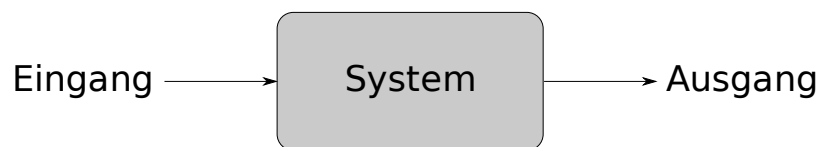
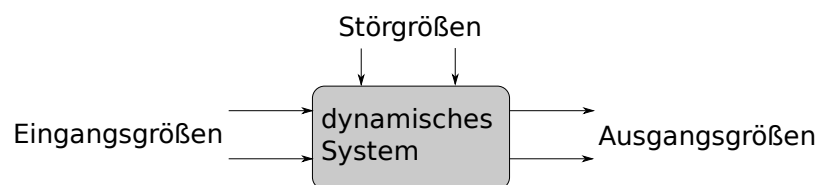

Regelungstechnik A (Grundlagen und Frequenzbereichsmethoden)

1 Gegenstand der Regelungstechnik

Satz 1.1 Die Regelungstechnik (RT) beschäftigt sich mit der selbsttätigen gezielten Beeinflussung des Verhaltens von dynamischen Systemen.

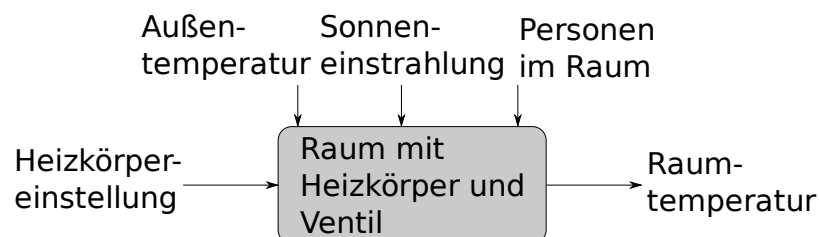


Die Eingänge werden in der RT aufgeteilt in von außen vorgebbare Eingangsgrößen und in durch die Umgebung festgelegte, störend wirkende Störgrößen. Von den Ausgängen werden nur diejenigen betrachtet, deren Verhalten unmittelbar interessiert. Ausgangsgrößen.

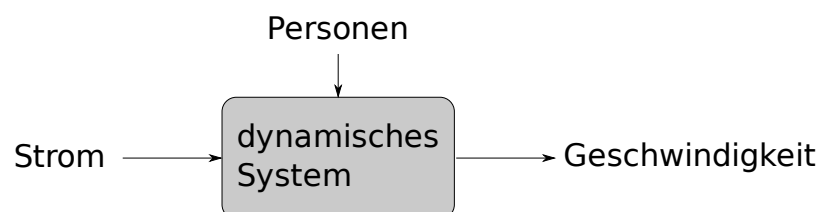


Gezielte Beeinflussung heißt: Durch Vorgabe der Eingangsgrößenverläufe soll erreicht werden, dass die Ausgangsgrößen trotz Störeinwirkung ein gewünschtes Sollverhalten aufweisen.

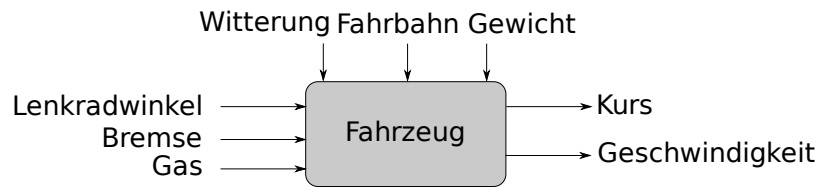
Beispiel 1 (Raumtemperatur)



Beispiel 2 (Personenaufzug)



Beispiel 3 (Auto fahren)



Allgemeine Aufgabenstellung der RT

Entwurf und Bereitstellung einer Einrichtung, die - hinzugefügt zur Strecke - die Eingangsgrößen automatisch im gewünschten Sinne generiert. Selbsttätige gezielte Beeinflussung.

