第三章 线性空间与线性变换

岳晓青

同济大学数学科学学院

xiaoqingyue@tongji.edu.cn

线性空间与线性变换

n 个有次序的实数所组成的数组

$$\alpha=\left(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\right)^T$$

称为n 维向量， n 维向量的全体在向量的加法和数乘运算下构成的向量空间 R^n.

这一章我们这些概念加以推广、抽象成一般的向量和线性空间.

§3.1 线性空间的基本概念

定义： 一个含有非零数的集合F，如果任意两个数的和、差、积、商（零不为除数）仍在该集合中，则称F为**数域**.

例：

Q ： 有理数全体构成有理数域；

R ： 实数全体构成实数域；

C ： 复数全体构成复数域；

定义： 设V是一个非空集合，V中元素用 $\alpha,\beta,\cdots$ 表示. $V=\{\alpha,\beta,\gamma,\cdots\}$.$F$ 是一个数域. F 中元素以 $k,l,\cdots$ 表示. $F=\{k,l,\cdots\}$. 在V的元素之间定义一种加法运算：对V中依次取出的两个元素 $\alpha,\beta,$ 根据一定的规则，在V中有唯一的元素 γ与它们对应, 称 γ为 α与β的和,记$\gamma=\alpha+\beta$ 且加法满足下面规则(1)-(4)：

$\forall\alpha,\beta,\gamma\in V$, 有

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;

(3) 存在零元素: $\exists\beta\in V,\ \forall\alpha\in V,\ \alpha+\beta=\alpha,$
称 β 为零元素, 并记 β 为 0;

(4) 存在负元素$\forall\alpha\in V,\ \exists\beta\in V,\ \alpha+\beta=0;$
称 β 为α的负元素, 并记 β 为 $-\alpha$;

又在数域F 与集合V 元素之间定义一种数乘运算：

$\forall k \in F, \forall \alpha \in V$, 根据一定的规则，在$V$中有唯一的元素$\beta$ 与它们对应, $\beta = k \cdot \alpha$ 称 β 为 k 与 α 的数乘,且数乘满足下面的规则(5)-(6)：

$\forall k, l \in F$, $\forall \alpha, \beta \in V$, 有

$$(5)\quad 1 \cdot \alpha = \alpha$$

$$(6)\quad k \cdot (l \cdot \alpha) = (k \cdot l) \cdot \alpha$$

加法与数乘两个运算之间满足下面规则(7)-(8):

$$(7)\quad (k+l) \cdot \alpha = k\alpha + l\alpha$$

$$(8)\quad k \cdot (\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$$

称V 为 F 上的线性空间.

注：

1. V 中元素不论其性质如何，统称为**向量**. 若不引起混淆，简称V为线性空间或向量空间； V 中的加法和数乘统一称为**线性运算**，数乘 $k\circ\alpha$ 简写 $k\alpha$

2. 如 $F=R$,称V为**实线性空间**；

   如 $F=C$ ，称V为**复线性空间**.

例： R 为实数域，R上全体 n 维向量的集合记为

$$R^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\mid x_1,x_2,\cdots,x_n\in R\}$$

$$\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}},\ \beta=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}\in R^n,\ k\in R$$

定义加法和数乘如下：

1. 加法

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{bmatrix},$$

2. 数乘

$$k\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx_1 \\ kx_2 \\ \vdots \\ kx_n \end{bmatrix}, \quad k \in R,$$

则加法与数乘满足(1)-(8)，R^n 为 R 上的线性空间.

例：

$$S^n = \left\{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \middle| \; x_1, x_1, \cdots, x_n \in R \right\}$$

定义加法如例1中的加法

数乘为

$$k \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad k \in R,$$

可知S^n对上面两个运算封闭，但当 $x \neq O$ 时$1 \square x = O \neq x$ 不满足（5），$\therefore$ S^n不构成线性空间.

注：

0. S^n与R^n作为集合是一样的，由于所定义的运算不同使得R^n是线性空间，而S^n不是线性空间.

1. 线性空间的概念是集合与线性运算二者的结合.

2. 线性空间V中所定义的线性运算是本质，而V中向量具体是什么并不重要；

3. R^n中向量组的线性相关、线性无关和一个向量由向量组线性表示等定义结论，可以沿用到抽象的线性空间中.

4. 线性空间V中零元素和负元素是唯一的.

例: 实数域 R上的全体 m×n 矩阵，对矩阵的加法和数乘运算构成 R上的线性空间，记作 $R^{m\times n}$

$$R^{m\times n}=\{A \mid A=(a_{ij})_{m\times n},\ a_{ij}\in R\}$$

$$\because A_{m\times n}+B_{m\times n}=C_{m\times n}\in R^{m\times n},$$

$$\lambda A_{m\times n}=D_{m\times n}\in R^{m\times n},$$

$\therefore$ $R^{m\times n}$是一个线性空间。

例：次数小于n的多项式的全体，记作 $P[x]_n$

$$P[x]_n = \{ a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_{n-1}, \cdots, a_0 \in R \}$$

对于多项式的加法、数乘多项式构成线性空间。

例：n-1 次多项式的全体

$$Q[x]_n = \{a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_{n-1} \neq 0 \}$$

对于多项式的加法和数乘运算不构成线性空间

$$\because 0p = 0x^{n-1} + \cdots + 0x + 0 \notin Q[x]_n$$

$\therefore Q[x]_n$ 对运算不封闭

例: 正弦函数的集合

$$S[x]=\{\, a\sin(x+b) \mid a,b\in \mathbf{R}\}.$$

对于通常的函数加法及数与函数的乘法构成线性空间.

$$\because s_1+s_2=a_0\sin(x+b_0)+a_0'\sin(x+b_0')$$

$$=(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos x+b_2\sin x)$$

$$=(a_1+a_2)\cos x+(b_1+b_2)\sin x$$

$$=a\sin(x+b)$$

$$\lambda s_1=\lambda a_1\sin(x+b_1)=(\lambda a_1)\sin(x+b_1)\in S[x]$$

$\therefore S[x]$是一个线性空间.

例: 在区间[*a*, *b*]上全体实连续函数，对函数的加法与数和函数的数量乘法，构成实数域R上的线性空间，记作*C*[*a*, *b*]。

$$C[a,b]=\{\, f(x)\mid f(x)\text{在}[a,b]\text{上连续}\}$$

$$\because\ f(x),\ \ g(x)\in C[a,b]$$

$$\therefore\ f(x)+g(x)\in C[a,b]$$

$$\mathrm{k}g(x)\in C[a,b]$$

$\therefore$ *C*[*a*, *b*]是一个线性空间。

线性空间的性质

1. 零元素是唯一的.

证明: 假设$0_1, 0_2$是线性空间V中的两个零元素.

则对任何$\alpha \in V$有, $\alpha + 0_1 = \alpha$, $\alpha + 0_2 = \alpha$,

由于$0_1, 0_2 \in V$, 则有 $0_2 + 0_1 = 0_2$, $0_1 + 0_2 = 0_1$.

所以 $0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2$.

2. 负元素是唯一的.

证明: 设α的负元素为β与γ, 则有 $\alpha + \beta = 0$, $\alpha + \gamma = 0$,

所以$\beta = \beta + 0 = \beta + (\alpha + \gamma) = (\beta + \alpha) + \gamma = (\alpha + \beta) + \gamma = 0 + \gamma = \gamma$.

因此, 将向量α的负元素记为$-\alpha$.

3. $0\alpha = 0$; $(-1)\alpha = -\alpha$; $\lambda 0 = 0$.

证明: 因为 $\alpha + 0\alpha = 1\alpha + 0\alpha = (1+0)\alpha = 1\alpha = \alpha$.

则由零元素的唯一性得: $0\alpha = 0$

因为 $\alpha + (-1)\alpha = 1\alpha + (-1)\alpha = [1+(-1)]\alpha = 0\alpha = 0$.

则由负元素的唯一性得: $(-1)\alpha = -\alpha$.

$\lambda 0 = \lambda[\alpha + (-1)\alpha] = \lambda\alpha + (-\lambda)\alpha = [\lambda + (-\lambda)]\alpha = 0\alpha = 0$.

4. 如果 $\lambda\alpha = 0$, 则 $\lambda = 0$ 或 $\alpha = 0$.

证明: 如果 $\lambda \neq 0$, 那么,

$$\frac{1}{\lambda}(\lambda\alpha) = \frac{1}{\lambda}\cdot 0 = 0, \text{ 又 } \frac{1}{\lambda}(\lambda\alpha) = \left(\frac{1}{\lambda}\lambda\right)\alpha = 1\alpha = \alpha.$$

所以, $\alpha = 0$. 故结论成立.

定义： 设V是数域F上的线性空间，W为V的非空子集，即 $\varnothing \neq W \subseteq V$. 如果$W$对$V$中的加法及数乘两种运算也构成$F$上的线性空间，则称$W$为$V$的**子空间**.

注： 1. V的最小子空间为零空间：$\{0\}$.

2. V的最大子空间为：V.

V的这两类子空间称为V的**平凡子空间**，其他子空间称为V的**真子空间**.

