# Foglio 7

**Esercizio 1.** Si consideri l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$L(x, y, z) = (y + kz, x + ky, x + y - 6z, x + ky)$$

dipendente da $k \in \mathbb{R}$.

a) Per quali valori di $k$ l'applicazione $L$ non è iniettiva?

b) Per ognuno di questi valori trovare una base dell'immagine e del nucleo di $L$ ed esibire, se esistono, due vettori di $\mathbb{R}^4$ indipendenti che non appartengano all'immagine di $L$.

c) Per $k$=3 trovare la controimmagine del vettore (0,2,2,2).

**Esercizio 2.** Data la matrice $A$ a coefficenti reali, calcolarne il polinomio caratteristico e gli autovalori. Verificare se $A$ è o meno diagonalizzabile e in caso affermativo, calcolare una matrice diagonale $D$ simile ad $A$ e determinare $P$ tale che $D = P^{-1}AP$.

a) $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

**Esercizio 3.** Dato l'endorfismo $T : V \to V$, calcolarne gli autovalori e determinare una rappresentazione cartesiana per gli autospazi. Verificare se $T$ è o meno diagonalizzabile e in caso affermativo, determinare una base di $V$ costituita da autovettori di $T$.

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $T(x, y) = (3y, -2x)$.

b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $T(x, y, z) = (2x + y + 2z, x, x)$.

c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $T(1,2,1) = (-2,-4,-2), T(1,1,1) = (-1,-2,-1)$, $T(0,0,1) = (1,0,-1)$.

**Esercizio 4.** Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$T(\mathbf{e}_1) = -5\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2; T(\mathbf{e}_2) = 7\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2; T(\mathbf{e}_3) = 3\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_3.$$

a) Si stabilisca se (-5,-5,0) è autovettore di $T$.

b) Si stabilisca se $T$ è diagonalizzabile, e in caso affermativo, detta $A$ la matrice associata a $T$ rispetto alla base canonica si determinino una matrice diagonale $D$ simile ad $A$ e due matrici distinte $P_1, P_2$ tali che $P_1^{-1}AP_1 = P_2^{-1}AP_2 = D$.