工科研究生数学
矩 阵 分 析

岳晓青

同济大学数学科学学院

xiaoqingyue@tongji.edu.cn

主要教材：

《矩阵分析》，同济大学出版社。

参考书目：

1.《线性代数》，同济大学数学系编，第六版。

2.《矩阵理论》，苏育才、姜翠波等编，科学出版社。

主要内容：

- 基础知识
- 矩阵的标准形
- 线性空间与线性变换
- 内积空间
- 矩阵分析
- 矩阵的分解
- 矩阵的广义逆

线性代数基础知识

- 矩阵的基本运算
- 线性方程组的解的结构以及求解方法
- 矩阵的特征值与特征向量
- 实对称矩阵的基本性质

§ 1.1 矩阵的基本运算

定义: 由$m\times n$个数 $a_{ij}\,(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的数表:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

称为m行n列的矩阵. 简称 $m\times n$ 矩阵. 记作

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

简记为: $A=A_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}=(a_{ij})$.

这$m\times n$个数a_{ij}称为矩阵A的(第 i 行第 j 列)元素.

1. 矩阵的加法

定义: 设两个同型的 $m \times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$ 与 $B=(b_{ij})$，那么矩阵 A 与 B 的和定义为 $(a_{ij}+b_{ij})$，记作 $A+B$，即

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

例如:
$$\begin{pmatrix} 12 & 3 & -5 \\ 1 & -9 & 0 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 12+1 & 3+8 & -5+9 \\ 1+6 & -9+5 & 0+4 \\ 3+3 & 6+2 & 8+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 13 & 11 & 4 \\ 7 & -4 & 4 \\ 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

说明: 只有当两个矩阵是同型矩阵时, 才能进行加法运算.

矩阵加法的运算规律

(1) 交换律: $A+B=B+A$.

(2) 结合律: $(A+B)+C=A+(B+C)$.

(3) $$-A=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{m1} & -a_{m1} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}=\left(-a_{ij}\right).$$

称为矩阵A的负矩阵.

(4) $A+(-A)=O,\quad A-B=A+(-B)$.

2. 数与矩阵相乘

定义: 数λ与矩阵$A=(a_{ij})$的乘积定义为(λa_{ij}), 记作λA 或$A\lambda$, 简称为**数乘**. 即

$$\lambda A = A\lambda = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

数乘矩阵的运算规律

设A, B为同型的$m\times n$ 矩阵, λ, μ为数:

(1) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$.

(2) $(\lambda+\mu)A = \lambda A+\mu A$.

(3) $\lambda(A+B) = \lambda A+\lambda B$.

矩阵的加法与数乘运算, 统称为矩阵的**线性运算**.

3. 矩阵与矩阵相乘

定义: 设$A=(a_{ij})$是一个 $m\times s$ 矩阵, $B=(b_{ij})$是一个 $s\times n$ 矩阵, 定义矩阵A与矩阵B的乘积 $C=(c_{ij})$是一个 $m\times n$ 矩阵, 其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$$

(i=1,2,$\cdots$, m; j=1,2,$\cdots$, n). 并把此乘积记作$C=AB$.

例1: $C=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}_{2\times 2}\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}_{2\times 2}=\begin{pmatrix}-16 & -32\\ 8\ \ ? & 16\end{pmatrix}_{2\times 2}$

例2: $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 1\end{pmatrix}=\left(1\times 3+2\times 2+3\times 1\right)=\left(10\right).$

矩阵乘法的运算规律

(1) 结合律: $(AB)C=A(BC)$;

(2) 分配律: $A(B+C)=AB+AC$, $(B+C)A=BA+CA$;

(3) $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$, 其中$\lambda$为数;

(4) $A_{m\times n}E_n=E_mA_{m\times n}=A$;

注意: 矩阵乘法不满足交换律, 即: $AB\neq BA$,

因此,

$$(AB)^k\neq A^kB^k,$$

例如: 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, 则

$AB=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -2 & -2\end{pmatrix}$, 故, $AB\neq BA$.

4. 矩阵的转置

定义: 把矩阵A的行列互换, 所得到的新矩阵, 叫做**矩阵A的转置矩阵**, 记作A^T.

