

Asignacion#5-a (Cap#4) Distribuciones Continuas
Distribuciones de Probabilidad
DISTRIBUCION NORMAL

1. Se conoce que en un estudio $\mu=8$, $\sigma=2$. Determine las siguientes probabilidades:
 - a. $P(X \leq 3)$
 - b. $P(X > 1)$
 - c. $P(X = 5)$
 - d. $P(X \leq 1)$
 - e. $P(X \geq 5)$
2. Para un estudio $\mu=8$, $\sigma=2$.
 - a. ¿Cuál es el valor de X de forma que el 99% de los valores del experimento sean mayores que él?
 1. b. ¿Cuál es valor de X_{lower} y X_{upper} si el 95% de los datos del experimento estuvieran simétricamente distribuidos alrededor del promedio?
3. El tiempo promedio para terminar un examen final en determinado curso está distribuido normalmente. Con promedio de 65 min, y desviación estándar de 10 minutos. Para determinado alumno tomado al azar:
 - a. Cuál es la probabilidad de terminar el examen en una hora ó menos?
 - b. Cuál es la probabilidad de terminar el examen entre de 60 min y de 70 min.?
 - c. Suponga que en un grupo hay 100 alumnos; y el tiempo de examen es 80min, ¿Cuantos alumnos espera que no puedan terminar el examen?
 - d. Cual es el tiempo que toma el examen, que representa que a partir de este, se halla el 20% de los que mas tiempo tardaron?
4. El diámetro de una arandela sigue una distribución normal con promedio de 4.5 cm. y desviación estándar de 1.5 cm. Si se toma una arandela al azar determine lo siguiente:
 - a. Cuál es la probabilidad de que el diámetro sea menor de 3 cm.?
 - b. Cuál es la probabilidad de que el diámetro este entre 1,5 cm y 3,5 cm?
 - c. Cuál es el diámetro de una arandela de forma que el 90% sean mayores a él?
5. El tiempo de reacción de un experimento psicológico está distribuido normalmente con una media de $\mu = 20$ seg. y desviación estándar de $\sigma = 2$ seg.
 - a. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona tenga un tiempo de reacción entre 14 y 30 seg.?

- b. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona tenga un tiempo de reacción entre 25 y 30 seg.?
 - c. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona tenga un tiempo de reacción mayor de 14 seg.?
 - d. ¿Cuál es el tiempo de reacción de modo que sólo el 1% tengan reacciones de mayor rapidez? (Recuerde que mayor rapidez es igual a menor tiempo de reacción)
 - e. Entre que dos valores se encuentra el 90% de los datos de la distribución
- Normal de este problema.

6. El tiempo de reacción de un experimento psicológico está distribuido normalmente con una media de $\mu = 20$ seg. y desviación estándar de $\sigma = 4$ seg.

- a. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona tenga un tiempo de reacción entre 14 y 30 seg.?
- c. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona tenga un tiempo de reacción mayor de 14 seg.?
- d. ¿Cuál es el tiempo de reacción de modo que sólo el 1% tengan reacciones de mayor rapidez? (Recuerde que mayor rapidez es igual a menor tiempo de reacción)

7. En la UPPR el departamento de Administración de Empresas los índices de promedio académico de los estudiantes de $\mu = 2.83$, $\sigma = 0.38$

- a. ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante seleccionado aleatoriamente tenga un promedio académico entre 2.00 y 3.0?
- b. ¿Cuál es la probabilidad de que el promedio un estudiante seleccionado al azar sea inferior (menor) a 2.0?
- c. ¿Cuál es el promedio académico de modo que solo el 15% le excedan ósea sean superiores a él?

8.. En una ciudad en la que la edad de sus habitantes se ajusta a una distribución normal de media $\mu=35$ años y $\sigma=5$, ¿qué grupo es más numerosos: el de los mayores de 65 años o el de los menores de 18 años? Justifica la respuesta.

9.. La edad de los habitantes de cierta ciudad se distribuye normalmente, con una media de $\mu=40$ años. Se sabe además que el 2,28 % de los habitantes tiene más de 60 años

- a. ¿Cuál es la desviación típica?
- b. ¿Cuál es el porcentaje de habitantes con meno de 35 años?

