第四章 内积空间

岳晓青

同济大学数学系

xiaoqingyue@tongji.edu.cn

§4.1 实内积空间

定义： 设V是一个实线性空间，R为实数域，若$\forall\alpha,\beta\in V$，存在唯一的$r\in R$与之对应，记作$(\alpha,\beta)=r$，并且满足

(1) $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$ 对称性

(2) $(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$ 线性性

(3) $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$

(4) $(\alpha,\alpha)\geqslant 0$, $(\alpha,\alpha)=0\Leftrightarrow\alpha=0$ 非负性

则称(α,β)为α与β的内积，V为实内积空间.

实内积空间也称欧几里得(Euclid)空间.

注：(5) $(\alpha, k\beta) = k(\alpha, \beta)$， $\forall \alpha, \beta \in V$， $\forall k \in R$

$(O, \alpha) = (\alpha, O) = O$

(6) $(\alpha, \beta+\gamma) = (\alpha, \beta) + (\alpha, \gamma)$， $\forall \alpha, \beta, \gamma \in V$

证明：(5) $(\alpha, k\beta) = (k\beta, \alpha) = k(\beta, \alpha) = k(\alpha, \beta)$

(6) $(\alpha, \beta+\gamma) = (\beta+\gamma, \alpha) = (\beta, \alpha) + (\gamma, \alpha)$

$= (\alpha, \beta) + (\alpha, \gamma)$

例：在线性空间R^n 中定义：$\forall \alpha, \beta \in R^n$, $\left(\alpha, \beta\right) = \beta^T A\alpha$,

这里A是取定的n阶实正定阵.

$$\left(\beta, \alpha\right) = \alpha^T A\beta, \quad \alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$$

$$(\alpha,\beta)=(b_1,\cdots,b_n)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n} b_i a_{i1},\cdots,\sum_{i=1}^{n} b_i a_{in}\right)\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \sum_{i,j=1}^{n} b_i a_j a_{ij}$$

$$(\beta,\alpha)=(a_1,\cdots,a_n)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$=\left(\sum_{j=1}^{n} a_j a_{j1},\cdots,\sum_{j=1}^{n} a_j a_{jn}\right)\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \sum_{i,j=1}^{n} a_j b_i a_{ji} = \sum_{i,j=1}^{n} b_i a_j a_{ij}$$

$\therefore$ **(1)** $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$

(2) $(\alpha,\beta)=\sum_{i,j=1}^{n} b_i a_j a_{ij}$

$$(k\alpha,\beta)=\sum_{i,j=1}^{n} b_i\left(ka_j\right)a_{ij} = k\sum_{i,j=1}^{n} b_i a_j a_{ij} = k(\alpha,\beta)$$

(3) 令 $\gamma=(c_1,c_2,\cdots,c_n)^T$

$$(\alpha+\beta,\gamma)=\sum_{i,j=1}^{n} c_i\left(a_j+b_j\right)a_{ij}=\sum_{i,j=1}^{n} c_i a_j a_{ij}+\sum_{i,j=1}^{n} c_i b_j a_{ij}$$

$$=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$$

(4) $(\alpha,\alpha)=\alpha^T A\alpha\geq 0$（$\because A$为正定阵）

如$\alpha\neq 0$，则 $\alpha^T A\alpha>0$.

$\Rightarrow$ $(\alpha,\beta)=\beta^T A\alpha$ 为R^n的内积.

特别如果取$A=E$有 $(\alpha,\beta)=\beta^T\alpha=\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ 这一内积，称为R^n的标准内积. R^n成为一个欧氏空间，仍用R^n表示.

不同的正定矩阵可能得到不同的内积，R^n中有许多内积形式，以后将证R^n的内积都是$(\alpha,\beta)=\beta^T A\alpha$,(其中$A$为正定阵)这种形式.

例：闭区间$[a, b]$上实连续函数的全体$C[a,b]$, 关于函数的加法和数乘构成实数域 R 上的线性空间，定义

$$\forall f,g\in C[a,b],\ (f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx$$

易证满足内积定义的四条，从而$C[a,b]$在此内积下成为内积空间.（请大家自己验证）

定义：设V是内积空间，非负实数 $\sqrt{(\alpha,\alpha)}$ 称为向量α的长度，记为 $\|\alpha\|$.

定理： 设 V 是实内积空间，则 $\forall \alpha, \beta \in V$ 和 $k \in R$ 有下列不等式成立：

正定性 —— (1) $\|\alpha\| \geq 0$ 且 $\|\alpha\| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$;

齐次性 —— (2) $\|k\alpha\| = |k| \, \|\alpha\|$;

(3) $|(\alpha, \beta)| \leq \|\alpha\| \|\beta\|$, —— **Cauchy-Schwarz** 不等式

$|(\alpha, \beta)| = \|\alpha\| \|\beta\| \Leftrightarrow \alpha, \beta$ 线性相关.

