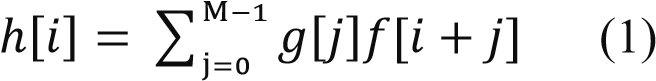
# Φιλτράρισμα στο πεδίο του χώρου

***Υπόβαθρο****:* Υπάρχει διαφορά μεταξύ της συνέλιξης (convolution) και της συσχέτισης (cross correlation): στη συσχέτιση, υπολογίζετε το εσωτερικό γινόμενο (δηλαδή, το ζυγισμένο άθροισμα των pixel της εικόνας 𝒏𝒑. 𝒔𝒖𝒎(𝑭 ∗ 𝑰[𝒚𝟏: 𝒚𝟐 , 𝒙𝟏: 𝒙𝟐])) μεταξύ του πυρήνα/φίλτρου και κάθε παραθύρου/τμήματος στην εικόνα. Στη συνέλιξη, υπολογίζετε το εσωτερικό γινόμενο μεταξύ του ανεστραμμένου πυρήνα/φίλτρου και κάθε παραθύρου/τμήματος στην εικόνα. Προκειμένου να αποσαφηνίσουμε αυτή τη διάκριση, θα δούμε τι συμβαίνει αρχικά στη μια διάσταση (1Δ). Ας υποθέσουμε ότι η είσοδος/σήμα  έχει  στοιχεία (δηλαδή, δεικτοδοτείται από  για ) και το φίλτρο/πυρήνας *g* έχει *M* στοιχεία (δηλαδή, έχει δείκτες  για ). Σε όλες τις παρακάτω περιπτώσεις, μπορείτε να υποθέσετε συμπλήρωση μηδενικών (zero padding) της εισόδου/σήματος . H **1-Δ** (cross-correlation) **συσχέτιση** συνήθως δίνεται από τον τύπο:



ή για κάθε στοιχείο , το άθροισμα όλων των γινομένων μεταξύ του φίλτρου στη θέση  και της εισόδου στη θέση  για όλες τις έγκυρες τιμές του . Αν θέλετε να σκεφτείτε αυτή τη διαδικασία με όρους γινομένων πινάκων, μπορείτε να το θεωρήσετε ως

 𝒈𝑇𝒇𝑖:

Από τις δύο επιλογές, αυτή είναι συνήθως πιο διαισθητική.

Όταν κάνουμε 1Δ συνέλιξη, από την άλλη πλευρά, αναδιατάσσουμε το φίλτρο από το τελευταίο προς το πρώτο στοιχείο και στη συνέχεια κάνουμε το φιλτράρισμα. Στην επεξεργασία σήματος, αυτό συνήθως αναλύεται με κατάλληλες τεχνικές δεικτοδότησης («index manipulation»). Γενικά, η 1Δ συνέλιξη παίρνει τη μορφή:



η οποία είναι διαφορετική επειδή ξεκινάμε από το 0 αντί του 1. Μπορείτε να επαληθεύσετε ότι καθώς ο δείκτης *j* πηγαίνει από 0 σε (*M - 1*), ο νέος δείκτης (*M - j - 1*) πηγαίνει από (*M - 1*) σε 0.

Στη γενική περίπτωση, αν σας ζητηθεί να εφαρμόσετε συνέλιξη με δοθέν φίλτρο, απλώς μπορείτε να κάνετε τα εξής: (1) στην αρχή της συνάρτησης και μόνο 1 φορά, υπολογίστε το

𝑔 αν είναι 1Δ ή αλλιώς το , (2) κάντε το φιλτράρισμα με αυτό το

ανεστραμμένο φίλτρο. Ο λόγος για τον οποίο γίνεται όλος αυτός ο κόπος είναι ότι η συνέλιξη είναι

αντιμεταθετική ()και «προσεταιριστική» (). Η συσχέτιση από την άλλη δεν ικανοποιεί αυτές τις ιδιότητες.

