# Összefoglaló J. Nathan Kutz POD-ról szóló előadásairól

Az előadó 3, egyenként szűk egy órás videóban mutatja be a POD, vagyis a Proper Orthogonal Decomposition módszer alapjait. A videók elérhetőek az előadó honlapján: https://faculty.washington.edu/kutz/rom/page1/page5/rom.html vagy YouTube-on: https://www.youtube.com/c/NathanKutzAMATH (POD introduction 1,2,3)
Linkek elérve: 2022.10.08.

## 1. videó

### Néhány jelölés és definíció

**Def.:** $N \in \mathbb{N}$ — a térbeli mintavételi vagy diszkretizálási pontok száma, a természetes bázis számossága (nagy)

**Def.:** $N \in \mathbb{N}$ — a térbeli mintavételi vagy diszkretizálási pontok száma, a természetes bázis számossága (nagy)

**Def.:** $M \in \mathbb{N}, M \ll N$ — a redukált bázis számossága

**Def.:** $u(x,t) = u \in \mathbb{C}$ — a keresett függvény, ami idő- és helyfüggő

**Def.:** $\Psi_i(x) = \Psi_i$ — az $i$-edik bázisfüggvény

**Def.:** $a_i(t) = a_i \in \mathbb{C}$ — az $i$-edik bázisfüggvény együtthatója

**Megj.:** $u(x,t) = \sum_i a_i \cdot \Psi_i$ — a keresett függvény bázisfüggvényekkel való felírása

### Diszkretizálás

Deriváltakból hogyan lesz véges differencia, diffegyenletekből hogyan lesznek véges differencia egyenletek (egydimenziós eset, $x \in [-L, L] \subset \mathbb{R}$, $x_n$ az $n$-edik térbeli mintavételi pont, $\Delta x = x_{n+1} - x_n$). Diszkrét esetben, tehát a szimulációk során is, a bázisfüggvények térbeli mintavételezésével kapjuk a bázisvektorokat és a bázisfüggvények együtthatóinak időbeli mintavételezésével kapjuk a bázisvektorok együtthatóit. ($u_n$ az $u$ függvény $n$-edik mintavételi pontban felvett értéke, de $u_t$, $u_x$, ... az $u$ parciális deriváltjai $t$, $x$, ... szerint. $\mu$ valamilyen paraméter.)

$$\frac{du}{dx} \approx \frac{x_{n+1} - x_{n-1}}{2 \cdot \Delta x}, \quad \frac{d^2u}{dx^2} \approx \frac{x_{n-1} - 2 \cdot x_n + x_{n+1}}{\Delta x^2}, \quad \dots$$

$$\begin{aligned} u(x,t) \quad &\longrightarrow \quad u(x_n,t) = u_n, \quad n = 1,2,3,...,N \\ \frac{\partial u}{\partial t} = u_t = F(u, u_x, u_{xx}, ..., t, \mu) \quad &\longrightarrow \quad \frac{du_n}{dt} = F(u_n, u_{n\pm1}, u_{n\pm2}, ..., t, \mu) \end{aligned}$$

## Változók szétválasztása

Erre épül a POD azzal, hogy a megválasztott bázisfüggvényekből ($\Psi_i$, amelyek a térkoordináták függvényei) és a bázisfüggvények együtthatóiból ($a_i$, amelyek időfüggőek) állítjuk elő a megoldást, $u$-t. A változók szétválasztása nem minden esetben tehető meg formálisan, de megfelelő számú bázisvektor használata esetén ilyenkor is lehet jó eredményre jutni a numerikus módszereknél. Feltesszük, hogy a változók ($x$ és $t$) szétválasztása megtehető, emiatt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= F(u,\ u_x,\ u_{xx},\ \dots\ ,\ t,\ \mu) \\
&\Downarrow \\
\sum \frac{da_i}{dt}\Psi_i &= F\left(\sum a_i\Psi_i,\ \sum a_i\frac{d\Psi_i}{dx},\ \sum a_i\frac{d^2\Psi_i}{dx^2},\ \dots\ ,\ t,\ \mu\right)
\end{aligned}$$

A jobb kezelhetőség érdekében ortonormált bázist választunk:

$$(\Psi_i, \Psi_j) \ = \ \int_{-L}^{L} \Psi_i\Psi_j\ dx \ = \ \delta_{ij} \ = \ \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

A $\Psi$ bázis ortonormalitása miatt a következővé alakítható a megoldásfüggvény idő szerinti deriváltjának fenti egyenlete:

$$\begin{aligned}
\sum \frac{da_i}{dt}\Psi_i &= F\left(\sum a_i\Psi_i,\ \sum a_i\frac{d\Psi_i}{dx},\ \sum a_i\frac{d^2\Psi_i}{dx^2},\ \dots\ ,\ t,\ \mu\right) \\
&\Downarrow \quad \int_{-L}^{L} (\quad)\cdot\Psi_j\ dx \\
\frac{da_j}{dt} &= (F, \Psi_j)\,, \quad j = 1, 2, ..., N
\end{aligned}$$

A kapott kifejezés magában nem tűnik előrelépésnek, de a megfelelő $\Psi$ bázis megválasztásával nem kell mind az $N$ bázisvektort figyelembe venni, hanem csak $M$-et közülük, és így is egy jó közelítő megoldást kapunk, mert a többi bázisvektor együtthatója numerikusan inszignifikáns.

## MATLAB példa

A következőkben az előadó bemutatja a Fourier-transzformáció esetén, hogy az adott problémától és annak paramétereitől függően nem mindig járunk jól, ha egy előre meghatározott bázisra képezzük le a problémát. A diszkrét Fourier-transzformáció numerikusan nagyon hatékony a használt bázis számosságához képest és egyéb kedvező tulajdonságai is vannak. Ha viszont olyan problémával kell megküzdeni, amihez nem jól illeszkednek a fourier-módusok és nagy a szabadsági fokainak száma, akkor sokkal jobban járhatunk, ha az adott problémához igazított optimális bázist választunk. A POD-nak pedig éppen ez a bázisválasztás a célja.

## 2. Videó