第五章 矩阵分析

岳晓青

同济大学数学科学学院

xiaoqingyue@tongji.edu.cn

§ 5.1 矩阵的极限

定义： 任给$m\times n$矩阵序列$\{A_l\}$, 其中

$$A_l=\begin{bmatrix} a_{11}^{(l)} & a_{12}^{(l)} & \cdots & a_{1n}^{(l)} \\ a_{21}^{(l)} & a_{22}^{(l)} & \cdots & a_{2n}^{(l)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}^{(l)} & a_{m2}^{(l)} & \cdots & a_{mn}^{(l)} \end{bmatrix}, \qquad A_l=\left(a_{ij}^{(l)}\right)_{m\times n}$$

如果当$l\to\infty$时, $m\times n$个序列 $\left\{a_{ij}^{(l)}\right\}$ 都收敛，且分别收敛于a_{ij}, $(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$

则称矩阵序列$\{A_l\}$收敛于矩阵:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}.$$

并称A是序列$\{A_l\}$在$l\to\infty$时的极限，记作 $\lim\limits_{l\to\infty} A_l = A.$

例:已知

$$A_l=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{l} & \dfrac{2l^2-1}{3l^2+4} \\ \left(1+\dfrac{1}{l}\right)^l & \cos\dfrac{1}{l^3} \end{bmatrix},$$

求A_l在$l\to\infty$时的极限.

解： 令 $A=\lim\limits_{l\to\infty}A_l$, 则

$$A=\begin{bmatrix}\lim\limits_{l\to\infty}\dfrac{1}{l} & \lim\limits_{l\to\infty}\dfrac{2l^2-1}{3l^2+4}\\ \lim\limits_{l\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{l}\right)^l & \lim\limits_{l\to\infty}\cos\dfrac{1}{l^3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \dfrac{2}{3}\\ e & 1\end{bmatrix}.$$

定理： 已知 $A_l, B_l, A, B\in C^{n\times n}, a_l, b_l, a, b\in C, \lim\limits_{l\to\infty}A_l=A,$ $\lim\limits_{l\to\infty}B_l=B,\ \lim\limits_{l\to\infty}a_l=a,\ \lim\limits_{l\to\infty}b_l=b,$ 则

(1) $\lim\limits_{l\to\infty}\left(a_lA_l+b_lB_l\right)=aA+bB;$

(2) $\lim\limits_{l\to\infty}\left(A_lB_l\right)=AB.$

证明: (1) 令矩阵 $C_l = a_l A_l + b_l B_l$, 则 $C_l = \left(C_{ij}^{(l)}\right)$,

$$C_{ij}^{(l)} = a_l a_{ij}^{(l)} + b_l b_{ij}^{(l)}$$

$$\lim_{l\to\infty} C_{ij}^{(l)} = \lim_{l\to\infty} a_l \lim_{l\to\infty} a_{ij}^{(l)} + \lim_{l\to\infty} b_l \lim_{l\to\infty} b_{ij}^{(l)}$$

$$= aa_{ij} + b\, b_{ij} \quad \therefore \lim_{l\to\infty} C_l = aA + bB.$$

(2) 令 $C_l = A_l B_l$, $C_l = \left(C_{ij}^{(l)}\right)$, $C_{ij}^{(l)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(l)} b_{kj}^{(l)}$

$$\lim_{l\to\infty} C_{ij}^{(l)} = \sum_{k=1}^{n} \lim_{l\to\infty} a_{ik}^{(l)} \lim_{l\to\infty} b_{kj}^{(l)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

$$\therefore \lim_{l\to\infty} C_l = AB.$$

定理: 已知 $P, Q, A_l, A \in C^{n\times n}$, $\lim_{l\to\infty} A_l = A$, 则

$$\lim_{l\to\infty} PA_lQ = PAQ.$$

§ 5.2 函数矩阵的微分与积分

$$A(t)=\begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}(t) & a_{m2}(t) & \cdots & a_{mn}(t) \end{bmatrix}_{m\times n}$$

为关于实变量t的函数矩阵，所有元素 $a_{ij}(t)$ 定义在$[a,b]$上，函数矩阵$A(t)$在$[a,b]$上有界(有极限、连续、可微、可积)定义为其中$m\times n$个元素 $a_{ij}(t)$ 同时在$[a,b]$上有界(有极限、连续、可微、可积).

$$\frac{d}{dt}A(t)=\left[\frac{d}{dt}a_{ij}(t)\right]_{m\times n}$$

$$\int A(t)dt=\left[\int a_{ij}(t)dt\right]_{m\times n}$$

$$\int_a^b A(t)dt=\left[\int_a^b a_{ij}(t)dt\right]_{m\times n}$$

例： 已知 $A(t)=\begin{bmatrix} \sin t & 2t^3 \\ 2\sqrt{t} & e^{2t} \end{bmatrix}$ 求 $\frac{d}{dt}A(t)$.

$$\frac{d}{dt}A(t)=\begin{bmatrix} \frac{d}{dt}\sin t & \frac{d}{dt}2t^3 \\ \frac{d}{dt}2\sqrt{t} & \frac{d}{dt}e^{2t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos t & 6t^2 \\ \frac{1}{\sqrt{t}} & 2e^{2t} \end{bmatrix}$$

定理：(1) 若$A(t), B(t)$ 为同阶可微矩阵，则

$$\frac{d}{dt}\left(A(t)+B(t)\right)=\frac{d}{dt}A(t)+\frac{d}{dt}B(t)$$

(2) 若$A(t), B(t)$ 分别为$m\times n$，$n\times l$ 阶可微矩阵，则

$$\frac{d}{dt}\left(A(t)B(t)\right)=\left(\frac{d}{dt}A(t)\right)B(t)+A(t)\left(\frac{d}{dt}B(t)\right)$$

(3) 若$A(t)$ 与$A^{-1}(t)$ 皆可微，则

$$\frac{d}{dt}\left(A^{-1}(t)\right)=-A^{-1}(t)\left(\frac{d}{dt}A(t)\right)A^{-1}(t)$$

证明：(1) $A(t)+B(t)=\left(a_{ij}(t)+b_{ij}(t)\right)_{m\times n}$

(2) $A(t)B(t)=\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(t)b_{kj}(t)\right)_{m\times l}$

(3) $\because A(t)A^{-1}(t)=E$, 两边对t求导, 由(2)得

$$\left(\frac{d}{dt}A(t)\right)A^{-1}(t)+A(t)\left(\frac{d}{dt}A^{-1}(t)\right)=O.$$

