Elektromágneses Terek (VIHVMA08) csoportos házi feladat

Föld alatti fémkeresés örvényáramú vizsgálattal

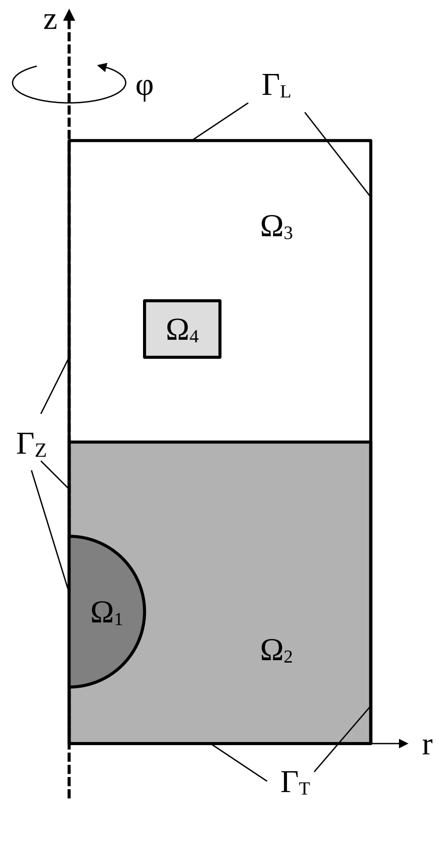
Gekkó csapat: Bak Bálint, Kozma Dávid Márk, Szilágyi Gábor

Konzulens: Dr. Pávó József

Budapest, 2022. december 8.

1. Bevezetés

A feladatkiírásban felvázolt probléma egy forgásszimmetrikus elrendezés, emiatt az 1. ábrán látható fél-síkmetszet vizsgálata elég a probléma megoldásához.



1. ábra. A szimulált elrendezés.

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0 \tag{1}$$

A tartományok jelentése: Ω_1 – vasgömb, Ω_2 – talaj, Ω_3 – levegő, Ω_4 – tekercs.

Mivel csak egy adott ω körfrekvencián kell vizsgálódnunk, emiatt elég a szinuszos állandósult állapottal foglalkoznunk:

$$\frac{\partial}{\partial t} \quad \longrightarrow \quad j\omega \tag{2}$$

A kérdéses ω körfrekvencián az elektromágneses hullámok szabadtéri hullámhossza ($\varepsilon_r = 1$):

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{c}{\frac{\omega}{2\pi}} = \frac{3 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{\frac{2\pi 500\,\mathrm{s^{-1}}}{2\pi}} = 6 \times 10^5\,\mathrm{m} \tag{3}$$

Emiatt λ az 1000 km nagyságrendjébe esik, míg az elrendezés fizikai méretei néhányszor 10 cm-esek, így élhetünk a magneto-kvázistacionárius közelítéssel:

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \longrightarrow \quad 0 \tag{4}$$

Ebben az esetben a vizsgált tartományon belül a Maxwell-egyenleteknek a következő alakja érvényes:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} \tag{5}$$
$$\operatorname{rot} \vec{E} = -j\omega\vec{B} \tag{6}$$
$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \tag{7}$$
$$\vec{B} = \mu\vec{H} \tag{8}$$
$$\vec{J} = \sigma\vec{E} + \vec{J}_i \tag{9}$$

$$\sigma(\vec{r}) = \begin{cases} \sigma, & \text{ha } \vec{r} \in \Omega_1 \\ \sigma_t, & \text{ha } \vec{r} \in \Omega_2 \\ 0, & \text{ha } \vec{r} \in \Omega_3 \cup \Omega_4 \end{cases} \tag{10}$$

Az határoló „doboz” méreteit megfelelően nagyra kell választani ahhoz, hogy a kialakuló teret ne befolyásolja jelentősen a vizsgált Ω tartomány $\Gamma_T \cup \Gamma_L$ peremének a közelsége.

A feladat megoldásához az $\vec{A} - \Phi, \vec{A}$ formalizmust használjuk, mert az előadáson bemutatott indukciós főzőlapos példa alapján ezzel a megközelítéssel egy jól kezelhető parciális differenciálegyenlet-rendszert kapunk, amit a PDEtool segítségével megoldhatunk.

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \tag{11}$$

A peremfeltételekről a következőket lehet tudni:

$$B_n(\vec{r}) = 0, \quad \vec{r} \in \Gamma_Z \tag{12}$$
$$B_n(\vec{r}) = 0, \quad \vec{r} \in \Gamma_L \cup \Gamma_T \tag{13}$$

A B_n normális mágneses indukció a Γ_Z peremen a szimmetria miatt lesz 0, a $\Gamma_L \cup \Gamma_T$ távoli peremeken pedig a nagy távolság miatt lesz közel 0, amit pontosan 0 értékkel modellezünk.