例如: $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\4&5&8\end{pmatrix}$, $A^T=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\2&8\end{pmatrix}$;

$B=\begin{pmatrix}18\\6\end{pmatrix}$, $B^T=\begin{pmatrix}18&6\end{pmatrix}$.

转置矩阵的运算性质

(1) $(A^T)^T=A$;

(2) $(A+B)^T=A^T+B^T$;

(3) $(\lambda A)^T=\lambda A^T$;

(4) $(AB)^T=B^TA^T$;

5. 方阵的行列式

定义: 由n阶方阵A的元素所构成的行列式叫做方阵A的行列式, 记作$|A|$或$\det A$.

例如: $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$, 则 $|A|=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}=-2.$

方阵行列式的运算性质

(1) $\left|A^{\mathrm{T}}\right|=|A|$;

(2) $|\lambda A|=\lambda^{n}|A|$;

(3) $|AB|=|A||B|$

余子式与代数余子式

在 n 阶行列式D中，把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列元素划去后，留下来的 $n-1$ 阶行列式叫做(行列式D的关于)元素a_{ij}的余子式，记作 M_{ij}.

记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，称 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j} & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\,j-1} & a_{2\,j} & a_{2\,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j} & a_{i-1\,j+11} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij-1} & \boxed{a_{ij}} & a_{ij+1} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j} & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\,j-1} & a_{2\,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

方阵的伴随矩阵

定义: 行列式 $|A|$ 的各个元素的代数余子式A_{ij} 所构成的如下矩阵

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵A 的伴随矩阵.

性质: $AA^* = A^*A = |A|E.$

6. 方阵的迹

定义： n 阶方阵 A 的对角元素的和称为 A 的迹，记作 $\mathrm{tr}(A)$，即

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

方阵迹的运算性质

(1) $\mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(A + B)$;

(2) $\mathrm{tr}(kA) = k\,\mathrm{tr}(A)$;

(3) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$;

7. 共轭矩阵

定义: 当 $A=(a_{ij})$ 为复矩阵时, 用 $\overline{a_{ij}}$ 表示 a_{ij} 的共轭复数, 记 $\overline{A}=(\overline{a_{ij}})$, 称 $\overline{A}$ 为 A 的共轭矩阵.

运算性质

设 A, B 为复矩阵, λ为复数, 且运算都是可行的, 则:

(1) $\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B}$;

(2) $\overline{\lambda A}=\overline{\lambda}\,\overline{A}$;

(3) $\overline{AB}=\overline{A}\,\overline{B}$.

8. 矩阵的逆

定义：对于n阶方阵A, 如果存在一个n阶方阵B, 使得

$$AB = BA = E$$

则称矩阵A是可逆的, 并称矩阵B为A的逆矩阵.

方阵A可逆的充要条件

(1)若存在一个方阵B使$AB = E$ 或 $BA = E$;

(2) $|A| \neq 0$.

逆矩阵的性质

(1) 若矩阵A可逆, 则A^{-1}亦可逆, 且$(A^{-1})^{-1} = A$.

(2) 若矩阵A可逆, 且$\lambda \neq 0$, 则 λA亦可逆, 且

$$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}.$$

(3) 若A, B为同阶可逆方阵, 则AB亦可逆, 且

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

(4) 若矩阵A可逆, 则A^T亦可逆, 且$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$.

(5) 若矩阵A可逆, 则有$|A^{-1}|=|A|^{-1}$.

逆矩阵的计算方法

(1)伴随矩阵法: $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}A^*$, $A^* = (A_{ij})^{\mathrm{T}}$;

(2)行初等变换法: $(A|E) \underset{\sim}{\text{行变换}} (E\,|\,A^{-1})$,

(3)列初等变换法: $\begin{pmatrix} A \\ \hline E \end{pmatrix} \underset{\sim}{\text{列变换}} \begin{pmatrix} E \\ \hline A^{-1} \end{pmatrix}$,

(4)分块矩阵法.

例: 求 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的逆矩阵$(ad-bc\neq 0)$.

解: 用伴随矩阵的方法求逆矩阵.

设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $|A|=ad-bc\neq 0$. 则A可逆且

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

则

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

求二阶矩阵A的逆可用“两调一除”的方法, 其做法如下:

先将矩阵A中的主对角元素调换其位置, 再将次对角元素调换其符号, 最后用A的行列式$|A|$除矩阵A的每一个元素, 即可得A的逆矩阵A^{-1}.