在上式两边同时左乘$A^{-1}(t)$，则有

$$\frac{d}{dt}\left(A^{-1}(t)\right)=-A^{-1}(t)\left(\frac{d}{dt}A(t)\right)A^{-1}(t).$$

例：设函数矩阵$A(t)=\begin{bmatrix} e^{2t} & te^{t} & 1 \\ e^{-t} & 2e^{2t} & 0 \\ 3t & 0 & 0 \end{bmatrix}$

求：$\int A(t)dt,\ \int_0^1 A(t)dt.$

解：

$$\int A(t)dt = \int \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{t} & 1 \\ e^{-t} & 2e^{2t} & 0 \\ 3t & 0 & 0 \end{bmatrix} dt$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{2t} & (t-1)e^{t} & t \\ -e^{-t} & e^{2t} & 0 \\ \frac{3}{2}t^{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} + (c_{ij})_{3\times 3}.$$

$$\int_0^1 A(t)dt = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{2}-1) & 1 & 1 \\ 1-e^{-1} & e^{2}-1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

§ 5.3 矩阵的幂级数

定义： 设 $\{A_m \in C^{n\times n}, m=0,1,2,\cdots\}$ 为一个矩阵序列，称 $\sum_{m=0}^{\infty} A_m$ 为方阵级数. 令 $S_N=\sum_{m=0}^{N} A_m$, 若方阵序列 $\{S_N\}$ 收敛，且 $\lim_{N\to\infty} S_N = S$, 则称方阵级数 $\sum_{m=0}^{\infty} A_m$ 是收敛的，级数和为S, 记作 $S=\sum_{m=0}^{\infty} A_m$. 否则，称不收敛的级数是发散的.

注：

方阵级数 $\sum_{m=0}^{\infty} A_m$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 对应的n^2个数值级数

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_{ij}^{(m)} \quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$ 都收敛.

定义: 设A为n阶方阵, $A \in C^{n\times n}$, 定义 $A^0 = E_{n\times n}$,

A的特征值模的最大值称为A 的**谱半径**, 记作$\rho(A)$.

引理1: 设r 阶方阵

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & O \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ O & & & 0 \end{bmatrix},$$ 则当 $m \geqslant r$ 时, $H^m = O$;

当 $m < r$ 时,

$$H^m = \begin{bmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \end{matrix}}^{m\text{个}} & 1 & & O \\ \begin{matrix} & \ddots & \cdots \end{matrix} & \ddots & \ddots & \\ \begin{matrix} & & \ddots \end{matrix} & \cdots & \ddots & 1 \\ & \ddots & \cdots & 0 \\ \begin{matrix} & O & \end{matrix} & & \ddots & \cdots \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

证明(1): 当 $m<r$ 时，用归纳法证明.

当 $m=1$ 时，显然成立.

假设 $m=k-1$时，结论成立，

即有

$$H^{k-1}=\begin{bmatrix} \multicolumn{3}{c}{\overbrace{0 \quad \cdots \quad 0}^{k\text{-}1\text{个}}} & 1 & & O \\ & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \cdots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & \cdots & 0 \\ & O & & & \ddots & \cdots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$H^k = H^{k-1}H = \begin{bmatrix} e_k^T \\ e_{k+1}^T \\ \vdots \\ e_r^T \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & e_1 & e_2 & \cdots & \cdots & \cdots & e_{r-1} \end{pmatrix}$$

$$\because e_i^T e_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad \therefore H^k = \begin{bmatrix} \overbrace{0 \quad \cdots \quad 0}^{k\text{个}} & 1 & & O \\ & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \cdots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & \cdots & 0 \\ & O & & & \ddots & \cdots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

由归纳法有$m<r$时，$$H^m = \begin{bmatrix} \overbrace{0 \quad \cdots \quad 0}^{m\text{个}} & 1 & & O \\ \ddots \quad \cdots & \ddots & \ddots & \\ \quad \ddots & \cdots & \ddots & 1 \\ & \ddots & \cdots & 0 \\ O & & \ddots & \cdots \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

若$m=r$时，$H^r=?$，由上面的结论，我们有

$$H^{r-1} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H^r = H^{r-1}H = \begin{bmatrix} e_r^T \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & e_1 & e_2 & \cdots & e_{r-1} \end{pmatrix} = O$$

即有 $m \geqslant r$ 时，$H^m = O$.

推论： 设r 阶方阵，

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & O \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ O & & & 0 \end{bmatrix}_{r\times r}$$

则有方阵级数

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m H^m = \sum_{m=0}^{r-1} a_m H^m = a_0 E + a_1 H + \cdots + a_{r-1} H^{r-1}$$

$$= \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{r-1} \\ & a_0 & a_1 & \cdots & a_{r-2} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & a_1 \\ & & & & a_0 \end{bmatrix}_{r \times r}$$

引理2： 若 $f(z)=\sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m$，则有

$$\frac{1}{s!} f^{(s)}(z)\Big|_{z=\lambda} = \sum_{m=s}^{\infty} C_m^s a_m \lambda^{m-s}$$

证明：

$$\frac{d}{dz} z^m = m z^{m-1} \qquad (m \ge 1)$$

$$\frac{d^2}{dz^2} z^m = m(m-1) z^{m-2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^s}{dz^s} z^m = m(m-1)(m-2)\cdots(m-s+1) z^{m-s}$$

$$\frac{1}{s!} f^{(s)}(z) = \sum_{m=s}^{\infty} a_m \frac{m(m-1)\cdots(m-s+1)}{s!} z^{m-s}$$

$$\frac{1}{s!} f^{(s)}(z)\Big|_{z=\lambda} = \sum_{m=s}^{\infty} C_m^s a_m \lambda^{m-s}.$$

定理1： 设幂级数 $f(z)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m z^m$ 的收敛半径为R, J 为对角线元素为 λ 的 r 阶若当块，即

$$J=\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & O \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ O & & & \lambda \end{bmatrix}_{r\times r}$$

则当$|\lambda|<R$ 时，矩阵幂级数 $\sum_{m=0}^{\infty}a_m J^m$ 收敛，且级数和为

$$\sum_{m=0}^{\infty}a_m J^m=\begin{bmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{1}{2!}f''(\lambda) & \cdots & \frac{1}{(r-1)!}f^{(r-1)}(\lambda) \\ & f(\lambda) & f'(\lambda) & \cdots & \frac{1}{(r-2)!}f^{(r-2)}(\lambda) \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & O & & f(\lambda) & f'(\lambda) \\ & & & & f(\lambda) \end{bmatrix}$$

