Федеральное агентство связи
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики»

Факультет: Информатики и вычислительной техники
Кафедра прикладной математики и кибернетики
Дисциплина: Вычислительная математика

Отчёт по лабораторной работе № 5
«Интерполяционная формула Лагранжа, Ньютона и схема Эйткена.»

Выполнила студентка группы ИА-831:
Угольникова Екатерина Алексеевна
Проверил ассистент кафедры ПМиК:
Петухова Яна Владимировна

Новосибирск
2020

Задание

Написать программу, реализующую интерполяцию функции по набору точек, с помощью формулы Лагранжа, Ньютона и схемы Эйткена. Приложить решение конкретного примера этими методами.

Пример решения

$$\text{Провести интерполяцию функции многочленом Лагранжа.}$$
$$\text{Вычислить интерполяционный полином Лагранжа в точке } x=2.$$
$$f(x)=\sqrt[3]{x}$$
$$f(2)=\sqrt[3]{2}=1{,}25992$$
$$n=4$$

i	x	$f(x)$
0	1	1
1	1,3	1,09139
2	1,6	1,16961
3	1,8	1,21644
4	2,1	1,28058

$$\text{Интерполяционная формула Лагранжа}$$
$$L(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x)$$
$$l_i(x)=\prod_{j=0,\, j\neq i}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}=\frac{\prod\limits_{j=0,\, j\neq i}(x-x_j)}{\prod\limits_{j=0,\, j\neq i}(x_i-x_j)}$$
$$\text{То есть можно записать полином Лагранжа в виде:}$$
$$L(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i \frac{\prod\limits_{j=0,\, j\neq i}(x-x_j)}{\prod\limits_{j=0,\, j\neq i}(x_i-x_j)}$$
$$\text{В нашем случае:}$$
$$L(2)=\sum_{i=0}^{4} y_i \frac{\prod\limits_{j=0,\, j\neq i}(x-x_j)}{\prod\limits_{j=0,\, j\neq i}(x_i-x_j)}=$$
$$=y_0\frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)\cdot(x-x_4)}{(x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)\cdot(x_0-x_3)\cdot(x_0-x_4)}+y_1\frac{(x-x_0)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)\cdot(x-x_4)}{(x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)\cdot(x_1-x_3)\cdot(x_1-x_4)}+$$
$$+y_2\frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_3)\cdot(x-x_4)}{(x_2-x_0)\cdot(x_2-x_1)\cdot(x_2-x_3)\cdot(x_2-x_4)}+y_3\frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_4)}{(x_3-x_0)\cdot(x_3-x_1)\cdot(x_3-x_2)\cdot(x_3-x_4)}+$$
$$+y_4\frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)}{(x_4-x_0)\cdot(x_4-x_1)\cdot(x_4-x_2)\cdot(x_4-x_3)}=y_0\frac{(2-1{,}3)\cdot(2-1{,}6)\cdot(2-1{,}8)\cdot(2-2{,}1)}{(1-1{,}3)\cdot(1-1{,}6)\cdot(1-1{,}8)\cdot(1-2{,}1)}+$$
$$+y_1\frac{(2-1)\cdot(2-1{,}6)\cdot(2-1{,}8)\cdot(x-2{,}1)}{(1{,}3-1)\cdot(1{,}3-1{,}6)\cdot(1{,}3-1{,}8)\cdot(1{,}3-2{,}1)}+y_2\frac{(2-1)\cdot(2-1{,}3)\cdot(2-1{,}8)\cdot(2-2{,}1)}{(1{,}6-1)\cdot(1{,}6-1{,}3)\cdot(1{,}6-1{,}8)\cdot(1{,}6-2{,}1)}+$$
$$+y_3\frac{(2-1)\cdot(2-1{,}3)\cdot(2-1{,}6)\cdot(2-2{,}1)}{(1{,}8-1)\cdot(1{,}8-1{,}3)\cdot(1{,}8-1{,}6)\cdot(1{,}8-2{,}1)}+y_4\frac{(2-1)\cdot(2-1{,}3)\cdot(2-1{,}6)\cdot(2-1{,}8)}{(2{,}1-1)\cdot(2{,}1-1{,}3)\cdot(2{,}1-1{,}6)\cdot(2{,}1-1{,}8)}=$$