(4) $\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$ —— 三角不等式

证明： (1) $(\alpha, \alpha) \geq 0, \ (\alpha, \alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$;

(2) $\|k\alpha\| = \sqrt{(k\alpha, k\alpha)} = |k| \sqrt{(\alpha, \alpha)} = |k| \, \|\alpha\|$

(3) 如$\beta=0$ 等式显然成立. 不妨设$\beta\neq 0$， $\forall t\in R$

$$0\le(\alpha+t\beta,\alpha+t\beta)=(\alpha,\alpha)+2t(\alpha,\beta)+t^2(\beta,\beta)$$

为实变量t的一元二次不等式

$$\Delta=4(\alpha,\beta)^2-4(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)\le 0$$

$$(\alpha,\beta)^2\le(\alpha,\alpha)(\beta,\beta),\quad \therefore\quad |(\alpha,\ \beta)|\le\|\alpha\|\|\beta\|.$$

若等号成立, 即 $\Delta=0$. 则方程

$$(\alpha+t\beta,\alpha+t\beta)=t^2(\beta,\beta)+2t(\alpha,\beta)+(\alpha,\alpha)=0$$

有两个相等的根，不妨设为t_1, 则 $(\alpha+t_1\beta,\alpha+t_1\beta)=0.$

由内积定义 $\alpha+t_1\beta=0,\alpha=-t_1\beta$, α与β线性相关.

反之，若 $\alpha=k\beta$, $|(\alpha,\ \beta)|=|k|\|\beta\|^2$,

$$\|\alpha\|\|\beta\|=|k|\|\beta\|^2.\ \therefore\ |(\alpha,\ \beta)|=\|\alpha\|\|\beta\|.$$

(4) $\|\alpha+\beta\|^2=(\alpha+\beta,\ \alpha+\beta)$

$$=(\alpha,\ \alpha)+2(\alpha,\ \beta)+(\beta,\ \beta)$$

$$=\|\alpha\|^2+2(\alpha,\ \beta)+\|\beta\|^2$$

由(3)可得: $\leq\ \|\alpha\|^2+2\|\alpha\|\|\beta\|+\|\beta\|^2$

$$=(\|\alpha\|+\|\beta\|)^2$$

$$\therefore\ \|\alpha+\beta\|\leq\|\alpha\|+\|\beta\|.$$

推论: 设 V 是内积空间，则 $\forall\alpha,\beta\in V$ 有

$$\|\alpha\|-\|\beta\|\leq\|\alpha-\beta\|.$$

证明: $\|\alpha-\beta\|+\|\beta\|\geq\|(\alpha-\beta)+\beta\|=\|\alpha\|.$

$$\therefore\ \|\alpha\|-\|\beta\|\leq\|\alpha-\beta\|.$$

注： 1. 长度等于1的向量称为单位向量.

2. 若向量 $\alpha \neq O$, 则 $\dfrac{\alpha}{\|\alpha\|}$ 的长度＝?

$$\left(\frac{\alpha}{\|\alpha\|}, \frac{\alpha}{\|\alpha\|}\right) = \frac{1}{\|\alpha\|^2}(\alpha, \alpha) = 1$$

$\therefore$ $\dfrac{\alpha}{\|\alpha\|}$ 为单位向量，通常称为把向量 $\alpha \neq O$ 单位化.

例： 1. 欧氏空间R^n的标准内积： $(\alpha, \beta) = \beta^T\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$.

利用Cauchy-Schwarz不等式可以得到：

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

2. 内积空间$C[a,b]$的内积：$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx.$

利用Cauchy-Schwaz不等式可以得到：

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}.$$

注：利用Cauchy-Schwarz不等式 $|(\alpha,\ \beta)| \le \|\alpha\|\|\beta\|$

可以得到：$-\|\alpha\|\|\beta\| \le (\alpha,\ \beta) \le \|\alpha\|\|\beta\|.$

从而有：

$$-1 \le \frac{|(\alpha,\ \beta)|}{\|\alpha\|\|\beta\|} \le 1\ .$$

对比 R^n 中的结论，可用 $\cos\langle\alpha,\beta\rangle = \dfrac{|(\alpha,\beta)|}{\|\alpha\|\|\beta\|}$

定义α与β在内积空间中的夹角 $\langle\alpha,\beta\rangle$.

定义： 设V是实内积空间，α，$\beta \in V$，

若$(\alpha, \beta) = 0$，则称α与β**正交**，记作$\alpha \perp \beta$.

由$\|\alpha + \beta\|^2 = (\alpha + \beta, \alpha + \beta)$

$$= \|\alpha\|^2 + 2(\alpha, \beta) + \|\beta\|^2$$ 知

α与β正交 $\Leftrightarrow \|\alpha + \beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2$.

这就是实内积空间中的**勾股定理**.

注： 上述勾股定理可推广到有限个向量的情形.

