Corso di Ottimizzazione Combinatoria
Prova scritta del 15 Febbraio 2024
Tempo a disposizione: ore 1:45.

Si ricorda che:

- Per quanto possibile, occorre scrivere in bella calligrafia (il testo illeggibile non verrà preso in considerazione).
- Su tutti i fogli che vi abbiamo consegnato occorre riportare cognome, nome e numero di matricola.
- Occorre riportare in modo chiaro tutti i passi che portano alla determinazione del risultato.
- Il numero dell'esercizio che si sta svolgendo va sempre riportato in modo chiaro.
- Non è consentita la consultazione di appunti, libri, etc.
- Non è consentito l'uso di calcolatrici, telefoni cellulari, etc.
- Non è concesso chiedere alcunché ai docenti e agli altri studenti.
- Occorre consegnare anche la brutta copia ai docenti.

Esercizio 1. *(Punti 9)*
Un'azienda meccanica deve svolgere n lavori, ciascuno dei quali consiste nella creazione o trasformazione di pezzi di metallo. Per farlo l'azienda dispone di un grande numero di macchine, identiche tra loro, che possono essere usate in parallelo in modo da minimizzare il tempo complessivo di svolgimento dei lavori. Tutti i lavori hanno una durata *fissa* di t minuti. Ciascun lavoro i deve essere svolto *dopo* i lavori in un sottoinsieme D_i di $\{1, \ldots, n\}$, perché consiste nella modifica di pezzi di metallo prodotti nei lavori in D_i. Si supponga che il tempo di trasferimento dei pezzi da una macchina all'altra sia trascurabile. Si modelizzi in PLI il problema di determinare il tempo necessario a completare tutti gli n lavori.

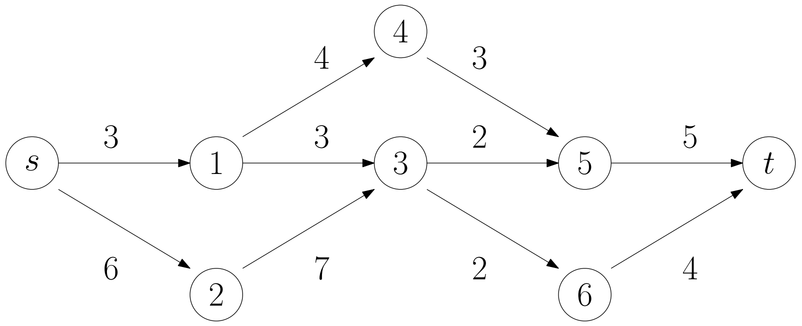
Esercizio 2. *(Punti 6)*
Si risolva il seguente problema di programmazione lineare attraverso l'algoritmo del simplesso. Si parta dalla base ammissibile corrispondente ai vincoli della seconda riga.

$$\max\ x_3 - x_2 - x_1$$

$$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0 \qquad x_3 \leq 0 \qquad x_1 + x_3 \leq 1$$

$$x_1 - 1 \leq 0 \qquad x_2 - 1 \leq 0 \qquad x_3 + 1 \geq 0$$

Esercizio 3. *(Punti 10)*
Si risolva il seguente problema di flusso massimo tramite l'algoritmo di Edmonds-Karp. Si indichino in modo preciso il valore ottimo e la soluzione ottima. Si determini poi un taglio di capacità minima.



Esercizio 4. *(Punti 5)*
Nell'ambito dell'Esercizio 1, si supponga che non esista solo *un* tipo di macchina bensì m e che ogni lavoro i possa essere svolto soltanto dalle macchine in $M_i \subseteq \{1, \ldots, m\}$.

