Cognome........................Nome........................Matricola........................

Algebra e Geometria - Corso di Laurea in Informatica
docente: prof.ssa Marta Morigi
30 agosto 2024

Nota: Le risposte vanno motivate. I calcoli e le motivazioni delle risposte sono parte integrante dello svolgimento dell'esercizio.

Esercizio 1. (9 punti)
Sia $F_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$F_k(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + kx_3 - 2x_4, 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 6x_4, x_1 + kx_2 - 4x_3 - 2x_4).$$

a) Si stabilisca per quali valori di k si ha che il nucleo di F_k ha dimensione 2 e si scelga un tale valore s. [$s = 1, -\frac{4}{3}$]
b) Si determini una base $\mathcal{B}$ del nucleo di F_s e la si completi ad una base di $\mathbb{R}^4$. Se possibile, si trovino 3 vettori di $\mathbb{R}^4$ linearmente indipendenti che non appartengono al nucleo di F_s.
c) Si determini il vettore $\mathbf{v}$ di Ker F tale che le coordinate di $\mathbf{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ trovata nel punto precedente siano $(\mathbf{v})_{\mathcal{B}} = (-3, 1)$.
d) Si determinino le equazioni cartesiane dell'immagine di F_s. [$2x_1 - x_2 + x_3 = 0$]

Esercizio 2. (8 punti)
Sia $T_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$T_k(\mathbf{e}_1) = 2\mathbf{e}_1 \qquad T(\mathbf{e}_2) = -k\mathbf{e}_1 + k\mathbf{e}_3 \qquad T(\mathbf{e}_3) = 10\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 + (5-k)\mathbf{e}_3$$

e sia A la matrice associata a T_k rispetto alla base canonica (in dominio e codominio).

a) Si stabilisca per quali valori di k si ha che T_k è diagonalizzabile. [autovalori $2, 5, -k$, diag per $k \neq -5, -2$]
b) Si stabilisca per quali valori di k si ha che $\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ è autovettore di T_k. [$k = 10$]
c) Posto $k = 2$, si determinino le coordinate del vettore $(-4, 5, 13)$ rispetto alla base ordinata $\mathcal{B} = \{T_2(\mathbf{e}_2), T_2(\mathbf{e}_1), T_2(\mathbf{e}_3)\}$ di $\mathbb{R}^3$. [$(5, -2, 1)$]

Esercizio 3. (9 punti)
In $\mathbb{R}^3$ siano $\mathbf{u}_1 = (1, -1, 0), \mathbf{u}_2 = (1, 0, -1)$ e sia $U = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$.

a) Determinare una base ortogonale $\mathcal{B}$ di U e una base $\tilde{\mathcal{B}}$ di $U^\perp$.
[$\mathcal{B} = \{(1, -1, 0), (1, 1, -2\}, \tilde{\mathcal{B}} = \{(1, 1, 1\})$]
b) Determinare le proiezioni ortogonali di $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$ su $U^\perp$. [$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$]
c) Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che $F(\mathbf{u}) = 0$ per ogni $\mathbf{u} \in \mathcal{B}$ e $F(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ per ogni $\mathbf{v} \in \tilde{\mathcal{B}}$. Scrivere la matrice associata ad F rispetto alla base canonica in dominio e codominio.
[$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$]
d) Determinare, se possibile, una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di F.[$\mathcal{B} \cup \tilde{\mathcal{B}}$]

Esercizio 4. (4 punti)

a) Si risolva l'equazione $[38]_{87}x = [5]_{87}$ in $\mathbb{Z}_{87}$. [$x = [7]_{87}$.]
b) Si stabilisca se la congruenza $39x \equiv_{63} 18$ ha una, nessuna o infinite soluzioni. [infinite sol.]