ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Γραφικά με Η/Υ

Αθήνα 2025

Αντώνης Κομινάτος-Γεννατάς & Ιωάννης Τσαγκαρόπουλος

Επιβλέπουσα: Μ. Μητρούλη

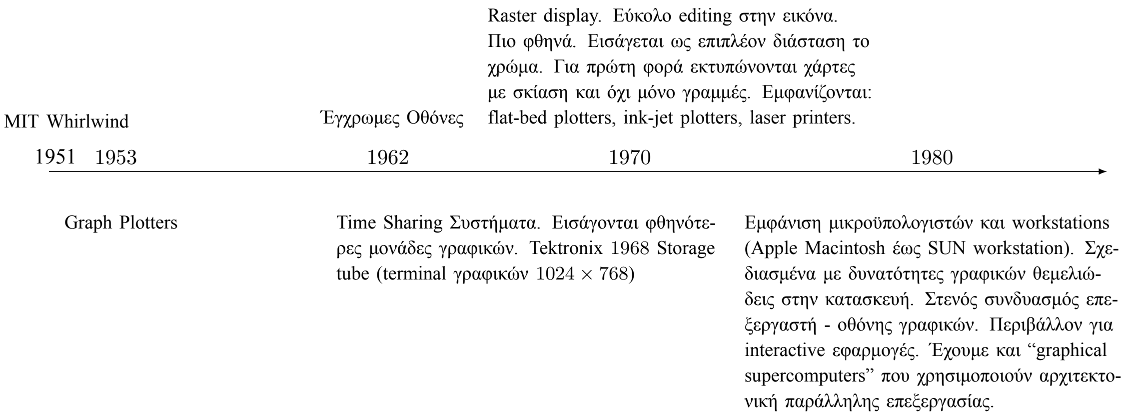
Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Ιστορική Αναδρομή

Τα γραφικά με υπολογιστές αποτελούσαν πάντα ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο για την παρουσίαση των αποτελεσμάτων των επιστημονικών υπολογισμών. Με τη σημερινή ανάπτυξη των υπολογιστών, τα γραφικά παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο όχι πλέον μόνο σε επιστημονικές εφαρμογές αλλά και σε εμπορικές, όπως για παράδειγμα στα παιχνίδια και στο σχεδιασμό σελίδων στο διαδίκτυο.

Η έννοια γραφικά με υπολογιστές (computer graphics), δηλαδή να χρησιμοποιήσουμε έναν υπολογιστή για να δημιουργήσουμε μία εικόνα, ξεκίνησε από τις πρώτες μέρες των υπολογιστών. Ο επόμενος πίνακας μας δείχνει την εξέλιξη στο υλικό (hardware) των υπολογιστών που απαιτείται για την ανάπτυξη γραφικών.



Λογισμικό (Software) Γραφικών

Έχει αναπτυχθεί πάρα πολύ τα τελευταία 30 χρόνια. Αρχικά οι δυνατότητες ήταν πολύ περιορισμένες. Οι περισσότεροι κατασκευαστές hardware έδιναν τη δυνατότητα στην ύπαρξη μιας μικρής βιβλιοθήκης γραφικών (περιείχε συνήθως υπορουτίνες FORTRAN). Πολλοί κατασκευαστές εφοδίαζαν τον υπολογιστή με κάποιο πακέτο γραφικών το οποίο ήταν εξηρτημένο από την εκάστοτε μηχανή και δεν εκτελείτο σε διαφορετικό υπολογιστή (device-dependent).

Προς το τέλος του 1960, αρχίζει να αναπτύσσεται λογισμικό γραφικών ανεξάρτητο από την εκάστοτε μηχανή (device-independent graphics software) και βιβλιοθήκες γραφικών (π.χ. GINO στην Μεγάλη Βρετανία). Το 1970 αποτελεί τη βάση για την ανάπτυξη βιβλιοθηκών γραφικών που δεν εξαρτώνται από την εκάστοτε μηχανή.

Σήμερα έχουμε ολοκληρωμένα πακέτα γραφικών π.χ. MATHCAD, CorelDRAW. Επίσης μέσα από μαθηματικά πακέτα υπολογισμού π.χ. MATLAB, MAPLE, MATHEMATICA μπορούν να δημιουργηθούν γραφικά.

1.0.1 Η έννοια του pixel

Ας εστιάσουμε τώρα στη βασική αρχή σχεδιασμού που χρησιμοποιείται στους υπολογιστές. Για την δημιουργία οποιασδήποτε εικόνας γραφικών είναι απαραίτητη η έννοια του pixel.

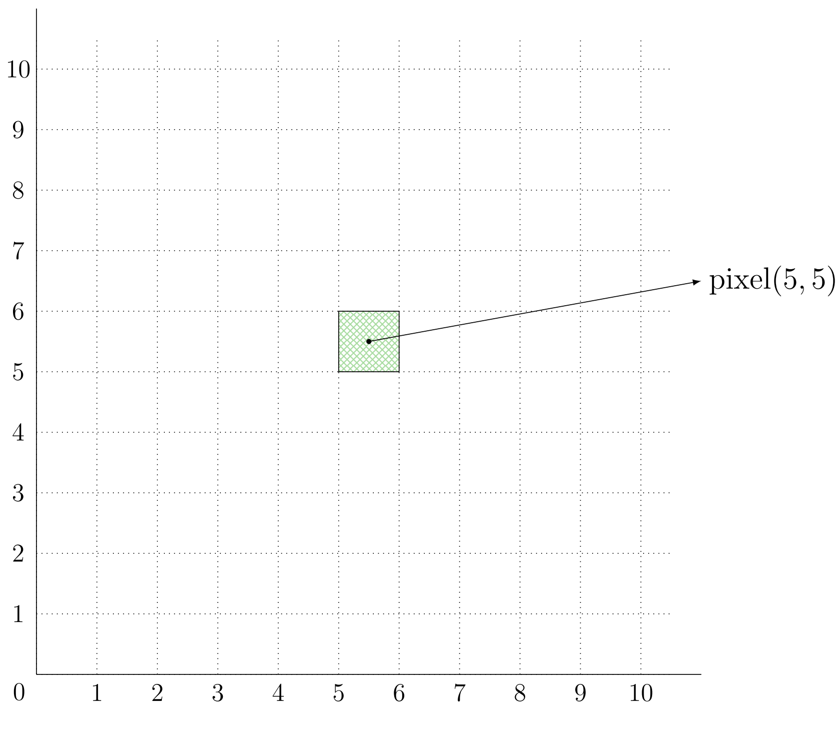
Ξεκινώντας από την αρχή ότι δεν μπορούμε να παραστήσουμε ένα άπειρο αριθμό σημείων σ' έναν υπολογιστή, περιοριζόμαστε πάντοτε σ' έναν πεπερασμένο αριθμό σημείων που θα απαρτίζει μία γραμμή (συνήθως όχι περισσότερα από μερικές εκατοντάδες ή χιλιάδες).

Ο μέγιστος αριθμός των διακεκριμένων σημείων που μπορεί να έχει μία γραμμή καθορίζει την ανάλυση (resolution) μιας μονάδας εξόδου (οθόνης). Όσο περισσότερα τα σημεία, τόσο υψηλότερη η ανάλυση της οθόνης. Αυτός ο περιορισμός δεν είναι τόσο καταστρεπτικός αφού το ανθρώπινο μάτι δε μπορεί να διακρίνει περισσότερα από 1000 σημεία σε κάθε ευθύγραμμο τμήμα.

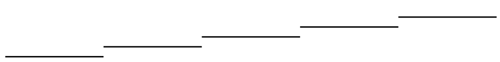
Επομένως αφού πρέπει να κατασκευάζουμε τις γραμμές από πεπερασμένο αριθμό σημείων κάθε σημείο έχει κάποιες διαστάσεις και έτσι δεν είναι απλώς και μόνο σημείο. Το pixel, η ονομασία του οποίου προκύπτει από το ``Picture Element", είναι το μικρότερο στοιχείο της οθόνης που καθορίζεται από κάποια διεύθυνση και το οποίο μπορούμε να ελέγχουμε. Κάθε pixel χαρακτηρίζεται από ένα όνομα ή μία διεύθυνση. Τα ονόματα που χαρακτηρίζουν pixels αντιστοιχούν σε συντεταγμένες που αναγνωρίζουν. Οι εικόνες των γραφικών δημιουργούνται ρυθμίζοντας την ένταση και το χρώμα των pixels που απαρτίζουν την οθόνη.

Σχεδιάζουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ρυθμίζοντας τη φωτεινότητα ενός συνόλου από pixels μεταξύ ενός αρχικού και ενός τελικού pixel. Έτσι θεωρούμε την οθόνη σαν ένα δίκτυο ή array από pixels. Δίνουμε ακέραιες συντεταγμένες σε κάθε pixel. Ξεκινώντας αριστερά από 1 αριθμούμε τις κολώνες. Αρχίζοντας από τη βάση με 1 αριθμούμε τις γραμμές. Η συντεταγμένη (i, j) προσδιορίζει τη γραμμή και τη στήλη ενός pixel. Κάθε pixel θα θεωρείται κεντραρισμένο ως προς τις συντεταγμένες του.

Ο αριθμός των pixels ανά εκατοστό (cm) που μπορούν να εκτυπωθούν οριζόντια και κάθετα αποτελεί την ανάλυση (resolution) της οθόνης. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι μια οθόνη με ανάλυση 1280×1024 θεωρείται πολύ ικανοποιητική. Σε συστήματα υψηλής ακρίβειας το resolution μπορεί να φτάσει και 4000



Ο φωτισμός διαδοχικών pixels σχηματίζει συγκεκριμένα σχήματα π.χ. ευθεία γραμμή. Τα pixels έχουν πάντα ακέραιες συντεταγμένες. Εάν δοθεί εντολή να φωτιστεί το pixel $(10.33, 20.72)$ θα γίνει στρογγύλευση και το pixel που θα φωτιστεί τελικά θα είναι $(10, 21)$. Αυτή η διαδικασία της στρογγύλευσης προξενεί τις γραμμές να εμφανίζονται σκαλωτά και ονομάζονται ``jaggies''. Το φαινόμενο αυτό είναι αισθητό σε συστήματα με χαμηλή ανάλυση.



Κεφάλαιο 2

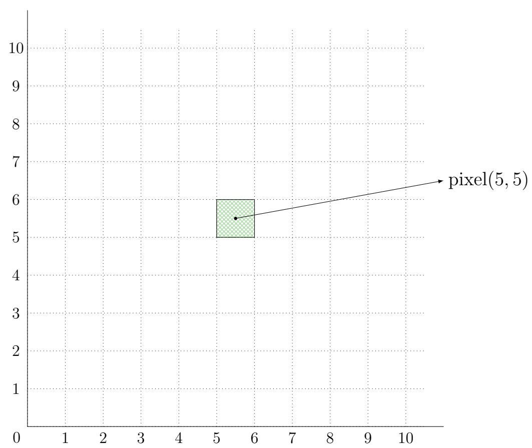
Σχεδιασμός Βασικών Σχημάτων

Σχεδιασμός βασικών σχημάτων Η συντριπτική πλειοψηφία των μεθόδων εξόδου που χρησιμοποιούμε στην εποχή μας, βασίζεται σε συσκευές που εφαρμόζουν μεθόδους Raster Scan. Με πιο απλά λόγια κάθε τι που θέλουμε να απεικονίσουμε το βλέπουμε σαν ένα είδος σύγχρονου ψηφιδωτού. Και τα αντικείμενα που θέλουμε να σχεδιάσουμε, είναι μια σύνθεση τέτοιων μικρών ψηφίδων, των pixel ή στα ελληνικά εικονοστοιχεία. Τα pixel είναι μικρά τετράγωνα (όταν αναφερόμαστε σε οθόνες) και το πλήθος τους καθορίζει την ανάλυση της εικόνας μας. Μια εικόνα που έχει ανάλυση $m \times n$ αποτελείται από m γραμμές και n στήλες από τέτοια τετράγωνα. Για αυτό είναι και πολύ εύκολο να φανταστούμε ένα τέτοιο τετράγωνο σαν το στοιχείο ενός πίνακα, και τελικά να φανταζόμαστε κάθε εικόνα σαν έναν πίνακα.

Ορισμός. Όταν αναφερόμαστε στη θέση ένος pixel με τις συντεταγμένες (x, y) θα εννοούμε ότι το κέντρο του τετραγώνου βρίσκεται σε αυτή τη θέση πάνω στο πλέγμα, που συνθέτει την οθόνη μας.

Παρατήρηση. Το pixel για τα γραφικά είναι ότι είναι το σημείο για τα μαθηματικά. Αν και πρακτικά έχει διαστάσεις, σε αντίθεση με το σημείο, θεωρούμε ότι είναι ισοδύναμα.

Με αυτόν τον τρόπο απεικόνισης, χρειαζόμαστε να σκεφτούμε τρόπους για να μπορέσουμε να σχεδιάσουμε ακόμα και απλά σχήματα, όπως ένα ευθύγραμμο τμήμα ή έναν κύκλο. Καθώς οι τρόποι που γνωρίζουμε από τα μαθηματικά δεν μπορούν να βρουν άμεση εφαρμογή. Οι αλγόριθμοι αυτοί θα πρέπει να επιλέγουν το καλύτερο δυνατό pixel έτσι ώστε το τελικό αποτέλεσμα να είναι όσο πιο κοντά στο σχήμα που θέλουμε. Αλλά ταυτόχρονα ο υπολογισμός των pixel να γίνεται γρήγορα και χωρίς να χρειάζονται πολλές πράξεις ώστε να έχουμε σφάλματα λόγω της αριθμητικής του υπολογιστή και να χρησιμοποιούν ακεραίους.



Σχήμα 2.1: Μια οθόνη ανάλυσης 10×10 και ο προσδιορισμός ενός pixel σε αυτή

2.1 Σχεδιασμός ευθείας

Για τον σχεδιασμό ευθυγράμμων τμημάτων υπάρχουν πολλοί αλγόριθμοι που θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε, αλλά πρέπει να επιλέξουμε κάποιον που δεν θα παρουσιάζει προβλήματα κατά την υλοποίησή του.

2.1.1 Αλγόριθμός Εξίσωσης Ευθείας

Για παράδειγμα θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την αλγεβρική εξίσωση της ευ θείας για να προσδιορίσουμε ποια σημεία της ευθείας θα αντιστοιχούν σε pixel της οθόνης που θα επιλέξουμε να φωτίσουμε.

Αν θέλουμε να σχεδιάσουμε το ευθύγραμμο τμήμα $\overline{P_1P_2}$, με $P_1 = (x_1, y_1)$ και $P_2 = (x_2, y_2)$, τότε θα ισχύει:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x + \frac{y_1x_2 - y_2x_1}{x_2 - x_1}$$

Θέτοντας, $S = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (κλίση) και $C = \frac{y_1x_2 - y_2x_1}{x_2 - x_1}$, προκύπτει ότι: $y = Sx + c$. Με βάση αυτή την εξίσωση, γράφουμ τον ακόλουθο αλγόριθμό:

Βήμα 1: Διάβασε $P_1 = (x_1, y_1)$ και $P_2 = (x_2, y_2)$.

Βήμα 2: Υπολόγισε $S = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (κλίση) και $C = \frac{y_1x_2 - y_2x_1}{x_2 - x_1}$.

Βήμα 3: Για x από x_1 έως x_2 με βήμα 1, υπολόγισε το $y = round(Sx + C)$ και φώτισε το pixel (x, y).

Πρόγραμμα 2.1: Plot Line Algorithm

```
function (x1, y1, x2, y2)
    if x1 == x2
        x = x1
        for y= y1:y2
            plot(x,y)
        end
        return
    end

    # Compute the slope
    s = (y2-y1)/(x2-x1)

    c = (y1x2-y2x1)/ (x2-x1)
    for x= x1:x2
        y = round(sx +c)
        plot(x,y)
    end
end
```

Παρατηρούμε ότι ο αλγόριθμος έχει μικρή απαιτεί 1 flop για κάθε σημείο που θα εμφανιστεί στην οθόνη συντεταγμένη. Τα σημεία αυτά θα είναι όσα η διαφορά των τετμημένων των 2 σημείων μεταξύ των οποίων θέλουμε να σχηματίσουμε την ευθεία.

Εφαρμογή (Εφαρμογή του αλγορίθμου plot-line). Να εφαρμοστεί ο αλγόριθμος plot-line για τα ζεύγη σημείων:

i) $P_1 = (1, 1), P_2 = (3, 2)$

ii) $P_1 = (1, 1), P_2 = (4, 13)$

iii) $P_1 = (0, 0), P_2 = (0, 10)$

Λύση. i) $P_1 = (1,1), P_2 = (3,2)$

Βήμα 1 (Υπολογισμός s):

$$s = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-1}{3-1} = \frac{1}{2} = 0.5$$

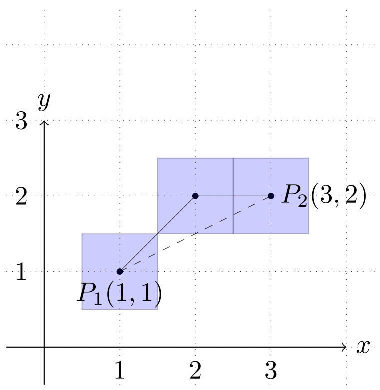
Βήμα 2 (Υπολογισμός c):

$$c = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 \cdot 3 - 2 \cdot 1}{3-1} = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$$

Βήμα 3 (Υπολογισμός και φωτισμός σημείων):

$$\begin{aligned} &\text{For } x = 1: \quad y = \text{round}(0.5 \cdot 1 + 0.5) = \text{round}(1) = 1 \\ &\text{For } x = 2: \quad y = \text{round}(0.5 \cdot 2 + 0.5) = \text{round}(1.5) = 2 \\ &\text{For } x = 3: \quad y = \text{round}(0.5 \cdot 3 + 0.5) = \text{round}(2) = 2 \end{aligned}$$

Άρα συνολικά θα φωτιστούν τα σημεία: $(1,1), (2,2), (3,2)$.



Σχήμα 2.2: Φωτισμένα σημεία έπειτα από εφαρμογή αλγορίθμου Plot Line για τα σημεία $P_1 = (1,1), P_2 = (3,2)$

ii) $P_1 = (1,1), P_2 = (4,13)$

Βήμα 1 (Υπολογισμός s):

$$s = \frac{13-1}{4-1} = \frac{12}{3} = 4$$

Βήμα 2 (Υπολογισμός c):

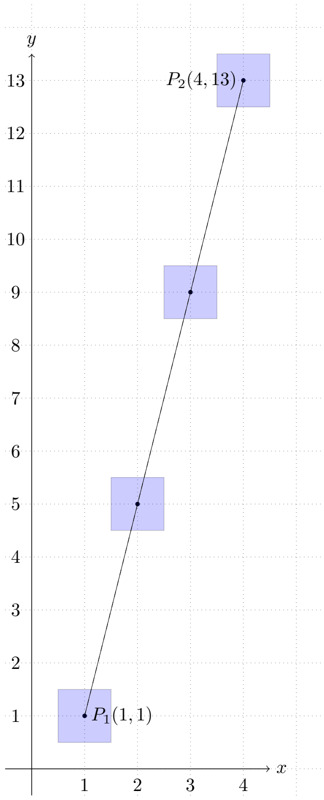
$$c = \frac{1 \cdot 4 - 13 \cdot 1}{4-1} = \frac{4-13}{3} = \frac{-9}{3} = -3$$

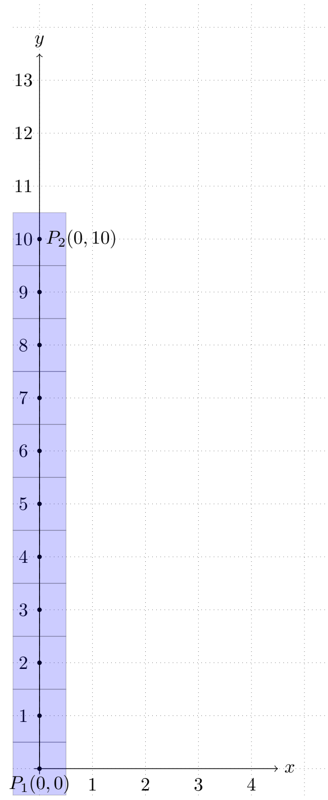
Βήμα 3 (Υπολογισμός και φωτισμός σημείων):

$$\begin{aligned} &\text{For } x = 1: \quad y = \text{round}(4 \cdot 1 - 3) = \text{round}(1) = 1 \\ &\text{For } x = 2: \quad y = \text{round}(4 \cdot 2 - 3) = \text{round}(5) = 5 \\ &\text{For } x = 3: \quad y = \text{round}(4 \cdot 3 - 3) = \text{round}(9) = 9 \\ &\text{For } x = 4: \quad y = \text{round}(4 \cdot 4 - 3) = \text{round}(13) = 13 \end{aligned}$$

Άρα συνολικά θα φωτιστούν τα σημεία: $(1,1), (2,5), (3,9), (4,13)$.

iii) $P_1 = (0,0), P_2 = (0,10)$
Εφόσον τα σημεία P_1, P_2 έχουν την ίδια τετμημένη, τότε θα σχεδιάσουμε την κάθετη γραμμή που τα ενώνει. Άρα συνολικά θα φωτιστούν τα σημεία: $(0,0), (0,1), (0,2), \ldots, (0,10)$.





Σχήμα 2.3: Φωτισμένα σημεία έπειτα από εφαρμογή αλγορίθμου Plot Line για τα σημεία $P_1 = (1,1), P_2 = (3,2)$

2.1.2 Μειονεκτήματα Αλγορίθμου εξίσωσης ευθείας

Αν χρησιμοποιήσουμε αυτόν τον αλγόριθμο θα παρατηρήσουμε ότι για ζεύγη σημείων το ευθύγραμμο τμήμα μας θα παρουσιάζει κενά και δεν θα είναι συνεχές.

Συγκεκριμένα, αν η κλίση είναι μεγαλύτερη του 1, τότε ο αλγόριθμος δε φωτίζει συνεχόμενα pixel. Αυτό το πρόβλημα, μπορεί να διορθωθεί, εκφράζοντας το x σα συνάρτηση του y.

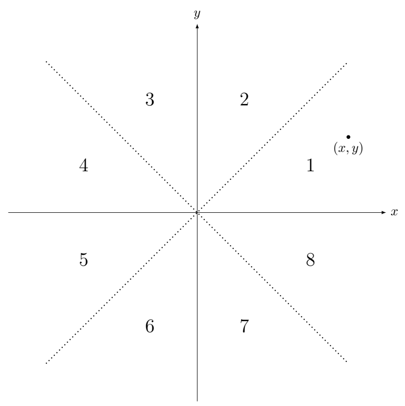
$$x = f(y) = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} y + \frac{y_2 x_1 - y_1 x_2}{y_2 - y_1}$$

Επίσης κατά τον υπολογισμό των τιμών πραγματοποιούμε πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις που αυξάνουν την πολυπλοκότητα και εισάγουν και αριθμητικά σφάλματα στα δεδομένα μας. Κάθε σημείο απαιτεί για τον υπολογισμό του `1 flop + 1 rounding`, άρα η πολυπλοκότητα του αλγόριθμου είναι αυξημένη.

Για αυτούς τους λόγους η χρήση της αλγεβρικής εξίσωσης της ευθείας σε υπολογιστή δεν είναι βέλτιστη. Ευτυχώς έχουν ήδη αναπτυχθεί άλλοι τρόποι που θα μας βοηθήσουν να υπολογίσουμε ποια πιξελ θα πρέπει να φωτίσουμε στην οθόνη για να σχηματιστεί το ζητούμενο ευθύγραμμο τμήμα. Ένα τέτοιος είναι ο αλγόριθμος ευθυγράμμων τμημάτων του Bresenham.

2.1.3 Αλγόριθμος Bresenham για ευθύγραμμο τμήμα

Το 1965 ο J.E. Bresenham παρουσίασε την πρώτη DDA μέθοδο (Digital Differential Analyzer) για το σχεδιασμό ευθύγραμμου τμήματος. Εκεί παρουσίαζε τη μορφή που έχει ο αλγόριθμός του για ευθύγραμμα τμήματα που ανήκουν στο πρώτο οκταμόριο. Δηλαδή που η γωνία που σχηματίζουν με τον οριζόντιο άξονα είναι από 0 εώς $45°$. Καθώς και τις μετατροπές που χρειάζονται να γίνουν για να μπορούμε να σχεδιάσουμε ευθύγραμμα τμήματα κάθε κλίσης.

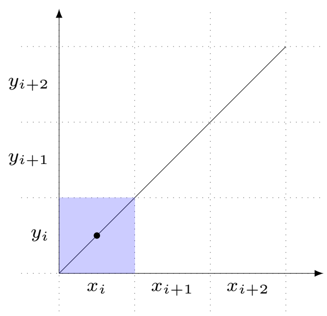


Σχήμα 2.4: Τα οκταμόρια του επιπέδου

Προσδιορίζουμε το σχεδιασμό της ευθείας στο 1ο οκταμόριο και στη συνέχεια με κατάλληλη τροποποίηση, που θα την περιγράψουμε παρακάτω, μπορούμε να επεκταθούμε και στα άλλα οκταμόρια.

Έστω ότι θέλουμε να σχεδιάσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα $\overline{P_1P_2}$, για pixels τα οποία ανήκουν στο 1ο οκταμόριο, έστω $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2)$.

Έστω ότι έχει φωτισθεί στην οθόνη το pixel $P_i(x_i, y_i)$.



Σχήμα 2.5: Σχεδιασμός ευθύγραμμου τμήματος μεταξύ των pixel στο 1ο οκταμόριο

Δεδομένου ότι ο σχεδιασμός του ευθυγράμμου τμήματος συνίσταται στον επιλεκτικό φωτισμό διαδοχικών pixels ώστε αυτά να σχηματίζουν ευθύγραμμο τμήμα, θεωρούμε ότι αφού βρισκόμαστε στο 1ο οκταμόριο εάν ήδη είναι φωτισμένο το pixel $P_i(x_i, y_i)$ τα επόμενα δυνατά προς φωτισμό pixels θα είναι τα $P_{i+1}(x_{i+1}, y_i)$ ή $P_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι οπωσδήποτε θα αυξηθεί κατά 1 η συντεταγμένη x και η συντεταγμένη y ή θα παραμείνει ίδια ή θα αυξηθεί κι αυτή κατά 1. Θα πρέπει, λοιπόν να καθορίσουμε μία μεταβλητή σφάλματος, η οποία ανάλογα να αποφαίνεται εάν θα αυξηθεί ή όχι η συντεταγμένη y.

2.1.4 Δημιουργία μεταβλητής σφάλματος ϵ_i

Η εξίσωση μεταξύ των σημείων (x_i, y_i) και (x_{i+1}, y) είναι

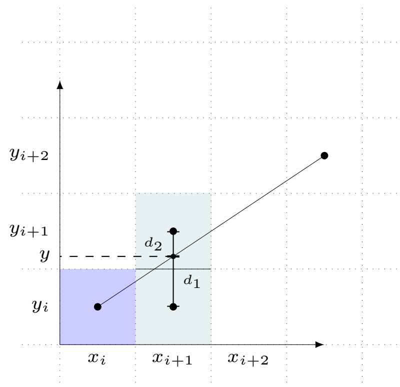
$$y = sx_{i+1} + c,$$

όπου,

$$s = \frac{y - y_i}{x_i + 1 - x_i} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 1, \text{η κλίση της ευθείας}$$
$$c = \frac{y_i x_{i+1} - y x_i}{x_{i+1} - x_i}$$

Υπολογίζουμε τις αποστάσεις d_1, d_2 και της διαφορά τους $d_1 - d_2$:

$$\begin{aligned} d_1 &= y - y_i = s(x_i + 1) + c - y_i \\ d_2 &= (y_i + 1) - y = y_i + 1 - s(x_i + 1) - c \\ d_1 - d_2 &= 2s(x_i + 1) - 2y_i + 2c - 1 \end{aligned}$$



Σχήμα 2.6

Παρατήρηση. Ανάλογα με το πρόσημο της διαφοράς $d_1 - d_2$ μπορούμε να επιλέξουμε το επόμενο προς φωτισμό pixel.

Εάν ονομάσουμε μεταβλητή σφάλματος, e_i, την ποσότητα $e_i = \Delta x(d_1 - d_2)$ τότε θα έχουμε :

e_i	Επόμενο προς φωτισμό pixel
< 0	$(x_i + 1, y_i)$
≥ 0	$(x_i + 1, y_i + 1)$

Πίνακας 2.1: Πίνακας με κριτήριο προσδορισμού επόμενο προς φωτισμό pixel.

2.1.5 Προσπάθεια δημιουργίας αναδρομικού τύπου

Σε κάθε βήμα σχεδιασμού της ευθείας θα είναι καλό να μπορούμε να υπολογίζουμε την καινούρια μεταβλητή σφάλματος συναρτήσει της προηγούμνενες, γι' αυτό προσπαθούμε να δημιουργήσουμε έναν αναγωγικό τύπο. Ισχύει ότι:

$$e_i = \Delta x(d_1 - d_2).$$

Καθώς,

$$\left.\begin{aligned} s &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ d_1 &= y - y_i = s(x_i+1) + c - y_i \\ d_2 &= (y_i+1) - y = y_i + 1 - s(x_i+1) - c \end{aligned}\right\} \Rightarrow e_i = \frac{\Delta y}{s}(2s(x_i+1) - 2y_i + 2c - 1)$$

Αφού όμως, $\frac{\Delta y}{s} = \Delta x$, συνολικά έχουμε ότι:

$$e_i = 2\Delta y(x_i+1) - 2\Delta x y_i + \Delta x(2c{-}1) = 2\Delta y x_i - 2\Delta x y_i + c', \quad c' = 2\Delta y + \Delta x(2c{-}1) \qquad (1)$$

Λόγω της (2.1), για το e_{i+1} θα ισχύει:

$$e_{i+1} = 2\Delta y x_{i+1} {-} 2\Delta x y_{i+1} + c'.$$

Τελικά,

$$\begin{aligned} e_{i+1} - e_i &= 2\Delta y x_{i+1} {-} 2\Delta x y_{i+1} + c' - 2\Delta y x_i + 2\Delta x y_i - c' = \\ &= 2\Delta y(x_{i+1} - x_i) - 2\Delta x(y_{i+1} - y_i) \end{aligned}$$

Για $i = 1$, $(x_1, y_1) \equiv (0, 0)$. Οπότε, αξιοποιώντας την (2.1), λαμβάνουμε:

- $c = \dfrac{y_i x_{i+1} - y x_i}{x_{i+1} - x_i} = \dfrac{y_1 \cdot (x_1+1) - y \cdot x_1}{x_1 + 1 - x_1} = 0 \cdot (0+1) - y \cdot 0 = 0$
- $e_1 = 2\Delta y \cdot 0 - 2\Delta x \cdot 0 + 2\Delta y + \Delta x(2c-1) = 2\Delta y + 2\Delta x \cdot c - \Delta x \overset{c=0}{\equiv} 2\Delta y - \Delta x$

Προκύπτει, λοιπόν, ότι:

e_1	Επόμενη μεταβλητή σφάλματος e_2
$< 0 \rightarrow (x_i+1, y_i)$	$e_1 + 2\Delta y$
$\geq 0 \rightarrow (x_i+1, y_i+1)$	$e_1 + 2\Delta y - 2\Delta x$

Πίνακας 2.2: Πίνακας με τις συνθήκες και τις μεταβλητές σφάλματος.