例: 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解: 作分块矩阵$(A|E)$, 施行初等行变换.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{r_1 \leftrightarrow r_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{r_3+r_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{r_2+r_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{r_1-2r_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{r_2\times\frac{1}{2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{r_1 - r_2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & -3/2 & -5/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

所以 $$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & -3/2 & -5/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

注意: 用初等行变换求逆矩阵时, 必须始终用行变换, 其间不能作任何列变换. 同样地, 用初等列变换求逆矩阵时, 必须始终用列变换, 其间不能作任何行变换.

9. 分块矩阵

在矩阵理论的研究中, 矩阵的分块是一种最基本, 最重要的计算技巧与方法.

分块矩阵之间与一般矩阵之间的运算性质类似:

(1) 加法: 同型矩阵, 采用相同的分块法.

(2) 数乘: 数k乘矩阵A, 需k乘A的每个子块.

矩阵A, B相乘, A的列的分块与B的行分块相一致.

(4) 转置

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix} \quad A^T=\begin{pmatrix} A_{11}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1r}^T & \cdots & A_{sr}^T \end{pmatrix}$$

(5) 分块对角阵的行列式与逆阵

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s \end{pmatrix},$$

1. $|A|=|A_1||A_2|\cdots|A_s|$.

2. A可逆$\Leftrightarrow A_i$可逆(i=1,2,$\cdots$,s), 且

$$A^{-1}=\text{diag}(A_1^{-1}, A_2^{-1}, \cdots, A_s^{-1}).$$

例: 设A, B都是n阶可逆方阵, 证明$D=\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}$必为可逆方阵, 并求$D^{-1}$.

证: 由于A, B都是n阶可逆方阵, 即$|A|\neq 0, |B|\neq 0$, 则$|D|=|A||B|\neq 0$, 所以D为可逆方阵.

设$D^{-1}=\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$, 其中$X_{ij}$均为$n$阶方阵$(i, j=1,2)$.

$$D\cdot D^{-1}=\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} AX_{11} & AX_{12} \\ CX_{11}+BX_{21} & CX_{12}+BX_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix}.$$

其中E为n阶单位矩阵.

由矩阵相等的定义有: $\begin{cases} AX_{11} = E \\ AX_{12} = O \\ CX_{11} + BX_{21} = O \\ CX_{12} + BX_{22} = E \end{cases}$

从而得, $X_{11}=A^{-1}, X_{12}=O, X_{21}=-B^{-1}CA^{-1}, X_{22}=B^{-1}$.

故 $$D^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}.$$

同理可得: 设A, B都是n 阶可逆矩阵,

(1) 若 $D = \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$, 则 $D^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$;

(2) 若 $D = \begin{pmatrix} C & A \\ B & O \end{pmatrix}$, 则 $D^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \end{pmatrix}$.

例: 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&2&0&0\\3&7&2&3\\2&5&1&2\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解: **方法一：** 作分块矩阵$(A|E)$, 施行初等行变换.

方法二： 用分块矩阵的方法.

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1&0&0\\-1&1&0&0\\-1&1&2&-3\\1&-2&-1&2\end{pmatrix}$$

§1.2 线性方程组

初等变换与初等矩阵

定义:下面三类变换称为矩阵的初等行变换:

(1) 对调 i, j 两行, $r_i \leftrightarrow r_j$

(2) 以数 $k \neq 0$ 乘以第 i 行的所有元素, $r_i \times k$

(3) 把第 j 行所有元素的 k 倍加到第 i 行对应的元素上去. $r_i + kr_j$

同样可定义矩阵的初等列变换 (把"r"换成 c").

初等行变换和初等列变换统称初等变换。

三种初等变换都是可逆的，且其逆变换是同一类型的初等变换.

	初等变换	逆变换
换法变换	$r_i \leftrightarrow r_j (c_i \leftrightarrow c_j)$	$r_i \leftrightarrow r_j (c_i \leftrightarrow c_j)$
倍法变换	$r_i \times k (c_i \times k)$	$r_i \times \frac{1}{k} (c_i \times \frac{1}{k})$
消法变换	$r_i + k r_j (c_i + k c_j)$	$r_i + (-k) r_j (c_i + (-k) c_j)$

定义: 由单位矩阵E经过一次初等变换得到的方阵称为初等矩阵.

