



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem  
Villamosmérnöki és Informatikai Kar  
Szélessávú Hírközlés és Villamosságtan Tanszék

Önálló laboratórium 2 dolgozat

## Modell-redukció alkalmazása az elektromágneses térszámításban

Szilágyi Gábor

Konzulens: Dr. Bilicz Sándor

Budapest, 2022. november 15.

# Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezetés</b>	<b>1</b>
1.1. A módszer eredete . . . . .	1
1.2. Felhasználási területek . . . . .	1
1.3. Alkalmazás az elektromágneses térszámításban . . . . .	2
<b>2. A POD-ról részletesebben</b>	<b>2</b>
2.1. A felbontás egyenletei . . . . .	2
<b>3. <math>\LaTeX</math> Próba</b>	<b>3</b>

## 1. Bevezetés

A POD, vagyis a Proper Orthogonal Decomposition, egy bázistranszformációs eljárás, ami egy adott adathalmaz reprezentálásához optimális bázist keres meg. Az eljárás által meghatározott  $\Psi$  bázisban a bázisvektoroknak az a tulajdonsága, hogy a lehető legkevesebb bázisvektorral leírható az adathalmaz információtartalmának vagy energiájának lehető legnagyobb része. Ezt felhasználva a  $\Psi$  csonkításával egy  $\Psi'$  közelítő bázist lehet előállítani, ami lényegesen kisebb rendű, mint  $\Psi$ , mégis kis hibával reprezentálható benne az eredeti adathalmaz. Természetesen minél több bázisvektort hagyunk meg  $\Psi'$ -ben, annál jobban csökken a modell-redukcióból származó hiba, de a csonkítás mértékét az adott alkalmazáshoz mérten előírhatjuk. A POD egy másik előnyös tulajdonsága, hogy a gyakorlati esetek nagy részében a sorbarendezt  $\psi_n$  bázisvektorokra eső energiataralom rohamosan csökken, ezért sokszor nagyságrendekkel kisebb dimenziószámú bázissal is jól leírható az adathalmaz, mint az eredeti esetben.

### 1.1. A módszer eredete

A módszer gyökerei az '40-es évekig nyúlnak vissza, amikor olyan tudományos problémákat próbáltak statisztikai módszerekkel megközelíteni, amelyeknek a megoldása valamilyen folytonos értékű függvény, sok esetben sztochasztikus folyamat. Egy jeles személy ebből a kezdeti időszakból Damodar Dharmananda Kosambi [5] indiai matematikus, aki a POD alapját képező (Kosambi–)Karhunen–Loève Expansion, vagyis Karhunen–Loève felbontás atyja. A Karhunen–Loève felbontás sztochasztikus folyamatok olyan reprezentálását teszi lehetővé, ahol a sztochasztikus folyamatot egy végtelen összeg alakjában írjuk fel. Ha ebből az összegből csak az első véges sok  $n$  db. tényezőt hagyjuk meg (csonkítjuk a felbontást), akkor a kapott összegnek a lehető legkisebb a négyzetes hibája az eredeti sztochasztikus folyamathoz képest [1].

### 1.2. Felhasználási területek

Az eljárást számos tudományterületen sikeresen alkalmazták már, különböző területeken különböző néven szokták emlegetni gyakorlatilag ugyanezt az eljárást. Statisztikában főként Principal Component Analysis (PCA) néven fordul elő és nagy adathalmazok információtartalmának kinyerésére használják [4]. Ahogy fent emlytettem, találkozhatunk még vele az irodalomban Karhunen–Loève Expansion néven is, elsősorban a sztochasztikus folyamatok kapcsán [1]. A turbulens áramlások kutatásával kapcsolatban pedig Method of Snapshots néven is ismert az 1980-as évektől [6].

Lényeges felhasználási területek például: turbulens áramlások szimulációja; statisztikában és más területeken az adathalmazok redukálása [4]; szabályozástechnikában a szuboptimális,

de gyorsan számítható beavatkozás; nemlineáris elektromágneses problémák (pl. motorok) szimulációja [3].