证明：

$$J=\lambda E+H,\qquad H=\begin{bmatrix}0 & 1 & & O\\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ O & & & 0\end{bmatrix}_{r\times r}$$

$J^m=(\lambda E+H)^m$, $\because\ EH=HE\ \therefore$ 可用二项式展开.

$$=\lambda^m E+C_m^1\lambda^{m-1}H+\cdots+C_m^{m-1}\lambda H^{m-1}+H^m$$

$m\geq r$ 时，$H^m=0$

$m<r$ 时，

$$H^m=\begin{bmatrix}\overbrace{0 & \cdots & 0}^{m\text{个}} & 1 & & O\\ & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \cdots & \ddots & 1\\ & & & \ddots & \cdots & 0\\ & O & & & \ddots & \cdots\\ & & & & & 0\end{bmatrix}$$

$$J^m = \lambda^m E + C_m^1 \lambda^{m-1} H + \cdots + C_m^{r-1} \lambda^{m-r+1} H^{r-1}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda^m & C_m^1 \lambda^{m-1} & \cdots & C_m^{r-1} \lambda^{m-r+1} \\ & \lambda^m & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & C_m^1 \lambda^{m-1} \\ O & & & \lambda^m \end{bmatrix}_{r\times r}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m J^m = \begin{bmatrix} \sum_{m=0}^{\infty} a_m \lambda^m & \sum_{m=0}^{\infty} a_m C_m^1 \lambda^{m-1} & \cdots & \sum_{m=0}^{\infty} a_m C_m^{r-1} \lambda^{m-r+1} \\ & \sum_{m=0}^{\infty} a_m \lambda^m & \ddots & \sum_{m=0}^{\infty} a_m C_m^{r-2} \lambda^{m-r+2} \\ & & \ddots & \vdots \\ O & & & \sum_{m=0}^{\infty} a_m \lambda^m \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{c}\text{由引理2}\\ |\lambda|<R\end{array}\right\}\ \sum_{m=s}^{\infty} a_m C_m^s \lambda^{m-s} = \frac{1}{s!} f^{(s)}(z)\Big|_{z=\lambda}\ (s=1,\cdots,r-1)$$

$$\therefore \sum_{m=0}^{\infty} a_m J^m == \begin{bmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \cdots & \frac{1}{(r-1)!} f^{(r-1)}(\lambda) \\ & f(\lambda) & \cdots & \frac{1}{(r-2)!} f^{(r-2)}(\lambda) \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & f(\lambda) \end{bmatrix}$$

定理2： 设复变数幂级数 $f(z)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m z^m$ 的收敛半径为R, A的谱半径为$\rho(A)$，(即A的特征值模的最大值), 则当$\rho(A)<R$时，方阵幂级数 $\sum_{m=0}^{\infty}a_m A^m$ 收敛.

证明： 设复矩阵A的Jordan标准形为

$$J=\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_S \end{bmatrix}, \text{其中} J_i=\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}, 1\le i\le S,$$

即存在变换矩阵P使得$A=PJP^{-1}$, 于是

$$\sum_{m=0}^{\infty}a_m A^m=\sum_{m=0}^{\infty}a_m PJ^mP^{-1}=P\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_m J^m\right)P^{-1}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m A^m = P \begin{bmatrix} \sum_{m=0}^{\infty} a_m J_1^m & & & \\ & \sum_{m=0}^{\infty} a_m J_2^m & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{m=0}^{\infty} a_m J_s^m \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$= P \begin{bmatrix} f\left(J_1\right) & & & \\ & f\left(J_2\right) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f\left(J_s\right) \end{bmatrix} P^{-1}$$

$\because \rho(A)<R$时 4 对$i=1,2,\cdots,S$,都有$|\lambda_i|<R$, 由定理1知 $f(J_i)$收敛，因而方阵幂级数$\sum_{m=0}^{\infty} a_m A^m$收敛，其和为

$$P\begin{bmatrix} f(J_1) & & & \\ & f(J_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(J_s) \end{bmatrix} P^{-1}$$

例1： 设 $f(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{z}{4}\right)^m$, 求$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{4^m}J^m$, 其中

$$J=\begin{bmatrix} 3 & 1 & & \\ & 3 & 1 & \\ & & 3 & 1 \\ & & & 3 \end{bmatrix}.$$

解： $f(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{z}{4}\right)^m=\left(1-\frac{z}{4}\right)^{-1}$，其收敛半径$R$=4. 因$J$ 的特征值3落在有$f(z)$的收敛域内，所以由定理1可知

$\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{J}{4}\right)^m$是收敛的且

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{J}{4}\right)^m=\begin{bmatrix} f(3) & f'(3) & \frac{1}{2!}f''(3) & \frac{1}{3!}f^{(3)}(3) \\ & f(3) & f'(3) & \frac{1}{2!}f''(3) \\ & & f(3) & f'(3) \\ & & & f(3) \end{bmatrix}$$

$$\because \quad f'(z)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{z}{4}\right)^{-2}, f''(z)=\frac{1}{8}\left(1-\frac{z}{4}\right)^{-3},$$

$$f^{(3)}(z)=\frac{3}{32}\left(1-\frac{z}{4}\right)^{-4}$$

$$\therefore \quad f(3)=4,\ f'(3)=4,\ f''(3)=8,\ f^{(3)}(3)=24.$$

$$\therefore \quad \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{4^m}J^m=\begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ & 4 & 4 & 4 \\ & & 4 & 4 \\ & & & 4 \end{bmatrix}.$$

例2： 设 $f(z)=2-z+2z^3$，求$2E-A+2A^3$，其中

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & & & & \\ & 1 & 1 & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 2 & 1 & \\ & & & & 2 & 1 \\ & & & & & 2\end{bmatrix}.$$

解： 可将$f(z)$看作幂级数 $f(z)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m z^m$，其中$a_0=2$, $a_1=-1, a_2=0, a_3=2, a_m=0\ (m>3)$, 则其收敛半径为 ∞，A的特征值 1,2 在收敛域内，$\therefore \sum_{m=0}^{\infty}a_m A^m$ 收敛.

