ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Γραφικά με Η/Υ

Αθήνα 2023

Αντώνης Κομινάτος-Γεννατάς & Ιωάννης Τσαγκαρόπουλος

Επιβλέπουσα: Μ. Μητρούλη

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Πίνακες μετασχηματισμών στο χώρο τριών διαστάσεων

1.1 Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί

1.1.1 Μεταφορά

Σχήμα 1.1: Σχήμα 5.1

Έστω $V = (t_x, t_y, t_z)$ τότε $P' = T_v(P)$ με $x' = x + t_x$, $y' = y + t_y$, $z' = z + t_z$. Το σημείο (x, y, z) σε ομογενείς συντεταγμένες γράφεται:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας μετασχηματισμού της μεταφοράς θα είναι:

$$T_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5.1.2 Μετασχηματισμός κλίμακας

$P' = S_{S_x,S_y,S_z}(P)$ με $x' = s_x x$, $y' = s_y y$ και $z' = s_z z$
Ο πίνακας μετασχηματισμού είναι:

$$S_{S_x,S_y,S_z} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_{S_x,S_y,S_z} = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.2 Στροφή

Στον χώρο τριών διαστάσεων για τη στροφή ενός αντικειμένου απαιτούνται δύο παράμετροι:

- α) η γωνία στροφής θ και
- β) ο άξονας περιστροφής του αντικειμένου.

Οι "κανονικές" στροφές ορίζονται στον χώρο σαν στροφές γύρω από τους θετικούς άξονες x, y και z. Για την περίπτωση του θετικού άξονα z έχουμε εάν το σημείο είναι στο επίπεδο xOy:

xOy

z

0

$P'(x', y', 0)$

$P(x, y, 0)$

Σχήμα 1.2: Σχήμα 5.2

Με βάση το κεφάλαιο 3 έχουμε:

- α) Στροφή γύρω από τον άξονα z.

$$P' = R_{\theta,z}(P)$$

με

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta, \quad y' = x\sin\theta + y\cos\theta, \quad z' = z$$

ο αντίστοιχος μετασχηματισμός είναι:

$$R_{\theta,z} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- β) Στροφή γύρω από τον άξονα y.

$$P' = R_{\theta,y}(P)$$

με

$$x' = x\cos\theta + z\sin\theta, \quad y' = y, \quad z' = -x\sin\theta + z\cos\theta$$

και αντίστοιχο μετασχηματισμό:

$$R_{\theta,y} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{\theta,y} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.2.1 Στροφή γύρω από τον άξονα x

$$P' = R_{\theta,x}(P)$$

με

$$x' = x, \quad y' = y\cos\theta - z\sin\theta, \quad z' = y\sin\theta + z\cos\theta$$

και:

$$R_{\theta,x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.3 Συμμετρία ως προς επίπεδο

Δίνουμε τους αντίστοιχους πίνακες μετασχηματισμών:

$$M_{x,y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{x,z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{y,z} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Αντίστροφοι μετασχηματισμοί

Για τους αντίστροφους μετασχηματισμούς ισχύει:

$$T_V^{-1} = T_{-V}, \quad R_\theta^{-1} = R_{-\theta}, \quad S_{S_X,S_Y,S_Z}^{-1} = S_{\frac{1}{S_X},\frac{1}{S_Y},\frac{1}{S_Z}}$$

1.3.1 Μετασχηματισμοί αξόνων συντεταγμένων

Σχήμα 1.3: Σχήμα 5.3

Στην περίπτωση της παράλληλης μεταφοράς των αξόνων συντεταγμένων κατά διάνυσμα $v = (t_x, t_y, t_z)$ έχουμε για τις νέες συντεταγμένες (x', y', z') του σημείου $P(x, y, z)$:

$$x' = x - t_x, \quad y' = y - t_y, \quad z' = z - t_z$$

Άρα ο μετασχηματισμός T_V θα είναι ο αντίστοιχος του T_{-V} γεωμετρικού μετασχηματισμού.

Αντί των πινάκων συντεταγμένων θα δώσουμε εδώ συνοπτικά τις αντιστοιχίες μεταξύ μετασχηματισμών αξόνων συντεταγμένων και γεωμετρικών.