例： $W=\{(0,x_2,x_3,\cdots,x_n)^T \mid x_i \in R\}$是$R^n$的子空间.

例： $N=\{x\in R^n \mid A_{m\times n}x=0\}$是$R^n$的子空间.

称N为齐次方程 $A_{m\times n}x=0$ 的解空间. 也称为矩阵A的核空间，记为$N(A)$或N.

定理: 设V是数域F上的线性空间，W为V的非空子集，则W为V的子空间$\Leftrightarrow$ W对V中的线性运算封闭，即满足

1. $\forall \alpha, \beta \in W$ 有 $\alpha + \beta \in W$;
2. $\forall \alpha \in W, k \in F$ 有 $k\alpha \in W$.

证明: $\Longrightarrow$ 必要性是显然的

$\Longleftarrow$ W为V的非空子集，则(1) (2) (5) (6) (7) (8) 成立， 只需证(3) (4) .

由2. 取 $k = 0$ 有 $0\alpha = O \in W$

$k = -1$ 有 $-\alpha \in W$

例: V为F上的线性空间，向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \in V$

令$W = \{k_1\alpha_1 + \cdots + k_m\alpha_m \mid k_i \in F, i = 1, 2, \cdots, m\}$则$W$为$V$的子空间，称$W$为由向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 生成的子空间，

记作 $W = \langle \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \rangle = span\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$.

定义： 设 $T=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}, S=\{\beta_1,\cdots,\beta_m\}$是线性空间$V$中的两个向量组，若$T$中每个向量均可由$S$中向量线性表示，记为 $T\leftarrow S$. 若 $T\leftarrow S$ 又 $S\leftarrow T$

则称向量组 S 与向量组 T **等价**，记作 $T\leftrightarrow S$

定理： 设$W_1=\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_m\rangle$，$W_2=\langle\beta_1,\cdots,\beta_n\rangle$是数域$F$上的线性空间$V$的两个子空间，如果

$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}\leftrightarrow\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$ 等价, 则 $W_1=W_2$.

证明： (要证 $W_1=W_2$，只需证$W_1\subseteq W_2$且$W_2\subseteq W_1$即可)

$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}\leftarrow\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}\Longrightarrow$ 存在$A_{n\times m}$使得

$(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)=(\beta_1,\cdots,\beta_n)A.$

下证 $W_1\subseteq W_2$

$\forall \alpha \in W_1$, $\exists k_1, \cdots, k_m \in F$ 使得

$$\alpha = k_1\alpha_1 + \cdots + k_m\alpha_m = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix}$$

$$= (\beta_1, \cdots, \beta_n) A_{n\times m}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix} = (\beta_1, \cdots, \beta_n)\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix} \in W_2$$

即 $W_1 \subseteq W_2$ 　　同理可证 $W_2 \subseteq W_1$.

例： 在线性空间R^4中，

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\3\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}2\\4\\1\\-2\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}3\\6\\3\\-7\end{bmatrix},\beta_1=\begin{bmatrix}1\\2\\-4\\11\end{bmatrix},\beta_2=\begin{bmatrix}2\\4\\-5\\14\end{bmatrix}$$

$W_1=\langle\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\rangle$，$W_2=\langle\beta_1,\beta_2\rangle$. 证明 $W_1=W_2$.

证明：由定理知，只需证 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}\leftrightarrow\{\beta_1,\beta_2\}$

由线性代数的知识，初等行变不改变列向量的线性相关性

$$(\beta_1,\beta_2,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{bmatrix}1&2&1&2&3\\2&4&2&4&6\\-4&-5&-1&1&3\\11&14&3&-2&-7\end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 9 & 15 \\ 0 & -8 & -8 & -24 & -40 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -4 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 = -\beta_1 + \beta_2,\ \alpha_2 = -4\beta_1 + 3\beta_2, \alpha_3 = -7\beta_1 + 5\beta_2$$

即 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \leftarrow \{\beta_1, \beta_2\}$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)\xrightarrow{\text{行变}}\begin{bmatrix} E_2 & B \\ O & O \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}\alpha_1=-\beta_1+\beta_2\\ \alpha_2=-4\beta_1+3\beta_2\end{cases}\quad \begin{cases}3\alpha_1=-3\beta_1+3\beta_2\\ \alpha_2=-4\beta_1+3\beta_2\end{cases}\quad \begin{cases}\beta_1=3\alpha_1-\alpha_2\\ \beta_2=4\alpha_1-\alpha_2\end{cases}$$

即 $\{\beta_1,\beta_2\}\leftarrow\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$

定义: 设W_1,W_2为线性空间V的两个子空间，则W_1与W_2的**和**定义为 $W_1+W_2=\{\alpha+\beta \mid \alpha\in W_1,\beta\in W_2\}$

W_1与W_2的**交**定义为 $W_1\cap W_2=\{\alpha \mid \alpha\in W_1 且 \alpha\in W_2\}$.

定理: 设W_1,W_2为线性空间V的两个子空间，则W_1+W_2，$W_1\cap W_2$都是V的子空间，分别称为W_1与W_2的**和空间**及W_1与W_2的**交空间**.

证明： $\forall \alpha, \beta \in W_1 + W_2$ 有 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, $\beta = \beta_1 + \beta_2$

$$\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1) + (\beta_2 + \alpha_2) \in W_1 + W_2.$$

$$\forall k \in F,\quad k\alpha = k\alpha_1 + k\alpha_2 \in W_1 + W_2$$

$\forall \alpha, \beta \in W_1 \cap W_2$ 有 $\alpha \in W_1$, $\alpha \in W_2$ $\quad \alpha + \beta \in W_1 \cap W_2$

$$\beta \in W_1,\quad \beta \in W_2$$

$$\forall k \in F,\quad k\alpha \in W_1,\quad k\alpha \in W_2 \qquad k\alpha \in W_1 \cap W_2$$

注：类似可定义有限个子空间的和与交.

$$W_1 + \cdots + W_n = \{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n \mid \alpha_i \in W_i,\ 1 \le i \le n\},$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} W_i = \{\alpha \mid \alpha \in W_i,\ 1 \le i \le n\}.$$

§3.2 维数、基与坐标

定义： 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是线性空间V中的一组线性无关的向量，且V中每个向量都可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示，则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$V$ 的一个基；n称为线性空间的维数，记作 $\dim V = n$; 如果V中可以找到任意多个线性无关的向量，那么称V 的维数为无限.

注：

1. 我们只讨论有限维的线性空间；
2. $V=\{O\}$ 则 $\dim V = 0$;
3. V 的基不是唯一的,但V 的任意两个基是等价的.

定义： 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是线性空间V 中的一个基，则 $\forall\alpha\in V$， α 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 唯一线性表示，即 $\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n$，称 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 为向量 α 在 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标，记为 $\begin{bmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{bmatrix}$，

k_i 称为 α 的第i个坐标分量.

注： 1.

$$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right)\begin{bmatrix}k_1\\ k_2\\ \vdots\\ k_n\end{bmatrix}$$

2. 向量的坐标使抽象的n维线性空间V 的向量α 与R^n中向量 $\begin{bmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{bmatrix}$对应起来.

例：

$$e_1=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},e_2=\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix},\cdots,e_n=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$$是R^n的一个基，$\dim R^n=n$

$\forall\alpha=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$ 在基 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 下的坐标为 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$,

通常 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 称为R^n的自然基.

例: 系数取自数域F 的多项式全体，记作

$$P[x]=\left\{f=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\,\middle|\,a_n,a_{n-1},\cdots,\right.$$

$$\left.a_0\in F,\quad n\in N\right\}\quad n\geq 0\text{整数}$$

$P[x]$ 是数域F上的一个线性空间,它的维数是多少?

$\because \forall n\in N$, $1,x,x^2,\cdots,x^n$ 是 $P[x]$ 中线性无关的向量组,

$\therefore P[x]$ 是无限维的线性空间.

定理: 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是线性空间V中的一个基，且

$$\beta_1=a_{11}\alpha_1+a_{21}\alpha_2+\cdots+a_{n1}\alpha_n$$

$$\beta_2=a_{12}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+\cdots+a_{n2}\alpha_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\beta_n=a_{1n}\alpha_1+a_{2n}\alpha_2+\cdots+a_{nn}\alpha_n$$

则 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 构成V的一个基

$$\Leftrightarrow \quad |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

证明：

$\dim V = n$, 只需证 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性无关即可.

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n) = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A$$

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_n\beta_n=0$$

$$\Leftrightarrow (\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{bmatrix}=0 \Leftrightarrow (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{bmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow A\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{bmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{bmatrix}$$ 是齐次线性方程组$AX=0$的解.

