

RESOLUTION NUMERIQUE DES EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET EQUATIONS INTEGRALES

4.1 GENERALITES

4.1.1 Définition et classification

Une équation différentielle est une relation qui lie une fonction y à ses dérivées. S'il y a une seule variable indépendante, on parle alors d'équation différentielle ordinaire. Dans le cas de plusieurs variables indépendantes, on parle d'équations aux dérivées partielles. Les équations différentielles ordinaires de variables indépendante x peuvent se mettre sous la forme

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0 \quad (4.1)$$

où $y^{(i)}$ est la dérivée d'ordre i de y et n est l'ordre de l'équation différentielle et $a \leq x \leq b$.

Le degré d'une équation différentielle, si celle-ci peut être décrite comme un polynôme, où les indéterminées sont des dérivées, est le degré de la dérivée de l'ordre le plus élevé. Par exemple, l'équation $(y'')^3 + (y')^5 + 7y = e^x$ est une équation différentielle de second ordre et de degré 3. Si la fonction F est un polynôme dans laquelle les degrés de y et de ses dérivées sont égaux 0 ou à 1 et si F ne contient pas des produits de y et de ses dérivées, ou des dérivées entre elles, alors l'équation différentielle est dite linéaire. Dans tous les autres cas, l'équation est dite non linéaire.

La résolution d'une équation différentielle d'ordre n nécessite la connaissance préalable de n constantes, notamment n conditions imposées à y et ses dérivées. Si l'on fixe la valeur de y et de ses $(n-1)$ dérivées au point initial $x = a$, on a un *problème aux valeurs initiales*. Si par contre les n conditions sont imposées les unes en $x = a$ et les autres en $x = b$, on a un *problème aux valeurs aux limites*. Origine des

4.1.2 Equations différentielles

Les équations différentielles sont d'une importance fondamentale dans toutes les disciplines scientifiques. Ceci est dû au fait que plusieurs lois et phénomènes ont une formulation mathématique sous forme d'équations différentielles. Par exemple la seconde loi de Newton est une équation différentielle du second ordre; la loi de la radioactivité est une équation différentielle du premier ordre.

4.1.3 Position du problème Numérique

Considérons l'équation différentielle ordinaire du premier ordre

$$y' = f(x, y) \quad (4.2)$$

Le problème est de trouver la valeur \bar{y} de y correspondant à $x = x_0 + h$ (où en $x_k = x_0 - kh$, $k = 1, 2, 3\dots$ et h un réel) connaissant $y = y_0$ pour $x = x_0$. Dans certains cas, un tel problème peut se résoudre en trouvant les solutions générales et particulières par les méthodes analytiques classiques (intégration directe, facteur intégrant, transformée de Laplace, etc.).

Lorsque aucune méthode analytique ne permet de calculer la solution générale, il faut trouver les méthodes numériques pour approcher la valeur cherchée. En intégrant Eq.(4.2), on obtient

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx \quad (4.3)$$

On a alors

$$\bar{y} = y_0 + \int_{x_0}^{x_0+h} f(x, y) dx \quad (4.4)$$

On peut donc utiliser des méthodes numériques de calcul d'intégrales pour évaluer l'intégrale ou faire un développement de $y(x + h)$ en série de puissances de h .

4.2 MÉTHODES POUR LES PROBLÈMES A VALEURS INITIALES

4.2.1 Méthode de Picard

L'équation (4.3) ou (4.4) est compliquée par la présence de y dans l'intégrale. C'est une équation intégrale. Pour résoudre une telle équation, Picard a utilisé une méthode d'approximations successives. Il obtient une première approximation y_1 en remplaçant y par y_0 dans l'intégrale et obtient

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x_0+h} f(x, y_0) dx \quad (4.5)$$

et l'intégrale peut être calculée par les méthodes numériques connus telles que la formule des trapèzes ou celle de Simpson. Connaissant y_1 , on obtient y_2 en utilisant le même principe

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x_0+h} f(x, y_1) dx \quad (4.6)$$

Ce processus peut ainsi être répété plusieurs fois. L'approximation d'ordre n étant donnée par

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x_0+h} f(x, y_{n-1}) dx \quad (4.7)$$

La méthode est acceptable lorsque les y_n convergent vers une valeur fixe \bar{y} (valeur approchée). Cette méthode nécessite à chaque étape un calcul d'intégrale, ce qui n'est pas toujours facile. De plus, dans la pratique, elle exige un temps de calcul long, surtout si l'on veut trouver \bar{y} en plusieurs points.

