Γραμμική & Συνδυαστική Βελτιστοποίηση
Εργασία #1

Ημερομηνία Παράδοσης: *7 Απριλίου 2023*

Οδηγίες: Η εργασία είναι ατομική και δεν θα πρέπει να συνεργάζεστε μεταξύ σας για τη λύση των ασκήσεων, μπορείτε όμως να ζητήσετε βοήθεια από τους διδάσκοντες. Οι απαντήσεις σας να είναι γραμμένες σε κειμενογράφο και να είναι πλήρεις. Όπου απαιτείται κώδικας θα πρέπει να περιλαμβάνεται στο κείμενο σας μαζί με τα αποτελέσματα ή σχήματα και όλα αυτά σε αναγνώσιμη μορφή. Επιπλέον ο κώδικας σας να περιλαμβάνει και συνοπτικά σχόλια έτσι ώστε να είναι κατανοητή η λογική που εφαρμόζετε κάθε φορά. Η εργασία θα πρέπει να παραδοθεί ηλεκτρονικά στο eclass, κατά προτίμηση σε μορφή .pdf, μέχρι την ημερομηνία παράδοσης στις 23:59.

Η άσκηση 1 ζητάει γραφική επίλυση του προβλήματος. Χρησιμοποιήστε τα γραφικά και υπολογιστικά εργαλεία της Python για την επίλυση τους. Στις απαντήσεις εδώ θα πρέπει να ενσωματώσετε τον κώδικά σας, τα παραγόμενα σχήματα και μια συνοπτική περιγραφή της λογικής που εφαρμόσατε. Οι ασκήσεις 2 και 3 απαιτούν μοντελοποίηση. Εδώ θα πρέπει να ορίσετε καθαρά τις μεταβλητές απόφασης, την αντικειμενική συνάρτηση και όλους τους περιορισμούς του προβλήματος. Δικαιολογήστε πλήρως (σύντομα αλλά περιεκτικά) τις επιλογές σας. Η άσκηση 4 είναι θεωρητική και απαιτεί μαθηματικές αποδείξεις. Η άσκηση 5 θα πρέπει να λυθεί με τη βοήθεια της Python. Γράψτε κώδικα που θα δημιουργεί τις πιθανές βασικές λύσεις και έναν άλλον για τις πιθανές κορυφές σε κάθε τέτοιο πρόβλημα. Συνοψίστε τα τελικά σας αποτελέσματα και συμπεράσματα. Η άσκηση 6 απαιτεί την εφαρμογή του αλγορίθμου Simplex. Θα πρέπει να λύσετε το πρόβλημα ακολουθώντας όλες τις εναλλακτικές διαδρομές που δημιουργούνται από τις κορυφές του πολύτοπου των εφικτών λύσεων. Απεικονίστε τις εναλλακτικές αυτές διαδρομές μέχρι τη βέλτιστη λύση με έναν γράφο, τον Simplex adjacency graph (π.χ. δες την Εικόνα 3.5 στο βιβλίο των Sierksma/Zwols). Για να διευκολυνθείτε σε αυτήν την άσκηση θα πρέπει να αναπτύξετε κώδικα Python για να κάνει τις αλγεβρικές πράξεις σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου.

Άσκηση 1. Έστω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού που έχει ως περιορισμούς τις παρακάτω ανισώσεις:

$$\begin{aligned} (\Pi 1) \quad & 2x_1 + x_2 \geq 4 \\ (\Pi 2) \quad & x_1 + 2x_2 \geq 5 \\ (\Pi 3) \quad & x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(α) Παραστήστε γραφικά την εφικτή περιοχή του προβλήματος καθώς και όλες τις κορυφές της. Περιγράψτε τη μορφή της εφικτής περιοχής.

