Федеральное агентство связи
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики»

Факультет: Информатики и вычислительной техники
Кафедра прикладной математики и кибернетики
Дисциплина: Вычислительная математика

Отчёт по лабораторной работе № 4
«Многомерный метод Ньютона решения систем нелинейных уравнений.»

Выполнила студентка группы ИА-831:
Угольникова Екатерина Алексеевна
Проверил ассистент кафедры ПМиК:
Петухова Яна Владимировна

Новосибирск
2020

Задание

Написать программу, реализующую решение системы нелинейных уравнений многомерным методом Ньютона. Приложить решение конкретного примера этим методом.

Пример решения

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})=\begin{cases} f_1(x_1,x_2)=0{,}1x_1^2+x_1+0{,}2x_2^2-0{,}3=0 \\ f_1(x_1,x_2)=0{,}2x_1^2+x_2-0{,}1x_1x_2-0{,}7=0 \end{cases}$$

$$\varepsilon=0{,}0001$$

Вектор начального приближения: $\boldsymbol{X^0}=(0{,}25;0{,}75)^T$

Итерационная формула: $\boldsymbol{X^{i+1}}=\boldsymbol{X^i}-J^{-1}\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X^i})$

Зададим матрицу частных производных:

$$J=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_1,x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_1,x_2)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}2x_1+1 & 0{,}4x_2 \\ 0{,}4x_1-0{,}1x_2 & 1-0{,}1x_1 \end{pmatrix}$$

$i=1$

Находим значение функций $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X^0})$:

$f_1(0{,}25;0{,}75)=0{,}1\cdot0{,}25^2+0{,}25+0{,}2\cdot0{,}75^2-0{,}3=0{,}06875$

$f_2(0{,}25;0{,}75)=0{,}2\cdot0{,}25^2+0{,}75-0{,}1\cdot0{,}25\cdot0{,}75-0{,}7=0{,}04375$

$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X^0})=(0{,}06875;0{,}04375)^T$

Находим матрицу Якоби для текущей итерации:

$$J=\begin{pmatrix} 0{,}2\cdot0{,}25+1 & 0{,}4\cdot0{,}75 \\ 0{,}4\cdot0{,}25-0{,}1\cdot0{,}75 & 1-0{,}1\cdot0{,}25 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1{,}05 & 0{,}3 \\ 0{,}025 & 0{,}975 \end{pmatrix}$$

К ней обратная:

$$J^{-1}=\begin{pmatrix} 0{,}95941 & -0{,}295203 \\ -0{,}0246002 & 1{,}03321 \end{pmatrix}$$

Посчитаем произведение $J^{-1}\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X^0})$

$$J^{-1}\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X^0})=\begin{pmatrix} 0{,}95941 & -0{,}295203 \\ -0{,}0246002 & 1{,}03321 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0{,}06875 \\ 0{,}04375 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 0{,}95941\cdot0{,}06875-0{,}295203\cdot0{,}04375 \\ -0{,}0246002\cdot0{,}06875+1{,}03321\cdot0{,}04375 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}053044 \\ 0{,}0435116 \end{pmatrix}$$

$x_1^1=x_1^0-0{,}053044=0{,}25-0{,}053044=0{,}196956$

$x_2^1=x_2^0-0{,}0435116=0{,}75-0{,}0435116=0{,}706488$

Проверка точности:

$\|\boldsymbol{X^i}-\boldsymbol{X^{i-1}}\| < \varepsilon$

$\|\boldsymbol{X^1}-\boldsymbol{X^0}\|$

$$max\begin{Bmatrix} |x_1^1-x_1^0|=|0{,}196956-0{,}25|=|-0{,}053044|=0{,}053044 \\ |x_2^1-x_2^0|=|0{,}706488-0{,}75|=|-0{,}043512|=0{,}043512 \end{Bmatrix}=0{,}053044$$

$0{,}053044<\varepsilon$? *НЕТ*

$i=2$

Вектор значений $\boldsymbol{X^1}=(0{,}196956\,;0{,}706488)^T$

$f_1(0{,}196956\,;0{,}706488)=0{,}1\cdot 0{,}196956^2+0{,}196956+0{,}2\cdot 0{,}706488^2-0{,}3=0{,}0006602$

$f_2(0{,}196956\,;0{,}706488)=0{,}2\cdot 0{,}196956^2+0{,}706488-0{,}1\cdot 0{,}196956\cdot 0{,}706488-0{,}7=0{,}0003316$

$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X^1})=(0{,}0006602\,;0{,}0003316)^T$