4.2.2 Séries de Taylor

Le développement de Taylor de $y = g(x)$ au voisinage de (x_0, y_0) est

$$y = g(x_0) + (x - x_0)g'(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2g''(x_0) + \frac{1}{6}(x - x_0)^3g'''(x_0) + \dots$$

Or si

$$y = g(x) \Rightarrow y' = g'(x) = f(x, y)$$

il vient alors

$$\begin{aligned} y'' &= g''(x) = f'(x, y) = \frac{df}{dx} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} \right) = \frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial f}{\partial y} \\ &\Rightarrow \frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + f \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} y''' &= g'''(x) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial f}{\partial y} \right) + f \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} + 2f \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + f \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + f^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{aligned}$$

Posons

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \text{et} \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Soit $f_0, p_0, q_0, r_0, s_0, t_0$ en (x_0, y_0) . Il vient alors d'après le développement en série de Taylor avec $x = x_0 + h$,

$$\bar{y} = y_0 + hf_0 + \frac{1}{2}h^2(p_0 + f_0q_0) + \frac{1}{6}h^3(r_0 + p_0q_0 + 2f_0s_0 + f_0q_0^2 + f_0^2t_0) + \dots$$

Et la formule itérative s'écrit

$$\bar{y}_{k+1} = y_k + hf_k + \frac{1}{2}h^2(p_k + f_kq_k) + \frac{1}{6}h^3(r_k + p_kq_k + 2f_ks_k + f_kq_k^2 + f_k^2t_k).$$

4.2.3 Méthode d'Euler

Encore appelée méthode de la dérivée première, elle s'exprime par la formule

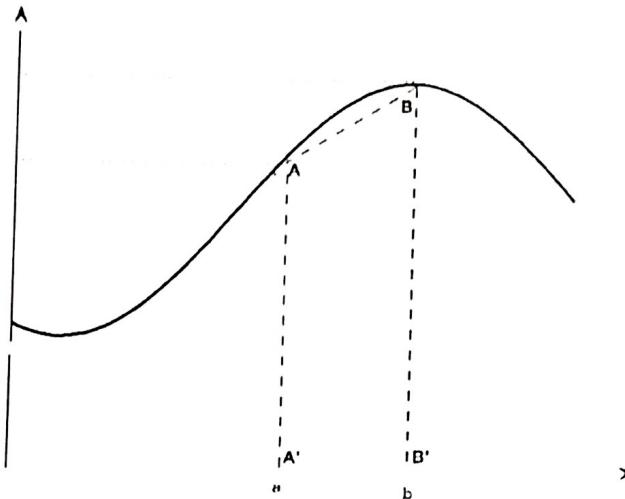
$$y(x+h) = y(x) + hf(x, y).$$

Ici, le développement de Taylor se limite à l'ordre 2 et la formule itérative est donc :

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k).$$

C'est la méthode la plus simple mais son inconvénient réside dans le fait qu'elle est souvent très instable et exige des pas de calcul h très petits.

EXERCICE 1 : On considère l'équation $y' = y^2 + x$. Trouver (manuellement) la solution approchée en $x_0 = 0.5$ sachant que en $x = 0, y = 1$. On donne $h = 0.1$. Comparer à la valeur exacte.



EXERCICE 2 : Ecrire un algorithme pour la méthode d'Euler.