Generelle Vorgehensweise zur Lösung

1. mathematische Modellbildung der Strecke zur Abstraktion von deren physikalischen Ausprägung und Ermöglichung der Anwendung universell einsetzbarer, systemtheoretisch fundierter Vorgehensweisen in Schritt 2. und 3.
2. Analyse des Streckenverhaltens
3. Entwurf der Steuer- und Regeleinrichtung
4. Realisierung der Steuer- und Regeleinrichtung
5. Inbetriebnahme und Erprobung des Gesamtsystems

2 Modellbildung der Strecke

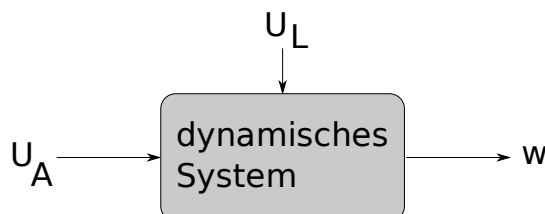
Satz 2.1 *Modellbildung der Strecke durch mathematische Beschreibungen der Wirkungszusammenhänge zwischen den Systemgrößen, die für die Aufgabenstellung relevant sind.*

Ein Modell ist eine aufgabenspezifische Vereinfachung der Realität. In der RT bewährte Modellierungsform:

2.1 Darstellung der Strecke als Strukturbild (Blockschaltbild)

2.1.1 Beispiel: Permanent erregter Gleichstrommotor

- Geräteschema: (siehe Beiblatt 4)
- Systemdarstellung:



Ermittlung der beschreibenden Gleichungen:

$$u_l(t) = L \frac{di_A(t)}{dt} \longrightarrow \frac{di_A(t)}{dt} = \frac{1}{L_A} u_l(t)$$
$$\xrightarrow{\text{Integration von 0 bis } t} i_A(t) = i_A(0) + \frac{1}{L_A} \int_0^t u_l(\tau) d\tau \quad (2.1)$$

$$u_A(t) = u_R + u_L + u_{ind}$$
$$\longrightarrow u_L(t) = u_A(t) - u_R(t) - u_{ind}(t) \quad (2.2)$$

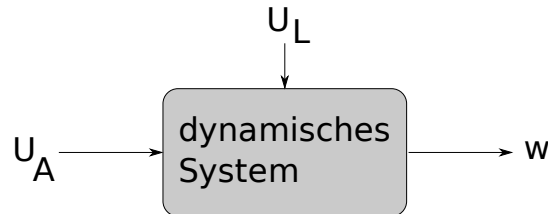
$$u_R(t) = R_A i_A(t) \quad (2.3)$$

$$u_{ind}(t) = c \phi_F \omega(t) \quad (2.4)$$

Rotierender Anker + Welle:

$$J\dot{\omega} = M_{\Sigma} \longrightarrow \dot{\omega} = \frac{1}{J}M_{\Sigma}(t)$$

$$\xrightarrow{\text{Integration von 0 bis t}} \omega(t) = \omega(0) + \frac{1}{J} \int_0^t M_z(\tau) d\tau \quad (2.5)$$



- Ermittlung der beschreibenden Gleichungen:

Ankerstromkreis

$$u_L = L \frac{di_A}{dt} \rightarrow \frac{di_A(t)}{dt} = \frac{1}{L} u_L(t) \xrightarrow{\int_0^t} i_A(t) = i_A(0) + \frac{1}{L_A} \int_0^t u_L(\tau) d\tau \quad (2.6)$$

$$u_A = u_R + u_L + u_{ind} \rightarrow u_L(t) = u_A(t) - u_R(t) - u_{ind}(t) \quad (2.7)$$

$$u_R(t) = R_A i_A(t) \quad (2.8)$$

$$U_{ind} = c\phi\omega(t) \quad (2.9)$$

Rotierender Anker und Welle

$$J\dot{\omega} = M_{\Sigma} \rightarrow \dot{\omega}(t) = \frac{1}{J}M_{\Sigma}(t) \xrightarrow{\int_0^t} \omega(t) = \omega(0) + \frac{1}{J} \int_0^t M_{\Sigma}(\tau) d\tau \quad (2.10)$$

$$M_{\Sigma}(t) = M_A(t) - M_L(t) \quad (2.11)$$

$$M_A(t) = c\phi_F L_A(t) \quad (2.12)$$

- Übersetzung der Gleichungen ins Strukturbild TODO:BILD

Satz 2.2 *Strukturbild = Graphische Darstellung der Systemregeln (durch Blöcke und Wirkungs-
linien). Dadurch anschaulich und Wirkungsrichtungen sofort ersichtlich.*

