

Αν. Καθηγητής Π. Λουρίδας

Τμήμα Διοικητικής Επιστήμης και Τεχνολογίας

Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών

## Κοινωνική Αποστασιοποίηση

Στην εποχή του κορωνοϊού, σημαντικό ρόλο στην αντιμετώπιση της επιδημίας έχει η *κοινωνική αποστασιοποίηση* (social distancing). Αλλάζουμε τις συνήθειές μας και τον τρόπο με τον οποίο συναναστρεφόμαστε με τους συνανθρώπους μας ώστε να ελαχιστοποιήσουμε τις πιθανότητες μετάδοσης του ιού.

Ανάμεσα στους κανόνες που καλούνται οι πολίτες να εφαρμόσουν, κάποιοι σχετίζονται με την ελάχιστη απόσταση που πρέπει να διατηρούν μεταξύ τους. Έτσι, σε διάφορους χώρους πρέπει να λαμβάνεται πρόνοια ώστε οι παρευρισκόμενοι να είναι διασπαρμένοι ώστε να μην πλησιάζουν περισσότερο από την προτεινόμενη απόσταση.

Το πρόβλημα που τίθεται τότε είναι: αν έχουμε ένα συγκεκριμένο χώρο, πόσοι άνθρωποι μπορούν να βρίσκονται ταυτόχρονα μέσα στον χώρο αυτό; Και πού ακριβώς μπορούν να τοποθετηθούν αυτοί οι άνθρωποι;

Μπορούμε να αναπαραστήσουμε το κάθε άτομο έναν κύκλο, ο οποίος έχει ακτίνα ίση με την ελάχιστη απόσταση που πρέπει να τηρείται. Τότε το πρόβλημα ανάγεται στην εισαγωγή κύκλων με την επιθυμητή διάμετρο μέσα στο γεωμετρικό σχήμα που περιγράφει τον χώρο που θέλουμε.

Για να βρούμε πού θα τοποθετηθούν αυτοί οι κύκλοι μπορούμε να εργαστούμε ως εξής.

1. Τοποθετούμε έναν κύκλο στο σημείο από το οποίο θέλουμε να ξεκινήσουμε τη διαδικασία της τοποθέτησης.
2. Τοποθετούμε έναν κύκλο εφαπτόμενο στον πρώτο, σημειώνοντας ότι ο ένας έπεται του άλλου.
3. Παρεμβάλλουμε έναν κύκλο εφαπτόμενο στον τελευταίο κύκλο που βάλαμε και τον πρώτο.
4. Επιστρέφουμε στο βήμα 3.

Στην παρακάτω εικόνα μπορείτε να δείτε την εξέλιξη καθώς εισάγουμε τους πρώτους επτά κύκλους. Εδώ όμως σταματάμε, γιατί δεν μπορούμε να συνεχίσουμε με την παραπάνω μέθοδο. Αν προσπαθήσουμε να παρεμβάλλουμε έναν κύκλο μεταξύ του  $C_1$  και του  $C_7$ , θα πρέπει να φτιάξουμε έναν κύκλο ο οποίος πέφτει ακριβώς πάνω στον  $C_2$ , που έχουμε ήδη φτιάξει.

Μπορούμε όμως να παρατηρήσουμε το εξής. Τα κέντρα των κύκλων σχηματίζουν ένα κλειστό πολύγωνο. Αν θέλουμε να συνεχίσουμε τη διαδικασία, θα πρέπει να βγάλουμε από το πολύγωνο την κορυφή  $C_1$  και να συνδέσουμε απ' ευθείας τις κορυφές



Σχήμα 1: Αρχικές Εισαγωγές

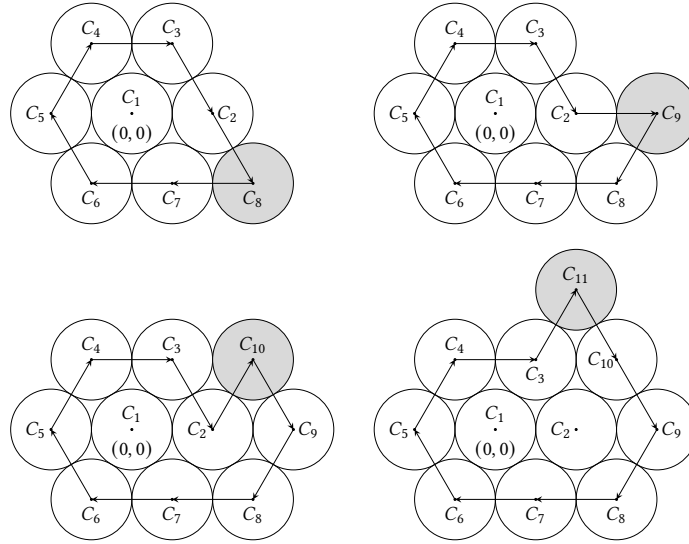
$C_2$  και  $C_7$ . Τότε μπορούμε να παρεμβάλουμε έναν εφαπτόμενο κύκλο στους  $C_2$  και  $C_7$ , όπως φαίνεται στο πρώτο σχήμα της εικόνας που ακολουθεί.

