第二章 矩阵的标准形

岳晓青
同济大学数学科学学院
xiaoqingyue@tongji.edu.cn

§2.1 一元多项式

定义： 设 n 是一个非负整数，表达式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

称为数域 F 上的一元多项式，其中 $a_0, a_1, \cdots, a_n \in F$

特别地，0 称为零多项式.

$F[x] = \{ f(x) \mid f(x)$是 数域F上的一元多项式$\}$.

定义. 设 $f(x), g(x) \in F[x], f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ 若其同次项的系数都相等

即 $a_i = b_i, i \geq 0$ 则称 $f(x)$与 $g(x)$相等，记作 $f(x) = g(x)$。

若 $a_n \neq 0$, 则称 $a_n x^n$ 为 $f(x)$ 的首项，a_n为首项系数，

n 称为 $f(x)$的次数，记作 $\deg f(x)$ 或 $\partial f(x)$.

多项式加法

为了方便起见，设 $n \geq m$，$b_n = \cdots = b_{m+1} = 0$

$$f(x)+g(x) = (a_n+b_n)x^n + (a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1+b_1)x + (a_0+b_0)$$
$$= \sum_{i=0}^{n} (a_i+b_i)x^i$$

$$\deg(f(x) \pm g(x)) \leq \max\{\deg f(x), \deg g(x)\}$$

运算规律:

(1) 交换律：$f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$

(2) 结合律: $(f(x)+g(x))+h(x)=f(x)+(g(x)+h(x))$

(3) 零元素: $f(x)+0=f(x)$

(4) 负元素: $f(x)+(-f(x))=0$

数乘多项式

$$kf(x) = ka_n x^n + ka_{n-1} x^{n-1} + \cdots + ka_1 x + ka_0 = \sum_{i=0}^{n} ka_i x^i$$

运算规律:

(1) 结合律: $(\lambda\mu) f(x) = \lambda(\mu f(x))$

(2) 分配律: $(\lambda+\mu) f(x) = \lambda f(x) + \mu f(x)$

(3) 分配律: $\lambda(f(x) + g(x)) = \lambda f(x) + \lambda g(x)$

(4) 单位元: $1 f(x) = f(x)$

多项式乘法

$$f(x)g(x)=a_nb_mx^{n+m}+(a_nb_{m-1}+a_{n-1}b_m)x^{n+m-1}+\cdots+(a_1b_0+a_0b_1)x+a_0b_0$$

$$=\sum_{k=o}^{m+n}\left(\sum_{i+j=k}a_ib_j\right)x^k$$

其中k 次项的系数是 $a_kb_0+a_{k-1}b_1+\cdots+a_1b_{k-1}+a_0b_k=\sum_{i+j=k}a_ib_j$

$$\deg(f(x)g(x))=\deg f(x)+\deg g(x)$$

运算规律:

(1) 交换律：$f(x)g(x)=g(x)f(x)$

(2) 结合律:$(f(x)g(x))h(x)=f(x)(g(x)h(x))$

(3) 分配律: $f(x)(g(x)+h(x))=f(x)g(x)+f(x)h(x)$

(4) 消去律: 若 $f(x)h(x)=g(x)h(x),\ h(x)\neq 0$ 则 $f(x)=g(x)$

(5) 单位元: $1f(x)=f(x)$

带余除法

定理2.1.1（带余除法）设 $f(x)$和 $g(x)$是数域 F 上的多项式，且 $g(x)\neq 0$，则必存在多项式 $q(x)$和 $r(x)$，使得：

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x)$$

并且$q(x)$和 $r(x)$是唯一的，

$$\text{其中}\ \deg r(x)<\deg g(x)\ \text{或}\ r(x)=0$$

若$r(x)=0$，则称 $g(x)$是 $f(x)$的因式， $f(x)$是 $g(x)$的倍式，

也称 $g(x)$能整除 $f(x)$，并记作 $g(x)\mid f(x)$。

例2.1.1 设 $f(x)$和 $g(x)$ 是有理数域 F上的两个多项式

$$f(x)=4x^4-2x^3-6x^2+5x+9,$$

$$g(x)=2x^2-5x+4$$

求满足等式 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$ 的多项式 $q(x), r(x)$

$$2x^2-5x+4\,\overline{)\,4x^4-2x^3-6x^2+5x+9}$$

$$q(x)=2x^2+4x+3$$

$$r(x)=4x-3$$

§ 2.2 因式分解定理

定义： 设 $f(x), g(x), h(x) \in F[x]$ 若$h(x)$既是 $f(x)$的因式，又是 $g(x)$的因式，则称$h(x)$为 $f(x)$与 $g(x)$的一个公因式。

若$h(x)$既是 $f(x)$的倍式，又是 $g(x)$的倍式，则称$h(x)$为 $f(x)$与 $g(x)$的一个公倍式。

设 $f(x), g(x), d(x) \in F[x]$，并且满足：

(1) $d(x)$是 $f(x)$与$g(x)$的公因式；

(2) $f(x)$与$g(x)$的公因式都是$d(x)$的因式；

则称 $d(x)$为 $f(x)$和 $g(x)$ 的一个最大公因式。

设 $f(x), g(x), d(x) \in F[x]$，并且满足：

(1) $d(x)$是 $f(x)$与$g(x)$的公倍式；

(2) $f(x)$与$g(x)$的公倍式都是 $d(x)$的倍式；

则称 $d(x)$为 $f(x)$和 $g(x)$ 的一个最小公倍式。

定理2.2.1 设 $f(x), g(x) \in F[x]$, 则存在 $d(x) \in F[x]$,

使得$d(x)$是 $f(x)$和 $g(x)$的一个最大公因式,

并且 $d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$, 其中 $u(x), v(x) \in F[x]$.

