

Probability and Mathematical Statistics

冯诗伟 161220039

1 习题 2.1

将 3 个小球随即放入 4 个盒子中, 设盒子中求的最多个数位 X , 求 X 的分布律。

解: 设盒子中求的最多个数位 X , X 是一个随机变量, X 的取值范围为 1, 2, 3。

$$P(X=1) = \frac{A_4^3}{4^3} = \frac{24}{64} = \frac{3}{8}$$

$$P(X=2) = \frac{C_3^2 A_4^2}{4^3} = \frac{36}{64} = \frac{9}{16}$$

$$P(X=3) = \frac{C_4^1}{4^3} = \frac{4}{64} = \frac{1}{16}$$

所以 X 的分布律为:

X	1	2	3
P	3/8	9/16	1/16

2 习题 2.3

问 C 取何值时一下数列称为概率分布律:

$$(1) p_k = C \left(\frac{2}{3}\right)^k, k=1,2,3;$$

$$(2) p_k = C \frac{\lambda^k}{k!}, k=1,2,3,\dots$$

解:

$$(1) \text{ 由公式 } \sum_{k=1}^3 C \left(\frac{2}{3}\right)^k = 1, \text{ 得 } C \times \frac{38}{27} = 1, \text{ 所以 } C = \frac{27}{38}.$$

$$(2) \text{ 由公式 } \sum_{k=1}^{\infty} C \frac{\lambda^k}{k!} = 1, \text{ 得 } C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = C e^{\lambda} = 1, \text{ 所以 } C = \frac{1}{e^{\lambda}}.$$

3 习题 2.19

设离散型随机变量 X 的分布律为:

X	-2	-1/2	0	1/2	4
P	1/8	1/4	1/8	1/6	1/3

求下列随机变量的分布律：(1) $Y = 2X$ ；(2) $Y = X^2$ ；(3) $Y = \sin\left(\frac{\pi}{2}X\right)$ 。

解：(1)

Y	-4	-1	0	1	8
P	1/8	1/4	1/8	1/6	1/3

(2)

Y	0	1/4	4	16
P	1/8	5/12	1/8	1/3

(3) X 和 Y 的取值关系如下表，Y 只有三种取值 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, 0, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

X	-2	-1/2	0	1/2	4
Y	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

所以 Y 的分布律为：

Y	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
P	1/4	7/12	1/6

4 习题 3.3

设随机变量 X 和 Y 相互独立，且 X 和 Y 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	1/2	1/4	1/8	1/8

Y	-1	0	1
P	1/4	1/2	1/4

请计算概率 $P(X + Y = 2)$ 。

解：

$$\begin{aligned}
 P(X + Y = 2) &= P(X = 1, Y = 1) + P(X = 2, Y = 0) + P(X = 3, Y = -1) \\
 &= P(X = 1)P(Y = 1) + P(X = 2)P(Y = 0) + P(X = 3)P(Y = -1) \\
 &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} \\
 &= \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \\
 &= \frac{5}{32}
 \end{aligned}$$

5 蓄水池抽样

有一系列的数据流经某系统。我们希望对该数据流进行采样，希望能都从该数据流中采样一个数据，使得该数据等可能地为所有已经流经该系统的数据中的一个。假设我们不知道数据流中数据的个数，同时也不保存已经流经系统的数据。

考虑以下算法：当第一个数据经过时，我们将其存放在内存中。当第 k 个数据经过时，我们以 $\frac{1}{k}$ 的概率

用其替代内存中的数据。

(1) 证明该算法的有效性。

(2) 如果替代的概率为 $\frac{1}{2}$, 求内存中存放的是哪一个数据的分布。

解:

(1) 设事件 A_i 表示第 i 个数据替代了内存中的数据, 事件 B_i 表示第 i 个数据最终占据内存, 设共流经 n 个数据, 则

$$\begin{aligned} P(B_i) &= P(A_i \overline{A_{i+1}} \overline{A_{i+2}} \cdots \overline{A_n}) \\ &= P(A_i) P(\overline{A_{i+1}}) P(\overline{A_{i+2}}) \cdots P(\overline{A_n}) \\ &= \frac{1}{i} \frac{i}{i+1} \frac{i+1}{i+2} \cdots \frac{n-1}{n} \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