ESERCIZIO 1

Parametri

$n \in \mathbb{N}$: LAVORI

$t \in \mathbb{N}$: DURATA DI UN LAVORO

$D_i \subseteq \{1..n\}$: LAVORI DA CUI DIPENDE IL LAVORO i

$i \in \{1...n\}$

Variabili

$x_i \in \mathbb{N}$: TURNO NEL QUALE VIENE SVOLTO IL LAVORO i

$i \in \{1..n\}$

$y \in \mathbb{N}$: ULTIMO TURNO DI LAVORO

Funzione obiettivo

$$\min \ (y+1)t$$

Vincoli

$$y \geq x_i \quad , i \in \{1..n\}$$

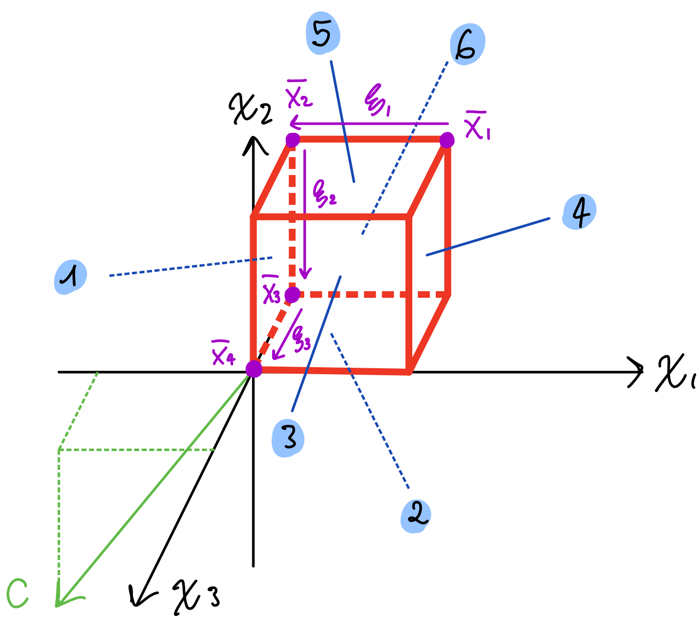
$$x_i > x_j \quad , i \in \{1..n\}, j \in D_i$$

ESERCIZIO 2

1. $x_1 \geq 0$ $\qquad\qquad \max\ x_3 - x_2 - x_1$
2. $x_2 \geq 0$
3. $x_3 \leq 0$
4. $x_1 + x_3 \leq 1$ = 3 + 5 $\rightsquigarrow$ RIDONDANTE
5. $x_1 - 1 \leq 0$
6. $x_2 - 1 \leq 0$
7. $x_3 + 1 \geq 0$

$\Downarrow$

1. $x_1 \geq 0$
2. $x_2 \geq 0$
3. $x_3 \leq 0$
4. $x_1 - 1 \leq 0$
5. $x_2 - 1 \leq 0$
6. $x_3 + 1 \geq 0$



$\Downarrow$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c = (-1 \quad -1 \quad 1)$$

$$B_1 = \{4,\ 5,\ 6\}$$

Iterazione 1 $\quad B_1 = \{4, 5, 6\}$

$$A_1 = A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \bar{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \bar{y}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}^T \quad h = 4$$

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{A}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \bar{A}_1 \xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad k = 1$$

Iterazione 2 $\quad B_2 = \{1, 5, 6\}$

$$A_2 = A_2^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \bar{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \bar{y}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}^T \quad h = 5$$

$$\xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \bar{A}_2 \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad k = 2$$

Iterazione 3 $\quad B_3 = \{1, 2, 6\}$

$$A_3 = A_3^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \bar{X}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \bar{y}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}^T \quad h = 6$$

$$\xi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \bar{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \bar{A}_3 \xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad k = 3$$

Iterazione $B = \{1, 2, 3\}$

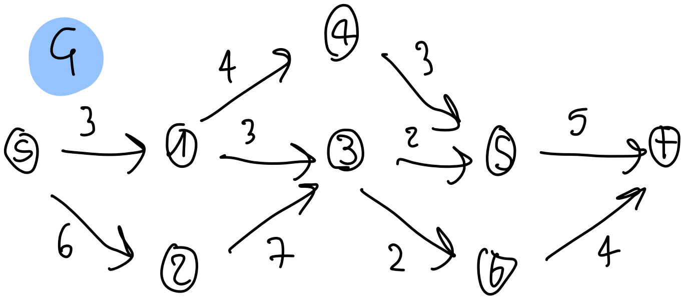
$A = A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $b_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\bar{x}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\bar{y}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}^T$

