# Kapitel 2

# Reele Zahlen, Euklidische Räume und Komplexe Zahlen

## 2.1 Elementare Zahlen

$$\begin{array}{rccccc}
\text{Naturzahl} & \mathbb{N} & = & \{0,1,2,\dots\} & \text{addieren und multiplizieren} \\
 & \cap & & & \\
\text{LOOK TODO} & \mathbb{Z} & = & \{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\} & \text{subtrairen} \\
 & \cap & & & \\
\text{Rationalzahlen} & \mathbb{Q} & = & \left\{ \frac{p}{q} \middle| p,q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\} & \text{dividieren}
\end{array}$$

Before set Z, can't read, page 22

Viele gleichungen haben keine Lösung in $\mathbb{Q}$.

**Satz 2.1**

Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Dann hat $x^2 = p$ keine Lösung in $\mathbb{Q}$

**Beweis**

Zum Erinnerung zwei Natürlichen Zahlen $a$ und $b$ sind teilfrmd (oder relativ prim) wenn es keine Natürliche Zahl ausser der Eins gibt, die beiden Zahlen teilt.

$$((a,b)=1) \to \text{ grösste Gemeinsame Teiler}$$

**Indirekter Beweis**

Wir nehmen an: es gibt $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = p$, wobei $a, b$ teilfremd und $\geq 1$ sind. Dann gilt

$$a^2 = pb^2$$

woraus folgt, dass $p$ $a$ teilt also ist $a = pk$, $k \in \mathbb{N}$ und somit

$$a^2 = p^2k^2 = pb^2 \Rightarrow pk^2 = b^2$$

woraus folgt, dass $p$ $b$ teilt.

## 2.2 Die Reelen Zahlen

Wir werden jetzt das System von Axiomen beschreiben das die Menge der Reelen Zahlen "eindeutig" characterisiert.

Die Menge $\mathbb{R}$ der Reelen Zahlen ist mit zwei Verknüpfungen "+" (Addition) und "$\cdot$" (Multiplikation) versehen sowie mit einer Ordnungsrelation $\leq$. Die axiome werden wie folgt gruppiert:

1. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ **ist ein Koerper**
   Es gibt 2 Operationen (Zweistellige Verknüpfungen)

   - $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
     $(a, b) \to a + b$
   - $\times : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
     $(a, b) \to a \cdot b$

   und 2 ausgezeichnete Element 0 und 1 in $\mathbb{R}$ die folgenden Eigenschaften haben:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Komutivität | A1) | $x + y = y + x$ | M1) | $x \cdot y = y \cdot x$ |
| Assoziativität | A2) | $(x + y) + z = x + (y + z)$ | M2) | $(xy)z = x(yz)$ |
| Neutrales Element | A3) | $x + 0 = x = 0 + x$ | M3) | $x \cdot 1 = 1 \cdot x$ |
| Inverse Element | A4) | $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$ mit $x + y = 0 = y + x$ | M4) | $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ $\exists y \in \mathbb{R}$ mit $xy = 1 = yx$ |

resize table

und Die Multiplikation ist verträglich it der Addition im Sinne des Distributivitäts-Gesetz (D)

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x(y + z) = xy + xz$$

- $(\mathbb{R}, +)$ mit A1$\to$A4 ist eine Abelische Gruppe bezüglich der Addition
- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ mit A1$\to$A4, M1$\to$M4 und D ist ein Zahlkörper.

**Bemerkung 2.2**

Eine Menge $G$ versetzen mit Verknüpfung $+$ und Neutrales Element $O$ die den obigen Eigenschaften A2$\to$A4 genügen heisst Gruppe.

Eine enge $K$ versetzen mit Verknüpfung $+, \cdot$ und Elementen $0 \neq 1$ die den obigen Eigenschaften A1$\to$A4, M1$\to$M4, D genügen heisst Körper.

**Folgerung 2.3**

Add Big curly brackets to enum list, page 25

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

i) $a + b = a + c \Rightarrow b = c$ und $O$ is eindeutig, d.h. Falls $z \in \mathbb{R}$ der Eigenschaften $a + z = a \ \forall a \in \mathbb{R}$ genügt, so folgt $z = 0$

ii) $\forall a, b\mathbb{R}$, $\exists!$ (eindeutig bestimmtes) $x \in \mathbb{R} : a + x = b$. Wir schreiben $x = b - a$ und $0 - a = -a$ ist das additive Inverse zu $a$

iii) $b - a = b + (-a)$

iv) $-(-a) = a$

v) Falls $ab = ac$ und $a \neq 0 \Rightarrow b = c$ und 1 ist eindeutig, d.h. falls $x \in \mathbb{R}$ der Eigenschaften $ax = a \; \forall a \in \mathbb{R}$ genügt so folgt $x = 1$

vi) $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $\exists! x \in \mathbb{R} : ax = b$. Wir schreiben $x = \frac{b}{a}$ und $\frac{1}{/}a = a^{-1}$ ist das Multiplikativ Inverse zu $a$.