$\Leftarrow$ $|A|\neq 0$, $AX=0$ 只有零解，即 $k_1=k_2=\cdots=0.$

$\Rightarrow$ $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性无关, $k_1=k_2=\cdots=0,$

$AX=0$只有零解，从而 $|A|\neq 0.$

例：设
$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\0\\2\\1\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\2\\0\\1\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}2\\1\\3\\0\end{bmatrix},\alpha_4=\begin{bmatrix}2\\5\\-1\\4\end{bmatrix},\alpha_5=\begin{bmatrix}1\\-1\\3\\-1\end{bmatrix}$$

$V=\langle\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\rangle$，求 $\dim V$ 和 V 的一个基，并把 α_i 表示为这个基的线性组合.

解：
$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$$
$$=\begin{bmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\2&0&3&-1&3\\1&1&0&4&-1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\0&-2&-1&-5&1\\0&0&-2&2&-2\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&0&6&-2\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&0&3&-1\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

行初等变换不改变列向量的线性相关性，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为V的一个基， $\dim V=3$.

$$\alpha_4=\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3,\qquad \alpha_5=-\alpha_2+\alpha_3.$$

例：线性空间$P[x]_3$中(系数取自数域F的次数小于3的多项式全体）

1) 证明向量 $f_1 = 1 + x + x^2, f_2 = 1 + x - x^2, f_3 = 1 - x - x^2$ 是一个基;

2) 求向量 $f = 1 + 2x + x^2$ 在这个基下的坐标.

证明：

1) $1, \quad x, \quad x^2$ 为$P[x]_3$的一组基.

$$(f_1, f_2, f_3) = (1, x, x^2)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = (1, x, x^2)A$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \therefore f_1, \quad f_2, \quad f_3 \text{ 是一个基.}$$

2) 解:

$$f=\left(1,x,x^2\right)\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$$，设 f 在 f_1, f_2, f_3 下的坐标为 $\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{bmatrix}$

$$f=\left(f_1,f_2,f_3\right)\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{bmatrix}=\left(1,x,x^2\right)A\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{bmatrix}=\left(1,x,x^2\right)\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$$

$\because$ $1,x,x^2$ 线性无关

$$\therefore A\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\quad |A|\neq 0 \qquad \therefore \begin{bmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{bmatrix}=A^{-1}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1/2\\-1/2\end{bmatrix}.$$

定理: 设 $W\subseteq V$是子空间, $\dim V=n,\dim W=m,\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 是W的一个基, 那么必然存在n-m个向量 $\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n$ 使得 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\ \alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n$ 构成V的一个基.

证明: 对 n-m 进行归纳.

1) $n-m=0,\ W=V,\ \alpha_1,\cdots,\alpha_m$是$V$ 的一个基.

2) $n>m$, 若结论对n-m<k成立，则当n-m=k时，$W\subseteq V$

$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 仍是V的线性无关组，而它们不是V的基.

$\therefore$必存在$\alpha_{m+1}\in V$，使α_{m+1}不能由$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性表示, 即

$\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1}$ 线性无关.令 $W_1=\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1}\rangle$,

则 $\dim W_1=m+1$ 且 $\dim V-\dim W_1=n-m-1<k$

由归纳假设，存在 $\alpha_{m+2},\cdots,\alpha_n\in V$

使 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{m+1},\ \alpha_{m+2},\cdots,\alpha_n$ 构成V的一个基.

定理： 设V_1与V_2均是V的子空间，那么

$$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2)$$

证明： 设 $\dim V_1 = r$， $\dim V_2 = s$， $\dim V_1 \cap V_2 = l$

设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_l$ 是 $V_1 \cap V_2$ 的基，由定理 知存在向量

$\beta_{l+1}, \cdots, \beta_r$ 和 $\gamma_{l+1}, \cdots, \gamma_s$ 使得

$\alpha_1, \cdots, \alpha_l, \beta_{l+1}, \cdots, \beta_r$ 为V_1的一个基，

$\alpha_1, \cdots, \alpha_l, \gamma_{l+1}, \cdots, \gamma_s$ 为V_2的一个基.

下面只需证：

$\alpha_1, \cdots, \alpha_l, \beta_{l+1}, \cdots, \beta_r, \gamma_{l+1}, \cdots, \gamma_s$ 为$V_1 + V_2$的一个基, 即证：

1) 线性无关；

2) 任意元素都可由这个基线性表示.

证：1) 设

$$a_1\alpha_1+\cdots+a_l\alpha_l+b_{l+1}\beta_{l+1}+\cdots+b_r\beta_r+c_{l+1}\gamma_{l+1}+\cdots+c_s\gamma_s=0$$

$$\alpha=a_1\alpha_1+\cdots+a_l\alpha_l+b_{l+1}\beta_{l+1}+\cdots+b_r\beta_r\in V_1$$

$$=-c_{l+1}\gamma_{l+1}-\cdots-c_s\gamma_s\in V_2 \qquad \alpha\in V_1\cap V_2$$

α可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_l$ 线性表示，即

$$-c_{l+1}\gamma_{l+1}-\cdots-c_s\gamma_s=d_1\alpha_1+\cdots+d_l\alpha_l$$

$$d_1\alpha_1+\cdots+d_l\alpha_l+c_{l+1}\gamma_{l+1}+\cdots+c_s\gamma_s=0$$

$\because \alpha_1,\cdots,\alpha_l,\gamma_{l+1},\cdots,\gamma_s$ 为V_2的一个基

$$\therefore d_1=\cdots=d_l=0=c_{l+1}=\cdots=c_s$$

从而 $a_1\alpha_1+\cdots+a_l\alpha_l+b_{l+1}\beta_{l+1}+\cdots+b_r\beta_r=0$

又 $\because \alpha_1,\cdots,\alpha_l,\beta_{l+1},\cdots,\beta_r$ 为V_1的一个基，

$\therefore a_1=\cdots=a_l=0=b_{l+1}=\cdots=b_r \Rightarrow$ 线性无关

证：2) $\forall \alpha \in V_1 + V_2$, $\alpha = \beta + \gamma$ 其中 $\beta \in V_1, \gamma \in V_2$

$$\beta = b_1\alpha_1 + \cdots + b_l\alpha_l + b_{l+1}\beta_{l+1} + \cdots + b_r\beta_r$$

$$\gamma = c_1\alpha_1 + \cdots + c_l\alpha_l + c_{l+1}\gamma_{l+1} + \cdots + c_s\gamma_s$$

$$\alpha = \beta + \gamma = \sum_{i=1}^{l}(b_i + c_i)\alpha_i + \sum_{i=l+1}^{r} b_i\beta_i + \sum_{i=l+1}^{s} c_i\gamma_i$$

例：证明 $\dim V = n$, $\dim V_1 + \dim V_2 > n$

$\Rightarrow$ V_1, V_2必含非零的公共向量.

证明：

$$\dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 + V_2) > 0$$

§3.3 基变换与坐标变换

定义： 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是n维线性空间V的两个基，且它们的关系为

$$
\begin{cases}
\beta_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + \cdots + a_{n1}\alpha_n \\
\beta_2 = a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{n2}\alpha_n \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\beta_n = a_{1n}\alpha_1 + a_{2n}\alpha_2 + \cdots + a_{nn}\alpha_n
\end{cases} \qquad (1)
$$

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}
$$

$$*(\beta_1,\cdots,\beta_n) = (\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A$$

称(1)为基变换，方阵A为由基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵，也称为基变换矩阵.

例： 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix};\ \beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

是 R^3 中的两组基，求由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基

β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵P；

解：

$$\because \begin{cases}\beta_1=\alpha_1-\alpha_2\\ \beta_2=\alpha_2-\alpha_3\\ \beta_3=\alpha_2-3\alpha_3\end{cases}$$

基变换公式

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&1\\0&-1&-3\end{pmatrix}$$

P

P 是由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵

定理： 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是n维线性空间 V的两个基，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵为A. 向量α在这两个基下的坐标分别是

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$ 则有坐标变换公式 $$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad (2)$$

证：

$$\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = (\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

注：定理是可逆的，如果有(2)成立，则有（1）式成立.

例： 设 n 维线性空间 V 的坐标变换是

$$y_1 = x_1,\quad y_2 = x_2 - x_1,\quad y_3 = x_3 - x_2,\quad \cdots,\quad y_n = x_n - x_{n-1},$$

求: V 的基变换矩阵（过渡矩阵）

解：

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$A = \left(A^{-1}\right)^{-1} == \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$ 为基变换矩阵.

例：设 $E_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, E_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, E_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, E_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix};$

$$A_1=\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}, A_3=\begin{pmatrix}-1&2\\1&1\end{pmatrix}, A_4=\begin{pmatrix}-1&-1\\0&1\end{pmatrix}$$

是$R^{2\times 2}$中的两组基，求

(1) 由基 E_1, E_2, E_3, E_4到基 A_1, A_2, A_3, A_4 的过渡矩阵P

(2) $A=\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix}$在基 A_1, A_2, A_3, A_4 下的坐标.