SOLUZIONE OTTIMA PRIMALE : $\bar{x}_4$

DUALE : $\bar{y}_4$

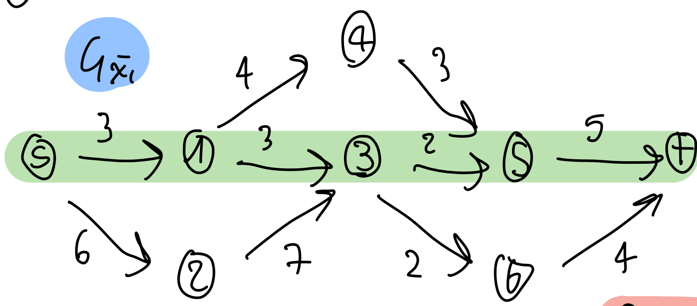
ESERCIZIO 3

G



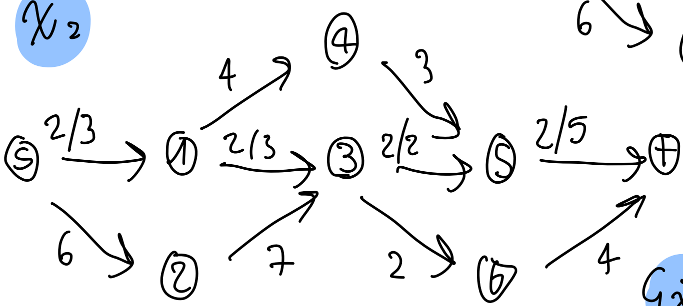
$\bar{x}_1 = \bar{0}$

$G_{\bar{x}_1}$

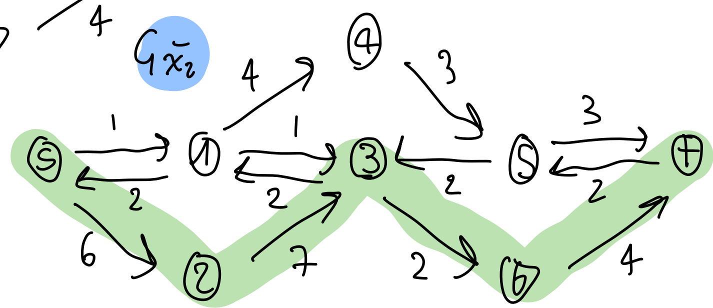


$\theta = 2$

$\bar{x}_2$

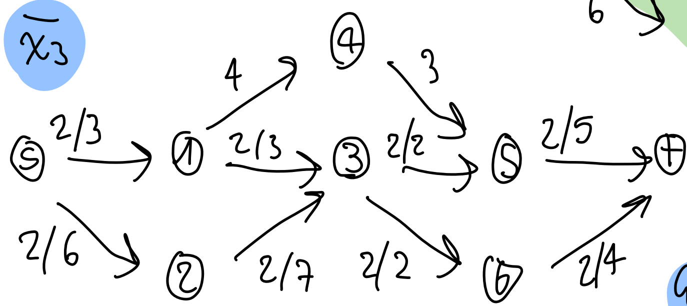


$G_{\bar{x}_2}$

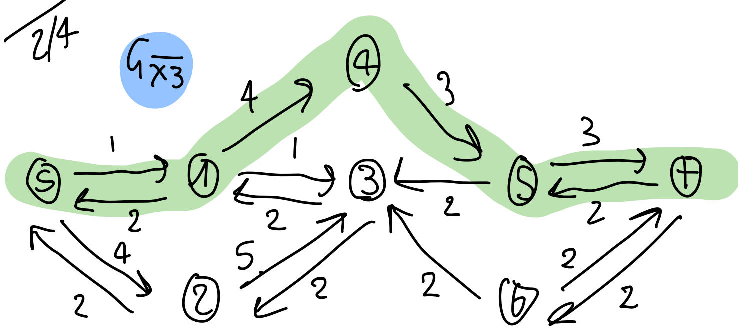


$\theta = 2$

$\bar{x}_3$

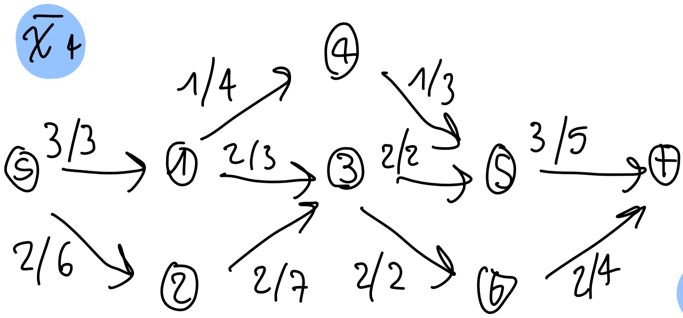