不可约多项式

定义. 设 $p(x) \in F[x]$，若 $p(x)$在数域F上只有平凡因式,

则称 $p(x)$为域 F上的不可约多项式,

否则，称 $p(x)$ 为域F上的可约多项式。

注意：(1) 一次多项式总是不可约多项式;

(2) 多项式的不可约性与其所在系数域密切相关。

例如，$x^2 + 2 = (x + \sqrt{2}\, i)(x - \sqrt{2}\, i)$

例2.1.2 设 $f(x)$和 $g(x)$ 是有理数域 F上的两个多项式

$$f(x)=4x^4-2x^3-16x^2+5x+9,$$

$$g(x)=2x^3-x^2-5x+4$$

求 $f(x)$和 $g(x)$的最大公因式，并求满足等式

$$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x),$$

的多项式$u(x)$和$v(x)$.

$$2x^3-x^2-5x+4\,\overline{\big)\,4x^4-2x^3-16x^2+5x+9}$$

$$f(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x) \qquad r_1(x)=f(x)-q_1(x)g(x)$$

$$g(x)=q_2(x)r_1(x)+r_2(x) \qquad r_2(x)=g(x)-q_2(x)r_1(x)$$

$$r_1(x)=q_3(x)r_2(x)$$

$$d(x)=r_2(x) \qquad r_2(x)=-q_2(x)f(x)+(q_1(x)q_2(x)+1)g(x)$$

因式分解唯一性定理

定理. 数域F上任一个次数不小于1的多项式 $f(x)$都可以唯一地分解成数域F上有限个不可约多项式的乘积。

其唯一性是指，若有两个分解式

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x) = q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x)$$

则 $s = t$, 并且经过对因式的适当排序后有

$$p_i(x) = c_i q_i(x),\ \ i = 1, 2, \cdots, s$$

其中 c_i, $i = 1, 2, \cdots, s$ 为非零常数。

分解式 $f(x) = a p_1^{r_1}(x) p_2^{r_2}(x) \cdots p_s^{r_s}(x)$ 称为标准分解式。

其中a 是 $f(x)$的首项系数，$p_i(x)$是首项系数为 1 的不可约多项式，而 r_i 是正整数$(i = 1, 2, \cdots, s)$

因式分解定理

复系数多项式的因式分解定理：次数不小于1的复系数多项式在复数域上可唯一地分解成一次因式的乘积。复系数多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ 的标准分解式为 $f(x)=a_n(x-r_1)^{n_1}(x-r_2)^{n_2}\cdots(x-r_k)^{n_s}$

其中 n_i是正整数，且 $n_1+n_2+\cdots+n_s=n$

实系数多项式的因式分解定理：次数不小于1的实系数多项式在实数域上可唯一地分解成一次因式和二次不可约因式的乘积。 实系数多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ 的标准分解式为

$$f(x)=a_n(x-r_1)^{n_1}\cdots(x-r_s)^{n_s}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\cdots(x^2+p_tx+q_t)^{m_t}$$

其中n_i 和m_i 是正整数，且$n_1+\cdots+n_s+2m_1+\cdots+2m_t=n$

§ 2.3 λ 阵的标准形

定义： 元素是 λ 的多项式的矩阵称为 λ-阵，记作 $A(\lambda)$，且 $A(\lambda)$ 中所含的多项式的最高次幂称为 λ-阵 $A(\lambda)$ 的次数.

例： 1. 特征矩阵 $\lambda E - A$ 就是一个 λ-阵，次数为1；

2. 数字矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 也是一个 λ-阵，次数为0；

3. $A-\lambda B$ 也是一个 λ-阵，次数为1；

4. $$A(\lambda)=\begin{pmatrix} 1 & \lambda-2 & 1 \\ 0 & \lambda^2-\lambda & \lambda-1 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$ 是一个 λ-阵，次数为2.

设 $A(\lambda)$的次数为 m, 则 $A(\lambda)$ 可表示为

$$A(\lambda)=A_0\lambda^m+A_1\lambda^{m-1}+\cdots+A_{m-1}\lambda+A_m$$

其中$A_i\,(i=0,1,\ldots,m)$ 为数字矩阵， A_0不为零矩阵.

例:

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda^2+1 & 2+\lambda\\ 3 & 3\lambda^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}\lambda^2+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\lambda+\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix}$$

注: 多项式的系数不再是数，而是一个数字矩阵.

注：λ–阵$A(\lambda)$的加、减、乘、数乘、伴随阵及行列式等运算与数字矩阵相应的运算规则相同.

数字矩阵有秩的概念，那么λ–阵$A(\lambda)$有没有呢？

定义：λ–阵$A(\lambda)$中不恒为零的子式的最高阶数称为$A(\lambda)$的秩.（这与数字矩阵秩的定义不同：最高阶非零子式的阶数）.

例：设A是一个n阶方阵，$|\lambda E - A|$是关于λ的n次多项式，不恒为零，所以$\lambda E – A$ 的秩为 n .

即 $A_{n\times n}$不一定是满秩的，但λE-A一定是满秩的.

$A_{n\times n}$可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A_{n\times n}$ 满秩.

定理: λ –方阵$A(\lambda)$可逆(即存在 $B(\lambda)$使$A(\lambda)B(\lambda)=B(\lambda)A(\lambda)=E$) $\Leftrightarrow |A(\lambda)|$ 为非零常数.

证明: $\Leftarrow$ 记$A(\lambda)^*$为$A(\lambda)$的伴随矩阵. 若 $|A(\lambda)|$ 为非零常数C, 则

$$A(\lambda)\frac{1}{C}A^*(\lambda)=E,\quad A^{-1}(\lambda)=\frac{1}{C}A^*(\lambda),$$ 即$A(\lambda)$可逆.

