Probability and Mathmatical Statistics
Homework 5

冯诗伟 161220039

1 4.4

已知随机变量 X 和 Y 独立同分布，且 X 的概率分布为 $P(X=1)=1-P(X=2)=\frac{2}{3}$。记 $U=max(X,Y),V=min(X,Y)$，求：

(1)(U,V) 的概率分布；(2)$E(U)$ 和 $E(V)$；(3)$cov(U,V)$。

解：

(1) $P(X=1)=P(Y=1)=\frac{2}{3}$，$P(X=2)=P(Y=2)=\frac{1}{3}$。

(U,V)**的取值范围为**$(1,1),(2,1),(2,2)$。

$P((U,V)=(1,1))=P(X=1,Y=1)=P(X=1)P(Y=1)=\frac{4}{9}$,

$P((U,V)=(2,1))=P(X=2,Y=1)+P(X=1,Y=2)=P(X=2)P(Y=1)+P(X=1)P(Y=2)=\frac{4}{9}$,

$P((U,V)=(2,2))=P(X=2,Y=2)=P(X=2)P(Y=2)=\frac{1}{9}$,

所以 (U,V) 的分布律如下：

(U,V)	$(1,1)$	$(2,1)$	$(2,2)$
P	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

(2) U 的 V 分布律如下：

U	1	2
P	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{9}$

V	1	2
P	$\frac{8}{9}$	$\frac{1}{9}$

$E(X)=1\times\frac{4}{9}+2\times\frac{5}{9}=\frac{14}{9}$，$E(Y)=1\times\frac{8}{9}+2\times\frac{1}{9}=\frac{10}{9}$。

(3)

UV	1	2	4
P	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

$$\begin{aligned}cov(U,V)&=E(UV)-E(U)E(V)\\&=\sum_{i=1,2,4} iP(UV=i)-E(U)E(V)\\&=\frac{16}{9}-\frac{14}{9}\times\frac{10}{9}\\&=\frac{4}{81}\end{aligned}$$

2 4.19

设 X 和 Y 独立，且都服从泊松分布，已知 $E(X)=1, E(Y)=2$，请计算 $E((X+Y)^2)$。

解:

由题意，$X\sim P(1)$，$Y\sim P(2)$。又因为 $E(X^2)=1^2+1$，$E(Y^2)=2^2+2$，有

$$\begin{aligned} E((X+Y)^2) &= E(X^2+Y^2+2XY) \\ &= E(X^2)+E(Y^2)+2E(XY) \\ &= E(X^2)+E(Y^2)+2E(X)E(Y) \\ &= (1^2+1)+(2^2+2)+2\times 1\times 2 \\ &= 12 \end{aligned}$$

3 4.23

设 $f(x)$，$0\le x<+\infty$，是一个单调非减函数，且 $f(x)>0$。对于随机变量 X，若 $E[f(x)]<\infty$，则证明对于任意的 $x>0$，$P(|X|\ge x)\le \dfrac{1}{f(x)}E[f(|X|)]$。

证明. 由于 $f(x)$ 是一个单调非减函数，所以

$$P(|X|\ge x)=P(f(|X|)\ge f(x))$$

由马尔可夫不等式，有

$$P(f(|X|)\ge f(x))\le \frac{1}{f(x)}E[f(|X|)]$$

综上对于任意的 $x>0$，$P(|X|\ge x)\le \dfrac{1}{f(x)}E[f(|X|)]$。 □

4 补充 2

假设 X 和 Y 独立，$X\sim G(p)$，$Y\sim G(q)$，求下列值。

（1）$E[max(X,Y)]$.(至少用两种方法)

（2）$E[X|X\le Y]$.

解:

（1）（a）方法一：按照定义

$$\begin{aligned} P(max(X,Y)=k) &= P(X=k, Y\le k)+P(Y=k, X<k) \quad \text{（防止}X=Y\text{被重复计算）} \\ &= P(X=k)P(Y\le k)+P(Y=k)P(X<k) \\ &= P(X=k)\left(1-P(Y>k)\right)+P(Y=k)\left(1-P(X\ge k)\right) \\ &= (1-p)^{k-1}p(1-(1-q)^k)+(1-q)^{k-1}q(1-(1-p)^{k-1}) \\ &= (1-p)^{k-1}p+(1-q)^{k-1}q-(p+q-pq)(1-p)^{k-1}(1-q)^{k-1} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E[max(X,Y)] &= \sum_{k=1}^{\infty} kP(max(X,Y)=k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}p + \sum_{k=1}^{\infty} k(1-q)^{k-1}q - \sum_{k=1}^{\infty} k(p+q-pq)(1-p)^{k-1}(1-q)^{k-1} \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p+q-pq}
\end{aligned}
$$