Αυτό λοιπόν μας δίνει μια ιδέα. Ονομάζουμε τους κύκλους στην περιφέρεια του σχήματος, πλάι στους οποίους μπορούμε να προσάψουμε εφαπτόμενους κύκλους, *μέτωπο*. Για να προσθέσουμε λοιπόν κύκλους, θα εργαζόμαστε ως εξής.

1. Εισάγουμε τους δύο πρώτους κύκλους (αυτοί αποτελούν ένα τετριμμένο μέτωπο).
2. Εντοπίζουμε τον κύκλο στο μέτωπο που είναι πιο κοντά στο σημείο εκκίνησης. Έστω ότι ο κύκλος αυτός είναι ο κύκλος  $C_m$ . Σε περίπτωση που έχουμε περισσότερους από έναν κύκλους με την ίδια ελάχιστη απόσταση, παίρνουμε τον αρχαιότερο.
3. Δοκιμάζουμε έναν κύκλο ανάμεσα στον  $C_m$  και σε αυτόν που τον ακολουθεί στο μέτωπο,  $C_n$ . Έστω ότι ο δοκιμαστικός αυτός κύκλος είναι ο  $C_i$ .
4. Αν ο  $C_i$  δεν τέμνει κανέναν κύκλο του μετώπου, τότε τον εισάγουμε και επιστρέφουμε στο βήμα 2.
5. Διαφορετικά, αφαιρούμε από το μέτωπο τους κύκλους που χρειάζεται και επιστρέφουμε στο βήμα 2.

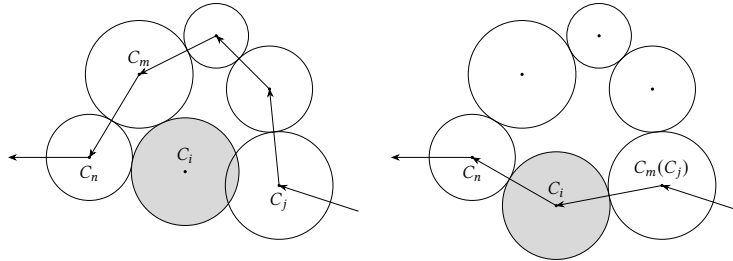
Με τον τρόπο αυτό βλέπουμε ότι εισάγουμε τους κύκλους  $C_9$  και  $C_{10}$  χωρίς πρόβλημα. Μετά ο κοντινότερος στην εκκίνηση κύκλος του μετώπου είναι ο  $C_2$  που τον ακολουθεί ο  $C_{10}$ . Αν δοκιμάσουμε να εισάγουμε κύκλο που να εφάπτεται στους  $C_2$  και  $C_{10}$ , θα δούμε ότι αυτός πέφτει πάνω (άρα τέμνει) τον  $C_3$ . Ακολουθούμε το βήμα 5, αφαιρούμε τον  $C_2$  από το μέτωπο άρα ο επόμενος του  $C_3$  στο μέτωπο είναι ο  $C_{10}$ . Επιστρέφοντας στο βήμα 2 βρίσκουμε ότι ο κοντινότερος κύκλος του μετώπου στην εκκίνηση είναι πλέον ο  $C_3$ , οπότε προσθέτουμε τον  $C_{11}$ .

Ο αλγόριθμος που περιγράψαμε δεν είναι πλήρης, γιατί το βήμα 5 είναι ασαφές. Δεν έχουμε ορίσει ακριβώς ποιοι είναι οι κύκλοι οι οποίοι πρέπει να αφαιρέσουμε από το μέτωπο.



Σχήμα 2: Συνέχεια Εισαγωγών

Αν επιστρέψουμε στο παράδειγμά μας, είδαμε ότι αφού ο κύκλος που δοκιμάζουμε να βάλουμε εφαπτόμενο στους  $C_2$  και  $C_{10}$  τέμνεται με τον  $C_3$ , αφαιρέσαμε τον  $C_2$  από το μέτωπο. Γενικότερα, αν ο κύκλος  $C_i$  που δοκιμάζουμε να βάλουμε εφαπτόμενο στους  $C_m$  και  $C_n$  τέμνεται με έναν κύκλο  $C_j$  που προηγείται του  $C_m$ , αφαιρούμε από το μέτωπο τους κύκλους από τον επόμενο του  $C_j$  μέχρι τον προηγούμενο του  $C_n$  και ο  $C_m$  γίνεται ο  $C_j$ , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 3: Τομή Προηγείται του  $C_m$

Υπάρχει και άλλο ενδεχόμενο, ο  $C_i$  που δοκιμάζουμε να βάλουμε εφαπτόμενο στους  $C_m$  και  $C_n$  να τέμνεται με έναν κύκλο  $C_j$  που έπεται του  $C_n$ . Τότε αφαιρούμε από το μέτωπο τους κύκλους από τον επόμενο του  $C_m$  μέχρι τον προηγούμενο του  $C_j$  και ο  $C_n$  γίνεται ο  $C_j$ , όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.