$J=\begin{pmatrix}1{,}03939 & 0{,}282596\\ 0{,}00813405 & 0{,}980304\end{pmatrix}$

$J^{-1}=\begin{pmatrix}0{,}964277 & -0{,}277975\\ -0{,}00800106 & 1{,}0224\end{pmatrix}$

$J^{-1}\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X^0})=\begin{pmatrix}0{,}964277 & -0{,}277975\\ -0{,}00800106 & 1{,}0224\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0{,}0006602\\ 0{,}0003316\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}0{,}964277\cdot 0{,}0006602-0{,}277975\cdot 0{,}0003316\\ -0{,}00800106\cdot 0{,}0006602+1{,}0224\cdot 0{,}0003316\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}000544\\ 0{,}0003337\end{pmatrix}$

$x_1^2=x_1^1-0{,}00054444=0{,}196956-0{,}000544=0{,}196412$

$x_2^2=x_2^1-0{,}00033375=0{,}706488-0{,}0003337=0{,}706154$

$\|\boldsymbol{X^2}-\boldsymbol{X^1}\|$

$max\begin{Bmatrix}|x_1^2-x_1^1|=|0{,}196412-0{,}196956|=|-0{,}000544|=0{,}000544\\ |x_2^2-x_2^1|=|0{,}706154-0{,}706488|=|-0{,}000334|=0{,}000334\end{Bmatrix}=0{,}000544\ \ <\varepsilon\ ?\ \ НЕТ$

....

$i=3$

Вектор значений $\boldsymbol{X^2}=(0{,}196412\,;0{,}706154)^T$

$f_1(0{,}196412\,;0{,}706154)=0{,}1\cdot 0{,}196412^2+0{,}196412+0{,}2\cdot 0{,}706154^2-0{,}3=0{,}0000000521443$

$f_2(0{,}196412\,;0{,}706154)=0{,}2\cdot 0{,}196412^2+0{,}706154-0{,}1\cdot 0{,}196412\cdot 0{,}706154-0{,}7=0{,}0000000412818$

$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X^2})=(0{,}0000000521443\,;0{,}0000000412818)^T$

$J=\begin{pmatrix}1{,}03928 & 0{,}282462\\ 0{,}00794975 & 0{,}980359\end{pmatrix}$

$J^{-1}=\begin{pmatrix}0{,}964328 & -0{,}277843\\ -0{,}00781976 & 1{,}02229\end{pmatrix}$

$J^{-1}\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X^2})=\begin{pmatrix}0{,}964328 & -0{,}277843\\ -0{,}00781976 & 1{,}02229\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0{,}0000000521443\\ 0{,}0000000412818\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}0{,}964328\cdot 0{,}0000000521443-0{,}277843\cdot 0{,}0000000412818\\ -0{,}00781976\cdot 0{,}0000000521443+1{,}02229\cdot 0{,}0000000412818\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}000000038814\\ 0{,}000000041794\end{pmatrix}$