解：

$$\because \begin{cases} A_1=E_1+2E_2-E_3\\ A_2=E_1-E_2+E_3+E_4\\ A_3=-E_1+2E_2+E_3+E_4\\ A_4=-E_1-E_2+E_4 \end{cases}$$

$$(A_1, A_2, A_3, A_4) = (E_1, E_2, E_3, E_4)\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore y = P^{-1}x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 18 \\ 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$(P, x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 18/13 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4/13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8/13 \end{pmatrix}$$

例： 求R^3中向量在两个基

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}2\\3\\3\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}3\\7\\1\end{bmatrix},\text{和}\beta_1=\begin{bmatrix}3\\1\\4\end{bmatrix},\beta_2=\begin{bmatrix}5\\2\\2\end{bmatrix},\beta_3=\begin{bmatrix}1\\1\\-6\end{bmatrix}$$

下的坐标变换.

解：

$$e_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad e_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\quad e_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$ 为R^3的自然基.

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(e_1,e_2,e_3)\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&7\\1&3&1\end{bmatrix}=(e_1,e_2,e_3)A$$

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(e_1,e_2,e_3)\begin{bmatrix}3&5&1\\1&2&1\\4&2&-6\end{bmatrix}=(e_1,e_2,e_3)B$$

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A^{-1}B,\qquad P=A^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=P^{-1}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=B^{-1}A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A=\begin{bmatrix}-7&16&3/2\\5&-11&-1\\-3&7&1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&7\\1&3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}53/2&77/2&185/2\\-18&-26&-63\\23/2&33/2&81/2\end{bmatrix}$$

即：

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{2}(53x_1 + 77x_2 + 185x_3) \\ y_2 = \dfrac{1}{2}(-36x_1 - 52x_2 - 126x_3) \\ y_3 = \dfrac{1}{2}(23x_1 + 33x_2 + 81x_3) \end{cases}$$

注：

1. R^n 的基：$e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_n$

2. $R^{n\times n}$ 的基：$\left(E_{ij}\right)_{n\times n}$

3. $P[x]_n$ 的基：$1,\ x,\ x^2,\ \cdots,\ x^{n-1}$

思考题：

设线性空间$P[x]_4$ 的二组基分别是

$1, x, x^2, x^3$ 和 $1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3$

(1) 求由前一组基到后一组 基的过渡矩阵;

(2) 设 $f(x)$在后一组基下的坐标为 $(7, 0, -8, 2)^T$,

且 $g(x)$在前一组基下的坐标为 $(1, 0, -2, 5)^T$,

求 $f(x)+g(x)$在前一组基下的坐标.

§3.4 子空间的直和

定义： 设V_1, V_2是线性空间V的子空间，如果和V_1+V_2中每个向量α的分解式$\alpha=\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_1\in V_1$，$\alpha_2\in V_2$是唯一的，则称和V_1+V_2为**直和**，记作$V_1\oplus V_2$.

定理： 设V_1, V_2是线性空间V的子空间，则下述命题等价：

(1) 子空间V_1+V_2是直和；

(2) 零向量的分解式是唯一的；

(3) $V_1\cap V_2=\{O\}$；

(4) V_1的一个基与V_2的一个基的并集是V_1+V_2的基；

(5) $\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2$

证明： 由维数公式

$$\dim V_1+\dim V_2=\dim\left(V_1+V_2\right)+\dim\left(V_1\cap V_2\right)$$

所以：(3) $\Leftrightarrow$ (4) $\Leftrightarrow$ (5)

(1) $\Rightarrow$ (2) V_1, V_2为线性空间，$O\in V_1+V_2$

$\because$ 子空间V_1+V_2是直和；

$\therefore$ O 的分解式是唯一的.

(2) $\Rightarrow$ (3) $\forall\alpha\in V_1\cap V_2$则有$\alpha\in V_1$且$\alpha\in V_2$

$\because$ V_1，V_2为V子空间，$\therefore$ $-\alpha\in V_1$，$-\alpha\in V_2$

$$\left.\begin{aligned}O&=\alpha+(-\alpha)\in V_1+V_2\\&=O+O\end{aligned}\right\}$$

$\because$ O 的分解式是唯一的；

$\therefore \alpha=O$，即 $V_1\cap V_2=\{O\}$；

(3) $\Longrightarrow$ (1) $\forall \alpha \in V_1 + V_2$, $\exists \alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2$, 使 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$,

如果 $\exists \beta_1 \in V_1, \beta_2 \in V_2$, 使 $\alpha = \beta_1 + \beta_2$, 有 $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2$

$\alpha_1 - \beta_1 = \beta_2 - \alpha_2 \in V_1 \cap V_2 = \{O\}$ $\therefore$ $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$

例： $V = R^{n\times n} = \{n\text{阶实方阵全体}\}$, $V_1 = \left\{A \in R^{n\times n} \middle| A^T = A\right\}$

$V_2 = \left\{A \in R^{n\times n} \middle| A^T = -A\right\}$, 易知：$V_1, V_2$ 是 V 子空间.

则有：$V = V_1 \oplus V_2$

证：

$\forall A \in V$ 有 $A = \dfrac{A + A^T}{2} + \dfrac{A - A^T}{2}$ 且 $\left(\dfrac{A + A^T}{2}\right)^T = \dfrac{A + A^T}{2}$

$\left(\dfrac{A - A^T}{2}\right)^T = -\dfrac{A - A^T}{2}$ 即 $A \in V_1 + V_2$, $V = V_1 + V_2$

$\forall A \in V_1 \cap V_2$, $A^T = A = -A$, $A = O$, 即 $V_1 \cap V_2 = \{O\}$

由等价命题有 $V = V_1 \oplus V_2$.

定理： 设U是线性空间V的子空间，则一定存在V的一个子空间W, 使 $V=U\oplus W$, 称W为U在V中的直和补.
（直和补一般不是唯一的）.

证明： 取U的一个基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$, 由基的扩充定理，存在 $\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n$使得$\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n$构成$V$的一个基.

取$W=\langle\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n\rangle$

由等价命题有 $V=U\oplus W$.

定义： 设$V_1,V_2,\cdots,V_r$是线性空间V的子空间，如果和 $V_1+V_2+\ldots+V_r$中每个向量α的分解式

$\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r\,(\alpha_i\in V_i,i=1,2,\cdots,r)$ 是唯一的，

则称这个和为直和，记作 $V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_r$.

定理： 设$V_1, V_2, \cdots, V_r$是线性空间V的子空间，则下述命题等价：

(1) $V_1+V_2+\ldots+V_r$是直和；

(2) 零向量O的分解式唯一；

(3) 把$V_1, V_2, \ldots, V_r$任意分成两组，

$V_{i_1}, \cdots, V_{i_s}$与$V_{j_1}, \cdots, V_{j_t}$，$(s+t=r)$，则有

$$\left(V_{i_1}+\cdots+V_{i_s}\right)\cap\left(V_{j_1}+\cdots+V_{j_t}\right)=\{O\};$$

(4) $V_1, V_2, \cdots, V_r$各自的一个基的并集是$V_1+V_2+\ldots+V_r$的一个基；（数归）

(5) $$\dim\left(V_1+V_2+\cdots+V_r\right)$$
$$=\dim V_1+\dim V_2+\cdots+\dim V_r.$$

思考题： 线性空间$\boldsymbol{R}^3$的子空间

$$\boldsymbol{R}_x = \{ (x,0,0)^{\mathrm{T}} \mid x \in \boldsymbol{R} \} \quad \boldsymbol{R}_y = \{ (0,y,0)^{\mathrm{T}} \mid y \in \boldsymbol{R} \}$$

$$\boldsymbol{R}_{yz} = \{ (0,y,z)^{\mathrm{T}} \mid y,z \in \boldsymbol{R} \}$$

求 $\boldsymbol{R}_x \oplus \boldsymbol{R}_y$， $\boldsymbol{R}_x \oplus \boldsymbol{R}_{yz}$。

解：

$$\boldsymbol{R}_x \oplus \boldsymbol{R}_y = \{ (x,y,0)^{\mathrm{T}} \mid x,y \in \boldsymbol{R} \} = \boldsymbol{R}_{xy}$$

$$\boldsymbol{R}_x \oplus \boldsymbol{R}_{yz} = \{ (x,y,z)^{\mathrm{T}} \mid x,y,z \in \boldsymbol{R} \} = \boldsymbol{R}^3$$

§ 3.5 线性变换（线性映射）

定义： 若在数域F 的线性空间V上，有一种规则T,使得V中任意向量α对应于V中唯一向量$\alpha' \triangleq T(\alpha)$, 规则$T$称为$V$ 的变换, α' 称为α的像，α 称为α' 的原像.

$$T : V \longrightarrow V$$

$$\alpha \mapsto \quad \alpha' = T(\alpha)$$

如果变换T 又满足下面条件：$\forall \alpha, \beta \in V$和 $k \in F$有

$$T(\alpha+\beta) = T(\alpha) + T(\beta)$$

$$T(k\alpha) = kT(\alpha)$$

则称T 为V 的线性变换（线性映射）.