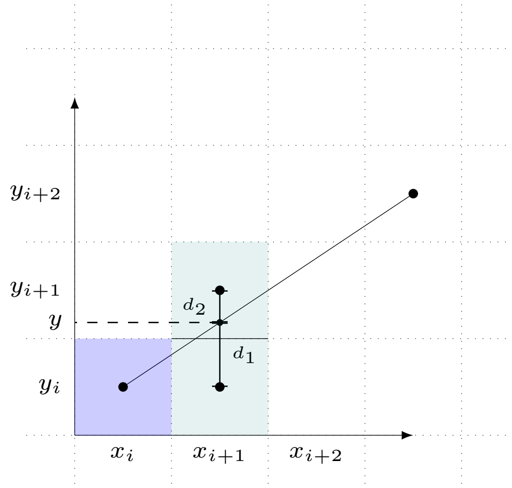
2.1.6 Υλοποίηση αλγορίθμου για 1ο Οκταμόριο

2.1.6.1 Συνάρτηση ``φωτισμού" pixel

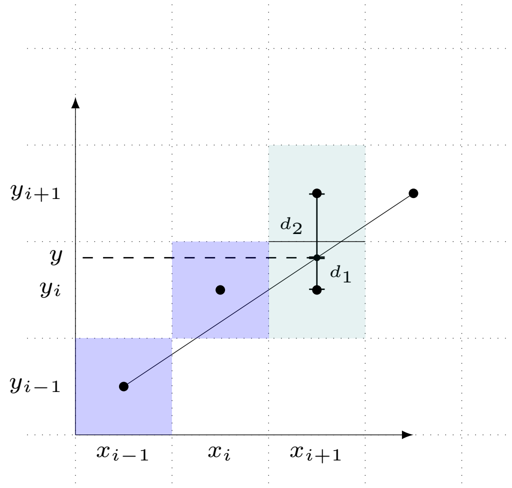
Η παρακάτω συνάρτηση, παίρνει σαν είσοδο τις συντεταγμένες ενός σημείου στο επίπεδο, $\mathbb{R}^2$ και εκτυπώνει γράφημα με χρωματισμένο τετράγωνο πλευράς 1 και κέντρο, το σημείο με τις συντεταγμένες της εισόδου:

Πρόγραμμα 2.2: Julia function to draw a rectangle

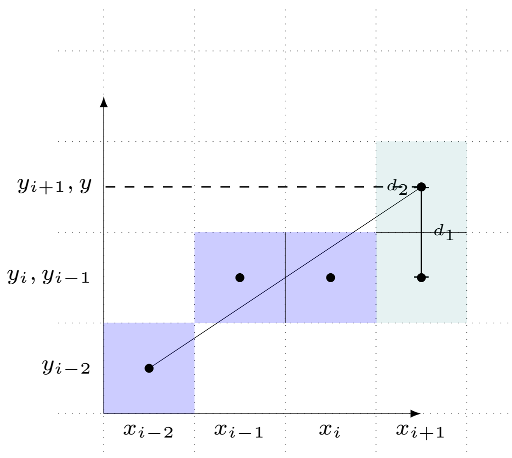
```
function draw_rectangle(x, y, color, test=true)
    # Define the coordinates of the rectangle vertices
    x_vertices = [x - 0.5, x + 0.5, x + 0.5, x - 0.5, x - 0.5]
    y_vertices = [y - 0.5, y - 0.5, y + 0.5, y + 0.5, y - 0.5]

    # Plot the rectangle
```



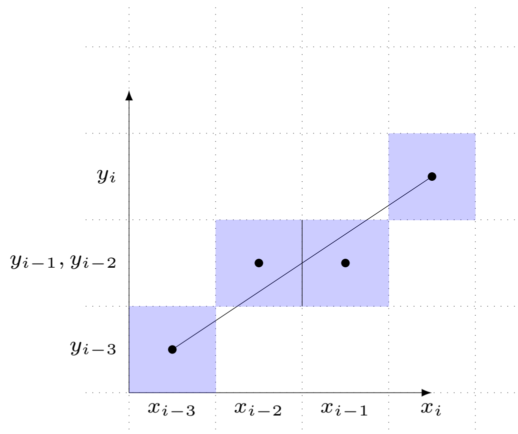
Σχήμα 2.7: Top-Left Image



Σχήμα 2.8: Top-Right Image



Σχήμα 2.9: Bottom-Left Image



Σχήμα 2.10: Bottom-Right Image

```
    if test
        plot(x_vertices, y_vertices, aspect_ratio=:equal,
             color=color, fill=true, legend=false, alpha=0.5)
        scatter!([x], [y], color=:red, aspect_ratio=:equal)
    else
        plot!(x_vertices, y_vertices, aspect_ratio=:equal,
              textwidth=2, color=color, fill=true, legend=false, alpha=0.7)
    end
end
```

Οπότε, αν ο χρήστης εισάγει τις συνταταγμένες 2 σήμειων, έστω $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$, τα οποία ανήκουν στο 1ο οκταμόριο, τότε καλώντας παραπάνω αλγόριθμο, λαμβάνουμε τα κέντρα των pixel που σχεδιάζουν την ευθεία Bresenham που ενώνει τα 2 σημεία.

Παράδειγμα 1.

Πρόγραμμα 2.3: Bresenham Line Algorithm for 1st Octant

```
function Bresenham_first_oct(x1, y1, x2, y2)
    dx = x2 - x1
    dy = y2 - y1
    x = x1
    y = y1
    c1 = 2 * dy
    e = 2 * dy - dx
    c2 = e - dx

    # Initialize L matrix with data points (x2-x1+1 points)
    L = zeros(Int, 2, dx + 1)

    L[1, 1] = x #x coordinates in 1st row
    L[2, 1] = y #2 coordinates in 2nd row

    while x <= x2
        L[1, x - x1 + 1] = x
        L[2, x - x1 + 1] = y

        x += 1
        if e < 0
            e += c1
        else
            y += 1
            e += c2
        end
    end
    return [L[1,:], L[2,:]]
end
```

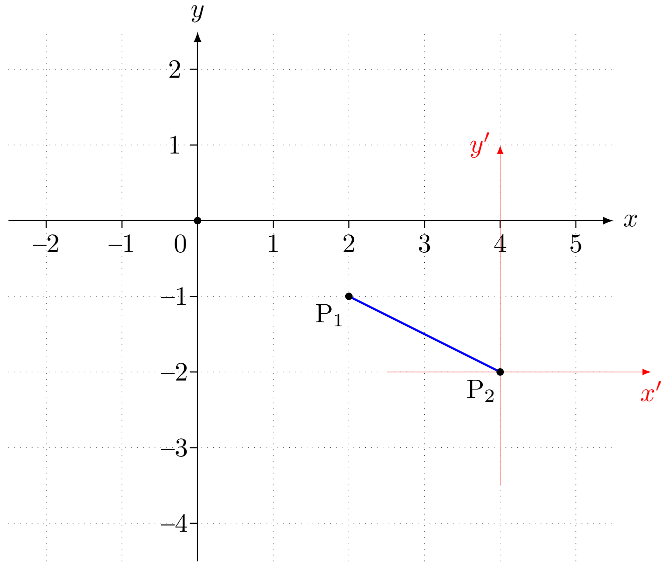
2.1.7 Σκιαγράφηση μεθόδου για σημεία εκτός 1ου οκταμορίου

Αρκεί να εξετάσουμε τη συμπεριφορά της μεθόδου για τα οκταμόρια $1, 2, 3, 4$ (γιατί;)

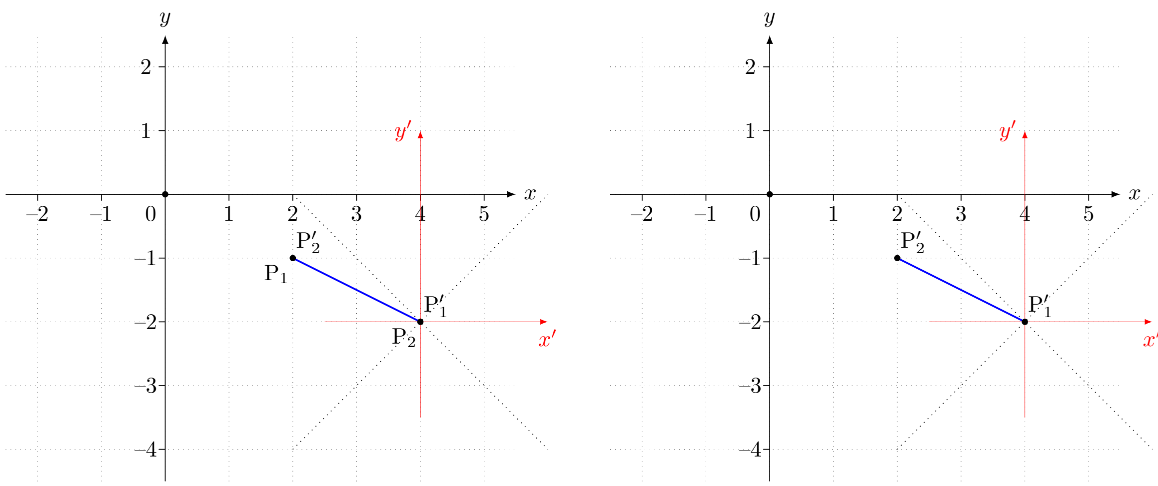
Στην αρχική ιδέα του Bresenham παίζει σημαντικό ρόλο η σειρά που θα δώσουμε τα σημεία P_1 και P_2, Δηλαδή ποιο είναι η αρχή και ποιο το τέλος του τμήματος. Έτσι προκύπτουν 8 διαφορετικές περιπτώσεις. Αν, όμως, απλά θέλουμε να σχεδιάσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα, δεν μας ενδιαφέρει από ποια μεριά θα ξεκινήσουμε τον σχεδιασμό του. Συμφωνούμε να επιλέγουμε πάντα σαν αρχή το σημείο για την τετμημένη του οποίου ισχύει $y = min(y_1, y_2)$. Τότε, αντί για 8 περιπτώσεις, έχουμε μόνο 4, αφού τα οκταμόρια $5, 6, 7, 8$ ανάγονται σε $1, 2, 3, 4$ αντίστοιχα.

Παράδειγμα 2 (Αναγωγή από 8ο οκταμόριο σε 4ο οκταμόριο)**.** Έστω τα σημεία $P_1(2, -1), P_2(4, -3)$, τα οποία όπως είναι φανερό, ανήκουν στο 8ο οκταμόριο.

Βήμα 1: Διαλέγω σαν αρχή το στοιχείο που έχει μικρότερη τεταγμένη, δηλαδή το P_2, και μετονομάζω: $P_1 \to P_2'$ και $P_2 \to P_1'$.

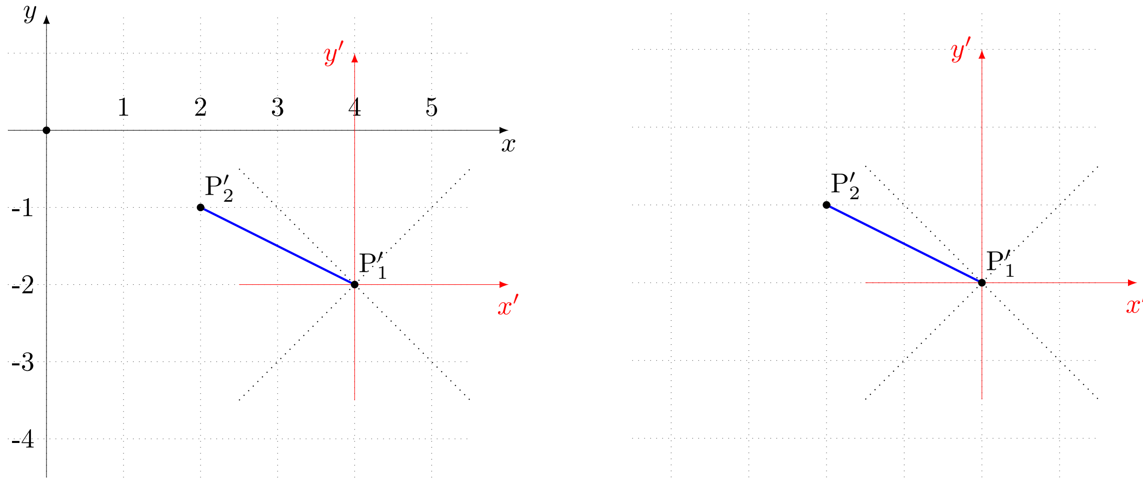


Σχήμα 2.11: Πρώτο βήμα αναγωγής 8ου τεταρτημορίου σε 4ο



Σχήμα 2.12: Επιλέγοντας αρχή των νέων αξόνων το σημείο με τη μικρότερη συντεταγμένη

Βήμα 2: Παρατηρώ, φέρνοντας νέους νοητούς ορθοκανονικούς άξονες με αρχή το P_1', ότι το ευθύγραμμό τμήμα που καλούμαι να σχεδιάσω σύμφωνα με τον αλγόριθμο του Bresenham ανήκει στο 4ο Οκταμόριο.

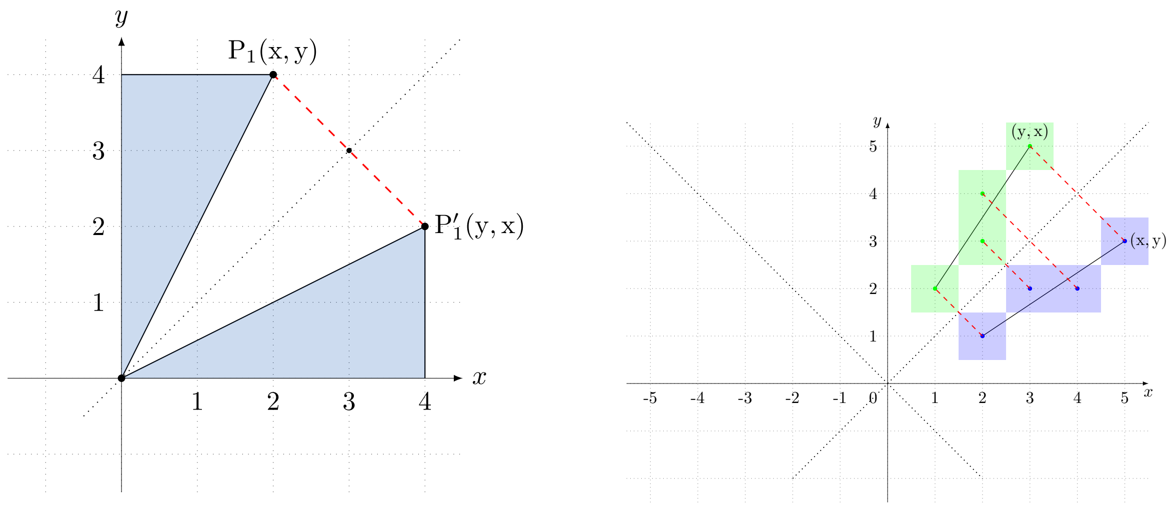


Σχήμα 2.13: Επιλέγοντας αρχή των νέων αξόνων το σημείο με τη μικρότερη συντεταγμένη

2.1.8 Αλγόριθμος του Bresenham για σημεία στο 2ο οκταμόριο

Έστω $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$, τα οποία ανήκουν στο 2ο οκταμόριο. Ο σχεδιασμός της ευθείας του Bresenham στο 2ο οκταμόριο γίνεται αν χρησιμοποιήσουμε στον αλγόριθμο του Bresenham τα συμμετρικά τους ως προς την 1η διχοτόμο, δηλαδή τα σημεία $P_1' = (y_1, x_1)$ και $P_2' = (y_2, x_2)$. Τότε, εκμεταλλευόμενοι τη συμμετρία αυτή, αντί να φωτίζουμε το pixel (x, y) που θα μας επιστρέφει ο αλγόριθμος εμείς φωτίζουμε το (y, x).

Παρατήρηση. Ο φωτισμός των συμμετρικών ως προν την 1η διχοτόμο pixel που θα προκύψουν από τον αλγόριθμο του Bresenham μπορεί να γίνει μία και καλή όταν περατωθεί ο αλγόριθμος. Αυτό μπορεί να συμβεί καθώς ο αλγόριθμος που έχουμε διατυπώσει επιστρέφει τα σημεία που πρέπει να φωτιστούν για να σχηματιστεί η επιθυμητή ευθεία.



Σχήμα 2.14: Συμμετρία μεταξύ 1ου και 2ου οκταμορίου που εκμεταλλευόμαστε για σηματισμό ευθείας σύμφωνα με αλγόριθμο του bresenham

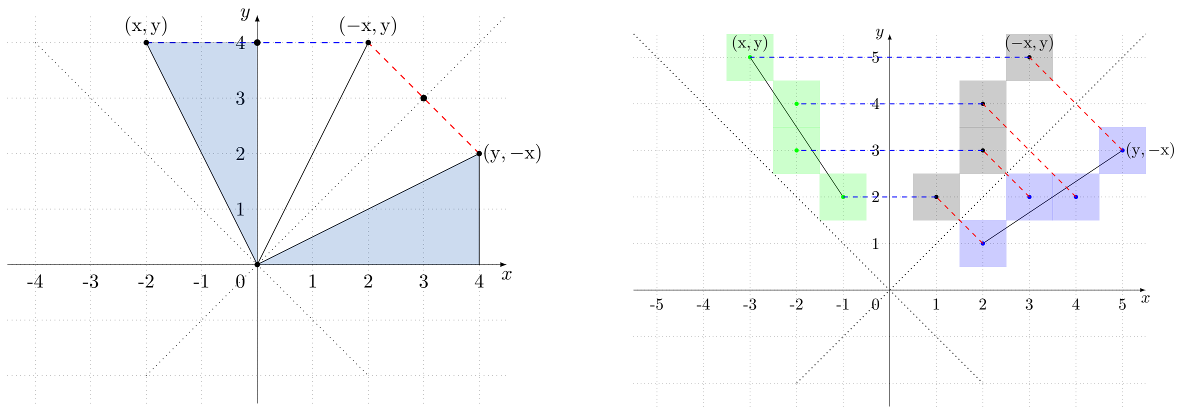
Πρόγραμμα 2.4: Bresenham Line Algorithm for 2nd Octant

```
function Bresenham_second_oct(x1, y1, x2, y2)
    xPoints1, yPoints1 = Bresenham_first_oct(y1, x1, y2, x2)
    for i in 1:xPoints1[end] - xPoints1[1]+1
        draw_rectangle(xPoints1[i], yPoints1[i], "blue", false)
```

```
        draw_rectangle(yPoints1[i], xPoints1[i], "green", false)
    end
endfunction
```

2.1.9 Αλγόριθμος του Bresenham για σημεία στο 3ο οκταμόριο

Έστω $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$, τα οποία ανήκουν στο 3ο οκταμόριο. Ο υπολογισμός των σημείων στο 3ο οκταμόριο γίνεται αν θεωρήσουμε ότι στη θέση των P_1 και P_2, εισάγουμε τα σημεία $P_1' = (y_1, -x_1)$ και $P_2' = (y_2, -x_2)$. Τότε, αντί να φωτίζουμε το pixel (x, y) που θα μας επιστρέφει ο αλγόριθμος εμείς φωτίζουμε το $(y, -x)$. Αυτό βέβαια, δεν είναι αναγκαίο να το κάνουμε σε κάθε βήμα του αλγορίθμου· μπορούμε να το κάνουμε μία και καλή, όταν περατωθεί ο αλγόριθμος.



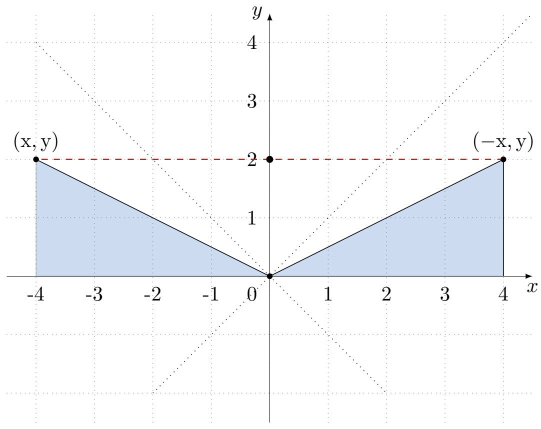
Σχήμα 2.15: Συμμετρία μεταξύ 1ου και 2ου οκταμορίου που εκμεταλλεύομαστε για σηματισμό ευθείας σύμφωνα με αλγόριθμο του bresenham

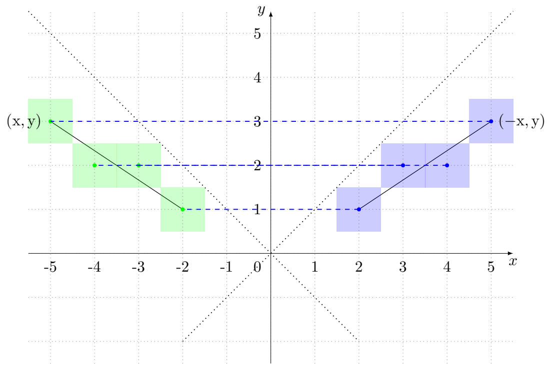
Πρόγραμμα 2.5: Bresenham Line Algorithm for 3rd Octant

```
function Bresenham_second_oct(x1, y1, x2, y2)
    #(y1, -x1) and (y2, -x2) are the symmetric of (x1, y1) and (x2, y2)
    respectively in the 1st octant

    xPoints1, yPoints1 = Bresenham_first_oct(y1, -x1, y2, -x2)
    for i in 1:xPoints1[end] - xPoints1[1]+1
        draw_rectangle(xPoints1[i], yPoints1[i], "blue", false)
        draw_rectangle(yPoints1[i], xPoints1[i], "gray", false)
        draw_rectangle(-yPoints1[i], xPoints1[i], "green", false)
    end
endfunction
```

2.1.10 Αλγόριθμος του Bresenham για σημεία στο 4ο οκταμόριο

Έστω $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$, τα οποία ανήκουν στο 4ο οκταμόριο. Ο υπολογισμός των σημείων στο 4ο οκταμόριο γίνεται αν θεωρήσουμε ότι στη θέση των P_1 και P_2, εισάγουμε τα σημεία $P_1' = (-x_1, y_1)$ και $P_2' = (-x_2, y_2)$ και αντί για να φωτίζουμε το pixel (x, y) που θα μας επιστρέφει ο αλγόριθμος εμείς φωτίζουμε το $(-x, y)$. Αυτό βέβαια, δεν είναι αναγκαίο να το κάνουμε σε κάθε βήμα του αλγορίθμου· μπορούμε να το κάνουμε μία και καλή, όταν περατωθεί ο αλγόριθμος.





Σχήμα 2.16: Συμμετρία μεταξύ 1ου και 2ου οκταμορίου που εκμεταλλεύομαστε για σηματισμό ευθείας σύμφωνα με αλγόριθμο του Bresenham

Πρόγραμμα 2.6: Bresenham Line Algorithm for 4th Octant

```
function Bresenham_second_oct(x1, y1, x2, y2)
    #(-x1, y1) and (-x2, y2) are the symmetric of (x1, y1) and (x2, y2)
   respectively in the 1st octant

    xPoints1, yPoints1 = Bresenham_first_oct(-x1, y1, -x2, y2)
    for i in 1:xPoints1[end] - xPoints1[1]+1
        draw_rectangle(xPoints1[i], yPoints1[i], "blue", false)
        draw_rectangle(-xPoints1[i], yPoints1[i], "green", false)
    end
endfunction
```

2.1.11 Γενικός Αλγόριθμος Bresenham

Αν συνδυάσουμε όλα τα παραπάνω τότε προκύπτει ο παρακάτω αλγόριθμος που σχεδιάζει ευθεία που ενώνει δύο σημεία που παρίστανται στο επίπεδο σύμφωνα με τη λογική του αλγορίθμου του Bresenham.

Πρόγραμμα 2.7: General Bresenham Line Algorithm

```
function Bresenham_line(x1, y1, x2, y2)
    # Select starting point with the smallest y coordinate
    if y2 < y1
        x1, x2 = x2, x1
        y1, y2 = y2, y1
    end
    # Find octants
    dx = x2 - x1
    dy = y2 - y1
    s = dy/dx
    if s <= 1 && s >= 0 # oct 1
        xPoints, yPoints = Bresenham_first_oct(x1, y1, x2, y2)
    elseif s > 1 # oct 2
        xPoints, yPoints = Bresenham_first_oct(y1, x1, y2, x2)

        xPoints, yPoints = yPoints, xPoints #from 1st octant, back to 2nd
   so i switch xPoints with yPoints

    elseif s < -1 # oct 3
        xPoints, yPoints = Bresenham_first_oct(y1, -x1, y2, -x2)
```

```
        #from 1st octant, back to 3rd:
            xPoints, yPoints = yPoints, xPoints #1. switch xPoints with
 yPoints to go to 2nd octant

            xPoints, yPoints = -xPoints, yPoints #2. mirror with respect to
  new xPoints to go from 2nd to third

    else # oct 4
        xPoints, yPoints = Bresenham_first_oct(-x1, y1, -x2, y2)

        xPoints, yPoints = -xPoints, yPoints #from 1st octant, back to 4rd
 so: mirror with respect to xPoints
    end

    # return [xPoints,yPoints]

    scatter(xPoints, yPoints, markersize=3, xlabel="x", ylabel="y", legend=
 false)
    # plot(xPoints, yPoints, xlabel="x", ylabel="y", legend=false, lc=:red)
     uncomment to add line

    for i in 1:size(xPoints,1)
        draw_rectangle(xPoints[i], yPoints[i], "blue", false)
    end

    plot!(title = "Bresenham line: ($x1,$y1) -> ($x2,$y2)", aspect_ratio=1)
    scatter!(xPoints, yPoints, markersize=3, xlabel="x", ylabel="y", legend
 =false)
    #savefig("giannis/outputs/line.png")
endfunction
```

2.2 Σχεδιασμός του Κύκλου

2.2.1 Σχεδιασμός Κύκλου μέσω της αλγεβρικής εξίσωσης

Έστω κύκλος με κέντρο $K(x_c, y_c)$ και ακτίνα r. Τότε η αλγεβρική του εξίσωση είναι:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2 \tag{2.1}$$

Λύνωντας την (2.1) ως προς y προκύπτει:

$$y = f(x) = y_c \pm \sqrt{r^2 - (x - x_c)^2}$$

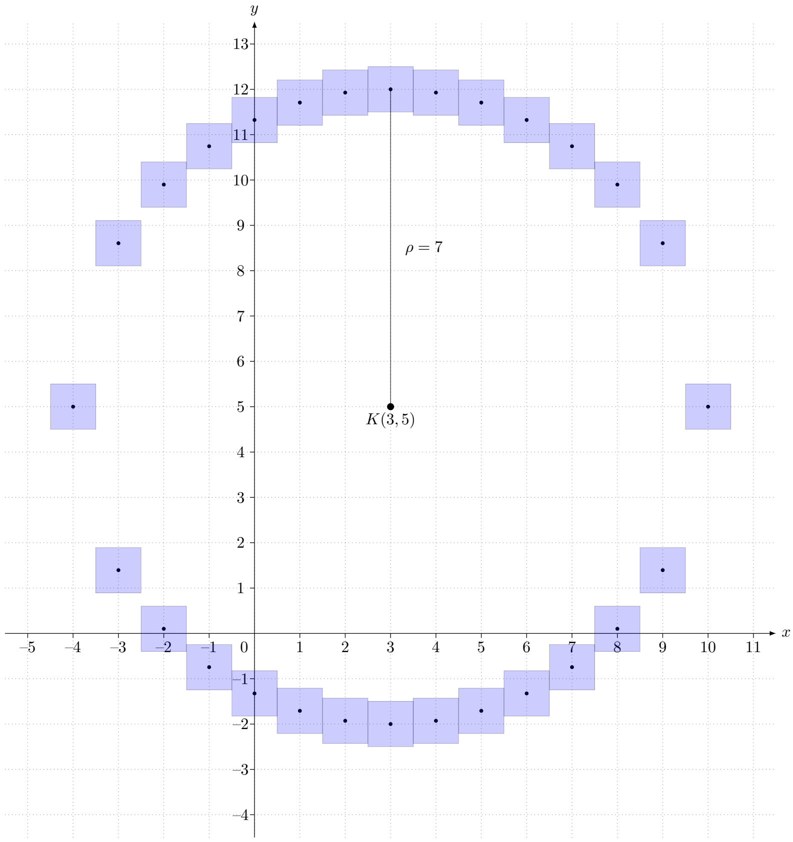
Είναι προφανές, ότι απαιτούνται πολλοί υπολογισμοί σε κάθε βήμα. Σαν να μην έφτανε αυτό, απαιτείται και υπολογισμός της τετραγωνικής ρίζας, που "βαραίνει" ακόμα περισσότερο τους υπολογισμούς μας.

Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, να μην είναι ομοιόμορφη η κατανομή των φωτιζόμενων pixelσ και ειδικά στο κομμμάτι μεταξύ $45°$ και $90°$.

Πρόγραμμα 2.8: Αλγόριθμος Σχεδιασμού κύκλου μέσω αλγεβρικής εξίσωσης

```
function circlePlot(xc, yc, r)
    # (xc, yc) are the coordinates of the circle's centre
    # r is the radius of the circle
    x = xc-r
    i = 1
    while x <= xc+r
```

```
        y1 = yc + sqrt( r^2-(x-xc)^2 )
        plot(x,y1)
        y2 = yc - sqrt( r^2-(x-xc)^2 )
        plot(x,y2)
        x = x + 1
    end
end
```



Σχήμα 2.17: Σχεδιασμός κύκλου κέντρου $K(3,5)$ και ακτίνας $r = 7$ μέσω αλγεβρικής εξίσωσης

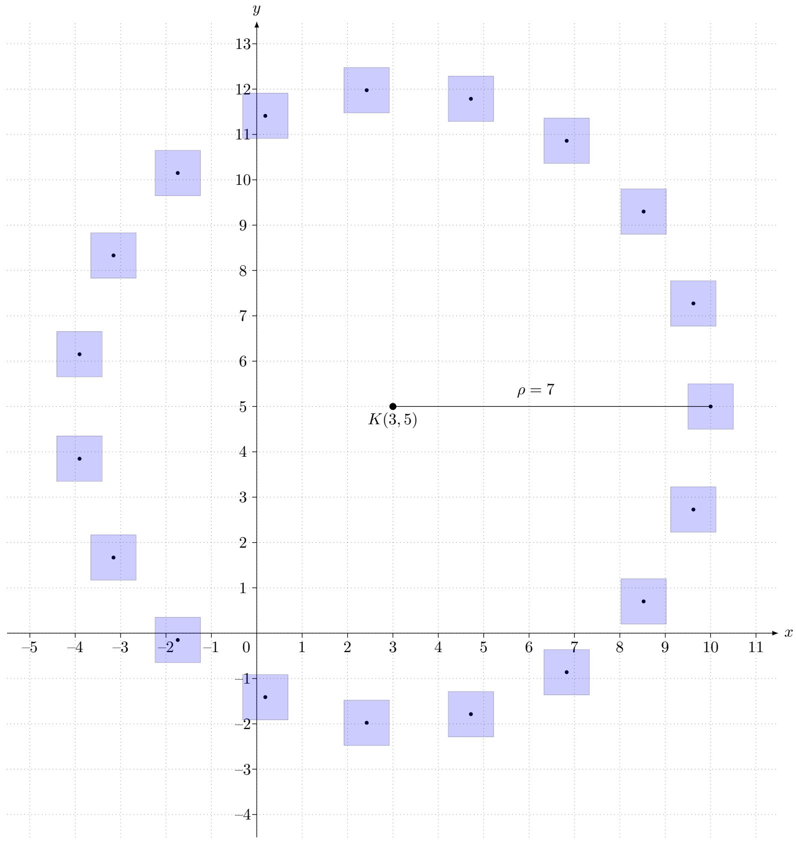
Ο αλγόριθμος αυτός μπορεί να βελτιωθεί αν χρησιμοποιήσουμε τις παραμετρικές εξισώσεις για τις συντεταγμένες του κύκλου.

$$\begin{aligned} x(t) &= x_c + r\cos t \\ y(t) &= y_c + r\sin t \end{aligned} \quad , \; t \in [0, 2\pi]$$

Πρόγραμμα 2.9: Αλγόριθμος Σχεδιασμού Κύκλου μέσω παραμετρικής εξίσωσης

```
function circlePlot(xc, yc, r, iterations)
    # xc, yc are the coordinates of the circle's center
    # r is the radius of the circle

    theta_values = range(0, 2, length=iterations)  # Even partition of [0,
    2]

    x_points = Float64[]  # To store x(t)
    y_points = Float64[]  # To store y(t)

    for t in theta_values
```

```
        x = xc + r * cos(t)
        y = yc + r * sin(t)
        push!(x_points, x)
        push!(y_points, y)
    end

    return x_points, y_points  # Return arrays of x and y coordinates
end
```



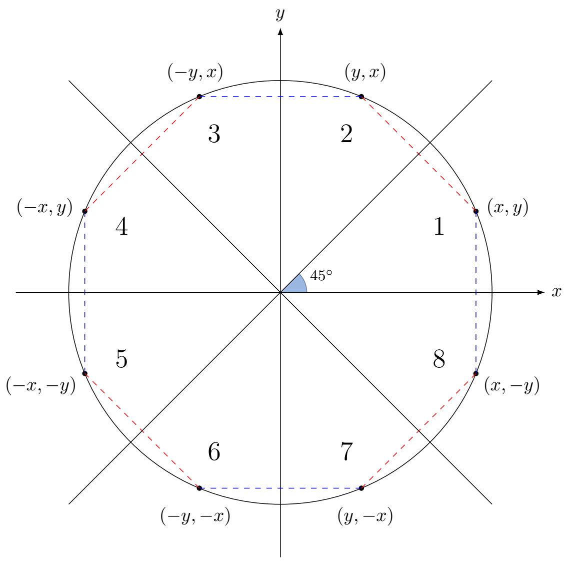
Σχήμα 2.18: Σχεδιασμός κύκλου κέντρου $K(3,5)$ και ακτίνας $r = 7$ μέσω παραμετρικών εξισώσεων

Ενώ ο τρόπος αυτός σχεδιασμός κύκλου έχει πολύ καλά αποτελέσματα όσο αυξάνεται ο αριθμός επαναλήψεων (`iterations`), είναι αρκετά απαιτητικός καθώς απαιτεί για κάθε επανάληψη τις τιμές τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

2.2.2 Σχεδιασμός κύκλου με τον Αλγόριθμο του Bresenham

Ο κύκλος είναι ένα συμμετρικό σχήμα. Κάθε αλγόριθμος για τη σχεδίαση ενός κύκλου μπορεί να εκμεταλλευτεί αυτή τη συμμετρία για να σχεδιάσει 8 σημεία υπολογίζοντας μόνο ένα. Αυτό αποτελεί τη λεγόμενη συμμετρία των 8 δρόμων.