若向量$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$两两正交，即

$$(\alpha_i, \alpha_j) = 0, \ i = 1, 2, \cdots, m, \ j = 1, 2, \cdots, m.$$

则有：$\|\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m\|^2$

$$= \|\alpha_1\|^2 + \|\alpha_2\|^2 + \cdots + \|\alpha_m\|^2.$$

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$n$维实内积空间$V$的一个基，

向量α与β在该基下的坐标为 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$,
$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$，**即**

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n,$$
$$\beta = y_1\alpha_1 + y_2\alpha_2 + \cdots + y_n\alpha_n.$$

$$(\alpha,\beta)=(x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n,\ y_1\alpha_1+y_2\alpha_2+\cdots+y_n\alpha_n)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_i y_j(\alpha_i,\ \alpha_j)$$
$$=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_n)\\ (\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_2,\alpha_n)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ (\alpha_n,\alpha_1) & (\alpha_n,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_n,\alpha_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$
$$=x^T Ay \quad = y^T Ax.$$

矩阵A 称为V 对于基$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$的度量矩阵.

$$A=\begin{pmatrix} (\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_n) \\ (\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_2,\alpha_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\alpha_n,\alpha_1) & (\alpha_n,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_n,\alpha_n) \end{pmatrix}$$

$\because (\alpha_i, \alpha_j)=(\alpha_j, \alpha_i) \therefore A^T=A$ 即 A 为实对称矩阵.

$\because \ x^T Ax=(\alpha,\alpha)\geq 0$ 即 A 为实正定矩阵.

$\therefore$度量阵为实正定矩阵.

例：由前面例题：给一个正定阵A就可确定R^n的一个内积，再由上面的讨论知由内积可以确定一个正定阵.

$\therefore R^n$中的内积与n阶正定阵是一一对应的.

问：V 对于不同的基的度量矩阵之间有何关系？

定理：设n维实内积空间V的两个基是：

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n;\quad \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n,$$

它们的度量矩阵分别为A与B，则A与B是合同的，

即存在可逆矩阵P，使得 $P^T AP = B.$

其中可逆矩阵P是由前组基到后组基的过渡矩阵.

证明：设由基$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$到基$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$的过渡矩阵是$P$，即 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P.\ \forall\alpha,\beta\in V,$

$$\alpha = x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \cdots + x_n\beta_n = (\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)x;$$

$$\beta = y_1\beta_1 + y_2\beta_2 + \cdots + y_n\beta_n = (\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)y,$$

则有 $(\alpha,\ \beta) = y^T Bx.$

又 $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)Px;\quad \beta = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)Py,$

则有 $(\alpha,\ \beta) = (Py)^T A(Px) = y^T(P^T AP)x.$

§ 4.2 标准正交基

定义： 实内积空间V中，一组非零向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，若它们两两正交，则称其为一个**正交向量组**.

定理： 正交向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 必是线性无关的.

证明： 设若$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots k_s\alpha_s=O.$

$$\left(\sum_{i=1}^{s}k_i\alpha_i,\ \alpha_j\right)=\sum_{i=1}^{s}k_i\left(\alpha_i,\ \alpha_j\right)$$

$\because\left(\alpha_i,\alpha_j\right)=0\quad(i\neq j)\therefore$ 上式 $\Rightarrow k_j\left(\alpha_j,\ \alpha_j\right)=0.$

$\because\alpha_j\neq 0\qquad\qquad\therefore k_j=0,\ j=1,2,\cdots,s.$

注： 1. 在n维实内积空间中，一组两两正交的非零向量中所含向量不能超过n个.

注：(2) 任意 n 个两两正交的非零向量必构成V 的一个基，称为正交基.

定义：如果正交基中每个向量的长度都是 1，则称它为标准正交基. ($e_1, e_2, \cdots, e_n$为R^n的一个标准正交基).

性质：1. 标准正交基的度量矩阵是E.

2. 若向量 $\alpha = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i$, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为n 维实内积空间的一个标准正交基. 则有

$$(\alpha, \alpha_i) = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \alpha_j, \alpha_i \right) = \sum_{j=1}^{n} x_j (\alpha_j, \alpha_i) = x_i$$

$$i = 1, 2, \cdots, n$$

即α在标准正交基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的第i 个坐标分量 x_i就是α在第i个基向量α_i方向的正投影.

性质： 3. $\forall \alpha,\beta \in V,\ \alpha=\sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_i,\ \beta=\sum_{j=1}^{n} y_j\alpha_j,$

$$(\alpha,\beta)=\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_i,\ \sum_{j=1}^{n} y_j\alpha_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j(\alpha_i,\ \alpha_j)$$

$$=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

所以在标准正交基下计算内积很简单，即内积空间向量的内积就是它们对应坐标在R^n中的内积.

注： 上述三条性质表明内积空间中的正交基，如同解析几何中使用直角坐标系一样，对讨论图形的度量性质有着特殊的作用.