三种初等变换对应着三种初等方阵.

- 对调E中第i, j两行(或列), 得初等矩阵$E(i, j)$.
- 以数$k\neq 0$乘单位矩阵的第i 行(或列)得初等矩阵$E(i(k))$.
- 以k乘E的第j 行加到第i 行上, 或以k乘E的第i 列加到第j 列上得初等矩阵$E(ij(k))$.

初等变换和初等矩阵的关系满足:

设A是一个$m\times n$矩阵, 对A施行一次初等行(列)变换, 相当于A左(右)乘相应的$m(n)$阶初等矩阵.

如果矩阵A可经过有限次初等变换变为矩阵B, 则称矩阵A与矩阵B等价. 记作 $A \cong B$.

矩阵的等价关系满足:

(i) 反身性 $A \cong A$；

(ii) 对称性 若$A \cong B$， 则$B \cong A$；

(iii) 传递性 若$A \cong B$， $B \cong C$， 则$A \cong C$ 。

行阶梯形矩阵

经过初等行变换, 可把矩阵化为行阶梯形矩阵, 其特点是: 可画出一条阶梯线, 线的下方全为0; 每个台阶只有一行, 台阶数即是非零行的行数, 阶梯线的竖线(每段竖线的长度为一行)后面的第一个元素为非零元, 也就是非零行的第一个非零元.(不唯一)

行最简形矩阵

经过初等行变换, 行阶梯形矩阵还可以进一步化为行最简形矩阵, 其特点是: 非零行的非零首元为1, 且这些非零元所在列的其它元素都为0. (唯一)

矩阵的标准形

对行最简形矩阵再进行初等列变换, 可得到矩阵的标准形, 其特点是: 左上角是一个单位矩阵, 其余元素都为**0**.

任一个矩阵$A_{m\times n}$总可经过初等变换化为标准形

$$F=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$$

标准形由m, n, r三个数唯一确定, 其中r 就是行阶梯形矩阵中非零行的行数.

矩阵的秩

若在矩阵A中有一个r阶子式D非零, 且所有的$r+1$阶子式(如果存在的话)都为零, 则称D为矩阵A的一个最高阶非零子式, 称数r为矩阵A的秩, 记作$rank(A)$.

矩阵秩的定理及性质

如果A中有一个r阶子式非零, 则 $rank(A)\geq r$.

如果A的所有的$r+1$阶子式都为零, 则 $rank(A)\leq r$.

定理: 若$A \cong B$, 则 $rank(A) = rank(B)$.

行阶梯形矩阵的秩等于非零行的行数.

若A为n阶可逆矩阵, 则

(1) A的最高阶非零子式为$|A|$;　(2) $rank(A)=n$;

(3) A的标准形为单位矩阵E;　(4) $A \cong E$.

性质1: $0 \le rank(A_{m\times n}) \le \min\{m, n\}$;

性质2: $rank(A^T) = rank(A)$;

性质3: 若$A \cong B$, 则$rank(A) = rank(B)$;

性质4: 若P, Q可逆, 则$rank(PAQ) = rank(A)$;

性质5: $\max\{rank(A), rank(B)\} \le rank(A \vdots B) \le rank(A) + rank(B)$, 特别当$B = b$时, $rank(A) \le rank(A \vdots b) \le rank(A) + 1$;

性质6: $rank(A + B) \le rank(A) + rank(B)$;

性质7: $rank(AB) \le \min\{rank(A), rank(B)\}$;

性质8: 若$A_{m\times n}B_{n\times l} = O$, 则$rank(A)+rank(B) \le n$.

例. 证明：$rank(A_{m\times n})=1$的充要条件是

存在非零向量 a 和 b，使得 $A=ab^T$

证明："$\Rightarrow$" $\because rank(A_{m\times n})=1$

$$\therefore A=P\begin{pmatrix}1 & O\\ O & O\end{pmatrix}Q$$

$$=(a,P_0)\begin{pmatrix}1 & O\\ O & O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b^T\\ Q_0\end{pmatrix}=ab^T$$

"$\Leftarrow$" $\because A_{m\times n}=ab^T \therefore A\neq O, rank(A)\leq rank(a)$

线性方程组有解判别定理及解法

定理1: n元线性方程组$A_{m\times n}x=b$

(1) 无解的充分必要条件是$rank(A)<rank(B)$;

(2) 有唯一解的充分必要条件是$rank(A)=rank(B)=n$;

(3) 有无穷多解的充分必要条件是$rank(A)=rank(B)<n$.