Ο αλγόριθμός μας τότε μετασχηματίζεται ως εξής:

1. Εισάγουμε τους δύο πρώτους κύκλους (αυτοί αποτελούν ένα τετριμμένο μέ-



Σχήμα 4: Τομή Έπεται του  $C_n$

τωπο).

2. Εντοπίζουμε τον κύκλο στο μέτωπο που είναι πιο κοντά στο σημείο εκκίνησης. Έστω ότι ο κύκλος αυτός είναι ο κύκλος  $C_m$ . Σε περίπτωση που έχουμε περισσότερους από έναν κύκλο με την ίδια ελάχιστη απόσταση, παίρνουμε τον αρχαιότερο.
3. Δοκιμάζουμε έναν κύκλο ανάμεσα στον  $C_m$  και σε αυτόν που τον ακολουθεί στο μέτωπο,  $C_n$ . Έστω ότι ο δοκιμαστικός αυτός κύκλος είναι ο  $C_i$ .
4. Αν ο  $C_i$  δεν τέμνει κανέναν κύκλο του μετώπου, τότε τον εισάγουμε στο μέτωπο και επιστρέφουμε στο βήμα 2.
5. Διαφορετικά:
  - Αν ο κύκλος  $C_i$  που δοκιμάζουμε να βάλουμε εφαπτόμενο στους  $C_m$  και  $C_n$  τέμνεται με έναν κύκλο  $C_j$  που προηγείται του  $C_m$  (αν υπάρχουν παραπάνω από ένας, παίρνουμε τον κοντονότερο στον  $C_m$ ), αφαιρούμε από το μέτωπο τους κύκλους από τον επόμενο του  $C_j$  μέχρι τον προηγούμενο του  $C_n$ , θέτουμε τον  $C_m$  να είναι ο  $C_j$ , και επιστρέφουμε στο βήμα 3.
  - Αν ο κύκλος  $C_i$  που δοκιμάζουμε να βάλουμε εφαπτόμενο στους  $C_m$  και  $C_n$  τέμνεται με έναν κύκλο  $C_j$  που έπεται του  $C_n$  (αν υπάρχουν παραπάνω από ένας, παίρνουμε τον κοντονότερο στον  $C_n$ ) αφαιρούμε από το μέτωπο τους κύκλους από τον επόμενο του  $C_m$  μέχρι τον προηγούμενο του  $C_j$ , θέτουμε τον  $C_n$  να είναι ο  $C_j$ , και επιστρέφουμε στο βήμα 3.

Ο αλγόριθμός μας τώρα δουλεύει και θα γεμίζει το χώρο, ξεκινώντας από το σημείο εκκίνησης. Δεν ελέγχει όμως πού πρέπει να σταματά η προσθήκη κύκλων επειδή έχουμε συναντήσει κάποιο όριο του χώρου που θέλουμε να γεμίσουμε. Για να το επιτύχουμε και αυτό, πρέπει να κάνουμε ακόμα μια προσαρμογή στον αλγόριθμό μας για να συμπεριλάβουμε τον σχετικό έλεγχο. Στη νέα εκδοχή του αλγορίθμου θα σημειώνουμε τους κύκλους του μετώπου που είναι ζωντανοί, δηλαδή αυτοί στους οποίους μπορούμε να προσθέσουμε εφαπτόμενο κύκλο χωρίς να φτάσουμε στα όρια του σχήματός μας. Κάθε κύκλος που μπαίνει στο μέτωπο είναι κατ' αρχήν ζωντανός.

1. Εισάγουμε τους δύο πρώτους κύκλους (αυτοί αποτελούν ένα τετριμμένο μέ-

τωπο).

2. Εντοπίζουμε τον ζωντανό κύκλο στο μέτωπο που είναι πιο κοντά στο σημείο εκκίνησης. Έστω ότι ο κύκλος αυτός είναι ο κύκλος  $C_m$ . Σε περίπτωση που έχουμε περισσότερους από έναν κύκλο με την ίδια ελάχιστη απόσταση, παίρνουμε τον αρχαιότερο.
3. Δοκιμάζουμε έναν κύκλο ανάμεσα στον  $C_m$  και σε αυτόν που τον ακολουθεί στο μέτωπο,  $C_n$ . Έστω ότι ο δοκιμαστικός αυτός κύκλος είναι ο  $C_i$ .
4. Αν ο  $C_i$  τέμνει κάποιον κύκλο του μετώπου:
  - Αν ο κύκλος  $C_i$  που δοκιμάζουμε να βάλουμε εφαπτόμενο στους  $C_m$  και  $C_n$  τέμνεται με έναν κύκλο  $C_j$  που προηγείται του  $C_m$  (αν υπάρχουν παραπάνω από ένας, παίρνουμε τον κοντονότερο στον  $C_m$ ), αφαιρούμε από το μέτωπο τους κύκλους από τον επόμενο του  $C_j$  μέχρι τον προηγούμενο του  $C_n$ , θέτουμε τον  $C_m$  να είναι ο  $C_j$ , και επιστρέφουμε στο βήμα 3.
  - Αν ο κύκλος  $C_i$  που δοκιμάζουμε να βάλουμε εφαπτόμενο στους  $C_m$  και  $C_n$  τέμνεται με έναν κύκλο  $C_j$  που έπεται του  $C_n$  (αν υπάρχουν παραπάνω από ένας, παίρνουμε τον κοντονότερο στον  $C_n$ ), αφαιρούμε από το μέτωπο τους κύκλους από τον επόμενο του  $C_m$  μέχρι τον προηγούμενο του  $C_j$  και επιστρέφουμε στο βήμα 3.
5. Στο σημείο αυτό έχουμε βρεί έναν κύκλο  $C_i$  που δεν τέμνει κύκλο του μετώπου. Ελέγχουμε λοιπόν αν τέμνει τα όρια του σχήματός μας. Αν ναι, τότε αλλάζουμε τον κύκλο  $C_m$  από ζωντανό σε πεθαμένο και επιστρέφουμε στο βήμα 2. Αλλιώς, εισάγουμε τον  $C_i$  στο μέτωπο και επιστρέφουμε στο βήμα 2.

