12.3.14
Lek 1 56

§6 Integration rationaler Funktionen

(Partialbruchzerlegung)

Sei $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ eine rationale Funktion.

d.h. P, Q sind Polynome mit reellen Koeffizienten.

Die Partialbruchzerlegung ist eine Darstellung von R(x) als Summe von "elementaren" rationale Funktionen. Sie basiert auf einem Korollar des Fund. Satzes der Algebra, das sagt, dass jedes relle Polynom ein Produkt von linearen und quadratischen Polynomen mit $\mathbb{R}$-Koeffizienten)

(Satz 6.1.6 Struwe)

Satz 6.27 (Partialbruchzerlegung)

Sei $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ eine rationale Funktion.

Dann $R(x) = P_1(x) + \sum_{i=1}^{n} R_i(x) + \sum_{j=1}^{m} S_j(x)$

wobei P_1 = polynom

$$R_i(x) = \frac{a_{i1}}{(x-x_i)} + \frac{a_{i2}}{(x-x_i)^2} + \dots + \frac{a_{ir_i}}{(x-x_i)^{r_i}}$$

$$S_j(x) = \frac{b_{j1}x + d_{j1}}{((x-\alpha_j)^2+\beta_j^2)} + \frac{b_{j2}x + d_{j2}}{((x-\alpha_j)^2+\beta_j^2)^2} + \dots + \frac{b_{jm_j}x + d_{jm_j}}{(\quad)^{m_j}}$$

Die $\frac{1}{(x-a)^r}$, $\frac{bx+d}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^m}$ werden "elementare rationale Funktionen" genannt und wir wollen dafür Stammfunktionen bestimmen.

Bmk. 1) Das Polynom $P_1(x)$ tritt nur auf, falls $\deg P > \deg Q$

In diesen Fall berechnet man $P_1(x)$ mit Polynom division und es gilt
$$P(x) = P_1(x) Q(x) + P_2(x) \quad \text{mit } \deg P_2 < \deg Q$$

2) Das Nennerpolynom $Q(x)$ besitze

- die reellen Nullstellen x_i mit Vielfachheit r_i

- die komplexen Nullstellen $z_j = \alpha_j + i\beta_j$ mit Vielfachheit m_j und damit komplex konjugierte Nullstellen $\overline{z_j} = \alpha_j - i\beta_j$

3) Unbekannte Parameter, die bestimmt werden müssen

a_{ik} $\quad k = 1, \dots r_i \quad , i = 1, \dots n$

b_{je}, d_{je} $\quad l = 1, \dots, m_j \quad , j = 1, \dots m$.

Diese Parameter werden durch Koeffizientenvergleich berechnet, die rechte Seite wird dabei auf den Hauptnenner gebracht.

Bsp.: $R(x) = \frac{1-x}{x^2(x^2+1)}$

Ansatz: $R(x) = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{b_1 x + d_1}{x^2+1}$

$$\Rightarrow 1 - x = x(x^2+1)a_1 + a_2(x^2+1) + x^2(b_1x+d_1)$$

Ausmultiplizieren:

$$1-x = (a_1+b_1)x^3 + (a_2+d_1)x^2 + a_1 x + a_2$$

Koeffizientenvergleich:

$a_1 + b_1 = 0 \qquad a_2 + d_1 = 0 \qquad a_1 = -1 \qquad a_2 = 1$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1-x}{x^2(x^2+1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{x-1}{x^2+1}$$

<u>Grundtypen der Integration rationaler Funktionen</u>

<u>Typ 0</u>: Polynom: $\int \sum a_n x^n \, dx = \sum a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

<u>Type I</u> Inverse Potenzen

$$\int \frac{dx}{(x-x_0)^r} = \begin{cases} \log|x-x_0| + c & \text{für } r=1 \\ \frac{1}{(1-r)} \cdot \frac{1}{(x-x_0)^{r-1}} & \text{für } r \geq 2 \end{cases}$$

Type II

$$\int \frac{bx+d}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^m}\,dx$$

Substitution: $x-\alpha=\beta t$
$dx=\beta\,dt$

ergibt $\displaystyle\int \left(\frac{b\,[\beta t+\alpha]+d}{(t^2+1)^m\,\beta^{2m}}\right)\beta\,dt$