例： 设 A 是给定的 n 阶方阵，

$$T: R^n \longrightarrow R^n$$
$$\alpha \mapsto \alpha' = T(\alpha) = A\alpha \in R^n$$

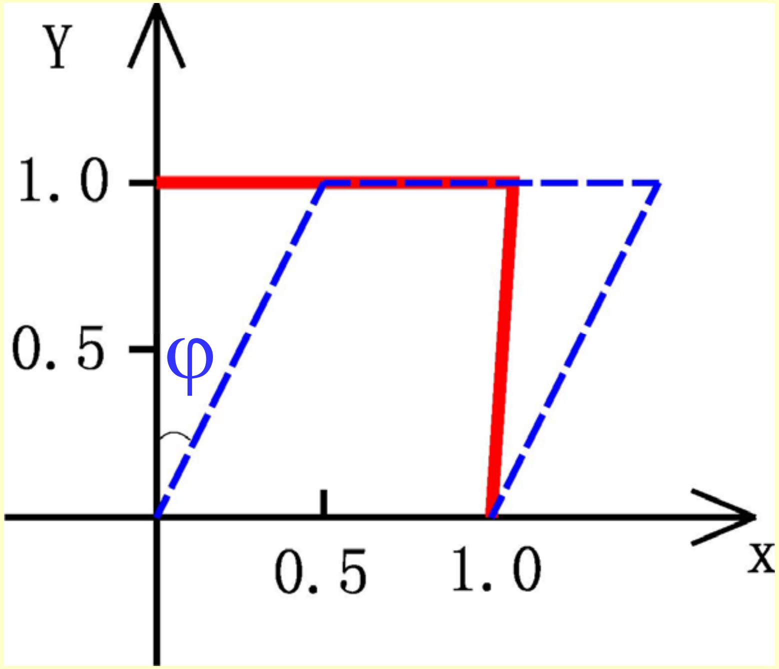
(1) T 是变换；

(2) $T(\alpha+\beta) = A(\alpha+\beta) = A\alpha + A\beta = T(\alpha) + T(\beta)$

$$T(k\alpha) = A(k\alpha) = kA\alpha = kT(\alpha)$$

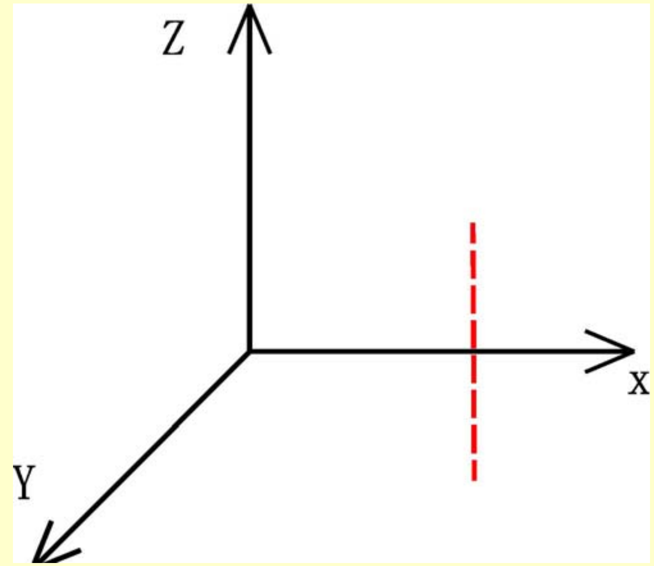
$\Rightarrow$ T是线性变换，由方阵A所确定的线性变换也通常用A表示.

特别 n=2, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 时，将 $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 分别对应于 $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1 \end{bmatrix}$ 画图来看：



$\tan(\varphi)=1/2,$

这时T称为以φ为切变角的切变.



$n=3$

取 $H=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & -1\end{bmatrix}, \forall \alpha=\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}\in R^3.$ 线性变换

$$H(\alpha)=H\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\ b\\ -c\end{bmatrix}$$

H称为关于坐标平面xoy 的反射变换

注：(1) 把线性空间中任意向量都变为零向量的变换是线性变换，称为零变换，记作O

$$O: V \to V$$
$$\alpha \mapsto O$$

(2) 把V中向量α变为自身的变换也是线性变换，称为恒等变换，记作 I，

$$I: V \longrightarrow V$$
$$\alpha \quad \mapsto \quad I(\alpha) = \alpha$$

(3) 对固定的数 k， $T: V \longrightarrow V$ T 称为数乘变换.

$$\alpha \mapsto T(\alpha) = k\alpha$$

(4) $k \in R$, V 为实线性空间，

$|k| > 1$ 时 T 称为拉伸变换

$|k| < 1$ 时 T 称为压缩变换

线性变换的性质

设T 是数域F 上的线性空间V 的线性变换，则有：

(1) $T(O)=O$ $\left(\because T(k\alpha)=kT(\alpha)\right.$, 取 $k=0$ 即可$\left.\right)$

(2) $T(-\alpha)=-T(\alpha)$ $\left(\forall \alpha\in V\right.$, 取 $k=-1$ 即可$\left.\right)$

(3) $T(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s)$

$=k_1T(\alpha_1)+k_2T(\alpha_2)+\cdots+k_sT(\alpha_s)$，其中

$\alpha_1,\cdots,\alpha_s\in V$， $k_1,\cdots,k_s\in F$.

(4) T 把线性相关的向量组变成线性相关的向量组，即若$\alpha_1,\ldots,\alpha_m$线性相关，则$T(\alpha_1),\cdots,T(\alpha_m)$也线性相关.

注：T 是否能将线性无关的向量组变成线性无关的向量组？

反例：零变换可将任意线性无关的向量组变成线性相关的向量组.

定理： 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是数域F 上的线性空间V 的一个基, 那么对V 中任意n个向量$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$, 必存在$V$ 的唯一的一个线性变换T, 使$T(\alpha_i)=\beta_i, i=1,\cdots,n.$

证明：

(1) 构造一个变换T：

$\forall \alpha \in V$, 设 $\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n$.

令 $T(\alpha)=k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_n\beta_n$, 则$T$是$V$ 的一个变换.

(2) 令 $k_i=1,\ \ k_j=0\ \ (j\neq i)$,

有 $T(\alpha_i)=k_i\beta_i=\beta_i,\ \ i=1,2,\cdots,n.$

(3) 需证T 是V 的一个线性变换.

$$\forall \alpha, \beta \in V,\ \ \alpha = \sum_{i=1}^{n} k_i \alpha_i,\ \ \beta = \sum_{i=1}^{n} l_i \alpha_i,\ \ \lambda \in F$$

$$T(\alpha+\beta) = T\left(\sum_{i=1}^{n}(k_i + l_i)\alpha_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(k_i + l_i)\beta_i = \sum_{i=1}^{n} k_i\beta_i + \sum_{i=1}^{n} l_i\beta_i = T(\alpha)+T(\beta),$$

$$T(\lambda\alpha) = T\left(\lambda\sum_{i=1}^{n} k_i\alpha_i\right) = T\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda k_i\alpha_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\lambda k_i\beta_i = \lambda T(\alpha).$$

(4) 唯一性：设 $\tilde{T}$ 是V的线性变换，且

$$\tilde{T}(\alpha_i) = \beta_i,\ i = 1, 2, \cdots, n.$$

要证 $\tilde{T}(\alpha)=T(\alpha), \forall\alpha\in V$ 即 $T=\tilde{T}$.

$$\forall\alpha\in V,\ \alpha=\sum_{i=1}^{n}k_i\alpha_i$$

$$\tilde{T}(\alpha)=\sum_{i=1}^{n}k_i\tilde{T}(\alpha_i)=\sum_{i=1}^{n}k_i\beta_i=\sum_{i=1}^{n}k_iT(\alpha_i)=T\left(\sum_{i=1}^{n}k_i\alpha_i\right)$$

$$=T(\alpha).$$

定义：设 T_1, T_2 是数域 F 上线性空间 V 的两个线性变换，

$k\in F$, 定义如下：

$$\forall\alpha\in V,\ (T_1+T_2)(\alpha)\triangleq T_1(\alpha)+T_2(\alpha)$$

$$(kT_1)(\alpha)\triangleq kT_1(\alpha)$$

$$(T_1T_2)(\alpha)\triangleq T_1(T_2(\alpha))$$

显然 T_1+T_2, kT_1, T_1T_2 为 V 的线性变换.

规律：设T_1 , T_2, T_3是V 的任意线性变换，$\forall k, l \in F$，则

(1) $T_1 + T_2 = T_2 + T_1$

(2) $(T_1 + T_2) + T_3 = T_1 + (T_2 + T_3)$

(3) $T + O = T$

(4) $(kl)T = k(lT)$

(5) $(k + l)T = kT + lT$

(6) $k(T_1 + T_2) = kT_1 + kT_2$

(7) $1T = T$

(8) $(T_1T_2)T_3 = T_1(T_2T_3)$

(9) $TI = IT = T$ $\quad I$ 为恒等变换

(10) $T(T_1 + T_2) = TT_1 + TT_2$, $(T_1 + T_2)T = T_1T + T_2T$

如果定义$-T$：$\alpha \mapsto -T(\alpha), \forall \alpha \in V$ 显然有 $T+(-T)=O$

V 的所有线性变换，对于线性变换的加法和数乘也构成一个线性空间.