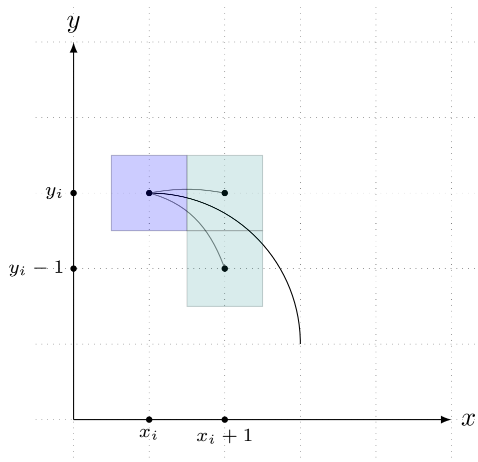
Έστω ότι θέλουμε να σχεδιάσουμε το 2ο οκτομόριο ενός κύκλου κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας ρ. Εάν υπολογίσουμε όλα τα σημεία αυτού του οκταμορίου τα υπόλοιπα μπορούν να προσδιοριστούν χρησιμοποιώντας τη συμμετρία των 8 δρόμων.



Σχήμα 2.19: Συμμετρία των 8 δρόμων

2.2.3 Καθορισμός της μεταβλητής απόφασης

Εάν φωτιστεί το pixel (x_i, y_i) στο 2ο οκταμόριο. Τα επόμενα δυνατά προς φωτισμό pixel θα είναι τα $(x_i + 1, y_i)$ ή $(x_i + 1, y_i - 1)$.



Σχήμα 2.20: Δίλημμα επιλογής επόμενου προς χρωματισμό pixel κατά τον σχεδιασμό του κύκλου σύμφωνα με τον αλγόριθμο του Bresenham

Θα πρέπει να καθορίσουμε μια μεταβλητή απόφασης ανάλογα με την οποία να επιλέγουμε εάν η συντεταγμένη y θα παραμείνει ίδια ή θα ελαττωθεί, δεδομένου ότι η συντεταγμένη x σταθερά θα αυξάνεται κατά 1.

Έστω ότι συντεταγμένη x_{i+1} αντιστοιχεί σε κάποιο y ανάμεσα στις τιμές y_i και $y_i - 1$. Είναι γνωστό ότι το σημείο $(x_i + 1, y)$ θα ανήκει στον κύκλο, επομένως το y ικανοποιεί τη σχέση:

$$y^2 = r^2 - x_{i+1}^2.$$

Ορίζουμε τις ακόλουθες διαφορές d_1 και d_2

$$\begin{aligned} d_1 &= y_i^2 - y^2 = y_i^2 - r^2 + x_{i+1}^2 \\ d_2 &= y^2 - (y_i - 1)^2 = r^2 - x_{i+1}^2 - (y_i - 1)^2 \end{aligned}$$

Εάν θέσουμε $e_i = d_1 - d_2$ τότε αυτή αποτελεί μεταβλητή απόφασης ανάλογα με το πρόσημο της οποίας μπορούμε να επιλέξουμε το επόμενο προς φωτισμό σημείο. Παρατηρούμε ότι

e_i	Επόμενο προς φωτισμό pixel
< 0	$(x_i + 1, y_i)$
≥ 0	$(x_i + 1, y_i - 1)$

Ο Bresenham απέδειξε ότι μία ικανοποιητική μεταβλητή απόφασης για την επιλογή του κατάλληλου pixel στο βήμα i είναι η $e_i = d_1 - d_2$.

2.2.4 Δημιουργία αναδρομικού τύπου

Η μεταβλητή απόφασης e_i μπορεί να υπολογισθεί ως εξής:

$$\begin{aligned} e_i = d_1 - d_2 &= y_i^2 - r^2 + (x_i + 1)^2 - r^2 + (x_i + 1)^2 + (y_i - 1)^2 = \\ &= 2(x_i + 1)^2 + y_i^2 + (y_i - 1)^2 - 2r^2 \end{aligned}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} e_{i+1} &= 2(x_{i+1} + 1)^2 + y_{i+1}^2 + (y_{i+1} - 1)^2 - 2r^2 = \\ &= 2(x_i + 2)^2 + y_{i+1}^2 + (y_{i+1} - 1)^2 - 2r^2 = \\ &= 2x_i^2 + 8x_i + 8 + y_{i+1}^2 + y_{i+1}^2 - 2y_{i+1} + 1 - 2r^2 = \\ &= (2x_i^2 + 4x_i + 2) + 4x_i + 6 + 2y_{i+1}^2 - 2y_{i+1} + 1 - r^2 = \\ &= 2(x_i + 1)^2 + 4x_i + 6 + 2y_{i+1}^2 - 2y_{i+1} + 1 - 2r^2 = \\ &= e_i - y_i^2 - y_i^2 + 2y_i - 1 + 4x_i + 6 + 2y_{i+1}^2 - 2y_{i+1} + 1 = \\ &= e_i + 4x_i + 6 + 2(y_{i+1}^2 - y_i^2) - 2(y_{i+1} - y_i) \end{aligned}$$

Άρα:

$$e_{i+1} = e_i + 4x_i + 6 + 2(y_{i+1}^2 - y_i^2) - 2(y_{i+1} - y_i) \tag{2.2}$$

Επειδή στη σχεδίαση του 2ου οκταμορίου ξεκινάμε από το $(x_1, y_1) = (0, r)$, η αρχική μεταβλητή απόφασης e_1 είναι:

$$e_1 = 2 + r^2 + (r - 1)^2 - 2r^2 = 2 + r^2 + r^2 - 2r + 1 - 2r^2 = 3 - 2r.$$

Επειδή στο δεύτερο οκταμόριο η τιμή του y_{i+1} είναι y_i ή $y_i - 1$ (μεγαλύτερη ταχύτητα στη x κατεύθυνση) μπορούμε να υπολογίσουμε το e_{i+1} με βάση το πρόσημο του e_i ως εξής.

- $e_i < 0 \Rightarrow y_{i+1} = y_i$. Τότε η (2.2) γίνεται:

$$e_{i+1} = e_i + 4(x_i + 1) + 2 \Rightarrow e_{i+1} = e_i + 4(x_i + 1) + 2$$

- $e_i \geq 0 \Rightarrow y_{i+1} = y_i - 1$. Τότε η (2.2) γίνεται:

$$\begin{aligned} e_{i+1} &= e_i + 4x_i + 6 + 2((y_i - 1)^2 - y_i^2) - 2(y_i - 1 - y_i) = \\ &= e_i + 4x_i + 6 + 2(y_i^2 - 2y_i + 1 - y_i^2) + 2 = \\ &= e_i + 4(x_i + 1) + 2 - 4(y_i - 1) \end{aligned}$$

Ανάλογα λοιπόν με το πρόσημο της μεταβλητής e_i έχουμε:

e_i	e_{i+1}
< 0	$e_i + 4(x_i + 1) + 2$
≥ 0	$e_i + 4(x_i + 1) + 2 - 4(y_i - 1)$

2.2.5 Αλγόριθμος Bresenham για κύκλο

Για να σχεδιάσουμε κάποιο κύκλο με διαφορετικό κέντρο, αρκεί να παρατηρήσουμε αν εφαρμόσουμε μετασχηματισμό μεταφοράς, ότι ένα σημείο της περιφέρειας ενός τέτοιου κύκλου μπορεί να σχεδιαστεί αν μεταφέρουμε τον κύκλο με κέντρο το $(0, 0)$ κατά διάνυσμα με συντεταγμένες το κέντρο του κύκλου. Έτσι προκύπτει ο ακόλουθος αλγόριθμος υλοποιημένος σε Julia.

Τα παραπάνω μας οδηγούν στον παρακάτω αλγόριθμο χρησιμοποιώντας και την συμμετρία των 8 δρόμων.

Πρόγραμμα 2.10: Bresenham Circle Algorithm

```
function bresenhamCircle(r)
    # (xc, yc) are the coordinates of the circle's centre
    # r is the radius of the circle
    x = 0
    y = r
    error = 3 - 2 * r

    while x <= y
        plot(x, y)

        plot(x+xc, y+yc, 0)
        plot(x+xc, -y+yc, 0)
        plot(-x+xc, y+yc, 0)
        plot(-x+xc, -y+yc, 0)
        plot(y+xc, x+yc, 0)
        plot(-y+xc, x+yc, 0)
        plot(y+xc, -x+yc, 0)
        plot(-y+xc, -x+yc, 0)
        x = x + 1
        if error > 0
            y = y - 1
            error = error - 4*y
        end
        error = error + 4*x +2
    end
end
```

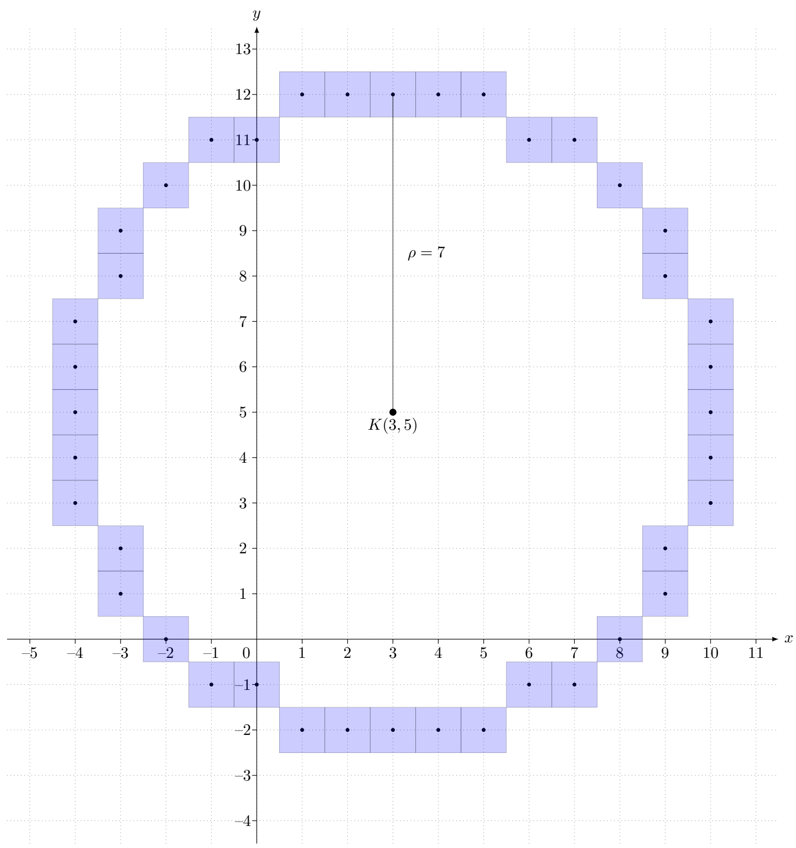
2.2.6 Υπολογιστική Πολυπλοκότητα

Στο 2ο οκταμόριο ισχύει : $0 \leq r\cos 45°, r\sin 45° \leq y \leq r$. Στην x κατεύθυνση γίνονται $r\cos 45°$ βήματα που αντιστοιχούν σε $r(1 - \sin 45°)$ βήματα στην y κατεύθυνση. Συνολικά σχεδιάζονται (υπολογίζονται) $r\cos 45°$ σημεία.

Μέσος όρος βημάτων:

$$\left(\frac{r\frac{\sqrt{2}}{2} + r - r\frac{\sqrt{2}}{2}}{r\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) = \sqrt{2}$$

Η εντολή `error = error + 4x + 2` περιλαμβάνει 2 προσθέσεις, 1 shift πράξη (πολλαπλασιασμός με 2). Τελικά κατά μέσο όρο έχουμε $4\sqrt{2}$ προσθέσεις, 2 shift και $\sqrt{2}$ increments (αυξήσεις) ανά σχε-



Σχήμα 2.21: Παράδειγμα κύκλου με κέντρο $K(3, 5)$ και ακτίνα $\rho = 7$

δίαση σημείου του κύκλου. Αν οι πράξεις εντός του `while` απαιτούν 1 κύκλο hardware, τότε για το 2ο οκταμόριο απαιτούνται $\sqrt{2}$ κύκλοι ανά σημείο. Για ολόκληρο κύκλο $(7 + 2)/8$ κύκλοι ανά σημείο, δηλαδή 1.05 κύκλοι ανά σημείο.

Παρατήρηση. Τα συνολικά σημεία που σχεδιάζονται στον κύκλο είναι $8r \cos 45° = 4r\sqrt{2}$. Συγκρινόμενα με την περίμετρο $2\pi\rho$ είναι 10% λιγότερα.

2.3 Σχεδιασμός Έλλειψης

Έστω ότι θέλουμε να σχεδιάσουμε έλλειψη με κέντρο το $O(0, 0)$ και άξονες με διάμετρο $2a$ και $2b$, $a, b \in \mathbb{Z}$. Η έλλειψη χαρακτηρίζεται από 4πλή συμμετρία.

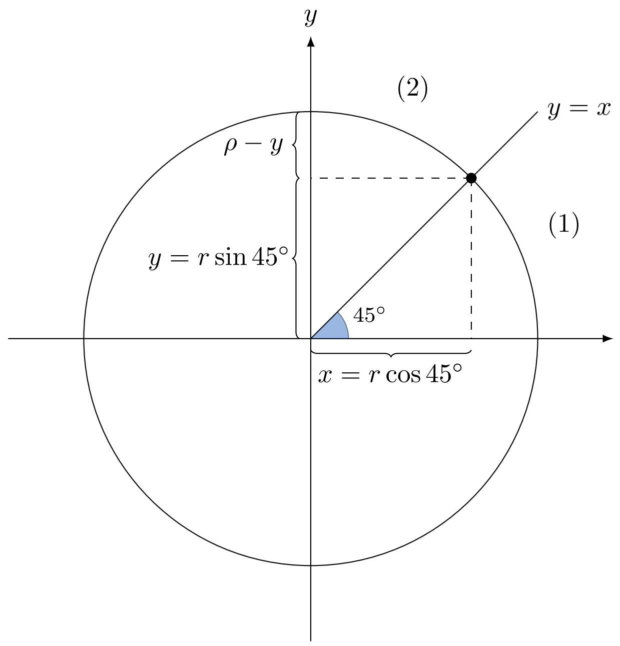
Ο διαχωρισμός σε περιοχή 1 και περιοχή 2 γίνεται εκεί όπου

$$\frac{dy}{dx} = -1$$

Εξίσωση Έλλειψης

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$f(x, y) = b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$



Σχήμα 2.22: Παράδειγμα κύκλου με κέντρο $K(3,5)$ και ακτίνα $\rho = 7$

2.3.1 Υπολογιστική Πολυπλοκότητα

Περιοχή 1:	y_r βήματα της y-κατεύθυνσης.
	$a - x_r$ βήματα της x-κατεύθυνσης.
	Υπολογίζονται y_r σημεία.
Περιοχή 2:	x_r βήματα της x-κατεύθυνσης.
	$b - y_r$ βήματα της y-κατεύθυνσης.
	Υπολογίζονται x_r σημεία.

Για (1) βήμα στην y-κατεύθυνση στην περιοχή 1 απαιτούνται 3 προσθέσεις (ανάλογα για τα βήματα της x-κατεύθυνσης της περιοχής 2) ανά σημείο κατά μέσο όρο:

$$\frac{3y_r + 2(a - x_r) + 3x_r + 2(b - y_r)}{x_r + y_r} = 1 + 2\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \text{ προσθέσεις, } \frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ αυξήσεις ανά σημείο.}$$

Περιοχή 1:

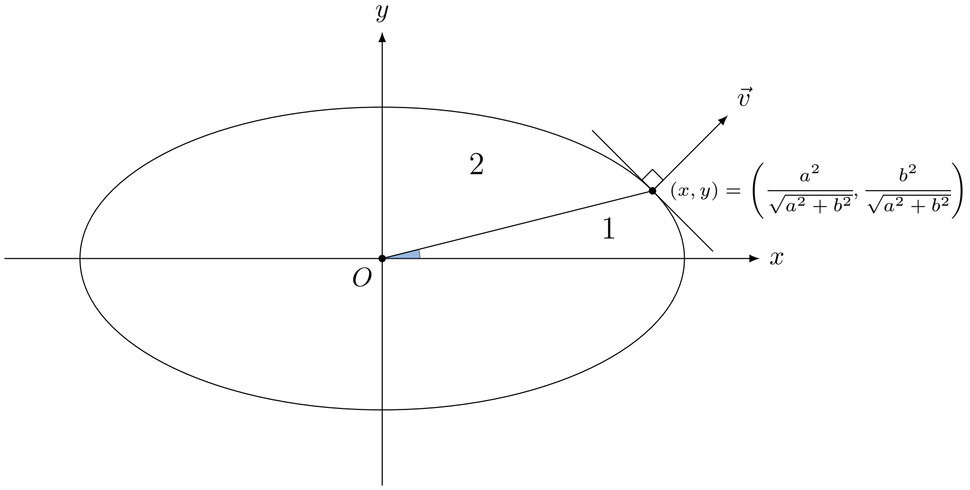
Έστω ότι έχει φωτισθεί το pixel (x_i, y_i). Επειδή βρισκόμαστε στην περιοχή 1, το επόμενο προς φωτισμό pixel θα είναι το $(x_i, y_i{+}1)$ ή το $(x_i{-}1, y_i{+}1)$. Παρατηρούμε ότι αυξάνεται κατά 1 η y συντεταγμένη και χρειαζόμαστε ένα κριτήριο.

Απόφαση για το αν θα φωτιστεί η x_i ή x_{i-1} θέση. Έστω M το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος CD. Οι συντεταγμένες του μέσου M θα είναι

$$f(M) = f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}, y_i + 1\right) = f\left(x_i - \frac{1}{2}, y_i + 1\right) \tag{2.3}$$

Εάν T είναι το σημείο τομής της έλλειψης με το ευθύγραμμο τμήμα CD και e_i η απόσταση από το μέσο M, τότε αυτό ικανοποιεί την εξίσωση της έλλειψης και θα ισχύει:

$$f\left(x_i - \frac{1}{2} + e_1, y_i + 1\right) = b^2\left(x_i - \frac{1}{2} + e_1\right)^2 + a^2(y_i+1)^2 - 4a^2b^2 = 0 \tag{2.4}$$



Σχήμα 2.23: Έλλειψη

Αναπτύσσοντας την προηγούμενη έκφραση έχουμε ότι:

$$f\left(x_i - \frac{1}{2}, y_i + 1\right) = -\left(2b^2\left(x_i - \frac{1}{2}\right)e_1 + b^2 e_1^2\right) = 0 \tag{2.5}$$

Εάν ονομάσουμε μεταβλητή απόφασης για την περιοχή 1, f_{mid1} τις συντεταγμένες του μέσου M θα έχουμε:

$$f_{mid1} = f(M) = -\left(2b^2\left(x_i - \frac{1}{2}\right)e_1 + b^2 e_1^2\right) \tag{2.6}$$

Παρατηρούμε ότι το πρόσημο της έκφρασης του $f(M)$ καθορίζει την επιλογή του επόμενου σημείου. Συγκεκριμένα:

$f(M)$	Επιλογή σημείου
< 0	$e_1 > 0 \Rightarrow$ Το T δεξιότερα του M, επιλογή του σημείου D
≥ 0	$e_1 \leq 0 \Rightarrow$ Το T αριστερότερα του M, επιλογή του σημείου C

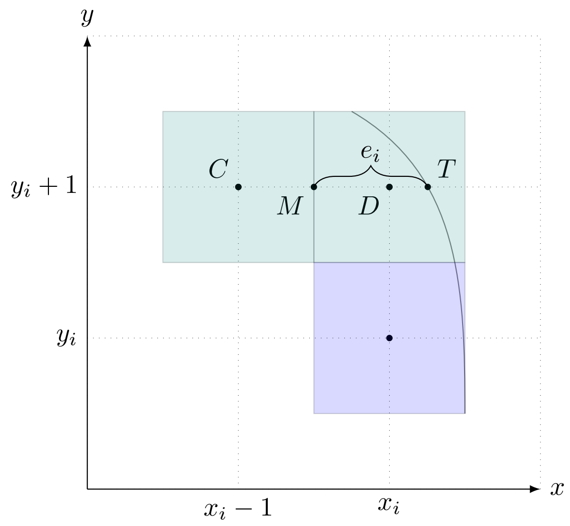
2.3.2 Αναδρομικός υπολογισμός των f_{mid1} και f_{mid2}

Είναι απαραίτητο να υπάρχει μια σχέση σύνδεσης ανάμεσα στις δύο μεταβλητές απόφασης. Έχουμε ότι Περιοχή 1:

$$f_{mid1,i+1} = f(x_{i+1} - \frac{1}{2}, y_{i+1} + 1) = b^2(x_{i+1} - \frac{1}{2}) + a^2(y_{i+1} + 1)^2 - a^2b^2 \tag{2.7}$$

Στην περιοχή 1 ισχύει ότι $y_{i+1} = y_i + 1$, έτσι προκύπτει:

$f_{mid1,i+1}$	Επιλογή Σημείου
$f_{mid1,i} + 2a^2y_{i+1} + a^2$	D
$f_{mid1,i} + 2a^2y_{i+1} + a^2 - 2b^2x_{i+1}$	C



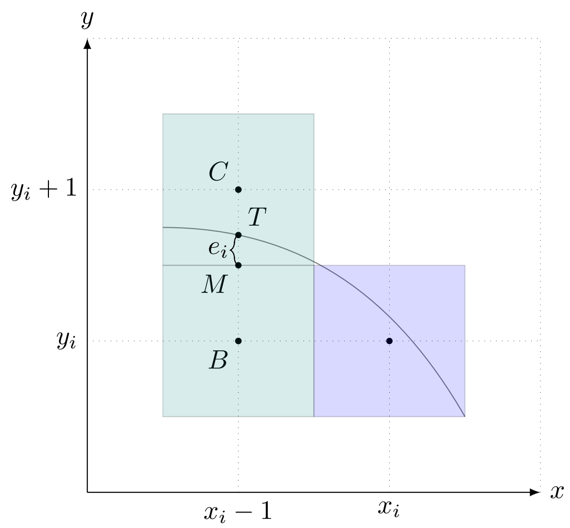
Σχήμα 2.24: Περιοχή 1

2.3.3 Επιλογή αρχικής τιμής για την f_{mid1}

Για $(x_1, y_1) = (a, 0)$ προκύπτει ότι:

$$f_{mid1,1} = f\left(x_1 - \frac{1}{2}, y_1 + 1\right) = a^2 - b^2 a + \frac{b^2}{4} \tag{2.8}$$

Αντίστοιχη διαδικασία ισχύει και για την περιοχή 2. Συγκεκριμένα προκύπτει ότι:



Σχήμα 2.25: Περιοχή 2

2.3.4 Καθορισμός συνόρου μεταξύ της περιοχής 1 & 2

Επειδή η αλλαγή της περιοχής γίνεται στο σημείο όπου η κλίση της εφαπτομένης ισούται με -1 υπολογίζουμε την παράγωγο της εξίσωσης της έλλειψης:

$f_{mid2,i+1}$	Επιλογή Σημείου
$f_{mid2,i} - 2b^2x_{i+1} + b^2$	B
$f_{mid2,i} - 2b^2x_{i+1} + b^2 - 2a^2x_{i+1}$	D

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{2b^2x}{2a^2y} \tag{2.9}$$

$$\frac{dy}{dx} > -1 \Rightarrow 2a^2y > 2b^2x \tag{2.10}$$

Όταν λοιπόν $2a^2y > 2b^2x$ έχουμε περάσει από την περιοχή 1 στην περιοχή 2. Για την ανάπτυξη του αλγορίθμου της έλλειψης θα ήταν επιθυμητό να χρησιμοποιήσουμε μόνο μια μεταβλητή απόφασης. Παρατηρούμε ότι η μετάβαση από το σύνορο μπορεί να υπολογισθεί με βάση την f_{mid1}. Συγκεκριμένα παρατηρούμε ότι:

$$f_{mid2} - f_{mid1} = \left(b^2x_i + a^2y_i\right) + \frac{3}{4}\left(b^2 - a^2\right) \tag{2.11}$$

Τελικά

$$f_{mid2} = f_{mid1} - \frac{2b^2x_i + 2a^2y_i}{2} + 0.75\left(b^2 - a^2\right) \tag{2.12}$$

Πρόγραμμα 2.11: Γενικός αλγόριθμος σχερδιασμού ελλειψής του Bresenham

```
function elipsis(a, b, color)
    hold on
    x = a;
    y = 0;
    asqr = a^2;
    bsqr = b^2;
    a22 = 2 * asqr;
    b22 = 2 * bsqr;
    xslope = b22 * a;
    yslope = 0;
    fmid = bsqr * (0.25 - x) + asqr;

    % Area 1
    while (xslope > yslope)
        image(x, y, color)
        image(-x, -y, color)
        image(x, -y, color)
        image(-x, y, color)
        y = y + 1;
        yslope = yslope + a22;

        if fmid >= 0
            x = x - 1;
            xslope = xslope - b22;
            fmid = fmid - xslope;
        end
        fmid = fmid + yslope + asqr;
    end

    % Border correction
    fmid = fmid - (yslope + xslope)/2 + 0.75 * (bsqr - asqr);
```

```
    % Area 2
    while (x > 0)
        image(x, y, color)
        image(-x, -y, color)
        image(x, -y, color)
        image(-x, y, color)
        x = x - 1;
        xslope = xslope - b22;

        if fmid <= 0
            y = y + 1;
            yslope = yslope + a22;
            fmid = fmid + yslope;
        end
        fmid = fmid - xslope + bsqr;
    end
endfunction
```

Ασκήσεις 1ου Κεφαλαίου

Άσκηση 1. Να κατασκευαστεί ο αλγόριθμος Plotline για την περίπτωση που η κλίση είναι μεγαλύτερη της μονάδας ($s > 1$).

Λύση. Στην περίπτωση που ισχύει $s > 1$ είναι προτιμότερο η εξίσωση της ευθείας να επιλυθεί ως προς x, δηλαδή να εξαχθεί μία σχέση της μορφής $x = f(y)$. Τότε, ο αλγόριθμος `Plotline` λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

```
x1, y1 = get_coordinates("Give the coordinates of P1 e.g. (1,2):")
x2, y2 = get_coordinates("Give the coordinates of P2:")
s = (x2-x1) / (y2-y1)
c = (x_1y_2-x2y1 ) / (y2-y1)
for y = y1:y2
    x = round(sy+c)
    plot(x,y)
end
```

Στον παραπάνω αλγόριθμο έχει θεωρηθεί ως δεδομένο ότι $s > 1$. Θα μπορούσε να κατασκευαστεί αλγόριθμος που να ενσωματώνει τις δύο περιπτώσεις, ελέγχοντας στην αρχή την τιμή κλίσης s (`if s < 1...else...`).

Άσκηση 2. Να εφαρμοσθεί ο αλγόριθμος plot-line για τα σημεία: $P_1(1,1), P_2(4,13)$. Προκύπτουν συνεχόμενα pixel αν λύσω ως προς x και μεταβάλλω τα y;

Λύση. Τα σημεία μεταξύ των οποίων θέλω να σχεδιάσω ευθεία είναι: $P_1(1,1), P_2(4,13)$. Επομένως:

$$
\begin{aligned}
(P_1P_2): y - y_1 = \lambda(x - x_1) &\Rightarrow y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \Rightarrow \\
&\Rightarrow y = y_1\frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1} + x\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x + \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2 - x_1} \Rightarrow \\
&\Rightarrow y = sx + c, \text{ όπου } s = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ και } c = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2 - x_1} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες:

$$s = \frac{13 - 1}{4 - 1} = \frac{12}{3} = 4 > 1 \qquad \text{και} \qquad c = \frac{4 \cdot 1 - 1 \cdot 13}{4 - 1} = -3$$

Συνεπώς η εξίσωση είναι $y = 4x - 3$a. Επειδή $s > 1$ (κλίση μεγαλύτερη του 1), λύνω την (1) ως προς x και μεταβάλλω τα y.

Η (1) λυμένη ως προς x γράφεται $x = \frac{1}{4}y + \frac{3}{4}$. Επειδή βγαίνουν συντεταγμένες μη ακέραιες, κάνω στρογγύλευση.

- $y_1 = 1 \Rightarrow (x,y) = \left(\frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{4}, 1\right) = (1,1)$
- $y_2 = 2 \Rightarrow (x,y) = \left(\frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{3}{4}, 2\right) = \left(\frac{5}{4}, 2\right) = (1.25, 2) \xRightarrow{\text{rounding}} (x,y) = (1,2)$
- $y_3 = 3 \Rightarrow (x,y) = \left(\frac{1}{4} \cdot 3 + \frac{3}{4}, 3\right) = \left(\frac{6}{4}, 3\right) = (1.5, 3) \xRightarrow{\text{rounding}} (x,y) = (2,3)$
- $y_4 = 4 \Rightarrow (x,y) = \left(\frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{3}{4}, 4\right) = \left(\frac{7}{4}, 4\right) = (1.75, 4) \xRightarrow{\text{rounding}} (x,y) = (2,4)$

- $y_5 = 5 \Rightarrow (x, y) = \left(\frac{1}{4} \cdot 5 + \frac{3}{4}, 5\right) = \left(\frac{8}{4}, 5\right) = (2, 5) \xrightarrow{\text{rounding}} (x, y) = (2, 5)$
- $y_6 = 6 \Rightarrow (x, y) = \left(\frac{1}{4} \cdot 6 + \frac{3}{4}, 6\right) = \left(\frac{9}{4}, 6\right) = (2.25, 6) \xrightarrow{\text{rounding}} (x, y) = (2, 6)$
- $y_7 = 7 \Rightarrow (x, y) = \left(\frac{1}{4} \cdot 7 + \frac{3}{4}, 7\right) = \left(\frac{10}{4}, 7\right) = (2.5, 7) \xrightarrow{\text{rounding}} (x, y) = (3, 7)$
- $y_8 = 8 \Rightarrow (x, y) = \left(\frac{1}{4} \cdot 8 + \frac{3}{4}, 8\right) = \left(\frac{11}{4}, 8\right) = (2.75, 8) \xrightarrow{\text{rounding}} (x, y) = (3, 8)$
- $y_9 = 9 \Rightarrow (x, y) = \left(\frac{1}{4} \cdot 9 + \frac{3}{4}, 9\right) = \left(\frac{12}{4}, 9\right) = (3, 9) \xrightarrow{\text{rounding}} (x, y) = (3, 9)$
- $y_{10} = 10 \Rightarrow (x, y) = \left(\frac{1}{4} \cdot 10 + \frac{3}{4}, 10\right) = \left(\frac{13}{4}, 10\right) = (3.25, 10) \xrightarrow{\text{rounding}} (x, y) = (3, 10)$
- $y_{11} = 11 \Rightarrow (x, y) = \left(\frac{1}{4} \cdot 11 + \frac{3}{4}, 11\right) = \left(\frac{14}{4}, 11\right) = (3.5, 11) \xrightarrow{\text{rounding}} (x, y) = (4, 11)$
- $y_{12} = 12 \Rightarrow (x, y) = \left(\frac{1}{4} \cdot 12 + \frac{3}{4}, 12\right) = \left(\frac{15}{4}, 12\right) = (3.75, 12) \xrightarrow{\text{rounding}} (x, y) = (4, 12)$
- $y_{13} = 13 \Rightarrow (x, y) = \left(\frac{1}{4} \cdot 13 + \frac{3}{4}, 13\right) = \left(\frac{16}{4}, 13\right) = (4, 13) \xrightarrow{\text{rounding}} (x, y) = (4, 13)$

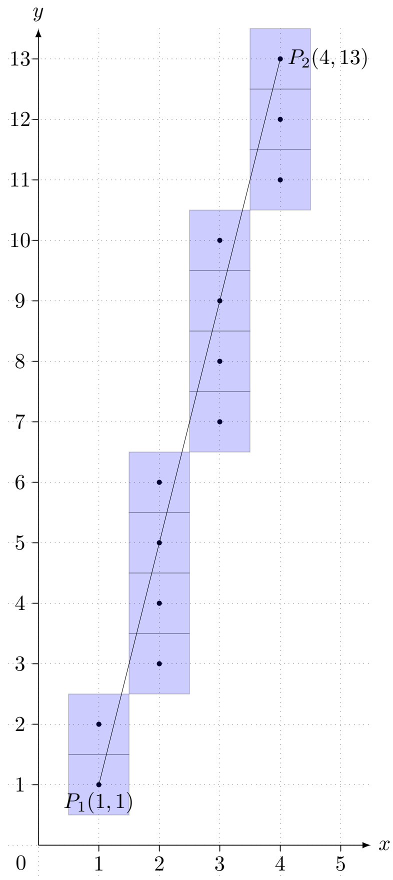
Παρατηρούμε όπως ήταν προβλεπόμενο, ότι φωτίζονται συνεχόμενα pixel.