2. A PDE és megadása pdetool-ban

A tartományokra vonatkozó parciális differenciálegyenlet:

$$-\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r\mu}\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r\mu}\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial z}\right) + j\omega\sigma A_\varphi = J_{i,\varphi} \tag{14}$$

Ezt a következő helyettesítésekkel lehet MATLAB-ban (pdetool-ban) megadni:

$$\begin{aligned} rA_\varphi &\rightarrow \texttt{u} \\ r &\rightarrow \texttt{x} \\ z &\rightarrow \texttt{y} \end{aligned} \tag{15}$$

A használt elliptikus PDE séma a következő:

$$\texttt{-div(c*grad(u))+a*u=f} \tag{16}$$

Eszerint az egyes paraméterek behelyettesítési értékei:

$$\begin{aligned} \texttt{c} &= \frac{1}{r\mu} \\ \texttt{a} &= \frac{j\omega\sigma}{r} \\ \texttt{f} &= J_{i,\varphi} \end{aligned} \tag{17}$$

3. Impedancia kiszámítása rA_φ értékekből

A fluxusból tudunk következtetni a tekercs impedanciájára. A tekercs fluxusát egyszerűen ki lehet számolni a PDE megoldásának eredményeként kapott háromszögekből.
Egy menetre számított fluxus számítása:

$$\Psi \triangleq \int_s \vec{B}\, ds \rightarrow \Psi = \int_s rot(\vec{A})\, ds = \oint_L \vec{A}\, dl \tag{18}$$

Ebből már meg tudjuk határozni, hogy a teljes tekercs fluxusát, amihez tudni kell még a tekercs menetszámát(N) és a tekercs keresztmetsztét (F) amit a feladat meg adott. Tekercs Fluxus számítása:

$$\Psi = \sum_{k=1}^{N} \Psi_k = \sum_{k=1}^{N} \oint_{L_k} \vec{A}\, dl = \sum_{k=1}^{N} 2\pi r_k A_{\varphi,k} \tag{19}$$

A tekercs homogenizálásával számítható tekercs fluxus:

$$\Psi = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^{N} 2\pi r_k A_{\varphi,k} \Delta F \approx \frac{N}{F} \int_F 2\pi r_k A_{\varphi,k}\, dF \tag{20}$$

az integrál egyszerűen közelítható a FEM megoldásából, a háromszöghálóra felírt integrál közelítő összeggel. A kiszámított fluxusból már egyszrűen számítható a tekercs impedanciája is. Kapocsfeszültség:

$$U = jw\Psi \tag{21}$$

Tekercs árama:

$$I = J_\varphi * \frac{F}{N} \tag{22}$$

Impedancia:

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{jw\Psi}{I} \tag{23}$$

4. A gömb méretének és mélységének változtatása

4.1. A földet tekintsük szigetelőnek

$$\sigma_t \quad = \quad 0\,\mathrm{S\,m^{-1}} \tag{24}$$

A pdetool-ban megadott PDE összetevők:

	c	a	f
Tekercs	`1./(4*pi*1e-7)./x`	0	`2000/(0.05*0.02)`
Levegő	`1./(4*pi*1e-7)./x`	0	0
Gömb	`1./(4*pi*1e-7)./x`	0	0
Talaj	`1./(4*pi*1e-7)./x`	`j*2*pi*500*35e6./x`	0

A peremeken mindenhol az `1*u=0` Dirichlet-peremfeltételt adtuk meg. Ez egyben A_φ-re is Dirichlet-peremfeltételt jelent, ami miatt a peremeken $B_n = 0$.

Tekercs impedanciája gömb nélkül:

$$Z_0 \quad = \quad 0 + 1.2157 \times 10^3 j \quad \Omega \tag{25}$$

A szimulációhoz konvergenciavizsgálatot végeztünk, aminél megvizsgáltuk a ritkább háló és a közelibb peremek hatását. A fenti alap esetben a hálót háromszor finomítottuk, illetve a szimulációs tartomány méretparamétere (a bal és jobb oldali perem távolsága) $R = 0.5\,\mathrm{m}$ volt. Megvizsgáltuk az alap elrendezést szigetelő talajjal és gömb nélkül, de csak kétszeri hálófinomítás mellett. Így a tekercs impedanciájára a következő adódott:

$$Z_{0,mesh} = 0 + 1.2185 \times 10^3 j \quad \Omega \tag{26}$$

$$\frac{|Z_{0,mesh} - Z_0|}{|Z_0|} = 0.0023 \tag{27}$$

Ezután megvizsgáltuk ugyanazt a kiinduló elrendezést, csak $R = 0.3\,\mathrm{m}$ választással. Erre a következő tekercs induktivitás adódott:

$$Z_{0,R} = 0 + 1.2099 \times 10^3 j \quad \Omega \tag{28}$$

$$\frac{|Z_{0,R} - Z_0|}{|Z_0|} = 0.0048 \tag{29}$$

Mindkét relatív hiba 1% alatti, így elfogadhatjuk a részletesebb modellből kapott eredményeket, tehát innentől $R = 0.5$ és háromszori hálófinomítást használunk.

