Cognome........................Nome........................Matricola........................

Algebra e Geometria
Cdl in Informatica - prof.ssa Marta Morigi
22 maggio 2024
versione A

Nota: Le risposte vanno motivate. I calcoli e le motivazioni delle risposte sono parte integrante dello svolgimento dell'esercizio. Il parametro b è uguale a: (il resto della divisione di xx per 3)+2, ove xx sono le ultime due cifre del proprio numero di matricola.

Esercizio 1. (9 punti)
Sia $F_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$F_k(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - 4x_3 + 4x_4, x_2 + kx_3 + x_4, x_1 + kx_2 + 3kx_3 + 2kx_4).$$

a) Si stabilisca per quali valori di k si ha che F_k è suriettiva. [$k \neq 4$]
b) Si stabilisca per quali valori di k si ha che $-4\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + 2\mathbf{e}_4 \in \operatorname{Ker} F_k$. [$k = 1$]
c) Si stabilisca per quali valori di k i vettori $F_k(\mathbf{e}_1), F_k(\mathbf{e}_2), F_k(\mathbf{e}_3)$ sono linearmente indipendenti.
d) Posto $k = 0$, si scrivano le coordinate di $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3$ rispetto alla base ordinata $\{F_0(\mathbf{e}_1), F_0(\mathbf{e}_2), F_0(\mathbf{e}_3)\}$ di $\mathbb{R}^3$. [$(4, -2, 3/4)$]

Esercizio 2. (9 punti)
Sia $L_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$L_k(\mathbf{e}_1) = 2\mathbf{e}_3, \quad L_k(\mathbf{e}_2) = -10\mathbf{e}_1 + (k+1)\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3, \quad L_k(\mathbf{e}_3) = -5\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_3.$$

a) Si stabilisca per quali valori di k si ha che L_k è diagonalizzabile. [autov: $k+1, 5, 2$, diag per $k \neq 1$]
b) Si stabilisca per quali valori di k si ha che L_k è iniettiva. [$k \neq -1$]
c) Si consideri la base ordinata $\mathcal{B} = \{2\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3, -\mathbf{e}_2\}$ di $\mathbb{R}^3$. Posto $k = 0$, si determini la matrice $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(L_0)$ associata ad L_0 rispetto alla base canonica nel dominio e alla base $\mathcal{B}$ nel codominio. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -10 & -5 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Esercizio 3. (8 punti)
Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b & b \\ b & 1 & b \\ b & b & 1 \end{pmatrix}$$

a) Si verifichi che il vettore $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$ è un autovettore di A e si calcoli l'autovalore corrispondente.
b) Fissato in $\mathbb{R}^3$ il prodotto scalare euclideo, si trovi una base ortogonale del sottospazio $U = \operatorname{span}(\mathbf{v})^{\perp}$. [$\{(-1, 1, 0), (-1/2, -1/2, 1)\}$]
c) Si verifichi che U è un autospazio di A e si calcoli l'autovalore corrispondente. [$-b + 1$]
d) Si determinino, se possibile, una matrice diagonale D e una matrice P tale che $P^T A P = D$.

Esercizio 4. (4 punti) Tovare tutte le soluzioni intere della seguente congruenza lineare:

$$31x \equiv_{100} 23$$

[$x = -29 * 23 + 100k$, $k \in \mathbb{Z}$]

Cognome........................Nome........................Matricola........................

Algebra e Geometria

Cdl in Informatica - prof.ssa Marta Morigi

22 maggio 2024

versione B

Nota: Le risposte vanno motivate. I calcoli e le motivazioni delle risposte sono parte integrante dello svolgimento dell'esercizio. Il parametro b è uguale a: (il resto della divisione di xx per 3)+2, ove xx sono le ultime due cifre del proprio numero di matricola.

Esercizio 1. (9 punti)
Sia $F_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$F_k(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - 4x_3 + x_4, x_2 + kx_3 + x_4, x_1 + kx_2 - 3kx_3 + 2kx_4).$$

a) Si stabilisca per quali valori di k si ha che F_k è suriettiva. [$k \neq 1$]
b) Si stabilisca per quali valori di k si ha che $-4\mathbf{e}_1 - 12\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + 8\mathbf{e}_4 \in \text{Ker } F_k$. [$k = 4$]
c) Si stabilisca per quali valori di k i vettori $F_k(\mathbf{e}_1), F_k(\mathbf{e}_2), F_k(\mathbf{e}_3)$ sono linearmente indipendenti.
d) Posto $k = 0$, si scrivano le coordinate di $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_3$ rispetto alla base ordinata $\{F_0(\mathbf{e}_1), F_0(\mathbf{e}_2), F_0(\mathbf{e}_3)\}$ di $\mathbb{R}^3$. [$(-4, 2, -5/4)$]

