Esercizio 2:

$$\begin{cases} ax+y+3z=1 \\ (a+1)x+4y+(a+3)z=2 \\ (a-1)x+(1-a)y=0 \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ Riscrivo in forma matriciale:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 3 & 1 \\ a+1 & 4 & a+3 & 2 \\ a-1 & 1-a & 0 & 0 \end{array}\right) \quad (*)$$

Memento: le operazioni consentite sulle righe sono:

(1) scambiare due righe;

(2) moltiplicare una riga per uno scalare non nullo; !!!

(3) sommare ad una riga un multiplo di un'altra riga.

Lavoriamo su (*): modifichiamola prima per rendere i conti più semplici

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 3 & 1 \\ a+1 & 4 & a+3 & 2 \\ a-1 & 1-a & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ R_2-R_1 \\ R_1-R_3 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & a & 1 \\ 1 & a & 3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ aR_2-R_1 \\ R_3-R_2 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3a-1 & a^2-3 & a-1 \\ 0 & a-3 & 3-a & 0 \end{array}\right)$$

↳ moltiplico R_3 per -1 (2), sommo R_1 (3)

devo supporre $a \neq 0$

$(3a-1)R_3-(a-3)R_2$

devo supporre $a \neq \frac{1}{3}$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3a-1 & a^2-3 & a-1 \\ 0 & 0 & ? & -(a-3)(a-1) \end{array}\right)$$

↳ svolgiamo i conti: $(3a-1)(3-a)-(a-3)(a^2-3) =$

$= 9a - \cancel{3a^2} - 3 + a - (a^3 - 3a - \cancel{3a^2} + 9) =$

$= -(a^3-13a+12) = -(a-1)(a+4)(a-3)$

↑ scomposizione con Ruffini: 1 è radice di $a^3-13a+12$. Facendo la divisione si ottiene $a^3-13a+12 = (a-1)(a^2+a-12) =$ (scompos. trinomio) $= (a-1)(a+4)(a-3)$

Divisione:

$$\begin{array}{rrrr|l} a^3 & +0 & -13a & +12 & a-1 \\ \hline -a^3 & +a^2 & & & a^2+a-12 \\ \hline 0 & +a^2 & -13a & +12 & \\ & -a^2 & +a & & \\ \hline & 0 & -12a & +12 & \\ & & 12a & -12 & \\ \hline & & & 0 & \end{array}$$

Riassumendo, abbiamo trovato, per $a \neq 0, \frac{1}{3}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3a-1 & a^2-3 & a-1 \\ 0 & 0 & (1-a)(a+4)(a-3) & (a-3)(1-a) \end{array}\right)$$

- se $a=1$, $a=3$: tutta l'ultima riga (compreso il termine noto) è zero, quindi ho ∞ soluz.
- se $a=-4$: l'ultima riga è nulla, eccetto il termine noto: non ci sono soluzioni.
- se $a \neq 1, -4$: la matrice a scala ha rango massimo, quindi vi è una unica soluzione.

Poi: - se $a=0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2 \\ R_1 \\ R_3+R_2 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ R_3-5R_2 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -12 & -3 \end{array}\right)$$

Il sistema ha un'unica soluzione: $(1/4, 1/4, 1/4)$

- se $a = 1/3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1/3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -26/9 & -2/3 \\ 0 & -8/3 & 8/3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ R_3 \\ -R_2 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1/3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -8/3 & 8/3 & 0 \\ 0 & 0 & 26/9 & 2/3 \end{array}\right)$$

Il sistema ha un'unica soluzione

Esercizio 3:

$$\begin{cases} x+y+z=2k \\ 2x+kz=0 \\ 2x+ky-4z=0 \end{cases} \rightsquigarrow \text{Riscrivo in forma matriciale: } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2k \\ 2 & 0 & k & 0 \\ 2 & k & -4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2k \\ 2 & 0 & k & 0 \\ 2 & k & -4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2-2R_1 \\ R_3-2R_1 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2k \\ 0 & -2 & k-2 & -4k \\ 0 & k-2 & -6 & -4k \end{array}\right) 2R_3+(k-2)R_2 \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2k \\ 0 & -2 & k-2 & -4k \\ 0 & 0 & k^2-4k-8 & -4k^2 \end{array}\right)$$

N.B. In questo passaggio sto facendo due operazioni: 1) MOLTIPLICO R_3 per uno scalare non nullo (cioè 2)
2) SOMMO a $2R_3$ un multiplo di un'altra riga (cioè $(k-2)R_2$)
Non serve imporre condizioni su k!

Abbiamo quindi trovato $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2k \\ 0 & -2 & k-2 & -4k \\ 0 & 0 & k^2-4k-8 & -4k^2 \end{array}\right)$.

