Algebra e Geometria - Corso di Laurea in Informatica
docente: prof.ssa Marta Morigi
21 giugno 2024
Versione A

Nota: Le risposte vanno motivate. I calcoli e le motivazioni delle risposte sono parte integrante dello svolgimento dell'esercizio.

**Esercizio 1.** (10 punti)
Sia $F_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da:

$$F_k(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + kx_3, -x_1 + x_2 + x_3, kx_2 + 12x_3, 2x_1 + 3x_2 + 6kx_3).$$

a) Si stabilisca per quali valori di $k$ si ha che $F_k$ è iniettiva. $[k \neq 3]$

b) Posto $k = 2$, si stabilisca per quale valore di $s$ si ha che il vettore $\mathbf{v} = 3\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + s\mathbf{e}_3 + 8\mathbf{e}_4$ appartiene a Im $(F_2)$ e per tale valore si determinino le coordinate di $\mathbf{v}$ rispetto alla base ordinata $\{F_2(\mathbf{e}_1), F_2(\mathbf{e}_2), F_2(\mathbf{e}_3)\}$ di Im $(F_2)$. $[s = 8, (1, -2, 1)]$

c) Posto $k = 2$, si completi la base $\{F_2(\mathbf{e}_1), F_2(\mathbf{e}_2), F_2(\mathbf{e}_3)\}$ di Im $(F_2)$ ad una base di $\mathbb{R}^4$ e si determini la matrice $M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(F_2)$ associata ad $F_2$ rispetto alla base canonica $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^3$ e alla base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4$. $\left[\ [\{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 + 3\mathbf{e}_4, 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 12\mathbf{e}_3 + 12\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4\}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$

**Esercizio 2.** (8 punti)
Sia $T_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$T_k(\mathbf{e}_1) = 5\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3 \qquad T_k(\mathbf{e}_2) = -2\mathbf{e}_1 + k\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3 \qquad T_k(\mathbf{e}_3) = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3$$

e sia $A_k$ la matrice associata a $T_k$ rispetto alla base canonica (in dominio e codominio).

a) Si stabilisca per quali valori di $k$ si ha che $\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ è autovettore di $T_k$. [k=-2]

b) Posto $k = 3$, si stabilisca se $T_k$ è diagonalizzabile e in caso affermativo si determinino tutte le matrici diagonali simili ad $A_3$. $\left[\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right]$

c) Posto $k = 3$, si determinino, se possibile, due autovettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ di $T_3$ tali che $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ non sia autovettore di $T_3$. $[(1, 0, 2), (1, 0, 1)]$

**Esercizio 3.** (8 punti)
Sia $W$ il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $(1, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 6)$. Si determinino

a) delle equazioni cartesiane per $W$; $[x_1 + 6x_2 - x_4 = 0; x_1 - x_3 = 0;]$

b) una base ortogonale di $W$; $[\{(1, 0, 1, 1), (-2, 1, -2, 4)\}]$

c) una base di $W^\perp$; $[\{(1, 6, 0, -1), (1, 0, -1, 0)\}]$

b) la proiezione ortogonale del vettore $\mathbf{v} = (0, 1, -2, 5)$ su $W$. $[(-1, 1, -1, 5)]$

**Esercizio 4** (4 punti)

a) Si stabilisca se uno dei due insiemi $[8]_{17}$ e $[-9]_{34}$ è incluso nell'altro.

$[[-9]_{34} \subseteq [8]_{17}.\ ]$

b) È vero o falso che l'inverso di $[21]_{40}$ in $\mathbb{Z}_{40}$ è $[21]_{40}$? [vero]

Algebra e Geometria - Corso di Laurea in Informatica
docente: prof.ssa Marta Morigi
21 giugno 2024
Versione B

Nota: Le risposte vanno motivate. I calcoli e le motivazioni delle risposte sono parte integrante dello svolgimento dell'esercizio.

**Esercizio 1.** (10 punti)
Sia $F_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da:

$$F_k(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - kx_3, -x_1 + x_2 + 2x_3, -kx_2 + 8x_3, 2x_1 - 3x_2 - 2x_3).$$

a) Si stabilisca per quali valori di $k$ si ha che $F_k$ è iniettiva. $[k \neq 4]$

b) Posto $k = -3$, si stabilisca per quale valore di $s$ si ha che il vettore $\mathbf{v} = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 + s\mathbf{e}_4$ appartiene a Im $(F_s)$ e per tale valore si determinino le coordinate di $\mathbf{v}$ rispetto alla base ordinata $\{F_2(\mathbf{e}_1), F_2(\mathbf{e}_2), F_2(\mathbf{e}_3)\}$ di Im $(F_2)$. $[s = -5; (-1, -3, 1)]$

c) Posto $k = -3$, si completi la base $\{F_2(\mathbf{e}_1), F_2(\mathbf{e}_2), F_2(\mathbf{e}_3)\}$ di Im $(F_2)$ ad una base di $\mathbb{R}^4$ e si determini la matrice $M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(F_2)$ associata ad $F_2$ rispetto alla base canonica $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^3$ e alla base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4$. $[\{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 - 3\mathbf{e}_4, 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 8\mathbf{e}_3 - 2\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4\}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}]$

**Esercizio 2.** (8 punti)
Sia $T_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$T_k(\mathbf{e}_1) = 4\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3 \qquad T_k(\mathbf{e}_2) = 4\mathbf{e}_1 + k\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3 \qquad T_k(\mathbf{e}_3) = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$$

e sia $A_k$ la matrice associata a $T_k$ rispetto alla base canonica (in dominio e codominio).

a) Si stabilisca per quali valori di $k$ si ha che $4\mathbf{e}_1 - 7\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3$ è autovettore di $T_k$. $[k = -4]$

b) Posto $k = 2$, si stabilisca se $T_k$ è diagonalizzabile e in caso affermativo si determinino tutte le matrici diagonali simili ad $A_3$.
$[\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}]$

c) Posto $k = 2$, si determinino, se possibile, due autovettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ di $T_3$ tali che $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ non sia autovettore di $T_2$. $[(-2, 1, 0), (1, 0, 1)]$

**Esercizio 3.** (8 punti)
Sia $W$ il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $(1, 0, 0, 2), (0, 1, 1, 5)$. Si determinino

a) delle equazioni cartesiane per $W$; $[2x_1 + 5x_2 - x_4 = 0; x_2 - x_3 = 0;]$

b) una base ortogonale di $W$; $[\{(1, 0, 0, 2), (-2, 1, 1, 1)\}]$

c) una base di $W^{\perp}$; $[\{(2, 5, 0, -1), (0, 1, -1, 0)\}]$

b) la proiezione ortogonale del vettore $\mathbf{v} = (-1, 2, 0, 3)$ su $W$. $[(-1, 1, 1, 3)]$

**Esercizio 4** (4 punti)

a) Si stabilisca se uno dei due insiemi $[11]_{19}$ e $[-8]_{38}$ è incluso nell'altro.
$[[-8]_{38} \subseteq [11]_{19}.\ ]$

b) È vero o falso che l'inverso di $[21]_{50}$ in $\mathbb{Z}_{50}$ è $[31]_{50}$? [vero]