8. El coeficiente de inteligencia de un grupo de 500 alumnos es una variable aleatoria que se distribuye como una normal de media $\mu=100$ y desviación típica $\sigma=16$. Determina el número esperado de alumnos que tienen un coeficiente entre 118 y 122

10. Un estudio de un fabricante de televisores indica que la duración media de un televisor es de $\mu=10$ años, con una desviación típica de $\sigma=0,7$ años. Suponiendo que la duración de los televisores sigue una distribución normal.

- a. Calcula la probabilidad de que un televisor dure más de 9 años.
- b. Calcula la probabilidad de que dure entre 9 y 11 años

11. En cierta prueba, el 35 por ciento de la población examinada obtuvo una nota superior a 6, el 25 por ciento, entre 4 y 6, y el 40 por ciento inferior a 4. Suponiendo que las notas siguen una distribución normal, calcula la nota media y la desviación típica.

- a. ¿Qué porcentaje de población tiene una nota que se diferencia de la media en menos de 2 unidades

12. En un examen, al que se presentaron 2000 estudiantes, las puntuaciones se distribuyeron normalmente, con media $\mu=72$ y desviación típica $\sigma=9$.

- a. ¿Cuántos estudiantes obtuvieron una puntuación entre 60 y 80?
- b. Si el 10 % superior de los alumnos recibió la calificación de sobresaliente, ¿qué puntuación mínima había que tener para recibir tal calificación?

1. Se conoce que en un estudio $\mu=8$, $\sigma=2$. Determine las siguientes probabilidades:

a. $P(X \leq 3)$

b. $P(X > 1)$

c. $P(X = 5)$

d. $P(X \leq 1)$

e. $P(X \geq 5)$

a) $P(X \leq 3) = P\left(X \leq \frac{3-8}{2}\right) = \Phi(-2.5) = \underline{\underline{0.0062}}$

b) $P(X > 1) = P\left(X > \frac{1-8}{2}\right) = \Phi(-3.5) = 1 - \Phi(-3.5) = \Phi(3.5) = \underline{\underline{0.9998}}$

c) $P(X = 5) = P\left(X = \frac{5-8}{2}\right) = \Phi(-1.5) = \underline{\underline{0.0668}}$

d) $P(X \leq 1) = 1 - P(X > 1) = \underline{\underline{0.0002}}$

e) $P(X \geq 5) = P\left(X \geq \frac{5-8}{2}\right) = \Phi(-1.5) = \underline{\underline{0.9332}}$

2. Para un estudio $\mu=8$, $\sigma=2$.

a. ¿Cuál es el valor de X de forma que el 99% de los valores del experimento sean mayores que el?

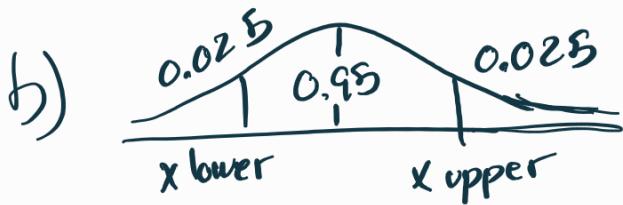
b. ¿Cuál es valor de X_{lower} y X_{upper} si el 95% de los datos del experimento estuvieran simétricamente distribuidos alrededor del promedio?

$$\mu = 8 \quad \sigma = 2$$

a) $P(X > x_1) = 0.99 = 1 - .99 = 0.01$

$$= P\left(X \leq \frac{x_1-8}{2}\right) = \Phi(-2.33) = 0.0099$$

$$= \frac{x_1-8}{2} = -2.33 = \underline{\underline{3.34}}$$



$$P(X > \frac{x_{upper} - \mu}{\sigma}) = 0.025$$

$$P(X \leq \frac{x_{upper} - \mu}{\sigma}) = 1 - 0.025 = 0.975 = \Phi(1.96) = 0.9750$$

$$= 1.96 = \underline{11.92}$$

$$\frac{x_{lower} - \mu}{\sigma} = -1.96$$

$$x_{lower} = 4.08$$

El tiempo promedio para terminar un examen final en determinado curso esta distribuido normalmente. Con promedio de 65 min, y desviación estándar de 10 minutos. Para determinado alumno tomado al azar:

- Cuál es la probabilidad de terminar el examen en una hora ó menos?
- Cuál es la probabilidad de terminar el examen entre de 60 min y de 70 min.?
- Suponga que en un grupo hay 100 alumnos; y el tiempo de examen es 80min, ¿Cuantos alumnos espera que no puedan terminar el examen?
- Cual es la tiempo que toma el examen, que representa que a partir de este, se halla el 20% de los que mas tiempo tardaron?

$$\mu = 65 \quad \sigma = 10$$

$$\text{a)} P(X \leq 60) = P\left(X \leq \frac{60 - 65}{10}\right) = \Phi(-0.5) = 0.4801$$

$$\text{b)} P(60 < X < 70) = P\left(\frac{60 - 65}{10} < X < \frac{70 - 65}{10}\right) = \Phi(-0.5) - \Phi(0.5) = 0.6915 = 0.6915 - 0.3085 = 0.383$$

$$\text{d)} P(X > 75) = P\left(X > \frac{80 - 75}{10}\right) = \Phi(0.5) = 0.6915 \times 100$$

$$= 69.15$$

$$d) P(X > x_1) = 0.20$$

$$P\left(X > \frac{x-4.5}{1.5}\right) = 0.84$$

$$x = \underline{\underline{73.4}}$$

El diámetro de una arandela sigue una distribución normal con promedio de 4.5 cm. y desviación estándar de 1.5 cm. Si se toma una arandela al azar determine lo siguiente:

- Cuál es la probabilidad de que el diámetro sea menor de 3 cm.?
- Cuál es la probabilidad de que el diámetro este entre 1,5 cm y 3,5 cm?
- Cuál es el diámetro de una arandela de forma que el 90% sean mayores a él?

$$\mu = 4.5 \quad \sigma = 1.5$$

$$a) P(X < 3) = P\left(X < \frac{3-4.5}{1.5}\right) = \Phi(-1) = \underline{\underline{0.1587}}$$

$$b) P(1.5 < X < 3.5) = P\left(\frac{1.5-4.5}{1.5} < X < \frac{3.5-4.5}{1.5}\right) \\ = \Phi(-2) - \Phi(-0.67) \\ = 0.0228 - 0.2511 = \underline{\underline{0.2286}}$$

$$c) P(X > x_1) = .90$$

$$P\left(X > \frac{x_1-4.5}{1.5}\right) = .90$$

$$Z = -1.28$$

$$\frac{x-4.5}{1.5} = -1.28 \Rightarrow x = \underline{\underline{2.58}}$$

5. El tiempo de reacción de un experimento psicológico está distribuido normalmente con una media de $\mu = 20$ seg. y desviación estándar de $\sigma = 2$ seg.

- ¿Cuál es la probabilidad de que una persona tenga un tiempo de reacción entre 14 y 30 seg.?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que una persona tenga un tiempo de reacción entre 25 y 30 seg.?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que una persona tenga un tiempo de reacción mayor de 14 seg.?
 - ¿Cuál es el tiempo de reacción de modo que sólo el 1% tengan reacciones de mayor rapidez? (Recuerde que mayor rapidez es igual a menor tiempo de reacción)
 - Entre qué dos valores se encuentra el 90% de los datos de la distribución
- Normal de este problema.

$$\mu = 20 \quad \sigma = 2$$

$$a) P(14 < x < 30) = P\left(\frac{14-20}{2} < z < \frac{30-20}{2}\right) = \Phi(-3) - \Phi(5) = \\ = 0.0013 - 1 = \underline{\underline{0.9987}}$$

$$b) P(25 < x < 30) = P\left(\frac{25-20}{2} < z < \frac{30-20}{2}\right) = \Phi(2.5) - \Phi(5) \\ = 0.9938 - 1 = \underline{\underline{0.0062}}$$

$$c) P(x > 14) = P(x > \frac{14-20}{2}) = \Phi(-3) = \underline{\underline{0.0013}}$$

$$d) \text{Area} = 0.01 \\ = -2.326$$

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = x = (-2.326)(2) + 20 = \underline{\underline{15.348}}$$



$$x = (-0.645)(2) + 20 = \underline{\underline{16.71}}$$

$$x = (1.645)(2) + 20 = \underline{\underline{23.29}}$$

6. El tiempo de reacción de un experimento psicológico esta distribuido normalmente con una media de $\mu = 20$ seg. y desviación estándar de $\sigma = 4$ seg.