4.2.4 Les méthodes de Runge et Kutta

Ce sont les méthodes élaborées par C. Runge en 1894 et améliorées par W. Kutta vers 1901. Elles utilisent les méthodes d'intégrations numériques des trapèzes et de Simpson. Ces méthodes sont les plus utilisées car elles sont très stables.

a) Rappel sur les formules des trapèzes et de Simpson

Considérons l'intégrale $\int_a^b g(x)dx$. Pour calculer cette intégrale sur l'intervalle $[a, b]$ supposé court, on peut remplacer la fonction $g(x)$ par une interpolation linéaire passant par les points d'abscisses a et b . On peut également utiliser une interpolation quadratique de $g(x)$ passant par a , $c = (a+b)/2$ et b .

- La formule des trapèzes s'appuie sur une interpolation linéaire de $g(x)$ aux points $(a, g(a))$ et $(b, g(b))$. Pour cela $g(x)$ est approximée par une droite affine de la forme $g(x) = \alpha x + \beta$. La formule d'interpolation de Lagrange donne $g(x) = g(a)\frac{x-a}{b-a} + g(b)\frac{x-b}{a-b}$. Il vient alors

$$\int_a^b g(x)dx \simeq \frac{b-a}{2}[g(a) + g(b)].$$

Il s'agit ainsi de la surface du trapèze $AA'B'B$.

- Dans le cas où on la fonction $g(x)$ est approximée par un polynôme du second degré, on parle d'interpolation quadratique. Posons alors $g(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ et puisque $g(x)$ passe par les points $(a, g(a))$, $(c = \frac{b+a}{2}, g(c))$ et $(b, g(b))$, la formule d'interpolation de Lagrange donne

$$g(x) = g(a)\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + g(b)\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + g(c)\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

On en déduit la formule d'intégration de Simpson sous la forme

$$\int_a^b g(x)dx \simeq \frac{b-a}{6}[g(a) + 4g(c) + g(b)].$$

b) Méthode de Runge-Kutta du second ordre

Elle est basée sur la formule intégrale des trapèzes, puisque

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x, y) dx \simeq \frac{h}{2} [f(x_0, y_0) + f(x_0 + h, y_0 + hf(x_0, y_0))],$$

il vient $\bar{y} = y_0 - \frac{h}{2} \{f(x_0, y_0) + f[x_0 + h, y_0 + hf(x_0, y_0)]\}$.

Et la formule itérative s'écrit

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} \{f(x_k, y_k) - f[x_k + h, y_k + hf(x_k, y_k)]\}$$

Elle représente une erreur d'ordre $o(h^3)$.

c) Méthode de Runge du quatrième ordre

Supposons les valeurs y_0, y_1, y_2 de y connues aux points $x_0, x_1 = x_0 + \frac{h}{2}, x_2 = x_0 + h$.

On a

$$L = \bar{y} - y_0 = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x, y) dx$$

En utilisant la formule d'intégration numérique de Simpson, on obtient

$$L = \frac{h}{6} \left[f(x_0, y_0) + 4f(x_0 + \frac{h}{2}, y_1) + f(x_0 + h, y_2) \right].$$

Les valeurs y_1 et y_2 étant inconnues, on utilise les approximations

$$y_1 \approx y_0 + \frac{h}{2} f(x_0, y_0) = y_0 + \frac{h}{2} f_0 \quad \text{et} \quad y_2 \approx y_0 + hf(x_0 + h, y_0 + hf_0)$$

Ces approximations sont faites de telle manière qu'en développant L en séries de puissance de h , ces 3 premiers termes coïncident avec le développement en série de Taylor. Il vient alors

$$L \approx \frac{h}{6} \{f(x_0, y_0) + 4f[x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} f(x_0, y_0)] + f[x_0 + h, y_0 + hf(x_0 + h, y_0 + hf(x_0, y_0))]\}$$

Soit plus généralement $y_{k+1} = y_k + L$ avec

$$L = \frac{h}{6} \{f(x_k, y_k) + 4f[x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k)] + f[x_k + h, y_k + hf(x_k + h, y_k + hf(x_k, y_k))]\}$$