$\Rightarrow$ 若 $A(\lambda)$可逆，即存在 $B(\lambda)$ 使 $A(\lambda)B(\lambda)=E$.

于是 $|A(\lambda)||B(\lambda)|=1$, 而 $|A(\lambda)|$ 与 $|B(\lambda)|$ 均是λ 的多项式, 比较等式两边多项式的次数，即得$|A(\lambda)|$是非零常数.

例：①

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & \lambda-1 & \lambda\\ \lambda & 1 & \lambda^2\end{bmatrix},\ |A(\lambda)|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-1 & \lambda\\ \lambda & 1 & \lambda^2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-2)$$

$A(\lambda)$不可逆，但$A(\lambda)$ 的秩为3.

②

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix}5\lambda+1 & 25\lambda\\ \lambda & 5\lambda-1\end{bmatrix},\qquad |A(\lambda)|=-1$$

$A(\lambda)$ 可逆，$A(\lambda)$ 的秩为2.

$A(\lambda)$ 可逆$\Leftrightarrow |A(\lambda)|$是非零常数$\Rightarrow A(\lambda)$ 满秩.

数字矩阵有三类初等变换，初等矩阵. $A(\lambda)$有同样的结论

$A(\lambda)$ 矩阵的初等变换

(1) 对调 i, j 两行(列)，记作 $r_i \leftrightarrow r_j (c_i \leftrightarrow c_j)$

(2) 第 i 行 (列)乘以非零数 k，记作 $r_i \times k$ $(c_i \times k)$

(3) 第 i 行(列)加上第 j 行(列)的 $k(\lambda)$ 倍,

记作 $r_i + k(\lambda) r_j (c_i + k(\lambda) c_j)$ 其中 $k(\lambda)$为 λ 的多项式。

与数字矩阵类似，$A(\lambda)$ 行变相当于左乘一个初等阵，列变相当于右乘一个初等阵的转置.

有了初等变换又可以得到:

$A(\lambda)$ 可逆 $\Leftrightarrow$ $A(\lambda)$为有限个初等λ-阵的乘积.

定义：若 $\lambda-$阵$A(\lambda)$经有限次行、列初等变换化为 $B(\lambda)$，则称$A(\lambda)$与$B(\lambda)$**等价**，记作 $A(\lambda)\cong B(\lambda)$.

定理：$A(\lambda)_{m\times n}, B(\lambda)_{m\times n}$, λ-阵, $A(\lambda)\cong B(\lambda) \Leftrightarrow$ 存在 m阶λ-阵$P(\lambda)$与n阶λ-阵$Q(\lambda)$,使得$B(\lambda)=P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda)$

等价标准形

$$A_{m\times n}\cong\begin{bmatrix}E_r & O\\ O & O\end{bmatrix} \quad \text{即} \quad A_{m\times n}=P_{m\times m}\begin{bmatrix}E_r & O\\ O & O\end{bmatrix}Q_{n\times n}$$

λ–阵$A(\lambda)$的等价标准形？？？

λ矩阵的等价标准形

定理：设 $A(\lambda)_{m\times n}$的秩为r，则

$$A(\lambda)\cong\begin{pmatrix} D(\lambda) & O \\ O & O \end{pmatrix}=I_r(\lambda)$$

其中，$I_r(\lambda)$称为$A(\lambda)$的**等价标准形**，

$D(\lambda)$为如下的对角阵，

$$D(\lambda)=\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & \\ & d_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_r(\lambda) \end{pmatrix}$$

$d_i(\lambda)$是λ的首项系数为1的多项式，且$d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)$，$i=1,\cdots,r-1$

求$A(\lambda)$等价标准形的方法

一、初等变换法

步骤：

1. 首先观察$A(\lambda)$的第一行第一列的元素能否整除$A(\lambda)$的其它位置元素.

2. 若能，则将第一行、第一列的其它元素用初等变换都化为0；

若不能，用初等变换使 a_{11} 位置元素能整除$A(\lambda)$的其它位置元素.

例：求 $A(\lambda)=\begin{bmatrix} 0 & \lambda(\lambda-1) & 0 \\ \lambda & 0 & \lambda+1 \\ 0 & 0 & -\lambda+2 \end{bmatrix}$ 的等价标准形.

$$A(\lambda) \xrightarrow{C_3 - C_1} \begin{bmatrix} 0 & \lambda(\lambda-1) & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda+2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_1]{C_1 \leftrightarrow C_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & \lambda(\lambda-1) & 0 \\ -\lambda+2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_3 - \lambda C_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda-1) & 0 \\ -\lambda+2 & 0 & \lambda(\lambda-2) \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+(\lambda-2)r_1}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda(\lambda-1) & 0\\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-2)\end{bmatrix}\xrightarrow{C_2+C_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda(\lambda-1) & 0\\ 0 & \lambda(\lambda-2) & \lambda(\lambda-2)\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2-r_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -\lambda(\lambda-2)\\ 0 & \lambda(\lambda-2) & \lambda(\lambda-2)\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & \lambda(\lambda-2) & \lambda(\lambda-2)+\lambda(\lambda-2)^2\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-2)(\lambda-1)\end{bmatrix}=I_3(\lambda)$$

例： 求λ矩阵的等价标准形

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2\lambda-1 & \lambda \\ \lambda & \lambda^2 & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^3+\lambda-1 & -\lambda^2 \end{pmatrix}$$