Άσκηση 3. Να κατασκευαστεί ο αλγόριθμος του Bresenham για ευθεία, για το δεύτερο οκταμόριο.

Λύση. Στο δεύτερο οκταμόριο ισχύει $s > 1$, οπότε είναι προτιμότερο η εξίσωση της ευθείας να επιλυθεί ως προς x, δηλαδή να εξαχθεί μία σχέση της μορφής $x = f(y)$. Τότε, ο αλγόριθμος του Bresenham λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

Πρόγραμμα 2.12: Bresenham Algorithm for 2nd Octant Line Algorithm

```
x1, y1 = get_coordinates("Give the coordinates of P1 e.g. (1,2):")
x2, y2 = get_coordinates("Give the coordinates of P2:")
Dx = x2 - x1
Dy = y2-y1
x = x1
y = y1
c1 = 2Dx
error = c1 - Dy
c2 = error - Dy
while y <= y2
    if error <0
        error = error + c1
    else
        x = x+1
        error = error + c2
    plot(x,y)
    y = y + 1
    end
end
```



Σχήμα 2.26: Γραφική λύση άσκησης

Άσκηση 4. Να κατασκευαστεί ο αλγόριθμος του Bresenham για το σχεδιασμό κύκλου κέντρου $O(0, 0)$ και ακτίνας r, στο πρώτο οκταμόριο.

Λύση. Η μετατροπή του βασικού αλγορίθμου του Bresenham αφορά τη συμμετρία ως προς την ευθεία $y = x$. Συγκεκριμένα, η μετατροπή αφορά την εκτύπωση του σημείου (y, x) αντί του σημείου (x, y) στην εντολή `plot`:

```
r = readline()
x = 0
y = r
error = 3 - 2r
while x <= y
    plot(y, x)
    x = x + 1
    if error   0
        y = y - 1
        error = error - 4y
    end
    error = error + 4x + 2
end
```

Άσκηση 5. Να εφαρμοστεί ο αλγόριθμος Bresenham για τις ευθείες :

i) $P_1(1, 1) \rightarrow P_2(3, 2)$

ii) $P_1(1,1) \to P_2(4,13)$

iii) $P_1(0,0) \to P_2(0,10)$

Να συγκριθούν οι πολυπλοκότητες σε σχέση με τον αλγόριθμο Plotline.

Λύση. Θέλει ΔΙΟΡΘΩΣΗ

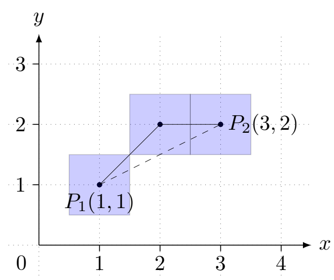
i) $P_1(1,1) \to P_2(3,2)$

- $Dx = x_2 - x_1 = 3 - 1 = 2$
- $Dy = y_2 - y_1 = 2 - 1 = 1$
- $x = x_1 = 1, y = y_1 = 1$
- $c_1 = 2 \cdot Dx = 2 \cdot 2 = 4$
- $error = c_1 - Dy = 4 - 1 = 3$
- $c_2 = error - Dy = 3 - 1 = 2$

Εφόσον $y_2 = 2$, από την επανάληψη θα έχουμε:

- $\underline{y = 1 \leq 2}$
  Τότε $error = 3 \geq 0$. Άρα:
  $x = x + 1 = 2$ και $error = error + c_2 = 3 + 2 = 5$ Φωτίζεται το pixel $(2,2)$ και $y = y + 1 = 2$.
- $\underline{y = 2 \leq 2}$
  Τότε $error = 5 \geq 0$. Άρα
  $x = x + 1 = 3$ και $error = error + c_2 = 5 + 2 = 7$ Φωτίζεται το pixel $(3,2)$ και $y = y + 1 = 3$.
- $\underline{y = 3 > 2}$ άρα ο αλγόριθμος σταματάει.

Συνολικά θα φωτιστούν τα σημεία : $(1,1), (2,2), (3,2)$.



Σχήμα 2.27: Γραφική λύση ευθείας Bresenham: $P_1(1,1) \to P_2(3,2)$

ii) $P_1(1,1) \to P_2(4,13)$

- $Dx = x_2 - x_1 = 4 - 1 = 3$
- $Dy = y_2 - y_1 = 13 - 1 = 12$
- $x = 1, y = 1$
- $c_1 = 2 \cdot Dx = 2 \cdot 3 = 6$
- $error = c_1 - Dy = 6 - 12 = -6$

- $c_2 = error - Dy = -6 - 12 = -18$

Εφόσον $y_2 = 13$, από την επανάληψη θα έχουμε:

- $\underline{y = 1 \leq 13}$
  Τότε $error = -6 < 0$. Άρα:
  $error = error + c_1 = -6 + 6 = 0$ Φωτίζεται το pixel $(1, 1)$ και $y = y + 1 = 2$.
- $\underline{y = 2 \leq 13}$
  Τότε $error = 0 \geq 0$. Άρα:
  $x = x+1 = 2$ και $error = error+c_2 = 0-18$. Φωτίζεται το pixel $(2, 2)$ και $y = y+1 = 3$.
- $\underline{y = 3 \leq 13}$
  Τότε: $error = -18 < 0$. Άρα:
  $error = -18 + 6 = -12$. Φωτίζεται το pixel $(2, 3)$ και $y = y + 1 = 4$.
- Κ.ο.κ. έως ότου: $y = 13$.

Συνολικά θα φωτιστούν τα σημεία:
$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 5), (2, 6), (2, 7), (3, 8), (3, 9), (3, 10), (3, 11), (4, 12), (4, 13)$.

iii) $P_1(0, 0) \to P_2(0, 10)$

- $Dx = x_2 - x_1 = 0 - 0 = 0$
- $Dy = y_2 - y_1 = 10 - 0 = 10$
- $x = 0, y = 0$
- $c_1 = 2 \cdot Dx = 2 \cdot 0 = 0$
- $error = c_1 - Dy = 0 - 10 = -10$
- $c_2 = error - Dy = -10 - 10 = -20$

Εφόσον $y_2 = 10$, από την επανάληψη θα έχουμε:

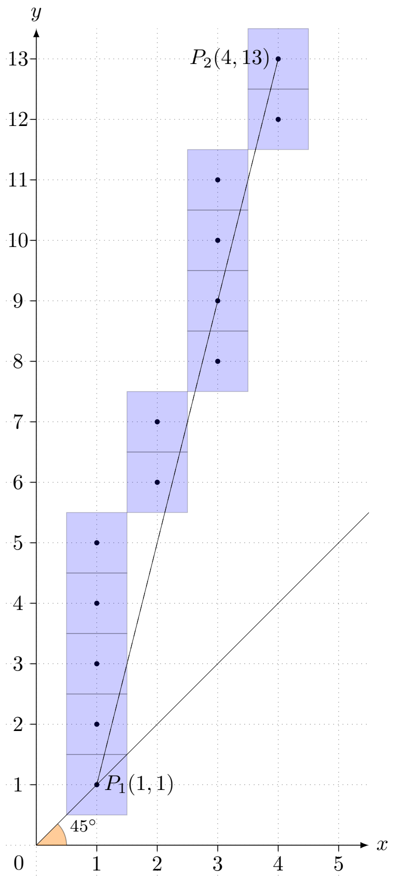
- $\underline{y = 0 \leq 10}$
  Τότε $error = -10 < 0$. Άρα:
  $error = error + c_1 = -10 + 0 = -10$ Φωτίζεται το pixel $(0, 0)$ και $y = y + 1 = 1$.
- $\underline{y = 1 \leq 10}$
  Τότε $error = -10 < 0$. Άρα:
  $error = -10 + 0 = -10$. Φωτίζεται το pixel $(0, 1)$ και $y = y + 1 = 2$.
- Κ.ο.κ. έως ότου: $y = 10$.

Συνολικά θα φωτιστούν τα σημεία:
$(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (0, 5), (0, 6), (0, 7), (0, 8), (0, 9), (0, 10)$.

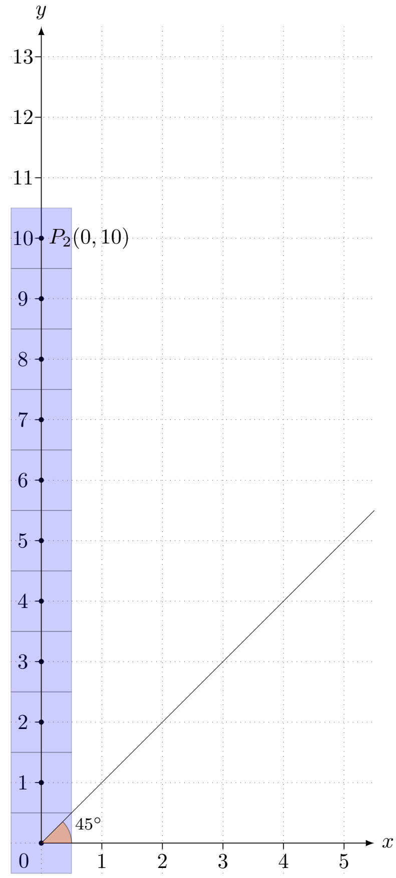
Η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου του Bresenham είναι σαφώς χαμηλή, σε σχέση με τον αλγόριθμο Plotline. Η εισαγωγή της επιπλέον μεταβλητής `error` απαλλάσσει τον αλγόριθμο από πολλαπλασιασμούς, ενώ επιπλέον δεν απαιτείται στρογγύλευση.

Άσκηση 6. Δίνονται τα σημεία $P_1(3, 5), P_2(7, 7), P_3(8, 6)$. Θεωρώντας ότι το pixel που αντιστοιχεί στο $P_1(3, 5)$ φωτίζεται στην οθόνη, να προσδιοριστούν στην οθόνη για τον σχεδιασμό των ευθυγράμμων τμημάτων P_1P_2, P_1P_3.

i) Θεωρώντας ότι το pixel που αντιστοιχεί στο $P_1(3, 5)$ φωτίζεται στην οθόνη, να προσδιορισθούν οι συντεταγμένες των επόμενων pixels που θα φωτισθούν στην οθόνη για το σχεδιασμό των ευθυγράμμων τμημάτων P_1P_2, P_1P_3.



Σχήμα 2.28: Γραφική λύση ευθείας Bresenham: $P_1(1,1) \to P_2(4,13)$



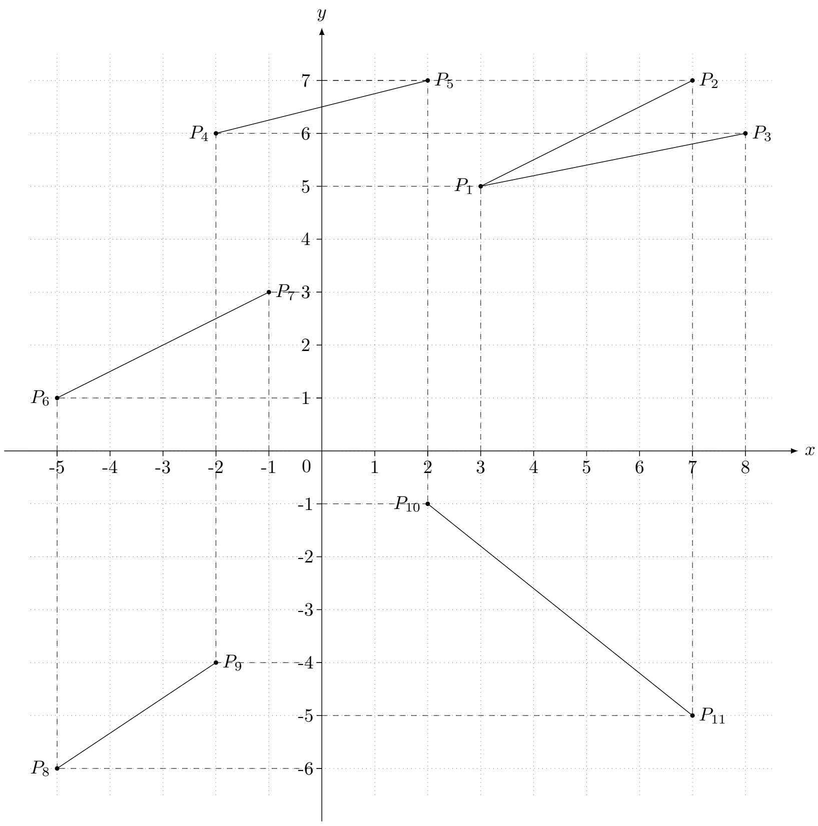
Σχήμα 2.29: Γραφική λύση ευθείας Bresenham: $P_1(0,0) \to P_2(0,10)$

ii) Επιπλέον να μελετήσετε τον σχεδιασμό των ευθυγράμμων τμημάτων: $P_4P_5, P_6P_7, P_8P_9, P_{10}P_{11}$.

Λύση. i) Γενικά ο αλγόριθμος του Bresenham για ευθείες στο πρώτο οκταμόριο είναι:

Πρόγραμμα 2.13: Αλγόριθμος του Bresenham για ζητούμενο ευθύγραμμο τμήμα

```
x1, y1 = get_coordinates("Give the coordinates of P1 e.g. (1,2):")
x2, y2 = get_coordinates("Give the coordinates of P2:")
Dx = x2 - x1
Dy = y2-y1
x = x1
y = y1
c1 = 2Dy
er = c1 - Dx
c2 = er - Dx
while x <= 7
    plot(x,y)
    x = x+1
    if er <0
        er = er + c1
    else
        y = y+1
        er = er + c2
```



Σχήμα 2.30: Παράσταση ζητούμενων ευθυγράμμων τμημάτων

```
      plot(x,y)
      end
end
```

Για τα σημεία $P_1(3,5)$ και $P_2(7,7)$ θα έχουμε:

- $x = x_1 = 3$
- $y = y_1 = 5$
- $\Delta x = x_2 - x_1 = 5 - 3 = 4$
- $\Delta y = y_2 - y_1 = 7 - 5 = 2$
- $c_1 = 2 \cdot \Delta y = 2 \cdot 2 = 4$
- $er = c_1 - \Delta x = 4 - 4 = 0$
- $c_2 = er - \Delta x = 0 - 4 = -4$

Ο αλγόριθμος θα τρέξει ως εξής:

- <u>1η επανάληψη</u>

```
x = 3 <= 7 ⇒
      plot(3,5)
      x  ← 4 %(x = x+1)
      er = 0 ≥ 0
            y ← 6 %(y = y+1 = 6)
            er ← -4 %(er = er + c2 = 0 +(-4) = -4)
```

- <u>2η επανάληψη</u>

```
x = 4 ≤ 7 ⇒
      plot(4,6)
```

```
          x ← 5 %(x = x+1 = 5)
          er = -4 < 0 ⇒
              er ← 0 %(er = er + c1 = -4 + 4 = 0)
```

- 3η επανάληψη

```
      x = 5 ≤ 7 ⇒
          plot(5,6)
          x ← 6 %(x = x+1 = 6)
          er = 0 ≥ 0 ⇒
              y ← 7 %(y = y+1 = 7)
              er ← -4 %(er = er + c2 = 0 +(-4) = -4)
```

- 4η επανάληψη

```
      x = 6 ≤ 7 ⇒
          plot(6,7)
          x ← 7 %(x = x+1 = 7)
          er = -4 < 0 ⇒
              er ← 4 %(er = er + c1 = -4 + 4 = 0)
```

- 5η επανάληψη

```
      x = 7 ≤ 7 ⇒
          plot(7,7)
          x ← 8 %(x = x+1 = 8)
          er = 4 ≥ 0 ⇒
              y ← 8 %(y = y+1 = 8)
              er ← 8 %(er = er + c1 = 4 + 4 = 8)
```

- 6η επανάληψη

```
      x = 8 > 7 ⇒ %STOP
```

Συνολικά θα φωτιστούν τα σημεία : $(4,6),(5,6),(6,7),(7,7)$.

Για τα σημεία $P_1(3,5)$ και $P_2(8,6)$ έχουμε:

- $x = x_1 = 3$
- $y = y_1 = 5$
- $\Delta x = x_2 - x_1 = 8 - 3 = 5$
- $\Delta y = y_2 - y_1 = 6 - 5 = 1$
- $c_1 = 2 \cdot \Delta y = 2 \cdot 1 = 2$
- $er = c_1 - \Delta x = 2 - 5 = -3$
- $c_2 = er - \Delta x = -3 - 5 = -8$

- 1η επανάληψη

```
%Iteration 1:
x ← 3 ≤ 8 ⇒
    plot(3,5)
    x ← 4 %(x ← x+1 ← 4)
    er ← -3 < 0 ⇒
        er ← -1 %(er ← er + c1 ← -3 + 2 ← -1)
    plot(4,5)
```

- 2η επανάληψη

```
%Iteration 2:
x ← 4 ≤ 8 ⇒
    plot(4,5)
    x ← 5 %(x ← x+1 ← 5)
    er ← -1 < 0 ⇒
        er ← 1 %(er ← er + c1 ← -1 + 2 ← 1)
    plot(5,5)
```

- 3η επανάληψη

```
%Iteration 3:
x ← 5 ≤ 8 ⇒
    plot(5,5)
    x ← 6 %(x ← x+1 ← 6)
    er ← 1 ≮ 0 ⇒
        y ← 6 %(y ← y+1 ← 6)
        er ← -7 %(er ← er + c2 ← 1 + (-8) ← -7)
    plot(6,6)
```

- 4η επανάληψη

```
%Iteration 4:
x ← 6 ≤ 8 ⇒
    plot(6,6)
    x ← 7 %(x ← x+1 ← 7)
    er ← -7 < 0 ⇒
        er ← -5 %(er ← er + c1 ← -7 + 2 ← -5)
    plot(7,6)
```

- 5η επανάληψη

```
%Iteration 5:
x ← 7 ≤ 8 ⇒
    plot(7,6)
    x ← 8 %(x ← x+1 ← 8)
    er ← -5 < 0 ⇒
        er ← -3 %(er ← er + c1 ← -5 + 2 ← -3)
    plot(8,6)
```

- 6η επανάληψη

```
%Iteration 6:
x ← 8 ≤ 8 ⇒
    plot(8,6)
    x ← 9 %(x ← x+1 ← 9)
    er ← -3 < 0 ⇒
        er ← -1 %(er ← er + c1 ← -3 + 2 ← -1)
    plot(9,6)
```

Συνολικά θα φωτιστούν τα σημεία : $(4,5),(5,5),(6,6),(7,6),(8,6)$.

Άσκηση 7. Δίνονται τα σημεία $P_1(3,5)$, $P_2(9,18)$ Θεωρώντας ότι το σημείο P_1 φωτίζεται στην οθόνη, εφαρμόστε τον αλγόριθμο του Bresenham για τον υπολογισμό των 5 αμέσως επόμενων pixels που θα φωτισθούν κατα τη σχεδίαση του ευθύγραμμου τμήματος P_1P_2.

Λύση. Όπως έχουμε δει στη θεωρία, προκειμένου να σχεδιάσουμε την ευθεία του Bresenham για σημεία που ανήκουν στο 2ο οκταμόριο, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα συμμετρικά των σημείων P_1, P_2 ως προς την 1η διχοτόμο, τα οποία θα ανήκουν στο 1ο οκταμόριο. Άρα θα χρησιμοποιήσουμε τα σημεία $P_1'(5,3)$ και $P_2'(18,9)$ και θα χρησιμοποιήσουμε τον γνωστό αλγόριθμο του Bresenham για σχεδιασμό ευθυγράμμου τμήματος στο 1ο οκταμόριο ως εξής:

Πρόγραμμα 2.14: Αλγόριθμος του Bresenham για 1ο οκταμόριο

```
x1, y1 = get_coordinates("Give the coordinates of P1 e.g. (1,2):")
x2, y2 = get_coordinates("Give the coordinates of P2:")
Dx = x2 - x1
Dy = y2 - y1
x = x1
y = y1
c1 = 2 * Dy
er = c1 - Dx
c2 = er - Dx
while x <= 18
    plot(x, y)
    x = x + 1
    if er < 0
        er = er + c1
    else
        y = y + 1
        er = er + c2
    plot(x, y)
end
```

Για τα σημεία $P_1'(5,3)$ και $P_2'(18,9)$ θα έχουμε:

- $x = x_1 = 5$
- $y = y_1 = 3$
- $\Delta x = x_2 - x_1 = 18 - 5 = 13$
- $\Delta y = y_2 - y_1 = 9 - 3 = 6$
- $c_1 = 2 \cdot \Delta y = 2 \cdot 6 = 12$
- $er = c_1 - \Delta x = 12 - 13 = -1$
- $c_2 = er - \Delta x = -1 - 13 = -14$

Ο αλγόριθμος θα τρέξει ως εξής:

- 1η επανάληψη

```
x = 5 <= 18 ⇒
    plot(5, 3)
    x ← 6 %(x = x + 1)
    er = -1 < 0
        er ← 11 %(er = er + c1 = -1 + 12 = 11)
```

- 2η επανάληψη

```
x = 6 ≤ 18 ⇒
    plot(6, 3)
    x ← 7 %(x = x + 1 = 7)
    er = 11 ≥ 0
        y ← 4 %(y = y + 1 = 4)
        er ← -3 %(er = er + c2 = 11 + (-14) = -3)
```

- 3η επανάληψη

```
x = 7 ≤ 18 ⇒
    plot(7, 4)
```

```
        x ← 8 %(x = x + 1 = 8)
        er = -3 < 0
            er ← 9 %(er = er + c1 = -3 + 12 = 9)
```

- 4η επανάληψη

```
    x = 8 ≤ 18 ⇒
        plot(8, 4)
        x ← 9 %(x = x + 1 = 9)
        er = 9 ≥ 0
            y ← 5 %(y = y + 1 = 5)
            er ← -5 %(er = er + c2 = 9 + (-14) = -5)
```

- 5η επανάληψη

```
    x = 9 ≤ 18 ⇒
        plot(9, 5)
        x ← 10 %(x = x + 1 = 10)
        er = -5 < 0
            er ← 7 %(er = er + c1 = -5 + 12 = 7)
```

- 6η επανάληψη

```
    x = 10 ≤ 18 ⇒
        plot(10, 5)
        x ← 11 %(x = x + 1 = 11)
        er = 7 ≥ 0
            y ← 6 %(y = y + 1 = 6)
            er ← -7 %(er = er + c2 = 7 + (-14) = -7)
```

Τα 6 πρώτα σημεία που θα φωτιστούν δηλαδή από τον αλγόριθμο με είσοδο τις συντεταγμένες $P_1^{'}$ και $P_2^{'}$, είναι: $(5,3) \to (6,3) \to (7,4) \to (8,4) \to (9,5) \to (10,5)$.

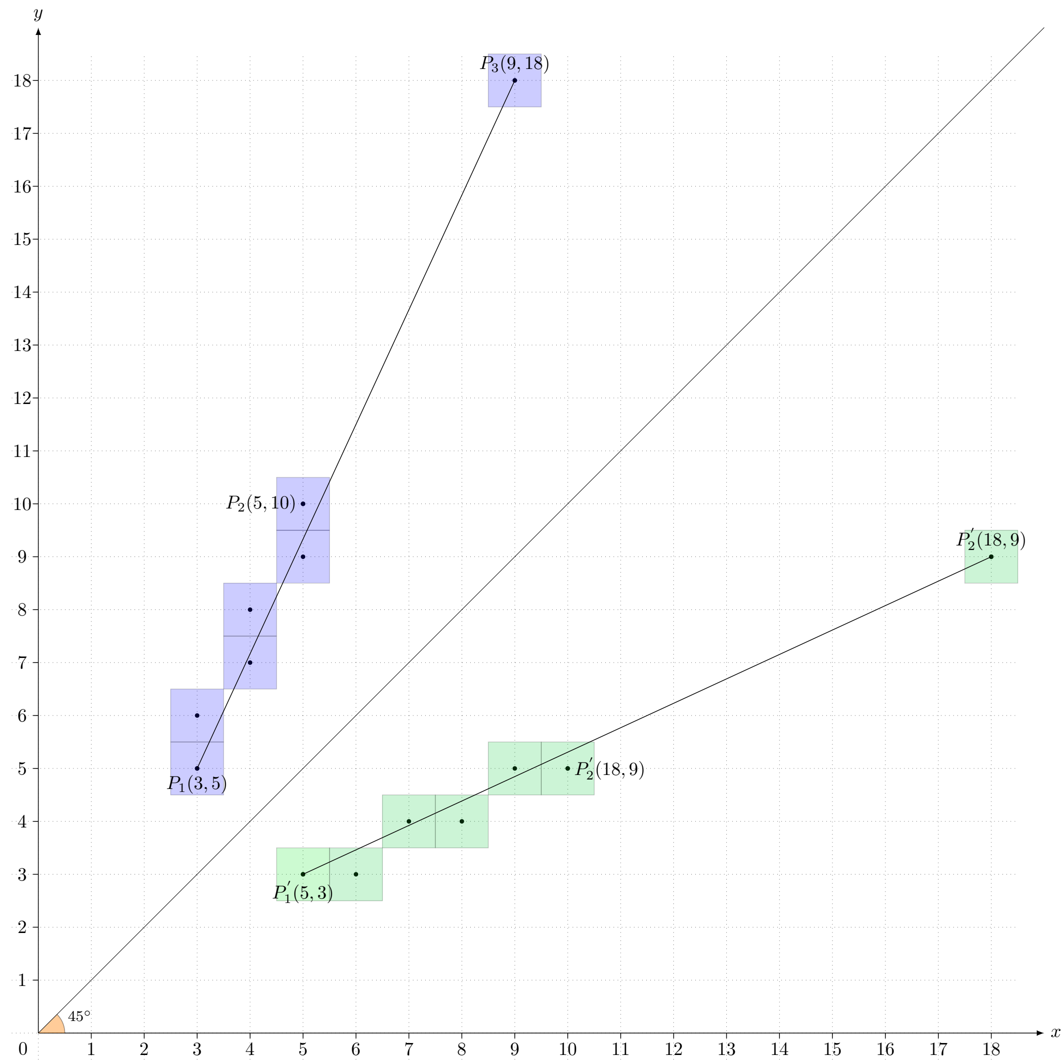
Για να βρούμε λοιπόν τα 5 αμέσως επόμενων pixels που θα φωτισθούν κατα τη σχεδίαση του ευθύγραμμου τμήματος P_1P_2 αρκεί να βρούμε τα συμμετρικά των παραπάνω φωτισμένων pixel ως προς την 1η διχοτόμο.

Τα ζητούμενα δηλαδή σημεία, δεδομένου ότι θα φωτιστεί το pixel με κέντρο $(3,5)$ θα είναι: $(3,6) \to (4,7) \to (4,8) \to (5,9) \to (5,10)$

Άσκηση 8. Να κατασκευαστεί ο αλγόριθμος του Bresenham για το σχεδιασμό κύκλου κέντρου (x,y) και ακτίνας r, στο δεύτερο οκταμόριο.

Λύση. Η μετατροπή του βασικού αλγορίθμου του Bresenham αφορά τη μετακίνηση του κέντρου του κύκλου από το $O(0,0)$ στο (x_c,y_c). Συγκεκριμένα, η μετατροπή αφορά την εκτύπωση του σημείου $(x+x_c, y+y_c)$ αντί του σημείου (x,y) στην εντολή plot :

```
r = readline()
xc = readline()
yc = readline()
x=0
y = r
error = 3 -2r
while x <= y plot(x+xc, y+ yc)
```



Σχήμα 2.31: Παράσταση ευθυγράμμων τμημάτων P_1P_2 και $P_1'P_2'$ σύμφωνα με τον αλγόριθμο του Bresenham $P_1(3,5), P_2(9,18)$ για σημεία $P_1'(5,3), P_2'(18,9)$

```
    plot(x+xc, y+yc)
    x=x+1
    if error >= 0
        y=y-1
        error = error - 4y
    end
    error = error + 4x + 2 + c2
end
```

Άσκηση 9. Να υπολογιστούν ποια θα είναι τα τρία επόμενα προς φωτισμό pixels, σύμφωνα με τον αλγόριθμο του Bresenham, για σχεδιασμό κύκλου κέντρου $K(7,3)$ και ακτίνας $r=5$, στο πρώτο οκταμόριο.

Λύση. Το πρώτο σημείο είναι το $A(7+5,3) \equiv A(12,3)$. Για τα επόμενα σημεία, υπολογίζεται το κάθε σημείο σύμφωνα με τον αλγόριθμο του Bresenham με κέντρο το $O(0,0)$, στη συνέχεια το συμμετρικό του ως προς την ευθεία $y=x$ και τέλος μετατοπίζεται κατά $(7,3)$:

1η Επανάληψη

- $d_1 = y_1^2 - y^2 = y_1^2 - \left[r^2 - (x_1+1)^2\right] = 5^2 - \left[5^2 - (0+1)^2\right] = 1,$

- $d_2 = y^2 - (y_1+1)^2 = \left[r^2 - (x_1+1)^2\right] - (y_1+1)^2 = \left[5^2 - (0+1)^2\right] - (5+1)^2 = -12.$

Άρα $d_1 - d_2 = 1 - (-12) = 13 \geq 0$
$Rightarrow (1,4) \xRightarrow{\sim y=x} (4,1) \xRightarrow{+(7,3)} (11,4).$
<u>2η Επανάληψη</u>

- $d_1 = y_2^2 - y^2 = y_2^2 - \left[r^2 - (x_2+1)^2\right] = 4^2 - \left[5^2 - (1+1)^2\right] = -5,$
- $d_2 = y^2 - (y_2+1)^2 = \left[r^2 - (x_2+1)^2\right] - (y_2+1)^2 = \left[5^2 - (1+1)^2\right] - (4+1)^2 = -4.$

Άρα $d_1 - d_2 = -5 - (-4) = -1 < 0$
$Rightarrow (2,4) \xRightarrow{\sim y=x} (4,2) \xRightarrow{+(7,3)} (11,5).$
<u>3η Επανάληψη</u>

- $d_1 = y_3^2 - y^2 = y_3^2 - \left[r^2 - (x_3+1)^2\right] = 4^2 - \left[5^2 - (2+1)^2\right] = 0,$
- $d_2 = y^2 - (y_3+1)^2 = \left[r^2 - (x_3+1)^2\right] - (y_3+1)^2 = \left[5^2 - (2+1)^2\right] - (4+1)^2 = -9.$

Άρα $d_1 - d_2 = 0 - (-9) = 9 \geq 0 \Rightarrow (3,3) \xRightarrow{\sim y=x} (3,3) \xRightarrow{(+7,3)} (10,6).$
Δηλαδή τα pixels που θα φωτιστούν είναι τα:
$A(12,3) \to (11,4) \to (11,5) to (10,6).$

Άσκηση 10. Να υπολογιστούν ποια θα είναι τα επόμενα προς φωτισμό pixels, σύμφωνα με τον αλγόριθμο του Bresenham, για σχεδιασμό κύκλου:

i) Στο 2ο οκταμόριο με κέντρο $K(0,0)$ και ακτίνα $r = 5$.

ii) Στο 3ο οκταμόριο με κέντρο $K(7,3)$ και ακτίνα $r = 5$.

Άσκηση 11. Δίνεται κύκλος με κέντρο $(7,7)$ και ακτίνα $r = 10$.

- Ποιό είναι το πρώτο pixel που θα φωτίσει ο αλγόριθμός σχεδιασμού κύκλου του Bresenham για το 2ο οκταμόριο;
- Ποια είναι τα 2 αμέσως επόμενα pixel που θα φωτίσει ο αλγόριθμός σχεδιασμού κύκλου του Bresenham για το 2ο οκταμόριο;
- Να υπολογίστε τα pixels που θα φωτισθούν από την εφαρμογή της συμμετρίας των 8 δρόμων.