Elle présente une erreur d'ordre $o(h^5)$. Pratiquement on fait le calcul de la manière suivante : On calcule les quantités L_i définies par

$$\begin{aligned} L_1 &= hf(x_k, y_k) \\ L_2 &= hf(x_k + h, y_k + L_1) \\ L_3 &= hf(x_k + h, y_k + L_2) \\ L_4 &= hf(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{L_1}{2}) \end{aligned}$$

et par la suite on a :

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6} (L_1 + 4L_4 + L_3)$$

EXERCICE 3 : Etablir l'algorithme de cette méthode et la traduire en Pascal et en Fortran.

d) Méthode de Runge-Kutta ou de Kutta-Simpson du quatrième ordre

C'est une amélioration de la méthode de Runge. Elle présente également une erreur de l'ordre $o(h^5)$ et son schéma itératif s'écrit :

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6} (L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4)$$

avec

$$\begin{aligned} L_1 &= hf(x_k, y_k) \\ L_2 &= hf\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{L_1}{2}\right) \\ L_3 &= hf\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{L_2}{2}\right) \\ L_4 &= hf(x_k + h, y_k + L_3) \end{aligned}$$

C'est la méthode la plus utilisée. Il existe d'autres variantes (de la méthode) plus élaborées telles la méthode de Kutta-Merdes ou de Kutta-Simpson du sixième ordre.

4.2.5 Méthodes à pas multiples ou d'Adams-Basforth

a) Formule du second ordre

Soit l'équation différentielle $y' = f(x, y)$, on veut connaître $y(x+h)$ connaissant $y(x)$ et $y(x-h)$. Pour cela, on fait le développement suivant :

$$y(x+h) = y(x) + hy' - \frac{h^2}{2}y'' + o(h^3) \Rightarrow y_{k+1} = y_k + hy'_k + \frac{h^2}{2}y''_k$$

Or

$$y'_k = f(x_k, y_k) \quad \text{et} \quad y'_{k-1} = y'_k - hy''_k.$$

Il vient alors

$$y''_k = \frac{y'_k - y'_{k-1}}{h}.$$

Finalement, on obtient

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} [3y'_k - y'_{k-1}] \Rightarrow y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} [3f(x_k, y_k) - f(x_{k-1}, y_{k-1})].$$

C'est la formule d'Adams-Basforth du second ordre présentant une erreur d'ordre $o(h^3)$. Pratiquement au début des itérations, il faut connaître les valeurs de y en x_0 et en x_1 afin de calculer la première valeur y_2 de l'itération. Pour avoir y_1 , on peut utiliser l'une des formules approchées classiques. Par exemple en utilisant la formule d'intégration des trapèzes, on obtient :

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2} [f(x_0, y_0) + f(x_0 + h, y_0 + hf(x_0, y_0))].$$

La formule itérative peut alors débuter par $k = 1$, et on calcule les y_2, y_3, y_4, \dots Par exemple,

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{2} [3f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0)].$$

EXERCICE 4 : Ecrire l'algorithme de cette méthode et la traduire en FORTRAN et en PASCAL.

b) Formule d'ordre supérieur

Pour obtenir des formules d'ordre supérieur présentant par exemple des erreurs d'ordre $o(h^4)$ ou $o(h^5)$, il suffit de développer à l'ordre supérieur $y(x+h)$. Par exemple à l'ordre 3, on a

$$y_{k+1} = y_k + hy'_k + \frac{h^2}{2}y''_k + \frac{h^3}{6}y'''_k + o(h^4) \quad (*)$$

De même à l'ordre 4, on a

$$y_{k+1} = y_k + hy'_k + \frac{h^2}{2}y''_k + \frac{h^3}{6}y'''_k + \frac{h^4}{24}y^{(4)}_k + o(h^5) \quad (**)$$

A partir de la formule (*) on obtient le schéma itératif suivant :

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{12} [23y'_k - 16y'_{k-1} + 5y'_{k-2}]$$

soit

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{12} [23f(x_k, y_k) - 16f(x_{k-1}, y_{k-1}) + 5f(x_{k-2}, y_{k-2})].$$

Ainsi pour calculer y_{k+1} , il nous faut connaître les valeurs de y_k , y_{k-1} et y_{k-2} . Donc, au début des itérations, il faut avoir y_0 , y_1 et y_2 . Les valeurs de y_1 et y_2 doivent être calculées par les méthodes classiques.