又 $f'(z) = -1 + 6z^2,\ f''(z) = 12z,$

$\because\ f(1) = 3,\quad f(2) = 16,\ f'(1) = 5,\ f''(1) = 12,$

$f'(2) = 23,\ f''(2) = 24$

$$\therefore\ 2 - A + 2A^3 = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 & & & \\ & 3 & 5 & & & \\ & & 3 & & & \\ & & & 16 & 23 & 12 \\ & & & & 16 & 23 \\ & & & & & 16 \end{bmatrix}.$$

§ 5.4 矩阵函数

定义： 设 $f(z)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m z^m$ 是复变数幂级数，若矩阵幂级数 $\sum_{m=0}^{\infty}a_m A^m$ 收敛，则定义矩阵函数 $f(A)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m A^m$

由 § 5.3中定理2的证明，我们有

$$f(A)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m A^m=P\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_m J^m\right)P^{-1}$$

$$=P\begin{bmatrix} f(J_1) & & & \\ & f(J_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(J_s)\end{bmatrix}P^{-1},\text{其中}f(J_i)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m J_i^m,\quad i=1,\cdots,s$$

在复变函数论中已知的结论：

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \cdots + \frac{1}{k!}z^k + \cdots = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^m}{m!}$$

$$\sin z = z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 + \cdots + \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}z^{2k-1} + \cdots$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{z^{2m-1}}{(2m-1)!}$$

$$\cos z = 1 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 + \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k)!}z^{2k} + \cdots$$

$$= 1 + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{z^{2m}}{(2m)!}$$

在整个复平面上都收敛，由 § 5.3中的定理2, $\forall A \in C^{n\times n}$,

下列各方阵幂级数

$$E + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^k + \cdots = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{A^m}{m!}$$

$$A - \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{5!}A^5 + \cdots + \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}A^{2k-1} + \cdots = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{A^{2m-1}}{(2m-1)!}$$

$$E - \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{4!}A^4 + \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k)!}A^{2k} + \cdots = E + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{A^{2m}}{(2m)!}$$

都收敛，它们的和分别用记号 $e^A, \sin A, \cos A$ 来表示，

并分别称为矩阵A的指数函数、正弦函数和余弦函数.

这三类函数是常用的矩阵函数.

例1：试证明 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{-At}=-e^{-At}A$

证明：

$$e^{-At}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}(-At)^m=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}(-A)^m t^m$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{-At}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}(-A)^m mt^{m-1}$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(m-1)!}(-At)^{m-1}(-A)$$

$$=-\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-At)^n\right)A$$

$$=-e^{-At}A$$

例2： 已知n阶方阵A是零矩阵，求 e^A

解：$f(z)=e^z=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^m}{m!}$ 在整个复平面上都收敛. A的特征值为0. 落在e^z的收敛域内，由 § 5.3中定理1有

$$e^A=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{A^m}{m!}$$ 收敛，且

$$e^A=\begin{bmatrix} f(0) & & & \\ & f(0) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^0 & & & \\ & e^0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^0 \end{bmatrix}$$

$$=E_{n\times n}$$

例3：若n阶方阵A与B可交换，即$AB=BA$,试证

$$(1)\ \left(e^{A}\right)^{-1}=e^{-A};\qquad (2)\ e^{A}e^{B}=e^{B}e^{A}=e^{A+B}.$$

证：(2) 因为 $AB=BA$

所以由二项式定理，有 $(A+B)^{m}=\sum_{k=0}^{\infty}C_{m}^{k}A^{m-k}B^{k}.$

$$e^{A+B}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}(A+B)^{m}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m}C_{m}^{k}A^{m-k}B^{k}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!(m-k)!}A^{m-k}B^{k}=\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{A^{i}}{i!}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{B^{j}}{j!}\right)=e^{A}e^{B}$$

又 $\because e^{B+A}=e^{B}e^{A},B+A=A+B\ \therefore e^{A}e^{B}=e^{B}e^{A}=e^{A+B}.$

(1) 令$B=-A$，有 $e^{A}e^{-A}=E=e^{-A}e^{A}$

从而有$\left(e^{A}\right)^{-1}=e^{-A}$. 即只要$A$是$n$阶方阵，则$e^{A}$必是可逆矩阵，且其逆矩阵为$e^{-A}$.

证：

$$e^{At}B=\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}A^m t^m\right)B=B\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}A^m t^m=Be^{At} \qquad (1)$$

同理可证 $e^{Bt}A=Ae^{Bt} \qquad (2)$

$$\therefore \quad e^{(A+B)t}A=A\,e^{(A+B)t}$$

$$e^{(A+B)t}B=B\,e^{(A+B)t}$$

令 $C(t)=e^{(A+B)t}e^{-At}e^{-Bt}$, 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C(t)=(A+B)e^{(A+B)t}e^{-At}e^{-Bt}+e^{(A+B)t}(-A)e^{-At}e^{-Bt}$$

$$+e^{(A+B)t}e^{-At}(-B)e^{-Bt}=O$$

即 $C(t)$与 t 无关， $C(1)=C(0)$

又 $C(0)=E$， $C(1)=e^{A+B}e^{-A}e^{-B}$

$$\therefore e^{A+B}e^{-A}e^{-B}=E \qquad (*)$$

令 $B=-A$，有 $e^{A}e^{-A}=E$,即 $\left(e^{A}\right)^{-1}=e^{-A}$

在(*) 两边右乘 $e^{B}e^{A}$,有 $e^{A+B}=e^{B}e^{A}$

交换A与B的位置得 $e^{B+A}=e^{A}e^{B}$

矩阵函数的第一种计算方法：$f(A)=\sum_{m=0}^{\infty}a_{m}A^{m}$

1. A 是否为若当标准形，若是则转第2步，否则求A的若当标准形J及相似变换矩阵P和P^{-1},使得

$$P^{-1}AP=J=\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix}.$$

其中J_i是特征值为λ_i的r_i阶若当块.

