Федеральное агентство связи

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики»

Факультет: Информатики и вычислительной техники

Кафедра прикладной математики и кибернетики

Дисциплина: Вычислительная математика

Отчёт по лабораторной работе № 3

«Решение нелинейных уравнений методом бисекций, методом хорд и методом Ньютона.»

Выполнила студентка группы ИА-831:

Угольникова Екатерина Алексеевна

Проверил ассистент кафедры ПМиК:

Петухова Яна Владимировна

Новосибирск

2020

Задание

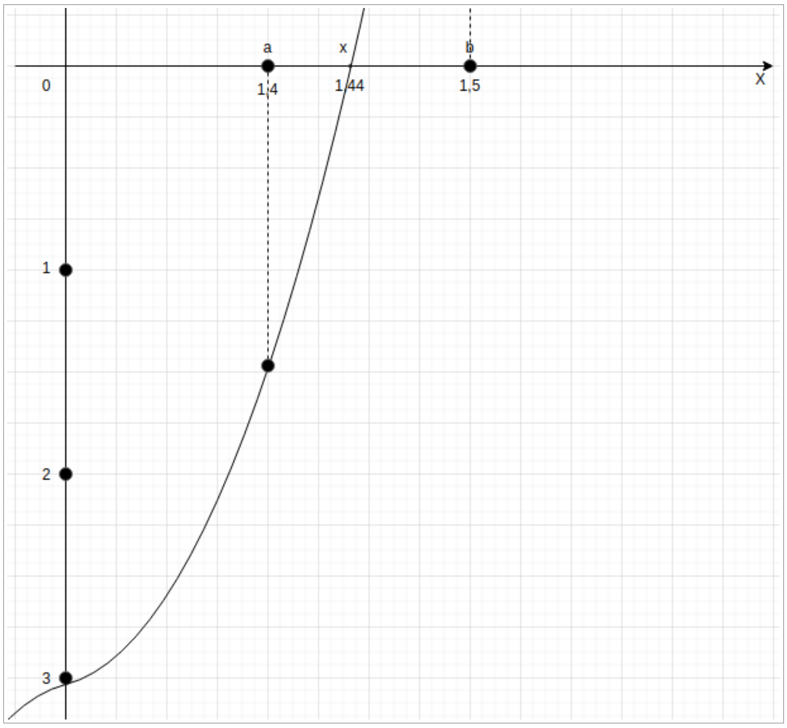
Написать программу, реализующую решение нелинейного уравнения методом бисекций, методом хорд и методом Ньютона. Приложить решение конкретного примера этими методами. Сравнить полученные результаты.

Пример решения

$$\textit{Пример решения методом бисекций, хорд и Ньютона}$$
$$x^3-3=0$$
$$x=\sqrt[3]{3}$$
$$\varepsilon=0.00001$$
$$x=1{,}44225-\textit{точный корень уравнения}(\textit{без учета } \varepsilon)$$
$$a=1{,}4 \quad b=1{,}5$$

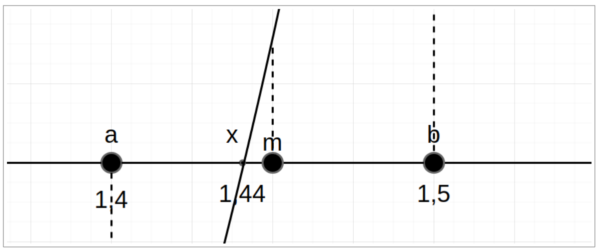
Метод бисекций(метод половинного деления)

Строим график функции x^3- 3 = 0. Отмечаем на графике точки a, b и опускаем перпендикуляры от функции в эти точки.



Графически метод бисекций заключается в том, чтобы на каждом шаге делить отрезок поиска корня пополам, находить значения функции на его концах. Далее определять положение искомого корня относительно середины текущего отрезка и в зависимости от этого положения заменять один из прежних концов отрезка текущей серединой. Выполнять до тех пор, пока |f(m)|<ε, где m — текущая середина.