A partir de la formule (**), on établit :

$$y_{k+1} = y_k - \frac{h}{24} \{55f(x_k, y_k) - 59f(x_{k-1}, y_{k-1}) + 37f(x_{k-2}, y_{k-2}) - 9f(x_{k-3}, y_{k-3})\}$$

Ici il nous faut connaître y_0 , y_1 , y_2 et y_3 afin de lancer le processus itératif. On utilise les formules classiques pour déterminer les valeurs de y_0 , y_1 , et y_2 .

4.2.6 Méthode de Prédicteur-Correcteur

Les méthodes de Runge, Runge-Kutta et de Kutta-Simpson sont fondamentalement implicites car l'inconnue y_{k+1} est exprimée à l'aide d'une fonction contenant y_{k+1} . Par exemple, dans la formule de Runge-Kutta 2 (RK2), on a normalement

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} [f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})]$$

Afin d'avoir une expression explicite, on part des approximations pour exprimer y_{k+1} du second membre de l'égalité en fonction de y_k . On pourrait aussi partir des formules d'Adams-Basforth pour évaluer (prédir) les valeurs de y_{k+1} , puis insérer ces valeurs prédictes dans le second membre de la formule implicite afin d'avoir une valeur corrigée. Dans un tel processus, la formule explicite est appelée prédicteur tandis que la formule implicite utilisée est appelée correcteur. Par exemple une méthode de prédicteur-correcteur peut utiliser les formules suivantes :

$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} [3f(x_k, y_k) - f(x_{k-1}, y_{k-1})] =$ Prédicteur (Formule d'Adams-Basforth du second ordre).

$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} [f(x_k, y_k) + f(x_{k-1}, y_{k-1})] =$ Correcteur (RK2)

EXERCICE 5 : Etablir l'algorithme de la méthode de prédicteur-correcteur, utilisant comme prédicteur la formule d'Adams-Bashforth du second ordre et comme correcteur la formule de RK2 et traduire cet algorithme en Pascal et en Fortran.

Remarque : On peut également combiner les autres formules implicites de Runge-Kutta à d'autres formules explicites d'Adams-Bashforth pour avoir des méthodes de prédicteur-correcteur plus élaborées.

4.3 MÉTHODE POUR LES PROBLÈMES AUX VALEURS AUX LIMITES

Il s'agit des problèmes de la forme

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad \text{avec } a < x < b$$

avec $y(a) = y_1$ et $y(b) = y_2$ en plus d'autres conditions sur les dérivées de y . On peut résoudre ce type de problème par plusieurs méthodes dont la méthode de tir, la méthode des fonctions complémentaires ou de superposition et la méthode des différences finies.

4.3.1 Méthode de tir

Elle est utilisée dans le cas des problèmes aux limites non linéaires. Il s'agit de transformer un problème aux valeurs aux limites en un problème aux valeurs initiales par un choix adéquat des valeurs initiales. Ce choix se fait à l'une des bornes du domaine d'intégration et doit être tel que la solution passe le plus près possible à l'autre borne du domaine d'intégration.

Par exemple, considérons une équation du second ordre

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(a) = \eta_1, \quad y(b) = \eta_2 \end{cases}$$

La méthode de tir consiste à choisir γ telle que $y'(a) = \gamma$ et de résoudre le problème aux valeurs initiales

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(a) = \eta_1, \quad y'(a) = \gamma \end{cases}$$

Le choix de γ est bon lorsque en $x = b$, on a $y(b) \approx \eta_2$, sinon il faut choisir une autre valeur pour γ .