2.若J中若当块的最高阶为l，即 $l=\max\{r_1,r_2,\cdots,r_s\}$，

则依次求出：$f'(x), f''(x),\cdots, f^{(l-1)}(x)$;

3.对i=1,2,⋯,s 依次计算

$$f(J_i)=\begin{bmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \frac{1}{2!}f''(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(r_i-1)!}f^{(r_i-1)}(\lambda_i) \\ & f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(r_i-2)!}f^{(r_i-2)}(\lambda_i) \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & O & & f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) \\ & & & & f(\lambda_i) \end{bmatrix}$$

4. ①若A 是若当标准形，$A = J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix}$，则

$$f(A) = f(J) = \begin{bmatrix} f(J_1) & & & \\ & f(J_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(J_s) \end{bmatrix}$$

②若A 不是若当标准形，$P^{-1}AP = J$, 则有

$$f(A) = Pf(J)P^{-1} = P\begin{bmatrix} f(J_1) & & & \\ & f(J_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(J_s) \end{bmatrix}P^{-1}.$$

例： 设 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&1&1\\1&-1&3\end{bmatrix}$ 求矩阵函数 $A^{20}, e^{A}, \sin A, e^{At}$

解： A 不是若当标准形，故首先求A的若当标准形.

$$\lambda E-A=\begin{bmatrix}\lambda-2&0&0\\-1&\lambda-1&-1\\-1&1&\lambda-3\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2-r_3}\begin{bmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda-2&2-\lambda\\-1&1&\lambda-3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_3+C_2}\begin{bmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda-2&0\\-1&1&\lambda-2\end{bmatrix}$$

$$D_1(\lambda)=1,\quad D_2(\lambda)=\lambda-2,\quad D_3(\lambda)=(\lambda-2)^3$$

$$d_1(\lambda)=1,\quad d_2(\lambda)=\lambda-2,\quad d_3(\lambda)=(\lambda-2)^2$$

$$\lambda E-A\sim\begin{bmatrix}1 & & \\ & \lambda-2 & \\ & & (\lambda-2)^2\end{bmatrix}$$ 即 $$A\sim J=\begin{bmatrix}2 & & \\ & 2 & 1 \\ & & 2\end{bmatrix}$$

令 $P=(P_1,P_2,P_3)$, $\quad AP=PJ$

$$A(P_1,P_2,P_3)=(P_1,P_2,P_3)\begin{bmatrix}2 & & \\ & 2 & 1 \\ & & 2\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}(A-2E)P_1=0\\(A-2E)P_2=0\\(A-2E)P_3=P_2\end{cases}$$

解 $(A-2E)X=0$ 得到两个线性无关的解向量：

$$\alpha=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\quad \beta=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}.$$ 于是它的通解为：$k_1\alpha+k_2\beta=\begin{bmatrix}k_1\\k_1+k_2\\k_2\end{bmatrix}$,

要使 $(A-2E)P_3=P_2$ 有解，必须使增广矩阵的秩等于系数矩阵的秩.

系数矩阵 $A-2E=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&-1&1\\1&-1&1\end{bmatrix}$ 的秩为1.

增广矩阵 $\left[\begin{array}{ccc:c}0&0&0&k_1\\1&-1&1&k_1+k_2\\1&-1&1&k_2\end{array}\right]\to\begin{bmatrix}0&0&0&k_1\\1&-1&1&k_1+k_2\\0&0&0&-k_1\end{bmatrix}$

的秩为1. $\therefore k_1=0, k_2\neq 0,$ 不妨取 $k_2=1$

取 $P_2=\beta=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$, 得 $P_3=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, 取 $P_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$,

即 $P=(P_1,P_2,P_3)=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&0\end{bmatrix}$, $P^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&-1\\0&0&1\\1&-1&1\end{bmatrix}$

记 $f_1(A)=A^{20}$, $f_2(A)=e^A$, $f_3(A)=\sin A$, $f_4(A)=e^{At}$

因为J 的若当块最高阶数为2.

$\therefore\ f_1(x)=x^{20},\ f_1'(x)=20x^{19}$

$f_1(2)=2^{20},\ f_1'(2)=20\times 2^{19}$

$$f_1(J)=\begin{bmatrix}2^{20} & & \\ & 2^{20} & 20\times 2^{19} \\ & & 2^{20}\end{bmatrix}=2^{20}\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & 10 \\ & & 1\end{bmatrix},$$

$$f_1(A)=Pf_1(J)P^{-1}=2^{20}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 \\ 10 & -9 & 10 \\ 10 & -10 & 11\end{bmatrix},$$

$$f_2(x)=e^x,\ f_2'(x)=e^x$$

$$f_2(2)=e^2,\ f_2'(2)=e^2$$

$$f_2(J)=\begin{bmatrix}e^2 & & \\ & e^2 & e^2 \\ & & e^2\end{bmatrix}=e^2\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & 1 \\ & & 1\end{bmatrix},$$

$$f_2(A)=Pf_2(J)P^{-1}=e^2\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&1\\1&-1&2\end{bmatrix},$$

$$f_3(x)=\sin x,\ f_3'(x)=\cos x$$

$$f_3(2)=\sin 2,\ f_3'(2)=\cos 2$$

$$f_3(J)=\begin{bmatrix}\sin 2&&\\&\sin 2&\cos 2\\&&\sin 2\end{bmatrix}$$

$$f_3(A)=Pf_3(J)P^{-1}=\sin 2\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\cos 2\begin{bmatrix}0&0&0\\1&-1&1\\1&-1&1\end{bmatrix}$$

$$f_4(x)=e^{xt},\ f_4'(x)=te^{xt}$$

$$f_4(2)=e^{2t},\ f_4'(2)=te^{2t}$$

$$f_4(J)=\begin{bmatrix} e^{2t} & & \\ & e^{2t} & te^{2t} \\ & & e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$f_4(A)=Pf_4(J)P^{-1}=e^{2t}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1-t & t \\ t & -t & 1+t \end{bmatrix}$$

例： 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$， 求矩阵函数 $e^{A}, \sin A, \cos A$

解： $|\lambda E-A|=(\lambda-1)(\lambda-2)$ 故A 的特征值有$\lambda_1=1, \lambda_2=2.$

$$\therefore A\sim\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix},\quad \lambda_1=1, \begin{bmatrix}0 & -1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\quad \alpha_1=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\lambda_2=2, \begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\quad \alpha_2=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$ 令$P=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，则 $P^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$,

$$\therefore A=P\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}P^{-1},$$

$$\therefore e^{A} = P\begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & e^{2} \end{bmatrix}P^{-1} = \begin{bmatrix} e & -e+e^{2} \\ 0 & e^{2} \end{bmatrix}$$

$$\sin A = P\begin{bmatrix} \sin 1 & 0 \\ 0 & \sin 2 \end{bmatrix}P^{-1} = \begin{bmatrix} \sin 1 & -\sin 1+\sin 2 \\ 0 & \sin 2 \end{bmatrix}$$

$$\cos A = P\begin{bmatrix} \cos 1 & 0 \\ 0 & \cos 2 \end{bmatrix}P^{-1} = \begin{bmatrix} \cos 1 & -\cos 1+\cos 2 \\ 0 & \cos 2 \end{bmatrix}$$

注： 如果A 的特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \ldots$，则有

e^A 的特征值为$e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \ldots$;

$\sin A$的特征值为$\sin\lambda_1, \sin\lambda_2, \ldots$;

$\cos A$的特征值为$\cos\lambda_1, \cos\lambda_2, \ldots$

矩阵函数的第二种计算方法:

定义: 设 $A\in C^{n\times n}$ $,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t$ 是矩阵A的谱(即A的互异特征值全体). A的最小多项式为m次多项式$m_A(\lambda)$,

$$m_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{m_t}$$

其中 $m=m_1+m_2+\cdots+m_t$, 记 $l=\max\{m_1,m_2,\cdots,m_t\}$.

