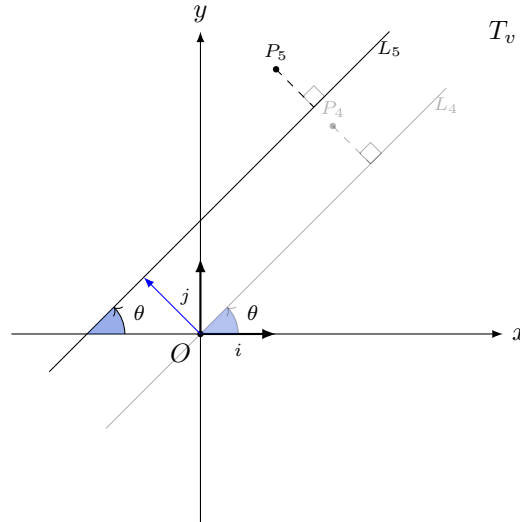
Σχήμα 1.20: πίνακας μετασχηματισμού **what**Σχήμα 1.21: πίνακας μετασχηματισμού **what**

$$M_L = \begin{bmatrix} \frac{1-m^2}{m^2+1} & \frac{2m}{m^2+1} & \frac{-2bm}{m^2+1} \\ \frac{2m}{m^2+1} & \frac{m^2-1}{m^2+1} & \frac{2b}{m^2+1} \\ \frac{m^2+1}{0} & \frac{m^2+1}{0} & \frac{m^2+1}{1} \end{bmatrix}$$

*Παράδειγμα.* Βρείτε το συμμετρικό του πολυγώνου  $V$  με κορυφές  $A(-1, 0)$ ,  $B(0, -2)$ ,  $C(1, 0)$  και  $D(0, 2)$  ως προς:

α) οριζόντια ευθεία  $y = 2$

β) κατακόρυφη ευθεία  $x = 2$

Σχήμα 1.22: πίνακας μετασχηματισμού **what**

γ) ευθεία  $y = x + 2$

Λύση. Το πολύγωνο παρουσιάζεται υπό μορφή πίνακα ως εξής:

$$V = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τον πίνακα  $M_L$  όπως έχει ορισθεί στο Παράδειγμα 5.

α) Η ευθεία  $y = 2$  έχει σημείο τομής με τον άξονα των  $y$  το  $(0, 2)$  και σχηματίζει γωνία  $\theta = 0$  με τον  $x$ . Επομένως  $\theta = 0$ ,  $m = 0$  και  $v = 2\hat{j}$ . Αντικαθιστώντας αυτές τις τιμές στον πίνακα  $M_L$  προκύπτει:

$$M_L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Αυτός ο πίνακας αναστρέφει το πολύγωνο συμμετρικά ως προς  $y = 2$ . Οι συντεταγμένες του καινούργιου πολυγώνου προκύπτουν από τη σχέση:

$$V' = A'B'C'D' = M_L \cdot V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Τελικό  $A' = (-1, 4)$ ,  $B' = (0, 6)$ ,  $C' = (1, 4)$  και  $D' = (0, 2)$ .

β) Η ευθεία  $x = 2$  (Σχήμα ) είναι παράλληλη με τον άξονα των  $y$  άρα δεν έχει σημείο τομής. Επίσης, έχει άπειρη κλίση! Γι' αυτό αν  $v = 2\hat{i}$  θα πρέπει να εκτελεστεί ο ακόλουθος μετασχηματισμός:

Βήμα 1: Μεταφορά κατά διάνυσμα  $-v$ , ώστε η ευθεία  $x = 2$  να πάει πάνω στον άξονα  $y$ .

Βασικός πίνακας μετασχηματισμού:  $T_{-v}$

Βήμα 2: Συμμετρία ως προς  $y$ .

Βασικός πίνακας μετασχηματισμού:  $M_y$

Βήμα 3: Επαναφορά της ευθείας  $x = 2$  στην αρχική της θέση, δηλαδή μεταφορά κατά διάνυσμα  $v$ .