A tekercs impedanciája gömbbel, különböző paraméterekkel [Ω]:

d[m] / r[m]	0.08	0.13	0.18
0.01		5.4765e-03 + 1.2154e+03j	
0.03	6.7525e-01 + 1.2124e+03j	8.5124e-02 + 1.2153e+03j	1.5855e-02 + 1.2156e+03j
0.05		3.5212e-01 + 1.2133e+03j	

Innen tehát az impedancia megváltozása (ΔZ) a gömb nálküli esethez képest [Ω]:

d[m] / r[m]	0.08	0.13	0.18
0.01		0.0055 - 0.3430j	
0.03	0.6753 - 3.3430j	0.0851 - 0.4430j	0.0159 - 0.1430i
0.05		0.3521 - 2.4430i	

A távolság csökentésével illetve a gömb átmérő csökkentésével csökken az impedancia reális része míg a komplex szinte változatlan marad. Azaz a tekercsnek a gömb megjelenésével lessz ellenállása is. Az ellenállás nagysága pedig attól függ, hogy milyen távol van a gömb a tekercstől és a gömb méretétől.

4.2. A földet tekintsük rossz vezetőnek

$$\sigma_t = 1\,\mathrm{S\,m^{-1}} \tag{30}$$

A pdetool-ban megadott PDE összetevők:

	c	a	f
Tekercs	`1./(4*pi*1e-7)./x`	0	`1/(0.05*0.02)`
Levegő	`1./(4*pi*1e-7)./x`	0	0
Gömb	`1./(4*pi*1e-7)./x`	`j*2*pi*500./x*1`	0
Talaj	`1./(4*pi*1e-7)./x`	`j*2*pi*500*35e6./x`	0

A peremeken mindenhol az `1*u=0` Dirichlet-peremfeltételt adtuk meg.

A tekercs impedanciája gömb nélkül:

$$Z_0 = 6.6340 \times 10^{-4} + 1.2157 \times 10^{3} j \quad \Omega \tag{31}$$

A tekercs impedanciája gömbbel, különböző paraméterekkel [Ω]:

r[m] \ d[m]	0.08	0.13	0.18
0.01		6.1399e-03 + 1.2154e+03j	
0.03	6.7587e-01 + 1.2124e+03j	8.5774e-02 + 1.2153e+03j	1.6515e-02 + 1.2156e+03j
0.05		3.5271e-01 + 1.2133e+03j	

Innen tehát az impedancia megváltozása (ΔZ) a gömb nálküli esethez képest [Ω]:

r[m] \ d[m]	0.08	0.13	0.18
0.01		0.0055 - 0.3430j	
0.03	0.6752 - 3.3430j	0.0851 - 0.4430j	0.0159 - 0.1430j
0.05		0.3520 - 2.4430j	

A tapasztalat szinte ugyanaz, mint amikor a földet szigetelőnek tekintjük, azzal a különbséggel, hogy a már a gömb nélkül is van valós része az impedanciának. Ez azért logikus, mert a véges vezetőképességű talajban létrejövő örvényáramok miatti ohmos veszteség jelenik meg a tekercs impedanciájának valós részeként.

4.3. A földet tekintsük jó vezetőnek

A talaj vezetőképességét a volframéval megegyezőnek választottuk, mert az körülbelül fele a gömbre vonatkozónak, ami pedig az alumíniuménak felel meg.

$$\sigma_t = 1.82 \times 10^{7}\,\mathrm{S\,m^{-1}} \tag{32}$$

A pdetool-ban megadott PDE összetevők:

	c	a	f
Tekercs	`1./(4*pi*1e-7)./x`	`0`	`1/(0.05*0.02)`
Levegő	`1./(4*pi*1e-7)./x`	`0`	`0`
Gömb	`1./(4*pi*1e-7)./x`	`j*2*pi*500./x*1.82e7`	`0`
Talaj	`1./(4*pi*1e-7)./x`	`j*2*pi*500*35e6./x`	`0`

A peremeken mindenhol az `1*u=0` Dirichlet-peremfeltételt adtuk meg.