问： 任意一个有限维的内积空间V中是否一定存在标准正交基呢？

定理: Gram-Schmidt 正交化过程:

设 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 是内积空间V 中线性无关的向量组,

则V 中存在正交向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 使得

$$\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\rangle=\langle\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k\rangle,\ k=1,2,\cdots,m.$$

证明: 用数学归纳法.

取 $\alpha_1=\beta_1$. 则 k=1, 结论成立.

假设已作出r个两两正交的向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$, 使得

$$\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\rangle=\langle\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k\rangle,\ 1\le k\le r.$$

现在进一步取

$$\alpha_{r+1}=\beta_{r+1}-\sum_{i=1}^{r}\frac{(\beta_{r+1},\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)}\alpha_i.\ (*)$$

1. $\alpha_{r+1}\neq O$. (反证法)

若$\alpha_{r+1}=O$, 则有$\beta_{r+1}\in\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\rangle=\langle\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r\rangle$,

这与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r,\beta_{r+1}$ 线性无关矛盾.

2. $(\alpha_{r+1}, \alpha_j)=0.\ 1\leqslant j \leqslant r.$

$$(\alpha_{r+1},\alpha_j) = (\beta_{r+1},\alpha_j) - \sum_{i=1}^{r} \frac{(\beta_{r+1},\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)}(\alpha_i,\alpha_j)$$

$$= (\beta_{r+1},\alpha_j) - (\beta_{r+1},\alpha_j) = 0.$$

3. $\langle \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1}\rangle = \langle \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r,\beta_{r+1}\rangle.$

由(*) 知, $\alpha_{r+1} \in \langle \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta_{r+1}\rangle = \langle \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r,\beta_{r+1}\rangle.$

又 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1}$ 两两正交，且正交向量组必线性无关，

$\therefore \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1}$ 线性无关. 即有

$$\dim\langle \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1}\rangle = \dim\langle \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r,\beta_{r+1}\rangle = r+1$$

且有 $\langle \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1}\rangle \subseteq \langle \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r,\beta_{r+1}\rangle$

$$\therefore \langle \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1}\rangle = \langle \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r,\beta_{r+1}\rangle$$

推论1： n维实内积空间V中必定存在标准正交基.

证明： 不妨设 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是V的任意一组基，由上面定理得可以构造出V的一个正交基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$.

现在将这个正交基中每个向量单位化，即取

$$\gamma_i=\frac{\alpha_i}{\|\alpha_i\|}.$$

则 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$ 就是V的一个标准正交基.

推论2： n维实内积空间V中任意正交向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 都可以扩充成V的一个正交基.

证明： $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是V的任意正交向量组，所以有 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关. 由基的扩充定理知，存在向量 $\alpha_{s+1},\alpha_{s+2},\cdots,\alpha_n$ 使 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1},\alpha_{s+2},\cdots,\alpha_n$ 构成V的一个基. 将这个基正交化，即令

$$\beta_1 = \alpha_1,$$
$$\beta_j = \alpha_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{(\alpha_j, \beta_i)}{(\beta_i, \beta_i)} \beta_i, \ j = 2, 3, \cdots, n.$$

则 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s, \beta_{s+1}, \beta_{s+2}, \cdots, \beta_n$ 就是V 的一个正交基.

推论3： 设A是n阶可逆方阵，则存在n阶正交阵Q 和可逆上三角阵R, 使$A = QR$. 这称为**方阵A的QR分解**.

证明： 将A按列分块为 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$

$\because A$是可逆阵，$\therefore$ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关.

取
$$\beta_j = \alpha_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{(\alpha_j, \beta_i)}{(\beta_i, \beta_i)} \beta_i,$$

即
$$\alpha_j = \beta_j + \sum_{i=1}^{j-1} \frac{(\alpha_j, \beta_i)}{(\beta_i, \beta_i)} \beta_i, \qquad j = 1, 2, \cdots, n$$

由定理知 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 两两正交，再取

$$\delta_i=\frac{\beta_i}{\|\beta_i\|},\quad i=1,2,\cdots,n.$$ 则 $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n$

是两两正交的单位向量.

令 $b_{ij}=\dfrac{(\alpha_j,\beta_i)}{(\beta_i,\beta_i)},\quad 1\le i<j\le n,\quad \alpha_j=\beta_j+\sum_{i=1}^{j-1}b_{ij}\beta_i$

则有 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$

$$=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\begin{bmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ & 1 & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & b_{n-1n} \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$
=(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n)\begin{bmatrix} \|\beta_1\| & & & & \\ & \|\beta_2\| & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \|\beta_{n-1}\| & \\ & & & & \|\beta_n\| \end{bmatrix}
$$

$$
\bullet\begin{bmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ & 1 & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & b_{n-1n} \\ & & & & 1 \end{bmatrix}
$$

令 $Q=(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n)$

$$R=\begin{bmatrix} \|\beta_1\| & & & & \\ & \|\beta_2\| & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \|\beta_{n-1}\| & \\ & & & & \|\beta_n\| \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ & 1 & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & b_{n-1n} \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

则有$A=QR$

$\because$ $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n$ 为R^n的一个标准正交基.

$$\therefore\ (\delta_i,\delta_j)=\delta_j^T\delta_i=\delta_i^T\delta_j=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

即有 $Q^TQ=QQ^T=E$, 显然，R 是可逆的上三角阵，

这样就得到方阵 A 的 QR 分解.