$G_{\bar{x}_3}$

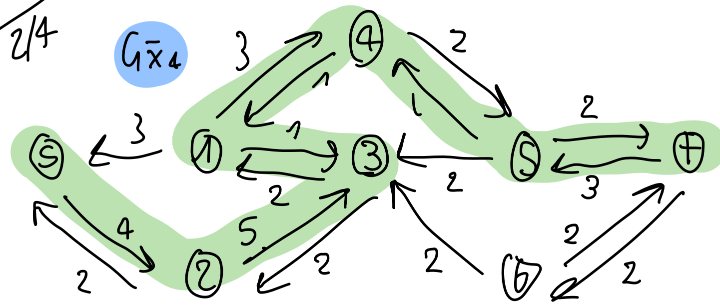


$\theta = 1$

$\bar{x}_4$

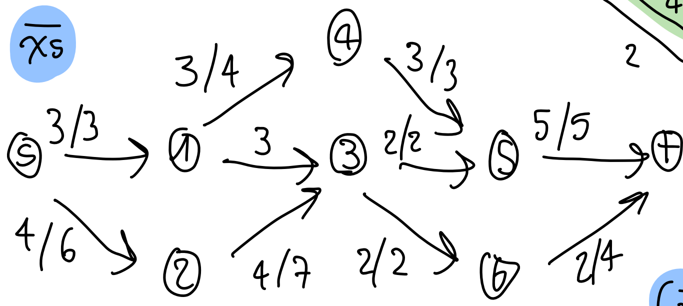


$G_{\bar{x}_4}$

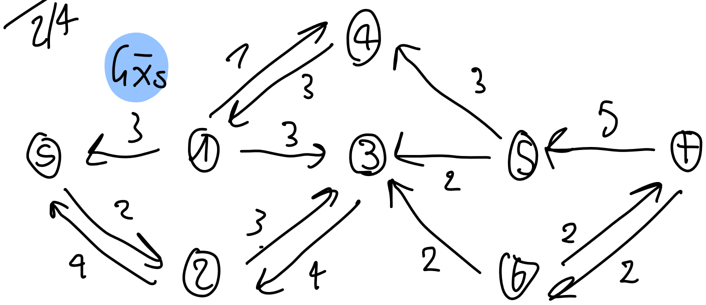


$\theta = 2$

$\bar{x}_5$



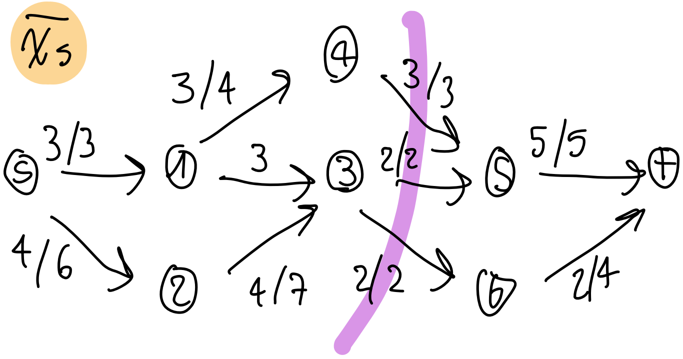
$G_{\bar{x}_5}$



NESSUN C.A.

SOLUZIONE OTTIMA + TAGLIO CAP. MINIMA

$\bar{x}_5$



VALORE OTTIMO

$3 + 2 + 2$

$= 7$

ESERCIZIO 4

NESSUNA MODIFICA RICHIESTA