注：(1) 与矩阵的乘法类似，线性变换关于乘积运算一般不满足交换率，即 $T_1T_2 \neq T_2T_1$,

$$(T_1T_2)^2 \neq T_1^2T_2^2,\ (T_1+T_2)^2 \neq T_1^2+2T_1T_2+T_2^2$$

(2) 定义$T^2=TT, T^m=T^{m-1}T, T^0=I$有指数运算法则

$$T^mT^n=T^{m+n},\ (T^m)^n=T^{mn},$$ m, n 为非负整数

(3) $\forall f(x)=P[x]$,

$$f(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0, (a_i \in F, i=0,1,\cdots,n)$$

定义线性变换T 的多项式: $f(T)=a_mT^m+a_{m-1}T^{m-1}+\cdots+a_1T+a_0I$, 显然$f(T)$仍为$V$的线性变换.

定义：设T 是线性空间V 的线性变换，若存在V的另一个变换S, 使$TS=ST=I$ (恒等变换)，则称变换T是**可逆**的，S称为T的**逆变换**，记作$S=T^{-1}$.

定理：若T 是线性空间V 的线性变换，且T可逆，则T的逆变换T^{-1}也是线性变换.

证明：$\forall \alpha, \beta \in V, k \in F,$

$$T^{-1}(\alpha+\beta)=T^{-1}\left[TT^{-1}(\alpha)+TT^{-1}(\beta)\right]$$

$$=T^{-1}\left[T\left(T^{-1}(\alpha)\right)+T\left(T^{-1}(\beta)\right)\right]$$

$$=T^{-1}\left[T\left(T^{-1}(\alpha)+T^{-1}(\beta)\right)\right]$$

$$=\left(T^{-1}T\right)\left(T^{-1}(\alpha)+T^{-1}(\beta)\right)$$

$$=T^{-1}(\alpha)+T^{-1}(\beta)$$

$$T^{-1}(k\alpha)=T^{-1}\left[kTT^{-1}(\alpha)\right]=T^{-1}\left[kT\left(T^{-1}(\alpha)\right)\right]$$

$$=T^{-1}\left[T\left(kT^{-1}(\alpha)\right)\right]=\left(T^{-1}T\right)\left(kT^{-1}(\alpha)\right)$$

$$=kT^{-1}(\alpha).$$

注：当T可逆时，可以定义T的负整数幂，即 $\forall n\in Z_+$，

定义 $T^{-n}=\left(T^{-1}\right)^n$.

T的指数法则：

$$T^mT^n=T^{m+n},$$

$$\left(T^m\right)^n=T^{mn},\qquad m,n\in Z.$$

§3.6 线性变换的矩阵

取V的基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$, V中任意向量β可由基线性表示，有

$$\beta=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{bmatrix},$$

即β由它在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的坐标 $\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{bmatrix}$ 唯一确定，$T(\beta)=T\left(\sum_{i=1}^{n}k_i\alpha_i\right)=\sum_{i=1}^{n}k_iT(\alpha_i)$,

T由它在基上的作用 $T(\alpha_i)$ 唯一确定，自然地得到线性变换与矩阵的联系.

定义：设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是数域$F$上$n$维线性空间$V$的一个基，$T$是$V$的线性变换，则基向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$的像，$T(\alpha_1),T(\alpha_2),\cdots,T(\alpha_n)$可由基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示

$$\begin{cases} T(\alpha_1)=a_{11}\alpha_1+a_{21}\alpha_2+\cdots+a_{n1}\alpha_n \\ T(\alpha_2)=a_{12}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+\cdots+a_{n2}\alpha_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ T(\alpha_n)=a_{1n}\alpha_1+a_{2n}\alpha_2+\cdots+a_{nn}\alpha_n \end{cases} \qquad A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

即 $$T(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(T(\alpha_1),T(\alpha_2),\cdots,T(\alpha_n))$$
$$=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A_{n\times n}$$

A称为线性变换T在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的矩阵，简称线性变换$T$的矩阵.

注： O 的矩阵为O, I 的矩阵为E.

注：(1) 由定义：取线性空间V 的一个基后，线性变换T就对应了唯一的一个n 阶方阵，即线性变换T的矩阵

$$T \xrightarrow{\text{基取定}} A$$

(2) 基不同，得到的矩阵一般来说是不同的, 特别当调整基向量的顺序时，得到的矩阵也可能是不同的.

(3) 反之，给定一个方阵A, 是否能找到V 的一个线性变换T与之对应呢？ $A \xrightarrow{?} T$ 使T在上述给定的基下的矩阵就是A.

$\forall \alpha \in V, \alpha$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标为 $\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}$，即

$$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{bmatrix},\text{令 } T(\alpha)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{bmatrix}$$

由线性变换的定义易知，T 是V 的线性变换.

$$T(\alpha_i)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A\begin{bmatrix}0\\\vdots\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}i \qquad i=1,2,\cdots,n,$$

$$T(\alpha_i)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)Ae_i$$

$$T(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(T(\alpha_1),T(\alpha_2),\cdots,T(\alpha_n))$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A(e_1,e_2,\cdots,e_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A$$

即我们所构造的线性变换T的矩阵就是A, 即 $A\longrightarrow T$

例： 在R^3中，把向量 $\alpha = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ 向坐标平面xoy投影，得到 $\alpha' = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix}$ 是一个投影变换，易证它也是一个线性变换，求投影变换T 在基$\alpha_1 = e_1, \alpha_2 = e_2, \alpha_3 = e_1 + e_2 + e_3$下的矩阵.

解： $T(\alpha_1) = \alpha_1,\ T(\alpha_2) = \alpha_2, T(\alpha_3) = e_1 + e_2 = \alpha_1 + \alpha_2.$

$$T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\therefore$ T 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

T 在基 e_1, e_2, e_3 下的矩阵为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

例：求 n 维线性空间 $P[x]_n$ 的线性差分变换

$\Delta f=f(x+1)-f(x)$ 分别在基：

(1) $1, x, \cdots, x^{n-1}$

(2) $f_0=1, f_1=x, \cdots, f_k=\dfrac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}, \cdots,$

$$f_{n-1}=\frac{x(x-1)\cdots(x-n+2)}{(n-1)!}$$

下的矩阵.

解：

(1) $\Delta(1)=1-1=0,\ \Delta(x)=(x+1)-x=1,$

$\Delta(x^2)=(x+1)^2-x^2, \cdots$

$1\le k\le n-1,\ \Delta(x^k)=(x+1)^k-x^k$

$$=1+kx+C_k^2x^2+\cdots+C_k^{k-1}x^{k-1}$$

$$\Delta\left(1, x, \cdots, x^{n-1}\right)=\left(1, x, \cdots, x^{n-1}\right)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 0 & 2 & \cdots & C_{n-1}^{1} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & C_{n-1}^{n-2} \\ & & & & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

(2) $\Delta f_0 = O, \quad \Delta f_1 = 1 = f_0$

$1 \le k \le n-1$

$$\Delta f_k = \frac{(x+1)x\cdots(x-k+2)}{k!} - \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$$

$$= \frac{1}{k!}x(x-1)\cdots(x-k+2)(x+1-x+k-1)$$

$$= \frac{1}{(k-1)!}x(x-1)\cdots(x-k+2) = f_{k-1}.$$

$$\Delta(f_0, f_1, \cdots, f_{n-1}) = (f_0, f_1, \cdots, f_{n-1}) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & \cdots & \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

定理：V为线性空间，$\dim V = n$，T为V的一个线性变换，

T在V的两个基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 下的矩阵分别为A和B，则$A\sim B$；如果

$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P$，则有$B=P^{-1}AP$.

证明：由假设

$$T(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A$$

$$T(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)B \qquad (1)$$

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P,$$

$\because$ P 为过渡矩阵 $\therefore$ P 可逆，从而有

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)P^{-1},$$

$$\therefore T(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(T(\beta_1),T(\beta_2),\cdots,T(\beta_n))$$

$$=(T(\alpha_1),T(\alpha_2),\cdots,T(\alpha_n))P=T(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)AP=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)P^{-1}AP \qquad (2)$$

比较式(1)和(2)，由T在基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 下矩阵的

唯一性，得 $B=P^{-1}AP$，从而 $A\sim B$.

注：定理的逆也是成立的.

即若$A\sim B$，则A与B是同一线性变换在两个基下的矩阵.

证明：

$\forall\alpha\in V,\alpha$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标为 $\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}$，即

$$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{bmatrix}$$

令 $T(\alpha)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{bmatrix}$ 则T在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的矩阵就为$A$.

$A\sim B$，设$B=P^{-1}AP$.

令 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P$

$\because |P|\neq 0$, $\therefore \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 为V的基.

$$T(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=T(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)AP$$

$$=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)P^{-1}AP=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)B$$

$A\sim B \Leftrightarrow A$与$B$是同一线性变换在两个基下的矩阵.

由第二章的定理2.5.1,任一复矩阵必定相似于Jordan标准形，即

$$A \sim J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix},$$

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{m_i \times m_i} \qquad m_i = 1, J_i = \lambda_i$$

推论1: V 为复数域C上的线性空间，T为V的任意一个线性变换，则必存在V的一个基，使T 在这个基下矩阵是Jordan标准形.