Для наглядности несколько шагов приведу с изображением графика. (k=1)



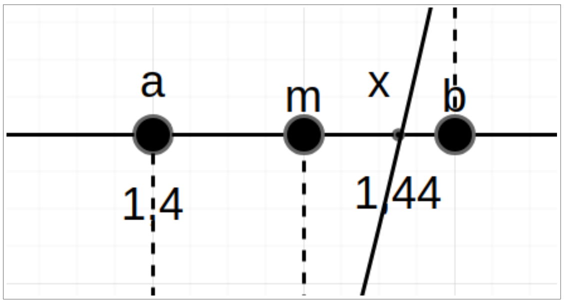
m - середина [a;b]. По графику видно, что искомый x левее точки m, а значит точка m становится новой правой границей отрезка. Так же определим это математически.

$$m=\frac{a+b}{2}=\frac{1{,}4+1{,}5}{2}=\frac{2{,}9}{2}=1{,}45$$

Найдем значения функции в точках a и m: f(a) и f(m). Проверим условие f(a)*f(m) < 0. Если условие выполнено, то корень расположен на отрезке [a,m]. В этом случае необходимо точку b переместить в точку m (b=m). Если условие не выполнено, то корень расположен на отрезке [m,b]. В этом случае необходимо точку a переместить в точку m (a=m).

$f(a)=a^3-3=1{,}4^3-3=-0{,}256$
$f(m)=m^3-3=1{,}45^3-3=0{,}048625$
$f(a)\cdot f(m)=-0{,}256\cdot 0{,}048625=-0{,}012448 \quad <0 \Rightarrow b=m$
$|0{,}048625|<0{,}00001\,?\ НЕТ$

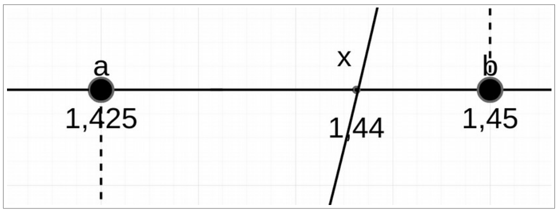
Переходим к следующему шагу(k=2).



По графику видно, что искомый x правее точки m, а значит точка m становится новой левой границей отрезка. Так же определим это математически.

$$m=\frac{a+b}{2}=\frac{1{,}4+1{,}45}{2}=\frac{2{,}85}{2}=1{,}425$$

$f(a)=a^3-3=1{,}4^3-3=-0{,}256$
$f(m)=m^3-3=1{,}425^3-3=-0{,}106359$
$f(a)\cdot f(m)=-0{,}256\cdot(-0{,}136712)=0{,}027228 \quad >0 \Rightarrow a=m$
$|-0{,}106359|<0{,}00001\,?\ НЕТ$



Продолжаем вычисления по такому же принципу, пока не достигнем точности.

$k=3$
$a=1{,}425 \qquad b=1{,}45$
$$m=\frac{a+b}{2}=\frac{1{,}425+1{,}45}{2}=\frac{2{,}875}{2}=1{,}4375$$
$f(a)=a^3-3=1{,}425^3-3=-0{,}106359$
$f(m)=m^3-3=1{,}4375^3-3=-0{,}029541$
$f(a)\cdot f(m)=-0{,}106359\cdot(-0{,}029541)=0{,}003141 \quad >0 \Rightarrow a=m$
$|-0{,}029541|<0{,}00001\,?\ НЕТ$

....

$k=4$
$a=1{,}4375 \qquad b=1{,}45$
$$m=\frac{a+b}{2}=\frac{1{,}4375+1{,}45}{2}=\frac{2{,}8875}{2}=1{,}44375$$

$f(a)=a^3-3=1{,}4375^3-3=-0{,}029541$
$f(m)=m^3-3=1{,}44375^3-3=0{,}0093728$
$f(a)\cdot f(m)=-0{,}029541\cdot 0{,}0093728=-0{,}00028\ \ <0\Rightarrow b=m$
$|0{,}0093728|<0{,}00001\,?$ *НЕТ*