2.1.2 Die Bausteine des Strukturfeldes

- gerichtete Linien geben die Systemgrößen im Zeitbereich und ihre Wirkrichtungen wieder
- Blöcke, Rechtecke und Kreise beschreiben die Funktionsbeziehung zwischen den Systemgrößen und ordnen jedem Zeitverlauf der Eingangsgrößen eindeutig einem Zeitverlauf der Ausgangsgröße zu.
→ Jeder Block wirkt als Übertragungsglied (ÜG)

Darstellungsmöglichkeiten

- mittels Zuordnungsvorschrift bzw. Systemoperator \mathcal{S} (vgl. obiges Beispiel)

$$y(t) = \mathcal{S} \{u(t)\}$$

TODO: Blockdiagramm

- bei LZI-ÜG weiterhin
mittels Übertragungsfunktion ÜG

$$y(t) \bullet \longrightarrow Y(s) = G(s)U(s)$$

TODO: Blockdiagramm

mittels Sprungantwort $y_\sigma(t)$ ($= y(t)$ für $u(t) = \text{Einheitsprung } \sigma(t)$)

$$y(t) = g(t) * u(t) = \dot{y}_\sigma(t) * u(t) \\ (\text{da } g(t) = \dot{y}_\sigma(t) \text{ gilt.})$$

TODO: Blockdiagramm

- Zusammenstellung elementarer ÜG
(nicht in noch einfachere Bestandteile zerlegbar):
→ siehe **Beiblatt: 5**

Hinweis 2.1 Totzeitglied

- typisch für Transportprozesse
- ÜF rational approximierbar z.B. gemäß

$$e^{-T_t s} \approx \frac{1 - 0,5T_t s}{1 + 0,5T_t s}$$

Häufig auftretende Kombinationen elementarer ÜG werden zu zusammengesetzten ÜG zusammengefasst. → siehe **Beiblatt: 6**

Aufbau des PT_1 - Gliedes aus elementaren ÜG

$$T\dot{y} + y = Ku \quad (2.13)$$

$$\rightarrow \dot{y} = \frac{1}{T}(Ku - y) = \frac{K}{T}(u - \frac{1}{K}y) \quad (2.14)$$

$$y(t) = y(0) + \frac{K}{T} \int_0^t v(\tau) d\tau \text{ mit } v(t) = u(t) - \frac{1}{K}y(t) \quad (2.15)$$

TODO: Blockschaltbild

Normierte PT_2 -Sprungantworten für $D \leq 1$

→ siehe **Beiblatt: 7**

2.1.3 Weiteres Beispiel: Magnetlager als Fahrzeug Tragsystem

- Geräteschema siehe **Beiblatt : 8**
TODO: Blockdiagramm
- Beschreibende Gleichungen und Strukturbild siehe **Beiblatt : 9**

2.2 Modellvereinfachung durch Betriebspunkt-Linearisierung

2.2.1 Betriebspunkt bzw. Arbeitspunkt eines Systems

- Betriebspunkt (BP) = System-Ruhezustand, in dem die Ausgangsgröße y den stationären Sollwert $y_{s\infty}$ annimmt.
- Ruhezustand (Ruhelage, Gleichgewichtslage, stationärer Zustand) = Systemzustand, in dem alle Systemgrößen konstant und damit ihre Zeitableitung gleich null sind. Zu seiner Bestimmung entweder die Systemgleichungen heranziehen und darin die Ableitungen null setzen oder im Strukturbild in der Übertragungsfunktion $s = 0$ setzen, außer beim ***I – Glied***:
- Dort muss die Eingangsgröße Null sein. Für die BP-Bestimmung dann noch $y \stackrel{!}{=} y_{s\infty}$ setzen.

Beispiel Magnetlager

- Für $F_{zb} = 0$ soll $x_B = x_{s\infty} = \frac{d}{2}$ gelten.
- Einzustellendes i ?

$$\left. \begin{matrix} v_B = 0 \\ F_{\Sigma B} = 0 \end{matrix} \right\} \xrightarrow{F_{zB}=0} F_{mB} = mg$$
$$F_{mB} = K_m \frac{i_B^2}{(d - x_B)^2} \xrightarrow[x_B = \frac{d}{2}]{F_{mB}=mg} i = \sqrt{\frac{mg}{K_m}} \cdot \frac{d}{2}$$