解：

$$A(\lambda)\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{pmatrix} 1 & \lambda^2+2\lambda-1 & 0 \\ \lambda & \lambda^2 & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^3+\lambda-1 & -\lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-\lambda r_2}\begin{pmatrix} 1 & \lambda^2+2\lambda-1 & 0 \\ \lambda & \lambda^2 & -\lambda \\ 1 & \lambda-1 & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-\lambda r_1}\begin{pmatrix} 1 & \lambda^2+2\lambda-1 & 0 \\ 0 & -\lambda^3-\lambda^2+\lambda & -\lambda \\ 0 & -\lambda^2-\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2-(\lambda^2+2\lambda-1)c_1}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\lambda^3-\lambda^2+\lambda & -\lambda\\ 0 & -\lambda^2-\lambda & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-\lambda r_3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -\lambda\\ 0 & -\lambda^2-\lambda & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-(\lambda-1)r_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -\lambda\\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1)\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3+c_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1)\end{pmatrix}$$

二、行列式因子法

定义： 设$A(\lambda)$的秩为r，则$A(\lambda)$中的任一 i $(1\le i\le r)$阶子式都是λ的多项式. 记$D_i(\lambda)$为$A(\lambda)$中所有 i 阶子式的首1的最大公因式，称$D_i(\lambda)$为$A(\lambda)$的**第i阶行列式因子**.

定理： 等价的$\lambda-$阵有相同的行列式因子. (三类初等阵)

事实上，初等变换不会改变 $A(\lambda)$各阶子式的最大公因式，也就不会改变其各阶行列式因子。

例：求$A(\lambda)$的等价标准形的各阶行列式因子.

$$A(\lambda)\cong\begin{pmatrix} D(\lambda) & O \\ O & O \end{pmatrix} \quad D(\lambda)=\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & \\ & d_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_r(\lambda) \end{pmatrix}$$

解：

$$I_r(\lambda)=\begin{bmatrix} d_1(\lambda) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_r(\lambda) & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_1(\lambda)=d_1(\lambda)$$
$$D_2(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda)$$
$$\cdots$$
$$D_r(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_r(\lambda)$$

$\therefore$ $A(\lambda)$的各阶行列式因子为$D_i(\lambda)$，$1\le i\le r$.

定义： 设$D_k(\lambda)$为$A(\lambda)$的第k阶行列式因子$(1\le k\le r)$则称 $d_k(\lambda)=D_k(\lambda)/D_{k-1}(\lambda)$，$(D_0(\lambda)=1)$为$A(\lambda)$的**第$k$个不变因子**，其中，$(1\le k\le r)$.

定理： 等价的$\lambda-$阵有相同的各阶不变因子.

定理： $\lambda-$阵$A(\lambda)$等价标准形$I_r(\lambda)$唯一.

注意到，$A(\lambda)$的等价标准形中$D(\lambda)$的对角元是$A(\lambda)$的各阶不变因子.

例： 求$A(\lambda)$的各阶不变因子.

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} 0 & \lambda(\lambda-1) & 0 \\ \lambda & 0 & \lambda+1 \\ 0 & 0 & -\lambda+2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda-1) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-2) \end{bmatrix}$$

$$D_1(\lambda)=1,\quad D_2(\lambda)=\lambda,\quad D_3(\lambda)=\lambda^2(\lambda-1)(\lambda-2)$$

$$d_1(\lambda)=1,\quad d_2(\lambda)=\lambda,\quad d_3(\lambda)=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$$

$\therefore$ $A(\lambda)$的各阶不变因子为$d_i(\lambda)$，$1\le i\le 3$.

三、初等因子法(应用于阶数较高的矩阵)

复数域 C 上，任意多项式都可以分解为一次幂的乘积

定义：$A(\lambda)$ 的不变因子可做以下分解：

$$
\begin{aligned}
d_1(\lambda) &= (\lambda - a_1)^{l_{11}}(\lambda - a_2)^{l_{12}}\cdots(\lambda - a_s)^{l_{1s}} \\
d_2(\lambda) &= (\lambda - a_1)^{l_{21}}(\lambda - a_2)^{l_{22}}\cdots(\lambda - a_s)^{l_{2s}} \\
&\vdots \\
d_r(\lambda) &= (\lambda - a_1)^{l_{r1}}(\lambda - a_2)^{l_{r1}}\cdots(\lambda - a_s)^{l_{rs}}
\end{aligned}
$$

$a_1, a_2, \cdots, a_s$

互不相等的复数

$l_{ij} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$\because d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda) \qquad \therefore 0 \leq l_{1j} \leq l_{2j} \leq \cdots \leq l_{rj} \qquad (1 \leq j \leq s)$$

则称 $(\lambda - a_j)^{l_{ij}}$ $(l_{ij}>0)$ 为$A(\lambda)$的初等因子.

$A(\lambda)$的全部初等因子称为$A(\lambda)$ 的初等因子组.

例：求下面的λ-阵的初等因子组.

$$A(\lambda)\cong I_4(\lambda)=\begin{bmatrix}1&&&\\&\lambda&&\\&&\lambda(\lambda-1)&\\&&&\lambda^2(\lambda-1)(\lambda^2+4)\end{bmatrix}$$

解：$A(\lambda)$ 的不变因子： $d_1(\lambda)=1$

$$d_2(\lambda)=\lambda$$

$$d_3(\lambda)=\lambda(\lambda-1)$$

$$d_4(\lambda)=\lambda^2(\lambda-1)(\lambda^2+4)$$

$A(\lambda)$的初等因子组为： $\lambda,\lambda,\lambda-1,\lambda^2,\lambda-1,\lambda+2i,\lambda-2i$

注：计算$A(\lambda)$的初等因子组时，一定要将重复的计算在内.