Dies hat die allgemeine Form

$$\int \frac{Ct+D}{(t^2+1)^m}\,dt = C\int \frac{t}{(t^2+1)^m}\,dt + \int \frac{D}{(t^2+1)^m}\,dt$$

(2.1) $\displaystyle\int \frac{t}{(t^2+1)^m}\,dt$ mit $t^2+1=u$
$2t\,dt=du$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{du}{u^m} = \begin{cases} \dfrac{u^{-m+1}}{2(1-m)} & m\geq 2 \\ \dfrac{1}{2}\ln|u| & m=1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2(1-m)}\dfrac{1}{(t^2+1)^{m-1}} & m\geq 2 \\ \dfrac{1}{2}\ln|1+t^2| & m=1 \end{cases}$$

(2-2) $\int \frac{dt}{(t^2+1)^m}$

For $m=1$: $\int \frac{dt}{(t^2+1)} = \arctan(t) + C$

For $m>1$ $I_m := \int \frac{dt}{(t^2+1)^m}$

Partielle Integration ergibt:

$$I_m = \int \underbrace{1}_{v'} \cdot \underbrace{\frac{1}{(t^2+1)^m}}_{u} dt = \frac{t}{(t^2+1)^m} + \int \frac{t \cdot m 2t}{(t^2+1)^{m+1}} dt$$

$$= \frac{t}{(t^2+1)^m} + 2m \int \frac{t^2+1-1}{(t^2+1)^{m+1}} dt$$

$$= \frac{t}{(t^2+1)^m} + 2m \int \frac{1}{(t^2+1)^m} dt - 2m \int \frac{1}{(t^2+1)^{m+1}} dt$$

$$\Rightarrow I_m = \frac{t}{(t^2+1)^m} + 2m \{ I_m - I_{m+1} \}$$

woraus $I_{m+1} = \frac{1}{2m} \left[\frac{t}{(1+t^2)^m} + (2m-1) I_m \right].$

z.B $I_2 = \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{t}{(1+t^2)} + I_1\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{t}{(1+t^2)} + \arctan t\right]$

12.3.14
Lec 2

6.28

Bsp: ① $\frac{1}{x^2-3x-4} = \frac{1}{(x-4)(x+1)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+1}$

$\Rightarrow A(x+1) + B(x-4) = 1$

@ $x=4 \Rightarrow A \cdot 5 = 1 \Rightarrow A = 1/5$

@ $x=-1 \Rightarrow B(-5) = 1 \Rightarrow B = -1/5$.

$\int \frac{1}{x^2-3x-4}\,dx = \frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+1}\right)dx$

$= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-4}{x+1}\right| + c.$

② $\frac{9}{x^3-3x-2} = \frac{9}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{(x+1)^2}$

$A(x+1)^2 + (Bx+C)(x-2) = 9$

@ $x=-1 \Rightarrow (-B+C)(-3) = 9$

@ $x=2 \Rightarrow A(9) = 9 \Rightarrow \boxed{A=1}$

$x=0 \Rightarrow A + C(-2) = 9 \Rightarrow -2C = 8 \Rightarrow C = -4$

$(-B + C) = -3 \Rightarrow B = C + 3 = -1$

$$\Rightarrow \frac{9}{x^3-3x-2} = \frac{1}{x-2} + \frac{-x-4}{(x+1)^2}$$

$$\int \frac{9}{x^3-3x-2}\,dx = \int \left(\frac{1}{x-2} + \frac{-x-1}{(x+1)^2} - \frac{3}{(x+1)^2} \right) dx$$

$$= \ln|x-2| - \ln|x+1| + \frac{3}{x+1} + C.$$

$$= \ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + \frac{3}{x+1} + C.$$

§6.5 Das Uneigentliche Integral.

Sei f eine unbeschränkte Funktion. Dann ist f nicht R-integrierbar

z.B. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ hat keinen Sinn.

Aber $\forall \varepsilon > 0$ ist $\frac{1}{\sqrt{x}} \in [\varepsilon, 1]$ stetig

also integrierbar. Der Wert des Integral

ist $\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1 = 2 - 2\sqrt{\varepsilon}$

also existiert $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2$.

Dies ist ein Beispiel von uneigentlichen R-integral.