$x_1^3=x_1^2-0{,}000000038814=0{,}196412-0{,}000000038814=0{,}1964119$

$x_2^3=x_2^2-0{,}000000041794=0{,}706154-0{,}000000041794=0{,}7061539$

Вектор значений $\boldsymbol{X^3}=(0{,}1964119\,;0{,}7061539)^T$

$\|\boldsymbol{X^3}-\boldsymbol{X^2}\|$

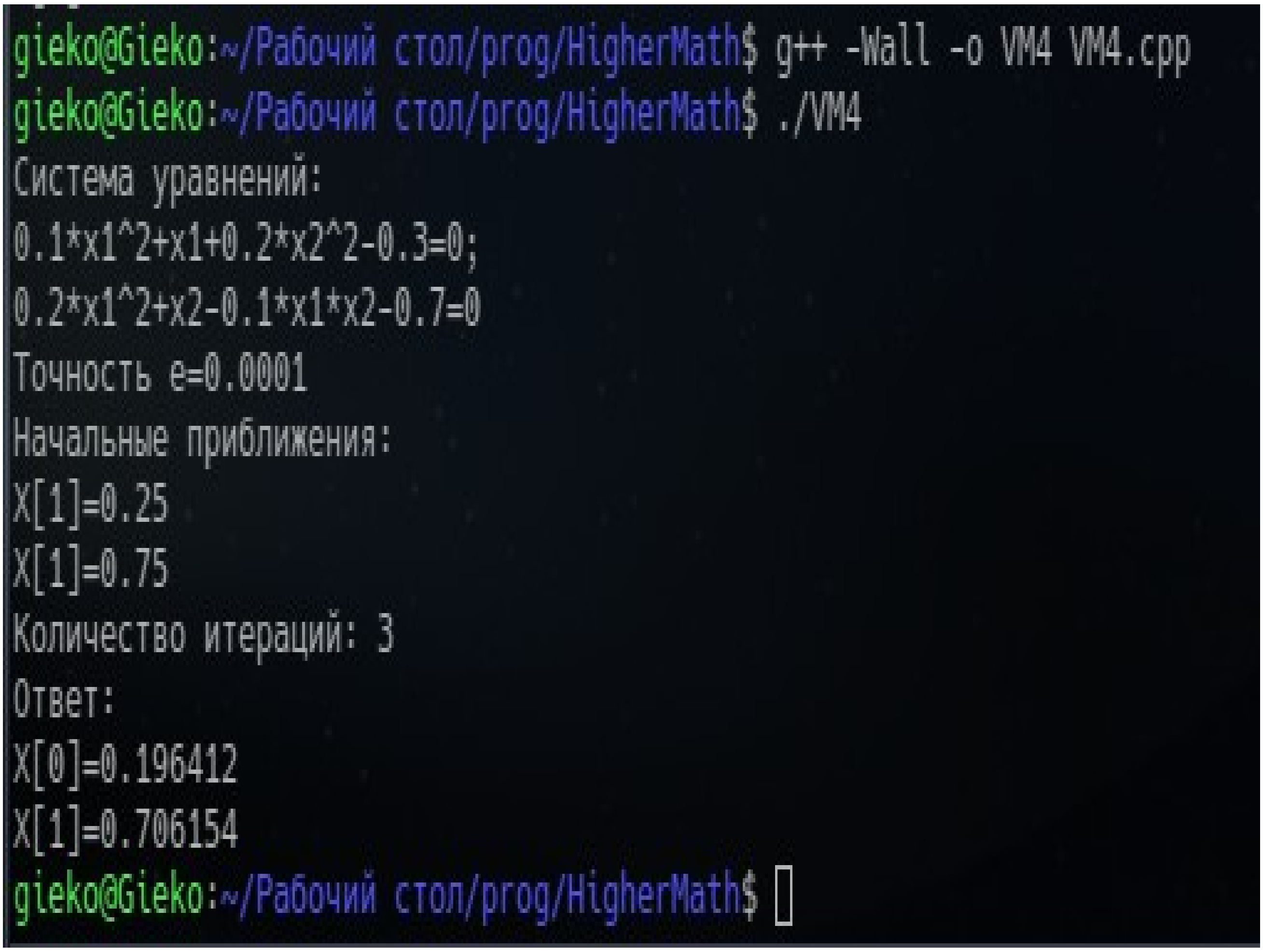
$max\begin{Bmatrix}|x_1^3-x_1^2|=|0{,}1964119-0{,}196412|=|-0{,}0000001|=0{,}0000001\\ |x_2^3-x_2^2|=|0{,}7061539-0{,}706154|=|-0{,}0000001|=0{,}0000001\end{Bmatrix}=0{,}0000001\ \ <\varepsilon\ ?\ \ ДА$

$x_1=0{,}1964119\approx 0{,}19641$

$x_2=0{,}7061539\approx 0{,}70615$

Ответ: $x_1=0{,}19641\,;\ x_2=0{,}70615.$

Результат выполнения программы


```
gieko@Gieko:~/Рабочий стол/prog/HigherMath$ g++ -Wall -o VM4 VM4.cpp
gieko@Gieko:~/Рабочий стол/prog/HigherMath$ ./VM4
Система уравнений:
0.1*x1^2+x1+0.2*x2^2-0.3=0;
0.2*x1^2+x2-0.1*x1*x2-0.7=0
Точность e=0.0001
Начальные приближения:
X[1]=0.25
X[1]=0.75
Количество итераций: 3
Ответ:
X[0]=0.196412
X[1]=0.706154
gieko@Gieko:~/Рабочий стол/prog/HigherMath$
```