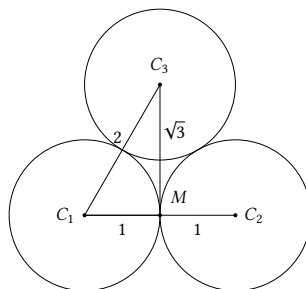
Η διαδικασία των βημάτων 2–5 επαναλαμβάνεται μέχρι να προσθέσουμε τον επιθυμητό αριθμών κύκλων ή να μην μπορούμε να προσθέσουμε άλλους κύκλους στο σχήμα, γιατί δεν έχει μείνει κανένας ζωντανός.

### Στρογγυλοποιήσεις

Έστω ότι έχουμε τρεις κύκλους με ακτίνα 1. Ο  $C_1$  έχει κέντρο στο  $(0, 0)$ , ο  $C_2$  στο  $(2, 0)$  και ο  $C_3$  με κέντρο  $(1, \sqrt{3})$  εφάπτεται στους  $C_1$  και  $C_2$ . Πόσο απέχει το κέντρο του  $C_2$  από το  $C_1$  και πόσο απέχει το κέντρο του  $C_3$  από το  $C_1$ ; Και στις δύο περιπτώσεις ίση με 2, αφού όλες οι ακτίνες είναι ίδιες. Επιπλέον, από το Πυθαγόρειο θεώρημα, οι συντεταγμένες του  $C_3$  είναι  $(1, \sqrt{3})$ .

Έστω τώρα ότι με βάση της συντεταγμένες των σημείων  $C_1$  και  $C_3$  θέλουμε να υπολογίσουμε εκ νέου την απόσταση  $C_1 C_3$ . Αυτή, πάλι με βάση το Πυθαγόρειο θεώρημα, θα είναι ίση με  $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}$ . Αν όμως κάνουμε πράγματι την πράξη στον υπολογιστή, θα δούμε ότι το αποτέλεσμα είναι  $1.999 \dots \neq 2$ .

Αυτό συμβαίνει γιατί οι πραγματικοί αριθμοί αποθηκεύονται με συγκεκριμένη ακρίβεια στον υπολογιστή, συνεπώς άρρητοι αριθμοί δεν αποθηκεύονται ακριβώς και πράξεις με άρρητους αριθμούς βγάζουν διαφορετικά αποτελέσματα από αυτά που θα περιμέναμε στη θεωρία. Αν στο πρόγραμμά μας προσπαθούσαμε να βρούμε τον



Σχήμα 5: Τρεις Ίσοι Εφαπτόμενοι Κύκλοι

κύκλο που είναι πιο κοντά στον  $C_1$ , το πρόγραμμά μας θα έβρισκε τον  $C_3$ , ενώ έχει την ίδια απόσταση με τον  $C_2$ . Για να το αποφύγουμε αυτό θα πρέπει στο πρόγραμμά μας να κάνουμε στρογγυλοποιήσεις όπου απαιτούνται. Συγκεκριμένα:

- Να στρογγυλοποιείτε την απόσταση ενός κύκλου από το σημείο εκκίνησης.
- Αφού κάνετε τους υπολογισμούς για την εύρεση του κέντρου ενός νέου κύκλου, να στρογγυλοποιείτε τις συντεταγμένες του αποτελέσματος.
- Όταν ελέγχετε αν δύο κύκλοι τέμνονται, θα πρέπει να εξετάζετε αν η απόσταση των κέντρων των δύο κύκλων είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των ακτίνων τους. Να στρογγυλοποιείτε την απόσταση αυτή πριν τον έλεγχο.
- Να στρογγυλοποιείτε την απόσταση κύκλου από ευθύγραμμο τμήμα.

Οι στρογγυλοποιήσεις να γίνονται στα δύο δεκαδικά ψηφία.