(Defn 6.4.1 Struc)

Defn 6.29: Sei f eine Funktion auf einem offenen Interval (a,b), deren Einschränkung auf jedes kompakte Teilinterval $[a', b']$ integrierbar ist. Dann das uneigentliche Integral

von f von a bis b definiert als

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{a'\searrow a} \lim_{b'\nearrow b} \int_{a'}^{b'} f(x)\,dx$$

falls diese Grenzwerte existieren
(a und b können $\pm\infty$ sein)

Bmk 6.30 (1) Ist f schon auf ganz $[a,b]$ definiert und integrierbar, so existiert das uneigentliche Integral und stimmt mit dem üblichen bestimmten Integral überein

(2) Ist f schon $[a,b)$ definiert und auf jedem kompakten Teilintervall der Form $[a,b']$ integrierbar, so gilt schon

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b'\nearrow b} \int_a^{b'} f(x)\,dx$$

Bsp: $\int_0^\infty e^{-x} = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x}\,dx = \lim \left(-e^{-x} \Big|_0^b \right)$

$= \lim_{b\to\infty} \left(-e^{-b} + 1 \right) = 1$

(3) Vorsicht: Die beiden Grenzwerte müssen im allgemeinen unabhängig voneinander genommen werden.

Bsp: $\int_{-b}^b x\,dx = 0 \quad \forall b>0$, und daher

$$\lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} x\,dx = \lim\left(\frac{b^2}{2} - \frac{b^2}{2}\right) = \lim_{b\to\infty} 0 = 0.$$

Die einzelnen Grenzwerte von $\int_a^b x\,dx$ für

$b \to \infty$ und $a \to -\infty$ existieren dagegen nicht

$$\left(\int_a^b x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right)$$

und somit auch nicht das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx.$$

(4) Alle Grundeigenschaften und Integrationstechniken für das bestimmte Integral gelten ebenso für das uneigentliche Integral

Als Beispiel beweisen wir folgendes nützliches Konvergenzkriterium für Reihen

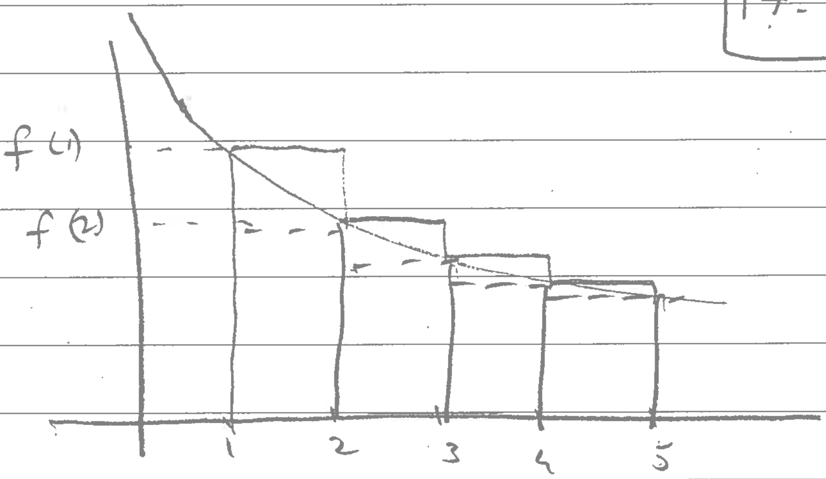
Satz 6,30 (Satz 6.4.1 Skript) Sei $f: [1,\infty) \to \mathbb{R}_+$ monotone fallend. Dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ genau dann wann $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ existiert

In diesem Fall gilt:

$$0 \le \sum_{k=1}^{\infty} f(k) - \int_1^{\infty} f(x)\,dx \le f(1)$$

17.3.14

Beweis



$$f(1) + f(2) + \dots + f(n-1) \ge \int_1^n f(x)\,dx \ge f(2) + \dots + f(n)$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) - f(n) = \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \ge \int_1^n f(x)\,dx \ge \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) = \sum_{k=1}^{n} f(k) - f(1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) - f(n) \ge \int_1^n f(x)\,dx \ge \sum_{k=1}^{n} f(k) - f(1)$$

$$\Rightarrow \quad f(n) \le \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\,dx \le f(1) \quad (*)$$

Aus $\sum_{k=1}^{n-1} f(k) \ge \int_1^n f(x)\,dx$ folgt das,

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) < \infty \Rightarrow \int_1^{\infty} f(x)\,dx < \infty$$

und

Aus $\int_1^n f(x)\,dx \geq \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1)$

folgt dass $\int_1^\infty f\,dx < \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^\infty f(k) < \infty$.

