Probability and Mathmatical Statistics
Homework 4

冯诗伟 161220039

1 1.36

某单位有 100 台电话分机，每台分机有 5% 的时间使用外线通话，若每台分机使用外线是独立的，问该单位要设立多少条外线，才能以 90% 以上的概率保证各分机使用外线不被占线。

解:

设同时有 X 台电话分机要使用外线。X 可近似看作服从 $\lambda = 100 \times 0.5\% = 5$ 的泊松分布。

设该单位至少设立 n 条外线，由

$$\arg\min_{n \in \mathbb{N}} [P(X \leq n) \geq 90\%] = 8$$

有该单位要设立 8 条外线，才能以 90% 以上的概率保证各分机使用外线不被占线。

2 2.7

设有甲乙两种颜色和味觉都极其相似的名酒各 4 杯，若从中挑 4 杯能将甲酒全部挑出来，算是试验成功一次。

⑴ 某人随机地去猜，问他实验成功一次的概率是多少?

⑵ 某人声称他通过品尝可区分这两种酒，他独立试验 10 次成功 3 次。利用小概率事件原理推断，他是猜对的，还是确有区分能力。

解:

⑴ 设事件 X 为实验成功一次。

$$P(X) = \frac{1}{\dbinom{8}{4}} = \frac{1}{70}$$

⑵ 设事件 Y 为独立试验 10 次成功 3 次。

$$P(Y) = \binom{10}{3} (P(X))^3 (1 - P(X))^7 = 0.0316\%$$

事件 Y 的发生概率非常小，他应该确有分辨能力。

3 2.8

已知每天到达某港口的油船数 X 服从参数为 2.5 的泊松分布，而港口的服务能力最多只有 3 只船，如果一天中到达港口的游船多于 3 只，则超过 3 只的油船必须转港。

(1) 求一天中必须有油船转港的概率。
(2) 求一天中最大可能到达港口的油船数及其概率。
(3) 问服务能力提高到多少只油船的时候，能使到达油船以 90% 的概率得到服务。
解:
(1)

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - 0.0821 - 0.2052 - 0.2565 - 0.2138 = 0.2424$$

(2) 设一天中最大可能到达港口的油船数为 i，则有

$$\begin{cases} P(X = i) \geq P(X = i + 1) \\ P(X = i) \geq P(X = i - 1) \end{cases}$$

解得

$$1.5 \leq i \leq 2.5$$

则一天中最大可能到达港口的油船数为 2，其概率为 $P(X = 2) = 0.2052$。
(3) 即求 $\arg\min_{n \in \mathbb{N}} [P(X \leq n) \leq 90\%]$。
求得 $n = 5$。

4 负二项分布

解：独立抛硬币 r 次，第 r 次确定为正面向上，前 $r-1$ 次中有 k 次正面向上，$r-k$ 次为反面向上。

$$\begin{aligned} P(X = r) &= p\binom{r-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{r-k} \\ &= p^k\binom{r-1}{k-1}(1-p)^{r-k}，\ r = k, k+1, \cdots \end{aligned}$$

其中,

$$P(X = r) \geq 0，\ r = k, k+1, \cdots$$

$$\begin{aligned} \sum_{r=k}^{\infty} P(X = r) &= \sum_{r=k}^{\infty} p^k\binom{r-1}{k-1}(1-p)^{r-k} \cdots\cdots \text{设} t = r - k \\ &= p^k\sum_{t=0}^{\infty}\binom{k+t-1}{t}(1-p)^t \\ &= p^k\sum_{t=0}^{\infty}\frac{(k+t-1)(k+t-2)\cdots(k)}{t!}(1-p)^t \\ &= p^k\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^t\frac{(-k)(-k-1)\cdots(-k-(t-1))}{t!}(1-p)^t \\ &= p^k\sum_{t=0}^{\infty}\binom{t}{-k}(p-1)^t \cdot 1^{-k-t} \\ &= p^k p^{-k} \\ &= 1 \end{aligned}$$

5 补充 3

假设X和Y相互独立，且分别服从参数为p和q的几何分布，求下列的值:

(1)$P(X=Y)$

(2)$P(min(X,Y)=k)$。想一想$min(X,Y)$的物理含义。

解:

(1)

$$\begin{aligned}
P(X=Y) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(X=k, Y=k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} P(X=k)P(Y=k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p (1-q)^{k-1} q \\
&= pq \sum_{k=1}^{\infty} [(1-p)(1-q)]^{k-1} \\
&= \frac{pq}{p+q-pq}
\end{aligned}$$

(2) $min(X,Y)$ 是指直到 X 和 Y 中任意一个成立所进行的实验次数。令 W 表示直到 X 和 Y 中任意一个成立所进行的实验次数，则有 $W \sim G(1-(1-p)(1-q))$，即$W \sim G(p+q-pq)$。则有

$$\begin{aligned}
P(min(X,Y)=k) &= P(W) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} [1-(p+q-pq)]^{k-1}(p+q-pq) \\
&= (1-p)^{k-1}(1-q)^{k-1}(p+q-pq)
\end{aligned}$$

6 非匀质硬币

抛一枚非匀质硬币，其正面向上的概率计为 p，但是数值未知。请给出一种方法，能够利用这枚硬币生成无偏的随机比特 (即是 0 或是 1 的概率各是 0.5)，并保证所需抛硬币的次数的期望不超过 $\frac{1}{[p(1-p)]}$。

解:

方法:

连续抛两次硬币，若是“正反”则生成 1，若是“反正”则生成 0，若是“正正”或“反反”则重抛一次。

说明:

连续抛两次硬币，若是“正反”则记为事件 X_1，若是“反正”则记为事件 X_2，若是“正正”则记为事件 X_3，若是“反反”则记为事件 X_4。

因为 $P(X_1)=P(X_2)=p(1-p)$，所以生成的是无偏的随机比特。

记事件 Y 为成功生成无偏的随机比特。

$$P(Y) = P(X_1) + P(X_2) = 2p(1-p)$$

$$P(\overline{Y}) = P(X_3) + P(X_4) = p^2 + (1-p)^2 = 2p^2 - 2p + 1$$

所以有

$$E(Y) = \frac{1}{2p(1-p)}$$

因为事件 Y 的每一次试验都需要抛两次硬币，所以题目中为生成无偏的随机比特保证所需抛硬币的次数的期望为 $2E(Y) = \dfrac{1}{p(1-p)}$。