方阵的QR分解在数值计算中起着重要的作用，它是计算矩阵的全部特征值和求解线性方程组的有力工具.

例: 求矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$ 的 QR 分解.

解: $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\quad \alpha_3=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$

由施密特正交化方法得:

$$\beta_1=\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\quad \text{即}\,\alpha_1=\beta_1$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\alpha_2,\text{ 即}\alpha_2=\beta_2,$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$

$$=\alpha_3-\frac{1}{2}\beta_1-\frac{2}{3}\beta_2=\begin{bmatrix}-1/6\\-1/6\\1/3\end{bmatrix},\text{ 即}\alpha_3=\frac{1}{2}\beta_1+\frac{2}{3}\beta_2+\beta_3.$$

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{bmatrix}1&0&1/2\\0&1&2/3\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1/6 \\ -1 & 1 & -1/6 \\ 0 & 1 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & & \\ & \sqrt{3} & \\ & & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \sqrt{3} & \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

$$=QR.$$

例: 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ 的 QR 分解.

解： $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix},\ \alpha_3=\begin{bmatrix}1\\0\\4\end{bmatrix}$

由施密特正交化方法得：

$$\beta_1=\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}1/2\\1\\-1/2\end{pmatrix},$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},$$

$$\therefore \begin{cases} \alpha_1 = \beta_1 \\ \alpha_2 = -\dfrac{1}{2}\beta_1 + \beta_2 \\ \alpha_3 = \dfrac{5}{2}\beta_1 - \beta_2 + \beta_3 \end{cases} \qquad \|\beta_1\| = \sqrt{2}, \|\beta_2\| = \frac{\sqrt{6}}{2}, \|\beta_3\| = \sqrt{3}$$

$$\therefore A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 5/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{6}/2 & -\sqrt{6}/2 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

§4.3 正交子空间

定义： 设V_1, V_2是实内积空间V的两个子空间

1. 若 $\forall \alpha \in V_1, \beta \in V_2$有$(\alpha, \beta) = 0$, 则称$V_1$与$V_2$正交，

   记为 $V_1 \perp V_2$;

2. V 中向量α 如果满足 $\forall \beta \in V_1$都有$(\alpha, \beta) = 0$, 则称

   α与V_1 正交，记为 $\alpha \perp V_1$;

3. 若$V_1 \perp V_2$且$V = V_1 + V_2$, 则子空间V_2称为V_1 的正交补

注： 若 $V_1 \perp V_2, \forall \alpha \in V_1 \cap V_2$有$(\alpha, \alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$

即$V_1 \cap V_2 = \{O\}$, 即两个正交子空间的和必为直和.

定理: 若内积空间V的子空间$V_1, V_2, \ldots, V_s$两两正交，则和

$V_1 + V_2 + \ldots + V_s$必为直和.

证明： 由子空间的和为直和的等价命题，只需证明零向量的分解式唯一即可.

设 $O=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s,\quad \alpha_i\in V_i,\ i=1,2,\cdots s$

$$0=(\alpha_i,\ O)=\left(\alpha_i,\sum_{j=1}^{s}\alpha_j\right)=(\alpha_i,\alpha_i)$$

$$\Leftrightarrow \alpha_i=O,\qquad i=1,2,\cdots s$$

定理： 实内积空间V的任一子空间W必有唯一正交补，记这正交补为 $W^{\perp}$, 则$W^{\perp}=\{\alpha\in V|\alpha\perp W\}$.

证明： 如果 $W=\{O\}$, 则 $V=W\oplus V$, 即V是W 的正交补. 如果 $W\neq\{O\}$, 子空间W关于V中内积也成为内积空间，存在正交基$e_1,\cdots,e_m$. 由基的扩充定理，

将它扩充成V的一个正交基 $e_1,\cdots,e_m,e_{m+1},\cdots,e_n$, $(n=\dim V)$. 令 $U=\langle e_{m+1},e_{m+2},\cdots,e_n\rangle$, 则有 $W\perp U$,

$V=W\oplus U$ 所以U是W的正交补. 下面证明 $U=W^{\perp}$, 即U是由所有与W正交的向量组成的，由此也证明了W的正交补的唯一性.

$$\forall\alpha\in U,\alpha=k_{m+1}e_{m+1}+\cdots+k_n e_n,\ W=\langle e_1,e_2,\cdots,e_m\rangle$$

而 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 为V的正交基，$\therefore \alpha\perp W$ 即 $U\subseteq W^{\perp}$.