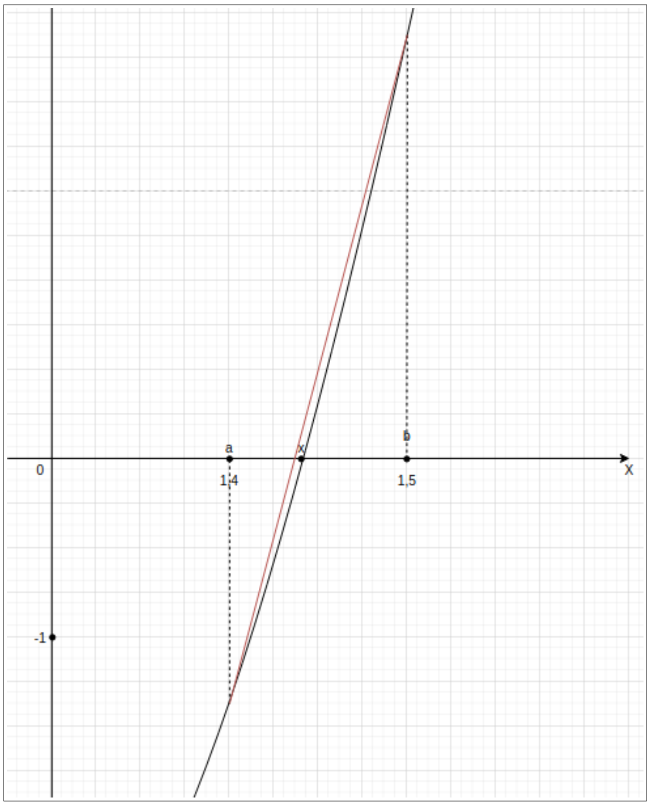
Результаты последующих итераций представлены в таблице.

k	a	b	m	$f(a)=a^3-3$	$f(m)=m^3-3$	f(a)·f(m)	|f(m)|<ε
5	1,4375	1,44375	1,44063	-0,29541	-0,0101263	>0 → a=m	NO
6	1,44063	1,44375	1,44219	-0,0101263	-0,000387318	>0 → a=m	NO
7	1,44219	1,44375	1,44297	-0,000387318	0,0044901	<0 → b=m	NO
8	1,44219	1,44297	1,44258	-0,000387318	0,00205073	<0 → b=m	NO
9	1,44219	1,44258	1,44238	-0,000387318	0,000831542	<0 → b=m	NO
10	1,44219	1,44238	1,44229	-0,000387318	0,000222071	<0 → b=m	NO
11	1,44219	1,44229	1,44224	-0,000387318	0,0000826338	<0 → b=m	NO
12	1,44224	1,44229	1,44226	-0,0000826338	0,0000697159	>0 → a=m	NO
13	1,44224	1,44226	1,44225	-0,0000826338	-0,0000064596	<0 → b=m	YES

Ответ: X=1,44225.

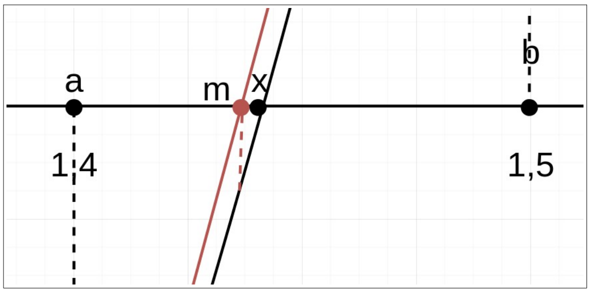
Метод хорд

Строим график функции x^3- 3 = 0. Отмечаем на графике точки a, b и опускаем перпендикуляры от функции в эти точки. И соединяем точки f(a) и f(b) хордой.



Графически метод хорд заключается в том, что на каждом шаге, точки функции на концах отрезка соединяются друг с другом некоторой прямой(хордой) и находится точка пересечения m этой хорды с осью абсцисс. Далее, в зависимости от положения этой точки относительно искомого корня (слева или справа), один из концов отрезка заменяется этой точкой m.
Выполнять до тех пор, пока |f(m)|<ε, где m — текущая точка пересечения хорды и оси абсцисс.

Для наглядности приведу шаг с изображением графика. (k=1)



m - точка пересечения [f(a);f(b)] с осью X. По графику видно, что искомый x правее точки m, а значит точка m становится новой левой границей отрезка.
Точка пересечения хорды с осью абсцисс находится по формуле:

$$m=\frac{a\cdot f(b)-b\cdot f(a)}{f(b)-f(a)}$$

В нашем случае:

$$m=\frac{1{,}4\cdot f(1{,}5)-1{,}5\cdot f(1{,}4)}{f(1{,}5)-f(1{,}4)}=\frac{1{,}4\cdot(1{,}5^3-3)-1{,}5\cdot(1{,}4^3-3)}{(1{,}5^3-3)-(1{,}4^3-3)}=$$
$$=\frac{1{,}4\cdot 0{,}375-1{,}5\cdot(-0{,}256)}{3{,}375-2{,}744}=\frac{0{,}525+0{,}384}{0{,}631}=\frac{0{,}909}{0{,}631}=1{,}44057$$