定理: 等价的λ–阵有相同的初等因子组.

定理:

$$A(\lambda)\cong B(\lambda)=\begin{bmatrix} B_1(\lambda) & & \\ & \ddots & \\ & & B_s(\lambda) \end{bmatrix},$$

则每个分块$B_i(\lambda)$ 的全部初等因子就是$A(\lambda)$的初等因子组.

证明: 设$A(\lambda)$ 的秩为r，设所有$B_i(\lambda)$ $(1\le i \le s)$的全部不变因子合起来依次为 $f_1(\lambda),\cdots,f_r(\lambda),$

即

$$B(\lambda)\cong\begin{bmatrix} f_1(\lambda) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & f_r(\lambda) & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

设 $f_i(\lambda)=(\lambda-a_1)^{l_{i1}}g_i(\lambda)$, $\lambda-a_1$不整除$g_i(\lambda)$, 即 $g_i(a_1)\neq 0, l_{i1}\geq 0$

由于可通过行列交换来调整 $f_i(\lambda)$ 的次序，不失一般性，可设

$$l_{11}\leq l_{21}\leq\cdots\leq l_{r1}$$

$$B(\lambda)\cong\begin{bmatrix} f_1(\lambda) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & f_r(\lambda) & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} (\lambda-a_1)^{l_{11}}g_1(\lambda) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & (\lambda-a_1)^{l_{r1}}g_r(\lambda) & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

则$\lambda-a_1$ 在$B(\lambda)$的第i 阶行列式因子$D_i(\lambda)$ 中的次数为 $\sum_{j=1}^{i} l_{j1}$

$\lambda-a_1$ 在分块对角阵$B(\lambda)$的第 i 阶不变因子 $d_i(\lambda)=D_i(\lambda)/D_{i-1}(\lambda)$ 中的次数为 l_{i1}

即 $(\lambda-a_1)^{l_{i1}}$ 是$A(\lambda)$ 的初等因子，同理可推 $f_i(\lambda)$ 的所有一次因式幂为$A(\lambda)$ 的初等因子.

初等因子法：$A(\lambda)\xrightarrow{\text{行,列}}$分块对角形阵（不一定是标准形）可得$A(\lambda)$ 的初等因子组，再由初等因子组写出标准形.

例： 求λ-阵的等价标准形.

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} 3\lambda+5 & (\lambda+2)^2 & 4\lambda+5 & (\lambda-1)^2 \\ \lambda+7 & (\lambda+2)^2 & \lambda+7 & 0 \\ \lambda-1 & 0 & 2\lambda-1 & (\lambda-1)^2 \\ 0 & 0 & \lambda^2-7\lambda+10 & 0 \end{pmatrix}$$

解：先对$A(\lambda)$做行、列初等变换，使其简化.

$$A(\lambda)\xrightarrow{r_1-r_2-r_3}\begin{pmatrix}\lambda-1 & 0 & \lambda-1 & 0\\ \lambda+7 & (\lambda+2)^2 & \lambda+7 & 0\\ \lambda-1 & 0 & 2\lambda-1 & (\lambda-1)^2\\ 0 & 0 & \lambda^2-7\lambda+10 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3-c_1}\begin{pmatrix}\lambda-1 & 0 & 0 & 0\\ \lambda+7 & (\lambda+2)^2 & 0 & 0\\ \lambda-1 & 0 & \lambda & (\lambda-1)^2\\ 0 & 0 & \lambda^2-7\lambda+10 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}\lambda-1 & 0 & 0 & 0\\ 8 & (\lambda+2)^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & (\lambda-1)^2\\ 0 & 0 & (\lambda-2)(\lambda-5) & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1(\lambda) & O\\ O & A_2(\lambda)\end{pmatrix}$$

$A_1(\lambda)$: $D_1(\lambda)=1, D_2(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+2)^2$

$\Rightarrow d_1(\lambda)=1, d_2(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+2)^2$

$\Rightarrow (\lambda-1)$，$(\lambda+2)^2$ 为$A_1(\lambda)$的初等因子组.

$A_2(\lambda)$: $D_1(\lambda)=1$, $D_2(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-5)(\lambda-1)^2$

$\Rightarrow d_1(\lambda)=1, d_2(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-5)(\lambda-1)^2$

$\Rightarrow (\lambda-1)^2, (\lambda-2), (\lambda-5)$ 为$A_2(\lambda)$的初等因子组.

$\therefore$ $A(\lambda)$ 的初等因子组为$\lambda-1$, $(\lambda-1)^2$, $\lambda-2$, $\lambda-5$, $(\lambda+2)^2$.

而 $rank\,(A(\lambda))=4$, $\therefore$ $A(\lambda)$ 的最后一个不变因子为

$d_4(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)(\lambda-5)(\lambda+2)^2$.

$\because d_i(\lambda)\,|\,d_{i+1}(\lambda)\qquad (1\le i\le 3)$

$\therefore$ $d_3(\lambda)=\lambda-1$, $d_2(\lambda)=1$, $d_1(\lambda)=1$.

即 $A(\lambda)$ 的等价标准形为

$$I_4(\lambda)=\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&\lambda-1&\\&&&(\lambda-2)(\lambda-5)(\lambda-1)^2(\lambda+2)^2\end{bmatrix}$$

例：求λ-阵$A(\lambda)$的等价标准形.