反之 $\forall\alpha\in W^{\perp},\alpha\in V,\alpha=\sum\limits_{i=1}^{n}k_i e_i$,

$$\left(\alpha,e_j\right)=k_j\|e_j\|^2,\quad j=1,2,\cdots,n$$

如果 $j=1,2,\cdots,m,\ \alpha\perp W$, 有 $\left(\alpha,e_j\right)=0$

$$\Rightarrow\ k_j=0,\quad j=1,2,\cdots,m,\quad \alpha=\sum_{i=m+1}^{n}k_i e_i\in U$$

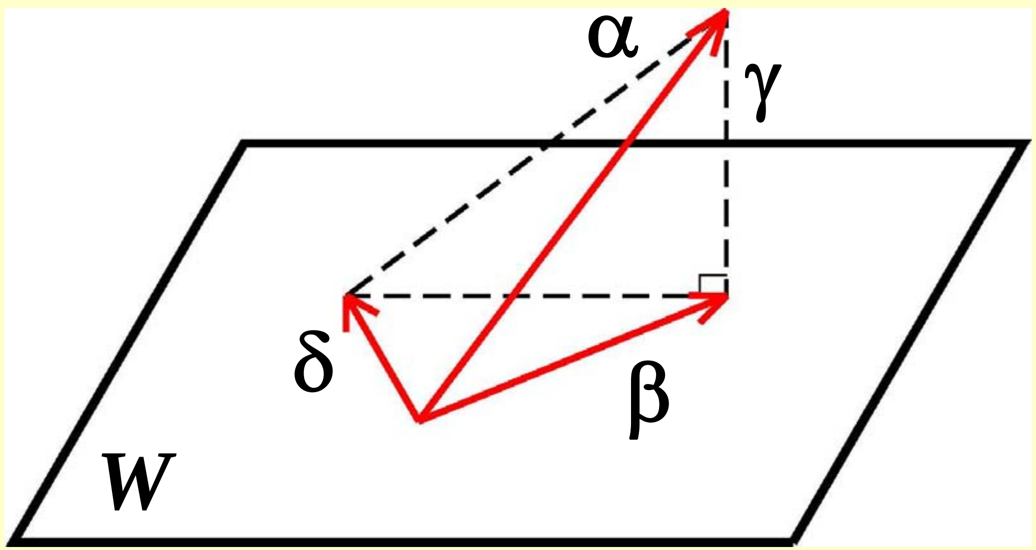
到现在为止，在内积空间V中$\forall \alpha \in V$, 定义了向量α的长度$\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$, 定义了向量与子空间正交的概念. 下面就可以引入一个在工程实践和科学实验中应用很广的一个概念——向量到子空间的距离.

定义：设W是内积空间V的子空间, $V=W\oplus W^{\perp}, \forall \alpha \in V$, 有$\alpha=\beta+\gamma, \beta \in W, \gamma \in W^{\perp}$, 向量$\beta$称为向量$\alpha$在子空间$W$上的正投影，而$\|\gamma\|$称为向量$\alpha$到子空间$W$的距离.

定理：设$\alpha \in V$, β是α在V的子空间W上的正投影，则对任意$\delta \in W$, 有$\|\gamma\|=\|\alpha-\beta\|\leq\|\alpha-\delta\|$且等号成立$\Leftrightarrow \beta=\delta$

注：说明将$\|\gamma\|$定义为α到W的距离是合理的.

证明：



$$\gamma=\alpha-\beta,\ \gamma\perp W,\ \beta-\delta\in W$$

$$\therefore \gamma\perp(\beta-\delta) \qquad \alpha-\delta=(\alpha-\beta)+(\beta-\delta)$$

由勾股定理得 $\|\alpha-\delta\|^2=\|\alpha-\beta\|^2+\|\beta-\delta\|^2$

$$\because\ \|\beta-\delta\|^2\geq 0 \quad \therefore\ \|\gamma\|=\|\alpha-\beta\|\leq\|\alpha-\delta\|$$

显然等号成立 $\Leftrightarrow \beta=\delta.$

§4.4 正交变换

定义： 设T是实内积空间V的线性变换，若对V中任意向量α有$\big(T(\alpha),T(\alpha)\big)=(\alpha,\alpha)$ 即T保持向量的长度不变，则称T为**正交变换.**

定理： 设T是实内积空间V的线性变换，下面都是T为正交变换的等价条件：

1. $\big(T(\alpha),T(\alpha)\big)=(\alpha,\alpha)$ 即T保持向量的长度不变；
2. $\big(T(\alpha),T(\beta)\big)=(\alpha,\beta)$ 即T保持内积不变；
3. 若$e_1,e_2,\cdots,e_n$ 是V的一个标准正交基，则 $T(e_1),T(e_2),\cdots,T(e_n)$ 也是V的一个标准正交基.
4. 若$e_1,e_2,\cdots,e_n$ 是V的一个标准正交基，且 $T(e_1,e_2,\cdots,e_n)=(e_1,e_2,\cdots,e_n)A$ 则A是正交阵，即 $A^TA=E$.

