Mathe LK

Niklas Karoli

November 22, 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Abstandprobleme

1.1 Punkt - Punkt

P $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ Q $\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$

d(P;Q) $= |\vec{PQ}|$

$$|\begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 \end{pmatrix}|$$

$$= \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}$$

1.2 Hesse‘sche Normalenform

Eine Ebenengleichung der Form
E : $(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$
heißt $\underline{Hesse‘scheNormalenformel}$

Normalenvektor der Länge 1 d.h. $|\vec{n_0}| = 1$
$\vec{n_0} = \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n}$

2 Lotfußpunktverfahren

E : x_1 - x_2 - x_3 = 2
$ax + by + cz = d$

- a = 1
- b = -1
- c = - 1
- d = 2

Normalenvektor $\vec{n}$ = (1, - 1, - 1)
Formel zur Berechnung vom Abstand d vom Punkt F zur Ebene E:

d = $\frac{|ax_1+by_1+cz_1-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

d = $\frac{|1\cdot7+(-1)\cdot(-2)+(-1)\cdot(-2)-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}}$ = $3 \cdot \sqrt{3}$

F = P + t · $\vec{n}$ = (7, -2, -2) + t · (1, -1, -1)
In die Ebenengleichung einsetzen:
$x_F - y_F - z_F = 2$
(7 + t) - (-2 -t) - (-2 -t) = 2
Vereinfachen:
7 + t + 2 + t + 2 + t = 2
⇒ 11 + 3t = 2
⇒ 3t = 2 - 11
⇒ 3t = -9
⇒ t = -3
t = -3 in die Koordinate von F einsetzen:
F(7 - 3, -2 + 3, -2 + 3) = (4, 1, 1)
Der Abstand d ist also $3 \cdot \sqrt{3}$.
Die Koordinate vom Punkt F ist (4, 1, 1)

3 Abstand windschiefer Geraden

Wie Ebene - Punkt...
Idee : Bestimmen einer Hilfsebene, die h enthält und parallel zu g ist
Beispiel : g : $\vec{x} = \vec{q_1}$ + r $\cdot$ $\vec{u_1}$ = (1, -4, 2) + r $\cdot$ (0, 1, 1)
h : $\vec{x} = \vec{q_2}$ + s $\cdot$ $\vec{u_2}$ = (-3, 3, -2) + s $\cdot$ (5, 0, 1)
In Parameterform: $E_H = \vec{q_1}$ + r $\cdot$ $\vec{u_1}$ + s $\cdot$ $\vec{u_2}$ = (1, -4, 2) + r $\cdot$ (0, 1, 1) + s $\cdot$ (5, 0, 1)
Normaleneinheitsvektor bestimmen: $\vec{u_1}$ x $\vec{u_2}$ = (0, 1, 1) x (5, 0, 1) = (1, 5, -5) normiert: $\frac{1}{\sqrt{51}}$ (1, 5, -5)
d(E_H;h) = |($\vec{p}$ - $\vec{q}$) $\cdot$ $\vec{n_0}$| = |((-3, 3, -2) - (1, -4, 2)) $\cdot$ $\frac{1}{\sqrt{51}}$ $\cdot$ (1, 5, -5)| = |(-4, 7, -4) $\cdot$ $\frac{1}{\sqrt{51}}$ (1, 5, -5)| = $\frac{1}{\sqrt{51}}$ (-4 + 35 + 20) = $\frac{51}{\sqrt{51}} = \sqrt{51}$
$\Rightarrow$ d(g_1; g_2) = d(E_H; g_2)