2.2.2 Durchführung der Linearisierung

1. Übergang von den Absolutgrößen $u(t)$, $y(t)$ zu den BP-Abweichungen

$$\Delta u(t) = u(t) - u_B \quad \Delta y(t) = y(t) - y_B$$

Ein lineares ÜG $y(t) = \mathcal{S}\{u(t)\}$ geht dabei über in

$$\Delta y(t) = y(t) - y_B \quad (2.16)$$

$$= \mathcal{S}\{u(t)\} - \mathcal{S}\{u_B\} \quad (2.17)$$

$$= \mathcal{S}\{u_B\} + \mathcal{S}\{\Delta u(t)\} - \mathcal{S}\{\Delta u_B\} \quad (2.18)$$

$$\rightarrow \Delta y(t) = \mathcal{S}\{\Delta u(t)\}$$

d.h. lineare ÜG bleiben unverändert

Für ein nicht lineares ÜG folgt:

$$\Delta y(t) = \mathcal{S}\{u_B(t) + \Delta u(t)\} - \mathcal{S}\{u_B\} \quad (2.19)$$

$$= \tilde{\mathcal{S}}\{\Delta u(t)\} \neq \tilde{\mathcal{S}}\{\Delta u_B\} \quad (2.20)$$

d.h. Nichtlineare ÜG ändern dabei ihre Funktionalbeziehung, bleiben aber i.A. nichtlinear

Beispiel: KL-Glied $y = F(u)$

TODO: Graph

2. Schritt:

Annahme kleiner Abweichungen und lineare Approximation der nichtlinearen Beziehungen durch Taylor-Reihenentwicklung mit Abbruch nach dem linearen Term

z.B. KL-Glied

$$y(t) = F(u(t)) \xrightarrow{u=u_B+\Delta u} \quad (2.21)$$

$$y(t) = F(u_B + \Delta u(t)) \quad (2.22)$$

$$y(t) = \underbrace{F(u_B)}_{y_B} + F'(u_B) \cdot \Delta u(t) + R(\Delta u(t)^2) \quad (2.23)$$

$$(2.24)$$

Linearisierung durch Weglassen des Restglieds

→ nichtlineare ÜG gehen in P-Glieder mit der Verstärkung $F'(u_B)$ über.

Beispiel Magnetlager

- Linearisierung der Magnetkraft-Beziehung

$$F_M = F_M(i, x) \xrightarrow[i=i_B+\Delta i]{x=x_B+\Delta x} F_M = F_M(i_B, x_B) + \left. \frac{\delta F_M}{\delta i} \right|_B \Delta i + \left. \frac{\delta F_M}{\delta x} \right|_B \Delta x$$

$$\rightarrow \Delta F_M = F_M - F_{MB} = K_i \Delta i + K_x \Delta x \text{ mit}$$

$$K_i = \left. \frac{\delta F_M}{\delta i} \right|_B = 2K_m \frac{i_B}{(d - x_B)^2} = \dots = 4 \frac{\sqrt{mgK_m}}{d}$$

$$K_x = \left. \frac{\delta F_M}{\delta x} \right|_B = 2K_m \frac{i_B^2}{(d - x_B)^3} = \dots = 4 \frac{mg}{d}$$

- Betrachtung der Kräftesumme:

$$F_\Sigma = F_M - mg - F_z$$

$$\rightarrow F_{zB} + \Delta F_\Sigma = F_{MB} + \Delta F_M - mg - F_{zB} - \Delta F_z$$

$$\rightarrow \Delta F_\Sigma = \Delta F_M - \Delta F_z$$

- Strukturfeld des linearisierten Systems

TODO: Strukturfeld des linearisierten Systems

2.3 Modellvereinfachung der Strukturbildumformung

- Beispiel Magnetlager; siehe **Beiblatt: 10**

$$\Delta X(s) = \frac{1}{s^2} (R(s) + K_x \Delta X(s)) \rightarrow \Delta X(s) = \frac{\frac{1}{m}}{1 - \frac{1}{m} K_x} R(s) - 1 \frac{1}{K_x} \quad (2.25)$$

$$= \frac{-\frac{1}{K_x}}{1 - (\frac{m}{K_x}) s^2} R(s) \quad (2.26)$$

- 2 Umformungsgrundoperationen:
Vertauschen der Reihenfolge von ÜG und Zusammenfassen mehrere ÜG. Dabei geltende elementare Regeln: siehe **Beiblatt: 11**
- Alternative zur Umformung im Strukturfeld: beschreibende Gleichungen aus Strukturbild ablesen, ineinander einsetzen und nach y als Funktion von u und z auflösen, dann Rückübersetzung in ein Strukturbild. Beispiele dazu: siehe **Beiblatt: 12**
- Meist Kombination beider Vorgehensweisen!