设 $f(\lambda)$是一个给定的具有l-1阶导数的函数，则我们把下列m个值

$$f(\lambda_1),f'(\lambda_1),\cdots,f^{(m_1-1)}(\lambda_1)$$

$$f(\lambda_2),f'(\lambda_2),\cdots,f^{(m_2-1)}(\lambda_2) \qquad (1)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f(\lambda_t),f'(\lambda_t),\cdots,f^{(m_t-1)}(\lambda_t)$$

称为 $f(\lambda)$关于矩阵A的谱上的值.如果这些值均存在，则称 $f(\lambda)$ 在A的谱上有定义.

对于给定的矩阵A，$f(A)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m A^m = Qf(J)Q^{-1}$

J_i为m_i阶若当块

$$f(A)=Q\begin{bmatrix} f(J_1) & & & \\ & f(J_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(J_t) \end{bmatrix}Q^{-1}$$

$$f(J_i)=\begin{bmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(m_i-1)!}f^{(m_i-1)}(\lambda_i) \\ & f(\lambda_i) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & f'(\lambda_i) \\ & & & f(\lambda_i) \end{bmatrix}_{m_i\times m_i} \quad (2)$$

即$f(A)$仅由 $f(\lambda)$关于矩阵A的谱上的值即(1)式所确定.若(1)式中某个$f^{(j)}(\lambda_i)$无意义，则 $f(A)$不存在.

当多项式的次数不高时，计算矩阵多项式是比较简单的，为此我们试图把计算一般的矩阵函数转化成计算矩阵的多项式，构造多项式$P(\lambda)$，使得

$$\begin{cases} P(\lambda_1) = f(\lambda_1), P'(\lambda_1) = f'(\lambda_1), \cdots, P^{(m_1-1)}(\lambda_1) = f^{(m_1-1)}(\lambda_1), \\ P(\lambda_2) = f(\lambda_2), P'(\lambda_2) = f'(\lambda_2), \cdots, P^{(m_2-1)}(\lambda_2) = f^{(m_2-1)}(\lambda_2), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P(\lambda_t) = f(\lambda_t), P'(\lambda_t) = f'(\lambda_t), \cdots, P^{(m_t-1)}(\lambda_t) = f^{(m_t-1)}(\lambda_t), \end{cases} \quad (3)$$

即函数$f(\lambda)$与多项式$P(\lambda)$关于矩阵A的谱上的值相同，设$A=QJQ^{-1}$,其中J为A的若当标准形，Q是相似变换矩阵，由(2)知$f(J)=P(J)$.

$$f(A) = Qf(J)Q^{-1} = QP(J)Q^{-1} = P\left(QJQ^{-1}\right) = P(A)$$

∵矩阵A的最小多项式$m_A(\lambda)$是m次多项式，故对任一多项式$g(\lambda)$,存在次数小于m的多项式$P(\lambda)$,使得$g(A)=P(A)$.

令$P(\lambda)$为如下m-1次多项式$P(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\cdots+a_{m-1}\lambda^{m-1}$

$P(\lambda)$共有m个待定系数 $a_0,a_1,\cdots,a_{m-1}$ 而 (3) 式正是这m个待定系数的方程.可以证明这个线性方程的系数矩阵的行列式不为零，因此有唯一解，从而$a_0,a_1,\cdots,a_{m-1}$可以唯一确定，有了$P(\lambda)$可以算出$P(A)$, 从而$f(A)=P(A)$也就得到了.

矩阵函数的第二种计算方法:

1.计算A的最小多项式$m_A(\lambda)$,确定次数m及根与根的重数;

2.设多项式$P(\lambda)$为 $P(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\cdots+a_{m-1}\lambda^{m-1}$,

由(3)式确定出系数 $a_0,a_1,\cdots,a_{m-1}$

3.计算$P(A)$从而得到$f(A)$.

例1：设 $A=\begin{bmatrix}2&1&4\\0&2&0\\0&3&1\end{bmatrix}$ 求矩阵函数 e^{At}

解： (1) 先求A的最小多项式

法1：

$$\lambda E-A=\left[\begin{array}{c|cc}\lambda-2&-1&-4\\0&\lambda-2&0\\\hline 0&-3&\lambda-1\end{array}\right]$$

$D_1(\lambda)=1,\quad D_2(\lambda)=1,$

$D_3(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$

$d_1(\lambda)=1,\quad d_2(\lambda)=1,$

$d_3(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$

$$\therefore \lambda E-A\cong\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&(\lambda-1)(\lambda-2)^2\end{bmatrix},$$ 即 $m_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$

法2:

$|\lambda E-A|=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$，直接验证知 $(\lambda-1)(\lambda-2)$ 不是 A的零化多项式

$$m_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$$

$m_A(\lambda)$ 的最高次数为3，根为1,2，重数分别为1,2.