(β) Λύστε το παραπάνω πρόβλημα γραφικά με κάθε μία από τις παρακάτω αντικειμενικές συναρτήσεις:

(i) $\max Z = 2x_1 - 5x_2$ $\quad (ii)$ $\max Z = 2x_1 - 4x_2$ $\quad (iii)$ $\max Z = 2x_1 - 3x_2$

Σε κάθε περίπτωση περιγράψτε αναλυτικά τη μορφή της λύσης, εφ' όσον υπάρχει.

Άσκηση 2. Εταιρεία τροφίμων σχεδιάζει ένα καινούργιο προϊόν (snack) με χαμηλά λιπαρά. Συγκεκριμένα, οι προδιαγραφές των τεχνολόγων τους απαιτούν κάθε 1 μονάδα του προϊόντος να περιέχει τουλάχιστον 5.1 γρ. φυτικές ίνες, το πολύ 8.4 γρ. λιπαρά και το πολύ 10.8 γρ. πρωτεΐνης. Για την παρασκευή του προϊόντος θα χρειαστεί η μίξη δύο δημητριακών, G_1 και G_2. Τα δύο δημητριακά έχουν διαφορετικά θρεπτικά χαρακτηριστικά και τα οποία δίνονται στον Πίνακα 1.

Πίνακας 1: Θρεπτικά χαρακτηριστικά των δημητριακών.

	Ποσότητα (γρ. ανά μονάδα)		
	Φυτικές ίνες	Λιπαρά	Πρωτεΐνη
G_1	6	6	12
G_2	4.5	9	9

Αν το κόστος μίας μονάδας των δημητριακών G_1 και G_2 είναι 6 και 7.5 χρηματικές μονάδες αντίστοιχα, προσδιορίστε την ποσότητα που πρέπει να χρησιμοποιηθεί από το καθένα εξ' αυτών, έτσι ώστε να δημιουργηθεί 1 μονάδα του ζητούμενου προϊόντος με τον οικονομικότερο δυνατό τρόπο.

(α) Δώστε ένα μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού για το παραπάνω πρόβλημα σχεδιασμού προϊόντος.

(β) Λύστε το πρόβλημα γραφικά.

(γ) Σχολιάστε τη λύση που βρήκατε σε σχέση με τους περιορισμούς του προβλήματος.

Άσκηση 3. Αεροπορική εταιρεία σχεδιάζει τη στελέχωση του τμήματος εξυπηρέτησης πελατών ανάλογα με το ημερήσιο πρόγραμμα των πτήσεων της. Σύμφωνα με αυτό το πρόγραμμα ο Πίνακας 2 δίνει τον ελάχιστο αριθμό ατόμων που θα πρέπει να εργάζονται σε κάθε ώρα του 24-ώρου καθώς και το ημερήσιο κόστος ανά εργαζόμενο ανάλογα με τη βάρδια στην οποία απασχολείται.

Πίνακας 2: Απαιτούμενος Αριθμός Εργαζομένων.

Περίοδος 24-ώρου	Ελάχιστος Αριθμός Εργαζομένων
06:00 - 08:00	48
08:00 - 10:00	79
10:00 - 12:00	65
12:00 - 14:00	87
14:00 - 16:00	64
16:00 - 18:00	73
18:00 - 20:00	82
20:00 - 22:00	43
22:00 - 24:00	52
24:00 - 06:00	15

Σύμφωνα με τους κανονισμούς κάθε εργαζόμενος θα πρέπει να να εργάζεται συνεχές 8-ωρο που εκτείνεται στη διάρκεια μια βάρδιας. Οι βάρδιες είναι 5, δηλ. 6:00 π.μ.-2:00 μ.μ, 8:00 π.μ.-4:00 μ.μ, 12:00 π.μ.-8:00 μ.μ, 4:00 μ.μ.-12:00 μ.μ, και 10:00 μ.μ.-6:00 π.μ. Τέλος, το ημερήσιο κόστος ανά εργαζόμενο στις βάρδιες εξαρτάται από τη δημοτικότητα της κάθε βάρδιας αλλά και τα ειδικά επιδόματα που πιθανόν να προσφέρονται, όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.