- a. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona tenga un tiempo de reacción entre 14 y 30 seg.?
- c. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona tenga un tiempo de reacción mayor de 14 seg.?
- d. ¿Cuál es el tiempo de reacción de modo que sólo el 1% tengan reacciones de mayor rapidez? (Recuerde que mayor rapidez es igual a menor tiempo de reacción)

$$\mu = 20 \quad \sigma = 4$$

$$a) P(14 < x < 30) = P\left(\frac{14-20}{4} < z < \frac{30-20}{4}\right) = \Phi(-1.5) - \Phi(2.5) \\ = 0.0668 - 0.9938 = \underline{\underline{0.927}}$$

$$b) P(x > 14) = P\left(z > \frac{14-20}{4}\right) = 1 - \Phi(1.5) = \Phi(-1.5) = \underline{\underline{0.9332}}$$

$$d) \text{Area} = 0.01 \Rightarrow z = -2.326$$

$$x = z\sigma + \mu \quad \leftarrow \text{Formula}$$

$$x = (-2.326)(4) + 20 =$$

$$-9.304 + 20 = \underline{\underline{10.696}}$$

7. En la UPPR el departamento de Administración de Empresas los índices de promedio académico de los estudiantes de $\mu = 2.83$, $\sigma = 0.38$

- ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante seleccionado aleatoriamente tenga un promedio académico entre 2.00 y 3.0?
- ¿Cuál es la probabilidad de que el promedio un estudiante seleccionado al azar sea inferior (menor) a 2.0?
- ¿Cuál es el promedio académico de modo que solo el 15% le excedan ósea sean superiores a él?

$$\mu = 2.83 \quad \sigma = 0.38$$

$$a) P(2.00 < x < 3.0) = P\left(\frac{2.00 - 2.83}{0.38} < z < \frac{3.0 - 2.83}{0.38}\right) \\ = \Phi(-2.18) - \Phi(0.45) \\ = 0.0146 - 0.6736 = \underline{\underline{0.659}}$$

$$b) P(x < 2.0) = P\left(x < \frac{2.0 - 2.83}{0.38}\right) = \Phi(-2.18) = \underline{\underline{0.0146}}$$



$$P(x \leq x_1) = .85 \\ = 1.04$$

$$x_1 = (1.04)(0.38) + 2.83 = \underline{\underline{3.2252}} \approx \underline{\underline{3.23}}$$

8.. En una ciudad en la que la edad de sus habitantes se ajusta a una distribución normal de media $\mu=35$ años y $\sigma=5$, ¿qué grupo es más numeroso: el de los mayores de 65 años o el de los menores de 18 años? Justifica la respuesta.

$$M = 35 \quad \sigma = 5$$

$$P(X > 65) = P\left(X > \frac{65-35}{5}\right) = \phi(6)$$

$$= 0$$

$$P(X < 18) = P\left(X < \frac{18-35}{5}\right) = \phi(-3.4)$$

$$= 0.0003$$

9.. La edad de los habitantes de cierta ciudad se distribuye normalmente, con una media de $\mu=40$ años. Se sabe además que el 2,28 % de los habitantes tiene más de 60 años

- a. ¿Cuál es la desviación típica?
- b. ¿Cuál es el porcentaje de habitantes con menor de 35 años?

$$M = 40$$

$$P(X > 60) = 0.0228 =$$

$$\left[1 - P(X < 60)\right] \Rightarrow 1 - P\left(Z < \frac{60-40}{\sigma}\right) = 0.0228$$

$$P\left(Z < \frac{20}{\sigma}\right) = 1 - 0.0228 = 0.9772$$

$$Z = 2.0$$

$$\sigma = \frac{20}{2} = 10$$

$$b) P(x < 35 | \mu = 40, \sigma = 10)$$

$$\begin{aligned} P\left(z < \frac{35-40}{10}\right) &= P(z < -0.5) \\ &= \Phi(-0.5) \\ &= \underline{\underline{0.3413}} \end{aligned}$$

