

# Elektromágneses Terek (VIHVMA08)

## csoportos házi feladat

Föld alatti fémkeresés örvényáramú vizsgálattal

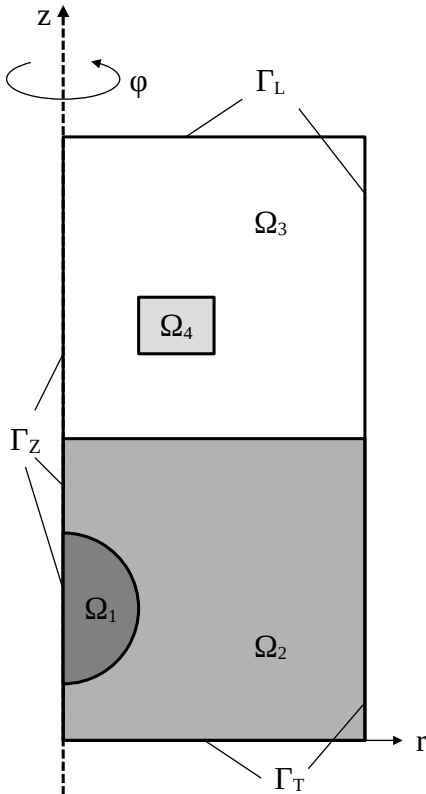
**Gekkó** csapat: Bak Bálint, Kozma Dávid Márk, Szilágyi Gábor

Konzulens: Dr. Pávó József

Budapest, 2022. december 8.

### 1. Bevezetés

A feladatkiírásban felvázolt probléma egy forgásszimmetrikus elrendezés, emiatt az 1. ábrán látható fél-síkmetszet vizsgálata elég a probléma megoldásához.



$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0 \quad (1)$$

A tartományok jelentése:  $\Omega_1$  – vasgömb,  $\Omega_2$  – talaj,  $\Omega_3$  – levegő,  $\Omega_4$  – tekercs.

Mivel csak egy adott  $\omega$  körfrekvencián kell vizsgálnunk, emiatt elég a szinuszos állandósult állapottal foglalkoznunk:

$$\frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow j\omega \quad (2)$$

A kérdéses  $\omega$  körfrekvencián az elektromágneses hullámok szabad-téri hullámhossza ( $\epsilon_r = 1$ ):

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{c}{\frac{\omega}{2\pi}} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}}{\frac{2\pi 500 \text{ s}^{-1}}{2\pi}} = 6 \times 10^5 \text{ m} \quad (3)$$

Emiatt  $\lambda$  az 1000 km nagyságrendjébe esik, míg az elrendezés fizikai méretei néhányszor 10 cm-esek, így élhetünk a magneto-kvázistacionárius közelítéssel:

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \longrightarrow 0 \quad (4)$$

1. ábra. A szimulált elrendezés.

Ebben az esetben a vizsgált tartományon belül a Maxwell-egyenleteknek a következő alakja érvényes:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} \quad (5)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -j\omega \vec{B} \quad (6)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (7)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (8)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} + \vec{J}_i \quad (9)$$

$$\sigma(\vec{r}) = \begin{cases} \sigma, & \text{ha } \vec{r} \in \Omega_1 \\ \sigma_t, & \text{ha } \vec{r} \in \Omega_2 \\ 0, & \text{ha } \vec{r} \in \Omega_3 \cup \Omega_4 \end{cases} \quad (10)$$

Az határoló „doboz” méreteit megfelelően nagyra kell választani ahhoz, hogy a kialakuló teret ne befolyásolja jelentősen a vizsgált  $\Omega$  tartomány  $\Gamma_T \cup \Gamma_L$  peremének a közelsége.

A feladat megoldásához az  $\vec{A} - \Phi, \vec{A}$  formalizmust használjuk, mert az előadáson bemutatott indukciós főzőlapos példa alapján ezzel a megközelítéssel egy jól kezelhető parciális differenciálegyenlet-rendszert kapunk, amit a PDEtool segítségével megoldhatunk.

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad (11)$$

A peremfeltételekről a következőket lehet tudni:

$$B_n(\vec{r}) = 0, \quad \vec{r} \in \Gamma_Z \quad (12)$$

$$B_n(\vec{r}) = 0, \quad \vec{r} \in \Gamma_L \cup \Gamma_T \quad (13)$$

A  $B_n$  normális mágneses indukció a  $\Gamma_Z$  peremen a szimmetria miatt lesz 0, a  $\Gamma_L \cup \Gamma_T$  távoli peremeken pedig a nagy távolság miatt lesz közel 0, amit pontosan 0 értékkel modellezünk.