Найдем значения функции в точках a и m: f(a) и f(m). Проверим условие f(a)*f(m) < 0. Если условие выполнено, то корень расположен на отрезке [a,m]. В этом случае необходимо точку b переместить в точку m (b=m). Если условие не выполнено, то корень расположен на отрезке [m,b]. В этом случае необходимо точку a переместить в точку m (a=m).

$$f(a)=f(1{,}4)-1{,}4^3-3=-0{,}256$$
$$f(m)=f(1{,}44057)=1{,}44057^3-3=-0{,}0104687$$
$$f(a)\cdot f(m)=-0{,}256\cdot(-0{,}0104687)=0{,}002679\ \ >0\ \Rightarrow\ a=m$$
$$|-0{,}0104687|<\varepsilon\ \ ?\ \ НЕТ$$

Продолжаем вычисления по такому же принципу, пока не достигнем точности.

$$k=2$$
$$a=1{,}44057\qquad b=1{,}5$$
$$m=\frac{a\cdot f(b)-b\cdot f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{1{,}44057\cdot(1{,}5^3-3)-1{,}5\cdot(1{,}44057^3-3)}{1{,}5^3-1{,}44057^3}=\frac{0{,}555917}{0{,}385469}=1{,}44218$$
$$f(a)=f(1{,}44057)=1{,}44057^3-3=-0{,}0104687$$
$$f(m)=f(1{,}44218)=1{,}44218^3-3=-0{,}000434115$$
$$f(a)\cdot f(m)=-0{,}0104687\cdot(-0{,}000434115)=0{,}00000454\ \ >0\ \Rightarrow\ a=m$$
$$|-0{,}000434115|<\varepsilon\ \ ?\ \ НЕТ$$

$k=3$

$a=1{,}44218 \qquad b=1{,}5$

$$m=\frac{a\cdot f(b)-b\cdot f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{1{,}44218\cdot(1{,}5^3-3)-1{,}5\cdot(1{,}44218^3-3)}{1{,}5^3-1{,}44218^3}=\frac{0{,}541469}{0{,}375434}=1{,}44225$$

$f(a)=f(1{,}44218)=1{,}44218^3-3=-0{,}000434115$

$f(m)=f(1{,}44225)=1{,}44225^3-3=-0{,}0000027$

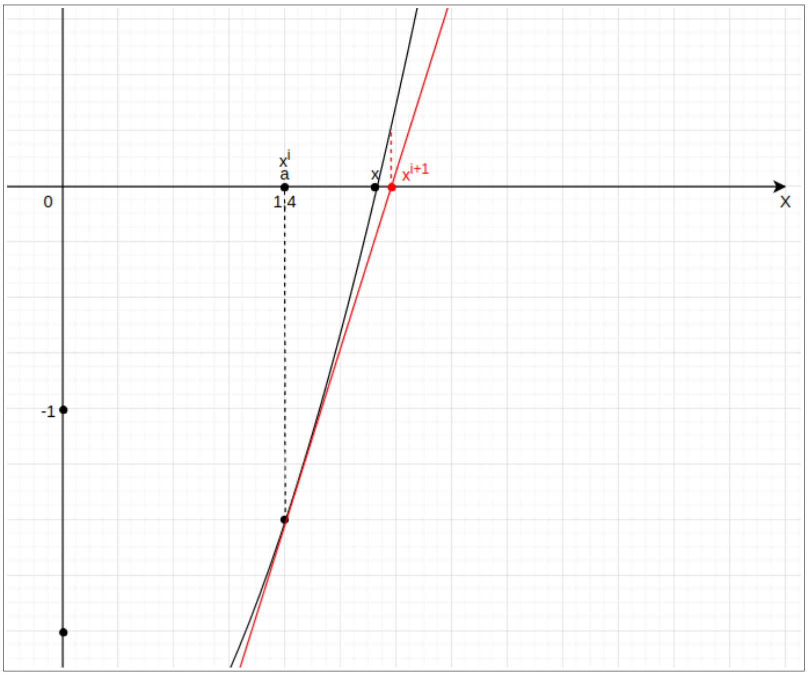
$f(a)\cdot f(m)=-0{,}000434115\cdot(-0{,}0000027)=0{,}0000000012\ >0\ \Rightarrow\ a=m$

$|-0{,}0000027|<\varepsilon\ \ ?\ \ ДА$

Ответ: X=1,44225.

