Mathe LK

Niklas Karoli

September 24, 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Der Logarithmus

Der Logarithmus a (a>0) zur Basis b ist die Zahl, mit der man b potenzieren muss, um a zu erhalten.
Schreibweise : $\log_b(a)$ "Logarithmus a zur Basis b" das heißt für jede positive Zahl b $\neq$ 1 gilt: $b^x = a \iff \log_b(a) = x$ ...

ln: Der natürliche Logarithmus - Basis e
$e^x = a \iff \ln(a) = x$

Exponentialfunktionen mit einer beliebigen Basis a > 0 lassen sich als
e-Funktionen darstellen.
Es gilt: $f(x) = a^x = (e^{ln(a)})^x = e^{ln(a) \cdot x}$
Für die Ableitungsfunktion gilt dann
$f'(x) = \ln(a) \cdot e^{ln(a) \cdot x}$
$= \ln(a) \cdot a^x$
Außerdem ist F mit
$F(x) = \frac{1}{ln(a)} \cdot e^{ln(a) \cdot x} = \frac{1}{ln(a)} \cdot a^x$
eine Stammfunktion von f

2 Der natürliche Logarithmus

Für eine Zahl $b \in R$, b > 0 ist ihr natürlicher Logarithmus ln(b) der Exponent, mit dem man e potenzieren muss, um b zu erhalten.
$e^x = b$
$\ln(e^x) = \ln(b)$
$x \cdot \ln(e) = \ln(b)$
$x = \ln(b)$
$\Rightarrow e^{ln(b)} = b$ und $\ln(e^b) = b$

3 Logarithmengesetze

1. $\ln(x^n) = n \cdot \ln(x)$
2. $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$
3. $\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$

3.1 Beweise

1. $e^{ln(x^n)} = x^n = x \cdot x \cdot x \cdot ... \cdot x$ | $\leftarrow$ n-mal
$= e^{ln(x)} \cdot e^{ln(x)} \cdot ... \cdot e^{ln(x)}$ | $\leftarrow$ n-mal
$= e^{n \cdot ln(x)}$
$\Rightarrow \ln(x^n) = n \cdot \ln(x)$

2. $e^{ln(x \cdot y)} = x \cdot y$
$= e^{ln(x)} \cdot e^{ln(y)} = e^{ln(x)+ln(y)}$
$\Rightarrow \ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$

3. $e^{ln(x \cdot y)} = x \cdot y$
$= e^{ln(x)} \cdot e^{ln(y)} = e^{ln(x)-ln(y)}$
$\Rightarrow \ln(x \cdot y) = \ln(x) - \ln(y)$

4 Exponentialfunktionen

$f(x) = a \cdot b^x$
$a > 0$
$b < 0$
$b \neq 1$

f(x) ist streng monoton $\frac{steigend,}{fallend,}$ wenn $\frac{b>1}{b<1}$.

Was bedeutet das, wenn man die Exponentialfunktion als e-Funktion schreibt?
$f(x) = a \cdot e^{ln(b) \cdot x}$
$\ln(b) > 0$ & $b > 1$ | $\leftarrow$ Exponentielle Zunahme
$\ln(b) < 0$ & $0 < b < 1$ | $\leftarrow$ Exponentielle Abnahme

5 Beschränktes Wachstum

Beschränktes Wachstum mit der Schranke S liegt vor, wenn die Differenz zwischen S und dem Bestand zum Zeitpunkt t exponentiell abnimmt
Den Bestand kann man mit einer Funktion vom Typ
$f(t) = S - c \cdot a^t$ $(0 < a < 1)$
bzw. $f(t) = S - c \cdot e^{ln(a) \cdot t}$ $(\ln(a) < 0)$, $(c > 0)$
bestimmen
Dabei ist $c = S - f(0)$