所以第 i 个数据最终占据内存的概率和它到来的次序没用关系, 得证。

(2) 设事件 A_i 表示第 i 个数据替代了内存中的数据, 事件 B_i 表示第 i 个数据最终占据内存, 设共流经 n 个数据, 则 $P(A_i) = \frac{1}{2}$ 。

$$\begin{aligned} P(B_i) &= P(A_i \overline{A_{i+1}} \overline{A_{i+2}} \cdots \overline{A_n}) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2}}_{n-i+1 \text{ 个}} \\ &= \frac{1}{2^{n-i+1}} \end{aligned}$$

且满足

$$P(B_i) \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^{n-i+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i} = 1$$

6 补充 3

考虑取值为正整数的随机变量 X , 其分布律为 $P(X=i) = \frac{6}{\pi} i^{-2}$ (注意 $\sum_{i=1}^{\infty} i^{-2} = \frac{\pi^2}{6}$)。分析 X 的期望值。

解:

$$E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} i P(X=i) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{6}{\pi} i^{-1}$$

其中级数 $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{6}{\pi} i^{-1}$ 发散, 所以 X 的期望不存在。

7 n 人牵手

考虑 n 个人玩一个 n 轮的游戏。在第 i ($i=1, 2, \dots, n$) 轮游戏中, 从剩下的 $2n-2(i-1)$ 只手中随机挑选 2 只手进行牵手。求形成环的个数的期望值。(某人左右手牵在一起也算形成一个环)。

解:

每轮游戏去掉两只手, 即去掉“一个人”: 若这两只手是同一个人的, 则成了一个环, 且这个人再也不参与

之后的游戏, 相当于去掉了一个人; 若这两只手不是同一个人的, 则没有成环, 但这两个人相当于合并成了一个人, 也算是去掉了一个人。

构造指示变量 A_i ,

$$A_i = \begin{cases} 0, & \text{if 第 } i \text{ 轮没有成环} \\ 1, & \text{if 第 } i \text{ 轮有成环} \end{cases}$$

设最终形成了 X 个环,

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{i=1}^n P(A_i = 1) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{n-i+1}{C_{2n-2(i-1)}^2} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2n-2i+1} \end{aligned}$$

8 Jensen 不等式

设 f 为下凸函数, 即对于任意 x_1, x_2 且 $0 \leq \lambda \leq 1$,

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

假设 X 为只有有限个取值的离散型随机变量, 求证

$$E[f(X)] \geq f(E[X])$$

(注: 该不等式对连续型随机变量同样适用)

解:

首先证明对于下凸函数 f , 任意的 $x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n, 0 \leq p_i \leq 1, \sum_{i=1}^n p_i = 1$, 有

$$f\left(\sum_{i=1}^n p_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n p_i f(x_i)$$

使用数学归纳法, 对 n 进行归纳。

(1) 当 $n = 2$ 时, 由题目条件已知成立。

(2) 假设当 $n \leq k$ 时该不等式均成立, 当 $n = k+1$ 时,

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{k+1} p_i x_i\right) &= f\left(p_{k+1} x_{k+1} + \sum_{i=1}^k p_i x_i\right) \\ &= f\left(p_{k+1} x_{k+1} + (1-p_{k+1}) \frac{\sum_{i=1}^k p_i x_i}{1-p_{k+1}}\right) \\ &\leq p_{k+1} f(x_{k+1}) + (1-p_{k+1}) f\left(\frac{\sum_{i=1}^k p_i x_i}{1-p_{k+1}}\right) \cdots \cdots \text{由题目条件} \\ &\leq p_{k+1} f(x_{k+1}) + (1-p_{k+1}) \frac{\sum_{i=1}^k p_i f(x_i)}{1-p_{k+1}} \cdots \cdots \text{由归纳假设} \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} p_i f(x_i) \end{aligned}$$

综合 (1)(2), 对于下凸函数 f , 任意的 $x_1, x_2 \cdots x_n, p_1, p_2 \cdots, p_n, 0 \leq p_i \leq 1, \sum_{i=1}^n p_i = 1$, 有

$$f\left(\sum_{i=1}^n p_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n p_i f(x_i)$$

设离散型随机变量 X 的取值范围是 $x_1, x_2 \cdots x_n$, 分布律是 $P(x_i) = p_i$, 其中 $0 \leq p_i \leq 1, \sum_{i=1}^n p_i = 1$ 。则有

$$\begin{aligned} f(E[X]) &= f\left(\sum_{i=1}^n p_i x_i\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^n p_i f(x_i) \\ &= E[f(x)] \end{aligned}$$

得证。