Foglio 9

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare standard, si consideri il sottospazio

$$W = \langle (1,1,1), (2,1,0) \rangle.$$

a) Si trovi una base ortogonale per W.

b) Si trovino una rappresentazione cartesiana e una base per $W^\perp$.

c) Si trovi la proiezione ortogonale del vettore $(0,0,-1)$ su W e su $W^\perp$.

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^4$ con il prodotto scalare standard, si consideri il sottospazio

$$W : \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Si trovino una base per W e una per $W^\perp$.

b) Si trovino una base ortonormale per W e una base di $W^\perp$.

Esercizio 3. Siano $\mathbf{u}_1 = (1,1,0,0)$, $\mathbf{u}_2 = (0,0,1,1)$, $\mathbf{w}_1 = (1,-1,0,0)$, $\mathbf{w}_2 = (0,0,1,-1) \in \mathbb{R}^4$ e siano $U = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle\rangle$, $W = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle$.

a) Si mostri che esiste un'unica applicazione lineare $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $F(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ per ogni $\mathbf{u} \in U$ e $F(\mathbf{w}) = \mathbf{w}$ per ogni $\mathbf{w} \in W$ e si scriva la matrice associata ad F rispetto alla base canonica.

b) Si trovi una base di $\operatorname{Im} F$ che sia ortonormale rispetto al prodotto scalare euclideo.

c) Si stabilisca se F è diagonalizzabile.

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare euclideo, si consideri l'endomorfismo $T_\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da $T_\lambda(x,y,z) = (-x+y, 2\lambda x - y, \lambda z)$ e sia A_λ la matrice associata a T_λ rispetto alla base canonica.

a) Si dica per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ la matrice A_λ è ortogonale.

b) Si dica per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ la matrice A_λ è simmetrica.

c) Fissato $\lambda = 1$ si trovi una base ortonormale costituita da autovettori di per T_1.

Alcune soluzioni

1)

a) Una base ortogonale per W è $\{(1,1,1),(1,0,-1\}$

b) Una rappresentazione cartesiana per $W^{\perp}$ è $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+y=0 \end{cases}$; una base per $W^{\perp}$ è $\{(1,-2,1)\}$.

c) $p_{W^{\perp}}((0,0,-1)) = \frac{\langle (0,0,-1),(1,-2,1)\rangle}{\langle (1,-2,1),(1,-2,1)\rangle}(1,-2,1) = -\frac{1}{6}(1,-2,1) = (-\frac{1}{6},\frac{1}{3},-\frac{1}{6})$
e $p_W((0,0,-1)) = (0,0,-1) - p_{W^{\perp}}((0,0,-1)) = (\frac{1}{6},-\frac{1}{3},-\frac{5}{6})$.

2)

a) Una base per W è $\{-3,-1,2,4\}$; una base $W^{\perp}$ è $\{1,3,1,1),(1,1,0,1),(0,0,2,-1\}$.

b) Una base ortonormale per W è $\{-\frac{\sqrt{30}}{10},-\frac{\sqrt{30}}{30},\frac{\sqrt{30}}{15},\frac{2\sqrt{30}}{15}\}$; una base di $W^{\perp}$ è $\{(1,3,1,1),(1,1,0,1),(0,0,2,-1)\}$.

3)

a)

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

b) $\mathbf{w}_1$,$\mathbf{w}_2$ sono già ortogonali, basta dividerli per il loro modulo cioè $\sqrt{2}$.

c) Si. $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{w}_1$,$\mathbf{w}_2$ sono autovettori.