Βασικός πίνακας μετασχηματισμού:  $T_v$



Ο ζητούμενος μετασχηματισμός  $M$  προκύπτει σαν σύνθεση των παραπάνω, δηλαδή:

$$M = T_v \cdot M_y \cdot T_{-v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Οι συντεταγμένες του καινούργιου πολυγώνου δίνονται από:

$$V' = A'B'C'D' = MV = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Τελικό  $A' = (-1, 0)$ ,  $B' = (0, -2)$ ,  $C' = (1, 0)$  και  $D' = (0, -2)$ .

γ) Η ευθεία  $y = x + 2$  έχει κλίση  $m = 1$  και σημείο τομής με τον άξονα των  $y$  το  $(0, 2)$ , επομένως  $b = 2$ . Ο πίνακας  $M_l$  του παραδείγματος 5 παίρνει την ακόλουθη τιμή:

$$M_l = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Οι συντεταγμένες του καινούργιου πολυγώνου δίνονται από:

$$V' = A'B'C'D' = M_l V = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Τελικό  $A' = (2, -1)$ ,  $B' = (2, 0)$ ,  $C' = (0, -2)$  και  $D' = (2, 0)$ .

Μια στρέβλωση (shearing) κατά μήκος του  $X$ -άξονα, του σημείου  $\bar{P}(x, y)$  με παράγοντα στρέβλωσης  $a$ , φέρνει το σημείο  $\bar{P}$  στο  $\bar{P}'(x', y')$  και ισχύει:

$$x' = x + ay, \quad y' = y.$$

Χρησιμοποιώντας πίνακες γράφουμε:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ή  $\bar{P}' = SH_x \cdot \bar{P}$  με:

$$SH_x = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Για την περίπτωση της στρέβλωσης κατά μήκος του  $Y$ -άξονα και με παράγοντα στρέβλωσης  $b$  ισχύει:

$$SH_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}$$

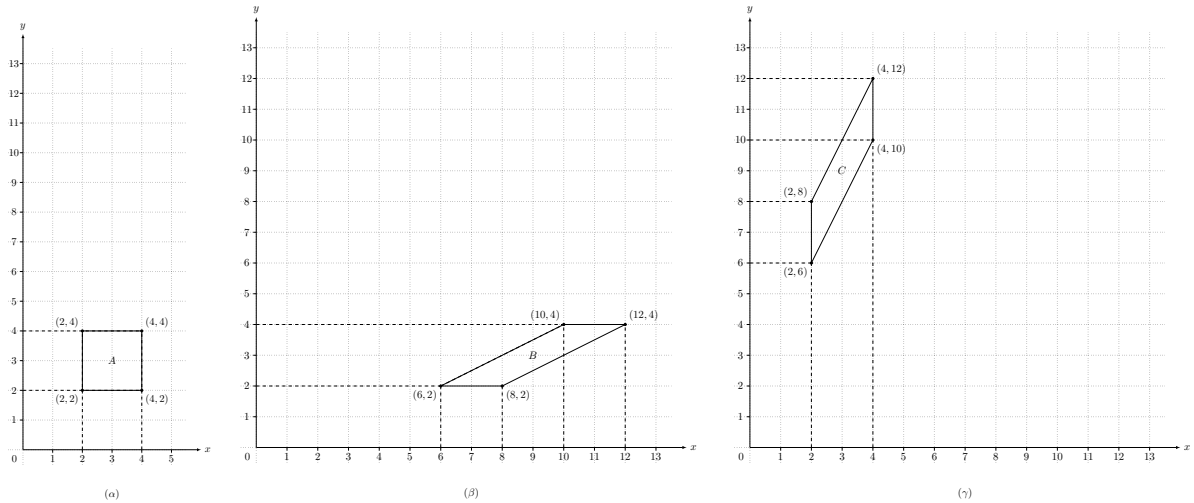
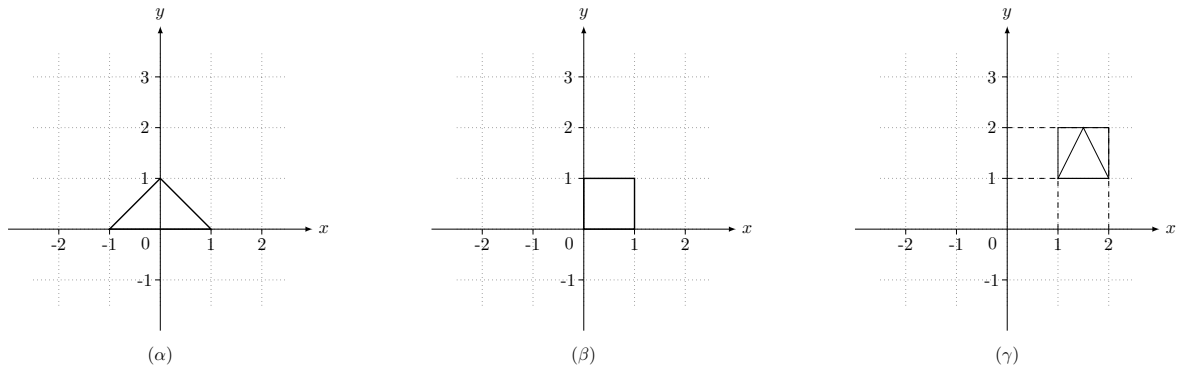
Στο σχήμα δείχνεται η στρέβλωση ενός τετραγώνου για τις δύο περιπτώσεις  $a = 2$  και  $b = 2$ .