齐次线性方程组的解法: 系数矩阵化成行最简形矩阵, 便可写出其通解.

非齐次线性方程组的解法: 增广矩阵化成行阶梯形矩阵, 便可判断其是否有解. 若有解, 化成行最简形矩阵, 便可写出其通解.

向量组的线性相关性

定义: 给定向量组A: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$, 如果存在不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$, 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = O$$

则称向量组A是**线性相关**的, 否则称它是**线性无关**.

向量组的秩

定义: 设有向量组A, 如果在A中能选出r 个向量A_0: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$, 满足

(1)向量组A_0: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$, 线性无关;

(2)向量组A中任意r+1个向量(如果存在的话)都线性相关. 那末称向量组A_0是向量组A的一个**最大线性无关向量组**(简称**最大无关组**).

最大无关组所含向量个数r 称为**向量组的秩**.

判别定理： 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性相关的充分必要条件是它所构成的矩阵$A=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$的秩小于向量个数$m$; 向量组线性无关的充分必要条件是$rank(A)=m$.

性质:

(1) 若向量组$A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性相关, 则向量组$B: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$也线性相关; 反言之, 若向量组$B$线性无关, 则向量组$A$也线性无关.

(2) m个n维向量组成的向量组当维数n小于向量个数m时一定线性相关

(3) 设向量组$A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性无关, 而向量组$B: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta$线性相关, 则向量$\beta$必能由向量组$A$线性表示, 且表示式是唯一的.

基础解系及方程组解的求法

定义: 如果向量组$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$为齐次线性方程组$Ax=0$的解空间的一组基, 则向量组$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$称为齐次线性方程组$Ax=0$的基础解系.

用基的定义, 基础解系的定义可叙述为:

称向量组$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$为齐次线性方程组$Ax=0$的基础解系, 如果

(1) $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$是$Ax=0$的一组线性无关的解;

(2) $Ax=0$的任一解都可由$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$线性表出.

如果向量组$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$为齐次线性方程组$Ax=0$的一组基础解系, 那么, $Ax=0$的通解可表示为:

$$x = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_t\eta_t$$

其中$k_1, k_2, \cdots, k_t$为任意常数.

定理: n元齐次线性方程组 $A_{m\times n}x=0$ 的全体解所构成的集合S是一个向量空间, 当系数矩阵的秩$rank(A)=r$时, 解空间S的维数为 $n-r$.

当$rank(A)=n$时, 方程组$Ax=0$只有零解, 故没有基础解系(此时解空间只含一个零向量, 为0维向量空间).

当$rank(A)=r<n$时, 方程组$Ax=0$必有含$n-r$个向量的基础解系$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$. 此时的任意解可表示为:

$$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$$

其中$k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$为任意常数.

解空间S可表示为:

$$S=\{\, x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r} \mid k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}\in R \,\}.$$

例: 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 6x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}.$$

解: 对系数矩阵A施行初等行变换:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & -5 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

令$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.代入$\begin{cases} x_1 = -2x_3 - 4x_4 + 2x_5 \\ x_2 = \quad x_3 - 3x_4 + x_5 \end{cases}$,

依此得, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

所以原方程组的一个基础解系为:

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

故原方程组的通解为:

$x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3$, 其中$k_1, k_2, k_3 \in R$.

例: 求解方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = -2 \\ 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23 \\ 8x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 - x_5 = 12 \end{cases}.$$

解: 对增广矩阵B施行初等行变换:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 6 & 23 \\ 8 & 3 & 4 & 3 & -1 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可见$rank(A)=rank(B)=2$, 故方程组有无穷多解, 并且

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 0 & -2 & -9/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1 & 3 & 23/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故, 原方程组等价于方程组

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{2}x_3 + \qquad\quad 2x_5 - \dfrac{9}{2} \\ x_2 = -\dfrac{1}{2}x_3 - x_4 - 3x_5 + \dfrac{23}{2} \end{cases}.$$

求基础解系　令

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

代入上述方程组, 依次得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

故得基础解系:

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

求特解

取 $x_3 = x_4 = x_5 = 0$, 则 $x_1 = -\dfrac{9}{2}$, $x_2 = \dfrac{23}{2}$,

即得方程组的一个解；所以方程组的通解为:

$$x = k_1 \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9/2 \\ 23/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

其中$k_1, k_2, k_3 \in R$.