$$= -y_0\cdot\frac{7}{198} + y_1\cdot\frac{2}{9} - y_2\cdot\frac{7}{9} + y_3\cdot\frac{7}{6} + y_4\cdot\frac{14}{33} =$$

$$= -\frac{7}{198} + 1{,}09139\cdot\frac{2}{9} - 1{,}16961\cdot\frac{7}{9} + 1{,}21644\cdot\frac{7}{6} + 1{,}28058\cdot\frac{14}{33} =$$

$$= -0{,}0353535 + 0{,}242531 - 0{,}909697 + 1{,}41918 + 0{,}543276 = 1{,}25994$$

Ответ: $L(2)=1{,}25994.$

Провести интерполяцию функции по схеме Эйткена.

Вычислить в точке $x=2.$

$$f(x)=\sqrt[3]{x}$$

$$f(2)=\sqrt[3]{2}=1{,}25992$$

$$n=4$$

i	x	$f(x)$
0	1	1
1	1,3	1,09139
2	1,6	1,16961
3	1,8	1,21644
4	2,1	1,28058

$$\begin{array}{ccccccccc}
\begin{array}{l} y_0=p_{x_0}(x)\\ y_1=p_{x_1}(x)\\ y_2=p_{x_2}(x)\\ y_3=p_{x_3}(x)\\ y_4=p_{x_4}(x)\end{array} & \Rightarrow & \begin{array}{l} p_{x_0x_1}(x)\\ p_{x_1x_2}(x)\\ p_{x_2x_3}(x)\\ p_{x_3x_4}(x)\end{array} & \Rightarrow & \begin{array}{l} p_{x_0x_1x_2}(x)\\ p_{x_1x_2x_3}(x)\\ p_{x_2x_3x_4}(x)\end{array} & \Rightarrow & \begin{array}{l} p_{x_0x_1x_2x_3}(x)\\ p_{x_1x_2x_3x_4}(x)\end{array} & \Rightarrow & p_{x_0x_1x_2x_3x_4}(x)
\end{array}$$

$$p_{x_0x_1}=\frac{p_{x_0}(x-x_1)-p_{x_1}(x-x_0)}{x_0-x_1}=\frac{1\cdot(2-1{,}3)-1{,}09139\cdot(2-1)}{1-1{,}3}=1{,}30463$$

$$p_{x_1x_2}=\frac{p_{x_1}(x-x_2)-p_{x_2}(x-x_1)}{x_1-x_2}=\frac{1{,}09139\cdot(2-1{,}6)-1{,}16961\cdot(2-1{,}3)}{1{,}3-1{,}6}=1{,}2739$$

$$p_{x_2x_3}=\frac{p_{x_2}(x-x_3)-p_{x_3}(x-1{,}6)}{x_2-x_3}=\frac{1{,}16961\cdot(2-1{,}8)-1{,}21644\cdot(2-1{,}6)}{1{,}6-1{,}8}=1{,}26327$$

$$p_{x_3x_4}=\frac{p_{x_3}(x-x_4)-p_{x_4}(x-x_3)}{x_3-x_4}=\frac{1{,}21644\cdot(2-2{,}1)-1{,}28058\cdot(2-1{,}8)}{1{,}8-2{,}1}=1{,}2592$$

$$p_{x_0x_1x_2}=\frac{p_{x_0x_1}(x-x_2)-p_{x_1x_2}(x-x_0)}{x_0-x_2}=\frac{1{,}30463\cdot(2-1{,}6)-1{,}2739\cdot(2-1)}{1-1{,}6}=1{,}25341$$

$$p_{x_1x_2x_3}=\frac{p_{x_1x_2}(x-x_3)-p_{x_2x_3}(x-x_1)}{x_1-x_3}=\frac{1{,}2739\cdot(2-1{,}8)-1{,}26327\cdot(2-1{,}3)}{1{,}3-1{,}8}=1{,}259018$$