## Ασκήσεις 2ου Κεφαλαίου

**Άσκηση 1.** Με ποια σύνθεση μετασχηματισμών μπορεί να φέρουμε την εικόνα (α), (β) στη θέση (γ).

*Λύση.* Πρώτα στην εικόνα (α) μπορούμε να δράσουμε ως εξής:

1. Σύμπτυξη στις  $x$ -συντεταγμένες με:  $s_x = \frac{1}{2}$ ,  $s_y = 1$  (ως προς την αρχή των αξόνων).

Σχήμα 1.23: Στρέβλωση ενός τετραγώνου για  $a = 2$  και  $b = 2$ 

2. Μεταφορά κατά  $\vec{v} = (\frac{3}{2}, 1)$ .

Έτσι, παίρνουμε τον πίνακα μετασχηματισμού:

$$M_{(a)} = T_v \cdot S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Πράξεις:

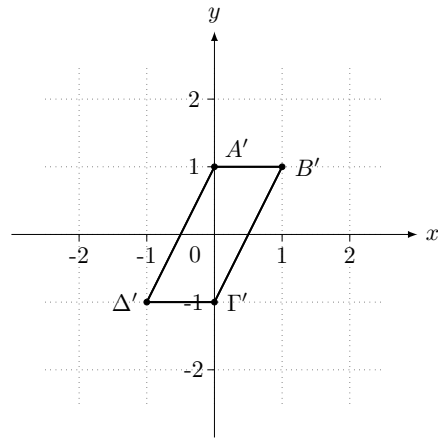
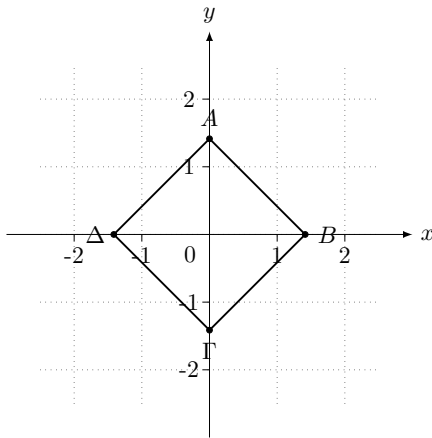
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Αν στην εικόνα (β) μεταφερθεί κατά  $\vec{v} = (1, 1)$ , θα πάρουμε το τετράγωνο της εικόνας (γ):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

**Άσκηση 2.** Ο πίνακας ορίζει ένα μετασχηματισμό που ονομάζεται Shearing. Για  $b = 0$ , έχουμε shearing στην κατεύθυνση  $x$  ενώ για  $a = 0$  έχουμε shearing στην κατεύθυνση  $y$ . Με τη βοήθεια αυτού, να βρεθεί ο

μετασχηματισμός  $M$  που μετατρέπει τον ρόμβο με κορυφές  $A(0, \sqrt{2})$ ,  $B(\sqrt{2}, 0)$ ,  $\Gamma(0, -\sqrt{2})$ ,  $\Delta(-\sqrt{2}, 0)$  στο παραλληλόγραμμο με κορυφές  $A'(0, 1)$ ,  $B'(1, 1)$ ,  $\Gamma'(0, -1)$ ,  $\Delta'(-1, -1)$  όπως φαίνεται παρακάτω.