(2) 设 $P(\lambda)=a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2,\quad (a_2\neq 0)$

$f(\lambda)=e^{\lambda t}$，则 $f(A)=e^{At}$，

$$\left.\begin{array}{l} P(1)=f(1) \Leftrightarrow a_0+a_1+a_2=e^t \\ P(2)=f(2) \Leftrightarrow a_0+2a_1+4a_2=e^{2t} \\ P'(2)=f'(2) \Leftrightarrow a_1+4a_2=te^{2t} \end{array}\right. \text{得} \begin{cases} a_0=4e^t-3e^{2t}+2te^{2t} \\ a_1=-4e^t+4e^{2t}-3te^{2t} \\ a_2=e^t-e^{2t}+te^{2t} \end{cases}$$

$$\therefore P(\lambda)=4e^t-3e^{2t}+2te^{2t}+\left(-4e^t+4e^{2t}-3te^{2t}\right)\lambda+\left(e^t-e^{2t}+te^{2t}\right)\lambda^2$$

$$P(\lambda)=e^{t}\left(4-4\lambda+\lambda^{2}\right)+e^{2t}\left(-3+4\lambda-\lambda^{2}\right)+te^{2t}\left(2-3\lambda+\lambda^{2}\right)$$

(3) $$f(A)=P(A)=e^{t}\left(4E-4A+A^{2}\right)+e^{2t}\left(-3E+4A-A^{2}\right)+te^{2t}\left(2E-3A+A^{2}\right)$$

计算得到

$$e^{At}=\begin{bmatrix} e^{2t} & 12e^{t}-12e^{2t}+13te^{2t} & -4e^{t}+4e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & -3e^{t}+3e^{2t} & e^{t} \end{bmatrix}$$

例2：设 $A=\begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}$ 试证 $e^{A}=\begin{bmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{bmatrix}$

解：(1) $a\neq 0$

$$\lambda E-A=\begin{bmatrix} \lambda & -a \\ a & \lambda \end{bmatrix}$$

$D_1(\lambda)=1,\quad D_2(\lambda)=\lambda^2+a^2,$

$\lambda_1=ai,\quad \lambda_2=-ai$

$$\therefore m_A(\lambda)=\lambda^2+a^2=(\lambda+ai)(\lambda-ai)$$

设 $P(\lambda)=a_0+a_1\lambda,$ 则

$$\begin{cases} P(\lambda_1)=e^{\lambda_1} \\ P(\lambda_2)=e^{\lambda_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0+a_1 ai=e^{ai} \\ a_0+a_1(-ai)=e^{-ai} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1=\dfrac{1}{2ai}\left(e^{ai}-e^{-ai}\right)=\dfrac{1}{a}\sin a \\ a_0=e^{ai}-\dfrac{i}{2i}\left(e^{ai}-e^{-ai}\right)=\dfrac{1}{2}\left(e^{ai}+e^{-ai}\right)=\cos a \end{cases}$$

$$\therefore P(\lambda)=\cos a+\frac{1}{a}\sin a\lambda$$

$$P(A)=e^{A}=(\cos a)E+\frac{1}{a}\sin a\begin{bmatrix}0 & a\\ -a & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos a & \sin a\\ -\sin a & \cos a\end{bmatrix}$$

（2） $a=0$

$$A=O_{2\times 2},\quad e^{A}=E_{2\times 2}$$

例3：设 $A=\begin{bmatrix}\sigma & \omega\\ -\omega & \sigma\end{bmatrix}$ 求 e^{A}

解：$A=\sigma E+\begin{bmatrix}0 & \omega\\ -\omega & 0\end{bmatrix}$, 令 $\begin{bmatrix}0 & \omega\\ -\omega & 0\end{bmatrix}=B$, 则 $e^{B}=\begin{bmatrix}\cos\omega & \sin\omega\\ -\sin\omega & \cos\omega\end{bmatrix}$

$A=\sigma E+B$, $\quad e^{A}=e^{\sigma E+B}=e^{\sigma E}e^{B}$

$$\lambda E-\sigma E=\begin{bmatrix}\lambda-\sigma & 0\\ 0 & \lambda-\sigma\end{bmatrix} \qquad e^{\sigma E}=\begin{bmatrix}e^{\sigma} & 0\\ 0 & e^{\sigma}\end{bmatrix}$$

$$\therefore e^{A}=\begin{bmatrix}e^{\sigma} & 0\\ 0 & e^{\sigma}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\omega & \sin\omega\\ -\sin\omega & \cos\omega\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}e^{\sigma}\cos\omega & e^{\sigma}\sin\omega\\ -e^{\sigma}\sin\omega & e^{\sigma}\cos\omega\end{bmatrix}$$

$$=e^{\sigma}\begin{bmatrix}\cos\omega & \sin\omega\\ -\sin\omega & \cos\omega\end{bmatrix}.$$

§ 5.5 矩阵函数与微分方程组的解

设一阶线性常系数常微分方程组的初值问题为：

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) + f_1(t), \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) + f_2(t), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dx_n(t)}{dt} = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) + f_n(t). \end{cases}$$

$$x_1(t)\big|_{t=0} = x_1(0), \quad x_2(t)\big|_{t=0} = x_2(0), \cdots, \quad x_n(t)\big|_{t=0} = x_n(0).$$

设

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, x(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, f(t)=\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix},$$

则上面的两式可写成如下矩阵形式：

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt}=Ax(t)+f(t) \\ x(t)\big|_{t=0}=x(0) \end{cases}$$

定理5.5.1 一阶线性常系数常微分方程组的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + f(t) \\ x(t)\big|_{t=0} = x(0) \end{cases}$$

的解为 $x(t) = e^{At}x(0) + e^{At}\int_0^t e^{-Au} f(u)du.$

证明： $\because \dfrac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + f(t)$ 等式两边同时乘以e^{-At}

$$\therefore e^{-At}\frac{dx(t)}{dt} = e^{-At}Ax(t) + e^{-At}f(t)$$

在§5.4中我们讲过例1有 $\dfrac{d}{dt}\left(e^{-At}\right) = e^{-At}(-A)$，从而

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-At}x(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(e^{-At}\right)x(t) + e^{-At}\frac{d}{dt}x(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-At}x(t)\right) = -e^{-At}Ax(t) + e^{-At}\frac{d}{dt}x(t)$$

即 $$\frac{d}{dt}(e^{-At}x(t)) = e^{-At}f(t).$$

$$\int_0^t \frac{d}{du}\left(e^{-Au}x(u)\right)du = \int_0^t e^{-Au}f(u)du$$

$$\therefore\ e^{-At}x(t) - x(0) = \int_0^t e^{-Au}f(u)du.$$

在上式两边同时左乘e^{At}，又 $\because e^{At}e^{-At} = e^{O_{n\times n}} = E,$

$$\therefore\ x(t) = e^{At}x(0) + e^{At}\int_0^t e^{-Au}f(u)du.$$

注：当 $f(t)$=0 时，可得线性常系数齐次常微分方程组的

初值问题 $\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = Ax(t) \\ x(t)\big|_{t=0} = x(0) \end{cases}$ 的解为 $x(t) = e^{At}x(0).$

例1：求常系数线性齐次微分方程组 $\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = Ax(t) \\ x(t)\big|_{t=0} = x(0) \end{cases}$

的解，其中 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$, $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

解： 由定理知方程组的解为 $x(t) = e^{At}x(0)$.