- Μεταφορά: $T_V \leftarrow T_{-V}$

- Μετασχηματισμός κλίμακας: $S_{S_X,S_Y,S_Z} \leftarrow S_{\frac{1}{S_X},\frac{1}{S_Y},\frac{1}{S_Z}}$
- Στροφή: $R_\theta \leftarrow R_{-\theta} \quad R_{\theta,X} \leftarrow R_{-\theta,X}$

  $R_{\theta,Y} \leftarrow R_{-\theta,Y}$

  $R_{\theta,Z} \leftarrow R_{-\theta,Z}$

Για τους αντίστροφους τέλος μετασχηματισμούς αξόνων συντεταγμένων ισχύει:

$$T_V^{-1} = T_{-V}, \quad R_\theta^{-1} = R_{-\theta}, \quad S^{-1}_{S_X,S_Y,S_Z} = S_{\frac{1}{S_X},\frac{1}{S_Y},\frac{1}{S_Z}}$$

Επίσης εδώ πρέπει να αναφερθεί ότι όπως και στην περίπτωση των δύο συντεταγμένων έτσι και εδώ, πεπλεγμένοι μετασχηματισμοί αντιμετωπίζονται με τη διαδικασία της σύνθεσης συναρτήσεων η οποία εδώ ταυτίζεται με τον πολλαπλασιασμό πινάκων. Αναφέρουμε το παρακάτω παράδειγμα:

Να υπολογιστεί ο πίνακας μετασχηματισμού T για την περίπτωση στροφής γύρω από τον άξονα x κατά γωνία θ_x και στη συνέχεια στροφή ως προς y κατά γωνία θ_y.

$$T = R_{\theta_y,y} \cdot R_{\theta_x,x}$$

$$\begin{bmatrix} C_{(r+1)^2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x & 0 \\ 0 & \sin\theta_x & \cos\theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_y & \sin\theta_y\sin\theta_x & \sin\theta_y\cos\theta_x & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x & 0 \\ -\sin\theta_y & \cos\theta_y\sin\theta_x & \cos\theta_y\cos\theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.4 Παραδείγματα μετασχηματισμών στο χώρο

Παράδειγμα. Ορίζουμε ως "καμπή" την περιστροφή γύρω από τον άξονα x και στη συνέχεια γύρω από τον άξονα y.

- Βρείτε τον πίνακα καμπής T_k.
- Εξετάστε εάν παίζει ρόλο η σειρά με την οποία εκτελείται η περιστροφή.

Λύση. Τα ακόλουθα βήματα καθορίζουν τον ζητούμενο πίνακα.

- **Βήμα 1:** Στροφή κατά γωνία θ_x ως προς τον άξονα x.

  Βασικός πίνακας μετασχηματισμού: $R_{\theta_x,x}$.

- **Βήμα 2:** Στροφή κατά γωνία θ_y ως προς τον άξονα y.

  Βασικός πίνακας μετασχηματισμού: $R_{\theta_y,y}$.

  Ο ζητούμενος πίνακας θα προκύψει σαν σύνθεση των παραπάνω βασικών μετασχηματισμών.

$$T_k = R_{\theta_y,y} \cdot R_{\theta_x,x} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x & 0 \\ 0 & \sin\theta_x & \cos\theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta_y & \sin\theta_y \sin\theta_x & \sin\theta_y \cos\theta_x & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x & 0 \\ -\sin\theta_y & \cos\theta_y \sin\theta_x & \cos\theta_y \cos\theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(β) Εάν εκτελεστούν οι παραπάνω μετασχηματισμοί με αντίθετη σειρά θα προκύψει ο ακόλουθος πίνακας:

$$T_k = R_{\theta_x,x} \cdot R_{\theta_y,y} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y & 0 \\ \sin\theta_x \sin\theta_y & \cos\theta_x & -\sin\theta_x \cos\theta_y & 0 \\ -\cos\theta_x \sin\theta_y & \sin\theta_x & \cos\theta_x \cos\theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι ο νέος πίνακας διαφέρει από αυτόν του ερωτήματος (α) επομένως παίζει σημαντικό ρόλο η σειρά με την οποία εκτελείται η περιστροφή.

Παράδειγμα. Προσδιορίστε το μετασχηματισμό A_n που ευθυγραμμίζει δοσμένο διάνυσμα V με το μοναδιαίο διάνυσμα k κατά μήκος του θετικού μέρους του άξονα των z.