Πρόγραμμα 2.15: Αλγόριθμος του Bresenham για σχεδιασμό κύκλου

Λύση.

```
function brescircle(xc, yc, r)
    # (xc, yc) are the coordinates of the circle's centre
    # r is the radius of the circle
    x = 0
    y = r
    error = 3 - 2 * r

    while x <= y
        plot(x+xc, y+yc, 0)
        plot(x+xc, -y+yc, 0)
        plot(-x+xc, y+yc, 0)
        plot(-x+xc, -y+yc, 0)
        plot(y+xc, x+yc, 0)
        plot(-y+xc, x+yc, 0)
        plot(y+xc, -x+yc, 0)
        plot(-y+xc, -x+yc, 0)
        x = x + 1
```

```
        if error > 0
            y = y - 1
            error = error - 4*y
        end
        error = error + 4*x + 2
    end
end
```

Για τον κύκλο με κέντρο $K(7,7)$ και ακτίνα $r = 10$, θα έχουμε:

- $x = 0$
- $y = 10$
- $error = 3 - 2 \cdot r = 3 - 20 = -17$

- 1η επανάληψη

```
        x = 0 <= 10 ⇒
            plot(7, 17) % (x+xc, y+yc)
            plot(7, -3)  % (x+xc, -y+yc)
            plot(-7, 17) % (-x+xc, y+yc)
            plot(-7, -3) % (-x+xc, -y+yc)
            plot(17, 7)  % (y+xc, x+yc)
            plot(-17, 7) % (-y+xc, x+yc)
            plot(17, -7) % (y+xc, -x+yc)
            plot(-17, -7) % (-y+xc, -x+yc)
            x ← 1 %(x = x + 1)
            error = -17 < 0
                error ← -17 + 4*1 + 2 ← -11 %(error = error + 4*x + 2)
```

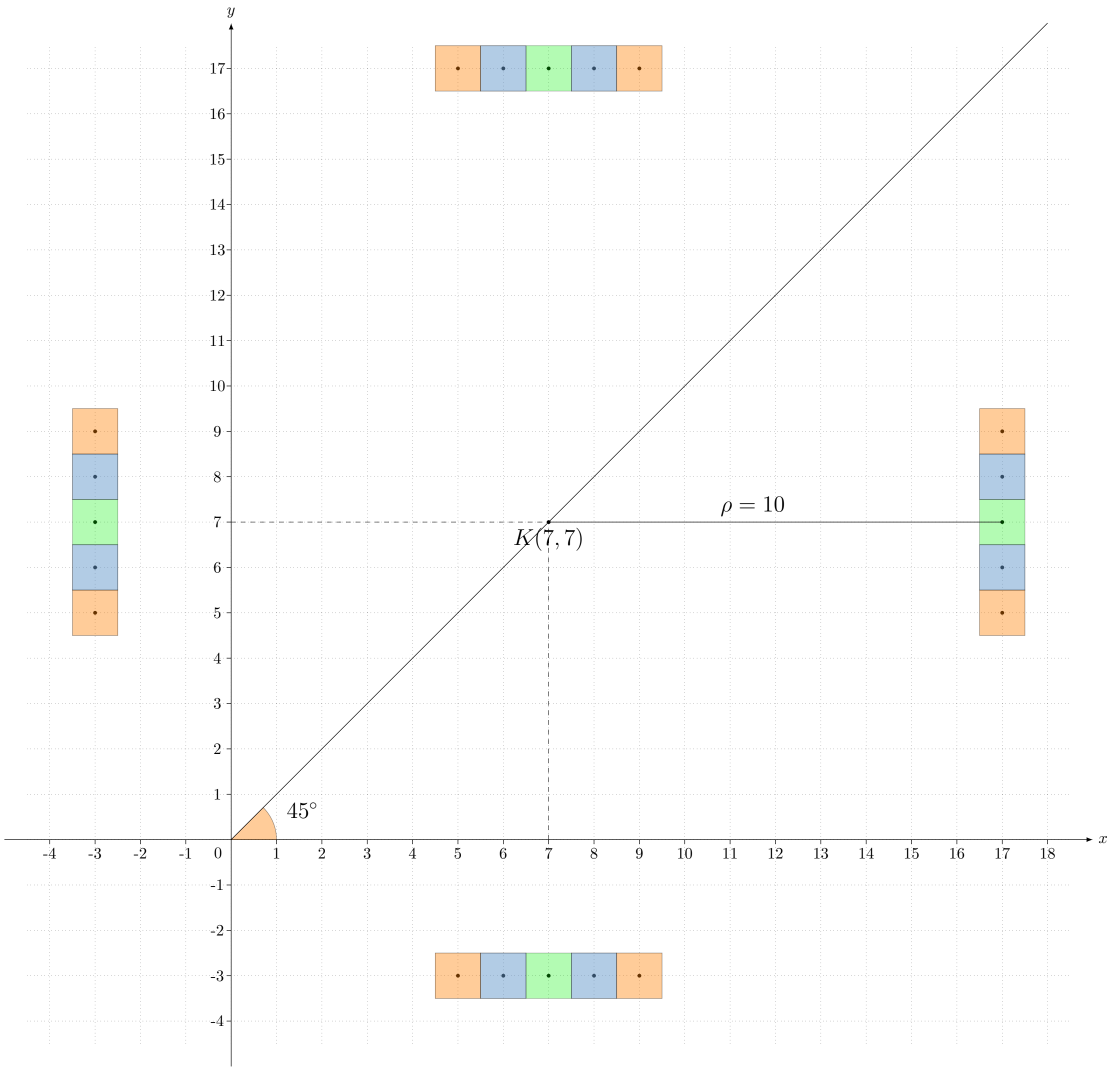
- 2η επανάληψη

```
        x = 1 <= 10 ⇒
            plot(8, 17) % (x+xc, y+yc)
            plot(8, -3)  % (x+xc, -y+yc)
            plot(-8, 17) % (-x+xc, y+yc)
            plot(-8, -3) % (-x+xc, -y+yc)
            plot(17, 8)  % (y+xc, x+yc)
            plot(-17, 8) % (-y+xc, x+yc)
            plot(17, -8) % (y+xc, -x+yc)
            plot(-17, -8) % (-y+xc, -x+yc)
            x ← 2 %(x = x + 1)
            error = -11 < 0
                error ← -11 + 4*2 + 2 ← -1 %(error = error + 4*x + 2)
```

- 3η επανάληψη

```
        x = 2 <= 10 ⇒
            plot(9, 17) % (x+xc, y+yc)
            plot(9, -3)  % (x+xc, -y+yc)
            plot(-9, 17) % (-x+xc, y+yc)
            plot(-9, -3) % (-x+xc, -y+yc)
            plot(17, 9)  % (y+xc, x+yc)
            plot(-17, 9) % (-y+xc, x+yc)
            plot(17, -9) % (y+xc, -x+yc)
            plot(-17, -9) % (-y+xc, -x+yc)
            x ← 3 %(x = x + 1)
            error = -1 < 0
```

```
            error ← -1 + 4*3 + 2 ← 13 %(error = error + 4*x + 2)
```



Σχήμα 2.32: Παράσταση πρώτων 3 επαναλήψεων αλγορίθμου Bresenham για κύκλο κέντρου $(7, 7)$ και ακτίνας $r = 10$. Τα χρώματα για την 1η, 2η και 3η επανάληψη είναι μπλε και πορτοκαλί αντίστοιχα.

Άσκηση 12. Ποιος είναι ο αναγωγικός τύπος για τη μεταβλητή απόφασης $f_{mid2,i}$ στην περίπτωση σχεδιασμού έλλειψης στην περιοχή 2 σύμφωνα με τον αλγόριθμο του Kappel;

Λύση. Έστω ότι έχει φωτισθεί το $pixel$ (x_i, y_i). Επειδή βρισκόμαστε στην περιοχή 2 το επόμενο προς φωτισμό $pixel$ θα είναι το $(x_i - 1, y_i + 1)$ ή το $(x_i - 1, y_i)$

$$f_{mid2,i+1} = b^2(x_i - 1 - 1)^2 + a^2(y_{i+1} + \frac{1}{2})^2 - a^2b^2.$$

Προσθαφαίροντας το $a^2(y_i + \frac{1}{2})^2$, προκύπτει:

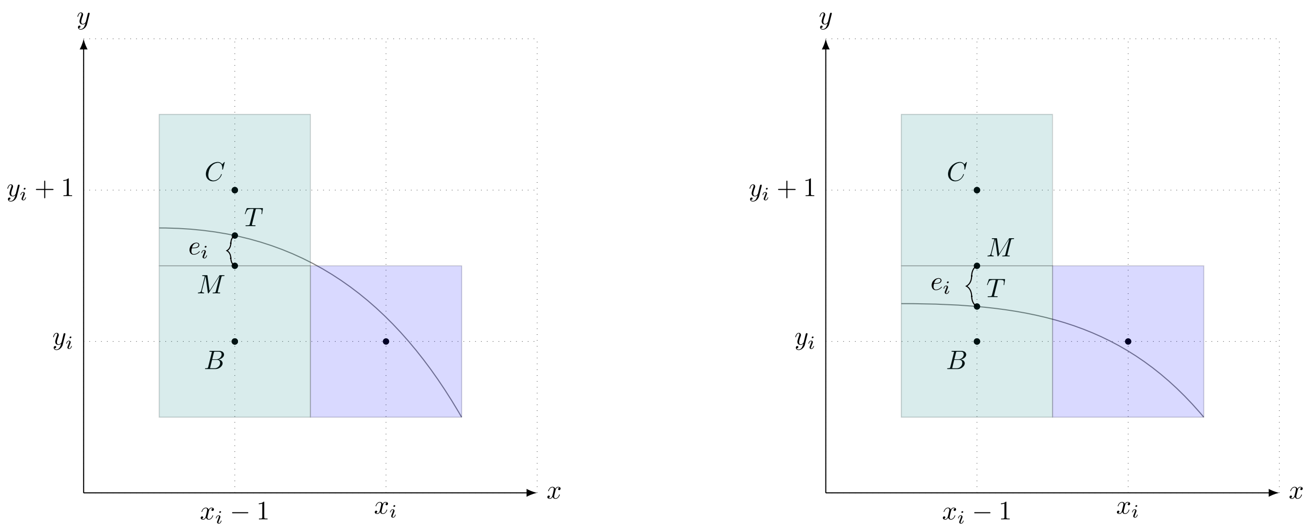
$$
\begin{aligned}
f_{mid2,i+1} = {} & \underbrace{b^2(x_i-1)^2 + a^2(y_i+\frac{1}{2})^2 - a^2b^2}_{f_{mid2,i}} - a^2(y_i+\frac{1}{2})^2 - \\
& - 2b^2(x_i-1) + b^2 + a^2y_{i+1}^2 + a^2y_{i+1} + \frac{a^2}{4} = \\
= {} & f_{mid2,i} - a^2(y_i+\frac{1}{2})^2 - 2b^2(x_i-1) + b^2 + a^2y_{i+1}^2 + a^2y_{i+1} + \frac{a^2}{4} = \\
= {} & f_{mid2,i} - a^2y_i^2 - a^2y_i - \frac{a^2}{4} - 2b^2(x_i-1) + b^2 + a^2y_{i+1}^2 + a^2y_{i+1} + \frac{a^2}{4} = \\
= {} & f_{mid2,i} + a^2(y_{i+1}^2 - y_i^2) + a^2(y_{i+1}-y_i) - 2b^2(x_i-1) + b^2.
\end{aligned}
$$

Άρα έχουμε ότι ο αναδρομικός τύπος του $f_{mid2,i}$ είναι:

$f_{mid2,i}$	Επιλογή σημείου
< 0	$e_i > 0 \Rightarrow$ Το T πάνω από το M, επιλογή του σημείου C
≥ 0	$e_i \leq 0 \Rightarrow$ Το T κάτω από το M, επιλογή του σημείου

$f_{mid2,i} < 0$	$f_{mid2,i} - 2b^2(x_i-1) + b^2 + 2a^2y_{i+1}$
$f_{mid2,i} \geq 0$	$f_{mid2,i} - 2b^2(x_i-1) + b^2$

$$f_{mid2,i+1} = f_{mid2,i} + a^2(y_{i+1}^2 - y_i^2) + a^2(y_{i+1}-y_i) - 2b^2(x_i-1) + b^2.$$



Σχήμα 2.33

Άσκηση 13. Να υπολογιστούν ποια θα είναι τα επόμενα προς φωτισμό pixels, σύμφωνα με τον αλγόριθμο του Kappel, για σχεδιασμό έλλειψης κέντρου $K(0,0)$ με $2\alpha = 10, 2b = 6$

i) Στην περιοχή 1.

ii) Στην περιοχή 2.

Κεφάλαιο 3

Μετασχηματισμοί στο Επίπεδο – Παραστάσεις με Πίνακες

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τα δύο είδη μετασχηματισμών, δηλαδή τους βασικούς μετασχηματισμούς αξόνων συντεταγμένων και τους βασικούς γεωμετρικούς μετασχηματισμούς. Οι αντίστοιχοι μετασχηματισμοί των δύο παραπάνω κατηγοριών είναι:

Μετασχηματισμοί αξόνων	**Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί**
1. Μεταφορά αρχής.	1. Μεταφορά σχήματος.
2. Αλλαγή κλίμακας αξόνων συντεταγμένων.	2. Αλλαγή κλίμακας συντεταγμένων, σχετικά με την παράσταση ενός αντικειμένου (μεγέθυνση – σμίκρυνση).
3. Στροφή των αξόνων συντεταγμένων.	3. Στροφή σχήματος γύρω από την αρχή των αξόνων.
4. Συμμετρία ως προς άξονα.	4. Συμμετρία ως προς άξονα.
5. Αντίστροφοι των 1 έως 4 μετασχηματισμοί.	5. Αντίστροφοι των 1 έως 4 μετασχηματισμοί.

Μέχρι τώρα θεωρούσαμε ότι η αρχή των αξόνων, οι άξονες καθώς και η κλίμακα επί των αξόνων, συμπίπτουν με την αρχή, τους άξονες και την κλίμακα της οθόνης. Το σύστημα συντεταγμένων της οθόνης καλείται και σύστημα του παρατηρητή. Γενικά δεν υπάρχει σύμπτωση του αρχικού (πραγματικού) συστήματος με το σύστημα του παρατηρητή. Τέλος, ο όρος "βασικοί μετασχηματισμοί" προκύπτει από τη δυνατότητα κάθε άλλος μετασχηματισμός να μπορεί να αντιμετωπιστεί με συνδυασμό των αντίστοιχων βασικών μετασχηματισμών.

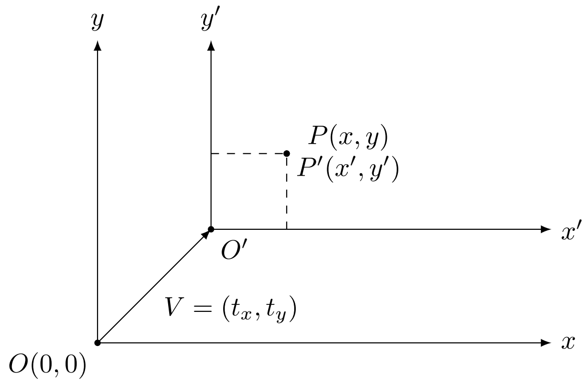
3.1 Βασικοί μετασχηματισμοί αξόνων συντεταγμένων

3.1.1 Παράλληλη μεταφορά αρχής συντεταγμένων

Έστω (t_x, t_y) οι συντεταγμένες της νέας αρχής σχετικά με την παλαιά. Στο νέο σύστημα οι συντεταγμένες αρχής του παλαιού είναι $(-t_x, -t_y)$. Άρα για το σημείο $P(x, y)$ θα έχουμε σαν συντεταγμένες του στο σύστημα $x'Oy'$ τις εξής:

$$(x' = x - t_x,\ y' = y - t_y).$$

Συμβολισμός μετασχηματισμού:	$\bar{T}_{\mathbf{v}}$
Επομένως έχουμε:	$(x', y') = \bar{T}_{\mathbf{v}}(x, y)$
όπου	$x' = x - t_x$ και $y' = y - t_y$



Σχήμα 3.1: Παράλληλη μεταφορά αρχής συντεταγμένων

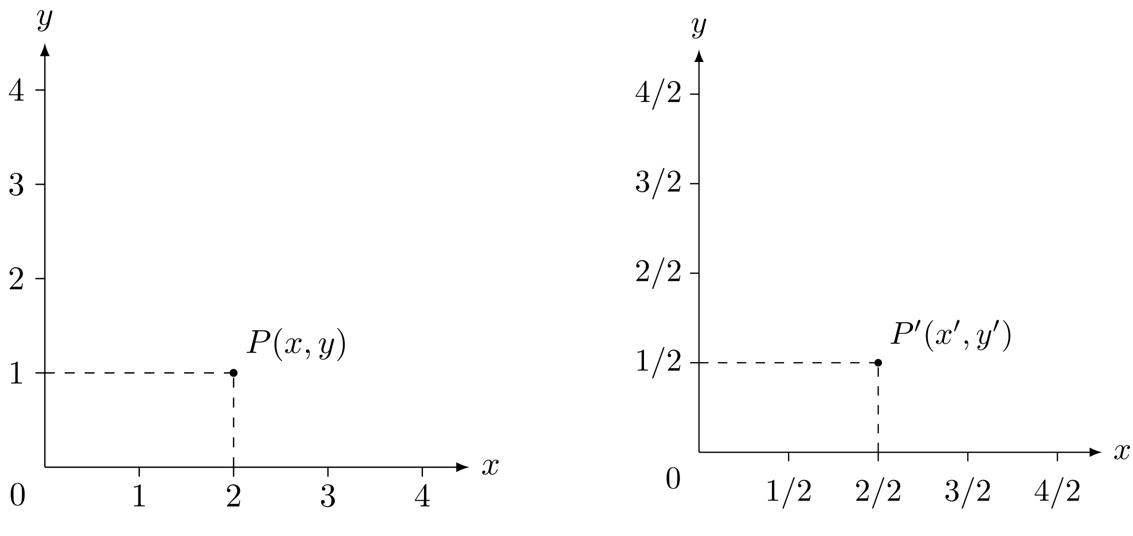
3.2 Αλλαγή κλίμακας αξόνων συντεταγμένων

Θεωρώντας ότι το σύστημα συντεταγμένων δεν αλλάζει ούτε σε θέση ούτε σε διεύθυνση μπορούμε να αλλάξουμε τις μονάδες μέτρησης κατά μήκος των δύο αξόνων. Έστω S_x και S_y οι ``κλίμακες'' (παράγοντες) βάσει των οποίων προκύπτουν, οι νέες μονάδες μέτρησης.

Συμβολισμός μετασχηματισμού: $\bar{S}_{S_x,S_y}$

Επομένως έχουμε: $(x', y') = \bar{S}_{S_x,S_y}(x, y)$

όπου $x' = \dfrac{1}{S_x}x$ και $y' = \dfrac{1}{S_y}y$.



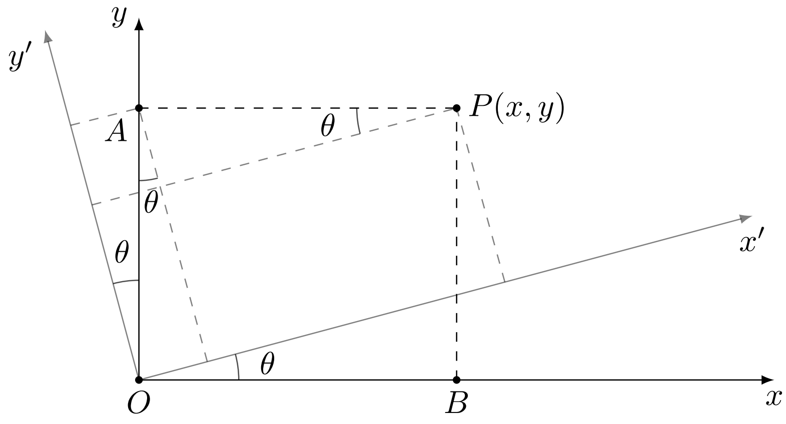
Σχήμα 3.2: Παράδειγμα αλλαγής κλίμακας αξόνων συντεταγμένων για $S_x = 2$ και $S_y = 2$.

3.2.1 Στροφή των αξόνων συντεταγμένων

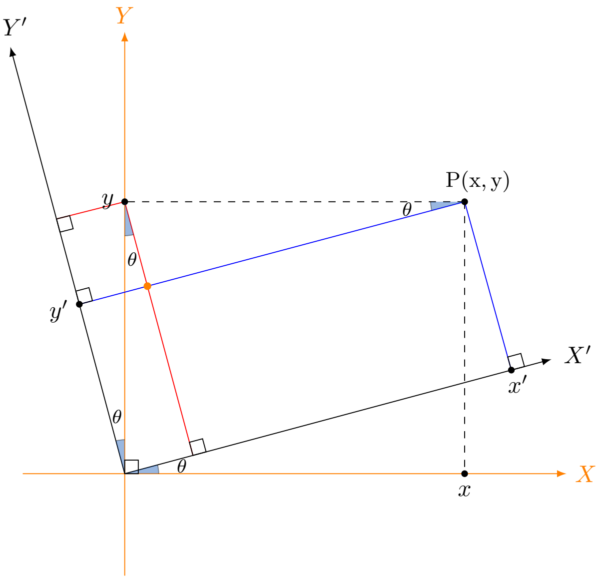
Έστω ότι το σύστημα xOy στρέφει κατά γωνία θ γύρω από το O.

Συμβολισμός μετασχηματισμού: $\bar{R}_\theta$

Επομένως: $(x', y') = \bar{R}_\theta(x, y)$



Σχήμα 3.3: Στροφή συστήματος αξόνων κατά γωνία θ γύρω από την αρχή των αξόνων O.



Σχήμα 3.4: Στροφή συστήματος αξόνων κατά γωνία θ γύρω από την αρχή των αξόνων O.

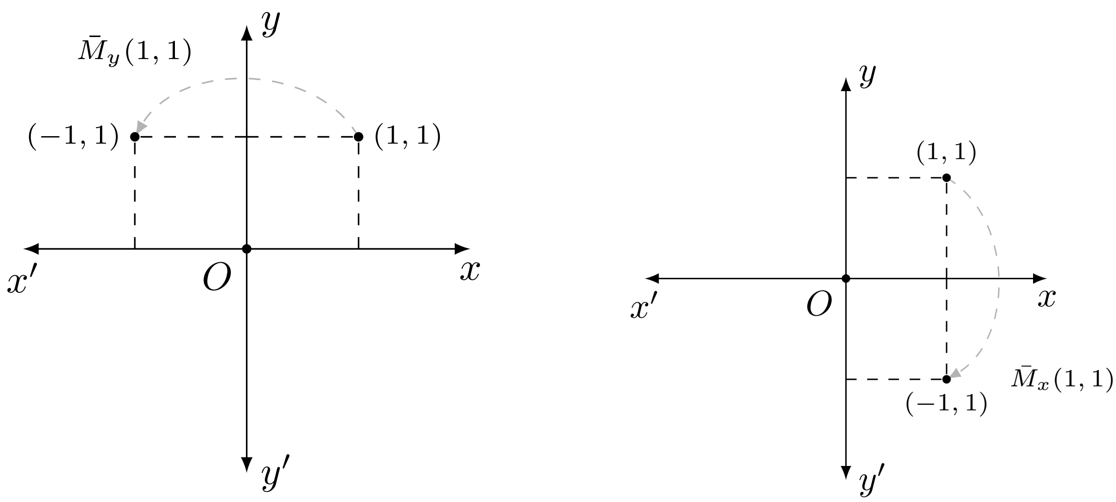
ΝΑ μπουν τα B' κλπ στο σχήμα Από το σχήμα έχουμε ότι

$$OB' = y\sin\theta \quad \text{και} \quad B'X'' = x\cos\theta$$

Άρα $x' = OX = OB' + B'X = x\cos\theta + y\sin\theta$. Άρα $y' = OY = A'O - A'Y = y\cos\theta - x\sin\theta$.

3.2.2 Συμμετρία ως προς άξονα

Συμβολισμός μετασχηματισμού:	$\bar{M}_x$
Επομένως:	$(x', y') = \bar{M}_x(x, y)$ όπου $x' = x, y' = -y$
	$(x', y') = \bar{M}_y(x, y)$ όπου $x' = -x, y' = y$



Σχήμα 3.5: Παράδειγμα συμμετρίας ως προς άξονα

3.2.3 Αντίστροφοι μετασχηματισμοί αξόνων συντεταγμένων

Μεταφορά (μεταφορά στην αντίθετη κατεύθυνση):	$\bar{T}_v^{-1} = \bar{T}_{-v}$
Κλίμακα:	$\bar{S}_{S_x,S_y}^{-1} = \bar{S}_{\frac{1}{S_x},\frac{1}{S_y}}$
Στροφή(στροφή στην αντίθετη κατεύθηνση):	$\bar{R}_\theta^{-1} = \bar{R}_{-\theta}$
Συμμετρία:	$\bar{M_x}^{-1} = \bar{M}_x$ και $\bar{M_y}^{-1} = \bar{M}_y$

3.3 Βασικοί γεωμετρικοί μετασχηματισμοί.

Στους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς πρόκειται ουσιαστικά για ``αλλαγή της θέσης" στην οποία βρίσκεται ένα επίπεδο σχήμα, θεωρώντας τους άξονες και γενικά το σύστημα συντεταγμένων σταθερό.

3.3.1 Μεταφορά σχήματος

Συμβολισμός: $T_v : P' = T_v(P)$ όπου $x' = x + t_x$ και $y' = y + t_y$.

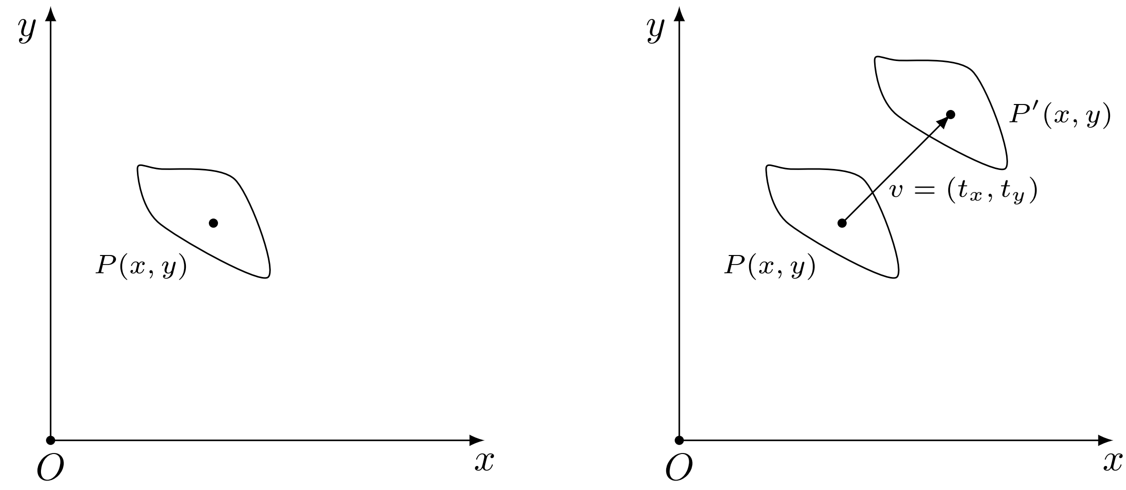
3.3.2 Αλλαγή κλίμακας (Μεγέθυνση - σμίκρυνση)

Ο μετασχηματισμός κλίμακας είναι εδώ μια διαδικασία ``μεγέθυνσης" ή ``σμίκρυνσης" των διαστάσεων ενός σχήματος. Κρατώντας σταθερή την αρχή και τους άξονες δίνουμε μία μεγέθυνση όλης της περιοχής του σχήματος κατά S_x στη διεύθυνση του θετικού άξονα x και αντίστοιχα κατά S_y στη διεύθυνση του θετικού άξονα y. Φυσικά επειδή εδώ πρόκειται για μεγέθυνση ισχύει $S_x > 1$ και $S_y > 1$. Αντίθετα όταν πρόκειται για σμίκρυνση έχουμε $S_x < 1$ και $S_y < 1$. Τέλος υπάρχουν και συνδυασμοί των τεσσάρων περιπτώσεων.

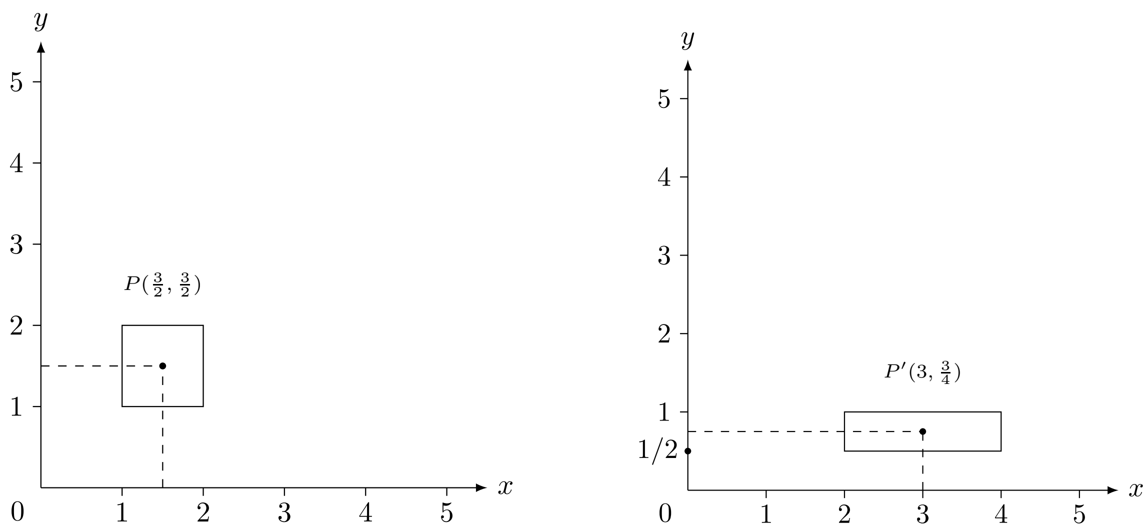
Συμβολισμός μετασχηματισμού: $S_{S_x,S_y} : P' = S_{S_x,S_y}(P)$ όπου $x' = S_x \cdot x$ και $y' = S_y \cdot y$.

Παράδειγμα για $S_x = 2$ και $S_y = \frac{1}{2}$:

Παρατήρηση. Σε αυτό το μετασχηματισμό το μόνο σημείο που δεν μετασχηματίζεται είναι η αρχή των αξόνων.



Σχήμα 3.6: Παράδειγμα μεταφοράς σχήματος κατά διάνυσμα $v = (t_x, t_y)$



Σχήμα 3.7: Παράδειγμα αλλαγής κλίμακας συντεταγμένων (Σμίκρυνση στον y και μεγέθυνση στον x)

3.3.3 Στροφή σχήματος γύρω από την αρχή των αξόνων

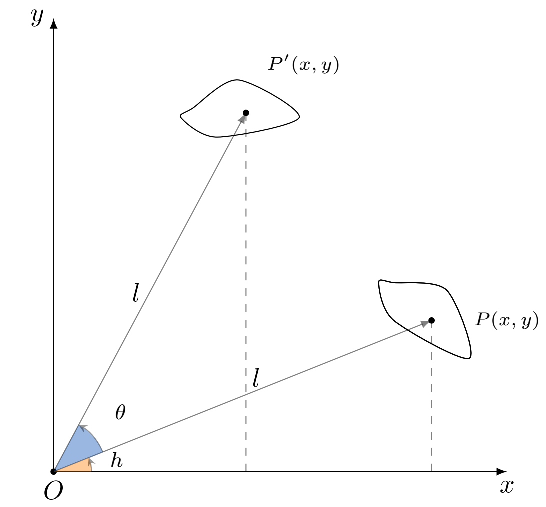
Συμβολισμός μετασχηματισμού: R_θ και επομένως $P' = R_\theta(P)$ με :
$x = l\cosh$ $l = \sqrt{x^2 + y^2}$, $y = l\sinh$

Άρα τελικά : $x' = l\cos(\theta + h) = l(\cosh\cos\theta - \sinh\sin\theta) = x\cos\theta - y\sin\theta$

Ομοίως προκύπτει ότι $y' = x\sin\theta + y\cos\theta$.