A felsorolt problémák, amelyeknél segítséget nyújthat a POD, különböző kategóriákba sorolhatóak. Elsősorban statisztikában merül fel az a probléma manapság, hogy egy nagyon sok bejegyzést tartalmazó adathalmaz áll rendelkezésre, amelynek minden bejegyzése sokdimenziós, emiatt az adatok által hordozott információ nehezen hasznosítható. Ez az információkinyerés annak ellenére is problémás, hogy a sok rendelkezésre álló adat összesen sok információt hordoz magában. Ekkor a POD (PCA) segítségével kinyerhetők az adathalmazt jól leíró, jellegzetes mintázatok, amelyek a hasznos információ nagy részét magukban hordozzák. A szimulációk esetében más a helyzet. Itt az jelenti a gondot, hogy a szimulált modell nagyon részletes, például nagyon sok (könnyen  $10^6 - 10^9$  nagyságrendű) végelemet tartalmaz, emiatt a szimuláció futtatása sok számítógép erőforrást használ fel. Egyrészt a megoldás memóriában való tárolása is problémás lehet, másrészt a végelemek módszerénél maradva nagyon nagy egyenletrendszer kell megoldani, ami sok processzoridőt igényel, emiatt sokáig tart a szimuláció.

### 1.3. Alkalmazás az elektromágneses térszámításban

Az EM térszámításban többféle kontextusban is hasznos lehet a POD a futási idő vagy a memóriafelhasználás jelentős csökkentésére. Az egyik megközelítésben egy időtartománybeli végelem modellben zajló tranziens folyamat lefolyására kaphatunk számítás szempontjából olcsó, közelítő megoldást. Ehhez először a teljes kérdéses időintervallum első töredék részére egy teljes értékű szimulációt futtatunk, amely viszonylag sok számítást igényel. Ennek a rövid részmegoldásnak az eredményei szolgálnak a POD bemenetével. A POD ezek alapján meghatározza a rendszer dinamikájában megjelenő struktúrákat, majd csak a lényeges összetevőkre szorítkozva egy lecsökkentett szabadsági fokú rendszert szimulálunk tovább a hátralévő időben, ami már időlépésként sokkal kevesebb számítást igényel.

A fent vázolt, tranziens szimulációban történő alkalmazáson kívül más módokon is hasznosítható lehet a POD a térszámítási problémákban, de a dolgozatomban elsősorban ezzel a megközelítéssel foglalkozom.

## 2. A POD-ról részletesebben

A bevezetésben említettem, hogy az adathalmaz energiájának vagy információtartalmának szempontjából optimális a  $\Psi$  bázis, de ez pontosításra szorul.

### 2.1. A felbontás egyenletei

A redukálandó adathalmaz méreteitől függően különböző számítási módok optimálisak a POD redukált bázisának előállításához. Az eredeti adathalmazt egy mátrixba rendezzük úgy, hogy az egyes mintákhoz tartozó adatok vektorai ( $\mathbf{x}_i \in \mathbb{C}^n$ ,  $i \in \{1, \dots, k\}$ ) a mátrix oszlopvektorai legyenek. Az így kapott mátrix ( $\mathbf{S}$ ) a snapshotmátrix vagy mintamátrix:

$$\mathbf{S} = [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \mathbf{x}_3 \ \dots \ \mathbf{x}_k] \quad (1)$$

Az adott alkalmazástól függ, hogy  $\mathbf{S}$ -nek melyik mérete olyan nagy, hogy az gondot jelentsen. Az 1.3. részben vázolt nagy szabadsági fokú szimulációknál az okozza a gondot, hogy az egy időlépéshez tartozó  $\mathbf{x}_i$  dimenziószáma – vagyis  $n$  – nagy, könnyen milliós nagyságrendű, miközben egy jó redukált bázis előállításához,  $k \ll n$  db.  $\mathbf{x}_i$  minta elég a dinamikus rendszerből.

Ebben az esetben jól használható az  $\mathbf{S}$  sajátfelbontása (SVD-je):