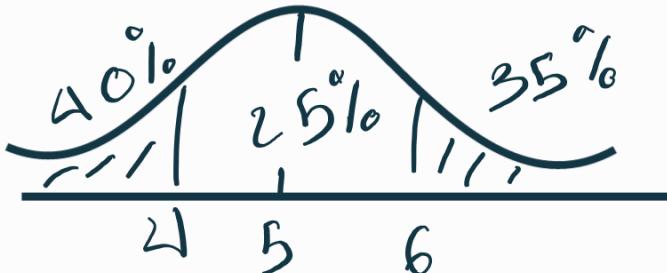
8. El coeficiente de inteligencia de un grupo de 500 alumnos es una variable aleatoria que se distribuye como una normal de media $\mu=100$ y desviación típica $\sigma=16$. Determina el número esperado de alumnos que tienen un coeficiente entre 118 y 122

$$\mu = 100 \quad \sigma = 16$$

$$\begin{aligned} P(118 < x < 122) &= \left(\Phi\left(\frac{118-100}{16}\right) - \Phi\left(\frac{122-100}{16}\right) \right) \\ &= \Phi(1.13) - \Phi(1.38) \\ &= 0.8708 - 0.9162 = 0.0454 \\ &= 0.0454 * 500 \\ &= \underline{\underline{22.7}} \end{aligned}$$

11. En cierta prueba, el 35 por ciento de la población examinada obtuvo una nota superior a 6, el 25 por ciento, entre 4 y 6, y el 40 por ciento inferior a 4. Suponiendo que las notas siguen una distribución normal, calcula la nota media y la desviación típica.

- a. ¿Qué porcentaje de población tiene una nota que se diferencia de la media en menos de 2 unidades



$$P(X > 6) = .35$$

$$P(4 < X < 6) = .25$$

$$P(X < 4) = .40$$

<u>X</u>	<u>P(X)</u>
4	.40
5	.50
6	.65

$$\frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{.8 - .4}{.65 - .4}$$

$$\frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{2}{5}$$

$$X - \mu = \frac{4}{5}$$

$$X = \frac{4}{5} + \mu = \frac{24}{5}$$

$$X = 4.8$$

$$P(X < 4) = .40$$

$$P(Z < \frac{4 - 4.8}{\sigma}) = .40$$

$$P(Z < \frac{-0.8}{\sigma}) = -.25 = \underline{\underline{\frac{4 - 4.8}{\sigma}}}$$

$$\sigma = \frac{4 - 4.8}{-.25} = \underline{\underline{3.2}}$$

$$a) \mu = 4.8, X = 4.8 - 2 = 2.8$$

$$P(X < 2.8 | \mu = 4.8, \sigma = 3.2)$$

$$\begin{aligned} P\left(Z < \frac{2.8 - 4.8}{3.2}\right) &= P(Z < -0.625) \\ &= \Phi(-0.63) = \underline{\underline{0.2643}} \end{aligned}$$

12. En un examen, al que se presentaron 2000 estudiantes, las puntuaciones se distribuyeron normalmente, con media $\mu=72$ y desviación típica $\sigma=9$.

- a. ¿Cuántos estudiantes obtuvieron una puntuación entre 60 y 80?
- b. Si el 10 % superior de los alumnos recibió la calificación de sobresaliente, ¿qué puntuación mínima había que tener para recibir tal calificación?

$$\begin{aligned} a) P(60 < X < 80) &= P\left(\frac{60-72}{9} < Z < \frac{80-72}{9}\right) \\ &= \Phi(-1.33) - \Phi(0.89) \\ &= 0.0918 - 0.8133 \\ &= 0.7215 * 2000 \\ &= \underline{\underline{1443}} \end{aligned}$$

$$\text{D) } P(X < x_1) = .10$$

$$P\left(X < \frac{x_1 - 72}{q}\right) = .10$$

$$\Phi\left(\frac{z < \frac{x_1 - 72}{q}}{q}\right) = .10 \Rightarrow \frac{x_1 - 72}{q} = .10 = 1.29$$

$$x_1 = \underline{\underline{83.61}}$$