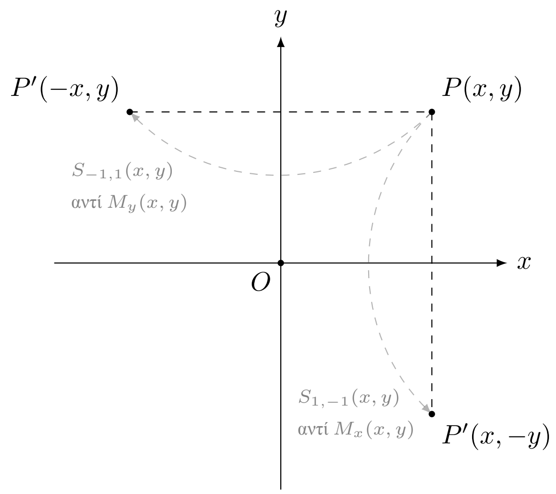
3.3.4 Συμμετρία ως προς άξονα

Συμβολισμός μετασχηματισμού: M_x, M_y
$P' = M_x(P)$ όπου $x' = x$ και $y' = -y$
$P' = M_y(P)$ όπου $x' = -x$ και $y' = y$.



Σχήμα 3.8: Στροφή σχήματος γύρω από την αρχή των αξόνων κατά γωνία θ

Τη συμμετρία μπορούμε εδώ να τη θεωρήσουμε σαν μετασχηματισμό κλίμακας με $S_x = 1, S_y = -1$ για την περίπτωση M_x και $S_x = -1, S_y = 1$ για την M_y.



Σχήμα 3.9: Παραδείγματα συμμετρίας σημείου ως προς άξονες

3.3.5 Αντίστροφοι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί

Μεταφορά: $T_v^{-1} = T_{-v}$
Κλίμακα: $S_{S_x,S_y}^{-1} = S_{\frac{1}{S_x},\frac{1}{S_y}}$
Στροφή: $R^{-1} = R_{-\theta}$
Συμμετρία: $M_x^{-1} = M_x$ και $M_y^{-1} = M_y$

Είναι φανερό ότι οποιοσδήποτε μετασχηματισμός είτε αξόνων είτε γεωμετρικός μπορεί να πραγματοποιηθεί με επαναληπτική εφαρμογή των παραπάνω 10 συνολικά (και 10 αντιστρόφων) βασικών μετα-

σχηματισμών. Γενικά μπορούμε να πούμε ότι αυτές οι απεικονίσεις είναι της μορφής:
$(x, y) \rightarrow (f_1(x, y), f_2(x, y))$ όπου f_1 και f_2 είναι και οι δύο γραμμικές απεικονίσεις ως προς x και y.
Τέτοιου είδους απεικονίσεις μπορούν να παρασταθούν απλά με πίνακες μετασχηματισμών.

3.4 Πίνακες μετασχηματισμών

Εδώ τα σημεία παριστάνονται με διανύσματα για να μπορούμε να εφαρμόσουμε πράξεις πινάκων.

3.4.1 Πίνακες μετασχηματισμού αξόνων συντεταγμένων

α) Μεταφορά αρχής:

$$\bar{T}_v = \begin{bmatrix} -t_x \\ -t_y \end{bmatrix} \text{ ή } \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t_x \\ -t_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - t_x \\ y - t_y \end{bmatrix}$$

β) Μετασχηματισμός κλίμακας:

$$\bar{S}_{S_x,S_y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{S_x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{S_y} \end{bmatrix} \text{ ή } \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{S_x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{S_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{S_x} \\ \frac{y}{S_y} \end{bmatrix}$$

γ) Στροφή αξόνων:

$$\bar{R}_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \text{ ή } \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\theta + y\sin\theta \\ -x\sin\theta + y\cos\theta \end{bmatrix}$$

δ) Συμμετρία ως προς άξονα (x):

$$\bar{M}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ ή } \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

Πριν προχωρήσουμε στους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς πρέπει να αναφέρουμε ότι εκτός από τη μεταφορά όλες οι απεικονίσεις είναι ομοιόμορφες (τετραγωνικοί πίνακες 2x2). Είναι γνωστό ότι <u>απεικονίσεις σημείων οι οποίες πραγματοποιούνται</u> με πίνακες έχουν πάντοτε ένα σταθερό σημείο <u>(Fixpoint)</u> την αρχή των αξόνων δηλαδή:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

για τυχαία a, b, c, d. Εάν τώρα θέλουμε να παραστήσουμε με πίνακες και μετασχηματισμούς όπου όλα τα σημεία μπορούν να μετασχηματισθούν τότε πρέπει να προβλέψουμε ώστε το σταθερό σημείο να βρίσκεται εκτός του επιπέδου απεικόνισης. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε εδώ τις "<u>ομογενείς συντεταγμένες</u>". Εισάγουμε δηλαδή μια τρίτη διάσταση και σχεδιάζουμε στο επίπεδο $z = 1$ (το θεωρούμε σαν βασικό επίπεδο). Οι μετασχηματισμοί πραγματοποιούνται τώρα στο χώρο με πίνακες 3×3 το δε σταθερό σημείο $(0, 0, 0)$ βρίσκεται εκτός του επιπέδου σχεδίασης $z = 1$. Πίνακες των οποίων η τελευταία γραμμή είναι $(0, 0, 1)$ απεικονίζουν σημεία του επιπέδου $z = 1$ και στο επίπεδο $z = 1$ διότι:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

Οι παραπάνω μετασχηματισμοί α) έως δ) γίνονται:
α')

$$\bar{T}_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -t_x \\ 0 & 1 & -t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -t_x \\ 0 & 1 & -t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - t_x \\ y - t_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

β')

$$\bar{S}_{S_x,S_y} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{S_x} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{S_y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

γ')

$$\bar{R}_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

δ')

$$\bar{M}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ανάλογα κατασκευάζονται και οι πίνακες των αντίστροφων μετασχηματισμών αξόνων.

3.3.2 Πίνακες γεωμετρικών μετασχηματισμών.

α)

$$T_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

β)

$$S_{S_x,S_y} = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

γ)

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

δ)

$$M_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ανάλογα κατασκευάζονται και οι πίνακες των αντίστροφων γεωμετρικών μετασχηματισμών.

3.5 Σύνθεση μετασχηματισμών

Είναι φανερό ότι κάνοντας χρήση της προσεταιριστικής ιδιότητας του πολλαπλασιασμού πινάκων μπορούμε να παραστήσουμε **μία ακολουθία μετασχηματισμών** (που εφαρμόζονται πάνω σε μία εικόνα) **με έναν μόνο πίνακα.**

Έστω γενικά $M_1, M_2, \ldots, M_n$ μετασχηματισμοί που εφαρμόζονται με τη σειρά αυτή πάνω σε μία εικόνα. Οι αντίστοιχοι ομογενείς πίνακες είναι $\Pi_i, i = 1(\text{ή } n)$. Ο συνολικός μετασχηματισμός κάθε σημείου της εικόνας μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \Pi_n(\Pi_{n-1}(\ldots(\Pi_2(\Pi_1 \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix})))) = ((\Pi_n\Pi_{n-1})\Pi_{n-2})\ldots\Pi_1) \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

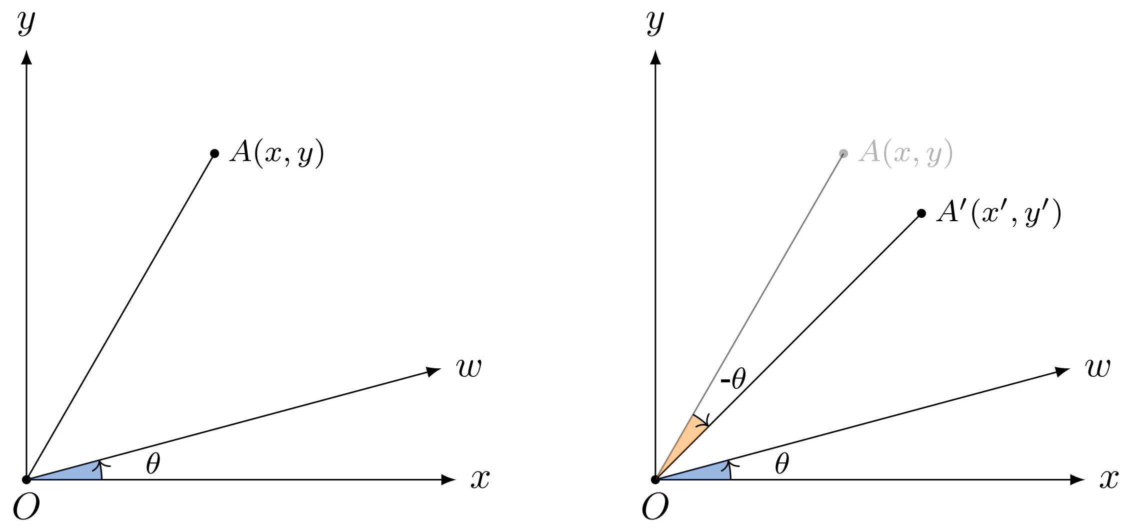
ή απλά:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \Pi_n \Pi_{n-1} \Pi_{n-2} \dots \Pi_1 \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ο συνολικός μετασχηματισμός λοιπόν παρουσιάζεται με έναν πίνακα ο οποίος υπολογίζεται μία φορά και στη συνέχεια πολλαπλασιάζεται με τα εκάστοτε σημεία της εικόνας.

3.6 Παραδείγματα μετασχηματισμών στο επίπεδο

Παράδειγμα 3. Να υπολογιστεί ο πίνακας μετασχηματισμού της συμμετρικής απεικόνισης εικόνας ως προς άξονα w ο οποίος σχηματίζει γωνία θ με τον θετικό άξονα των x.



Σχήμα 3.10: Παράδειγμα μεταφοράς σχήματος κατά διάνυσμα $v = (t_x, t_y)$

Όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.11 ο μετασχηματισμός μπορεί να προκύψει ως εξής:

1. Στροφή της εικόνας κατά γωνία $-\theta$. $(R_{-\theta})$
2. Συμμετρία ως προς άξονα x. (M_x)
3. Στροφή της εικόνας κατά γωνία θ. (R_θ)

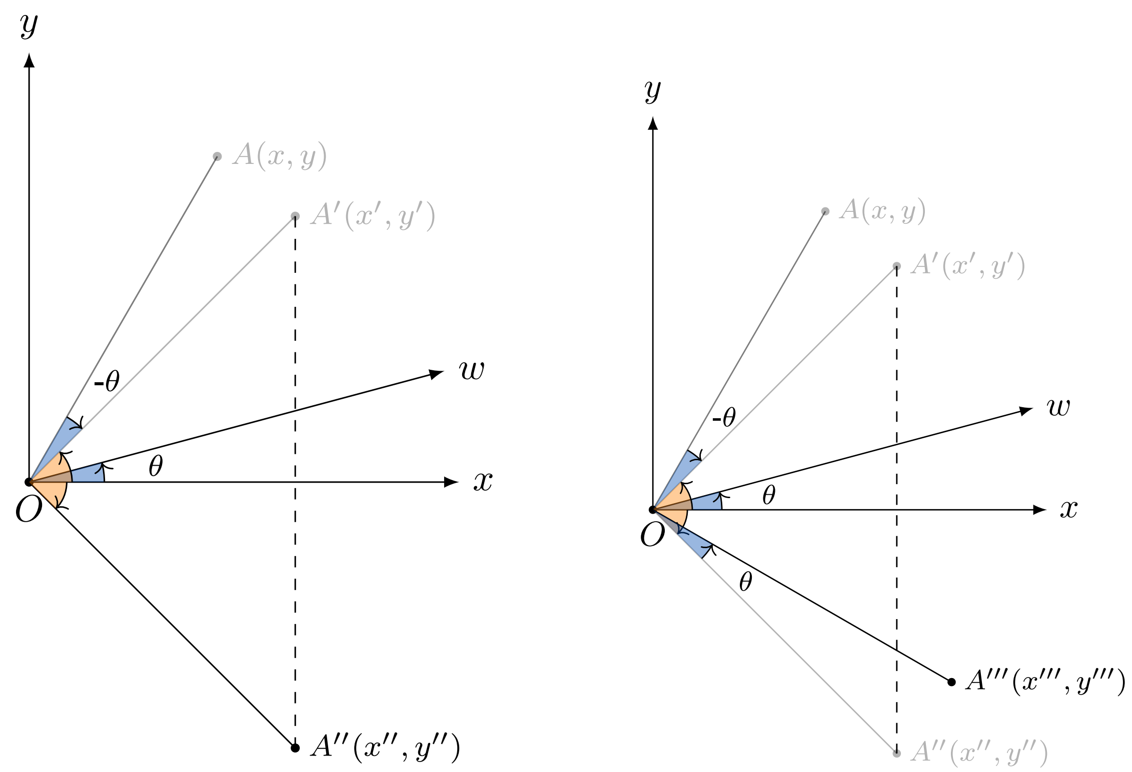
$$\text{Βήμα 1:} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) & 0 \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \Pi_1 \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Βήμα 2:} \quad \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \Pi_2 \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Βήμα 3:} \quad \begin{bmatrix} x''' \\ y''' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{bmatrix} = \Pi_3 \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{bmatrix}$$

Άρα τελικά:

$$\begin{bmatrix} x''' \\ y''' \\ 1 \end{bmatrix} = \Pi_3(\Pi_2(\Pi_1 \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}))$$



Σχήμα 3.11: Παράδειγμα μεταφοράς σχήματος κατά διάνυσμα $v = (t_x, t_y)$

Επειδή ο πολλαπλασιασμός πινάκων είναι πράξη προσεταιριστική, θα έχουμε:

$$\begin{bmatrix} x''' \\ y''' \\ 1 \end{bmatrix} = (\Pi_3 \cdot \Pi_2 \cdot \Pi_1) \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

και επομένως μπορούμε να υπολογίσουμε το γινόμενο $\Pi_3\Pi_2\Pi_1$ το οποίο θα αποτελεί και τον ζητούμενο πίνακα Π.

$$\Pi = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) & 0 \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta & 0 \\ 2\sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta - \cos^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 4. Περιγράψτε το μετασχηματισμό που περιστρέφει ένα δοσμένο σημείο $Q(x, y)$ κατά γωνία θ ως προς ένα δοσμένο κέντρο περιστροφής $P(h, k)$ (σχήμα 3.10). Υπολογίστε το σχετικό πίνακα $R_{\theta,P}$ που θα εκτελεί το συγκεκριμένο μετασχηματισμό.

Λύση. Εφαρμόζουμε γεωμετρικούς μετασχηματισμούς. Θα προσπαθήσουμε να αναγούμε το ζητούμενο μετασχηματισμό σε σύνθεση βασικών μετασχηματισμών. Εκτελούμε τα ακόλουθα βήματα:

Βήμα 1: Μεταφέρουμε το κέντρο περιστροφής P στην αρχή των αξόνων. Η μεταφορά θα γίνει κατά διάνυσμα V όπου $V = -h\hat{i} - k\hat{j}$, όπου $\hat{i}, \hat{j}$ τα μοναδιαία διανύσματα στους άξονες x και y αντίστοιχα (Σχήμα 3.11).

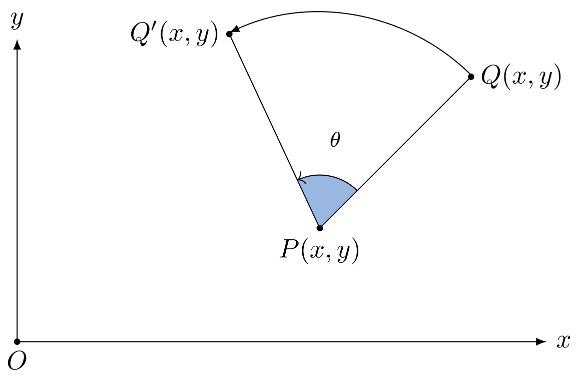
Βασικός πίνακας μετασχηματισμού: T_v

Βήμα 2: Εκτελούμε περιστροφή κατά γωνία θ ως προς την αρχή των αξόνων εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό R_θ (Σχήμα 3.12).

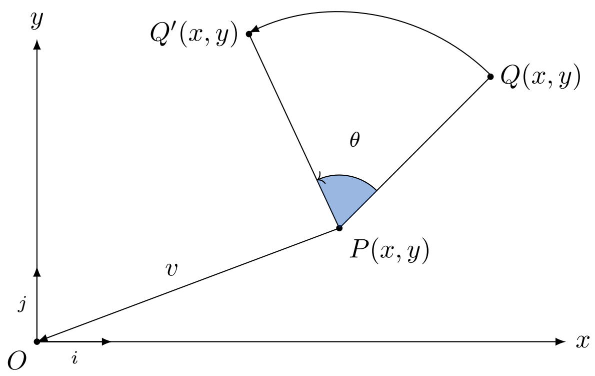
Βασικός πίνακας μετασχηματισμού: R_θ

Ο ζητούμενος μετασχηματισμός προκύπτει ως σύνθεση των παραπάνω:

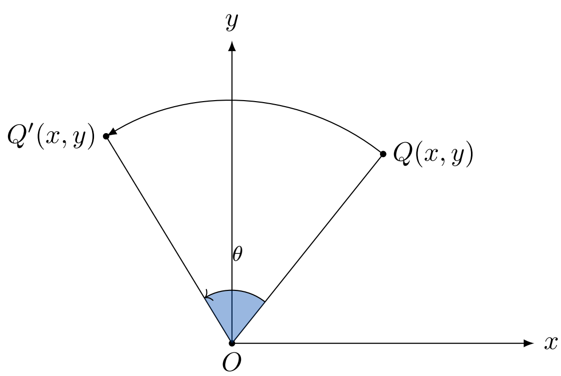
$$R_{\theta,P} = T_{-V} \circ R_\theta \circ T_V$$



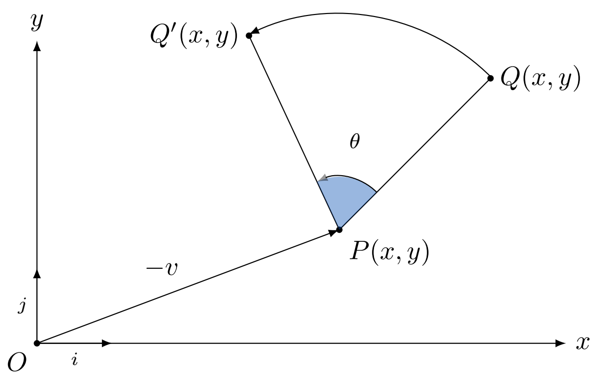
Σχήμα 3.12: Βήμα 1



Σχήμα 3.13: Βήμα 2



Σχήμα 3.14: Βήμα 3



Σχήμα 3.15: Βήμα 4

Σχήμα 3.16: Περιστροφή σημείου $Q(x, y)$ κατά γωνία θ ως προς ένα δοσμένο κέντρο περιστροφής $P(h, k)$

Εφαρμόζοντας τους βασικούς γνωστούς πίνακες προκύπτει ότι:

$$R_{\theta,P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -h & -k & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ h & k & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & -h\cos\theta + k\sin\theta + h \\ \sin\theta & \cos\theta & -h\sin\theta - k\cos\theta + k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Οι συντεταγμένες του καινούργιου σημείου $Q'(x', y')$ προκύπτουν από την επίδραση του $R_{\theta,P}$ πάνω στο αρχικό σημείο $Q(x, y)$:

$$\text{Τελικά: } \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = R_{\theta,P} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 5. Εκτελέστε περιστροφή $45°$ του τριγώνου $A(0, 0)$, $B(1, 1)$, $C(5, 2)$

(α) ως προς την αρχή των αξόνων και

(β) ως προς το σημείο $P(-1, -1)$.

Λύση. Το τρίγωνο περιγράφεται υπό μορφή πίνακα ως εξής:

$$ABC = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Κάθε στήλη του παραπάνω πίνακα δημιουργείται από τις ομογενείς συντεταγμένες κάθε κορυφής.

α) Για την περιστροφή ως προς την αρχή των αξόνων θα επιδράσουμε πάνω στον ABC με το γνωστό πίνακα $R_{45°}$. Οι συντεταγμένες των κορυφών του καινούργιου τριγώνου προκύπτουν ως εξής:

$$A'B'C' = R_{45°} \cdot ABC = \begin{bmatrix} \cos 45° & -\sin 45° & 0 \\ \sin 45° & \cos 45° & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{7\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Επομένως, οι συντεταγμένες των νέων κορυφών ισούνται με:

$$A'(0, 0), \quad B'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad C'\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{7\sqrt{2}}{2}\right)$$

β) Εφαρμόζουμε το παράδειγμα 1 για $\theta = 45°$ και $P(-1, -1)$. Ο πίνακας που θα εκτελεί το ζητούμενο μετασχηματισμό θα δίνεται από τη σχέση:

$$R_{45°,P} = T_{-V} \cdot R_{45°} \cdot T_V$$

όπου το V στην προκειμένη περίπτωση ισούται με $i + j$. Έτσι:

$$R_{45°,P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -(-1) \\ 0 & 1 & -(-1) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Οι συντεταγμένες του καινούργιου τριγώνου προκύπτουν από τη σχέση:

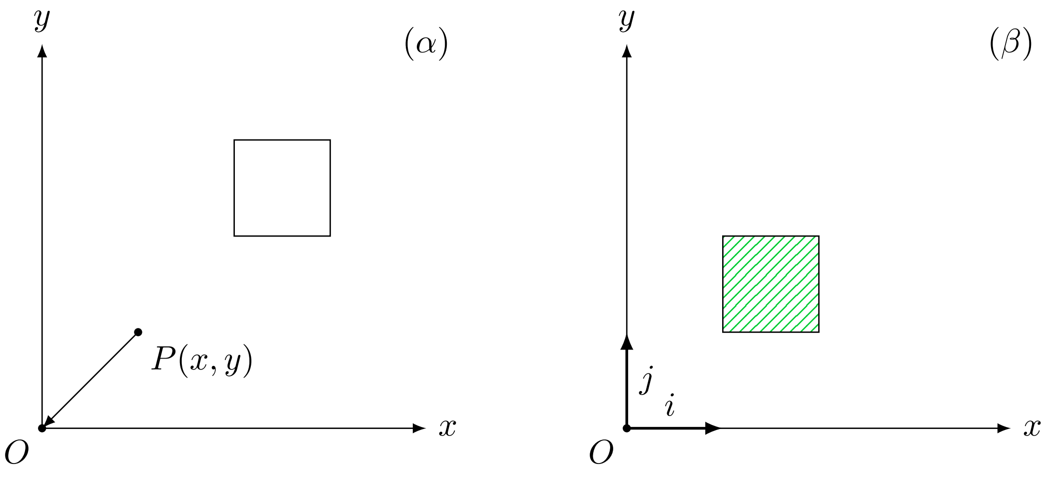
$$A'B'C' = R_{45^\circ,P} \cdot ABC$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} - 1 \\ -1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{9\sqrt{2}}{2} - 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Τελικά οι καινούργιες κορυφές δίνονται από τους τύπους:

$$A'(-1, -\sqrt{2} - 1), \quad B'(-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -1), \quad C'(\frac{3\sqrt{2}}{2} - 1, \frac{9\sqrt{2}}{2} - 1)$$

Παράδειγμα 6. Περιγράψτε το μετασχηματισμό που εκτελεί scaling ενός αντικειμένου ως προς ένα δοσμένο σταθερό σημείο $P(h, k)$ (Σχήμα 3.14). Το scaling να γίνει κατά a μονάδες στον άξονα x και κατά b μονάδες στον άξονα y. Υπολογίστε το σχετικό πίνακα $S_{a,b,P}$ που θα εκτελεί το συγκεκριμένο μετασχηματισμό.



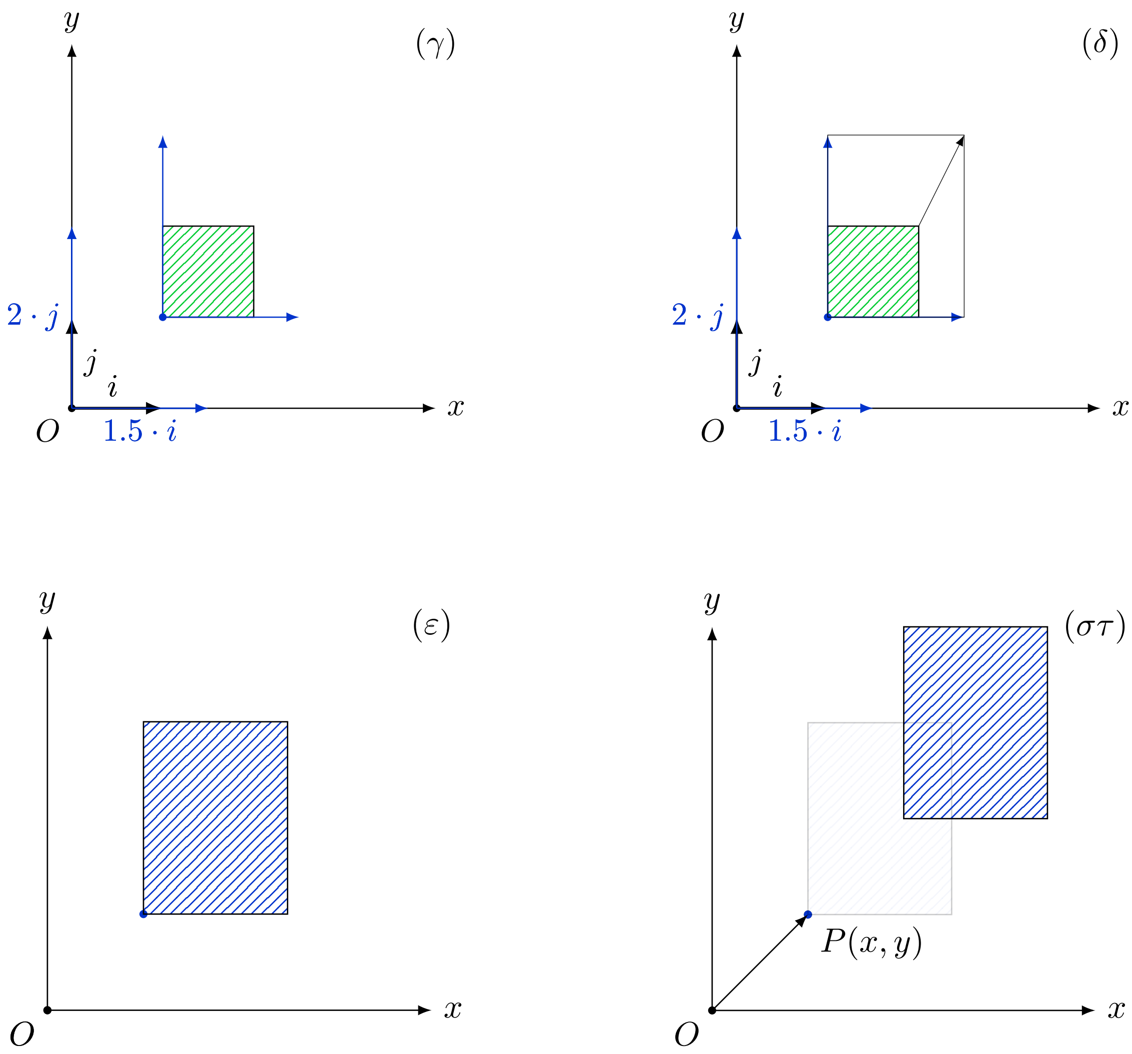
Λύση.

Εφαρμόζουμε γεωμετρικούς μετασχηματισμούς. Θα προσπαθήσουμε να αναγάγουμε το ζητούμενο μετασχηματισμό σε σύνθεση βασικών μετασχηματισμών και ιδιαίτερα του βασικού scaling ως προς την αρχή των αξόνων. Εκτελούμε τα ακόλουθα βήματα:

Βήμα 1: Μεταφέρουμε το σταθερό σημείο P στην αρχή των αξόνων. Η μεταφορά θα γίνει κατά διάνυσμα $-V$, όπου $V = h\hat{\imath} + k\hat{\jmath}$, $\hat{\imath}$ και $\hat{\jmath}$ τα μοναδιαία διανύσματα στους άξονες x και y αντίστοιχα (Σχήμα 3.14(b)).

Βασικός πίνακας μετασχηματισμού:T_{-V}

Βήμα 2: Εκτελούμε scaling ως προς την αρχή των αξόνων με $s_x = a$ και $s_y = b$ (Σχήμα 3.14(c)).



Βασικός πίνακας μετασχηματισμού: S_{s_x,s_y}

Βήμα 3: Επαναφέρουμε το σημείο P στην αρχική του θέση. Η μεταφορά θα γίνει τώρα κατά διάνυσμα V (Σχήμα 3.14(d)).

Βασικός πίνακας μετασχηματισμού: T_V

Ο ζητούμενος μετασχηματισμός θα προκύψει σαν σύνθεση των παραπάνω βασικών μετασχηματισμών:

$$S_{a,b,P} = T_V \circ S_{s_x,s_y} \circ T_{-V}$$

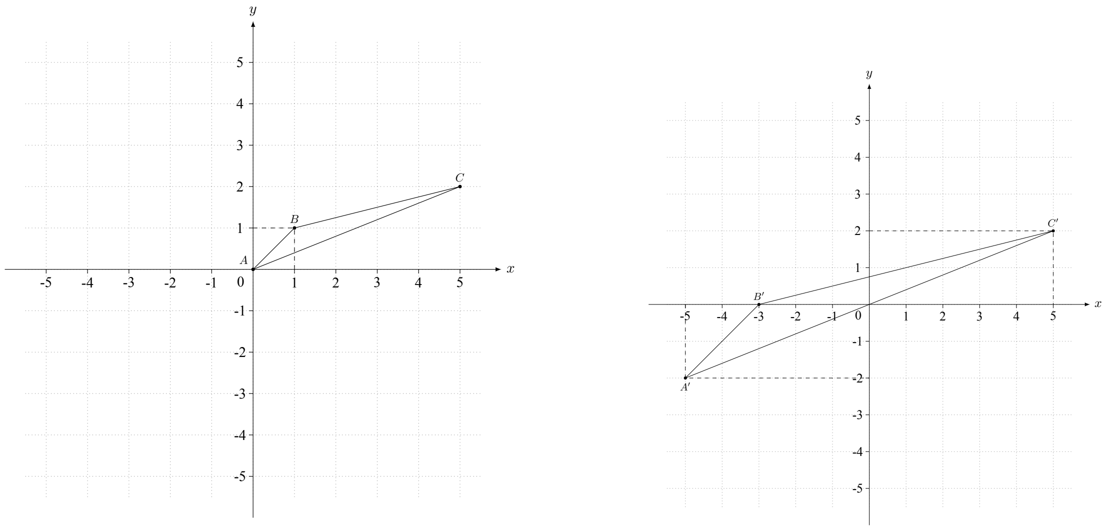
Αντικαθιστώντας τους βασικούς πίνακες μετασχηματισμών στην παραπάνω σχέση προκύπτει ότι:

$$S_{a,b,P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -h \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & -ah+h \\ 0 & b & -bk+k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Οι συντεταγμένες των καινούργιων σημείων του αντικειμένου προκύπτουν από την επίδραση του $S_{a,b,P}$ πάνω στο αρχικό αντικείμενο.

Βασική παρατήρηση: Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $S_{a,b,P}$ μπορούμε να τροποποιήσουμε τις διαστάσεις ενός αντικειμένου διατηρώντας σταθερό ένα συγκεκριμένο σημείο του P.

Παράδειγμα 7. Να διπλασιαστεί το μήκος των πλευρών του τριγώνου με κορυφές $A(0,0)$, $B(1,1)$ και $C(5,2)$ διατηρώντας την κορυφή $C(5,2)$ σταθερή.



(a) (b)

Λύση.

Αρχικό μήκος πλευράς BC: $\sqrt{(5-1)^2+(2-1)^2} = \sqrt{17}$
Μεγεθυνόμενο το τρίγωνο του (σχήματος) γίνεται:
Τελικό μήκος πλευράς BC': $\sqrt{(5-(-3))^2+(2-0)^2} = 2\sqrt{17}$

Από το παράδειγμα 3 χρησιμοποιούμε τον πίνακα $S_{a,b,p}$ όπου $a = b = 2$ και $P = C(5,2)$. Στην προκείμενη περίπτωση το διάνυσμα μεταφοράς είναι $v = 5\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$ (σχήμα 3.15 (a)). Ο πίνακας $S_{2,2,C}$ παίρνει την ακόλουθη τιμή:

$$S_{2,2,C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Επιδρούμε με τον πίνακα $S_{2,2,C}$ πάνω στο τρίγωνο ABC και προκύπτει:

$$A'B'C' = S_{2,2,C} \cdot ABC = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -2 & 5 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Τελικά οι συντεταγμένες του καινούργιου τριγώνου δίνονται από τις σχέσεις:

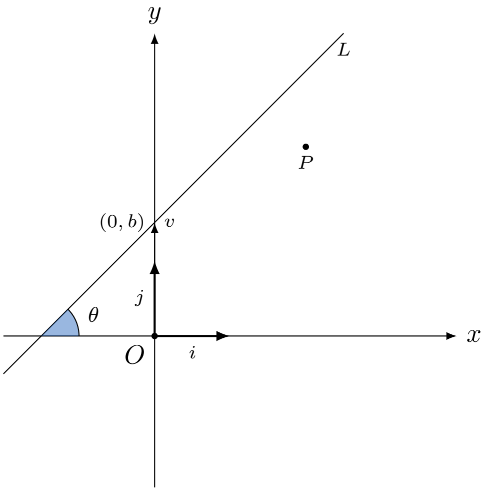
$$A' = (-5,-2), \quad B' = (-3,0), \quad C' = (5,2)$$

Παράδειγμα 8. Περιγράψτε το μετασχηματισμό M_L, που βρίσκει το συμμετρικό ενός αντικειμένου ως προς μία ευθεία L, που τέμνει τον άξονα των y στο $(0,b)$ και σχηματίζει με τον άξονα των x γωνία θ.

