Foglio 5

Esercizio 1. Sia $k \in \mathbb{R}$. Si consideri l'applicazione lineare $F_k : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ tale che

- $F_k(\mathbf{e}_1) = (k-2)\mathbf{e}_1 + (k-1)(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$,
- $F_k(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$,
- $F_k(\mathbf{e}_3) = (k-2)\mathbf{e}_1 + 2(k-1)(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) + \mathbf{e}_3$,
- $F_k(\mathbf{e}_4) = k\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$,
- $F_k(\mathbf{e}_5) = -\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.

Stabilire per quali valori di k, se esistono, l'applicazione F_k è iniettiva e/o suriettiva.

Esercizio 2. Stabilire se è possibile costruire una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tale che:

a) f è iniettiva;

b) $\mathrm{Im}\ f = \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \rangle$.

Esercizio 3. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da:

$$f(x, y, z) = (x + 4y + 6z, 3x - 3y - 2z, 3y + 4z).$$

a) Determinare una base di $\mathrm{Ker}\ f$ e una di $\mathrm{Im}\ f$;

b) Stabilire se f è iniettiva e/o suriettiva;

c) Calcolare $f^{-1}((-7, 14, -7))$;

d) Determinare delle equazioni cartesiane per $\mathrm{Ker}\ f$ e per $\mathrm{Im}\ f$.

e) Determinare, se esiste, un vettore non nullo $\mathbf{v} \in \mathrm{Ker}\ f \cap \mathrm{Im}\ f$.

Esercizio 4. Al variare del parametro reale t sia $F_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da $F_t(\mathbf{e}_1) = t\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2t\mathbf{e}_4$, $F_t(\mathbf{e}_2) = t\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + (t+1)\mathbf{e}_3 + 2t\mathbf{e}_4$, $F_t(\mathbf{e}_3) = (t+2)\mathbf{e}_1 - 5\mathbf{e}_3 + 2(t+2)\mathbf{e}_4$.

a) Si stabilisca per quali valori di t si ha che F_t non è iniettiva.

b) Scelto un valore r tale che F_r non sia iniettiva, si determini una base del nucleo di F_r e la si completi ad una base di $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$.
Si stabilisca inoltre se esistono due vettori linearmente indipendenti $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$ tali che $F_r(\mathbf{v}_1) = F_r(\mathbf{v}_2)$ e due vettori linearmente dipendenti $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^3$ tali che $F_r(\mathbf{u}_1)$ e $F_r(\mathbf{u}_2)$ siano linearmente indipendenti.

c) Si determinino le coordinate del vettore $(1, 1, 3)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ trovata al punto b).

d) Si stabilisca per quali valori di t si ha che $F_t(\mathbf{e}_1), F_t(\mathbf{e}_2), F_t(\mathbf{e}_3)$ generano un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 2.

Esercizio 5. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita da:

$$f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, x + y + z, y + 2z, x - z).$$

a) Scrivere la matrice associata a f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$.

b) Stabilire se f è iniettiva e/o suriettiva.

c) Determinare, se possibile, due vettori linearmente dipendenti di $\mathbb{R}^3$ che hanno la stessa immagine tramite f, e due vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^4$ che non appartengono a $\text{Im } f$.

d) Calcolare l'immagine del vettore $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$ tramite f.

e) Calcolare la controimmagine dei vettori $\mathbf{e}_4$ e $(4, 2, 2, 0)$ tramite f.

f) Esiste (senza costruirla) una applicazione lineare $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\text{Ker } g = \text{Im } f$ e $\text{Im } g = \text{Ker } f$?

g) Esiste (senza costruirla) una applicazione lineare $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$non suriettiva tale che $\text{Ker } h = \text{Ker } f$?