Όλα αυτά θα σας χρειαστούν:

* Στην υλοποίηση της συνέλιξης στο ζήτημα 2(b), στη συνάρτηση *convolve()* του *filters.py*.
* Όταν ασχολούμαστε με μη-συμμετρικά φίλτρα (όπως οι κατευθυντικές παράγωγοι [1,0,1]). Ένα συμμετρικό φίλτρο όπως το Γκαουσιανό δεν επηρεάζεται από τη διάκριση αυτή επειδή αν το αναστρέψετε οριζόντια/κατακόρυφα, παραμένει το ίδιο. Ωστόσο, για τα ασύμμετρα φίλτρα, μπορείτε να πάρετε διαφορετικά αποτελέσματα. Στην περίπτωση των κατευθυντικών παραγώγων, αυτό αναστρέφει το πρόσημο. Αυτό μπορεί να οδηγήσει σε εξόδους με αντίθετες τιμές ή να σας δίνει απαντήσεις που είναι σχεδόν σωστές αλλά πρέπει να πολλαπλασιαστούν με -1. Συνοψίζοντας: αν έχετε κάτι που είναι σωστό εκτός από ένα «-1», και χρησιμοποιείτε μια κατευθυντική παράγωγο, τότε το έχετε κάνει με συσχέτιση.

## Ζήτημα 2: Συνέλιξη και Γκαουσιανό φίλτρο (Convolution and Gaussian Filter) [16 μονάδες]

Όπως ήδη γνωρίζετε, ένα Γκαουσιανό φίλτρο έχει τιμές που ακολουθούν Gaussian κατανομή πιθανότητας. Συγκεκριμένα, οι τιμές του φίλτρου είναι:

𝑥 𝑦

𝐺

(

𝑥

)

=

1

√

2

𝜋

𝜎

2

𝑒

−

𝑥

2

2

𝜎

2

1

2

2

−

2

+

2

2

𝜎

2

1Δ πυρήνας: 2Δ πυρήνας: 𝐺(𝑥, 𝑦) = 𝑒

𝜋𝜎 όπου το 0 είναι το κέντρο του φίλτρου (τόσο στη 1Δ όσο και στη 2Δ, “zero centered”) και η 𝜎 είναι μια ελεύθερη παράμετρος που ελέγχει το βαθμό της θόλωσης/εξομάλυνσης της εικόνας. Μια χρήσιμη ιδιότητα λοιπόν που κάνει τα πράγματα πιο γρήγορα, έγκειται στο ότι η εφαρμογή ενός 2Δ Gaussian φίλτρου σε μια εικόνα έχει το ίδιο αποτέλεσμα με την διαδοχική εφαρμογή δύο 1Δ Gaussian φίλτρων, το ένα κάθετο και το άλλο οριζόντιο (η σειρά εφαρμογής δεν παίζει ρόλο).

1. **Ολοκληρώστε τη συνάρτηση** **convolve()** στο αρχείο **filters.py**. Βεβαιωθείτε ότι υλοποιείτε συνέλιξη και όχι φιλτράρισμα συσχέτισης (δηλαδή, αντιστρέψτε τον πυρήνα μόλις τον λάβετε). Για λόγους συνέπειας στα όρια της εικόνας, πρέπει να χρησιμοποιήσετε συμπλήρωση μηδενικών (**zero-padding**) κατά την υλοποίηση της συνέλιξης. (4 μονάδες)

**Υπόδειξη:** χρησιμοποιήστε τη συνάρτηση **scipy.ndimage.convolve()** **για να ελέγξετε την ορθότητα** της υλοποίησή σας, **όχι** για την απευθείας υλοποίηση του ερωτήματος. Ανατρέξτε στο [documentation](https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.ndimage.convolve.html) (αν χρειαστείτε περισσότερες λεπτομέρειες). Για τη συμπλήρωση μηδενικών, χρησιμοποιήστε την παράμετρο **mode='constant'**.

1. **Εμφανίστε το αποτέλεσμα εκτέλεσης του αρχείου** “filters.py” στο αντίστοιχο ερώτημα που ακολουθεί (“TODO Zitima 2”, στη συνάρτηση main) και τοποθετήστε το στην αναφορά σας και στη συνέχεια περιγράψτε τι κάνει το Gaussian φιλτράρισμα στην εικόνα σε μία πρόταση. «**main»**: **Διαβάστε/φορτώστε** την εικόνα "grace\_hopper.png" ως είσοδο και **εφαρμόστε ένα φίλτρο** Gaussian που είναι 3x3 με τυπική απόκλιση 𝜎=0.572». (2 μονάδες)