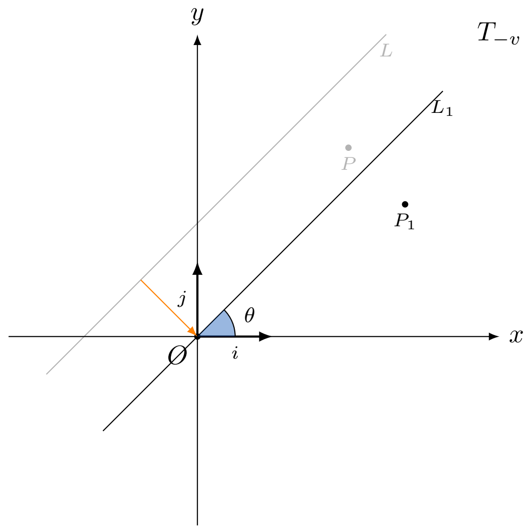
Λύση. Εφαρμόζουμε γεωμετρικούς μετασχηματισμούς. Θα προσπαθήσουμε να ανάγουμε το ζητούμενο μετασχηματισμό σε σύνθεση βασικών μετασχηματισμών και ιδιαίτερα της βασικής συμμετρίας ως προς τους άξονες x και y. Εκτελούμε τα ακόλουθα βήματα:

Βήμα 1: Μεταφέρουμε το σημείο $(0,b)$ στην αρχή των αξόνων. Η μεταφορά θα γίνει κατά διάνυσμα $-v$, όπου $v = b\hat{\imath}$, $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ τα μοναδιαία στους άξονες x και y αντίστοιχα.

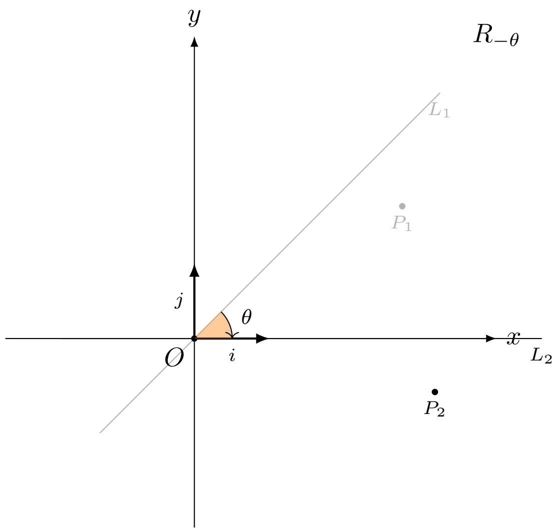
Βήμα 2: Στρέφουμε κατά γωνία $-\theta$ ώστε η ευθεία L να ευθυγραμμιστεί με τον άξονα των x.



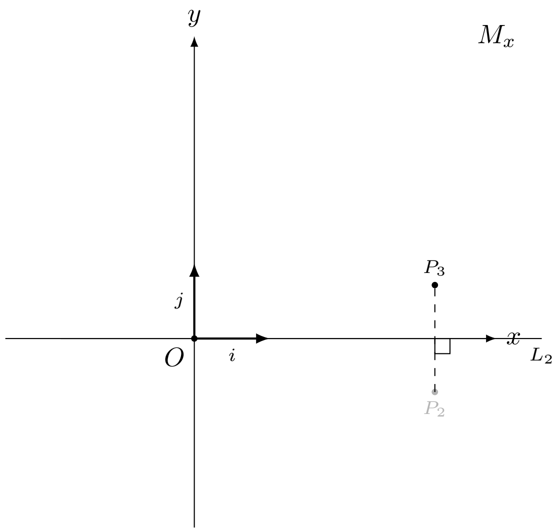
Σχήμα 3.17: Βήμα 1: Βασικός μετασχηματισμός T_{-v}



Σχήμα 3.18: Βήμα 2: Βασικός μετασχηματισμός $R_{-\theta}$



Σχήμα 3.19: Βήμα 3: Βασικός μετασχηματισμός M_x



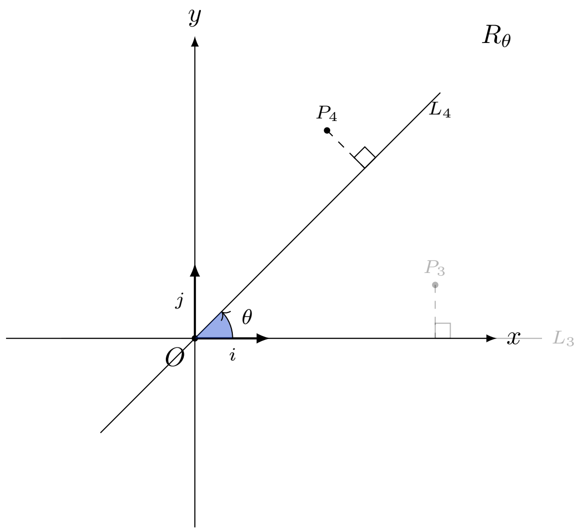
Σχήμα 3.20: Βήμα 4: Βασικός μετασχηματισμός R_θ

Βήμα 3: Παίρνουμε το συμμετρικό ως προς τον άξονα των x.
Βήμα 4: Εκτελούμε στροφή κατά γωνία θ.
Βήμα 5: Συμμετρικό ως προς άξονα x.
Βήμα 6: Επαναφέρουμε το σημείο (O, b) στην αρχική του θέση. Η μεταφορά θα γίνει κατά διάνυσμα v.

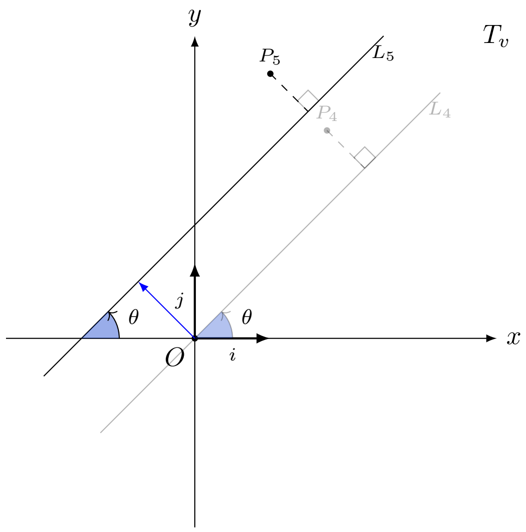
Ο ζητούμενος μετασχηματισμός θα προκύψει σαν σύνθεση των παραπάνω βασικών μετασχηματισμών.

$$M_L = T_v \cdot R_\theta \cdot M_x \cdot R_{-\theta} \cdot T_{-v} \quad (1)$$

Εάν τώρα υποθέσουμε ότι η κλίση της ευθείας L είναι m, δηλαδή $\tan\theta = m$, και κατά συνέπεια



Σχήμα 3.21: Βήμα 5: Βασικός μετασχηματισμός M_x



Σχήμα 3.22: Βήμα 4: Βασικός μετασχηματισμός T_v

$\sin\theta = \dfrac{m}{\sqrt{m^2+1}}$, $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{m^2+1}}$, η σχέση (1) γίνεται:

$$M_L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Με υπολογισμούς προκύπτει:

$$M_L = \begin{bmatrix} \dfrac{1-m^2}{m^2+1} & \dfrac{2m}{m^2+1} & \dfrac{-2bm}{m^2+1} \\ \dfrac{2m}{m^2+1} & \dfrac{m^2-1}{m^2+1} & \dfrac{2b}{m^2+1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 9. Βρείτε το συμμετρικό του πολυγώνου V με κορυφές $A(-1,0)$, $B(0,-2)$, $C(1,0)$ και $D(0,2)$ ως προς:

α) οριζόντια ευθεία $y = 2$

β) κατακόρυφη ευθεία $x = 2$

γ) ευθεία $y = x + 2$

Λύση. Το πολύγωνο παρουσιάζεται υπό μορφή πίνακα ως εξής:

$$V = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τον πίνακα M_L όπως έχει ορισθεί στο Παράδειγμα 5.

α) Η ευθεία $y = 2$ έχει σημείο τομής με τον άξονα των y το $(0, 2)$ και σχηματίζει γωνία $\theta = 0$ με τον x. Επομένως $\theta = 0$, $m = 0$ και $v = 2\hat{j}$. Αντικαθιστώντας αυτές τις τιμές στον πίνακα M_l προκύπτει:

$$M_L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Αυτός ο πίνακας αναστρέφει το πολύγωνο συμμετρικά ως προς $y = 2$. Οι συντεταγμένες του καινούργιου πολυγώνου προκύπτουν από τη σχέση:

$$V' = A'B'C'D' = M_L \cdot V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Τελικό $A' = (-1, 4)$, $B' = (0, 6)$, $C' = (1, 4)$ και $D' = (0, 2)$.

β) Η ευθεία $x = 2$ (Σχήμα) είναι παράλληλη με τον άξονα των y άρα δεν έχει σημείο τομής. Επίσης, έχει άπειρη κλίση! Γι' αυτό αν $v = 2\hat{i}$ θα πρέπει να εκτελεστεί ο ακόλουθος μετασχηματισμός:
Βήμα 1: Μεταφορά κατά διάνυσμα $-v$, ώστε η ευθεία $x = 2$ να πάει πάνω στον άξονα y.

Βασικός πίνακας μετασχηματισμού: T_{-v}

Βήμα 2: Συμμετρία ως προς y.

Βασικός πίνακας μετασχηματισμού: M_y

Βήμα 3: Επαναφορά της ευθείας $x = 2$ στην αρχική της θέση, δηλαδή μεταφορά κατά διάνυσμα v.

Βασικός πίνακας μετασχηματισμού: T_v

Ο ζητούμενος μετασχηματισμός M προκύπτει σαν σύνθεση των παραπάνω, δηλαδή:

$$M = T_v \cdot M_y \cdot T_{-v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Οι συντεταγμένες του καινούργιου πολυγώνου δίνονται από:

$$V' = A'B'C'D' = MV = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Τελικό $A' = (-1, 0)$, $B' = (0, -2)$, $C' = (1, 0)$ και $D' = (0, -2)$.

γ) Η ευθεία $y = x + 2$ έχει κλίση $m = 1$ και σημείο τομής με τον άξονα των y το $(0, 2)$, επομένως $b = 2$. Ο πίνακας M_l του παραδείγματος 5 παίρνει την ακόλουθη τιμή:

$$M_l = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Οι συντεταγμένες του καινούργιου πολυγώνου δίνονται από:

$$V' = A'B'C'D' = M_l V = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Τελικό $A' = (2, -1)$, $B' = (2, 0)$, $C' = (0, -2)$ και $D' = (2, 0)$.

Μια στρέβλωση (shearing) κατά μήκος του X-άξονα, του σημείου $\overline{P}(x, y)$ με παράγοντα στρέβλωσης a, φέρνει το σημείο $\overline{P}$ στο $\overline{P'}(x', y')$ και ισχύει:

$$x' = x + ay, \quad y' = y.$$

Χρησιμοποιώντας πίνακες γράφουμε:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

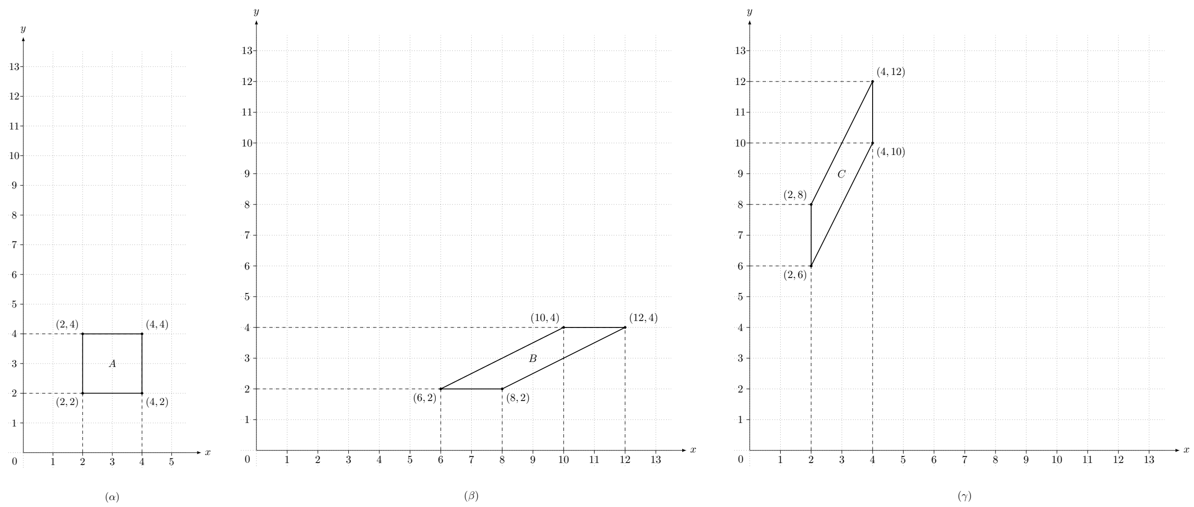
ή $\overline{P'} = SH_x \cdot \overline{P}$ με:

$$SH_x = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Για την περίπτωση της στρέβλωσης κατά μήκος του Y-άξονα και με παράγοντα στρέβλωσης b ισχύει:

$$SH_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}$$

Στο σχήμα δείχνεται η στρέβλωση ενός τετραγώνου για τις δύο περιπτώσεις $a = 2$ και $b = 2$.



Σχήμα 3.23: Στρέβλωση ενός τετραγώνου για $a = 2$ και $b = 2$

Ασκήσεις 2ου Κεφαλαίου

Άσκηση 14. Με ποια σύνθεση μετασχηματισμών μπορεί να φέρουμε την εικόνα (α), (β) στη θέση (γ).

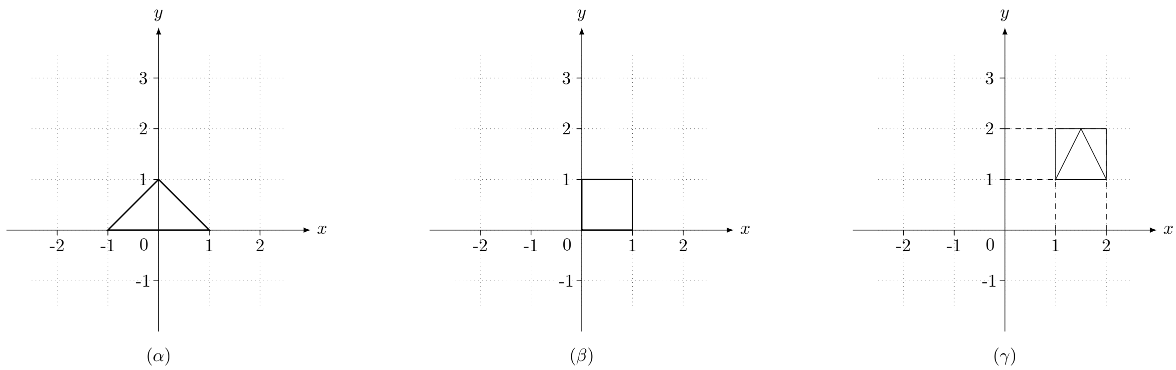
Λύση. Πρώτα στην εικόνα (α) μπορούμε να δράσουμε ως εξής:

1. Σύμπτυξη στις x-συντεταγμένες με: $s_x = \dfrac{1}{2}$, $s_y = 1$ (ως προς την αρχή των αξόνων).

2. Μεταφορά κατά $\vec{v} = (\dfrac{3}{2}, 1)$.

Βασικοί μετασχηματισμοί	**Γενικευμένοι μετασχηματισμοί**
R_θ (Στροφή κατά θ ως προς το $(0,0)$ σταθερό)	$R_{\theta,P}$ (στροφή κατά θ ως προς το P σταθερό)
S_{S_x,S_y} (Scaling κατά S_x, S_y - διατηρείται σταθερό το P)	$S_{S_x,S_y,P}$ (scaling κατά S_x, S_y - διατηρείται σταθερό το P)
M_x, M_y (Συμμετρικό ως προς τους άξονες x, y)	$M_{W,\theta}$ (Συμμετρικό ως προς τον άξονα W που πήρα από τον $(0,0)$ και σχηματίζει γωνία θ με τον Ox)
	M_L (Συμμετρικό ως προς τον άξονα L που τέμνει του y στο $(0,b)$ και σχηματίζει γωνία θ με τον Ox

Σχήμα 3.24: Λίστα Γεωμετρικών Μετασχηματισμών



Έτσι, παίρνουμε τον πίνακα μετασχηματισμού:

$$M_{(a)} = T_v \cdot S_{\frac{1}{2},1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Πράξεις:

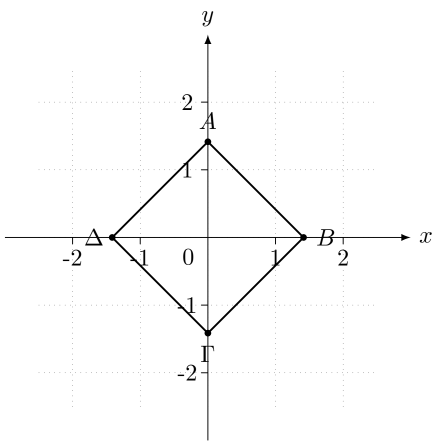
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

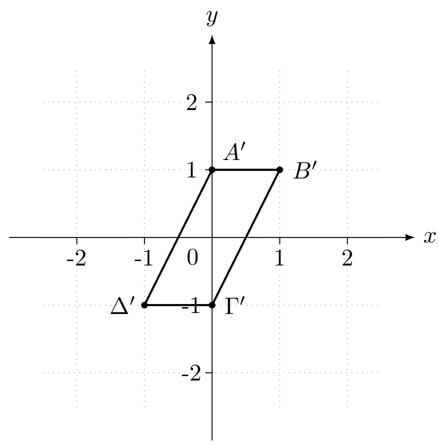
Αν στην εικόνα (β) μεταφερθεί κατά $\vec{v} = (1,1)$, θα πάρουμε το τετράγωνο της εικόνας (γ):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 15. Ο πίνακας ορίζει ένα μετασχηματισμό που ονομάζεται Shearing. Για $b = 0$, έχουμε shearing στην κατεύθυνση x ενώ για $a = 0$ έχουμε shearing στην κατεύθυνση y. Με τη βοήθεια αυτού, να βρεθεί ο μετασχηματισμός M που μετατρέπει τον ρόμβο με κορυφές $A(0,\sqrt{2}), B(\sqrt{2},0), \Gamma(0,-\sqrt{2}, \Delta(-\sqrt{2},0)$ στο παραλληλόγραμμο με κορυφές $A^{'}(0,1), B^{'}(1,1), \Gamma^{'}(0,-1), \Delta^{'}$ όπως φαίνεται παρακάτω.

Λύση. **1ος τρόπος**:





1. Scaling κατά $S_x = S_y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (Πολλαπλασιασμός με πίνακα S_{S_x,S_y})
2. Shearing στο y με $b = 1$ (Πολλαπλασιασμός με πίνακα Sh_y)

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Για να υπολογίσουμε πώς ο παραπάνω μετασχηματισμός επιδράσει στο σχήμα:

$$A(0, \sqrt{2}), B(\sqrt{2}, 0), \Gamma(0, -\sqrt{2}, \Delta(-\sqrt{2}, 0),$$

θα πολλαπλασιάσουμε τον πίνακα τον συντεταγμένων του σχήματος με τον πίνακα του μετασχηματισμού.

$$M \cdot V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

2ος τρόπος:

1. Στροφή κατά γωνία $45°$ (Πολλαπλασιασμός με πίνακα $R_{45°}$)
2. Scaling $S_x = \dfrac{1}{2}, S_y = 1$ (Πολλαπλασιασμός με πίνακα S_{S_x,S_y})
3. Shearing $S_{h_x}, a = \dfrac{1}{2}, b = 0$ (Πολλαπλασιασμός με πίνακα S_{h_x})

Για να υπολογίσουμε πώς ο παραπάνω μετασχηματισμός επιδράσει στο σχήμα $A(0, \sqrt{2}), B(\sqrt{2}, 0), \Gamma(0, -\sqrt{2}, \Delta(-\sqrt{2}, 0$ θα πολλαπλασιάσουμε τον πίνακα τον συντεταγμένων του σχήματος με τον πίνακα του μετασχηματισμού, δηλαδή με τον πίνακα:

$$M = S_{h_x} \cdot S_{S_x,S_y} \cdot R_\theta = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Άσκηση 16. Να προσδιοριστούν οι πίνακες στροφής στο χώρο ενός αντικειμένου κατά γωνία θ, ως προς τους άξονες $y'y$, $x'x$, $R_{\theta,y}$ και $R_{\theta,x}$ αντίστοιχα.

Λύση. • Για τη στροφή ως προς τον άξονα $y'y$ ισχύουν οι εξής μετασχηματισμοί:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + z\sin\theta, \\ y' &= y, \\ z' &= -x\sin\theta + z\cos\theta. \end{aligned}$$

Ο αντίστοιχος πίνακας είναι:

$$R_{\theta,y} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

• Για τη στροφή ως προς τον άξονα $x'x$ ισχύουν οι εξής μετασχηματισμοί:

$$\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= y\cos\theta - z\sin\theta, \\ z' &= y\sin\theta + z\cos\theta. \end{aligned}$$

Ο αντίστοιχος πίνακας είναι:

$$R_{\theta,x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

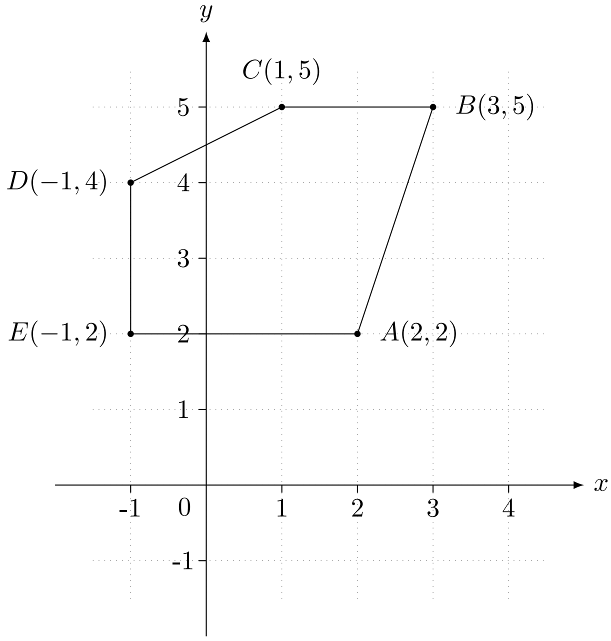
Άσκηση 17. Δείξτε ότι ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα για τα ακόλουθα ζευγάρια μετασχηματισμών.

1. Αν στο χώρο εφαρμόσουμε συμμετρία ως προς το επίπεδο xy και συμμετρία ως προς το επίπεδο yz.

2. Αν στο επίπεδο εφαρμόσουμε μεταφορά κατά διάνυσμα $\vec{v}$ και συμετρία ως προς τον άξονα y.

Άσκηση 18. Υπολογίστε στο επίπεδο τον μετασχηματισμό στροφής γωνία $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ γύρω από το σημείο $P = (4, 1)$

Στην συνέχεια, γράψτε ένα script σε `Julia` όπου θα υπολογίζει τον παραπάνω πίνακα μετασχηματισμού μέσω πολλαπλασιασμών των βασικών μετασχηματισμών και εφαρμόστε τον, στο παρακάτω σχήμα σχεδιάζοντας στο ίδιο γράφημα και το αρχικό και το μετασχηματισμένο.

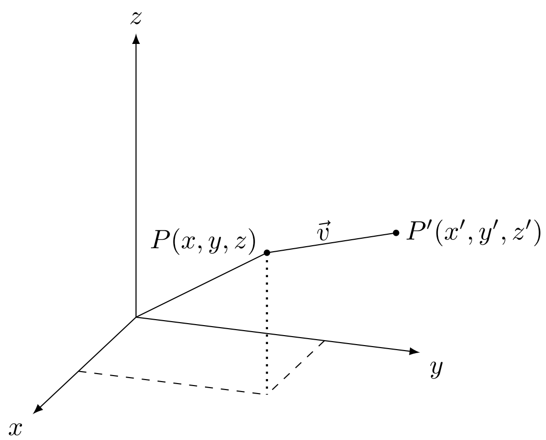

y
x
C(1,5)
B(3,5)
D(−1,4)
E(−1,2)
A(2,2)
5
4
3
2
1
-1
0
1
2
3
4
-1

Κεφάλαιο 4

Πίνακες μετασχηματισμών στο χώρο τριών διαστάσεων

4.1 Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί

4.1.1 Μεταφορά



Σχήμα 4.1: Μεταφορά σημείου σε τρισδιάστατες συντεταγμένες

Έστω $v = (t_x, t_y, t_z)$ τότε $P' = T_v(P)$ με $x' = x + t_x$, $y' = y + t_y$, $z' = z + t_z$. Το σημείο (x, y, z) σε ομογενείς συντεταγμένες γράφεται:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας μετασχηματισμού της μεταφοράς θα είναι:

$$T_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.1.1.1 Μετασχηματισμός κλίμακας

$P' = S_{S_x,S_y,S_z}(P)$ με $x' = S_x \cdot x$, $y' = S_y \cdot y$ και $z' = S_z \cdot z$
Ο πίνακας μετασχηματισμού είναι:

$$S_{S_x,S_y,S_z} = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.2 Στροφή

Στον χώρο τριών διαστάσεων για τη στροφή ενός αντικειμένου απαιτούνται δύο παράμετροι:

α) η γωνία στροφής θ και

β) ο άξονας περιστροφής του αντικειμένου.

Οι "κανονικές" στροφές ορίζονται στον χώρο σαν στροφές γύρω από τους θετικούς άξονες x, y και z.
Για την περίπτωση του θετικού άξονα z έχουμε εάν το σημείο είναι στο επίπεδο xOy:

xOy

z

0

$P'(x', y', 0)$

$P(x, y, 0)$

Σχήμα 4.2: Στροφή σημείου στο επίπεδο xOy

Με βάση το κεφάλαιο 3 έχουμε:

α) Στροφή γύρω από τον άξονα z.

$$P' = R_{\theta,z}(P)$$

με

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' &= x\sin\theta + y\cos\theta \\ z' &= z \end{aligned}$$

ο αντίστοιχος μετασχηματισμός είναι:

$$R_{\theta,z} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

β) Στροφή γύρω από τον άξονα y.

$$P' = R_{\theta,y}(P)$$

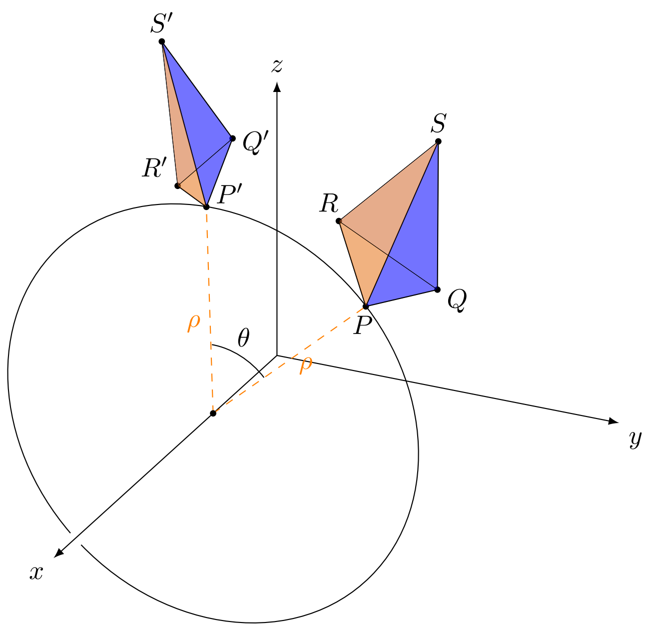
με

$$x' = x\cos\theta + z\sin\theta, \quad y' = y, \quad z' = -x\sin\theta + z\cos\theta$$

και αντίστοιχο μετασχηματισμό:

$$R_{\theta,y} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Το παρακάτω σχήμα μας δείχνει τη στροφή μιας πυραμίδας ως προς τους άξονες x, y και z.



Σχήμα 4.3: Στροφή ως προς άξονα x

$$R_{\theta,y} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.2.1 Στροφή γύρω από τον άξονα x

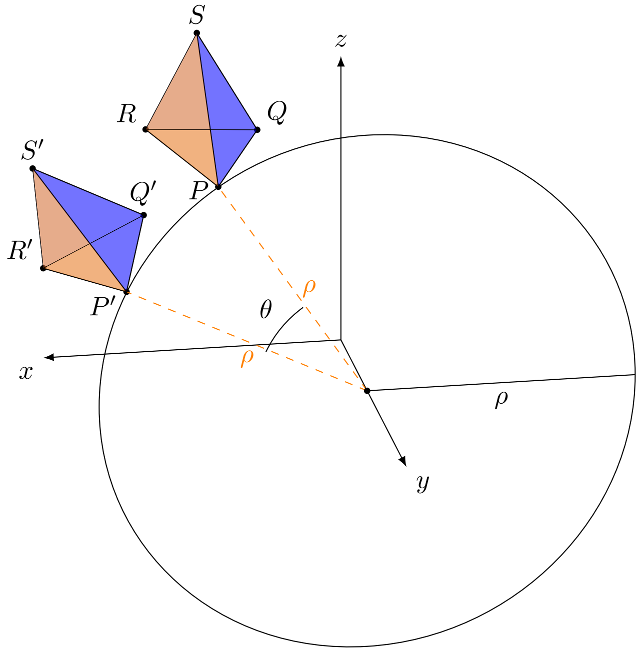
$$P' = R_{\theta,x}(P)$$

με

$$x' = x, \quad y' = y\cos\theta - z\sin\theta, \quad z' = y\sin\theta + z\cos\theta$$

και:

$$R_{\theta,x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Σχήμα 4.4: Στροφή ως προς άξονα y

4.3 Συμμετρία ως προς επίπεδο

Δίνουμε τους αντίστοιχους πίνακες μετασχηματισμών:

$$M_{x,y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

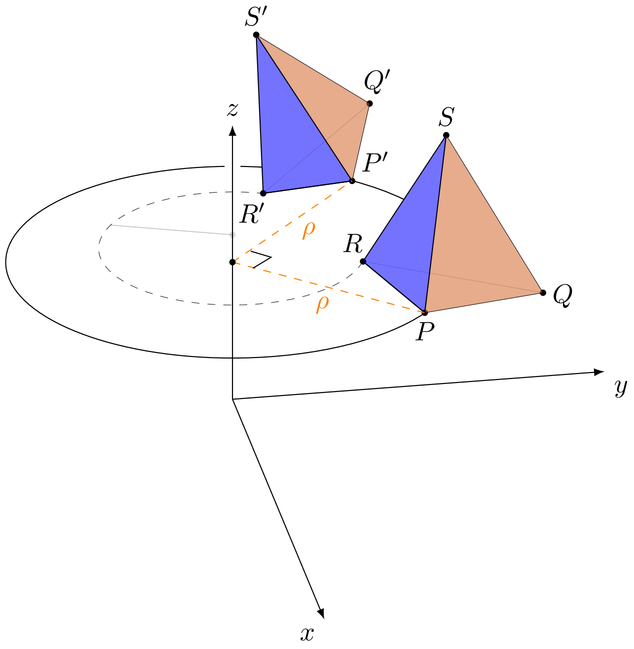
$$M_{x,z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{y,z} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.3.1 Αντίστροφοι μετασχηματισμοί

Για τους αντίστροφους μετασχηματισμούς ισχύει:

$$T_v^{-1} = T_{-v}$$
$$R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$$
$$S_{S_x,S_y,S_z}^{-1} = S_{\frac{1}{S_x},\frac{1}{S_y},\frac{1}{S_z}}$$



Σχήμα 4.5: Στροφή ως προς άξονα z

4.3.2 Μετασχηματισμοί αξόνων συντεταγμένων

Στην περίπτωση της παράλληλης μεταφοράς των αξόνων συντεταγμένων κατά διάνυσμα $v = (t_x, t_y, t_z)$ έχουμε για τις νέες συντεταγμένες (x', y', z') του σημείου $P(x, y, z)$ θα ισχύει:

$$
\begin{aligned}
x' &= x - t_x \\
y' &= y - t_y \\
z' &= z - t_z
\end{aligned}
$$

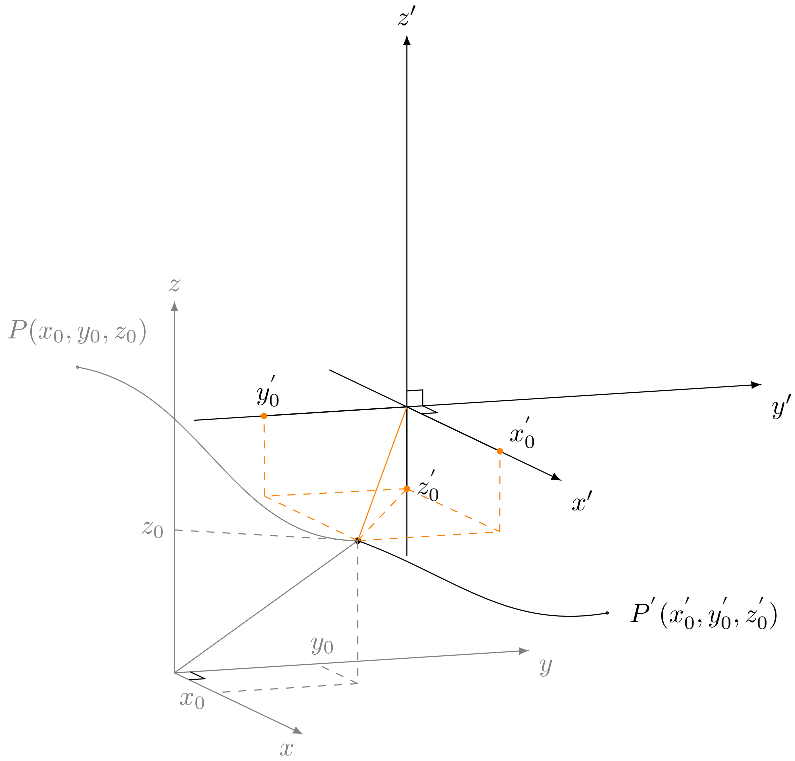
Άρα ο μετασχηματισμός $\overline{T_v}$ θα είναι ο αντίστοιχος του T_{-v} γεωμετρικού μετασχηματισμού.