下面求矩阵函数 e^{At}.

$$\lambda E - A = \begin{bmatrix} \lambda-2 & -2 & 1 \\ 1 & \lambda+1 & -1 \\ 1 & 2 & \lambda-2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_3} \begin{bmatrix} \lambda-2 & -2 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 1 & 2 & \lambda-2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3+c_2}\begin{bmatrix}\lambda-2 & -2 & -1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 2 & \lambda\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1+r_3}\begin{bmatrix}\lambda-1 & 0 & \lambda-1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 2 & \lambda\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3-c_1}\begin{bmatrix}\lambda-1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 2 & \lambda-1\end{bmatrix}$$

$$d_1(\lambda)=D_1(\lambda)=1,$$
$$d_2(\lambda)=D_2(\lambda)=\lambda-1,$$
$$D_3(\lambda)=(\lambda-1)^3$$
$$d_3(\lambda)=(\lambda-1)^2$$

$$\therefore \lambda E-A\cong\begin{bmatrix}1 & & \\ & \lambda-1 & \\ & & (\lambda-1)^2\end{bmatrix},\qquad \therefore A\sim J=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & 1\\ & & 1\end{bmatrix}$$

方法一：

$$E-A=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

令 $P=\left(P_1,P_2,P_3\right)$,

$$A\left(P_1,P_2,P_3\right)=\left(P_1,P_2,P_3\right)\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & 1\\ & & 1\end{bmatrix}$$

$$P_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\quad P_2=k_1\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$$

$$\left(E-A,-P_2\right)=\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & -k_1 \\ 1 & 2 & -1 & -k_2 \\ 1 & 2 & -1 & -\left(k_1+2k_2\right) \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\left(k_1+k_2\right) \\ 1 & 2 & -1 & -k_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\left(k_1+k_2\right) \end{bmatrix}$$

$k_1+k_2=0$, 不妨取$k_1=1$, $k_2=-1$,

有$P_2=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $P_3=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

即相似变换矩阵$P=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-1&0\\1&-1&0\end{bmatrix}$, $P^{-1}=\begin{bmatrix}0&-1&1\\0&-1&0\\1&2&-1\end{bmatrix}$,

$$x(t)=e^{At}x(0)=Pe^{Jt}P^{-1}x(0),$$

$$=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-1&0\\1&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^t&&\\&e^t&te^t\\&&e^t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1&1\\0&-1&0\\1&2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix},$$

$$=\begin{bmatrix}e^t\\e^t\\3e^t\end{bmatrix}$$

方法二：$m_A(\lambda)=(\lambda-1)^2$，

设 $P(\lambda)=a_0+a_1\lambda,\ P'(\lambda)=a_1,$

$$\begin{cases} P(1)=e^t \\ P'(1)=te^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0+a_1=e^t \\ a_1=te^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0=e^t(1\text{-}t) \\ a_1=te^t \end{cases}$$

$$\therefore P(\lambda)=e^t(1-t)+te^t\lambda,$$

$$\therefore e^{At}=P(A)=e^t(1-t)E+te^t\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix},$$

$$=e^t\begin{bmatrix} t+1 & 2t & -t \\ -t & 1-2t & t \\ -t & -2t & t+1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore x(t)=e^{At}x(0)=e^t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^t \\ e^t \\ 3e^t \end{bmatrix}$$

例： 求矩阵微分方程组的解 $\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + f(t) \\ x(t)\big|_{t=0} = x(0) \end{cases}$

其中 $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $f(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{2t} \end{bmatrix}$, $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

解： 方程组的解为 $x(t) = e^{At}x(0) + e^{At}\int_0^t e^{-Au} f(u)du$

下面先求 e^{At}

$$\lambda E - A = \begin{bmatrix} \lambda-3 & 1 & -1 \\ -2 & \lambda & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-2 \end{bmatrix} \xrightarrow{c_2 \leftrightarrow c_1} \begin{bmatrix} 1 & \lambda-3 & -1 \\ \lambda & -2 & 1 \\ 1 & -1 & \lambda-2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_3+c_1]{c_2+c_1}\begin{bmatrix}1 & \lambda-2 & 0\\ \lambda & \lambda-2 & \lambda+1\\ 1 & 0 & \lambda-1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2-r_1}\begin{bmatrix}1 & \lambda-2 & 0\\ \lambda-1 & 0 & \lambda+1\\ 1 & 0 & \lambda-1\end{bmatrix}$$

$$D_1(\lambda)=1,\ D_2(\lambda)=1,\ D_3(\lambda)=\lambda(\lambda-2)(\lambda-3)$$

所以A有三个不同的特征值 $\lambda_1=0,\lambda_2=2,\lambda_3=3,$

与特征值相应的三个线性无关的特征向量为

$$P_1=\begin{bmatrix}1\\5\\2\end{bmatrix},\quad P_2=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad P_3=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix},\text{于是}P=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 5 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$P^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & -3 & 9 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix},$$

$$e^{At}x(0) = P\begin{bmatrix} 1 & & \\ & e^{2t} & \\ & & e^{3t} \end{bmatrix} P^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1+3e^{2t}-8e^{3t} \\ -5+3e^{2t}-4e^{3t} \\ -2-4e^{3t} \end{bmatrix},$$

$$e^{A(t-u)}f(u) = P\begin{bmatrix} 1 & & \\ & e^{2(t-u)} & \\ & & e^{3(t-u)} \end{bmatrix} P^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$
= -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -e^{2u}+9e^{2t}-8e^{3t-u} \\ -5e^{2u}+9e^{2t}-4e^{3t-u} \\ -2e^{2u}-4e^{3t-u} \end{bmatrix},
$$

$$
e^{At}\int_0^t e^{-Au}f(u)du = \int_0^t e^{A(t-u)}f(u)du
$$

$$
= -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} \frac{1}{2}+\left(9t+\frac{15}{2}\right)e^{2t}-8e^{3t} \\ \frac{5}{2}+\left(9t+\frac{3}{2}\right)e^{2t}-4e^{3t} \\ 1+3e^{2t}-8e^{3t} \end{bmatrix},
$$

$$\therefore\ x(t) = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}+\left(9t+\frac{21}{2}\right)e^{2t}-16e^{3t} \\ -\frac{5}{2}+\left(9t+\frac{9}{2}\right)e^{2t}-8e^{3t} \\ -1+3e^{2t}-8e^{3t} \end{bmatrix}.$$