$$p_{x_2x_3x_4}=\frac{p_{x_2x_3}(x-x_4)-p_{x_3x_4}(x-x_2)}{x_2-x_4}=\frac{1{,}26327\cdot(2-2{,}1)-1{,}2592\cdot(2-1{,}6)}{1{,}6-2{,}1}=1{,}260014$$

$$p_{x_0x_1x_2x_3}=\frac{p_{x_0x_1x_2}(x-x_3)-p_{x_1x_2x_3}(x-x_0)}{x_0-x_3}=\frac{1{,}25341\cdot(2-1{,}8)-1{,}259018\cdot(2-1)}{1-1{,}8}=1{,}26042$$

$$p_{x_1x_2x_3x_4}=\frac{p_{x_1x_2x_3}(x-x_4)-p_{x_2x_3x_4}(x-x_1)}{x_1-x_4}=\frac{1{,}259018\cdot(2-2{,}1)-1{,}260014\cdot(2-1{,}3)}{1{,}3-2{,}1}=1{,}25989$$

$$p_{x_0x_1x_2x_3x_4}=\frac{p_{x_0x_1x_2x_3}(x-x_4)-p_{x_1x_2x_3x_4}(x-x_0)}{x_0-x_4}=\frac{1{,}26042\cdot(2-2{,}1)-1{,}25989\cdot(2-1)}{1-2{,}1}=1{,}25994$$

Ответ: $p_{x_0x_1x_2x_3x_4}=1{,}25994.$

Провести интерполяцию функции многочленом Ньютона.
Вычислить интерполяционный полином Ньютона в точке $x=2$.

$$f(x)=\sqrt[3]{x}$$
$$f(2)=\sqrt[3]{2}=1{,}25992$$
$$n=4$$

i	x	$f(x)$
0	1	1
1	1,3	1,09139
2	1,6	1,16961
3	1,8	1,21644
4	2,1	1,28058

$$P_4(x)=f(x_0)+f(x_0,x_1)(x-x_0)+f(x_0,x_1,x_2)(x-x_0)(x-x_1)+f(x_0,x_1,x_2,x_3)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ +$$
$$+\ f(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

$$f(x_0,x_1)=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{1{,}09139-1}{1{,}3-1}=0{,}304644$$

$$f(x_1,x_2)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{1{,}16961-1{,}09139}{1{,}6-1{,}3}=0{,}260715$$

$$f(x_2,x_3)=\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}=\frac{1{,}21644-1{,}16961}{1{,}8-1{,}6}=0{,}234167$$

$$f(x_3,x_4)=\frac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3}=\frac{1{,}28058-1{,}21644}{2{,}1-1{,}8}=0{,}213796$$

$$f(x_0,x_1,x_2)=\frac{f(x_1,x_2)-f(x_0,x_1)}{x_2-x_0}=\frac{0{,}260733-0{,}304644}{1{,}6-1}=-0{,}0732149$$

$$f(x_1,x_2,x_3)=\frac{f(x_2,x_3)-f(x_1,x_2)}{x_3-x_1}=\frac{0{,}234167-0{,}260715}{1{,}8-1{,}3}=-0{,}0530951$$

$$f(x_2,x_3,x_4)=\frac{f(x_3,x_4)-f(x_2,x_3)}{x_4-x_2}=\frac{0{,}213796-0{,}234167}{2{,}1-1{,}6}=-0{,}0407413$$

$$f(x_0,x_1,x_2,x_3)=\frac{f(x_1,x_2,x_3)-f(x_0,x_1,x_2)}{x_3-x_0}=\frac{-0{,}0530951-(-0{,}0732149)}{1{,}8-1}=0{,}0251498$$