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda-3&-1&0&0\\4&\lambda+1&0&0\\-6&-1&\lambda-2&-1\\14&5&1&\lambda\end{pmatrix}$$

解：先对$A(\lambda)$做行、列初等变换，使其简化.

$$A(\lambda)\xrightarrow{c_1-6c_4}\begin{pmatrix}\lambda-3&-1&0&0\\4&\lambda+1&0&0\\0&-1&\lambda-2&-1\\14-6\lambda&5&1&\lambda\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2-c_4}\begin{pmatrix} \lambda-3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & \lambda+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 & -1 \\ 14-6\lambda & 5-\lambda & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4+6r_1+r_2}\begin{pmatrix} \lambda-3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & \lambda+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1(\lambda) & O \\ O & A_2(\lambda) \end{pmatrix}$$

$\therefore$ $A(\lambda)$ 的初等因子组为$(\lambda-1)^2$, $(\lambda-1)^2$. 而 $rank\,(A(\lambda))=4$,

$\therefore$ $A(\lambda)$ 的最后一个不变因子为 $d_4(\lambda)=(\lambda-1)^2$.

$$\because d_i(\lambda)\,|\,d_{i+1}(\lambda) \qquad (1\le i\le 3)$$

$\therefore$ $d_3(\lambda)=(\lambda-1)^2$, $d_2(\lambda)=1$, $d_1(\lambda)=1$.

即 $A(\lambda)$ 的等价标准形为

$$I_4(\lambda)=\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & (\lambda-1)^2 & \\ & & & (\lambda-1)^2\end{bmatrix}$$

§2.4 矩阵相似的条件

引理： A, B, C, D为数字矩阵，其中 A, C 可逆，则有

$\lambda A+B \cong \lambda C+D \Leftrightarrow$ 存在可逆数字阵 S 与 R 使得

$\lambda C+D=S(\lambda A+B)R$

定理： $A_{n\times n}\sim B_{n\times n} \Leftrightarrow \lambda E-A \cong \lambda E-B$

证明： $\Rightarrow$ $A\sim B,\ A=P^{-1}BP,\ \lambda E-A=P^{-1}(\lambda E-B)P$

$\Leftarrow$ $\lambda E-A=S(\lambda E-B)R=\lambda SR-SBR$

$SR=E,\quad R=S^{-1},\quad A=SBR=SBS^{-1}$

所以有$A\sim B$成立.

推论：$A_{n\times n}$，$B_{n\times n}$， 则下列命题等价:

1. $A \sim B$;
2. $\lambda E - A \cong \lambda E\text{-}B$;
3. $\lambda E - A$，$\lambda E\text{-}B$ 有相同的各阶行列式因子;
4. $\lambda E - A$，$\lambda E\text{-}B$ 有相同的各阶不变因子;
5. $\lambda E - A$，$\lambda E\text{-}B$ 有相同的初等因子组.

注意：以后 $\lambda E - A$ 的不变因子、初等因子也称为数字矩阵A的不变因子、初等因子.

§ 2.5 若当标准形

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{m_i \times m_i}$$

$$\lambda E_{m_i} - J_i = \begin{bmatrix} \lambda - \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda - \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda - \lambda_i \end{bmatrix}_{m_i \times m_i}$$

问：$\lambda E_{m_i} - J_i$ 的初等因子是什么？

$$D_k(\lambda)=1,\ \ 1\le k\le m_{i-1};\quad D_{m_i}(\lambda)=(\lambda-\lambda_i)^{m_i}$$

$$d_k(\lambda)=1,\quad 1\le k\le m_{i-1};\quad d_{m_i}(\lambda)=(\lambda-\lambda_i)^{m_i}$$

$\therefore\ \ \lambda E_{m_i}-J_i$ 的初等因子只有一个 $(\lambda-\lambda_i)^{m_i}$

定义： 称J_i 为**若当块**,矩阵

$$J=\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix}$$

为**若当矩阵**

$\lambda E-J$ 的初等因子组为 $(\lambda-\lambda_1)^{m_1},\cdots,(\lambda-\lambda_s)^{m_s}$

定理： 若$A_{n\times n}$的特征矩阵λE-A的初等因子组为

$$(\lambda-\lambda_1)^{m_1},\cdots,(\lambda-\lambda_s)^{m_s}$$

则

$$A \sim J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix}$$

当 $m_i = 1$时 $J_i = \lambda_i$

当 $m_i > 1$时

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{m_i\times m_i}$$

若不计 J 中若当块的排列次序，则若当矩阵J 由 A 唯一确定，称 J 为 A的若当标准形.

定理： $A \sim \Lambda \Leftrightarrow \lambda E\text{-}A$的初等因子都是$\lambda$的一次多项式

例： 求 $A=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&2&0\\-2&-1&-1\end{bmatrix}$ 的若当标准形.

解：

$$\lambda E-A=\begin{bmatrix}\lambda-1&-2&0\\0&\lambda-2&0\\2&1&\lambda+1\end{bmatrix}\qquad \begin{aligned}&D_1(\lambda)=1\\&D_2(\lambda)=?\\&D_3(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+1)\end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix}0&\lambda-2\\2&1\end{vmatrix}=-2(\lambda-2)\qquad \begin{vmatrix}\lambda-1&0\\2&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+1)$$

$$\therefore D_2(\lambda)=1$$

$\lambda E\text{-}A$ 的初等因子组为 $\lambda-1,\lambda-2,\lambda+1$

$$\therefore A\sim J=\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&-1\end{bmatrix}$$

例： $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$，求可逆阵$P$，使为$P^{-1}AP=J$为$A$的若当标准形.