Esercizio 2. (9 punti)
Sia $L_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$L_k(\mathbf{e}_1) = 2\mathbf{e}_3, \quad L_k(\mathbf{e}_2) = 4\mathbf{e}_1 + (k+1)\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \quad L_k(\mathbf{e}_3) = 4\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_3.$$

a) Si stabilisca per quali valori di k si ha che L_k è diagonalizzabile. [autov: $k+1, 8, -1$, diag per $k \neq -2$]
b) Si stabilisca per quali valori di k si ha che L_k è iniettiva.
c) Si consideri la base ordinata $\mathcal{B} = \{2\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3, -\mathbf{e}_2\}$ di $\mathbb{R}^3$. Posto $k = 0$, si determini la matrice $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(L_0)$ associata ad L_0 rispetto alla base canonica nel dominio e alla base $\mathcal{B}$ nel codominio. $\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Esercizio 3. (8 punti)
Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -b & -b \\ -b & 1 & -b \\ -b & -b & 1 \end{pmatrix}$$

a) Si verifichi che il vettore $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$ è un autovettore di A e si calcoli l'autovalore corrispondente. [$-2b + 1$]
b) Fissato in $\mathbb{R}^3$ il prodotto scalare euclideo, si trovi una base ortogonale del sottospazio $U = \text{span}(\mathbf{v})^\perp$. [$\{(-1, 1, 0), (-1/2, -1/2, 1)\}$]
c) Si verifichi che U è un autospazio di A e si calcoli l'autovalore corrispondente. [$b + 1$]
d) Si determinino, se possibile, una matrice diagonale D e una matrice P tale che $P^T AP = D$.

Esercizio 4. (4 punti) Tovare tutte le soluzioni intere della seguente congruenza lineare:

$$40x \equiv_{129} 17$$

[$x = -29 * 17 + 129k, \ k \in \mathbb{Z}$]

Cognome........................Nome........................Matricola........................

Algebra e Geometria
Cdl in Informatica - prof.ssa Marta Morigi
22 maggio 2024
versione C

Nota: Le risposte vanno motivate. I calcoli e le motivazioni delle risposte sono parte integrante dello svolgimento dell'esercizio. Il parametro b è uguale a: (il resto della divisione di xx per 3)+2, ove xx sono le ultime due cifre del proprio numero di matricola.

Esercizio 1. (9 punti)
Sia $F_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$F_k(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 3x_3 + 3x_4, x_2 - kx_3 + x_4, x_1 + kx_2 - 2kx_3 + 2kx_4).$$

a) Si stabilisca per quali valori di k si ha che F_k è suriettiva.
b) Si stabilisca per quali valori di k si ha che $-6\mathbf{e}_1 - 5\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 + 3\mathbf{e}_4 \in \operatorname{Ker} F_k$.
c) Si stabilisca per quali valori di k i vettori $F_k(\mathbf{e}_1), F_k(\mathbf{e}_2), F_k(\mathbf{e}_3)$ sono linearmente indipendenti.
d) Posto $k = 0$, si scrivano le coordinate di $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 6\mathbf{e}_3$ rispetto alla base ordinata $\{F_0(\mathbf{e}_1), F_0(\mathbf{e}_2), F_0(\mathbf{e}_3)\}$ di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 2. (9 punti)
Sia $L_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$L_k(\mathbf{e}_1) = 2\mathbf{e}_3, \;\; L_k(\mathbf{e}_2) = -3\mathbf{e}_1 + (k-1)\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \;\; L_k(\mathbf{e}_3) = 6\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_3.$$

a) Si stabilisca per quali valori di k si ha che L_k è diagonalizzabile. [autov: $k-1, 6, -2$, diag per $k \neq -1$]
b) Si stabilisca per quali valori di k si ha che L_k è iniettiva. [$k \neq 1$]
c) Si consideri la base ordinata $\mathcal{B} = \{2\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3, -\mathbf{e}_2\}$ di $\mathbb{R}^3$. Posto $k = 0$, si determini la matrice $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(L_0)$ associata ad L_0 rispetto alla base canonica nel dominio e alla base $\mathcal{B}$ nel codominio. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Esercizio 3. (8 punti)
Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b & b \\ b & 1 & b \\ b & b & 1 \end{pmatrix}$$