A tekercs impedanciája gömb nélkül:

$$Z_0 = 1.3793 \times 10^{1} + 1.0905 \times 10^{3} j \quad \Omega \tag{33}$$

A tekercs impedanciája gömbbel, különböző paraméterekkel [Ω]:

r[m] \ d[m]	0.08	0.13	0.18
0.01		1.3922e+01 + 1.0902e+03j	
0.03	1.3925e+01 + 1.0900e+03j	1.3953e+01 + 1.0903e+03j	1.3872e+01 + 1.0904e+03j
0.05		1.4064e+01 + 1.0901e+03j	

Innen tehát az impedancia megváltozása (ΔZ) a gömb nálküli esethez képest [Ω]:

d[m] / r[m]	0.08	0.13	0.18
0.01		0.1292 - 0.2737i	
0.03	0.1322 - 0.4737i	0.1602 - 0.1737j	0.0792 - 0.0737i
0.05		0.2712 - 0.3737j	

Az eredményekből arra lehet következtetni, hogy ha elég jó vezetőképességű a talaj, akkor az eltemetett jobb vezetőképességű gömb miatti impedancia megváltozás kisebb, mint a szigetelő vagy rossz vezetőképességű talaj esetén. Ha a talaj rossz vezető, akkor a gömb hatására megjelenő veszteség felhasználható detekcióra egy nagy jósági tényezőjű rezgőkör jósági tényezőjének lerontására, ami detektálható. Ellenben jó vezető talajnál már a tekercs impedanciájának valós része a gömb nélkül is számottevő, így a detekció sokkal nehezebb.

Házi feladat

Elektromágneses terek (VIHVMA08)

Feladat címe: Föld alatti fémkeresés örvényáramú vizsgálattal
Konzulens: Pávó József [pavo.jozsef@vik.bme.hu]

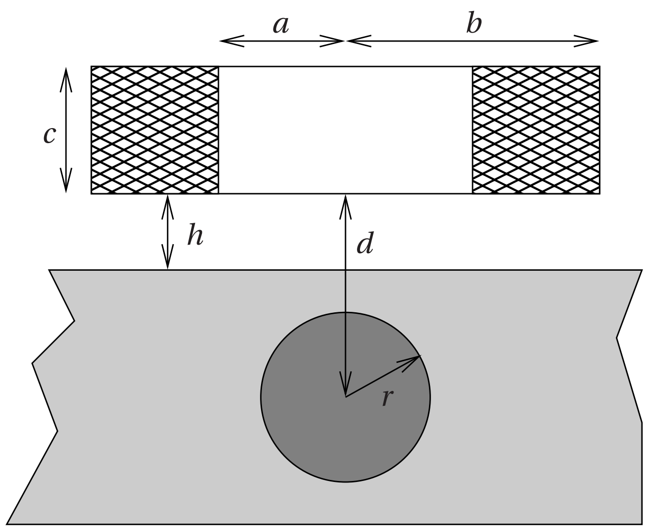
A föld felszíne alatti lévő fémek felderítésére (pl. aknakeresés) szolgáló eszköz egy egyszerűsített vázlata látható az 1. ábrán. A módszer elvi alapja az, hogy a váltakozó árammal táplált tekercs impedanciája megváltozik, ha közelébe vezető (fém) anyag kerül, mivel az utóbbiban örvényáramok indukálódnak, és ezek mágneses tere „visszahat” a tekercs feszültségére.

Az ábrán egy igen egyszerű modell keresztmetszete látható. A c magasságú, a belső és b külső sugarú tekercs légmagos, sűrűn tekercselt, menetszáma N, a benne folyó szinuszos áram körfrekvenciája ω. A tekercs tengelyére illeszkedik az r sugarú fémgömb középpontja. A tekercs és a föld közötti a távolság h.

Jelölje a tekercs impedanciáját Z_0 abban az esetben, ha nincs jelen a fémgömb. A fémgömb jelenlétében az impedancia legyen $Z_0 + \Delta Z$, ahol a mérőműszer jelének ezt a ΔZ impedanciaváltozást tekintjük.

Vizsgálja meg, hogy miként függ az impedancia változása a gömb sugara és annak tekercstől való távolsága függvényében, amennyiben a talaj szigetelőnek tekinthető. Ezt követően vizsgálja meg, hogy miként változtatja meg az eredményt az, ha a talaj vezetőképessége széles határok között változik.

Kiinduló adatok: $a = 5\,\mathrm{cm}$, $b = 7\,\mathrm{cm}$, $c = 3\,\mathrm{cm}$, $N = 2000$ és $\omega = 2\pi 500\,1/\mathrm{s}$, a gömb fajlagos vezetőképessége $\sigma = 35\,\mathrm{MS/m}$, relatív permeabilitása $\mu_r = 1$. A tekercshuzal tökéletes vezető, a talaj vezetőképessége $\sigma_t = 1\,\mathrm{S/m}$.



1. ábra. Talajban lévő fém gömb detektálása örvényáramú méréssel.