第 6 章 矩阵分解

宋林亮

同济大学数学系

17029@tongji.edu.cn

矩阵分解

1. LR (LU) 分解

定理：若非奇异阵 A 满足以下二者之一

（1） A的各阶顺序主子式

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0, \ (k = 1, 2, \cdots, n)$$

（2）A的元素满足

$$\begin{cases} |a_{11}| > |a_{12}| + |a_{13}| + \cdots + |a_{1n}| \\ |a_{ii}| \geq |a_{i1}| + \cdots + |a_{i\,i-1}| + |a_{i\,i+1}| \cdots + |a_{in}| \end{cases}$$

$$(i = 2, 3, \cdots, n)$$

则 A可以三角分解：$A = LR$ 且分解是唯一的.

其中 L 为单位下三角形，R 为可逆上三角形。

设 $A=\begin{bmatrix} A_{n-1} & B \\ C & a_{nn} \end{bmatrix}$, $A_{n-1}=L_{n-1}R_{n-1}$

$$\because \begin{bmatrix} E_{n-1} & O \\ -CA_{n-1}^{-1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{n-1} & B \\ C & a_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{n-1} & B \\ O & a_{nn}-CA_{n-1}^{-1}B \end{bmatrix}$$

(记$d=a_{nn}-CA_{n-1}^{-1}B$)

$$=\begin{bmatrix} L_{n-1}R_{n-1} & B \\ O & d \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} L_{n-1} & O \\ O & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_{n-1} & L_{n-1}^{-1}B \\ O & d \end{bmatrix}$$

$$\therefore A = \begin{bmatrix} A_{n-1} & B \\ C & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} E_{n-1} & O \\ CA_{n-1}^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{n-1} & O \\ O & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{n-1} & L_{n-1}^{-1}B \\ O & d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} L_{n-1} & O \\ CA_{n-1}^{-1}L_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{n-1} & L_{n-1}^{-1}B \\ O & d \end{bmatrix}$$

例：设

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 1\\ 3 & 2 & 5\end{bmatrix},$$

求 A的三角分解 $A=LR$

解：

$$\boldsymbol{A} \xrightarrow[\boldsymbol{r}_3 - 3\boldsymbol{r}_1]{\boldsymbol{r}_2 - 2\boldsymbol{r}_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & -4 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\boldsymbol{r}_3 + 4\boldsymbol{r}_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -24 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \boldsymbol{E}_3\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -24 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}_1^{-1}\boldsymbol{E}_2^{-1}\boldsymbol{E}_3^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -24 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -24 \end{bmatrix}$$

$$= \boldsymbol{LR}$$

解:

$$(A,E)=\begin{bmatrix}1&2&3&1&0&0\\2&5&1&0&1&0\\3&2&5&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\begin{bmatrix}1&2&3&1&0&0\\0&1&-5&-2&1&0\\0&-4&-4&-3&0&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+4r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -24 & -11 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -24 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{L}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-11} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{3} & \mathbf{-4} & \mathbf{1}\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -5\\ 0 & 0 & -24\end{bmatrix}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{A}=\boldsymbol{LR}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & -4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -5\\ 0 & 0 & -24\end{bmatrix}$$

例2：设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

用三角分解 求解$Ax = b$

解：对A做三角分解：$A=LR$，则

$$LRx=b,\ 令Rx=y,\ 则\begin{cases} Rx=y \\ Ly=b \end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -24 \end{bmatrix}=LR$$

$$\therefore Ly = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ 2y_1 + y_2 \\ 3y_1 - 4y_2 + y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$Rx = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ x_2 - 5x_3 \\ -24x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} y_1 = 1 \\ 2y_1 + y_2 = 2 \\ 3y_1 - 4y_2 + y_3 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = y_1 \\ x_2 - 5x_3 = y_2 \\ -24x_3 = y_3 \end{cases}$$

$$\therefore y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

满秩分解

2. 满秩分解

设 $rank(A) = r$, 若 $A_{m\times n} = B_{m\times r}C_{r\times n}$

则称其为对A的满秩分解。

其中 B 列满秩，C 行满秩。

设 $A = P\begin{pmatrix} E_r & B \\ O & O \end{pmatrix}Q^{\mathrm{T}}$，$P = (P_1, P_2)$，其中$Q^{\mathrm{T}}$为置换