2.4 Allgemeines Strukturbild linearer Einganggrößenstrecken

- entspricht dem gemeinsamen Aufbau beider Beispielsysteme, d.h.
TODO: Strukturbild

3 Analyse des Streckenverhaltens

am Beispiel des Stellverhaltens mit der ÜF $G(s) = G_1 G_2$

3.1 Betrachtung der Strecken ÜF

3.1.1 Polynomform der ÜF

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{Z(s)}{N(s)}$$

, wobei

- $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ mit $a_n \neq 0 \wedge b_m \neq 0$
- $m = \text{grad } Z(s)$: Zählergrad
- $n = \text{grad } N(s)$: Nennergrad bzw. Systemordnung
- $\delta = m - n$: Differenzgrad bzw. Relativgrad des Systems

$$\left. \begin{array}{l} \delta > 0 \text{ verzögerndes} \\ \delta = 0 \text{ nicht verzögerndes} \\ \delta < 0 \text{ differenzierendes} \end{array} \right\} \text{Verhalten des Systems}$$

Da im allgemeinen $n \geq m$, d.h. $\delta \geq 0$ ist δ ein Maß für die verzögernde Wirkung eines Systems (siehe **Beiblatt: 13**)

3.1.2 Pol- Nullstellenform der ÜF

Sind n_1, \dots, n_m bzw. p_1, \dots, p_n die (reellen oder konjugiert komplexen) Wurzeln von $Z(s) = 0$ bzw. $N(s) = 0$ so folgt:

$$G(s) = K \frac{\prod_{j=1}^m (s - n_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \text{ mit } K = \frac{b_m}{a_n}$$

Dabei gilt:

- $|G(s = n_j)| = 0$, falls $n_j \neq p_1, \dots, p_n$
Dieses n_j ist eine NS s_0 der ÜF
- $|G(s = p_i)| = \infty$, falls $p_i \neq n_1, \dots, n_m$
Dieses p_i ist eine PS s_∞ der ÜF

Im weiteren gelte stets: $p_i \neq n_j \forall i, j$!

- entspricht dem gemeinsamen Aufbau beider Beispielsysteme, d.h.

TODO: Strukturbild

- obige Form der ÜF ermöglicht ihre graphische Darstellung in der komplexen s-Ebene als PN-Diagramm. TODO: Bild

- Zusammenhänge zwischen Pol- und Nullstellenlage und Zeitverhalten des Systems:

$$\operatorname{Re}\{p_i\} < 0 \forall_i \leftrightarrow \text{System mit } \delta \geq 0 \text{ BIBO-stabil}$$

- Weiterhin Betrachtung der Sprungantwort (bei Annahme endlicher Pole $p_i \neq 0$)

$$y_\sigma(s) = G(s) \frac{1}{s} \stackrel{PBZ}{=} \frac{r_0}{s} + \sum_{k=1}^N \frac{r_i}{s - p_i}$$

$$\bullet \rightarrow y_\sigma(t) = (r_0 + \sum_{k=1}^N r_i e^{p_i t}) \sigma(t)$$

- Zu den Polstellen gehörende Zeitverläufe: siehe Beiblatt: 14

- \rightarrow Beiträge stabiler Pole klingen ab, und zwar umso schneller, je weiter links sie liegen.

Weit links liegende Pole sind nicht dominant (d.h. nicht prägend für das Zeitverhalten und somit ggf. vernachlässigbar), wohl aber nahe der j-Achse liegende sowie instabile Pole (sofern nicht Nullstellen nahe dabei, was

$$r_\nu = y_\sigma(s)(s - p_\nu)|_{s=p_\nu} \stackrel{\nu \geq 0}{=} K \frac{\prod_j (p_\nu - n_j)}{p_r \prod_j (p_\nu - p_i)} \approx 0$$

zur Folge hat, falls $n_j \approx p_\nu$ gilt.