## 2. A PDE és megadása pdetool-ban

A tartományokra vonatkozó parciális differenciálegyenlet:

$$-\left( \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r\mu} \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r\mu} \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial z} \right) + j\omega\sigma A_\varphi = J_{i,\varphi} \quad (14)$$

Ezt a következő helyettesítésekkel lehet MATLAB-ban (pdetool-ban) megadni:

$$\begin{array}{lll} rA_\varphi & \rightarrow & \mathbf{u} \\ r & \rightarrow & \mathbf{x} \\ z & \rightarrow & \mathbf{y} \end{array} \quad (15)$$

A használt elliptikus PDE séma a következő:

$$-\text{div}(\mathbf{c} * \text{grad}(\mathbf{u})) + \mathbf{a} * \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (16)$$

Eszerint az egyes paraméterek behelyettesítési értékei:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{c} & = & \frac{1}{r\mu} \\ \mathbf{a} & = & \frac{j\omega\sigma}{r} \\ \mathbf{f} & = & J_{i,\varphi} \end{array} \quad (17)$$

### 3. Impedancia kiszámítása $rA_\varphi$ értékekből

A fluxusból tudunk következtetni a tekercs impedanciájára. A tekercs fluxusát egyszerűen ki lehet számolni a PDE megoldásának eredményeként kapott háromszögekből.

Egy menetre számított fluxus számítása:

$$\Psi \triangleq \int_s \vec{B} ds \rightarrow \Psi = \int_s \text{rot}(\vec{A}) ds = \oint_L \vec{A} dl \quad (18)$$

Ebből már meg tudjuk határozni, hogy a teljes tekercs fluxusát, amihez tudni kell még a tekercs menet-számát(N) és a tekercs keresztmetsztét (F) amit a feladat meg adott. Tekercs Fluxus számítása:

$$\Psi = \sum_{k=1}^N \Psi_k = \sum_{k=1}^N \oint_{L_k} \vec{A} dl = \sum_{k=1}^N 2\pi r_k A_{\varphi,k} \quad (19)$$

A tekercs homogenizálásával számítható tekercs fluxus:

$$\Psi = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^N 2\pi r_k A_{\varphi,k} \Delta F \approx \frac{N}{F} \int_F 2\pi r_k A_{\varphi,k} dF \quad (20)$$

az integrál egyszerűen közelíthető a FEM megoldásából, a háromszöghálóra felírt integrál közelítő összeg-gel. A kiszámított fluxusból már egyszerűen számítható a tekercs impedanciája is. Kapocsfeszültség:

$$U = jw\Psi \quad (21)$$

Tekercs árama:

$$I = J_\varphi * \frac{F}{N} \quad (22)$$

Impedancia:

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{jw\Psi}{I} \quad (23)$$

### 4. A gömb méretének és mélységének változtatása

#### 4.1. A földet tekintsük szigetelőnek

$$\sigma_t = 0 \text{ S m}^{-1} \quad (24)$$

A pdetool-ban megadott PDE összetevők:

	c	a	f
Tekercs	$1./(4*\pi*1e-7)./x$	0	$2000/(0.05*0.02)$
Levegő	$1./(4*\pi*1e-7)./x$	0	0
Gömb	$1./(4*\pi*1e-7)./x$	0	0
Talaj	$1./(4*\pi*1e-7)./x$	$j*2*\pi*500*35e6./x$	0

A peremeken mindenhol az  $1*u=0$  Dirichlet-peremfeltételt adtuk meg. Ez egyben  $A_\varphi$ -re is Dirichlet-peremfeltételt jelent, ami miatt a peremeken  $B_n = 0$ .

Tekercs impedanciája gömb nélkül:

$$Z_0 = 0 + 1.2157 \times 10^3 j \quad \Omega \quad (25)$$

A szimulációhoz konvergenciavizsgálatot végeztünk, aminél megvizsgáltuk a ritkább háló és a közelebb peremek hatását. A fenti alap esetben a hálót háromszor finomítottuk, illetve a szimulációs tartomány méretparamétere (a bal és jobb oldali perem távolsága)  $R = 0.5$  m volt. Megvizsgáltuk az alap elrendezést szigetelő talajjal és gömb nélkül, de csak kétszeri hálófinomítás mellett. Így a tekercs impedanciájára a következő adódott:

$$Z_{0,mesh} = 0 + 1.2185 \times 10^3 j \quad \Omega \quad (26)$$

$$\frac{|Z_{0,mesh} - Z_0|}{|Z_0|} = 0.0023 \quad (27)$$

Ezután megvizsgáltuk ugyanazt a kiinduló elrendezést, csak  $R = 0.3$  m választással. Erre a következő tekercs induktivitás adódott:

$$Z_{0,R} = 0 + 1.2185 \times 10^3 j \quad \Omega \quad (28)$$

$$\frac{|Z_{0,R} - Z_0|}{|Z_0|} = 0.0048 \quad (29)$$

Mindkét relatív hiba 1% alatti, így elfogadhatjuk a részletesebb modellből kapott eredményeket, tehát innentől  $R = 0.5$  és háromszori hálófinomítást használunk.