### Εύρεση Κοντινότερου Κύκλου στο Σημείο Εκκίνησης

Αν  $(x, y)$  οι συντεταγμένες του σημείου εκκίνησης, τότε για να βρούμε τον κοντινότερο κύκλο του μετώπου στο σημείο εκκίνησης, αρκεί να συγκρίνουμε τις αποστάσεις των κέντρων των κύκλων από το σημείο εκκίνησης. Για κάθε κύκλο  $C_m$  του μετώπου με κέντρο  $(m_x, m_y)$ , η απόσταση είναι:

$$d = \sqrt{(m_x - x)^2 + (m_y - y)^2}$$

Αφού δεν μας ενδιαφέρει η τιμή της απόστασης, αλλά μόνο το ποια απόσταση είναι μικρότερη, μπορούμε να παραλείψουμε τη ρίζα και να χρησιμοποιήσουμε το:

$$l_2 = (m_x - x)^2 + (m_y - y)^2$$

Αν  $(x, y) = (0, 0)$ , τότε έχουμε:

$$l_2 = m_x^2 + m_y^2$$

### Εύρεση Εφαπτόμενου Κύκλου

Αν έχουμε δύο κύκλους  $C_m$  και  $C_n$  και θέλουμε να βρούμε έναν τρίτο κύκλο  $C_k$  ακτίνας  $r$  που να εφάπτεται σε αυτούς τους δύο, εργαζόμαστε ως ακολούθως:

- Υπολογίζουμε την οριζόντια απόσταση  $d_x$  και την κάθετη απόσταση  $d_y$  των κέντρων των δύο κύκλων  $C_m$  και  $C_n$ . Αν  $(m_x, m_y)$  είναι το κέντρο του  $C_m$  και  $(n_x, n_y)$  είναι το κέντρο του  $C_n$ , έχουμε:

$$d_x = n_x - m_x$$

$$d_y = n_y - m_y$$

- Υπολογίζουμε την απόσταση μεταξύ των κέντρων των δύο κύκλων  $C_m$  και  $C_n$ :

$$d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2}$$

- Αν  $r_m$  είναι η ακτίνα του  $C_m$  και  $r_n$  είναι η ακτίνα του  $C_n$ , υπολογίζουμε τις τιμές:

$$r_1 = r_m + r$$

$$r_2 = r_n + r$$

- Υπολογίζουμε τα:

$$\lambda = \frac{r_1^2 - r_2^2 + d^2}{2d^2}$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{r_1^2}{d^2} - \lambda^2}$$

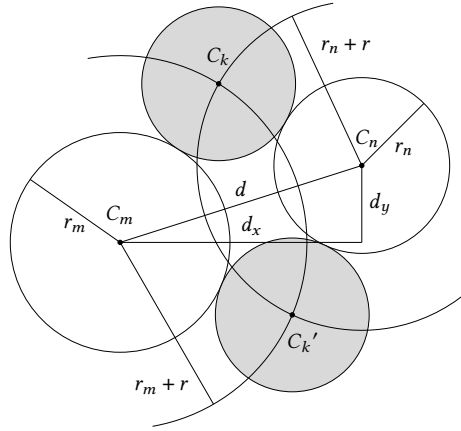
- Το κέντρο  $(k_x, k_y)$  του κύκλου  $C_k$  έχει τις συντεταγμένες:

$$k_x = m_x + \lambda d_x \mp \varepsilon d_y$$

$$k_y = m_y + \lambda d_y \pm \varepsilon d_x$$

- Παρατηρούμε ότι υπάρχουν δύο κέντρα. Εμείς θα χρησιμοποιούμε το πρώτο από αυτά (δηλαδή το  $-\varepsilon d_y$  στο  $k_x$  και το  $+\varepsilon d_x$  στο  $k_y$ ). Τότε οι κύκλοι θα προστίθενται στο μέτωπο με φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού, όπως στα παραδείγματά μας.

Αν στη διάθεσή μας έχουμε γεωμετρικά όργανα, χαρτί και μολύβι, τότε μπορούμε να βρούμε τους εφαπτόμενους κύκλους με κανόνα και διαβήτη. Στη σχήμα 5 μπορείτε να δείτε ότι αρκεί να βρούμε τα σημεία τομής των δύο κύκλων με κέντρα  $C_m$  και  $C_n$  και ακτίνα  $r_m + r$  και  $r_n + r$  αντίστοιχα. Οι μαθηματικοί τύπου που δώσαμε προκύπτουν από ανάλυση διανυσμάτων.



Σχήμα 6: Εύρεση Εφαπτόμενου Κύκλου

#### Απόσταση Κύκλου από Ευθύγραμμο Τμήμα

Αν έχουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ των σημείων  $(u, v)$ , τότε για να βρούμε την απόσταση ενός κύκλου από αυτό εκτελούμε τους παρακάτω υπολογισμούς:

- Υπολογίζουμε το τετράγωνο της απόστασης μεταξύ των δύο σημείων:

$$l_2 = (u_x - v_x)^2 + (u_y - v_y)^2$$

- Αν αυτή η απόσταση είναι ίση με το μηδέν, τότε τα δύο άκρα του ευθύγραμμου τμήματος συμπίπτουν οπότε η απόσταση του κύκλου είναι απλώς:

$$d = \sqrt{(u_x - c_x)^2 + (u_y - c_y)^2}$$

- Διαφορετικά, υπολογίζουμε το:

$$t = \frac{(c_x - u_x)(v_x - u_x) + (c_y - u_y)(v_y - u_y)}{l_2}$$

- Εξασφαλίζουμε ότι το  $t$  είναι μεταξύ 0 και 1:

$$t = \max(0, \min(1, t))$$

- Βρίσκουμε τη προβολή  $p$  του κέντρου του κύκλου πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα:

$$p_x = u_x + t(v_x - u_x)$$

$$p_y = u_y + t(v_y - u_y)$$

- Η απόσταση είναι:

$$d = \sqrt{(p_x - c_x)^2 + (p_y - c_y)^2}$$



## Απαιτήσεις Προγράμματος

Κάθε φοιτητής θα εργαστεί σε αποθετήριο στο GitHub. Για να αξιολογηθεί μια εργασία θα πρέπει να πληροί τις παρακάτω προϋποθέσεις:

- Για την υποβολή της εργασίας θα χρησιμοποιηθεί το ιδιωτικό αποθετήριο του φοιτητή που δημιουργήθηκε για τις ανάγκες του μαθήματος και του έχει αποδοθεί. Το αποθετήριο αυτό έχει όνομα του τύπου `username-algo-assignments`, όπου `username` είναι το όνομα του φοιτητή στο GitHub. Για παράδειγμα, το σχετικό αποθετήριο του διδάσκοντα θα ονομαζόταν `louridas-algo-assignments` και θα ήταν προσβάσιμο στο <https://github.com/dmst-algorithms-course/louridas-algo-assignments>. *Τυχόν άλλα αποθετήρια απλώς θα αγνοηθούν.*
- Μέσα στο αποθετήριο αυτό θα πρέπει να δημιουργηθεί ένας κατάλογος `assignment-2020-3`.
- Μέσα στον παραπάνω κατάλογο το πρόγραμμα θα πρέπει να αποθηκευτεί με το όνομα `social_distancing.py`.
- Δεν επιτρέπεται η χρήση έτοιμων βιβλιοθηκών γράφων ή τυχόν έτοιμων υλοποιήσεων των αλγορίθμων, ή τμημάτων αυτών, εκτός αν αναφέρεται ρητά ότι επιτρέπεται.
- Επιτρέπεται η χρήση δομών δεδομένων της Python όπως στοίβες, λεξικά, σύνολα, κ.λπ.
- Επιτρέπεται η χρήση της βιβλιοθήκης `math` και της βιβλιοθήκης `random`.
- Επιτρέπεται η χρήση της βιβλιοθήκης `argparse` ή της βιβλιοθήκης `sys` (συγκεκριμένα, της λίστας `sys.argv`) προκειμένου να διαβάσει το πρόγραμμα τις παραμέτρους εισόδου.
- Το πρόγραμμα θα πρέπει να είναι γραμμένο σε Python 3.

Το πρόγραμμα θα καλείται ως εξής (όπου `python` η κατάλληλη εντολή στο εκάστοτε σύστημα):

```
social_distancing.py [-items ITEMS]
                    [-r RADIUS]
                    [--min_radius MIN_RADIUS]
                    [--max_radius MAX_RADIUS]
                    [-b BOUNDARY]
                    [-s SEED]
                    output_file
```

Οι παράμετροι εμφανίζονται σε διαφορετικές γραμμές προς χάρη της τυπογραφίας. Η σημασία των παραμέτρων είναι η εξής:

- `-items ITEMS`, `--items ITEMS`: ο αριθμός των αντικειμένων (κύκλων) που θέλουμε να εισάγουμε. Αν δίνεται, το πρόγραμμα θα προσπαθεί να παράξει αυτόν τον αριθμό των κύκλων.

- `-r RADIUS, --radius RADIUS`: η ακτίνα των κύκλων. Αν δίνεται, όλοι οι κύκλοι θα έχουν αυτήν την ακτίνα.
- `--min_radius`: η ελάχιστη ακτίνα των κύκλων, αν δίνεται οι κύκλοι θα έχουν τυχαίες ακτίνες, με τουλάχιστον αυτό το μήκος. Η παράμετρος αυτή συνδυάζεται με την παράμετρο `--max_radius`.
- `--max_radius::` η μέγιστη ακτίνα των κύκλων, αν δίνεται οι κύκλοι θα έχουν τυχαίες ακτίνες όχι μεγαλύτερες από αυτό το μήκος. Η παράμετρος αυτή συνδυάζεται με την παράμετρο `--min_radius`.
- `-b BOUNDARY, --b BOUNDARY`: τα όρια του σχήματος. Αν δίνεται, το πρόγραμμα θα εισάγει κύκλους μέσα στα όρια του σχήματος που δίνεται.
- `-s SEED, --s SEED`: αν δίνεται, η τιμή αρχικοποίησης (σπόρος) της γεννήτριας ψευδοτυχαίων αριθμών. Στην αρχή του προγράμματός σας, θα πρέπει να εκτελείται η εντολή `random.seed(SEED)`
- `output_file`: το αρχείο όπου αποθηκεύονται τα αποτελέσματα του προγράμματος, υποχρεωτική παράμετρος.

