Probability and Mathmatical Statistics

冯诗伟 161220039

1　习题 2.1

将 3 个小球随即放入 4 个盒子中，设盒子中求的最多个数位 X，求 X 的分布律。
解：　　设盒子中求的最多个数位 X，X 是一个随机变量，X 的取值范围为 1，2，3。

$$P(X=1)=\frac{A_4^3}{4^3}=\frac{24}{64}=\frac{3}{8}$$
$$P(X=2)=\frac{C_3^2A_4^2}{4^3}=\frac{36}{64}=\frac{9}{16}$$
$$P(X=3)=\frac{C_4^1}{4^3}=\frac{4}{64}=\frac{1}{16}$$

所以 X 的分布律为：

X	1	2	3
P	3/8	9/16	1/16

2　习题 2.3

问 C 取何值时一下数列称为概率分布律：
(1) $p_k=\mathrm{C}\left(\frac{2}{3}\right)^2, k=1,2,3;$
(2) $p_k=\mathrm{C}\frac{\lambda^k}{k!}, k=1,2,3,\cdots\cdots$
解：
(1) 由公式 $\sum_{k=1}^{3}C\left(\frac{2}{3}\right)^k=1$，得 $C\times\frac{38}{27}=1$，所以 $C=\frac{27}{38}$。
(2) 由公式 $\sum_{k=1}^{\infty}C\frac{\lambda^k}{k!}=1$，得 $C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=C(e^\lambda-1)=1$，所以 $C=\frac{1}{e^\lambda-1}$。

3　习题 2.19

设离散型随机变量 X 的分布律为：

X	-2	-1/2	0	1/2	4
P	1/8	1/4	1/8	1/6	1/3

求下列随机变量的分布律：(1) Y = 2X；(2) Y = X^2；(3) $Y = \sin\left(\frac{\pi}{2}X\right)$。
解：(1)

Y	-4	-1	0	1	8
P	1/8	1/4	1/8	1/6	1/3

(2)

Y	0	1/4	4	16
P	1/8	5/12	1/8	1/3

(3) X 和 Y 的取值关系如下表，Y 只有三种取值 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$，0，$\frac{\sqrt{2}}{2}$。

X	-2	-1/2	0	1/2	4
Y	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

所以 Y 的分布律为：

Y	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
P	1/4	7/12	1/6

4 习题 3.3

设随机变量 X 和 Y 相互独立，且 X 和 Y 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	1/2	1/4	1/8	1/8

Y	-1	0	1
P	1/4	1/2	1/4

请计算概率 $P(X+Y=2)$。
解：

$$\begin{aligned}
P(X+Y=2) &= P(X=1,Y=1)+P(X=2,Y=0)+P(X=3,Y=-1)\\
&= P(X=1)P(Y=1)+P(X=2)P(Y=0)+P(X=3)P(Y=-1)\\
&= \frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}\\
&= \frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\\
&= \frac{5}{32}
\end{aligned}$$

5 蓄水池抽样

有一系列的数据流经某系统。我们希望对该数据流进行采样，希望能都从该数据流中采样一个数据，使得该数据等可能地为所有已经流经该系统的数据中的一个。假设我们不知道数据流中数据的个数，同时也不保存已经流经系统的数据。

考虑以下算法：当第一个数据经过时，我们将其存放在内存中。当第 k 个数据经过时，我们以 $\frac{1}{k}$ 的概率

用其替代内存中的数据。
(1) 证明该算法的有效性。
(2) 如果替代的概率为 $\frac{1}{2}$，求内存中存放的是哪一个数据的分布。
解：
(1) 设事件 A_i 表示第 i 个数据替代了内存中的数据，事件 B_i 表示第 i 个数据最终占据内存，设共流经 n 个数据，则

$$\begin{aligned} P(B_i) &= P(A_i\overline{A_{i+1}}\,\overline{A_{i+2}}\cdots\overline{A_n}) \\ &= P(A_i)P(\overline{A_{i+1}})P(\overline{A_{i+1}}\cdots P(\overline{A_n}) \\ &= \frac{1}{i}\frac{i}{i+1}\frac{i+1}{i+2}\cdots\frac{n-1}{n} \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