Λύση. 1ος τρόπος:

1. Scaling κατά  $S_x = S_y = \frac{1}{\sqrt{2}}$  (Πολλαπλασιασμός με πίνακα  $S_{S_x, S_y}$ )
2. Shearing στο  $y$  με  $b = 1$  (Πολλαπλασιασμός με πίνακα  $Sh_y$ )

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Για να υπολογίσουμε πώς ο παραπάνω μετασχηματισμός επιδράσει στο σχήμα  $A(0, \sqrt{2})$ ,  $B(\sqrt{2}, 0)$ ,  $\Gamma(0, -\sqrt{2})$ ,  $\Delta(-\sqrt{2}, 0)$  θα πολλαπλασιάσουμε τον πίνακα των συντεταγμένων του σχήματος με τον πίνακα του μετασχηματισμού

$$M \cdot V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

2ος τρόπος:

1. Στροφή κατά γωνία  $45^\circ$  (Πολλαπλασιασμός με πίνακα  $R_{45^\circ}$ )
2. Scaling  $S_x = \frac{1}{2}$ ,  $S_y = 1$  (Πολλαπλασιασμός με πίνακα  $S_{S_x, S_y}$ )
3. Shearing  $S_{h_x}$ ,  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = 0$  (Πολλαπλασιασμός με πίνακα  $S_{h_x}$ )

Για να υπολογίσουμε πώς ο παραπάνω μετασχηματισμός επιδράσει στο σχήμα  $A(0, \sqrt{2})$ ,  $B(\sqrt{2}, 0)$ ,  $\Gamma(0, -\sqrt{2})$ ,  $\Delta(-\sqrt{2}, 0)$  θα πολλαπλασιάσουμε τον πίνακα των συντεταγμένων του σχήματος με τον πίνακα του μετασχηματισμού, δηλαδή με τον πίνακα:

$$M = S_{h_x} \cdot S_{S_x, S_y} \cdot R_\theta = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

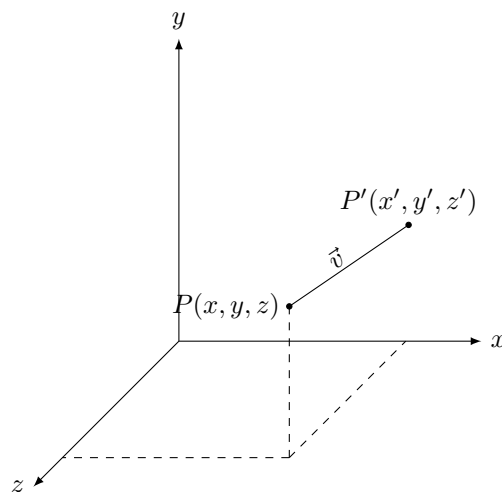


## Κεφάλαιο 2

# Πίνακες μετασχηματισμών στο χώρο τριών διαστάσεων

### 2.1 Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί

#### 2.1.1 Μεταφορά



Σχήμα 2.1: Μεταφορά σημείου σε τρισδιάστατες συντεταγμένες

Έστω  $V = (t_x, t_y, t_z)$  τότε  $P' = T_v(P)$  με  $x' = x + t_x$ ,  $y' = y + t_y$ ,  $z' = z + t_z$ . Το σημείο  $(x, y, z)$  σε ομογενείς συντεταγμένες γράφεται:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας μετασχηματισμού της μεταφοράς θα είναι:

$$T_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 5.1.2 Μετασχηματισμός κλίμακας

$P' = S_{S_x, S_y, S_z}(P)$  με  $x' = s_x x$ ,  $y' = s_y y$  και  $z' = s_z z$

Ο πίνακας μετασχηματισμού είναι:

$$S_{S_x, S_y, S_z} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_{S_x, S_y, S_z} = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 2.2 Στροφή

Στον χώρο τριών διαστάσεων για τη στροφή ενός αντικειμένου απαιτούνται δύο παράμετροι:

- α) η γωνία στροφής  $\theta$  και
- β) ο άξονας περιστροφής του αντικειμένου.