Листинг программы

```
#include <iostream>
#include <algorithm>
#include <math.h>
using namespace std;

#define n 2 //количество функций
#define m 2 //количество неизвестный
#define e 0.0001 //точность
#define h 1e-10

/*
#define prm1 0
#define prm2 -1
#define F1(x1,x2) sin(x1+x2)-1.6*x1
#define F2(x1,x2) pow(x1,2)+pow(x2,2)-1
*/

#define prm1 0.25
#define prm2 0.75
#define F1(x1,x2) 0.1*pow(x1,2)+x1+0.2*pow(x2,2)-0.3
#define F2(x1,x2) 0.2*pow(x1,2)+x2-0.1*x1*x2-0.7


double func(int numb, double x1, double x2){
          switch(numb){
               case 1:
                    return F1(x1,x2);
               case 2:
                    return F2(x1,x2);
               default:
                    return -1;
          }
}
double diff(int numb, int var, double x1, double x2){
     switch(var){
          case 1:
               return (func(numb,x1+h,x2)-func(numb,x1-
h,x2))/(2.0*h);
          case 2:
               return (func(numb,x1,x2+h)-func(numb,x1,x2-
h))/(2.0*h);
          default:
               return -1;
     }

}
double** YAkoby(double **J,double **X){
     // n - число строк и столбцов
    for(short int i=1;i<=n;i++){
          for(short int j=1;j<=n;j++){
               J[i-1][j-1]=diff(i,j,X[0][0],X[1][0]);
          }
     }

    return J;
}
double** InverseYAkoby(double **J){
```

```
        int leader_pos;
        double leader, temp;
         double **J_ = new double *[n];
         for (short int i=0;i<n;i++){
              J_[i] = new double[m];
         }
         for(short int i=0;i<n;i++)
              for(short int j=0;j<n;j++)
                   if (i==j) J_[i][j]=1;
        for(short int i=0;i<n;i++){
              leader=J[i][i];
              leader_pos=i;
              for(short int j=i;j<n;j++) {
                   if ( fabs(J[j][i])>fabs(leader) ){
                        leader=J[j][i];
                        leader_pos=j;
                   }
              }
              if (fabs(leader)>h){
                   for(short int j=0;j<n;j++){
                        swap(J[i][j],J[leader_pos][j]);
                        swap(J_[i][j],J_[leader_pos][j]);
                   }
                   for(short int j=0;j<n;j++){
                        if (i!=j){
                             temp=(J[j][i]/J[i][i]);
                             for(short int k=0;k<n;k++){
                                  J[j][k]-=J[i][k]*temp;
                                  J_[j][k]-=J_[i][k]*temp;
                             }
                        }
                   }
              }
         }
         double t4;
         for(short int i=0;i<n;i++){
              t4=J[i][i];
              J[i][i]/=J[i][i];
              for(short int k=0;k<n;k++)
              J_[i][k]/=t4;
         }
    return J_;
    }
    bool NormVector(double **X){
        double norm=0;
        double *Z = new double[n];
            for(short int j=0;j<n;j++){
                Z[j]=fabs(X[j][1]-X[j][0]);
                norm=max(norm,Z[j]);
            }
        if(norm>e) return true;
        return false;
    }
    double** Iteration(double **X){
         double *Z = new double[n];
         double sum=0;
         double **J = new double *[n];
              for (short int i=0;i<n;i++){
                   J[i] = new double[m];
              }
```

```
        double F_x[n];
        for(short int j=0;j<n;j++) {
             X[j][0]=X[j][1];
             X[j][1]=0;
        }
        F_x[0]=func(1,X[0][0],X[1][0]);
        F_x[1]=func(2,X[0][0],X[1][0]);
        J=YAkoby(J,X);
        J=InverseYAkoby(J);
        for(short int i=0;i<n;i++){
             for(short int j=0;j<n;j++){
                  sum+=J[i][j]*F_x[j];
             }
             Z[i]=sum; sum=0;
             X[i][1]=X[i][0]-Z[i];
        }
        return X;
   }
   int k=1;
   double** MethodNewton(double **X){
        bool p; int max=25;
       X=Iteration(X);
       p=NormVector(X);
       while(p==1 ){
             if(k>max) break;
           X=Iteration(X);
           p=NormVector(X);
             k++;
       }
        return X;
   }

   int main(){
        double **Result= new double *[n];
        for (short int i=0;i<n;i++) {
             Result[i] = new double[2];
        }
        Result[0][1]=prm1; Result[1][1]=prm2;
        cout<<"Система уравнений:"<<endl<<"0.1*x1^2+x1+0.2*x2^2-
   0.3=0;"<<endl<<"0.2*x1^2+x2-0.1*x1*x2-0.7=0"<<endl;
        cout<<"Точность e=0.0001"<<endl;
        cout<<"Начальные приближения:\
   nX[1]="<<prm1<<endl<<"X[1]="<<prm2<<endl;
        Result=MethodNewton(Result);
        cout<<"Количество итераций: "<<k<<endl;
        cout<<"Ответ:"<<endl;
        for(short int j=0;j<m;j++){
             cout<<"X["<<j<<"]="<<Result[j][1]<<endl;
        }
   }
```