证明：循环证法

$1 \Longrightarrow 2$

$$\forall \alpha, \beta \in V,$$

$$(\alpha+\beta, \alpha+\beta) = (\alpha, \alpha) + 2(\alpha, \beta) + (\beta, \beta)$$

$$(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}\left[(\alpha+\beta, \alpha+\beta) - (\alpha, \alpha) - (\beta, \beta)\right]$$

$$(T(\alpha), T(\beta)) = \frac{1}{2}\Big[(T(\alpha)+T(\beta), T(\alpha)+T(\beta)) - (T(\alpha), T(\alpha)) - (T(\beta), T(\beta))\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(T(\alpha+\beta), T(\alpha+\beta)) - (\alpha, \alpha) - (\beta, \beta)\right]$$

$$= (\alpha, \beta) \qquad \text{即} (T(\alpha), T(\beta)) = (\alpha, \beta).$$

证明：循环证法

$2 \Rightarrow 3$

$$\left(T(e_i),T(e_j)\right)=\left(e_i,e_j\right)=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

$T(e_i),\quad i=1,2,\cdots,n$ 两两正交的单位向量.

$\because$ 正交向量组必线性无关

$\therefore\ T(e_1),T(e_2),\cdots,T(e_n)$ 为 V 的一个标准正交基.

$3 \Rightarrow 1$ 若 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 是 V 的一个标准正交基，$\forall \alpha \in V$,

$$\alpha=k_1e_1+\cdots+k_ne_n \qquad \alpha=\sum_{i=1}^{n}k_ie_i$$

$$(\alpha,\alpha)=\left(\sum_{i=1}^{n}k_ie_i,\sum_{j=1}^{n}k_je_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}k_ik_j\left(e_i,e_j\right)=\sum_{i=1}^{n}k_i^2$$

$T(e_1),T(e_2),\cdots,T(e_n)$ 也是V的一个标准正交基.

$$(T(\alpha),T(\alpha))=\left(\sum_{i=1}^{n}k_iT(e_i),\sum_{j=1}^{n}k_jT(e_j)\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}k_ik_j\left(T(e_i),T(e_j)\right)=\sum_{i=1}^{n}k_i^{\,2}$$

$\therefore(\alpha,\alpha)=(T(\alpha),T(\alpha))$ 即T保持向量的长度.

3 $\Leftrightarrow$ 4 若$e_1,e_2,\cdots,e_n$为V的一个标准正交基,

$$T(e_1,e_2,\cdots,e_n)=(e_1,e_2,\cdots,e_n)A_{n\times n} \text{ 设 } A=(a_{ij})_{n\times n}$$

$$(T(e_1),T(e_2),\cdots,T(e_n))$$

$$=(e_1,e_2,\cdots,e_n)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$T(e_i)=\sum_{l=1}^{n} a_{li}e_l$$

$T(e_1),T(e_2),\cdots,T(e_n)$ 为V的一个标准正交基.

$$\Leftrightarrow \big(T(e_i),T(e_j)\big)=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{l=1}^{n} a_{li}e_l,\sum_{m=1}^{n} a_{mj}e_m\right)=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} a_{li}a_{mj}(e_l,e_m)=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{l=1}^{n} a_{li}a_{lj}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$ A^T的第 i 行乘以A 的第 j 列

$$\Leftrightarrow A^T A=E \quad\Leftrightarrow$$ A 是正交阵.

推论： 1. 两个正交变换的积仍为正交变换；

2. 正交变换的逆变换仍为正交变换.

证明： 1. 设T_1, T_2为V的两个正交变换，$\forall \alpha \in V$有

$$\left(T_1T_2(\alpha),T_1T_2(\alpha)\right)=\left(T_1\left(T_2(\alpha)\right),T_1\left(T_2(\alpha)\right)\right)$$
$$=\left(T_2(\alpha),T_2(\alpha)\right)=(\alpha,\alpha)$$

2. T 为可逆线性变换 $\Longleftrightarrow$ T 为满秩线性变换

设 T 为正交变换，$e_1,e_2,\cdots,e_n$为V的一个标准正交基，

且 $T\left(e_1,e_2,\cdots,e_n\right)=\left(e_1,e_2,\cdots,e_n\right)A$，$A$是正交阵，

$\therefore$ T 可逆

设 T^{-1}为T逆变换 $\left(e_1,e_2,\cdots,e_n\right)=T\left(e_1,e_2,\cdots,e_n\right)A^{-1}$

$$T^{-1}(e_1,e_2,\cdots,e_n)=(e_1,e_2,\cdots,e_n)A^{-1}$$

$$\left(A^{-1}\right)^T A^{-1}=AA^T=E$$

$\therefore$ A^{-1} 为正交阵,

$\therefore$ T^{-1} 为正交变换

例1： 在第三章第五节的例子中线性变换

$$H\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ -c \end{bmatrix}$$ 为坐标平面xoy的反射变换,

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$ 将R^3看作为内积空间,

$$H^T H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = E$$ $\therefore$ H为正交阵.