Aus (*) folgt $0 < f(n) \leq \sum_{k=1}^\infty f(k) - \int_1^\infty f(x)\,dx \leq f(1)$.

(? p 6.4.2 Strom)

Bsp. 6.31 ① $\zeta(s) = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^s}$ existiert für alle $s > 1$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-s}\,dx = \lim \begin{cases} \log|b| & s=1 \\ \left.\frac{x^{-s+1}}{1-s}\right|_1^b & s>1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \text{divergent} & \text{falls } s=1 \\ \text{konv. gegen } \frac{1}{s-1} & s\geq 1 \end{cases}$$

und

$$0 \leq \sum_{n=1}^\infty n^{-s} - \int_1^\infty f(x)\,dx \leq f(1) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{s-1} + 0 \leq \sum_{n=1}^\infty n^{-s} \leq 1 + \frac{1}{s-1} = \frac{s}{s-1}$$

Bsp ② $\int_{-\infty}^{\infty} |x| e^{-x^2} dx$

$$= -\int_{-\infty}^{0} x e^{-x^2} dx + \int_{0}^{\infty} x e^{-x^2} dx = 2 \int_{0}^{\infty} x e^{-x^2} dx$$

$$\int_{0}^{b} x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{0}^{b^2} e^{-u} du \quad \text{mit} \quad u = x^2, \; du = 2x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - e^{-b^2}\right) \to \frac{1}{2} \quad \text{für } b \to \infty$$

Somit gilt $\int_{-\infty}^{\infty} |x| e^{-x^2} dx = 1$.

$\blacksquare$

③ Wir haben die folgende einfache aber wichtige Beispiele

ⓐ $$\int_{a}^{\infty} \frac{dx}{x^s} = \begin{cases} \frac{a^{1-s}}{s-1} & \text{für } s > 1 \\ \infty & \text{für } s \leq 1 \end{cases}$$

(b) Für alle $a<b$ und $s\in\mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^s} = \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-s}}{1-s} & \text{für } s<1 \\ \infty & \text{für } s\geq 1. \end{cases}$$

Wir haben die folgende Majorantenkriterium:

Satz 6.32 (Majorantenkriterium)

a) Sei $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ stetig. Dann gilt

$$\forall x: |f(x)| < g(x) \text{ und } \int_a^\infty g(x) \text{ konvergent}$$

$$\Rightarrow \int f(x)\,dx \text{ (absolut) konvergent}$$

b) Weiterhin gilt folgende Umkehrung

$$\forall x: 0\leq g(x)\leq f(x) \text{ und } \int_a^\infty g(x) \text{ divergent}$$

$$\Rightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx \text{ divergent.}$$

Bsp 6.33 ① $\displaystyle\int_0^\infty \frac{t^2}{(1+6t^2)^{5/3}}\,dt < \int_0^\infty \frac{t^2}{(6t^2)^{5/3}}$

$$< \int \frac{c}{t^{4/3}}\,dt < \infty$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{t^2}{(1+6t^2)^{5/2}}\,dt \quad \text{konvergent}$$

(2) $$\int_0^\infty \frac{t^2}{(1+6t^2)^{3/2}}\,dt$$

$$\frac{t^2}{(1+6t^2)^{3/2}} > \frac{t^2}{(12t^2)^{3/2}} \qquad t \geq 1$$

$$> \frac{c}{t}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{t^2}{(1+6t^2)^{5/2}}\,dt \quad \text{divergent weil}$$

$$\left(\int_0^\infty \frac{c}{t}\,dt \quad \text{divergent.} \right.$$

(3) Exponentialintegral:

$$Ei(x) := \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t}\,dt \quad \text{für } x<0.$$

Da $\lim_{t\to-\infty} te^t = 0$, gibt es $c>0$ mit $|te^t| \leq c \quad \forall t \in [-\infty, x$

und somit gilt

$$\left|\frac{e^t}{t}\right| \doteq \left|\frac{te^t}{t^2}\right| \leq \frac{C}{t^2}$$

Mit der Konvergenz des Integrals

$\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{t^2} dt$ folgt die (Abs) Konvergenz

des $Ei(x)$ für alle $x<0$.