Une procédure à utiliser pour le choix de γ est la suivante : on sait que la valeur $y(b)$ dépend de γ , c'est à dire $y(b) = y(b, \gamma)$. Pour un bon choix de γ , on doit avoir $y(b, \gamma) - \eta_2 \approx 0 \Leftrightarrow f(\gamma) = 0$ où $f(\gamma) = y(b, \gamma) - \eta_2$. Or d'après la méthode de Newton, le schéma itératif donnant la solution de cette équation est

$$\gamma_{n+1} = \gamma_n - \frac{f(\gamma_n)}{f'(\gamma_n)} = \gamma_n - \frac{y(b, \gamma_n) - \eta_2}{y'(b, \gamma_n)} = \gamma_n - \frac{(\gamma_n - \gamma_{n-1})(y(b, \gamma_n) - \eta_2)}{y(b, \gamma_n) - y(b, \gamma_{n-1})}.$$

Ainsi en pratique, on commence par donner une valeur initiale γ_0 à γ , ensuite, on choisit la valeur suivante γ_1 , les autres valeurs de γ i.e. $(\gamma_2, \gamma_3, \dots)$ sont ensuite évaluées à partir de la formule ci-dessus.

EXERCICE 6 : Etablir l'algorithme de la méthode de tir.

4.3.2 Méthode des fonctions complémentaires ou de superposition

C'est une méthode qui transforme une équation différentielle linéaire aux valeurs aux limites en deux problèmes différentiels aux valeurs initiales. Elle a plusieurs variantes que nous exposerons sur deux équations différentielles de second ordre.

a) Première variante

Considérons l'équation

$$\begin{cases} y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x) \\ y(a) = \eta_1, \quad y(b) = \eta_2 \end{cases}$$

Supposons que :

$$y(x) = y_1(x) + \mu y_2(x), \quad (\mu = cte \neq 0)$$

Il vient

$$\begin{cases} y_1'' = p(x)y_1' - q(x)y_1 + r(x) \\ y_2'' = p(x)y_2' - q(x)y_2 \end{cases}$$

En $x = a$ on a

$$y_1(a) + \mu y_2(a) = \eta_1.$$

Imposons que

$$y_1(a) = \eta_1 \Rightarrow y_2(a) = 0$$

En $x = b$, on a

$$y_1(b) + \mu y_2(b) = \eta_2 \Rightarrow \mu = \frac{\eta_2 - y_1(b)}{y_2(b)}$$

Fixons $y_1'(a) = 0$ et $y_2'(a) = 1$, on obtient les deux problèmes aux valeurs initiales suivantes :

$$\begin{cases} \begin{cases} y_1'' = p(x)y_1' + q(x)y_1 + r(x) \\ y_1(a) = \eta_1 \quad y_1'(a) = 0 \end{cases} & x \in]a, b] \\ \begin{cases} y_2'' = p(x)y_2' + q(x)y_2 \\ y_2(a) = 0 \quad y_2'(a) = 1 \end{cases} & \end{cases}$$

On résout alors numériquement ces deux problèmes aux valeurs initiales pour $x \in]a, b]$ et on obtient alors les valeurs de $y_1(b)$ et $y_2(b)$, d'où la valeur de μ . Puisque les valeurs de y_1 et y_2 sont connues en tout point de $]a, b]$, on déduit celles de y en tout point $x \in]a, b]$ par la relation $y(x) = y_1(x) + \mu y_2(x)$.

b) Deuxième variante

Considérons le problème suivant

$$y'' = p(x)y + q(x) \tag{a}$$

$$y'(a) = \alpha_{00}y(a) - \alpha_{10} \tag{b}$$

$$y'(b) = \beta_{00}y(b) + \beta_{10} \tag{c}$$

Considérons également l'équation

$$y' = \alpha_0(x)y - \alpha_1(x) \tag{d}$$

Où nous avons choisi $\alpha_0(x)$ et $\alpha_1(x)$ tel que y satisfait toujours l'équation (a). En différenciant l'équation (d) par rapport à x et en identifiant à l'équation (a), on obtient

$$\begin{cases} \alpha'_0 + \alpha_0^2 = p(x) \\ \alpha'_1 + \alpha_0\alpha_1 = q(x) \end{cases} \quad \begin{array}{l} (e) \\ (f) \end{array}$$

avec $\alpha_0(a) = \alpha_{00}$ et $\alpha_1(a) = \alpha_{10}$.