Αντί των πινάκων συντεταγμένων θα δώσουμε εδώ συνοπτικά τις αντιστοιχίες μεταξύ μετασχηματισμών αξόνων συντεταγμένων και γεωμετρικών.

- Μεταφορά: $\overline{T_v} \longleftrightarrow T_{-v}$
- Μετασχηματισμός κλίμακας: $\overline{S_{S_x,S_y,S_z}} \longleftrightarrow S_{\frac{1}{S_x},\frac{1}{S_y},\frac{1}{S_z}}$
- Στροφή: $\overline{R_\theta} \longleftrightarrow R_{-\theta}$ $\quad \overline{R_{\theta,x}} \longleftrightarrow R_{-\theta,x}$
  $\overline{R_{\theta,y}} \longleftrightarrow R_{-\theta,y}$
  $\overline{R_{\theta,z}} \longleftrightarrow R_{-\theta,z}$

Για τους αντίστροφους τέλος μετασχηματισμούς αξόνων συντεταγμένων ισχύει:

$$
\begin{aligned}
\overline{T_v^{-1}} &= T_{-V} \\
\overline{R_\theta^{-1}} &= R_{-\theta} \\
\overline{S_{S_x,S_y,S_z}^{-1}} &= S_{\frac{1}{S_x},\frac{1}{S_y},\frac{1}{S_z}}
\end{aligned}
$$



Σχήμα 4.6: Παράλληλη μεταφοράς των αξόνων συντεταγμένων κατά διάνυσμα $v = (t_x, t_y, t_z)$

Παρατήρηση. Όπως και στην περίπτωση των δύο συντεταγμένων, έτσι και εδώ, πεπλεγμένοι μετασχηματισμοί αντιμετωπίζονται με τη διαδικασία της σύνθεσης συναρτήσεων η οποία εδώ ταυτίζεται με τον πολλαπλασιασμό πινάκων.

4.4 Παραδείγματα μετασχηματισμών στο χώρο

Παράδειγμα 10. Να υπολογιστεί ο πίνακας μετασχηματισμού T για την περίπτωση στροφής γύρω από τον άξονα x κατά γωνία θ_x και στη συνέχεια στροφή ως προς y κατά γωνία θ_y.

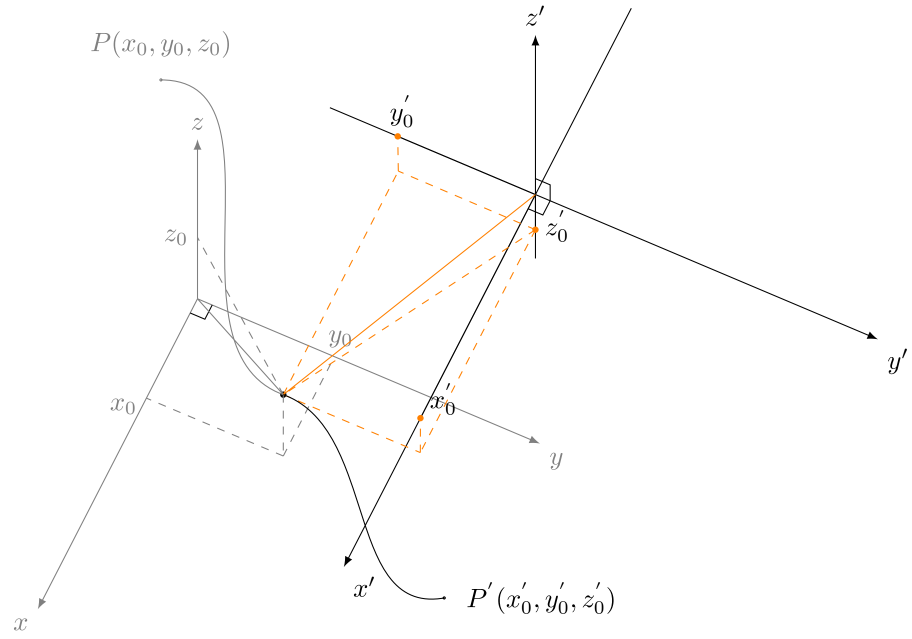
Λύση. Ο μετασχηματισμός προκύπτει διαδοχικά. Αρχικά συμβαίνει στροφή γύρω από τον άξονα x κατά γωνία θ_x και έπειτα η στροφή ως προς τον άξονα y κατά γωνία θ_y. Θα εκμεταλλευτούμε τη διαδικάσια σύνθεσης των παραπάνω μετασχηματισμών. Αναλυτικότερα:

$$T = R_{\theta_y, y} \circ R_{\theta_x, x} = \begin{bmatrix} \cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x & 0 \\ 0 & \sin\theta_x & \cos\theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta_y & \sin\theta_y \sin\theta_x & \sin\theta_y \cos\theta_x & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x & 0 \\ -\sin\theta_y & \cos\theta_y \sin\theta_x & \cos\theta_y \cos\theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 11. Ορίζουμε ως "καμπή" την περιστροφή γύρω από τον άξονα x και στη συνέχεια γύρω από τον άξονα y.

i) Βρείτε τον πίνακα καμπής T_k.



Σχήμα 4.7: Κάτοψη: Παράλληλη μεταφοράς των αξόνων συντεταγμένων κατά διάνυσμα $v = (t_x, t_y, t_z)$

ii) Εξετάστε εάν παίζει ρόλο η σειρά με την οποία εκτελείται η περιστροφή.

Λύση. i) Τα ακόλουθα βήματα καθορίζουν τον ζητούμενο πίνακα.

Βήμα 1: Στροφή κατά γωνία θ_x ως προς τον άξονα x.

Βασικός πίνακας μετασχηματισμού: $R_{\theta_x,x}$.

Βήμα 2: Στροφή κατά γωνία θ_y ως προς τον άξονα y.

Βασικός πίνακας μετασχηματισμού: $R_{\theta_y,y}$.

Ο ζητούμενος πίνακας θα προκύψει σαν σύνθεση των παραπάνω βασικών μετασχηματισμών.

$$T_k = R_{\theta_y,y} \circ R_{\theta_x,x} = \begin{bmatrix} \cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x & 0 \\ 0 & \sin\theta_x & \cos\theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

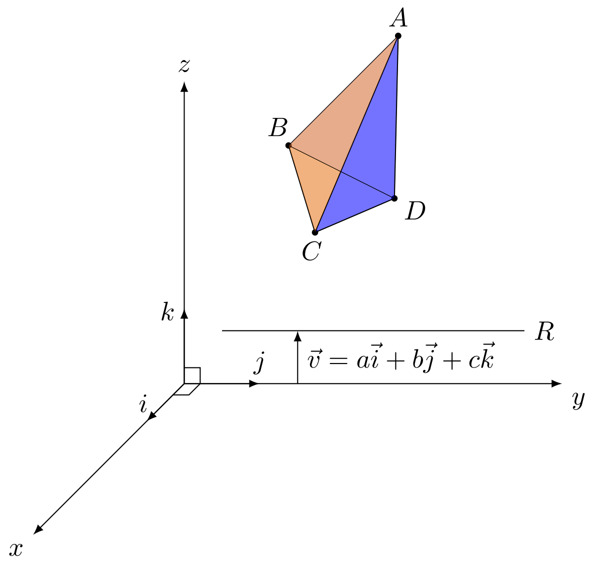
$$= \begin{bmatrix} \cos\theta_y & \sin\theta_y \sin\theta_x & \sin\theta_y \cos\theta_x & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x & 0 \\ -\sin\theta_y & \cos\theta_y \sin\theta_x & \cos\theta_y \cos\theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ii) Εάν εκτελεστούν οι παραπάνω μετασχηματισμοί με αντίθετη σειρά θα προκύψει ο ακόλουθος πίνακας:

$$T_k = R_{\theta_x,x} \cdot R_{\theta_y,y} = \begin{bmatrix} \cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y & 0 \\ \sin\theta_x \sin\theta_y & \cos\theta_x & -\sin\theta_x \cos\theta_y & 0 \\ -\cos\theta_x \sin\theta_y & \sin\theta_x & \cos\theta_x \cos\theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι ο νέος πίνακας διαφέρει από αυτόν του ερωτήματος (i) επομένως παίζει σημαντικό ρόλο η σειρά με την οποία εκτελείται η περιστροφή.

Παράδειγμα 12. Προσδιορίστε το μετασχηματισμό M που περιστρέφει τη δοσμένη πυραμίδα $ABCD$ κατά γωνία θ ως προς το δοσμένο άξονα περιστροφής R.



Σχήμα 4.8: Πυραμίδα $ABCD$ που ζητείται να περιστραφεί κατά γωνία θ ως προς το δοσμένο άξονα περιστροφής R

Λύση. Παρατηρούμε ότι ο άξονας R είναι παράλληλος ως προς το επίπεδο xz και βρίσκεται σε απόσταση που καθορίζεται από το διάνυσμα v. Θα προσπαθήσουμε λοιπόν να τον ταυτίσουμε με τον άξονα των x. Τα ακόλουθα βήματα χρειάζονται για να προσδιορίσουμε τον ζητούμενο πίνακα μετασχηματισμού.

Βήμα 1: Μεταφορά του R κατά διάνυσμα $v = -a\vec{i} - b\vec{j} - c\vec{k}$ ώστε ο άξονας περιστροφής να συμπέσει με τον άξονα των x

Βασικός πίνακας μετασχηματισμού T_v.

Βήμα 2: Στροφή ως προς τον άξονα των x κατά γωνία θ.

Βασικός πίνακας μετασχηματισμού $R_{\theta,x}$.

Βήμα 3: Επαναφορά του R_{-v} στην αρχική του θέση μεταφέροντας τον κατά διάνυσμα $-v$.

Βασικός πίνακας μετασχηματισμού T_{-v}.

Ο ζητούμενος μετασχηματισμός M προκύπτει σα σύνθεση των παραπάνω βασικών μετασχηματισμών:

$$M = T_{-v} \circ R_{\theta,x} \circ T_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & -b\cos\theta + c\sin\theta + b \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & -b\sin\theta - c\cos\theta + c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Οι συντεταγμένες $A'B'C'D'$ της στραμμένης πυραμίδας προκύπτουν από τον ακόλουθο πολλαπλασιασμό:

$$A'B'C'D' = M \cdot ABCD$$

Παρατήρηση. Είναι ιδιαιτέρως χρήσιμο στους μετασχηματισμούς στο χώρο των τριών διαστάσεων να μπορέσουμε να καθορίσουμε τον πίνακα μετασχηματισμού που εκφράζει τη στροφή ενός αντικειμένου ως προς ένα οποιοδήποτε δοσμένο άξονα στον χώρο. Στα επόμενα παραδείγματα αντιμετωπίζεται το συγκεκριμένο πρόβλημα.

Παράδειγμα 13. Προσδιορίστε το μετασχηματισμό A_v που ευθυγραμμίζει δοσμένο διάνυσμα $\vec{v}$ με το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{k}$ κατά μήκος του θετικού μέρους του άξονα των z.

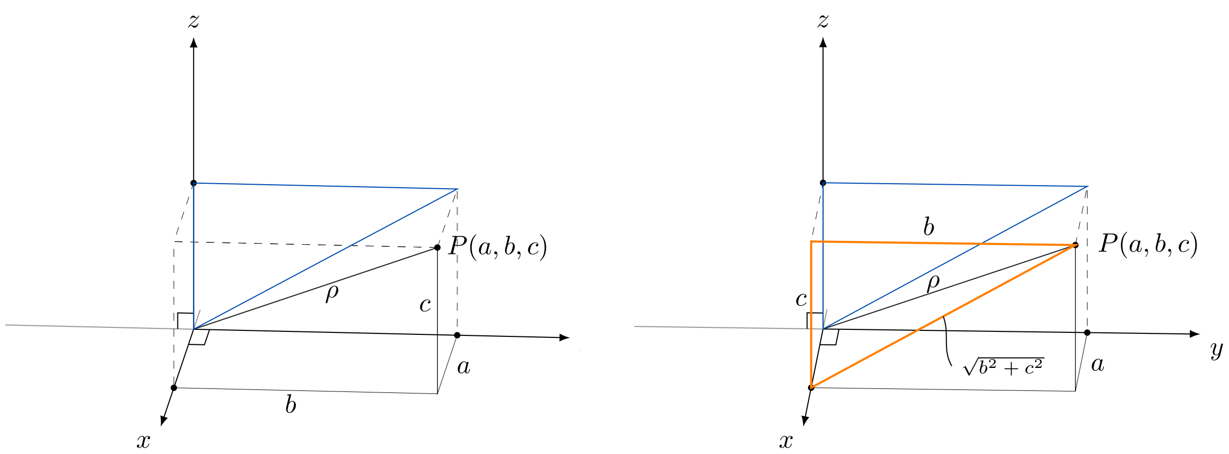
Λύση. Τα ακόλουθα βήματα απαιτούνται για το ζητούμενο μετασχηματισμό.

Βήμα 1: Περιστροφή του διανύσματος v γύρω από τον άξονα x κατά γωνία θ_1 έτσι ώστε το v να πέφτει στο πάνω μέρος του επιπέδου xz (διάνυσμα v_1, Σχήμα **??**

Βασικός πίνακας μετασχηματισμού $R_{\theta_1,x}$.

Βήμα 2: Περιστροφή του διανύσματος v_1 γύρω από τον άξονα των y κατά γωνία $-\theta_2$ έτσι ώστε ώστε το v_1 να πέσει πάνω στο θετικό μέρος του άξονα των z (διάνυσμα v_2 Σχήμα **??**).

Βασικός πίνακας μετασχηματισμού $R_{-\theta_2,x}$.



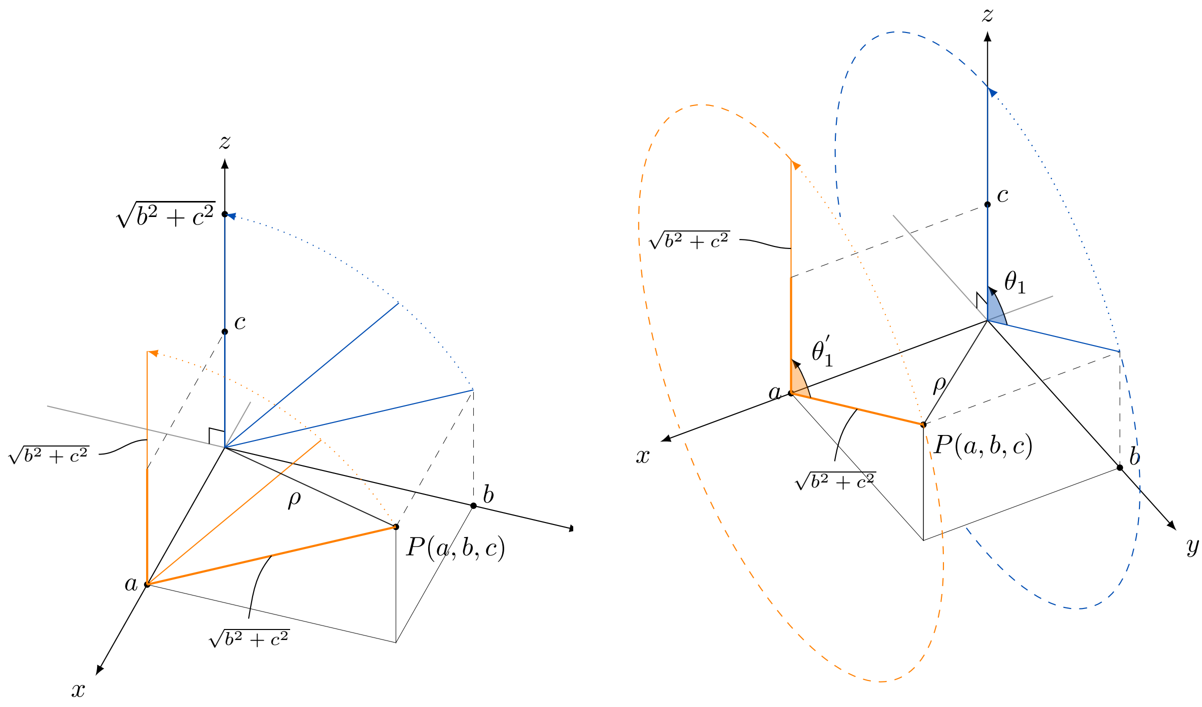
Σχήμα 4.9: Διάνυσμα v που καλούμαστε να ευθυγραμμίσουμε με το μοναδιαίο διάνυμα $\vec{k}$ του άξονα z

Ο ζητούμενος πίνακας θα προκύψει σαν σύνθεση των παραπάνω βασικών μετασχηματισμών αφού όμως πρώτα προσδιοριστούν οι γωνίες θ_1 και θ_2.

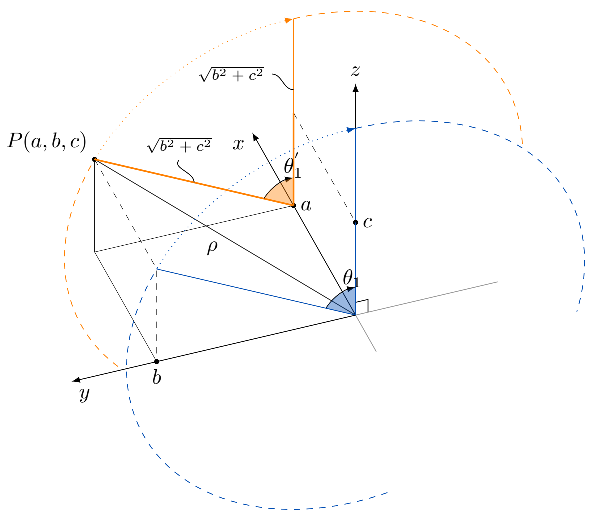
Προσδιορισμός των γωνιών θ_1 και θ_2: Από το Σχήμα **??** παρατηρούμε ότι η ζητούμενη γωνία θ_1 θα προσδιοριστεί από τη γωνία που σχηματίζει η προβολή του v στο επίπεδο yz με τον άξονα των z. (υποθέτουμε ότι b και c δεν είναι και τα δύο μηδέν). Από το τρίγωνο $OP'B$ check προκύπτει:

$$\sin\theta_1 = \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}$$
$$\cos\theta_1 = \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}$$

Ο πίνακας περιστροφής $R_{\theta_1,x}$ ισούται με:

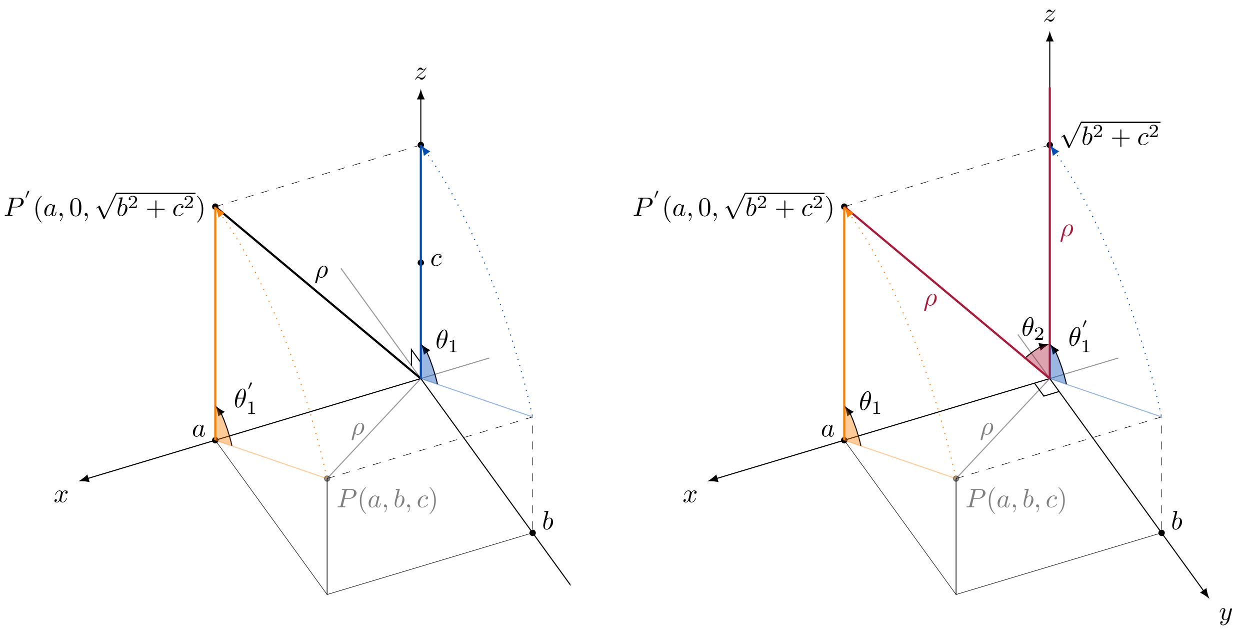


Σχήμα 4.10: Βήμα 1: Περιστροφή του διανύσματος υ γύρω από τον άξονα x κατά γωνία θ_1 έτσι ώστε το υ να πέσει στο επίπεδο xz



Σχήμα 4.11: Διαφορετική όψη στροφής διανύσματος υ γύρω από τον άξονα x

$$R_{\theta_1,x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{c}{\sqrt{b^2+c^2}} & \dfrac{-\,b}{\sqrt{b^2+c^2}} & 0 \\ 0 & \dfrac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} & \dfrac{c}{\sqrt{b^2+c^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Σχήμα 4.12: Βήμα 2: Περιστροφή του διανύσματος v_1 γύρω από τον άξονα των y κατά γωνία $-\theta_2$ έτσι ώστε ώστε το v_1 να πέσει πάνω στο θετικό μέρος του άξονα των z

Επιδρώντας με αυτόν τον πίνακα στο διάνυσμα $v(a, b, c)$ προκύπτουν οι συντεταγμένες του $v_1(x, y, z)$:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = R_{\theta_1,x} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{c}{\sqrt{b^2+c^2}} & \dfrac{-\,b}{\sqrt{b^2+c^2}} & 0 \\ 0 & \dfrac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} & \dfrac{c}{\sqrt{b^2+c^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ \sqrt{b^2+c^2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Για τον προσδιορισμό της γωνίας θ_2 από το τρίγωνο OQQ' (Σχήμα **??**) προκύπτει:

$$\sin(-\theta_2) == -\sin\theta_2 - \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$
$$\cos(-\theta_2) = \cos\theta_2 = \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Τελικά, ο ζητούμενος μετασχηματισμός A_v θα ισούται με:

$$A_v = R_{-\theta_2,y} \cdot R_{\theta_1,x}$$

Αντικαθιστώντας τις προηγούμενες γωνίες στους πίνακες $R_{-\theta_2,y}, R_{\theta_1,x}$ και θέτοντας $\lambda = \sqrt{b^2+c^2}$, προκύπτει:

$$A_v = \begin{bmatrix} \frac{\lambda}{|v|} & \frac{-ab}{\lambda|v|} & \frac{-ac}{\lambda|v|} & 0 \\ 0 & \frac{c}{\lambda} & \frac{-b}{\lambda} & 0 \\ \frac{a}{|v|} & \frac{b}{|v|} & \frac{c}{|v|} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ όπου } |v| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

Παρατήρηση. Εάν b και c ισούνται με μηδέν, τότε $\lambda = 0$. Σε αυτή την περίπτωση απαιτείται μόνο μία περιστροφή 90° ως προς τον άξονα των y. Τότε $v = a\vec{i}$, δηλαδή το δοσμένο διάνυσμα βρίσκεται επί του άξονα x. Δηλαδή:

$$A_v = R_{-\theta_2,y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-a}{|a|} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{a}{|a|} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Παρατήρηση. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό A_v^{-1}, που ευθυγραμμίζει το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{k}$ με το δοσμένο διάνυσμα v. Πιο συγκεκριμένα:

$$A_v^{-1} = (R_{-\theta_2,y} \cdot R_{\theta_1,x})^{-1} = R_{\theta_1,x}^{-1} \cdot R_{-\theta_2,y}^{-1} = R_{-\theta_1,x} \cdot R_{\theta_2,y} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda}{|v|} & 0 & \frac{a}{|v|} & 0 \\ \frac{-ab}{\lambda|v|} & \frac{c}{\lambda} & \frac{b}{|v|} & 0 \\ \frac{-ac}{\lambda|v|} & \frac{-b}{\lambda} & \frac{c}{|v|} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Παρατήρηση. Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού A_v μπορούμε να ταυτίσουμε οποιονδήποτε δοσμένο άξονα στον χώρο με κάποιον από τους O_x, O_y, O_z. Έτσι μπορούμε να ανάγουμε το πρόβλημα της στροφής ως προς ένα οποιοδήποτε άξονα R του χώρου σε πρόβλημα στροφής ως προς τον άξονα O_x, O_y ή O_z με τον οποίο θα έχουμε ταυτίσει τον R.

Παράδειγμα 14. Βρείτε το μετασχηματισμό που περιστρέφει δοσμένο σημείο Q ως προς άξονα περιστροφής L που περνάει από ένα καθορισμένο σημείο P και η διεύθυνσή του καθορίζεται από επίσης δοσμένο διάνυσμα v.

Λύση.

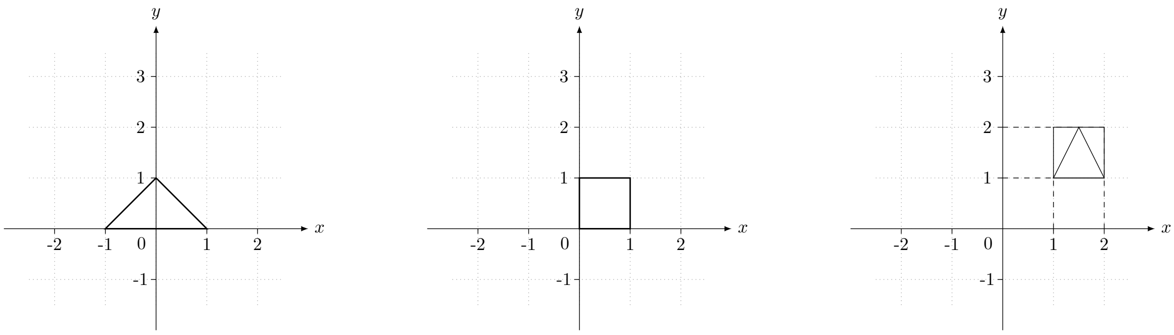
Ασκήσεις 3ου Κεφαλαίου

Άσκηση 19. Με ποια σύνθεση μετασχηματισμών μπορεί να φέρουμε την εικόνα (α), (β) στη θέση (γ).

Λύση. Πρώτα στην εικόνα (α) μπορούμε να δράσουμε ως εξής:

1. Σύμπτυξη στις x-συντεταγμένες με: $s_x = \frac{1}{2}, s_y = 1$ (ως προς την αρχή των αξόνων).

2. Μεταφορά κατά $\vec{v} = (\frac{3}{2}, 1)$.



(α) (β) (γ)

Έτσι, παίρνουμε τον πίνακα μετασχηματισμού:

$$M_{(a)} = T_v \cdot S_{\frac{1}{2},1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Πράξεις:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Αν στην εικόνα (β) μεταφερθεί κατά $\vec{v} = (1,1)$, θα πάρουμε το τετράγωνο της εικόνας (γ):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 20. Να προσδιοριστούν:

1. ο πίνακας $R_{\theta,y}$ και
2. ο πίνακας $R_{\theta,x}$.

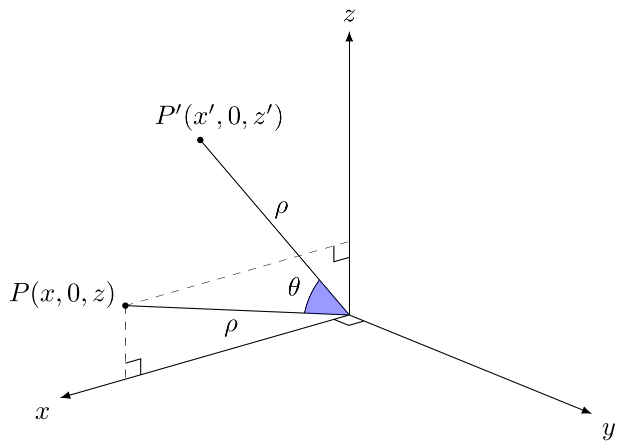
Λύση. 1. Επιλέγω αρχικά σημείο που να ανήκει στο Επίπεδο xz.

Από το σχήμα προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + z\sin\theta \\ y' &= y \\ z' &= -x\sin\theta + z\cos\theta \end{aligned}$$

Συνεπώς:

$$R_{\theta,y} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Σχήμα 4.13: Στροφή σημείου στο επίπεδο xz

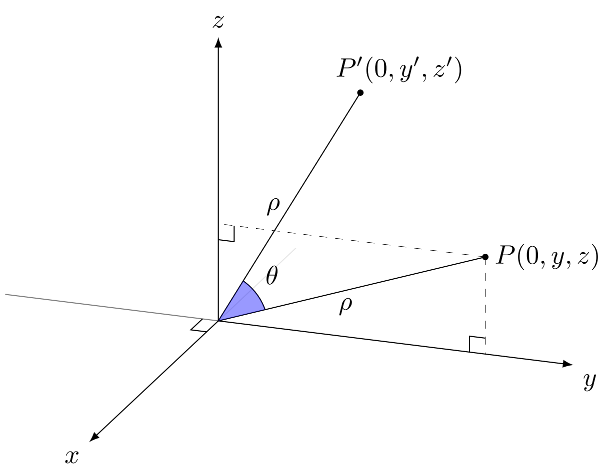
2. Επιλέγω αρχικά σημείο που να ανήκει στο Επίπεδο yz.

   Από το σχήμα προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y\cos\theta - z\sin\theta \\ z' &= y\sin\theta + z\cos\theta \end{aligned}$$

   Συνεπώς:

$$R_{\theta,y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Σχήμα 4.14: Στροφή σημείου στο επίπεδο xz

Άσκηση 21. Να γίνει η περιστροφή της πυραμίδας A, B, C, D which από τον άξονα x κατά $\theta_x = 60°$ και στη συνέχεια γύρω από τον άξονα y κατά γωνία $\theta_y = 60°$.

Λύση.

Άσκηση 22.

Λύση.

Άσκηση 23.

Λύση.