- Weiterhin gilt: $r_0 = \sigma(s=0) = K \frac{\prod_j (-n_j)}{\prod_i (-p_i)}$ falls ein $n_j = 0$, dann $r_0 = 0$, d.h. $y(t) \rightarrow 0 \forall u(t) = N_0 \sigma(t)$ mit U_0 beliebig.
- Hat ein System eine NS bei $s = 0$, so sind y-Stationärwerte $\neq 0$ nicht erzielbar!
- Hat eine stabile Strecke K NS mit $\operatorname{Re}\{n_j\} > 0$ (nichtminimalphasige Strecke), so so schneidet $y_\sigma(t)$ für $t > 0$ k-mal die Nulllinie.
- TODO Strukturbild
- gezielte Beeinflussung schwieriger als im minimalphasigen Fall

3.1.3 Zeitkonstantenform der ÜF

Folgt durch ausklammern der Pole und NS $\neq 0$

- reeller Pol $p_i \neq 0$: $s - p_i = -p_i(1 + \frac{1}{-p_i}s)$ mit $T_i = \frac{1}{-p_i} (> 0 \text{ für } p_i < 0)$:
Zeitkonstante zum reellen Pol p_i

- kleines großes $T_i > 0 \rightarrow$ kleine große Abklingzeit (siehe **Beiblatt: 14**)
- konjugiert komplexes Polpaar $p_i, p_n = p_i^*$:

$$(s - p_i)(s - p_i^*) = p_i p_i^* \left(1 + \frac{1}{-p_i} s\right) \left(1 + \frac{1}{-p_i^*} s\right) \quad (3.1)$$

$$= p_i p_i^* \left(1 + \frac{-(p_i + p_i^*)}{p_i p_i^*} s + \frac{1}{p_i p_i^*} s^2\right) \quad (3.2)$$

$$= |p_i|^2 \left(1 + \frac{-2\sigma_i}{|p_i|^2} s + \frac{1}{|p_i|^2} s^2\right) \quad (3.3)$$

$$= \frac{1}{T_i^2} (1 + 2D_i T_i s + T_i^2 s^2) \quad (3.4)$$

$$\text{mit } \begin{cases} T_i > 0 = \frac{1}{|p_i|^2} = \text{Zeitkonstante} \\ D_i = \frac{-\sigma_i}{|p_i|^2}, |D_i| = \text{Dämpfung} \end{cases}$$

- kleines/ großes $\frac{T_i}{D_i} = \frac{1}{\sigma_i} > 0$ **Beiblatt: 14** \rightarrow kleine/ große Abklingzeit der Einhüllenden
- großes/ kleines $D_i \rightarrow$ geringe/ hohe Schwingneigung (siehe **Beiblatt: 7**)
- entsprechend $T_{zj} = \frac{1}{-n_j}$ bzw. $T_{zj} = \frac{1}{|n_j|}$, $D_{zj} = \frac{-\text{Re}\{n_j\}}{|n_j|}$
bei reellen bzw. konjugiert komplexen Nullstellen
- Damit resultiert als ÜF nach dem Ausklammern der Pole und Nullstellen $\neq 0$:

$$G(s) = K \frac{(1 - T_{zj}s) \dots (1 + D_{z\mu} T_{z\mu} s + T_{z\mu}^2 s^2)}{s^q (1 + T_1 s) (1 + t_2 s) \dots (1 + 2D_\nu T_\nu s + T_\nu^2 s^2)}$$

mit $K = k \frac{\prod n_j}{\prod_{p_i \neq 0} (-p_i)}$: Verstärkungsfaktor der Strecke (meist Annahme: $K > 0$)

- q: Anzahl der freien Integrierer/ Differenzierer (bei $q < 0$) in der Strecke (Meist $q = 0, 1, 2$ (Strecke mit P-/I-/ Doppel-I Verhalten))
- E/A Stabilität $q=0$ und $T_\nu D_\nu > 0 \forall \nu$

3.2 Betrachtung des Strecken-Frequenzgang

3.2.1 Definition:

Der Frequenzgang (FG) eines LZI-Glieds ist dessen ÜF $G(s)$ über der $j\omega$ Achse, d.h.
 $G(s) \xrightarrow{s=j\omega} G(j\omega)$

Zeitkonstantenform der ÜF: $\xrightarrow{s=j\omega} G(j\omega) = K \frac{(1+T_{z1}j\omega)\dots}{(j\omega)^2(1+T_1j\omega)\dots}$

Beispiel: PT_1 -Glied:

$$G(s) = \frac{K}{1+Ts} \xrightarrow{s=j\omega} G(j\omega) = \frac{K}{1+Tj\omega} = \frac{K}{1+T^2\omega^2} + j \frac{-KT\omega}{1+T^2\omega^2} = \underbrace{\frac{K}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}}_{|G(j\omega)|} e^{j \underbrace{(-\arctan(T\omega))}_{\arg G(j\omega)}}$$

3.2.2 Bedeutung des FG für das System-Zeitverhalten