Όταν το πρόγραμμα τελειώνει, στην έξοδό θα τυπώνει μόνο έναν ακέραιο αριθμό, τον αριθμό των κύκλων που εισήγαγε. Στο αρχείο `output_file` θα αποθηκεύει τους κύκλους αυτούς, έναν σε κάθε γραμμή, με τη μορφή:

`x y r`

δηλαδή κάθε γραμμή θα αποτελείται από τρεις πραγματικούς αριθμούς, τη συντεταγμένη  $x$  του κέντρου του κύκλου, τη συντεταγμένη  $y$  του κέντρου του κύκλου, και την ακτίνα του  $r$ . Οι αριθμοί θα δίνονται με ακρίβεια εκατοστού.

Αν δίνονται τα όρια του σχήματος με την παράμετρο `-b BOUNDARY`, τα όρια αυτά θα τα παραθέτετε στο τέλος του αρχείου, μετά από όλους τους κύκλους, με γραμμές της μορφής:

`x1 y1 x2 y2`

δηλαδή τα δύο ζευγάρια συντεταγμένων που αντιστοιχούν σε κάθε ευθύγραμμο τμήμα.

Για την οπτικοποίηση των αποτελεσμάτων, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τα παρακάτω προγράμματα:

- [svg\\_draw.py](#) το οποίο καλείτε ως:  

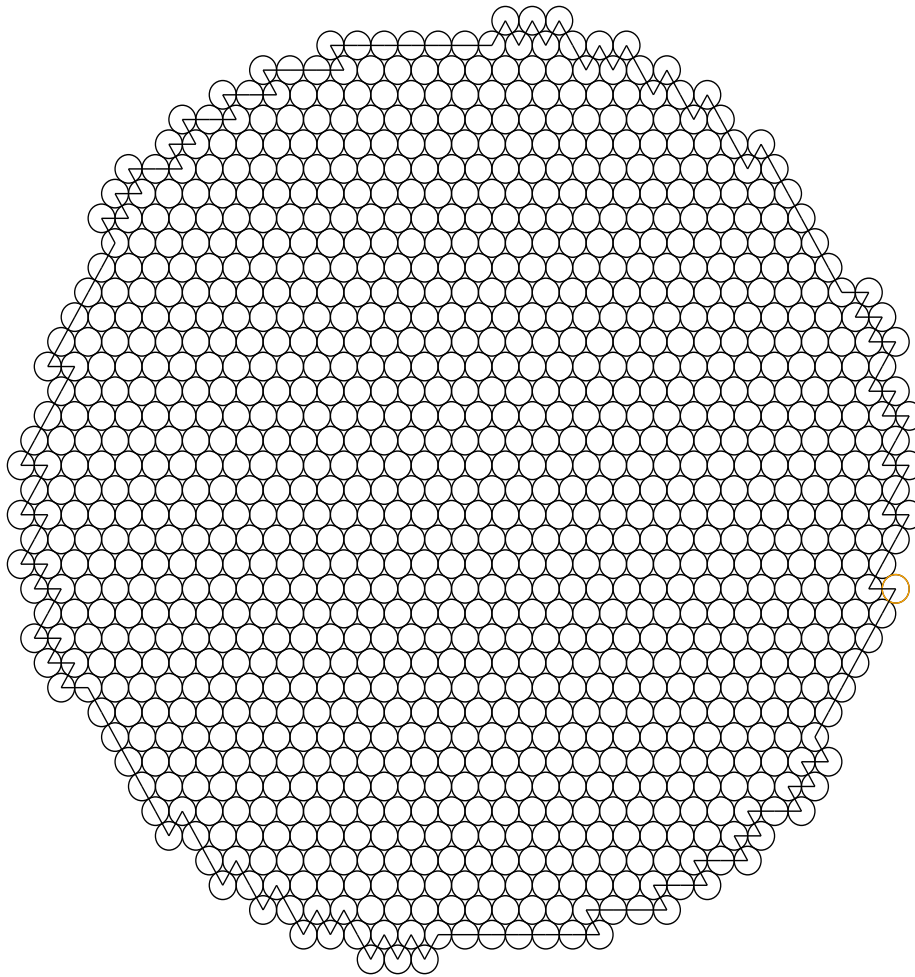
```
python svg_draw.py input_file output_file
```

 όπου `input_file` είναι το αρχείο των αποτελεσμάτων σας και `output_file` είναι ένα αρχείο τύπου SVG. Για να λειτουργήσει, θα πρέπει να εγκαταστήσετε τη βιβλιοθήκη [svgwrite](#).
- [mpl\\_draw.py](#) το οποίο καλείτε ως:  