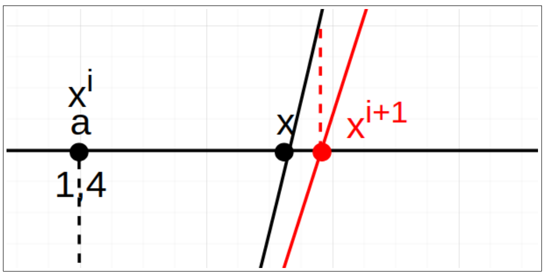
Метод Ньютона (касательных)

Строим график функции x^3- 3 = 0. Отмечаем на графике точку начального приближения a, опускаем перпендикуляр от функции в эту точку. Далее строим касательную к этой точке.



Графически метод хорд заключается в том, что на каждом шаге, строится касательная к точке текущего приближения. Далее находим точку пересечения этой касательной с осью абсцисс и эта точка становится новым приближением. Выполнять до тех пор, пока $|x^{i+1}-x^i|>\varepsilon$, где x^{i+1} — новое приближение, а x^i — текущее приближение.

Для наглядности приведу шаг с изображением графика. (k=1)



x^{i+1} - точка пересечения касательной с осью X. Точка пересечения касательной с осью абсцисс находится по формуле:

$$x^{i+1}=x^i-\frac{f(x^i)}{\dot f(x^i)}$$

Для нахождения производной внутри программы пользуемся формулой приближенного вычисления производной:

$$\dot f(x)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} \qquad h-очень\ малое\ число=1^{-10}$$

Для удобства ручного счета просто найдем производную исходной функции:

$$f(x)=x^3-3$$
$$\dot{f}(x)=(x^3-3)^{\cdot}=3x^2$$

В нашем случае:

$$x^0=a=1{,}4$$
$$x^1=1{,}4-\frac{f(1{,}4)}{\dot{f}(1{,}4)}=1{,}4-\frac{1{,}4^3-3}{3\cdot 1{,}4^2}=1{,}4-\frac{-0{,}256}{5{,}88}=1{,}4+0{,}04353741=1{,}44353741$$
$$|1{,}44353741-1{,}4|=|0{,}04353741| \ <\varepsilon \ \ ? \ \ НЕТ$$

Продолжаем вычисления по такому же принципу, пока не достигнем точности.

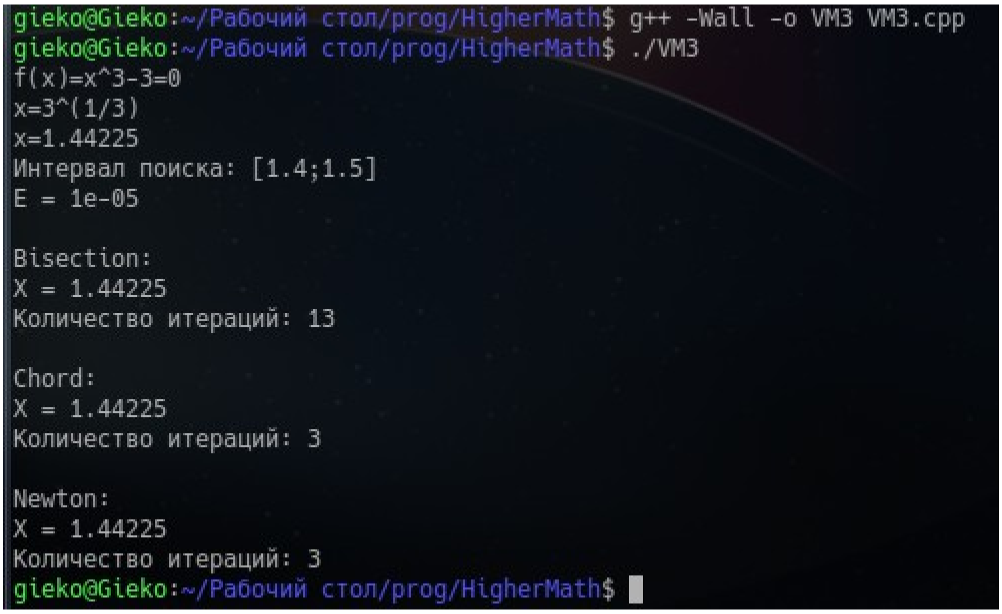
$$k=2$$
$$x^1=1{,}44353741$$
$$x^2=1{,}44353741-\frac{f(1{,}44353741)}{\dot{f}(1{,}44353741)}=1{,}44353741-\frac{1{,}44353741^3-3}{3\cdot 1{,}44353741^2}=$$
$$=1{,}44353741-\frac{0{,}00804362}{6{,}2514}=1{,}44353741-0{,}00128669=1{,}44225$$
$$|1{,}44225-1{,}44353741|=|0{,}00128741| \ <\varepsilon \ \ ? \ \ НЕТ$$