则$A = (P_1, P_2)\begin{pmatrix} E_r & B \\ O & O \end{pmatrix}Q^{\mathrm{T}}$

$$= (P_1, P_1 B)Q^{\mathrm{T}}$$

$$= P_1(E_r, B)Q^{\mathrm{T}}$$

记 $B = P_1$，$C = (E_r, B)Q^{\mathrm{T}}$，则 $A = BC$

例4. 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

求 $\boldsymbol{A}$的满秩分解

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-2} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}$$

例5. 设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -4 & -2 \\ 3 & -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

求A的满秩分解

$$
\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -4 & -2 \\ 3 & -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}
$$

$$
\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}
$$

矩阵的谱分解

3. 谱分解

$$P^{-1}AP=\Lambda,\ A=P\Lambda P^{-1}$$

$$\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

$$P=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n),\ P^{-1}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)^T$$

$$\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\cdots\boldsymbol{\alpha}_n\right)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$$

$$=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}_1^T+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\beta}_2^T+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{\alpha}_n\boldsymbol{\beta}_n^T$$

称为 $\boldsymbol{A}$的谱分解，$\{\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_n\}$ 称为 $\boldsymbol{A}$的谱。

注意到

$$P^{-1}P=\begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \beta_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm{T}}\alpha_1 & \cdots & \beta_1^{\mathrm{T}}\alpha_n\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \beta_n^{\mathrm{T}}\alpha_1 & \cdots & \beta_n^{\mathrm{T}}\alpha_n\end{pmatrix}=E$$

$$PP^{-1}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \beta_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=\alpha_1\beta_1^{\mathrm{T}}+\cdots+\alpha_n\beta_n^{T}=E$$

故有 $\beta_i^{\mathrm{T}}\alpha_j=\delta_{ij}$ $\quad \alpha_1\beta_1^{\mathrm{T}}+\cdots+\alpha_n\beta_n^{T}=E$

,

设 $A_i = \alpha_i \beta_i^{\mathrm{T}}$, $i = 1, 2, \cdots n$

则 $A = \lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_n A_n$

性质:

(1) $A_i^2 = A_i \quad i = 1, 2, \cdots n$

(2) $A_i A_j = O \quad i \neq j$

(3) $A_1 + \cdots + A_n = E$

例4、求

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -4 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

的谱分解。

解：

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda+2 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 4 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-2)^2$$

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$$

对$\lambda_1 = -1$ 解$(-E - A)x = 0$ 得$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

对$\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ 解$(2E - A)x = 0$ 得$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\therefore \boldsymbol{P}=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 4\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}4/3 & -1/3 & -1/3\\ 0 & 1 & 0\\ -1/3 & 1/3 & 1/3\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1^{\boldsymbol{T}}\\ \boldsymbol{\beta}_2^{\boldsymbol{T}}\\ \boldsymbol{\beta}_3^{\boldsymbol{T}}\end{pmatrix}$$

$$\therefore \boldsymbol{A}=-\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}_1^{\boldsymbol{T}}+2\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\beta}_2^{\boldsymbol{T}}+2\boldsymbol{\alpha}_3\boldsymbol{\beta}_3^{\boldsymbol{T}}$$

矩阵的奇异值分解

4. 奇异值分解

设$rank(A_{m\times n})=r$,则半正定阵 $A^{\mathrm{T}}A$ 的特征值 $\lambda_i\ge 0$

称 $\sigma_i=\sqrt{\lambda_i}$ 为A的奇异值。

定理：设

$$\Sigma=\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$$

其中 $D=\mathrm{diag}(\sigma_1,\sigma_2\cdots\sigma_r)$,$\sigma_1\ge\sigma_2\ge\cdots\ge\sigma_r>0$,

则存在正交阵 $U_{m\times m},V_{n\times n}$ 使得 $A=U\Sigma V^T$

$$\because \boldsymbol{V}^T(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{D}^2 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$$

其中$\boldsymbol{V}$是正交阵。令 $\boldsymbol{V} = (\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2)$

$$\therefore \begin{pmatrix} \boldsymbol{V}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{V}_2^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{D}^2 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$$