§ 1.3 相似矩阵

方阵的特征值与特征向量

定义: 设A是n阶方阵, 如果数λ和n维非零列向量x使关系式

$$Ax = \lambda x$$

成立, 那么这样的数λ称为方阵A的**特征值**, 非零向量x称为A的对应于特征值λ的**特征向量**.

说明1: 特征向量$x \neq 0$, 特征值问题是对方阵而言的;

说明2: n阶方阵A的特征值, 就是使齐次线性方程组$(A-\lambda E)x = 0$有非零解的值λ, 即满足方程$|A-\lambda E| = 0$的λ都是矩阵A的特征值.

称以λ为未知数的一元n次方程$|A-\lambda E| = 0$为方阵A的**特征方程**. 记$f(\lambda) = |A-\lambda E|$, 它是$\lambda$的$n$次多项式, 称其为方阵$A$的**特征多项式**.

例: 求矩阵$A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -4 & 1 & 3\end{pmatrix}$的特征值和特征向量.

解: 矩阵A的特征多项式为:

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-2-\lambda & 1 & 1\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ -4 & 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=-(1+\lambda)(2-\lambda)^2,$$

所以A的特征值为: $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=\lambda_3=2$.

当$\lambda_1=-1$时, 解方程组$(A+E)x=0$.由

$$A+E=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ -4 & 1 & 4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

得基础解系 $p_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

故对应特征值$\lambda_1=-1$的所有特征向量为$kp_1(k\neq 0)$.

当$\lambda_2=\lambda_3=2$时, 解方程组$(A-2E)x=0$. 由

$$A-2E=\begin{pmatrix}-4 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -4 & 1 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-4 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

得基础解系

$$p_2=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix},\quad p_3=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 4\end{pmatrix},$$

故对应特征值$\lambda_2=\lambda_3=2$的所有特征向量为

$$k_2p_2+k_3p_3\ (k_2, k_3\text{不同时为零}).$$

设n阶方阵$A=(a_{ij})$的特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则有:

(1) $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$;

(2) $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$.

有关特征值, 特征向量的一些结论

若λ是矩阵A的特征值, 则

(1) λ是矩阵A^T的特征值,

(2) λ^m是矩阵A^m的特征值(m为正整数);

(3) 当A可逆时, 则λ^{-1}是逆阵A^{-1}的特征值.

还可以类推: 若λ是矩阵A的特征值, 则$\varphi(\lambda)$是矩阵多项式$\varphi(A)$的特征值, 其中

$$\varphi(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\cdots+a_m\lambda^m, \quad \varphi(A)=a_0E+a_1A+\cdots+a_mA^m.$$

(4)设$p_1, p_2, \cdots, p_m$是方阵A的分别对应于m个互不相等的特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$的$m$个特征向量, 则$p_1, p_2, \cdots, p_m$线性无关.

注意1: 属于不同特征值的特征向量是线性无关的;

注意2: 属于同一特征值的特征向量的非零线性组合仍是属于这个特征值的特征向量;

注意3: 矩阵的特征向量总是相对于矩阵的特征值而言的, 一个特征值具有的特征向量不唯一, 但一个特征向量不能属于两个不同的特征值.

相似矩阵

定义: 设A, B都是n阶矩阵, 若有可逆矩阵P, 使

$$P^{-1}AP = B,$$

则称B是A的相似矩阵, 或说矩阵A与B相似, 对A进行运算$P^{-1}AP$, 称为对A进行相似变换, 可逆矩阵P称为把A变成B的相似变换矩阵.

定理: 若n阶矩阵A与B相似, 则A与B的特征多项式相同, 从而A与B的特征值亦相同.

推论: 若n阶方阵A与对角阵$\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2,\cdots, \lambda_n)$相似, 则$\lambda_1, \lambda_2,\cdots, \lambda_n$既是$A$的$n$个特征值.