Il sistema avrà: - 1 soluzione se la matrice ha rango massimo (cioè i pivot sono $\neq 0$)
- 0 soluzioni se ci sono righe nulle a cui corrisponde un termine noto non nullo
- ∞ soluzioni se ci sono righe nulle, compreso il termine noto

Quando si annulla l'ultimo pivot? Quando $k^2-4k-8=0$, ossia se

$$k = 2 \pm \sqrt{4+8} = 2 \pm 2\sqrt{3} =: x_\pm$$

In questo caso, si annulla l'ultimo pivot, ma non l'ultimo termine noto ($-4k^2$).
In tutti gli altri casi, la matrice a scala ha rango massimo.

Quindi: - se $k = 2 \pm 2\sqrt{3}$, non ci sono soluzioni;
- se $k \neq 2 \pm 2\sqrt{3}$, il sistema ha una unica soluzione.

Esercizio 4:

$$\begin{cases} x + by = 2 \\ (b+1)x + 2y + (b+2)z = -2 \\ x + by + (b+2)z = 2 \end{cases} \rightsquigarrow \text{In forma matriciale: } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 0 & 2 \\ b+1 & 2 & b+2 & -2 \\ 1 & b & b+2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 0 & 2 \\ b+1 & 2 & b+2 & -2 \\ 1 & b & b+2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2 - R_1 \\ R_1 \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} b & 2-b & b+2 & -4 \\ 1 & b & 0 & 2 \\ 1 & b & b+2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 - bR_2 \\ R_3 - R_2 \end{array} \longrightarrow$$

devo supporre $b \neq 0$

Nota: non era strettamente necessario scambiare le prime due righe, ma facendo così per me i conti venivano più semplici :)

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} b & 2-b & b+2 & -4 \\ 0 & 2-b-b^2 & b+2 & -4-2b \\ 0 & 0 & b+2 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} b & 2-b & b+2 & -4 \\ 0 & (1-b)(b+2) & b+2 & -4-2b \\ 0 & 0 & b+2 & 0 \end{array}\right)$$

Vediamo quando si annullano i pivot:

~~- se $b=0$:~~ $\cancel{\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)}$ ~~Infinite soluzioni che dipendono da 2 parametri: Sol(S) = {~~

Qui avevo sbagliato, ma lascio l'errore così non lo rifate voi: perché era sbagliato? Perché ho sostituito $b=0$ alla matrice ottenuta DOPO aver supposto $b \neq 0$!!!

- se $b=0$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2 \\ R_1 \\ R_3 - R_2 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$

Il sistema ha una sola soluzione $(2, -2, 0)$

- se $b=-2$: $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ Il sistema ha infinite soluzioni che dipendono da 2 parametri:

$$Sol(S) = \{ (2+2\alpha, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$$

- se $b=1$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$ Il sistema non ha soluzioni.

Esercizio 5:

$$\begin{cases} hx + z = 1 \\ x + z = 1 \\ 3x + (h+1)z = h+3 \\ 3x + y + z = 3 \end{cases} \rightarrow \text{In forma matriciale} \left(\begin{array}{ccc|c} h & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & h+1 & h+3 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

devo supporre $h \neq 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} h & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & h+1 & h+3 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ hR_2 - R_1 \\ R_3 - 3R_2 \\ R_3 - R_4 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} h & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & h-1 & h-1 \\ 0 & 0 & h-2 & h \\ 0 & -1 & h & h \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} h & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & h & h \\ 0 & 0 & h-1 & h-1 \\ 0 & 0 & h-2 & h \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ (h-1)R_4 - (h-2)R_3 \end{array}$$

devo supporre $h \neq 1$ (*)

(*) Nota: perché quando sostituisco a R_4 $(h-1)R_4 - (h-2)R_3$ devo supporre $h \neq 1$, ma non $h \neq 2$? Perché sto facendo due operazioni:

1) MOLTIPLICO la riga R_4 per uno scalare non nullo: $h-1$. Quindi devo necessariamente avere $h-1 \neq 0$!!!
2) SOMMO alla mia nuova riga $(h-1)R_4$ un multiplo di un'altra riga: $-(h-2)R_3$. qui non mi interessa che $h-2 \neq 0$: nel peggiore dei casi, sto sommando zero!

Troviamo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} h & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & h & h \\ 0 & 0 & h-1 & h-1 \\ 0 & 0 & 0 & 2h-2 \end{array}\right)$$

Quindi se $h \neq 0$, $h \neq 1$, il sistema non ha soluzioni.

se $h = 0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ R_2 - 3R_1 \\ R_3 - R_2 \\ \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Posso fermarmi qui: la riga R_2 mi dice che $z = 0$,
la riga R_4 mi dice che $z = 1$!
=> il sistema non ha soluzioni.

se $h = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Il sistema ha una unica soluzione

$(2, -2, -1)$