$$\mathbf{S} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H \quad (2)$$

Itt érdemes megállni és értelmezni a felbontásban szereplő mátrixokat és azok jelentését a modellezett rendszerrel kapcsolatban. A 2. egyenletben  $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n \times k}$  lesz a teljes  $\Psi$  bázis vektorait ( $\mathbf{u}_i$ ,  $i \in \{1, \dots, k\}$ ), mint oszlopvektorokat tartalmazó unitér mátrix, tehát az oszlopai egységvektorok. A  $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  ( $m = \min\{n, k\} = k$ ) egy pozitív definit diagonálmátrix, aminek az  $i$ -edik diagonálelemei,  $\sigma_i$  az  $\mathbf{u}_i$ -hez tartozó együttható, ami azt fejezi ki, hogy az adott bázisvektor mennyire fontos, mennyire járul hozzá általában a rendszer állapotához, más szóval a rendszer energiájának vagy információtartalmának mekkora része írható le az adott bázisvektorral. A  $\mathbf{\Sigma}$  olyan felépítésű az SVD miatt, hogy a diagonálemek csökkenő sorrendben szerepelnek az átlóban bal fentről jobbra lefelé haladva. A  $\mathbf{U}\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{C}^{n \times m}$  szorzat tehát már az eredeti adatokhoz skálázott bázisvektorok mátrixának tekinthető, amelyben fontosság szerint csökkenő sorrendben szerepelnek egymás után a bázisvektorok. Tömören összefoglalva a  $\mathbf{V}^H$  mátrix a skálázott bázisvektorokhoz tartozó együtthatók mátrixa. A  $\mathbf{V}^H$  mátrix az  $i$ -edik  $\mathbf{v}_i$  oszlopában tartalmazza az  $\mathbf{x}_i$  mintavektor előállításához szükséges együtthatókat, amelyek a  $\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}$  szorzat oszlopait súlyozzák:

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{v}_i \quad (3)$$

Más szemszögből megközelítve a  $\mathbf{V}^H$  értelmezését,  $v_{j,i}$ , tehát  $\mathbf{V}^H$   $j$ -edik sorának  $i$ -edik eleme ( $\mathbf{v}_i$   $j$ -edik eleme) jelenti  $\mathbf{u}_j\sigma_j$  hozzájárulását vagy súlyát  $\mathbf{x}_i$ -hez.

Az ellenkező esetben, amikor  $k$  nagy és emiatt  $m = \min\{n, k\} = n$ , már számításigény szempontjából nem optimális  $\mathbf{S}$  szinguláris érték szerinti felbontásának direkt kiszámolása, mert ez az immár  $k \times k$  méretű  $\mathbf{V}^H$  mátrix kiszámolásával jár, ami a redukált modell létrehozása szempontjából lényegtelen. Ebben az esetben érdemesebb kiszámítani az adathalmaz kovarianciamátrixát, a  $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  mátrixot. Azért jutunk ezzel előrébb, mert a 4. egyenletben látható módon az  $\mathbf{U}$  mátrixot megkaphatjuk a  $\mathbf{C}$  sajátfelbontásából is. Mivel  $\mathbf{C}$  szimmetrikus, ezért pozitív definit, emiatt mindig létezik sajátfelbontása.

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{S}\mathbf{S}^H \\ &= \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H\mathbf{V}\mathbf{\Sigma}\mathbf{U}^H \\ &= \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}^2\mathbf{U}^H \end{aligned} \quad (4)$$

Itt  $\mathbf{S}$  a snapshot-mátrix,  $\mathbf{U}$  oszlopai az új bázisvektorok,  $\mathbf{\Sigma}$  tartalmazza a bázisvektorok információtartalmát jellemző szinguláris értékeket a főátlójában,  $\mathbf{V}^H$  sorai az egyes bázisvektorok időfüggő együtthatói,  $\mathbf{C}$  pedig az  $\mathbf{x}_i$  mintavektorokból álló adathalmaz kovarianciamátrixa.

### 3. L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X Próba

Lorem ipsum [2].

$$\mathbf{X} = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}\mathbf{U}^* \quad (5)$$

## Hivatkozások

- [1] Karthik Venkatraman Aadithya, Eric R. Keiter, and Ting Mei. The karhunen loève expansion. 6 2018.

- [2] Francisco Chinesta, Roland Keunings, Adrien Leygue. *The Proper Generalized Decomposition for Advanced Numerical Simulations*. Springer Cham, 2014. DOI: 10.1007/978-3-319-02865-1.
- [3] Thomas Henneron and Stéphane Clénet. Model order reduction of non-linear magnetostatic problems based on pod and dei methods. *IEEE Transactions on Magnetics*, 50(2):33–36, 2014. DOI: 10.1109/TMAG.2013.2283141.
- [4] Ian T. Jolliffe and Jorge Cadima. Principal component analysis: a review and recent developments. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 374(2065):20150202, 2016.
- [5] R. Narasimha. Kosambi and proper orthogonal decomposition. *Resonance*, 16:574–581, 2011. DOI: 10.1007/s12045-011-0062-8.
- [6] Lawrence Sirovich. Turbulence and the dynamics of coherent structures. I-III. *Quarterly of Applied Mathematics*, 45:561–590, 1987.