相似矩阵的性质:

1. 相似矩阵是等价的:

(1) 自反性; (2) 对称性; (3) 传递性.

2. $P^{-1}(k_1A_1+k_2A_2)P=k_1P^{-1}A_1P+k_2P^{-1}A_2P$.

其中k_1, k_2是任意常数

3. $P^{-1}(A_1A_2)P=(P^{-1}A_1P)(P^{-1}A_2P)$.

4. 若A与B相似, 则A^m与B^m相似(m为正整数).

$$\varphi(A)=a_0PP^{-1}+a_1PBP^{-1}+\cdots+a_mPB^mP^{-1}$$
$$=P(a_0E+a_1B+\cdots+a_mB^m)P^{-1}=P\varphi(B)P^{-1}.$$

即相似矩阵的多项式, 有相同相似变换矩阵.

特别当矩阵A与对角阵$\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2,\cdots, \lambda_n)$相似时, 则

$$A^m=P\Lambda^mP^{-1};\quad \varphi(A)=P\varphi(\Lambda)P^{-1}.$$

而对于对角阵Λ, 有

$$\Lambda^k=\begin{pmatrix}\lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k\end{pmatrix};\quad \varphi(\Lambda)=\begin{pmatrix}\varphi(\lambda_1) & & & \\ & \varphi(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi(\lambda_n)\end{pmatrix}.$$

结论: 若$f(\lambda)$为矩阵A的特征多项式, 则矩阵A的多项式$f(A)=O$.

定理: n阶矩阵A与对角矩阵Λ相似(即A能对角化)的充分必要条件是A有n个线性无关的特征向量.

实对称矩阵的性质

定理: 对称矩阵的特征值为实数.

定理: 设λ_1, λ_2是对称矩阵A的两个特征值, p_1, p_2是对应的特征向量, 若$\lambda_1\neq\lambda_2$, 则p_1与p_2正交.

定理: 设A为n阶对称矩阵, λ是A的特征方程的r 重根, 则矩阵$(A-\lambda E)$的秩$rank(A-\lambda E)=n-r$, 从而对应特征值λ恰有r 个线性无关的特征向量.

定理: 设A为n阶对称矩阵, 则必有正交矩阵P, 使$P^{-1}AP=\Lambda$, 其中Λ是以A的n个特征值为对角元素的对角矩阵.

二次型与正定阵

定义: 含有n个变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$的二次齐次函数

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2$$
$$+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

称为二次型.

只含有平方项的二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ny_n^2$$

称为二次型的标准形(或法式).

若记 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,

则二次型可记作 $f=x^TAx$, 其中A为对称矩阵(矩阵表示).

对称矩阵A叫做二次型 f 的矩阵, f 叫做对称矩阵A的二次型, 对称矩阵A的秩叫做二次型 f 的秩.

定义: 设有实二次型 $f(x)=x^TAx$,显然 $f(0)=0$.

如果对任意的 $x\neq 0$, 都有 $f(x)>0$, 则称 f 为正定二次型, 并称对称矩阵A为正定矩阵;

如果对任意的 $x\neq 0$, 都有 $f(x)<0$, 则称 f 为负定二次型, 并称对称矩阵A为负定矩阵.

定理: (1)对称矩阵A为正定的充分必要条件是A的特征值全为正;

(2)对称矩阵A为正定的充分必要条件是A的各阶(顺序)主子式为正, 即

$$a_{11} > 0,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0,\quad \cdots,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0;$$

(3)对称矩阵A为正定的充分必要条件是存在可逆阵P，使得$A= P^TP$;

(4)对称矩阵A为正定的充分必要条件是存在正定阵Q，使得$A=Q^2$.

定理: 任给二次型 $f=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j \quad (a_{ij}=a_{ji})$,

总有正交变换 $y=Px$, 使 f 化为标准形:

$$f=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2,$$

其中$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$,是 f 的矩阵$A=(a_{ij})$的特征值.

用正交变换化二次型为标准形的具体步骤:

1. 将二次型表示成矩阵形式 $f=x^TAx$, 求出A;
2. 求出A的所有特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$;
3. 求出对应特征值λ_i的正交单位化的特征向量组,

从而有正交规范向量组 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$;