A tekercs impedanciája gömbbel, különböző paraméterekkel  $[\Omega]$ :

d[m] \ r[m]	0.08	0.13	0.18
0.01		5.4765e-03 + 1.2154e+03j	
0.03	6.7525e-01 + 1.2124e+03j	8.5124e-02 + 1.2153e+03j	1.5855e-02 + 1.2156e+03j
0.05		3.5212e-01 + 1.2133e+03j	

Innen tehát az impedancia megváltozása ( $\Delta Z$ ) a gömb nélküli esethez képest  $[\Omega]$ :

d[m] \ r[m]	0.08	0.13	0.18
0.01		0.0055 - 0.3430j	
0.03	0.6753 - 3.3430j	0.0851 - 0.4430j	0.0159 - 0.1430i
0.05		0.3521 - 2.4430i	

A távolság csökkentésével illetve a gömb átmérő csökkentésével csökken az impedancia reális része míg a komplex színte változatlan marad. Azaz a tekercsnek a gömb megjelenésével lessz ellenállása is. Az ellenállás nagysága pedig attól függ, hogy milyen távol van a gömb a tekercstől és a gömb méretétől.

## 4.2. A földet tekintsük rossz vezetőnek

$$\sigma_t = 1 \text{ S m}^{-1} \quad (30)$$

A pdetool-ban megadott PDE összetevők:

	c	a	f
Tekercs	$1./(4*\pi*1e-7)./x$	0	$1/(0.05*0.02)$
Levegő	$1./(4*\pi*1e-7)./x$	0	0
Gömb	$1./(4*\pi*1e-7)./x$	$j*2*\pi*500./x*1$	0
Talaj	$1./(4*\pi*1e-7)./x$	$j*2*\pi*500*35e6./x$	0

A peremeken mindenhol az  $1 \cdot u = 0$  Dirichlet-peremfeltételt adtuk meg.

A tekercs impedanciája gömb nélkül:

$$Z_0 = 6.6340 \times 10^{-4} + 1.2157 \times 10^3 j \quad \Omega \quad (31)$$

A tekercs impedanciája gömbbel, különböző paraméterekkel  $[\Omega]$ :

d[m] \ r[m]	0.08	0.13	0.18
0.01		6.1399e-03 + 1.2154e+03j	
0.03	6.7587e-01 + 1.2124e+03j	8.5774e-02 + 1.2153e+03j	1.6515e-02 + 1.2156e+03j
0.05		3.5271e-01 + 1.2133e+03j	

Innen tehát az impedancia megváltozása ( $\Delta Z$ ) a gömb nélküli esethez képest  $[\Omega]$ :

d[m] \ r[m]	0.08	0.13	0.18
0.01		0.0055 - 0.3430j	
0.03	0.6752 - 3.3430j	0.0851 - 0.4430j	0.0159 - 0.1430j
0.05		0.3520 - 2.4430j	

A tapasztalat szinte ugyanaz, mint amikor a földet szigetelőnek tekintjük, azzal a különbséggel, hogy a már a gömb nélkül is van valós része az impedanciának. Ez azért logikus, mert a véges vezetőképességű talajban létrejövő örvényáramok miatti ohmos veszteség jelenik meg a tekercs impedanciájának valós részeként.

### 4.3. A földet tekintsük jó vezetőnek

A talaj vezetőképességét a volframéval megegyezőnek választottuk, mert az körülbelül fele a gömbre vonatkoznak, ami pedig az alumíniuménak felel meg.

$$\sigma_t = 1.82 \times 10^7 \text{ S m}^{-1} \quad (32)$$

A pdetool-ban megadott PDE összetevők:

	c	a	f
Tekercs	$1./(4 \cdot \pi \cdot 1e-7) ./x$	0	$1/(0.05 \cdot 0.02)$
Levegő	$1./(4 \cdot \pi \cdot 1e-7) ./x$	0	0
Gömb	$1./(4 \cdot \pi \cdot 1e-7) ./x$	$j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 500 ./x \cdot 1.82e7$	0
Talaj	$1./(4 \cdot \pi \cdot 1e-7) ./x$	$j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 500 \cdot 35e6 ./x$	0

A peremeken mindenhol az  $1 \cdot u = 0$  Dirichlet-peremfeltételt adtuk meg.