定义: T 是可对角化的，如果存在一个基，使T 在该基下的矩阵为对角阵.

推论2: 线性空间V 的线性变换T 是可对角化的

$\Leftrightarrow$ T 的矩阵是可对角化的.

线性变换T在不同基下的矩阵是相似的，而相似矩阵有相同的秩，下面我们来定义线性变换的秩.

定义： 设T是线性空间V的线性变换，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$V$的一个基，$T$在这个基下的矩阵为$A$，那么$A$的秩称为**线性变换$T$的秩**，特别当$A$为满秩时，也称$T$为**满秩线性变换**.

定理： 设T是线性空间V的线性变换, 那么T是可逆的线性变换$\Leftrightarrow$ T为满秩线性变换.

证明： $\Rightarrow$

$$T(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A$$

$$T^{-1}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)B$$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=T^{-1}T(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$$

$$=T^{-1}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)BA$$

$\therefore$ $BA=E$, 即T是满秩的线性变换.

$$\Leftarrow \quad T(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A$$

$$S(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A^{-1}$$

$$\therefore\ TS = ST = I.$$

例： 设T是n维线性空间V的线性变换，T在V的一个基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的矩阵为$A$，其中

$$A=\begin{bmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & \iddots & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{bmatrix}_{n\times n}$$

求: T在基 $\beta_1=\alpha_2,\ \beta_2=\alpha_3,\cdots,\beta_{n-1}=\alpha_n,\ \beta_n=\alpha_1,$ 下的矩阵.

解：

$$T(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A$$

$$T(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)B$$

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{bmatrix} 0 & & & & 1 \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P$$

$$P=\begin{bmatrix} O & 1 \\ E_{n-1} & O \end{bmatrix} \qquad P^{-1}=\begin{bmatrix} O & E_{n-1} \\ 1 & O \end{bmatrix}$$

$$\therefore B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} e_2^T \\ e_3^T \\ \vdots \\ e_n^T \\ e_1^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e_n, & e_{n-1}, & \cdots & e_2, & e_1 \end{pmatrix} P$$

$$= \begin{bmatrix} e_{n-1}^T \\ e_{n-2}^T \\ \vdots \\ e_1^T \\ e_n^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e_2, & e_3, & \cdots & e_n, & e_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} e_{n-2}^T \\ \vdots \\ e_1^T \\ e_n^T \\ e_{n-1}^T \end{bmatrix}.$$

$$\therefore B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} & & 1 & 0 & 0 \\ & \iddots & & & \\ 1 & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

定义： 设T是线性空间V的线性变换，分别定义T的**核** Ker$T$与T的**像**ImT

$$\mathrm{Ker}\,T=\{\alpha\in V\,|\,T(\alpha)=0\},$$
$$\mathrm{Im}\,T=\{\beta\in V\,|\,\exists\alpha\in V\text{使}T(\alpha)=\beta\}.$$

性质： Ker$T$和ImT均是V的子空间，从而分别称为T的**核空间**和**像空间**.

证明： 1. ImT为V的子空间；

1) $T(O)=O\in\mathrm{Im}\,T$ $\therefore$ Im T是非空子集.

2) $\forall\alpha,\beta\in\mathrm{Im}\,T,\ \exists\alpha',\beta'\in V$

使 $T(\alpha')=\alpha,\ T(\beta')=\beta.$

$$\alpha+\beta=T(\alpha')+T(\beta')=T(\alpha'+\beta')\in\mathrm{Im}\,T.$$

3) $\forall \alpha \in \mathrm{Im}\,T,\ k \in F,\ \exists \alpha' \in V,$ 使 $T(\alpha') = \alpha$

$$k\alpha = kT(\alpha') = T(k\alpha') \in \mathrm{Im}\,T.$$

2. Ker$T$ 为V 的子空间：

1) $T(O) = O,\ \therefore O \in \mathrm{Ker}T,$ Ker$T$为V的非空子集.

2) $\forall \alpha, \beta \in \mathrm{Ker}\,T,$

有 $T(\alpha+\beta) = T(\alpha) + T(\beta) = O + O = O$

$\therefore\ \alpha + \beta \in \mathrm{Ker}\,T.$

3) $\forall \alpha \in \mathrm{Ker}\,T,\ k \in F,$

有 $T(k\alpha) = kT(\alpha) = kO = O.$

问：像空间和核空间的维数分别为多少？

定理： 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是n 维线性空间V的一个基，

$$T(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A$$

若 $rank(A)=r$，则 $\dim KerT=n-r$; $\dim \mathrm{Im}\,T=r$.

证明： 1. $\dim \mathrm{Ker}\,T=n-r$;

$\because\ rank(A)=r$, $\therefore\ AX=O$ 解空间维数为n-r.

设$x_{r+1},\ldots,x_n$ 为解空间的一个基，即线性方程的一个

基础解系.令 $\beta_j=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)x_j,\ j=r+1,\cdots,n$

即β_j在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的坐标为 x_j.

1) $\beta_j\in \mathrm{Ker}\,T,\ j=r+1,\cdots,n$

$$T(\beta_j)=T(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)x_j$$
$$=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)Ax_j=O$$

2) $\beta_{r+1},\cdots,\beta_n$ 线性无关. $k_{r+1}\beta_{r+1}+\cdots+k_n\beta_n=0$

$\therefore(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)(k_{r+1}x_{r+1}+\cdots+k_nx_n)=O$

$\because\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，$x_{r+1},\cdots,x_n$ 线性无关，

$\therefore\beta_{r+1},\cdots,\beta_n$ 线性无关.

3) $\forall\alpha\in\mathrm{Ker}\,T$，$\alpha$ 可由 $\beta_{r+1},\cdots,\beta_n$ 线性表示.

设

$$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)y_0$$

则 $O=T(\alpha)=T(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)y_0$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)Ay_0$$

$\because \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关，

$\therefore Ay_0 = O$ 即 y_0 为 $AX = O$ 的解，从而有

$$y_0 = \sum_{j=r+1}^{n} k_j x_j$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad \alpha &= (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) y_0 \\ &= (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \sum_{j=r+1}^{n} k_j x_j \\ &= \sum_{j=r+1}^{n} k_j (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) x_j = \sum_{j=r+1}^{n} k_j \beta_j . \end{aligned}$$

由 1), 2), 3) 可知 $\beta_{r+1}, \cdots, \beta_n$ 为Ker$T$ 的一个基，

即 $\dim \mathrm{Ker}\, T = n - r.$

2) $\dim \operatorname{Im} T = r$

$\because\ \beta_{r+1},\cdots,\beta_n$ 为 $KerT \subset V$ 的一个基，由基的扩充定理，必存在V中向量$\beta_1,\cdots,\beta_r$ 使 $\beta_1,\cdots,\beta_r,\beta_{r+1},\cdots,\beta_n$ 为V 的一个基，即 $\forall \alpha \in V$ 有 $\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i\beta_i$，

$$\beta = T(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(\beta_i) = \sum_{i=1}^{r} a_i T(\beta_i) \in \operatorname{Im} T,$$

即 $\operatorname{Im}(T)$ 中任意向量可由$T(\beta_i)$线性表示，$i=1,2,\cdots,r$.

下面只需证$T(\beta_i)$线性无关即可.

设 $k_1T(\beta_1)+\cdots+k_rT(\beta_r)=0$, 则有

$$T(k_1\beta_1+\cdots+k_r\beta_r)=0,$$

$\therefore\ k_1\beta_1+\cdots+k_r\beta_r\in \mathrm{Ker}\,T$, 从而可由 $\beta_{r+1},\cdots,\beta_n$ 线性表示.

$$k_1\beta_1+\cdots+k_r\beta_r=k_{r+1}\beta_{r+1}+\cdots+k_n\beta_n$$

$$k_1\beta_1+\cdots+k_r\beta_r-k_{r+1}\beta_{r+1}-\cdots-k_n\beta_n=0$$

$\because\ \beta_1,\cdots,\beta_n$ 为V的基

$\therefore k_i=0,\ \ i=1,2,\cdots n$, 即$T(\beta_i), i=1,2,\cdots,r$线性无关.

推论： 设T是有限维线性空间V的线性变换，则

$$\dim \mathrm{Ker}\,T+\dim \mathrm{Im}\,T=\dim V$$

注：1) $\dim \operatorname{Im} T = r$ 等于T的秩，$\dim \operatorname{Ker} T$ 称为T的亏

则n维线性空间的任一线性变换的亏与秩之和恰好为n.

2) 和空间 $\operatorname{Im} T + \operatorname{Ker} T$ 一般不是直和.

例：设 D 是 R 上线性空间 $P[x]_4$ 的微分线性变换

$$D(f) = f'(x)$$

求：1) $\operatorname{Im} D$和$\operatorname{Ker} D$;　　2) $\operatorname{Im} D + \operatorname{Ker} D$是否是直和?