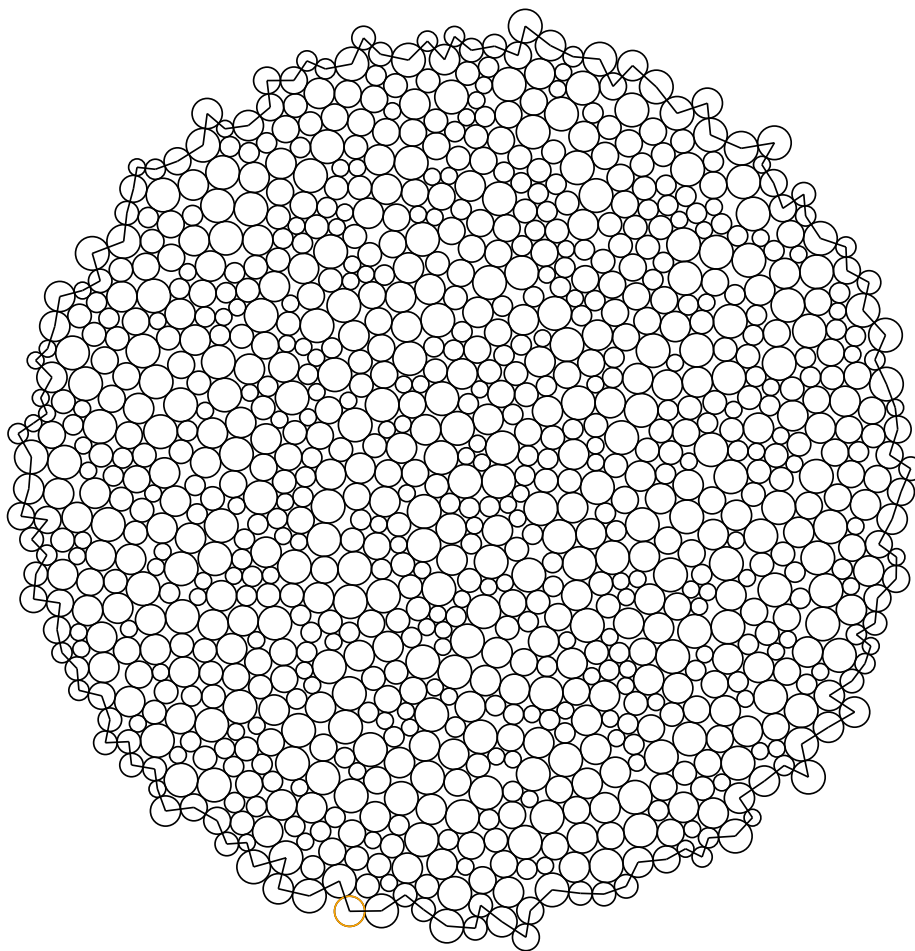
```
python mpl_draw.py input_file output_file
```

όπου `input_file` είναι το αρχείο των αποτελεσμάτων σας και `output_file` είναι ένα αρχείο, ο τύπος του οποίου εξαρτάται από την κατάληξή του. Για παράδειγμα, αν δώσετε ως `output_file` το `myfile.png` θα πάρετε αρχείο PNG, αν δώσετε ως `output_file` το `myfile.svg` θα πάρετε αρχείο SVG, αν δώσετε ως `output_file` το `myfile.pdf` θα πάρετε αρχείο PDF, κ.λπ. Για να λειτουργήσει, πρέπει να εγκαταστήσετε τη βιβλιοθήκη [matplotlib](#).

### Παραδείγματα



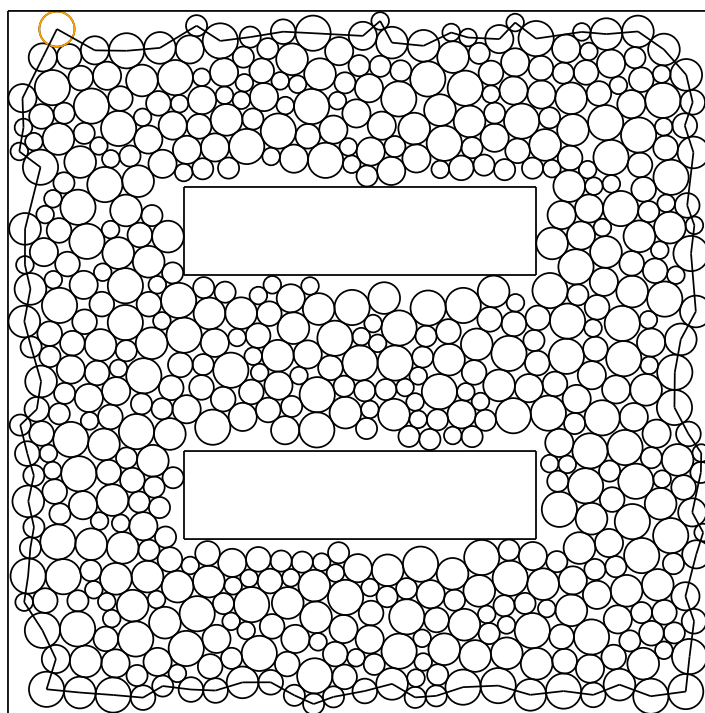
Σχήμα 7: Παράδειγμα με 1000 Ίσους Κύκλους



Σχήμα 8: Παράδειγμα με 1000 Τυχαίους Κύκλους



Σχήμα 9: Παράδειγμα με Ίσους Κύκλους σε Σχήμα



Σχήμα 10: Παράδειγμα με Τυχαίους Κύκλους σε Σχήμα