# Foglio 10

**Esercizio 1.** Sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_3, 2x_2 + x_3 + 2x_4, 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4)$$

a) Posto $W = \text{Ker } F$, si trovi una base ortogonale per $W^\perp$.

b) Si trovi la proiezione ortogonale di $2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$ su $W^\perp$.

c) Si trovino equazioni cartesiane per $\text{Im } F$.

**Esercizio 2.** Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione linare tale che: $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ è autovettore di $F$ di autovalore 2, $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ è autovettore di $F$ di autovalore $-1$ e $\mathbf{e}_3$ appartiene al nucleo di $F$.

a) Si determini la matrice $A$ associata ad $F$ rispetto alla base canonica in dominio e codominio.

b) Si trovino una matrice $P$ e una matrice diagonale $D$ tale he $P^T AP = D$.

c) Si trovino tutte le matrici diagonali simili ad $A$.

**Esercizio 3.** Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$T(\mathbf{e}_1) = 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3, \quad ,T(\mathbf{e}_2) = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3, \quad ,T(\mathbf{e}_3) = 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_2$$

e sia $A$ la matrice associata a $T$ rispetto alla base canonica in dominio e codominio.

a) Si verifichi che $-2$ è un autovalore di $A$ e se ne calcoli il relativo autospazio.

b) Si stabilisca se $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ è un autovettore di $T$.

c) Si deteminino, se possibile, due basi ortonormali di $\mathbb{R}^3$ distinte costituite da autovettori di $T$.

**Esercizio 4.** Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$L(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + 2x_2, 2x_1 2x_2 + 2x_3, 2x_2 + x_3)$$

e sia $A$ la matrice associata a $L$ rispetto alla base canonica in dominio e codominio.

a) Si verifichi che 2 e 5 sono autovalori di $A$ e se ne calcolino i relativi autospazi.

b) (Sfida) Si deduca dal punto precedente che $A$ ha tre autovalori distinti e si calcoli il terzo autospazio.

c) Si stabilisca se $A$ è simile alla matrice

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

## Alcune soluzioni

**2)**

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 & 0 \\ 3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**3)**

a) $V_{-2} = \langle(-1,1,0),(-1,0,1)\rangle$.

b) si.

c) $\mathcal{B}_1 = \{\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}), (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})\}$
$\mathcal{B}_2 = \{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}), (-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})\}$

**4)**

a) $V_2 = \langle(-2,1,2)\rangle$, $V_5 = \langle(2,2,1)\rangle$.

c) si, perchè sono entrambe simili alla matrice diagonale avente sulla diagonale $-1, 2, 5$.