解：

$$\lambda E-A=\begin{bmatrix} \lambda-2 & 1 & 1 \\ -2 & \lambda+1 & 2 \\ 1 & -1 & \lambda-2 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_1+C_2} \begin{bmatrix} \lambda-1 & 1 & 1 \\ \lambda-1 & \lambda+1 & 2 \\ 0 & -1 & \lambda-2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_2-C_3} \begin{bmatrix} \lambda-1 & 0 & 1 \\ \lambda-1 & \lambda-1 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-2 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3+r_2]{r_2-r_1} \begin{bmatrix} \lambda-1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{bmatrix}$$

行列式因子： $D_1(\lambda)=1,\quad D_2(\lambda)=\lambda-1,\quad D_3(\lambda)=(\lambda-1)^3.$

不变因子： $d_1(\lambda)=1,\quad d_2(\lambda)=\lambda-1,\quad d_3(\lambda)=(\lambda-1)^2.$

初等因子组为 $\lambda-1,(\lambda-1)^2$

$$\therefore A\sim J=\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

令 $P=\left(x_1, x_2, x_3\right)$ 使得$AP=PJ$.

$$A\left(x_1, x_2, x_3\right)=\left(x_1, x_2, x_3\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left(E-A\right)x_1=0$$
$$\left(E-A\right)x_2=0$$
$$\left(E-A\right)x_3=-x_2$$

$$E-A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \alpha=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \beta=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$rank\left(E-A\right)=1,$$

设

$$x_2=k_1\alpha+k_2\beta=\begin{bmatrix} k_1+k_2 \\ k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

$$\left(E-A,-x_2\right)=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -(k_1+k_2) \\ -2 & 2 & 2 & -k_1 \\ 1 & -1 & -1 & -k_2 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -(k_1+k_2) \\ 0 & 0 & 0 & k_1+2k_2 \\ 0 & 0 & 0 & -k_1-2k_2 \end{bmatrix}$$

取

$$k_1=2,\ \ k_2=-1,\qquad x_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix},\qquad x_3=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

取 $x_1=\alpha=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad P=(x_1,x_2,x_3)$ 且 $P^{-1}AP=J$

注: $P_1=(x_2,x_3,x_1),\quad A\sim J=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$ P不唯一

例：$A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$，求可逆阵$P$，使为$P^{-1}AP=J$为$A$的若当标准形.

解：

$$\lambda E-A=\begin{bmatrix}\lambda+1 & -1 & 0\\ 4 & \lambda-3 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-2\end{bmatrix}\xrightarrow[r_1+(\lambda+1)r_3]{r_2+4r_3}$$

$$\begin{bmatrix}0 & -1 & (\lambda+1)(\lambda-2)\\ 0 & \lambda-3 & 4\lambda-8\\ -1 & 0 & \lambda+2\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda-2)(\lambda-1)^2\end{bmatrix}$$

初等因子组为 $\lambda-2,(\lambda-1)^2$

$$\therefore A\sim J=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

令 $P=\left(x_1,x_2,x_3\right)$ 使得 ***AP*=*PJ*.**

$$A\left(x_1,x_2,x_3\right)=\left(x_1,x_2,x_3\right)\begin{bmatrix}2&0&0\\&1&1\\&&1\end{bmatrix}$$

$$\left(2E-A\right)x_1=0$$
$$\left(E-A\right)x_2=0$$
$$\left(E-A\right)x_3=-x_2$$

$$2E-A=\begin{bmatrix}3&-1&0\\4&-1&0\\-1&0&0\end{bmatrix},\qquad x_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},$$

$$E-A=\begin{bmatrix}2&-1&0\\4&-2&0\\-1&0&-1\end{bmatrix},\qquad x_2=\begin{bmatrix}-1\\-2\\1\end{bmatrix},$$

$$\left(E-A,-x_2\right)=\begin{bmatrix}2&-1&0&1\\4&-2&0&2\\-1&0&-1&-1\end{bmatrix},\qquad x_3=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},$$

取 $P=(x_1,x_2,x_3)$ 则有 $P^{-1}AP=J$

§2.6 最小多项式

定义1： $A_{n\times n}$，若存在多项式

$$\varphi(\lambda)=a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$$

使 $\varphi(A)=O$ 则称 $\varphi(\lambda)$ 为$A_{n\times n}$的零化多项式.

定理（H-C）： 设 $f(\lambda)=|\lambda E-A|$为方阵A的特征多项式，

则 $f(A)=O$, 即方阵A的特征多项式为A的零化多项式.

证明： $f(\lambda)=|\lambda E-A|=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$

$\because$ λE-A的任一元素的代数余子式最多是 λ的n-1次多项式

$\therefore$(λE-A)*的任一元素最多是 λ的n-1次多项式.

$$(\lambda E-A)^*=B_0\lambda^{n-1}+B_1\lambda^{n-2}+\cdots+B_{n-2}\lambda+B_{n-1}$$

$$(\lambda E-A)(\lambda E-A)^*=(\lambda E-A)\left(B_0\lambda^{n-1}+B_1\lambda^{n-2}+\cdots+B_{n-2}\lambda+B_{n-1}\right)$$

$$\left|\lambda E - A\right| E$$
$$= B_0\lambda^n + \left(B_1 - AB_0\right)\lambda^{n-1} + \cdots + \left(B_{n-1} - AB_{n-2}\right)\lambda - AB_{n-1}$$

而 $f\left(\lambda\right)E = \left|\lambda E - A\right| E = \left(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n\right)E$

$B_0 = E$	左乘	A^n
$B_1 - AB_0 = a_1E$	左乘	A^{n-1}
$\vdots$		$\vdots$
$B_{n-1} - AB_{n-2} = a_{n-1}E$	左乘	A
$-AB_{n-1} = a_nE$	左乘	E

$$f\left(A\right) = A^n + a_1A^{n-1} + \cdots + a_{n-1}A + a_nE$$
$$= O$$

定义2： $A_{n\times n}$，$m_A(\lambda)$ 是A的首1的次数最低的零化多项式，则称$m_A(\lambda)$是A的最小的多项式.