Οι "κανονικές" στροφές ορίζονται στον χώρο σαν στροφές γύρω από τους θετικούς άξονες  $x$ ,  $y$  και  $z$ . Για την περίπτωση του θετικού άξονα  $z$  έχουμε εάν το σημείο είναι στο επίπεδο  $xOy$ :

$$\begin{array}{c} xOy \\ \hline z \\ 0 \\ P'(x', y', 0) \\ P(x, y, 0) \end{array}$$

Σχήμα 2.2: Σχήμα 5.2

Με βάση το κεφάλαιο 3 έχουμε:

- α) Στροφή γύρω από τον άξονα  $z$ .

$$P' = R_{\theta, z}(P)$$

με

$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta, \quad y' = x \sin \theta + y \cos \theta, \quad z' = z$$

ο αντίστοιχος μετασχηματισμός είναι:

$$R_{\theta, z} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- β) Στροφή γύρω από τον άξονα  $y$ .

$$P' = R_{\theta,y}(P)$$

με

$$x' = x \cos \theta + z \sin \theta, \quad y' = y, \quad z' = -x \sin \theta + z \cos \theta$$

και αντίστοιχο μετασχηματισμό:

$$R_{\theta,y} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{\theta,y} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 2.2.1 Στροφή γύρω από τον άξονα $x$

$$P' = R_{\theta,x}(P)$$

με

$$x' = x, \quad y' = y \cos \theta - z \sin \theta, \quad z' = y \sin \theta + z \cos \theta$$

και:

$$R_{\theta,x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 2.3 Συμμετρία ως προς επίπεδο

Δίνουμε τους αντίστοιχους πίνακες μετασχηματισμών:

$$M_{x,y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{x,z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{y,z} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### Αντίστροφοι μετασχηματισμοί

Για τους αντίστροφους μετασχηματισμούς ισχύει:

$$T_V^{-1} = T_{-V}, \quad R_\theta^{-1} = R_{-\theta}, \quad S_{S_X, S_Y, S_Z}^{-1} = S_{\frac{1}{S_X}, \frac{1}{S_Y}, \frac{1}{S_Z}}$$

#### 2.3.1 Μετασχηματισμοί αξόνων συντεταγμένων

Σχήμα 2.3: Σχήμα 5.3

Στην περίπτωση της παράλληλης μεταφοράς των αξόνων συντεταγμένων κατά διάνυσμα  $v = (t_x, t_y, t_z)$  έχουμε για τις νέες συντεταγμένες  $(x', y', z')$  του σημείου  $P(x, y, z)$ :

$$x' = x - t_x, \quad y' = y - t_y, \quad z' = z - t_z$$

Άρα ο μετασχηματισμός  $T_V$  θα είναι ο αντίστοιχος του  $T_{-V}$  γεωμετρικού μετασχηματισμού.

Αντί των πινάκων συντεταγμένων θα δώσουμε εδώ συνοπτικά τις αντιστοιχίες μεταξύ μετασχηματισμών αξόνων συντεταγμένων και γεωμετρικών.

- Μεταφορά:  $T_V \leftarrow T_{-V}$
- Μετασχηματισμός κλίμακας:  $S_{S_X, S_Y, S_Z} \leftarrow S_{\frac{1}{S_X}, \frac{1}{S_Y}, \frac{1}{S_Z}}$
- Στροφή:  $R_\theta \leftarrow R_{-\theta}$   $R_{\theta, X} \leftarrow R_{-\theta, X}$   
 $R_{\theta, Y} \leftarrow R_{-\theta, Y}$   
 $R_{\theta, Z} \leftarrow R_{-\theta, Z}$

Για τους αντίστροφους τέλος μετασχηματισμούς αξόνων συντεταγμένων ισχύει:

$$T_V^{-1} = T_{-V}, \quad R_\theta^{-1} = R_{-\theta}, \quad S_{S_X, S_Y, S_Z}^{-1} = S_{\frac{1}{S_X}, \frac{1}{S_Y}, \frac{1}{S_Z}}$$