解：方法一：$P[x]_4$ 的自然基为：$1, x, x^2, x^3$.

$$D(1) = 0,\quad D(x) = 1,\quad D(x^2) = 2x,\quad D(x^3) = 3x^2$$

$$D(1, x, x^2, x^3) = \left(1, x, x^2, x^3\right)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4),\quad rank(A)=3$$

由定理可知：$\dim \operatorname{Ker} D=1,\quad \dim \operatorname{Im} D=3.$

$$\beta_i=(1,x,x^2,x^3)\alpha_i,\qquad i=2,3,4$$

$$=(1,x,x^2,x^3)Ae_i$$

$$=D(1,x,x^2,x^3)e_i\in \operatorname{Im} D,\qquad i=2,3,4$$

下证 β_i 线性无关.

设 $k_2\beta_2+k_3\beta_3+k_4\beta_4=0$

$$(1,x,x^2,x^3)\left(k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4\right)=0$$

$\because\ 1,x,x^2,x^3$ 为基 $\qquad \therefore k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4=0$

又$\because\ \alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关 $\qquad \therefore k_2=k_3=k_4=0$

$\therefore\ \beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性无关 $\qquad \therefore \operatorname{Im} D=\langle\beta_2,\beta_3,\beta_4\rangle$

$\because \operatorname{Im} D\subseteq P[x]_3$，且 $\dim \operatorname{Im} D=3=\dim P[x]_3$，$\therefore \operatorname{Im} D=P[x]_3$.

方法二：$\operatorname{Im} D \subseteq P[x]_3$,

又$\forall f(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \in P[x]_3$,

$$= D\left(b_0 x + \frac{b_1}{2} x^2 + \frac{b_2}{3} x^3\right) \in \operatorname{Im} D,$$

$$\therefore \operatorname{Im} D = P[x]_3.$$

下面求$\operatorname{Ker} D$.

设$C \in R$且$C \neq 0$, $D(C) = 0$

$\therefore C \in \operatorname{Ker} D$, 但 $\dim \operatorname{Ker} D = 1$

$$\therefore \operatorname{Ker} D = \langle C \rangle = R$$

2) 设 $C \in R$且$C \neq 0$, $C \in \operatorname{Ker} D$,

又$C \in P[x]_3 = \operatorname{Im} D$

$\therefore \operatorname{Im} D \cap \operatorname{Ker} D \neq \{O\}$, ∴不是直和.

§3.7 不变子空间

设T是复线性空间V的线性变换，由前面讲过的知识，必存在V的一个基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，使 $T(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)J$，其中

$$J=\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix}$$

这节我们要讨论的是若当块 J_i 与基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的联系.

例： V为复线性空间，$\dim V=6$，T 为V 的线性变换，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_6$ 为V 的基，

$$T(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_6)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_6)\left[\begin{array}{cc|ccc|c} 3 & 1 & & & & \\ & 3 & & & & \\ \hline & & 2 & 1 & & \\ & & & 2 & 1 & \\ & & & & 2 & \\ \hline & & & & & 5 \\ & & & & & \end{array}\right],$$

$$J=\begin{bmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & J_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} T(\alpha_1) = 3\alpha_1 \\ T(\alpha_2) = \alpha_1 + 3\alpha_2, \end{cases} \quad \begin{cases} T(\alpha_3) = 2\alpha_3 \\ T(\alpha_4) = \alpha_3 + 2\alpha_4 \\ T(\alpha_5) = \alpha_4 + 2\alpha_5, \end{cases} \quad T(\alpha_6) = 5\alpha_6.$$

$$T(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2) J_1,$$

$$T(\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = (\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) J_2, \quad T(\alpha_6) = \alpha_6 J_3.$$

令 $V_1 = \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$, $V_2 = \langle \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \rangle$, $V_3 = \langle \alpha_6 \rangle$.

则 (1) 由子空间是直和的等价命题有 $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$

(2) $TV_1 \subseteq V_1$, $TV_2 \subseteq V_2$, $TV_3 \subseteq V_3$.

定义： 设T 是线性空间V 的线性变换，W是V的子空间，如 $\forall \alpha \in W$ 有 $T(\alpha) \in W$, 则称W是V的T一不变子空间.

注：(1) V_1, V_2, V_3 均为 V 的T—不变子空间；

(2) 如果T在V的某个基下的矩阵是Jordan标准形，

那么V 就可表示为若干个T —不变子空间的直和；

(3) $TV \subseteq V$， $TO \subseteq O$,

所以V本身及零子空间都是T —不变子空间，

例：设T 是线性空间V 的线性变换，则像空间ImT与核空间Ker$T$都是T—不变子空间.

证明：(1) $\forall \beta \in \mathrm{Im}\, T = \{\beta \in V \mid \exists \alpha \in V \text{使} T(\alpha) = \beta\}$,

$$\exists \alpha \in V \text{使} T(\alpha) = \beta$$

$$T(\beta) = T(T(\alpha)) \in \mathrm{Im}\, T$$

(2) $\forall \alpha \in \mathrm{Ker}\, T$， $T(\alpha) = O \in \mathrm{Ker}\, T$

定义： 设T是数域F上线性空间V的线性变换，若存在V的非零向量α和数$\lambda \in F$使得$T(\alpha)=\lambda\alpha$，则称λ为T的特征值，α为T的属于特征值λ的特征向量.

例： $T(\alpha_1)=3\alpha_1,\ T(\alpha_3)=2\alpha_3,\ T(\alpha_6)=5\alpha_6.$

3,2,5 为T的特征值，$\alpha_1, \alpha_3, \alpha_6$为$T$的属于特征值 3,2,5 的特征向量，$\alpha_1, \alpha_3, \alpha_6$在$V$的基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$，$\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$的坐标分别为$e_1, e_3, e_6$.

而若当矩阵J的特征值为3, 2, 5,

J的对应的特征向量恰好是e_1, e_3, e_6.

即

$$Je_1=3e_1,\ Je_3=2e_3,\ Je_6=5e_6.$$

定理： 设T是数域F上线性空间V的线性变换，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，是$V$的一个基，且$T(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A$，

则 $O\neq\alpha\in V,\ T(\alpha)=\lambda\alpha$，

$$\Leftrightarrow\ Ax_0=\lambda x_0,\ \text{其中}\ \alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)x_0$$

证明： $T(\alpha)=T(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)x_0=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)Ax_0$

$$\lambda\alpha=\lambda(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)x_0=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\lambda x_0$$

$$\therefore T(\alpha)=\lambda\alpha\Leftrightarrow(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)Ax_0=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\lambda x_0$$

$$\Leftrightarrow\ Ax_0=\lambda x_0,$$

（是V中同一向量在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的坐标）

注： 求T的特征值、特征向量时，可以先求其矩阵的特征值、特征向量；T的特征多项式、最小多项式就是它的矩阵的特征多项式、最小多项式.

例：设T是数域F上n维线性空间V的线性变换，且满足

$$\mathrm{Im}\,T+\ker T=V.$$ 证明：$\mathrm{Im}\,T^2=\mathrm{Im}\,T$.

证：(1) 显然有 $\mathrm{Im}\,T^2\subset\mathrm{Im}\,T$.

(2) 由$\mathrm{Im}\,T+\ker T=V$, 及$\dim\mathrm{Im}\,T+\dim\ker T=n$,

知$\mathrm{Im}\,T\oplus\ker T=V$. 取$\ker T$的基$\alpha_1, \alpha_2,\cdots\alpha_{n-r}$,

扩充成V的基$\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-r},\alpha_{n-r+1},\cdots\alpha_n$. 则有

$\forall\alpha\in V, T\alpha\leftarrow\{T\alpha_{n-r+1},\cdots,T\alpha_n\}$, 结合 $\mathrm{Im}\,T\oplus\ker T=V$,

可得 $T\alpha_{n-r+1},\cdots,T\alpha_n$是Im$T$的一个基. 则有

$\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-r},T\alpha_{n-r+1},\cdots,T\alpha_n$是$V$的一个基. 于是

$$T\alpha\leftarrow\left(T^2\alpha_{n-r+1},\cdots,T^2\alpha_n\right)\subset\mathrm{Im}\,T$$

因此，$T\alpha\in\mathrm{Im}\,T^2$，即 $\mathrm{Im}\,T^2\supset\mathrm{Im}\,T$.

例： 设T是数域F上n维线性空间V的线性变换，且满足

$T^2 = 3T$. 证明：$\mathrm{Im}T \oplus KerT = V$.

证：设 $\alpha \in \mathrm{Im}T \cap \ker T$,

由$\alpha \in \ker T$知, $T\alpha = 0$.

由$\alpha \in \mathrm{Im}T$知，存在$\beta \in V$，使得$T\beta = \alpha$.

于是 $\alpha = T\beta = \frac{1}{3}T^2\beta = \frac{1}{3}T(T\beta) = \frac{1}{3}T\alpha = 0$.

即 $\mathrm{Im}T \cap \ker T = \{0\}$.

又 $\dim \mathrm{Im}T + \dim \ker T = n$,

故 $\mathrm{Im}T \oplus \ker T = V$.