....

$$k=3$$
$$x^2=1{,}44225$$
$$x^3=1{,}44225-\frac{f(1{,}44225)}{\dot{f}(1{,}44225)}=1{,}44225-\frac{1{,}44225^3-3}{3\cdot 1{,}44225^2}=$$
$$=1{,}44225-\frac{0}{6{,}24026}=1{,}44225$$
$$|1{,}44225-1{,}44225|=0 \ <\varepsilon \ \ ? \ \ ДА$$

Ответ: X=1,44225.

Результат выполнения программы



Листинг программы

```
#include <iostream>
#include <algorithm>
#include <math.h>
using namespace std;

double f(double x){
  return pow(x,3)-3; //x=1,44225
  //return pow(x,2)+4*x; //x=0;x=-4
  //return pow(x,3)+4*x+5; //x=1
}
double diff(double x){
      const double h=1e-10;
  return (f(x+h)-f(x-h))/(2.0*h);
}
double Bisection(double a, double b,double e,int *k){
  double f_x,x,tmp;
  (*k)=1;
  x=(b+a)/2;
  tmp=f(a);
  f_x=f(x);
  if(tmp*f_x<0) b=x;
  else a=x;
  while(fabs(f_x)>=e){
     (*k)++;
     x=a+(b-a)/2;
     tmp=f(a);
     f_x=f(x);
     if(tmp*f_x<0) b=x;
     else a=x;
  }
  return x;
}
double Chord(double a, double b,double e,int *k){
  double f_x,x,tmp;
  x=(a*f(b)-b*f(a))/(f(b)-f(a));
  tmp=f(a);
  f_x=f(x);
  (*k)=1;
  if(tmp*f_x<0) b=x;
  else a=x;
  while(fabs(f(x))>=e){
     (*k)++;
     x=(a*f(b)-b*f(a))/(f(b)-f(a));
     if((f(a)*f(x))<0) b=x;
     else a=x;
  }
  return x;
}
double Newton(double a, double e, int *k){
  double x[2];
  x[0]=a;
  x[1]=x[0]-f(x[0])/diff(x[0]);
  (*k)=1;
```

```
    if ((fabs(x[1]-x[0])<=e)) return x[1];
    while(fabs(x[1]-x[0])>e){
        x[0]=x[1];
        x[1]=x[0]-f(x[0])/diff(x[0]);
        (*k)++;
    }
    return x[1];
}

int main(){
    double a=1.4,b=1.5,X;
    double e=0.00001;int k=0;
    cout<<"f(x)=x^3-3=0\nx=3^(1/3)\nx=1.44225"<<endl;
    cout<<"Интервал поиска: [1.4;1.5]"<<endl;
    cout<<"E = "<<e<<endl;
    cout<<endl;
    X=Bisection(a,b,e,&k);
    cout<<"Bisection: "<<endl;
    cout<<"X = "<<X<<endl;
    cout<<"Количество итераций: "<<k<<endl;
    cout<<endl;
    cout<<"Chord: "<<endl;
    X=Chord(a,b,e,&k);
    cout<<"X = "<<X<<endl;
    cout<<"Количество итераций: "<<k<<endl;
    cout<<endl;
    cout<<"Newton: "<<endl;
    X=Newton(a,e,&k);
    cout<<"X = "<<X<<endl;
    cout<<"Количество итераций: "<<k<<endl;
    return 0;
}
```