(b) 方法二: X,Y 中总有一个等于 $maxX,Y$, 另一个等于 $minX,Y$。作业 4 中曾求得 $min(X,Y) \sim G(p+q-pq)$, 所以 $E(min(X,Y)) = \dfrac{1}{p+q-pq}$。

$$
\begin{aligned}
E(max(X,Y)) &= E(X) + E(Y) - E(min(X,Y)) \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p+q-pq}
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
E[X|X \leq Y] &= \sum_{k=1}^{\infty} kP(X=k|X \leq Y) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{P(X=k, X \leq Y)}{P(X \leq Y)}
\end{aligned}
$$

其中

$$
P(X=k, X \leq Y) = (1-p)^{k-1}p(1-q)^{k-1}
$$

$$
\begin{aligned}
P(X \leq Y) &= \sum_{i=1}^{\infty} P(X=i, Y \geq i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^{i-1}p(1-q)^{i-1} \\
&= \frac{p}{p+q-pq}
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
E[X|X \leq Y] &= \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{P(X=k, X \leq Y)}{P(X \leq Y)} \\
&= (p+q-pq)\sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1}(1-q)^{k-1} \\
&= \frac{1}{p+q-pq}
\end{aligned}
$$

5 补充 3

设 π 为 $[n] = 1,2,3,\cdots,n$ 的一个置换。若 $\pi(i) = i$，则称 i 为 π 的一个不动点。从 $n!$ 个置换中任取一个置换，求不动点个数的方差。

解:
定义随机变量 X 表示不动点的个数，同时定义指示变量 $X_i(i=1,2,3,\cdots,n)$，

$$X_i=\begin{cases}1, & \pi(i)=i\\ 0, & \pi(i)\neq i\end{cases}$$

$P(X_i=1)=\dfrac{1}{n}$，则

$$\begin{aligned}E(X)&=E(\sum_{i=1}^{n}X_i)\\&=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)\\&=1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E(X^2)&=E((\sum_{i=1}^{n}X_i)^2)\\&=E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2+2\sum_{1\le i<j\le n}X_iX_j\right)\\&=\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)+2\sum_{1\le i<j\le n}E(X_iX_j)\\&=\sum_{i=1}^{n}P(X_i=1)+2\sum_{1\le i<j\le n}P(X_i=1,X_j=1)\\&=n\times\frac{1}{n}+2\times\frac{n(n-1)}{2}\times\frac{(n-2)!}{n!}\\&=2\end{aligned}$$

得

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=2-1=1$$

6 补充 4

不停地抛一枚均匀的骰子，直至出现一双连续的 6。求所抛次数的期望值。
解:
定义 X 为出现一双连续的 6 所抛次数，同时定义两个随机变量 Y、Z。

$$Y=\begin{cases}1, & \text{第一次是6}\\ 0, & \text{第一次不是6}\end{cases}$$

$$Z=\begin{cases}1, & \text{第二次是6}\\ 0, & \text{第二次不是6}\end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
E(X) &= E(X|Y=1)P(Y=1) + E(X|Y=0)P(Y=0) \\
&= [E(X|Y=1,Z=1)P(Z=1) + E(X|Y=1,Z=0)P(Z=0)]\,P(Y=1) + (1+E[X])P(Y=0) \\
&= [2\times\frac{1}{6} + (2+E(X))\times\frac{5}{6}]\times\frac{1}{6} + (1+E(X))\times\frac{5}{6}
\end{aligned}
$$

解得 $E(X)=42$。

7 补充 5

某只股票每天的股票以 p 的概率变成原来的 $r>1$ 倍，以 $q=1-p$ 的概率变成原来的 $1/r$ 倍。假定股票的初始价格为 1 元每股，计算 d 天之后股票价格的期望和方差。

解:

设第 i 天的股票价格为 X_i，

$$
\begin{aligned}
E(X_i) &= pE(X_i|\text{第}i-1\text{天涨价}) + (1-p)E(X_i|\text{第}i-1\text{天降价}) \\
&= prE(X_{i-1}) + \frac{1-p}{r}E(X_{i-1}) \\
&= \left(pr + \frac{1-p}{r}\right)E(X_{i-1})
\end{aligned}
$$

因为 $E(X_1)=1$，所以 $E(X_d)=(pr+\dfrac{1-p}{r})^{d-1}$。

$$
\begin{aligned}
E(X_i^2) &= pE(X_i^2|\text{第}i-1\text{天涨价}) + (1-p)E(X_i^2|\text{第}i-1\text{天降价}) \\
&= pE(X_{i-1}^2\times r^2) + E\left(X_{i-1}^2\times(\frac{1-p}{r})^2\right) \\
&= \left[pr^2 + \frac{1-p}{r^2}\right]E(X_{i-1})
\end{aligned}
$$