定理： $A_{n\times n}$ 的最小多项式 $m_A(\lambda)$ 整除 A 的任一零化多项式 $\varphi(\lambda)$.

证明： 1. $\varphi(\lambda)=0$

2. $\varphi(\lambda)=m_A(\lambda)q(\lambda)+r(\lambda)$,

$r(\lambda)=0$ 或 $\deg r(\lambda)<\deg m_A(\lambda)$

若 $r(\lambda)=0$ 有 $m_A(\lambda)\,|\,\varphi(\lambda)$

若 $r(\lambda)\neq 0$ 有 $\varphi(A)=m_A(A)q(A)+r(A)=r(A)=O$

与定义2矛盾.

定理： 方阵 A 的最小多项式唯一.

证：$m_1(\lambda)\,|\,m_2(\lambda)$，$m_2(\lambda)\,|\,m_1(\lambda)$，首1 故 $m_1(\lambda)=m_2(\lambda)$.

定理： $m_A(\lambda)$ 的根一定是 A 的特征根，

反之，A 的特征根也一定是 $m_A(\lambda)$ 的根.

证明：

1. $f(\lambda)=|\lambda E-A|$ 为 A 的零化多项式，$m_A(\lambda)\,|\,f(\lambda)$

2. λ_0 为 A 的特征根，$A\alpha_0=\lambda_0\alpha_0 \quad (\alpha_0\neq 0)$

$m_A(A)\alpha_0=m_A(\lambda_0)\alpha_0=O$ 又 $\alpha_0\neq 0$

$\therefore m_A(\lambda_0)=0.$

定理： $A_{n\times n}$, $r=rank(\lambda E-A)$, 则 $m_A(\lambda)=d_r(\lambda)$为特征矩阵$\lambda E-A$ 的初等因子组的最小公倍式.

推论： $A_{n\times n}\sim\Lambda \Leftrightarrow$ A 的最小多项式$m_A(\lambda)$无重根.

证明： $A_{n\times n}\sim\Lambda \Leftrightarrow \lambda E-A$的初等因子均为$\lambda$的一次多项式.

$\Leftrightarrow$ 不变因子$d_r(\lambda)$无重根.

$\Leftrightarrow m_A(\lambda)$无重根.

例：

$$A=\begin{bmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

求 A 的最小多项式.

$$\lambda E-A=\begin{bmatrix} \lambda-7 & -4 & 1 \\ -4 & \lambda-7 & 1 \\ 4 & 4 & \lambda-4 \end{bmatrix}\xrightarrow{c_1-c_2}\begin{bmatrix} \lambda-3 & -4 & 1 \\ 3-\lambda & \lambda-7 & 1 \\ 0 & 4 & \lambda-4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_2+4C_3}\begin{bmatrix} \lambda-3 & 0 & 1 \\ 3-\lambda & \lambda-3 & 1 \\ 0 & 4(\lambda-3) & \lambda-4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2+r_1}\begin{bmatrix} \lambda-3 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda-3 & 2 \\ 0 & 4(\lambda-3) & \lambda-4 \end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-4r_2}\begin{bmatrix} \lambda-3 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda-3 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda-12 \end{bmatrix}$$

$$D_1(\lambda)=1=d_1(\lambda),$$

$$D_2(\lambda)=\lambda-3=d_2(\lambda),$$

$$D_3(\lambda)=(\lambda-3)^2(\lambda-12)$$

$$d_3(\lambda)=D_3(\lambda)\Big/D_2(\lambda)=(\lambda-3)(\lambda-12).$$

例：方阵 A 的特征值全为 $0 \Leftrightarrow A^k=0$，其中 k 为自然数，

即 A 为幂零阵.

证明：$\Longrightarrow$ A的特征多项式为$|\lambda E-A|=\lambda^n$,于是A的最小多项式为 λ^k，即 $A^k=0$.

$\Longleftarrow$ 由 $A^k=0$ 知A的最小多项式为 $\lambda^l (l\le k)$,

$\therefore$ A的特征值全为零.

例：方阵A，$A^k=0$，求证：$|A+E|=1$.

证明：$\because A^k=0 \therefore A$ 的特征值全为零.于是A 的若当标准

为 $J=\begin{bmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{bmatrix}$, $\therefore P^{-1}AP=J$. 从而有$|A+E|=|P^{-1}AP+E|=1$.

例： 求3阶幂零阵的所有可能的若当标准型.

解：$\because A^k = 0 \Rightarrow m_A(\lambda) = \lambda^l$

$\therefore$3阶幂零阵的可能标准

$$\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

例：$A^2 = A$，求3阶幂等阵的所有可能的若当标准型.

解：$\because A^2 = A \quad \therefore A(A - E) = 0$

$\therefore m_A(\lambda) = \lambda(\lambda - 1); \lambda - 1; \lambda.$

$\therefore$3阶幂等阵的可能标准

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

例：设3阶阵 $A^2=E$ 求A的所有可能的若当标准型.

解： $\because A^2=E$

$\therefore (A+E)(A-E)=0$

$m_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+1);\lambda-1;\lambda+1$

$\therefore$3阶矩阵A 的可能标准型：

$$\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}$$

例：$A_{n\times n}$, $A^2+A=2E$， 问 A 是否相似于对角阵？

解： $A^2+A-2E=0$

$\varphi(\lambda)=\lambda^2+\lambda-2$ 为A的零化多项式.

$=(\lambda+2)(\lambda-1)$

$m_A(\lambda)\mid\varphi(\lambda)$ $\therefore m_A(\lambda)$ 无重根， $\therefore A\sim\Lambda.$