Probability and Mathmatical Statistics
Homework 14

冯诗伟 161220039

1 8.2

解： 设桶装油的质量为 X 千克，$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，记原假设 H_0 和备择假设 H_1 分别为

$$H_0 : \mu = 10 \quad H_1 : \mu \neq 10$$

检验统计量为 $\dfrac{\overline{X} - \mu}{S_n/\sqrt{n-1}}$，当 H_0 成立时，$T = \dfrac{\overline{X} - 10}{S_n/\sqrt{n-1}} \sim t(n-1)$。则检验的拒绝域为

$$W = \left\{ |T| = |\frac{\overline{X} - 10}{S_n/\sqrt{n-1}}| \geq t_{\alpha/2}(n-1) \right\}$$

其中，$\overline{X} = 10.06$，$S_n = \sqrt{S_n^2} = 0.7375$，$n = 10$，$t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.005}(9) = 3.2498$, 检验统计量的观察值 $t = 0.244 \notin W$， 所以接受原假设，认为该公司的桶装油质量为 10 千克。

2 8.3

解： 设这批矿砂的锂含量为 $X\%$，$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，记原假设 H_0 和备择假设 H_1 分别为

$$H_0 : \mu = 3.25 \quad H_1 : \mu \neq 3.25$$

检验统计量为 $\dfrac{\overline{X} - \mu}{S_n/\sqrt{n-1}}$，当 H_0 成立时，$T = \dfrac{\overline{X} - 3.25}{S_n/\sqrt{n-1}} \sim t(n-1)$。则检验的拒绝域为

$$W = \left\{ |T| = |\frac{\overline{X} - 3.25}{S_n/\sqrt{n-1}}| \geq t_{\alpha/2}(n-1) \right\}$$

其中，$\overline{X} = 3.252$，$S_n = \sqrt{S_n^2} = 0.01166$，$n = 5$，$t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.005}(4) = 4.6041$, 检验统计量的观察值 $t = 0.343 \notin W$， 所以接受原假设，认为该批矿砂的锂含量为 3.25%。

3 8.4

解： 设这批钢索的断裂强度为 X 千克/平方厘米，$X \sim N(\mu, 40^2)$，记原假设 H_0 和备择假设 H_1 分别为

$$H_0 : \mu = \overline{x} - 20 \quad H_1 : \mu < \overline{x} - 20$$

检验统计量为 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$，当 H_0 成立时，$U=\dfrac{\overline{X}-(\overline{x}-20)}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$。则检验的拒绝域为

$$W=\left\{U=\frac{\overline{X}-(\overline{x}-20)}{\sigma/\sqrt{n}}\le -u_\alpha\right\}$$

其中，$\overline{X}=\overline{x}$，$\sigma=40$，$n=9$，$-u_\alpha=-u_{0.01}=-2.33$, 检验统计量的观察值 $u=1.5\notin W$， 所以接受原假设，认为该批钢索的断裂强度有所提高。

4　8.6

解：　设 A 种小麦的蛋白质含量为 X, $X\sim N(\mu_1,\sigma^2)$, 设 B 种小麦的蛋白质含量为 Y, $Y\sim N(\mu_2,\sigma^2)$, 记原假设 H_0 和备择假设 H_1 分别为

$$H_0:\mu_1=\mu_2\quad H_1:\mu_1\neq\mu_2$$

检验统计量为 $\sqrt{\dfrac{n_1n_2(n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}}\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}}$,

当 H_0 成立时，$T=\sqrt{\dfrac{n_1n_2(n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}}\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}}\sim t(n_1+n_2-2)$。

则检验的拒绝域为

$$W=\left\{|T|\ge t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)\right\}$$

其中，$n_1=10$，$\overline{X}=14.3$，$S_1^2=1.62$，$n_2=5$，$\overline{Y}=11.7$，$S_2^2=0.14$，$t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)=t_{0.005}(13)=3.0123$， 检验统计量的观察值 $t=4.399\in W$， 所以接受备择假设，认为良种小麦的蛋白质含量有差异。

5　8.10

解：　设机床甲加工的零件直径为 X，$X\sim N(\mu,\sigma_1^2)$，设机床乙加工的零件直径为 Y，$Y\sim N(\mu,\sigma_2^2)$, 记原假设 H_0 和备择假设 H_1 分别为

$$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2\quad H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$$

检验统计量为 $\dfrac{S_1^2\sigma_2^2}{S_2^2\sigma_1^2}$，当 H_0 成立时，$F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\sim(n_1-1，n_2-1)$。则检验的拒绝域为

$$W=\left\{F\le F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)\right\}\cup\left\{F\ge F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)\right\}$$

其中，$n_1=8$，$\overline{X}=19.925$，$S_1^2=0.2164$，$n_2=7$，$\overline{Y}=20$，$S_2^2=0.6298$，$F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=F_{0.975}(7,6)=\dfrac{1}{F_{0.025}(6,7)}=0.1953$，$F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=F_{0.025}(7,6)=5.70$ 检验统计量的观察值 $f=0.3436\notin W$， 所以接受原假设，认为甲乙两台机床加工的精度无显著差异。