由前式可知

$$\begin{cases} \boldsymbol{V}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{D}^2 \\ \boldsymbol{V}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}_2 = \boldsymbol{O}, \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{V}_2 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{V}\boldsymbol{V}^T = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2)\begin{pmatrix} \boldsymbol{V}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{V}_2^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$$

$$= \boldsymbol{A}\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{V}_1^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{V}_2\boldsymbol{V}_2^{\mathrm{T}}$$

$$= \boldsymbol{A}\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{V}_1^{\mathrm{T}}$$

$$= \boldsymbol{A}\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{V}_1^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{U}_1\boldsymbol{D}\boldsymbol{V}_1^{\mathrm{T}}$$

其中 $\boldsymbol{U}_1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{D}^{-1}$

把 $\boldsymbol{U}_1$ 扩充成交阵 $\boldsymbol{U}=(\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{U}_2)$

即求解方程 $\boldsymbol{U}_1^T\boldsymbol{x}=0$ 的基础解系，

再规范正交化即得 $\boldsymbol{U}_2$

$$\boldsymbol{U\Sigma V}^T=(\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{U}_2)\begin{pmatrix}\boldsymbol{D} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{V}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{V}_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{D},\boldsymbol{O})\begin{pmatrix}\boldsymbol{V}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{V}_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$$

$$=\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{D}\boldsymbol{V}_1^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$$

例5、求

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

的奇异值分解。

解：

$$A^T A = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \qquad \left|\lambda E - A^T A\right| = \begin{vmatrix} \lambda - 6 & -1 \\ -1 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = (\lambda - 5)(\lambda - 7)$$

$$\lambda_1 = 7,\ \lambda_2 = 5\ \ \sigma_1 = \sqrt{7}, \sigma_2 = \sqrt{5},\ rank(A) = 2$$

$$\therefore D = \begin{bmatrix} \sqrt{7} & \\ & \sqrt{5} \end{bmatrix},\ \Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{7} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 7, 7\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 5, \ 5\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

标准正交化: $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\therefore \boldsymbol{V} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{V}^T$$

$$U_1 = AV_1D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{7} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2/\sqrt{7} & 0 \\ -1/\sqrt{7} & 3/\sqrt{5} \\ 3/\sqrt{7} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

解$U_1^T x = 0$得$\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$,单位化$\frac{1}{\sqrt{35}}\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

例6、求

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

的奇异值分解。

解：

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 5 \\ -5 & 5 & -5 \\ 5 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\left|\lambda E - A^T A\right| = \begin{vmatrix} \lambda-5 & 5 & -5 \\ 5 & \lambda-5 & 5 \\ -5 & 5 & \lambda-5 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-15), \lambda = 0, 15$$

$$\therefore \sigma_1 = \sqrt{15},\ D = \sqrt{15},\ \Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 15,\ 15\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & -5 \\ 5 & 10 & 5 \\ -5 & 5 & 10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 0,\ -\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -5 & 5 & -5 \\ 5 & -5 & 5 \\ -5 & 5 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

标准正交化：

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \boldsymbol{V} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \boldsymbol{V}^T$$

$$\boldsymbol{U}_1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{D}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

扩充$\boldsymbol{U}_1$，解$\boldsymbol{U}_1^T\boldsymbol{x} = 0$得$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，单位化$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\therefore \boldsymbol{U} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^T$$

广义特征值

n 阶阵$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$为实对称阵，且$\boldsymbol{B}$为正定阵，若

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} \qquad (\boldsymbol{x} \neq 0)$$

则称 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 相对与 $\boldsymbol{B}$ 的广义特征值，$\boldsymbol{x}$为 $\boldsymbol{A}$ 相对与 $\boldsymbol{B}$ 的广义特征向量，

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{B}| = 0$$

称为$\boldsymbol{A}$相对与$\boldsymbol{B}$ 的特征方程。

例7、设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

求$\boldsymbol{A}$相对与$\boldsymbol{B}$ 的广义特征值和特征向量。

解：

$$\left|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{B}\right|=\begin{vmatrix}2-2\lambda & 1-\lambda\\ 1-\lambda & 3-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-6\lambda+5$$

$$\therefore \lambda=1,5$$

$\lambda=1$，解$\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\right)\boldsymbol{X}=0$得$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$\lambda=5$，解$\left(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{B}\right)\boldsymbol{X}=0$得$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$