所以第 i 个数据最终占据内存的概率和它到来的次序没用关系，得证。
(2) 设事件 A_i 表示第 i 个数据替代了内存中的数据，事件 B_i 表示第 i 个数据最终占据内存，设共流经 n 个数据，则 $P(A_i) = \frac{1}{2}$。

$$\begin{aligned} P(B_i) &= P(A_i\overline{A_{i+1}}\,\overline{A_{i+2}}\cdots\overline{A_n}) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\cdots\frac{1}{2}}_{n-i+1\text{个}} \\ &= \frac{1}{2^{n-i+1}} \end{aligned}$$

且满足

$$P(B_i) \geq 0\text{，}\quad \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^{n-i+1}} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i} = 1$$

6 补充 3

考虑取值为正整数的随机变量 X，其分布律为 $P(X=i) = \frac{6}{\pi}i^{-2}$ (注意 $\sum_{i=1}^{\infty} i^{-2} = \frac{\pi^2}{6}$)。分析 X 的期望值。
解：

$$E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} iP(X=i) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{6}{\pi}i^{-1}$$

其中级数 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{6}{\pi}i^{-1}$ 发散，所以 X 的期望不存在。

7 n 人牵手

考虑 n 个人玩一个 n 轮的游戏。在第 $i(i=1,2,\cdots,n)$ 轮游戏中，从剩下的 $2n-2(i-1)$ 只手中随机挑选 2 只手进行牵手。求形成环的个数的期望值。(某人左右手牵在一起也算形成一个环)。
解：

每轮游戏去掉两只手，即去掉"一个人"：若这两只手是同一个人的，则成了一个环，且这个人再也不参与

之后的游戏，相当于去掉了一个人；若这两只手不是同一个人的，则没有成环，但这两个人相当于合并成了一个人，也算是去掉了一个人。

构造指示变量 A_i，

$$A_i = \begin{cases} 0, & \text{if 第}i\text{轮没有成环} \\ 1, & \text{if 第}i\text{轮有成环} \end{cases}$$

设最终形成了 X 个环，

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i = 1) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{n-i+1}{C_{2n-2(i-1)}^2} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2n-2i+1} \end{aligned}$$

8 Jensen 不等式

设 f 为下凸函数，即对于任意 x_1, x_2 且 $0 \le \lambda \le 1$，

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

假设 X 为只有有限个取值的离散型随机变量，求证

$$E[f(X)] \ge f(E[X])$$

(注：该不等式对连续型随机变量同样适用)

解：

首先证明对于下凸函数 f，任意的 $x_1, x_2 \cdots x_n, p_1, p_2 \cdots, p_n$，$0 \le p_i \le 1$，$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$，有

$$f(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i) \le \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i)$$

使用数学归纳法，对 n 进行归纳。

(1) 当 $n = 2$ 时，由题目条件已知成立。

(2) 假设当 $n \le k$ 时该不等式均成立，当 $n = k+1$ 时，

$$\begin{aligned} f(\sum_{i=1}^{k+1} p_i x_i) &= f(p_{i+1} x_{i+1} + \sum_{i=1}^{k} p_i x_i) \\ &= f\left(p_{k+1} x_{k+1} + (1-p_{k+1}) \frac{\sum_{i=1}^{k} p_i x_i}{1-p_{k+1}} \right) \\ &\le p_{k+1} f(x_{k+1}) + (1-p_{k+1}) f\left(\frac{\sum_{i=1}^{k} p_i x_i}{1-p_{k+1}} \right) \cdots\cdots \text{由题目条件} \\ &\le p_{k+1} f(x_{k+1}) + (1-p_{k+1}) \frac{\sum_{i=1}^{k} p_i f(x_i)}{1-p_{k+1}} \quad \cdots\cdots \text{由归纳假设} \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} p_i f(x_i) \end{aligned}$$

综合 (1)(2), 对于下凸函数 f，任意的 $x_1, x_2 \cdots x_n, p_1, p_2 \cdots, p_n$，$0 \le p_i \le 1$，$\sum_{i=1}^n p_i = 1$，有

$$f(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i) \le \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i)$$

设离散型随机变量 X 的取值范围是 $x_1, x_2 \cdots x_n$，分布律是 $P(x_i) = p_i$，其中$0 \le p_i \le 1$，$\sum_{i=1}^n p_i = 1$。则有

$$\begin{aligned} f(E[X]) &= f(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i) \\ &\le \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) \\ &= E[f(x)] \end{aligned}$$

得证。