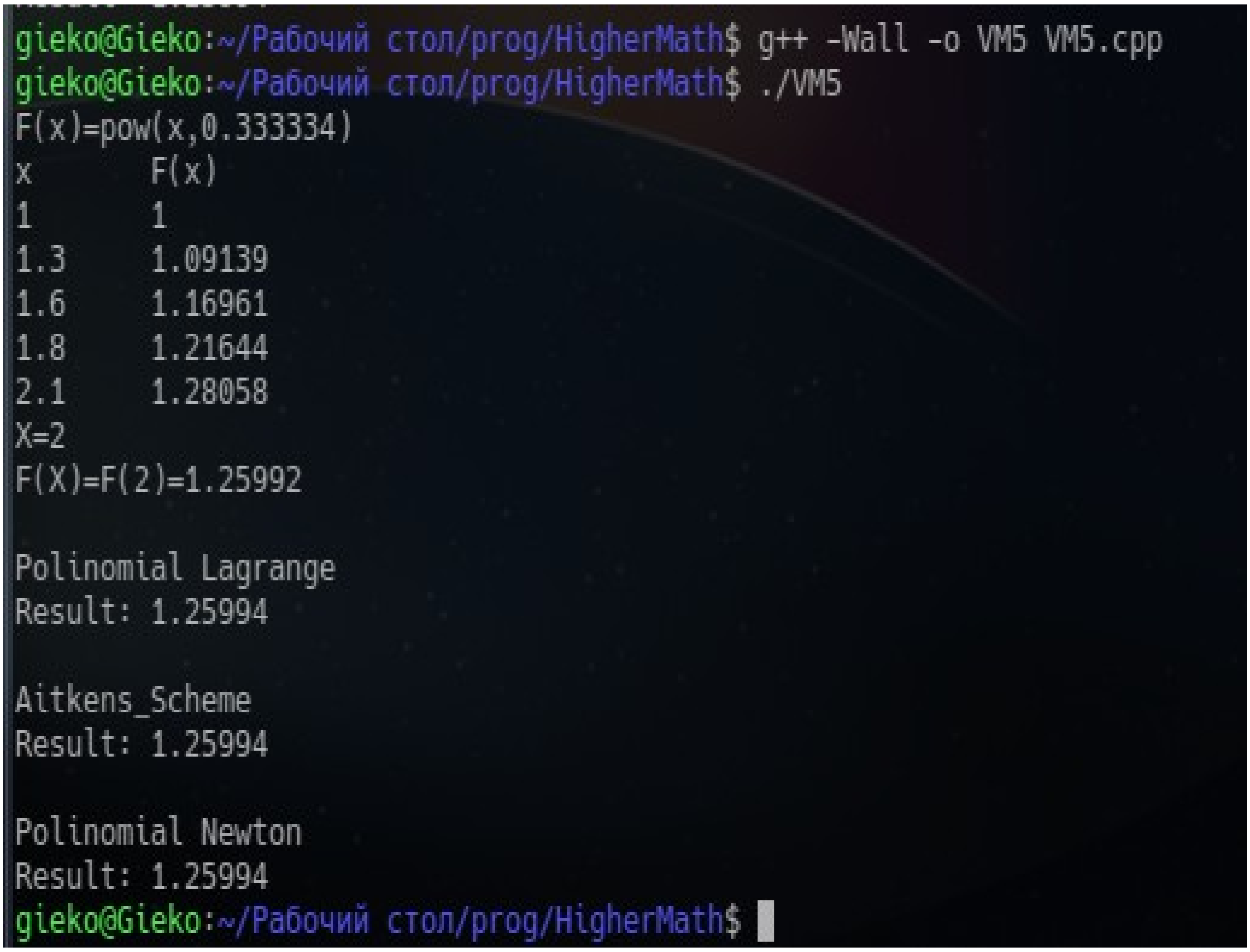
$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\frac{f(x_2,x_3,x_4)-f(x_1,x_2,x_3)}{x_4-x_1}=\frac{-0{,}0407413-(-0{,}0530951)}{2{,}1-1{,}3}=0{,}0154422$$