A tekercs impedanciája gömb nélkül:

$$Z_0 = 1.3793 \times 10^1 + 1.0905 \times 10^3 j \quad \Omega \quad (33)$$

A tekercs impedanciája gömbbel, különböző paraméterekkel  $[\Omega]$ :

d[m] \ r[m]	0.08	0.13	0.18
0.01		1.3922e+01 + 1.0902e+03j	
0.03	1.3925e+01 + 1.0900e+03j	1.3953e+01 + 1.0903e+03j	1.3872e+01 + 1.0904e+03j
0.05		1.4064e+01 + 1.0901e+03j	

Innen tehát az impedancia megváltozása ( $\Delta Z$ ) a gömb nélküli esethez képest [ $\Omega$ ]:

$\begin{matrix} \text{d[m]} \\ \text{r[m]} \end{matrix}$	0.08	0.13	0.18
0.01		0.1292 - 0.2737i	
0.03	0.1322 - 0.4737i	0.1602 - 0.1737j	0.0792 - 0.0737i
0.05		0.2712 - 0.3737j	

Az eredményekből arra lehet következtetni, hogy ha elég jó vezetőképességű a talaj, akkor az eltemetett jobb vezetőképességű gömb miatti impedancia megváltozás kisebb, mint a szigetelő vagy rossz vezetőképességű talaj esetén. Ha a talaj rossz vezető, akkor a gömb hatására megjelenő veszteség felhasználható detekcióra egy nagy jósági tényezőjű rezgőkör jósági tényezőjének lerontására, ami detektálható. Ellenben jó vezető talajnál már a tekercs impedanciájának valós része a gömb nélkül is számottevő, így a detekció sokkal nehezebb.

## Házi feladat

### Elektromágneses terek (VIHVMA08)

Feladat címe: Föld alatti fémkeresés örvényáramú vizsgálattal  
Konzulens: Pávó József [pavo.jozsef@vik.bme.hu]

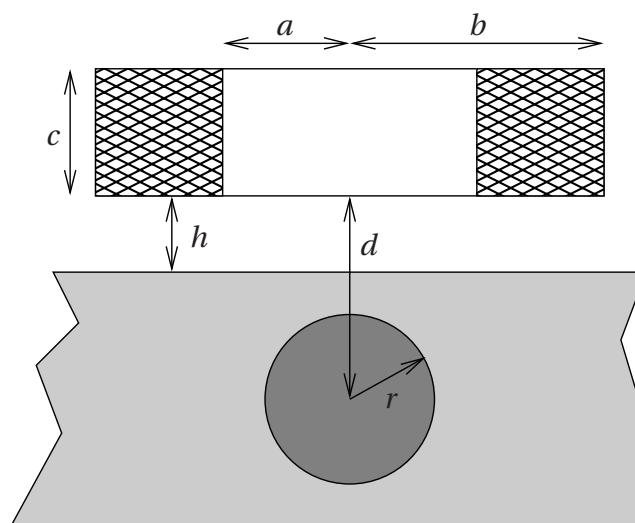
A föld felszíne alatti lévő fémek felderítésére (pl. aknakeresés) szolgáló eszköz egy egyszerűsített vázlatát látható az 1. ábrán. A módszer elvi alapja az, hogy a váltakozó árammal táplált tekercs impedanciája megváltozik, ha közelébe vezető (fém) anyag kerül, mivel az utóbbiban örvényáramok indukálódnak, és ezek mágneses tere „visszahat” a tekercs feszültségére.

Az ábrán egy igen egyszerű modell keresztmetszete látható. A  $c$  magasságú,  $a$  belső és  $b$  külső sugarú tekercs légmagos, sűrűn tekercselt, menetszáma  $N$ , a benne folyó szinuszos áram körfrekvenciája  $\omega$ . A tekercs tengelyére illeszkedik az  $r$  sugarú fémgömb középpontja. A tekercs és a föld közötti távolság  $h$ .

Jelölje a tekercs impedanciáját  $Z_0$  abban az esetben, ha nincs jelen a fémgömb. A fémgömb jelenlétében az impedancia legyen  $Z_0 + \Delta Z$ , ahol a mérőműszer jelének ezt a  $\Delta Z$  impedanciaváltozást tekintjük.

Vizsgálja meg, hogy miként függ az impedancia változása a gömb sugara és annak tekercstől való távolsága függvényében, amennyiben a talaj szigetelőnek tekinthető. Ezt követően vizsgálja meg, hogy miként változtatja meg az eredményt az, ha a talaj vezetőképessége széles határok között változik.

Kiinduló adatok:  $a = 5$  cm,  $b = 7$  cm,  $c = 3$  cm,  $N = 2000$  és  $\omega = 2\pi 500$  1/s, a gömb fajlagos vezetőképessége  $\sigma = 35$  MS/m, relatív permeabilitása  $\mu_r = 1$ . A tekercshuzal tökéletes vezető, a talaj vezetőképessége  $\sigma_t = 1$  S/m.



1. ábra. Talajban lévő fém gömb detektálása örvényáramú méréssel.