Les équations (e) et (f) sont des équations différentielles du premier ordre que l'on peut résoudre analytiquement ou numériquement pour trouver $\alpha_0(x)$ et $\alpha_1(x)$.

Dès l'équation (d) on a

$$y'(b) = \alpha_0(b)y(b) \quad \alpha_1(b) = \beta_{00}y(b) + \beta_{10}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y(b) = \frac{\alpha_1(b)}{\alpha_0(b) - \beta_{00}} \\ y'(b) = \frac{\beta_{00}\alpha_1(b) - \beta_{10}\alpha_0(b)}{\beta_{00}\alpha_0(b)} \end{cases} \quad \begin{array}{l} (g) \\ (h) \end{array}$$

L'équation (a) est ainsi transformée en trois problèmes aux valeurs initiales. On peut en effet résoudre le problème $y'' = p(x)y + q(x)$ avec les conditions initiales (g) et (h) ou résoudre le problème $y' = \alpha_0(x)y + \alpha_1(x)$ avec la condition initiale (g) obtenue après résolution de (e) et (f).

4.3.3 Méthode des différences finies

Elle convertit le problème de résolution d'une équation différentielle à la résolution des équations algébriques. Soit le problème :

$$\begin{cases} y'' = p(x)y' + q(x)y - r(x) \\ y(a) = \eta_1, \quad y(b) = \eta_2 \end{cases}$$

on a : $y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$ et $y''(x) = \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2}$.

Soit $x = x_k$, on pose

$$y(x_k) = y_k, \quad p(x_k) = p_k, \quad q(x_k) = q_k, \quad r(x_k) = r_k.$$

Par substitution des expressions des dérivées dans l'équation différentielle, on aboutit à l'équation discrète

$$(1 - hp_k)y_{k-1} - (2 - hp_k - h^2q_k)y_k + y_{k-1} - h^2r_k; \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

pour $k = 1, 2, \dots, N-1$ où $h = \frac{b-a}{N}$. On aboutit ainsi à un système d'équations algébriques linéaires de la forme

$$\begin{cases} y_0 = \eta_1 \\ (1 - hp_1)y_2 - (2 - hp_1 - h^2q_1)y_1 + y_0 = h^2r_1 \\ (1 - hp_2)y_3 - (2 - hp_2 - h^2q_2)y_2 + y_1 = h^2r_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ (1 - hp_{N-1})y_N - (2 - hp_{N-1} - h^2q_{N-1})y_{N-2} + y_{N-2} = h^2r_{N-1} \\ y_N = \eta_2 \end{cases}$$

Ce système algébrique peut être résolu par les méthodes itératives de Jacobi ou de Gauss-Seidel.

4.4 LES EQUATIONS INTEGRALES

4.4.1 Définition

On appelle équation intégrale une équation dont la fonction inconnue se trouve dans le symbole d'intégration, par exemple :

$$y(x) = e^x \sin x + 2 \int_0^x \cos(x-t)y(t) dt$$

Une équation intégrale est dite linéaire lorsque la fonction inconnue y intervient avec un degré 1. On a aussi les équations intégro-différentielles, par exemple

$$y'(x) = 3y(x) + 2x + \int_0^x \sin(x-t)y(t) dt$$

Sous la forme générale, les équations intégrales linéaires se présentent de la manière suivante

$$y(x) = f(x) + \int_0^x k(x, t)y(t) dt$$

La fonction $k(x, t)$ est appelée noyau de l'équation. Dans les cas simples, les équations intégrales peuvent se résoudre analytiquement en utilisant par exemple la méthode de la fonction de Gauss, des transformées de Laplace ou de Mellin, ou par les approximations successives. Dans le cas contraire, il faut utiliser les méthodes numériques.

