Foglio 3

Esercizio 1. Dire se il seguente sottoinsieme X dello spazio vettoriale V è linearmente indipendente oppure no e calcolare la dimensione del sottospazio vettoriale $\langle X \rangle$ da esso generato. Inoltre nel caso in cui sia linearmente indipendente completarlo ad una base per V, mentre in caso contrario esprimere uno dei suoi elementi come combinazione lineare degli altri:

a) $V = \mathbb{R}^3 \quad X = \{(3, 2, 1), (1, 4, -3), (-1, -1, 0)\}$.

b) $V = \mathbb{R}^5 \quad X = \{(2, 0, -1, 0, 0), (1, 1, 1, -2, 0), (3, 1, 1, 1, 0)\}$.

c) $V = \mathbb{R}^4 \quad X = \{(1, 2, 1, 0), (1, 2, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$.

d) $V = \mathbb{R}^4 \quad X = \{(0, 2, 1, -4), (0, 1, -2, -4), (0, 2, 6, 0)\}$.

e) $V = \mathbb{R}^3 \quad X = \{(0, 5, 7), (-3, 4, 6), (3, 6, 8), (3, 1, 1)\}$.

Esercizio 2. Calcolare le coordinate del vettore $\mathbf{v} \in V$ rispetto all1a base ordinata $\mathcal{B}$.

a) $\mathbf{v} = (2, 1, 0, -2) \in \mathbb{R}^4$, $\mathcal{B} = ((1, 0, 0, -1), (1, 0, 2, 1), (1, 1, 0, -1), (0, 0, -2, 1))$.

b) $\mathbf{v} = x^2 - 2x + 3 \in \mathbb{R}_3[x]$, $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3)$.

c) $\mathbf{v} = x^2 - 2x + 3 \in \mathbb{R}_3[x]$, $\mathcal{B} = (2, x, 1 + x^2, x^3)$.

d) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$.

e) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$.

f) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$, ove $\mathcal{S}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} | a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ è lo spazio vettoriale delle matrici simmetriche 2×2.

Esercizio 3.
Sia $W = \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] | p(1) = 0\}$. Verificare che W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_2[x]$ e determinare un insieme di generatori di W.

Esercizio 4.

a) Stabilire se i vettori $(1,1,1)$ e $(1,-1,0)$ generano $\mathbb{R}^3$.

b) Stabilire se i vettori $(1,1,1),(1,-1,0),(1,0,0)$ generano $\mathbb{R}^3$. In caso affermativo, scrivere il vettore $(2,1,1)$ come loro combinazione lineare. E possibile farlo in due modi diversi?

c) Stabilire se i vettori $(1,1,1),(1,-1,0),(1,0,0),(0,1,1$ generano $\mathbb{R}^3$ In caso affermativo, scrivere il vettore $(2,1,1)$ come loro combinazione lineare. E possibile farlo in due modi diversi?

d) Stabilire se i vettori $(1,1,1),(1,-1,0),(1,3,2),(-1,3,1)$ generano $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 5.
Si consideri il seguente sottoinsieme di $M_2(\mathbb{R})$:

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & c-a \\ b+c & -b-c \end{pmatrix} | a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$$

a) Verificare che M è un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$.

b) Trovare un insieme di generatori di M.

c) Trovare due diverse basi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ di M e calcolare la dimensione di M.

d) Trovare, se possibile, due matrici A e B di $M_2(\mathbb{R})$ non appartenenti a M e linearmente indipendenti, tali che $A-B$ appartenga a M.

e) Trovare, se possibile, due matrici A e B tali che $A \notin M$, $b \in M$ e $A-B \in M$.

Esercizio 6. Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$

$$S = \langle (1,1,1) \rangle \quad T = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | y+z-2x=0 \right\}$$

a) Trovare un insieme di generatori per T.

b) Trovare una base $\mathcal{A}$ di S. Tale base è unica?

c) Verificare che $S \subset T$ e completare la base $\mathcal{A}$ in una base $\mathcal{B}$ di T.

d) Scrivere le coordinate del vettore $(1,1,1)$ rispetto alla base $\mathcal{A}$ e rispetto alla base $\mathcal{B}$.

e) Completare la base $\mathcal{B}$ in una base $\mathcal{D}$ di $\mathbb{R}^3$.

f) Scrivere le coordinate del vettore $(1, 1, 0)$ rispetto alla base $\mathcal{D}$.

Esercizio 7. Si considerino in $\mathbb{R}_2[x]$ i polinomi:

$$p_1(x) = x^2 + ax + 3 \quad p_2(x) = x^2 - 3x - a \quad p_3(x) = ax^2 + 2x + 2$$

a) Stabilire per quali valori del parametro relae a i polinomi $p_1(x)$ e $p_2(x)$ generano $\mathbb{R}_2[x]$.

b) Stabilire per quali valori del parametro reale a i polinomi $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$ generano $\mathbb{R}_2[x]$.

Sia ora $S = \langle p_1(x), p_2(x), p_3(x) \rangle$.

c) Stabilire per quali valori del parametro reale a il polinomio $p(x) = ax^2 + 3x + 3$ appartiene a S.

d) Scelto un valore di a per cui $S \neq \mathbb{R}_2[x]$, stabilire se esistono due vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}_2[x]$ che non appartengono a S.