$$f(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4)=\frac{f(x_1,x_2,x_3,x_4)-f(x_0,x_1,x_2,x_3)}{x_4-x_0}=\frac{0{,}0154422-0{,}0251498}{2{,}1-1}=-0{,}00882503$$

$$P_4(2)=1+0{,}304644\cdot(2-1)-0{,}0732149\cdot(2-1)(2-1{,}3)+0{,}0251498\cdot(2-1)(2-1{,}3)(2-1{,}6)\ -$$
$$-\ 0{,}00882503\cdot(2-1)(2-1{,}3)(2-1{,}6)(2-1{,}8)\ =$$
$$=1+0{,}304644-0{,}0512504+0{,}00704193-0{,}000494201=1{,}259941329\approx1{,}25994$$

Ответ: $P_4(2)=1{,}25994.$

Результат выполнения программы



Листинг программы

```
#include <iostream>
#include <algorithm>
#include <math.h>
#define ERROR -1
using namespace std;

double f(double x){
	return pow(x,0.333334);
}
bool Check_Uniformity(double *X,double *F_x,int n){
	double h=X[1]-X[0];
	for(short int i=2;i<n;i++){
		if((X[i]-X[i-1])!=h) return false;
	}
	return true;
}
double Polinomial_Lagrange(double *X,double *F_x,double x,int n){
	double L_x,li_x=1;
	if(Check_Uniformity(X,F_x,n)){
		double h=X[1]-X[0];
		for (short int i=0;i<n;i++){
			for (short int j=0;j<n;j++){
				if (i!=j){
					li_x*=(x-X[0]-h*j)/h/(i-j);
				}
			}
			L_x+=F_x[i]*li_x;
			li_x=1;
		}
		return L_x;
	}
	else{
		for(short int i=0;i<n;i++){
			for(short int j=0;j<n;j++){
				if(i!=j){
					li_x*=(x-X[j])/(X[i]-X[j]);
				}
			}
			L_x+=F_x[i]*li_x;
			li_x=1;
		}
		return L_x;
	}
}
double Aitkens_Scheme(double *X, double *F_x, double x, int n){
	double Z[n];
	for(short int i=0;i<n;i++){
		Z[i]=F_x[i];
	}
	for(short int j=0;j<n;j++){
		for(short int i=j+1;i<n;i++){
			Z[i]=((x-X[i])*Z[j]-(x-X[j])*Z[i])/(X[i]-X[j]);
		}
	}
	return Z[n-1];
}
```

```
double Polinomial_Newton(double *X, double *F_x, double x, int n){
	double *k=new double[n];
	k[0]=F_x[0];
	for (int j=1; j<n; j++)
		for (int i=0; i<n-j; i++){
			F_x[i]=(F_x[i+1]-F_x[i])/(X[i+j]-X[i]);
			k[j]=F_x[0];
		}
	double S=k[0], p=1;
	for (int i=1; i<n; i++){
		p*=(x-X[i-1]);
		S+=k[i]*p;
	}
	return S;
}

int main(){
	int n=5,x=2; double Res;
	double *F_x= new double [n];
	double X[n]={1,1.3,1.6,1.8,2.1};
	cout<<"F(x)=pow(x,0.333334)"<<endl;
	cout<<"x\tF(x)"<<endl;
	for(short int i=0;i<n;i++){
		F_x[i]=f(X[i]);
		cout<<X[i]<<"\t"<<F_x[i]<<endl;
	}
	cout<<"X="<<x<<endl<<"F(X)=F("<<x<<")="<<f(x)<<endl<<endl;
	Res=Polinomial_Lagrange(X,F_x,x,n);
	cout<<"Polinomial Lagrange"<<endl;
	cout<<"Result: "<<Res<<endl<<endl;
	Res=Aitkens_Scheme(X,F_x,x,n);
	cout<<"Aitkens_Scheme"<<endl;
	cout<<"Result: "<<Res<<endl<<endl;
	Res=Polinomial_Newton(X,F_x,x,n);
	cout<<"Polinomial Newton"<<endl;
	cout<<"Result: "<<Res<<endl;
	return 0;
}
```