Επίσης εδώ πρέπει να αναφερθεί ότι όπως και στην περίπτωση των δύο συντεταγμένων έτσι και εδώ, πεπλεγμένοι μετασχηματισμοί αντιμετωπίζονται με τη διαδικασία της σύνθεσης συναρτήσεων η οποία εδώ ταυτίζεται με τον πολλαπλασιασμό πινάκων. Αναφέρουμε το παρακάτω παράδειγμα:

Να υπολογιστεί ο πίνακας μετασχηματισμού  $T$  για την περίπτωση στροφής γύρω από τον άξονα  $x$  κατά γωνία  $\theta_x$  και στη συνέχεια στροφή ως προς  $y$  κατά γωνία  $\theta_y$ .

$$T = R_{\theta_y, y} \cdot R_{\theta_x, x}$$

$$\begin{bmatrix} C_{(r+1)^2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_y & 0 & \sin \theta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta_y & 0 & \cos \theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & -\sin \theta_x & 0 \\ 0 & \sin \theta_x & \cos \theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_y & \sin \theta_y \sin \theta_x & \sin \theta_y \cos \theta_x & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & -\sin \theta_x & 0 \\ -\sin \theta_y & \cos \theta_y \sin \theta_x & \cos \theta_y \cos \theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 2.4 Παραδείγματα μετασχηματισμών στο χώρο

*Παράδειγμα.* Ορίζουμε ως "καμπή" την περιστροφή γύρω από τον άξονα  $x$  και στη συνέχεια γύρω από τον άξονα  $y$ .

- Βρείτε τον πίνακα καμπής  $T_k$ .



- Εξετάστε εάν παίζει ρόλο η σειρά με την οποία εκτελείται η περιστροφή.

*Λύση.* Τα ακόλουθα βήματα καθορίζουν τον ζητούμενο πίνακα.

- **Βήμα 1:** Στροφή κατά γωνία  $\theta_x$  ως προς τον άξονα  $x$ .

Βασικός πίνακας μετασχηματισμού:  $R_{\theta_x, x}$ .

- **Βήμα 2:** Στροφή κατά γωνία  $\theta_y$  ως προς τον άξονα  $y$ .

Βασικός πίνακας μετασχηματισμού:  $R_{\theta_y, y}$ .

Ο ζητούμενος πίνακας θα προκύψει σαν σύνθεση των παραπάνω βασικών μετασχηματισμών.

$$\begin{aligned}
 T_k &= R_{\theta_y, y} \cdot R_{\theta_x, x} = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_y & 0 & \sin \theta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta_y & 0 & \cos \theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & -\sin \theta_x & 0 \\ 0 & \sin \theta_x & \cos \theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_y & \sin \theta_y \sin \theta_x & \sin \theta_y \cos \theta_x & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & -\sin \theta_x & 0 \\ -\sin \theta_y & \cos \theta_y \sin \theta_x & \cos \theta_y \cos \theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

(β) Εάν εκτελεστούν οι παραπάνω μετασχηματισμοί με αντίθετη σειρά θα προκύψει ο ακόλουθος πίνακας:

$$\begin{aligned}
 T_k &= R_{\theta_x, x} \cdot R_{\theta_y, y} = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_y & 0 & \sin \theta_y & 0 \\ \sin \theta_x \sin \theta_y & \cos \theta_x & -\sin \theta_x \cos \theta_y & 0 \\ -\cos \theta_x \sin \theta_y & \sin \theta_x & \cos \theta_x \cos \theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι ο νέος πίνακας διαφέρει από αυτόν του ερωτήματος (α) επομένως παίζει σημαντικό ρόλο η σειρά με την οποία εκτελείται η περιστροφή.

*Παράδειγμα.* Προσδιορίστε το μετασχηματισμό  $A_n$  που ευθυγραμμίζει δοσμένο διάνυσμα  $V$  με το μοναδιαίο διάνυσμα  $k$  κατά μήκος του θετικού μέρους του άξονα των  $z$ .