$\therefore \forall \alpha \in R^3$有 $(H\alpha, H\alpha) = (\alpha, \alpha)$ **H 为正交变换.**

几何上，把向量 $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ **关于平面 xoy 反射成向量** $\begin{bmatrix} a \\ b \\ -c \end{bmatrix}$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = E - 2e_3e_3^T \qquad e_3 \perp S = \text{平面 } xoy$$

下面讨论反射变换的一般形式：

设 $\omega \in R^n$, 且 $\|\omega\| = 1$, $H = E - 2\omega\omega^T$ **,则由H所确定的的线性变换H是内积空间R^n的一个正交变换.**

$$H: R^n \longrightarrow R^n \qquad \alpha \longrightarrow H(\alpha) = H\alpha$$

我们只需验证H为正交阵即可.

$$H^T H = \left(E - 2\omega\omega^T\right)^T \left(E - 2\omega\omega^T\right)$$
$$= \left(E - 2\omega\omega^T\right)\left(E - 2\omega\omega^T\right),$$
$$= E - 4\omega\omega^T + 4\omega\left(\omega^T\omega\right)\omega^T$$
$$\because \omega^T\omega = (\omega,\omega) = 1$$
$$\therefore H^T H = E$$

故H为正交阵，从而线性变换 $H(\alpha) = H\alpha \ (\forall \alpha \in R^n)$

为正交变换，几何意义：

令$S = \langle\omega\rangle^{\perp}$ 则 $\dim S = n - 1.$ $\forall \alpha \in R^n$

设 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha_1 \in S$, $\alpha_2 \in \langle\omega\rangle$,

即α_1为α在S上的正投影.

$$H\alpha=\left(E-2\omega\omega^T\right)(\alpha_1+\alpha_2)$$

$$=\left(\alpha_1-2\omega\left(\omega^T\alpha_1\right)\right)+\left(\alpha_2-2\omega\left(\omega^T\alpha_2\right)\right)$$

$\alpha_1\in S,\ \ \alpha_1\perp\omega,$ 即$0=(\alpha_1,\omega)=\omega^T\alpha_1,$

$\omega^T\alpha_2=(\alpha_2,\omega),\qquad \alpha_2\in\langle\omega\rangle,$

令 $\alpha_2=k\omega,\ k\in R,\ \omega^T\alpha_2=k(\omega,\omega)=k$

$\therefore H\alpha=\alpha_1+\alpha_2-2k\omega=\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_2=\alpha_1-\alpha_2\triangleq\beta$

即α在H下的像β是α关于子空间S的反射，矩阵H称为*Household*矩阵或初等反射阵，线性变换H称为*Household*变换或初等反射变换.

例: 设 $\alpha,\beta\in R^n$ 且 $\|\alpha\|=\|\beta\|$,求一个初等反射变换H 使得$H(\alpha)=\beta$.

解: 要确定矩阵H,只需要确定单位向量ω使得β是α关于子空间$\langle\omega\rangle^{\perp}$的反射，这样ω应是$\alpha-\beta$的单位向量.

令 $$\omega=\frac{\alpha-\beta}{\|\alpha-\beta\|},\ H=E-2\omega\omega^T$$

$$H(\alpha)=H\alpha=\left(E-2\omega\omega^T\right)\alpha=\alpha-2\omega\omega^T\alpha$$

$$=\alpha-2\frac{\alpha-\beta}{\|\alpha-\beta\|}\frac{\alpha^T-\beta^T}{\|\alpha-\beta\|}\alpha$$

$$=\alpha-2(\alpha-\beta)\frac{\left(\alpha^T\alpha-\beta^T\alpha\right)}{\|\alpha-\beta\|^2}$$

$$\|\alpha-\beta\|^2=(\alpha-\beta,\alpha-\beta)=(\alpha,\alpha)-2(\alpha,\beta)+(\beta,\beta)$$
$$=2\big((\alpha,\alpha)-(\alpha,\beta)\big)$$
$$=2\left(\alpha\alpha^T-\beta^T\alpha\right)$$
$$\therefore H(\alpha)=\alpha-(\alpha-\beta)=\beta.$$

定理（QR分解） 设$A\in R^{n\times n}$, 则A 可以分解为$A=QR$,其中Q为正交阵，R为上三角阵.

由上面的例子，取定n 维向量e , 存在初等反射变换H 使得$H(\alpha)$与e 同方向或相反方向，且保持长度不变.