a) Si verifichi che il vettore $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$ è un autovettore di A e si calcoli l'autovalore corrispondente. [$2b + 1$]
b) Fissato in $\mathbb{R}^3$ il prodotto scalare euclideo, si trovi una base ortogonale del sottospazio $U = \operatorname{span}(\mathbf{v})^\perp$. [$\{(-1, 1, 0), (-1/2, -1/2, 1)\}$]
c) Si verifichi che U è un autospazio di A e si calcoli l'autovalore corrispondente. [$-b + 1$]
d) Si determinino, se possibile, una matrice diagonale D e una matrice P tale che $P^T AP = D$.

Esercizio 4. (4 punti) Tovare tutte le soluzioni intere della seguente congruenza lineare:

$$43x \equiv_{99} 38$$

[$x = -23 * 38 + 99k, \; k \in \mathbb{Z}$]

Cognome........................Nome........................Matricola........................

Algebra e Geometria
Cdl in Informatica - prof.ssa Marta Morigi
22 maggio 2024
versione D

Nota: Le risposte vanno motivate. I calcoli e le motivazioni delle risposte sono parte integrante dello svolgimento dell'esercizio. Il parametro b è uguale a: (il resto della divisione di xx per 3)+2, ove xx sono le ultime due cifre del proprio numero di matricola.

Esercizio 1. (9 punti)
Sia $F_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$F_k(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 6x_3 - 12x_4, x_2 - kx_3 - x_4, x_1 + kx_2 + kx_3 + 3kx_4).$$

a) Si stabilisca per quali valori di k si ha che F_k è suriettiva. [$k \neq -3$]

b) Si stabilisca per quali valori di k si ha che $36\mathbf{e}_1 - 11\mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4 \in \text{Ker } F_k$. [$k = 3$]

c) Si stabilisca per quali valori di k i vettori $F_k(\mathbf{e}_1), F_k(\mathbf{e}_2), F_k(\mathbf{e}_3)$ sono linearmente indipendenti.

d) Posto $k = 0$, si scrivano le coordinate di $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 - 6\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3$ rispetto alla base ordinata $\{F_0(\mathbf{e}_1), F_0(\mathbf{e}_2), F_0(\mathbf{e}_3)\}$ di $\mathbb{R}^3$. [$(-2, -6, 1/2)$]

Esercizio 2. (9 punti)
Sia $L_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$L_k(\mathbf{e}_1) = 4\mathbf{e}_3, \;\; L_k(\mathbf{e}_2) = 5\mathbf{e}_1 + (k-1)\mathbf{e}_2 - 5\mathbf{e}_3, \;\; L_k(\mathbf{e}_3) = -3\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_3.$$

a) Si stabilisca per quali valori di k si ha che L_k è diagonalizzabile. [autov: $k-1, 3, 4$, diag per $k \neq 2$]

b) Si stabilisca per quali valori di k si ha che L_k è iniettiva. [$k \neq 1$]

c) Si consideri la base ordinata $\mathcal{B} = \{4\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3, -\mathbf{e}_2\}$ di $\mathbb{R}^3$. Posto $k = 0$, si determini la matrice $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(L_0)$ associata ad L_0 rispetto alla base canonica nel dominio e alla base $\mathcal{B}$ nel codominio. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Esercizio 3. (8 punti)
Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -b & -b \\ -b & 1 & -b \\ -b & -b & 1 \end{pmatrix}$$

a) Si verifichi che il vettore $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$ è un autovettore di A e si calcoli l'autovalore corrispondente. [$-2b + 1$]

b) Fissato in $\mathbb{R}^3$ il prodotto scalare euclideo, si trovi una base ortogonale del sottospazio $U = \text{span}(\mathbf{v})^\perp$. [$\{(-1, 1, 0), (-1/2, -1/2, 1)\}$]

c) Si verifichi che U è un autospazio di A e si calcoli l'autovalore corrispondente. [$b + 1$]

d) Si determinino, se possibile, una matrice diagonale D e una matrice P tale che $P^T AP = D$.

Esercizio 4. (4 punti) Tovare tutte le soluzioni intere della seguente congruenza lineare:

$$38x \equiv_{87} 11$$

[$x = -16 * 11 + 87k, \; k \in \mathbb{Z}$]