4.4.2 Résolution numérique des équations intégrales linéaires

Soit l'équation intégrale linéaire

$$y(x) = f(x) + \int_a^b k(x, t)y(t) dt \quad (i)$$

L'intégrale définie dans (i) peut être remplacée par les formules de quadrature classique (trapèze, Simpson). On obtient alors

$$y(x) = f(x) + (b-a) [c_1 k(x, t_1) y(t_1) + c_2 k(x, t_2) y(t_2) + \dots + c_n k(x, t_n) y(t_n)] \quad (ii)$$

où t_1, t_2, \dots, t_n sont les nœuds de subdivision de l'intervalle $[a, b]$ et les valeurs des coefficients c_i dépendent de la formule d'intégration utilisée. Puisque l'équation (ii) est vérifiée pour tout $x \in [a, b]$, elle est également vérifiée pour $x = t_1, x = t_2, \dots, x = t_n$. Par conséquent, à partir de l'équation (ii), on obtient un système d'équations de la forme

$$y(t_i) = f(t_i) + (b-a) [c_1 k(t_i, t_1) y(t_1) + c_2 k(t_i, t_2) y(t_2) + \dots + c_n k(t_i, t_n) y(t_n)] \quad (iii)$$

Pour i allant de 1 à n . Posons $y(t_i) = y_i$ et $f(t_i) = f_i$. Le système (iii) devient alors

$$\begin{cases} y_1 = f_1 + (b-a) [c_1 k(t_1, t_1) y_1 + c_2 k(t_1, t_2) y_2 + \dots + c_n k(t_1, t_n) y_n] \\ y_2 = f_2 + (b-a) [c_1 k(t_2, t_1) y_1 + c_2 k(t_2, t_2) y_2 + \dots + c_n k(t_2, t_n) y_n] \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ y_n = f_n + (b-a) [c_1 k(t_n, t_1) y_1 + c_2 k(t_n, t_2) y_2 + \dots + c_n k(t_n, t_n) y_n] \end{cases}$$

C'est un système de n équations à n inconnues que sont les y_i . La résolution de ce système permet de déterminer les y_i et en les substituant dans l'équation (ii), on obtient l'expression de $y(x)$, solution de l'équation (i).

Exemple : Soit l'équation

$$y(x) = \frac{5x}{9} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \int_0^1 (t+x) y(t) dt$$

Pour résoudre numériquement cette équation, utilisons la méthode de Simpson et considérons pour cela trois points : $t_1 = 0$, $t_2 = 0.5$, et $t_3 = 1$.

Le système algébrique à résoudre est alors défini par :

$$y(x) = \frac{5x}{6} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} [(t_1 + x)y(t_1) + 4(t_2 + x)y(t_2) + (t_3 + x)y(t_3)] \quad (*)$$

Soit en remplaçant x par t_i ,

$$\begin{cases} y_1 = -\frac{1}{9} + \frac{1}{18}(2y_2 + y_3) & (t = 0.0) \\ y_2 = \frac{5}{12} + \frac{1}{18}\left(\frac{y_1}{2} + 4y_2 + \frac{3}{2}y_3\right) & (t = 0.5) \\ y_3 = \frac{5}{6} + \frac{1}{18}(y_1 + 6y_2 + 2y_3) & (t = 1.0) \end{cases}$$

On trouve $y_1 = 0$, $y_2 = \frac{1}{2}$ et $y_3 = 1$. Il vient alors $y(x) = x$ (en remplaçant les y_i par leurs valeurs dans l'expression (*)).

EXERCICE 7 : Soit l'équation intégrale $y(x) = \frac{5x}{9} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \int_0^1 (t+x) y(t) dt$. Résoudre cette équation en utilisant la formule des trapèzes sur les trois points $t_1 = 0$, $t_2 = 0.5$ et $t_3 = 1$

EXERCICE 8 : Discréteriser l'équation intégrale différentielle suivante :

$$y' = 2y + f(x) + \int_0^x (k(x,t)) y(t) dt.$$