Foglio 3, esercizio 4, punto d

Nel punto (b) ho trovato che $S \neq \mathbb{R}_2[x]$ se e solo se $a \neq 3$. Sia quindi $a = 3$.

$\Rightarrow p_1(x) = x^2+3x+3, \quad p_2(x) = x^2-3x-3, \quad p_3(x) = 3x^2+2x+2$

Li metto IN RIGA (le operazioni sulle righe non cambiano lo span delle righe, ma quello delle colonne sì!) (dopo averli scritti in coordinate rispetto alla base canonica...)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & -3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ R_2-R_1 \\ R_3-3R_1 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -6 & -6 \\ 0 & -7 & -7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \text{diviso } -6 \\ \text{diviso } -7 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ una BASE di S è data da $\{x^2+3x+3, \ x+1\}$.

Questa base è molto comoda perché è a scala e ci permette facilmente di trovare vettori che non stanno in S. Sicuramente se prendo il pivot mancante $(0,0,1) \leftrightarrow 1 \equiv 0x^2+0x+1$, questo non sta in S.

Per trovarne un altro prendo $(0,1,2) \leftrightarrow x+2$.

Ho scelto questo vettore ragionando così: una generica comb. lin. di x^2+3x+3 e $x+1$ è del tipo

$$\lambda x^2 + (3\lambda+\mu)x + (3\lambda+\mu).$$

se $\lambda = 0$, trovo un multiplo di $x+1$: $\mu x + \mu = \mu(x+1)$.

se $\lambda \neq 0$, trovo un polinomio di grado 2.

Gli elementi di S quindi o sono multipli di $x+1$, oppure hanno grado 2. $x+2$ né ha grado 2, né è multiplo di $x+1$! Quindi $x+2 \notin S$ ed è lin. ind. con 1.

I due vettori che ho scelto quindi sono 1 e $x+2$.

Che $x+2 \notin S$ ovviamente si vede anche con Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad rk = 3!$$

Tutto questo ragionamento si riassume con: "ho preso il secondo vettore e gli ho cambiato solo una coordinata".