因为 $E(X_1^2)=1$，所以 $E(X_d^2)=\left[pr^2+\dfrac{1-p}{r^2}\right]^{d-1}$。所以有

$$
D(X_d) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \left[pr^2 + \frac{1-p}{r^2}\right]^{d-1} - \left(pr + \frac{1-p}{r}\right)^{2d-2}
$$

8 补充 6

设我们抛了 n 次一枚均匀硬币从而获得了 n 个随机比特。考虑这些比特可构成 $n(n-1)/2$ 个比特对。对每一个比特对进行异或操作，记结果为 Y_i，$i=1$，2，$\cdots$，$n(n-1)/2$。定义 Y 为 $Y_i=1$ 的个数。

(1) 求 Y_i 的分布律。

(2) 证明 Y_i，$i=1$，2，$\cdots$，$n(n-1)/2$ 并不是相互独立的。

(3) 证明 $E(Y_iY_j)=E(X_i)E(X_j)$。

(4) 计算 $D(Y)$。

(5) 为 $P(|Y-E(Y)|\geq n)$ 建立一个上界。

解:

(1)

$$P(Y_i=1)=P(\text{比特对为}(1,1))+P(\text{比特对为}(0,0))=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$P(Y_i=0)=P(\text{比特对为}(1,0))+P(\text{比特对为}(0,1))=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

Y_i 的分布律如下：

Y_i	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

(2)

证明. 取特殊值 $Y_i=1$，$i=1$，2，$\cdots$，$\binom{n}{2}$，

$$\prod_{i=1}^{\binom{n}{2}}P(Y_i=1)=1$$

但是 $P\left((\prod_{i=1}^{\binom{n}{2}}Y_i)=1\right)$ 必定等于 0，因为任取三个比特，必有两个相等，则存在 i，$1\le i\le\binom{n}{2}$，使得 $Y_i=0$。所以Y_i，$i=1$，2，$\cdots$，$n(n-1)/2$ 并不是相互独立的。 □

(3)

证明.

$$\begin{aligned}E(Y_iY_j)&=0\times\sum_{1\le i<j\le n(n-1)/2}P(Y_iY_j=0)+1\times\sum_{1\le i<j\le n(n-1)/2}P(Y_iY_j=1)\\&=\sum_{1\le i<j\le n(n-1)/2}P(Y_iY_j=1)\\&=\sum_{1\le i<j\le n(n-1)/2}P(Y_i=1,Y_j=1)\end{aligned}$$

当 Y_i,Y_j 的两个比特对是由 4 个比特生成时，Y_i,Y_j 是独立的，$P(Y_i=1,Y_j=1)=P(X_i=1)P(Y_i=1)$。

当 Y_i,Y_j 的两个比特对是由 3 个比特生成时，记这三个比特为 a,b,c。不失一般性，设 $Y_i=a\oplus b,Y_j=a\oplus c$。在 (a,b,c) 的 8 种情况中，有 2 种情况使得 $Y_i=1$ 且 $Y_j=1$，$P(Y_i=1,Y_j=1)=\dfrac{1}{4}$；有 4 种情况使得 $Y_i=1$，$P(Y_i=1)=\dfrac{1}{2}$；有 4 种情况使得 $Y_j=1$，$P(Y_j=1)=\dfrac{1}{2}$；所以 $P(Y_i=1,Y_j=1)=P(X_i=1)P(Y_i=1)$。

所以

$$\begin{aligned}E(Y_iY_j)&=\sum_{1\le i<j\le n(n-1)/2}P(Y_i=1,Y_j=1)\\&=\sum_{1\le i<j\le n(n-1)/2}P(Y_i=1)P(Y_j=1)\\&=\sum_{i=1}^{n}P(Y_i=1)\sum_{j=1}^{n}P(Y_j=1)\quad(i\ne j)\\&=E(Y_i)E(Y_j)\end{aligned}$$

□

（4）

$$\begin{aligned}
D(Y) &= D\left(\sum_{i=1}^{n(n-1)/2} Y_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n(n-1)/2} D(Y_i) + 2 \sum_{1\leq i<j\leq \frac{n(n-1)}{2}} cov(Y_i, Y_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n(n-1)/2} D(Y_i) + 2 \sum_{1\leq i<j\leq \frac{n(n-1)}{2}} [E(Y_i, Y_j) - E(Y_i)E(Y_j)] \\
&= \sum_{i=1}^{n(n-1)/2} [E(Y_i^2) - (E(Y_i))^2] \\
&= \sum_{i=1}^{n(n-1)/2} [(1^2 \times \frac{1}{2}) - (\frac{1}{2})^2] \\
&= \frac{n(n-1)}{2} \times \frac{1}{4} \\
&= \frac{n(n-1)}{8}
\end{aligned}$$

（5）使用切比雪夫不等式，

$$P\left(|Y - E(Y)| \geq n\right) \leq \frac{D(Y)}{n^2} = \frac{\frac{n(n-1)}{8}}{n^2} = \frac{n-1}{8n}$$