Πίνακας 3: Ημερήσιο κόστος ανά εργαζόμενο και βάρδια.

Βάρδια	Περίοδος	Ημερήσιο κόστος ανά εργαζόμενο
1	06:00 - 14:00	170
2	08:00 - 16:00	160
3	12:00 - 20:00	175
4	16:00 - 24:00	180
5	22:00 - 06:00	195

Μοντελοποιήστε το παραπάνω πρόβλημα προγραμματισμού ανθρώπινου δυναμικού με τη βοήθεια του γραμμικού προγραμματισμού και αντικειμενικό σκοπό την ελαχιστοποίηση του συνολικού ημερήσιου κόστους της εταιρείας σε μισθούς για το συγκεκριμένο τμήμα.

Άσκηση 4. Αποδείξτε τις παρακάτω προτάσεις.

(Π1) Η τομή X δύο κυρτών συνόλων X_1 και X_2 είναι κυρτό σύνολο.

(Π2) Το σύνολο $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$ είναι κυρτό σύνολο.

(Π3) Αν $\mathbf{x^1}, \mathbf{x^2}, \ldots, \mathbf{x^m}$ είναι σημεία ενός κυρτού συνόλου $X \subset \mathbb{R}^n$, τότε κάθε κυρτός συνδυασμός τους ανήκει επίσης στο σύνολο X. (**Υπόδειξη**. Δείξτε πρώτα ότι ισχύει για $m = 2$ και $m = 3$. Μετά με επαγωγή μπορούμε να δείξουμε ότι θα ισχύει για κάθε m.)

***Άσκηση* 5.** Θεωρήστε το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\min Z = 12x_1 - 10x_2 - 30x_3$$

όταν

$$\begin{aligned} -3x_1 + 2x_2 + 8x_3 &\leq 17 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 &\leq 9 \\ -2x_1 + x_2 + 8x_3 &\leq 16 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

(α) Θεωρήστε το πολύτοπο των εφικτών λύσεων του παραπάνω προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού. Βρείτε όλες τις κορυφές που δημιουργούνται από τις τομές των υπερεπιπέδων του και ξεχωρίστε ποιες από αυτές είναι κορυφές του πολύτοπου των εφικτών λύσεων. Εντοπίστε, αν υπάρχουν, τις εκφυλισμένες κορυφές.

(β) Προσθέστε μεταβλητές χαλάρωσης στο σύστημα ανισώσεων και βρείτε όλες τις βασικές (εφικτές και μη-εφικτές) λύσεις για το μη ομογενές σύστημα εξισώσεων που δημιουργείται. Εντοπίστε (αν υπάρχουν) τις εκφυλισμένες βασικές λύσεις.

(γ) Αντιστοιχίστε τις βασικές λύσεις που βρήκατε στο (β) ερώτημα με τις κορυφές του ερωτήματος (α) και τέλος υποδείξτε τη βέλτιστη λύση και βέλτιστη κορυφή του προβλήματος.

***Άσκηση* 6.** Θεωρήστε το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\min Z = -x_1 - 4x_2 - 5x_3$$

όταν

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq 2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &\leq 4 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

(α) Εφαρμόστε τον αλγόριθμο Simplex για να βρείτε τη βέλτιστη λύση του, αν υπάρχει. Σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου θα πρέπει να περιγράφετε συνοπτικά τα βήματα που ακολουθείτε και τις αποφάσεις που παίρνετε μέχρι το επόμενο βήμα.

(β) Εφαρμόστε όλες τις εναλλακτικές επιλογές που μπορεί να έχετε σε κάθε βήμα επιλογής της εισερχόμενης ή εξερχόμενης μεταβλητής σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου και δημιουργήστε έναν γράφο με τα βήματα (κορυφές) του αλγορίθμου μέχρι τη βέλτιστη λύση.