vii) Falls $a \neq 0 \Rightarrow \left(a^{-1}\right)^{-1} = a$

viii) $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \cdot 0 = 0$

ix) Falls $ab = 0$ dann folgt $a = 0$ oder $b = 0$

**Beweis 2.3**

i) Sei $a + b = a + c$
$A4 \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R} : a + y = 0$
$a + b = a + c \Rightarrow y + (a + b) = y + (a + c)$
$\Rightarrow (y + a) + b = (y + a) + c$
$\Rightarrow 0 + b = 0 + c \Rightarrow b = c$
Nehmen wir an, dass es $0' \in \mathbb{R}$ gibt so dass $x + 0' = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, d.h. es gibt eine zweite neutrale Element für $+$.

add rules to top of arrows, page 26 top

Dann $0 + 0' = 0$ aber auch $A3 \Rightarrow 0 + 0 = 0 \Rightarrow 0 + 0' = 0 + 0 \Rightarrow 0 = 0'$

ii) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, und sei $y \in \mathbb{R}$ mit $a + y = 0$. Definieren wir $x := y + b \Rightarrow a + x = a + (y + b) = (a + y) + b = 0 + b = b$
$\Rightarrow \exists$ mindestens eine Lösung der Gleichung $a + x = b$. Von i) folgt dass $x$ eindeutig bestimmt ist $a + x = b = a + x' \Rightarrow x = x'$

iii) Seien $x = b - a$, $y = b + (-a)$. Wir Wollen beweisen dass $x = y$.

Aus i) wissen wir dass $b - a$ eine Lösung von $a + x = b$

$$y + a = (b + (-a)) + a = b + ((-a) + a) = b + 0 = 0$$

$\Rightarrow y$ ist auch eine Lösung.
Weil die Lösung von $a + x = b$ ist eindeutig bestimmt, ist $y = x$

iv)

v)

vi)

vii)

ASK FOR BEWEISE; PAGE 27 TOP

viii) $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \cdot 0 = 0$
$a \cdot 0 = a(0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0 \Rightarrow a \cdot 0 = 0$

ix) $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ oder $b = 0$
Wir nehmen an: $a \neq 0$ mit Inversen $a^{-1}$, ( $a^{-1}$ existiert mittels M4).
So folgt $b = 1 \cdot b = \left(a^{-1} \cdot a\right) b = a^{-1}(a \cdot b) = a^{-1} \cdot 0 = 0$

?multipli? page 27 middle to top

2. Ordnungsaxiome $\leq$
   Auf $\mathbb{R}$ gibt es eine Relation, $\leq$, genanten Ordnung, die folgenden Eigenschaften genügt

   (a) Reflexität: $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \leq x$
   (b) Transitivität: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$: $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$
   (c) Identivität: $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $(x \leq y)$ und $(y \leq x) \Rightarrow x = y$
   (d) Die Ordnung ist total: $\forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt entweder $x \leq y$ oder $y \leq x$

   Die Ordnung ist konsistent mit $+$, und $\cdot$

   (a) $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z \qquad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$
   (b) $x, y \geq 0 \Rightarrow xy \geq 0$

   Mit $\leq$ hat man auch$\geq, <, >$. Wir Verzichten auf eine Auflistung aller Folgerungen und beschränken uns auf einzige wichtige Folgerungen.

**Folgerungen 2.4**

i) $x \leq 0$ und $y \leq 0 \Rightarrow xy \geq 0$
ii) $x \leq 0$ und $y \geq 0 \Rightarrow xy \leq 0$
iii) $x \leq y$ und $z \geq 0 \Rightarrow xz \leq yz$
iv) $1 > 0$
v) $\forall x \in \mathbb{R} \qquad x^2 \geq 0$
vi) $0 < 1 < 2 < 3 < \ldots$
vii) $\forall x > 0 : x^{-1} > 0$

{Annahme: $x^{-1} \leq 0$. Nach Multiplikation mit $x > 0$ folgt (mittels ii) $1 = x^{-1} \cdot x \leq 0 \cdot x = 0$}

**Bemerkung 2.5**

What? page 28 bottom

$\leq$ auf genügt den obigen Eigenschaften. Die entscheidende weitere Eigenschaft von $\mathbb{R}$ ist das.

3. Ordnungsvollständigkeit
   Vollständigskeitaxiom:
   Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ nicht leere Teilmenge von $\mathbb{R}$, so dass $a \leq b$ für alle $a \in A, b \in B$. Dann gibt es $c \in \mathbb{R}$ mit $a \leq c \leq b \qquad \forall a \in A, b \in B$

Check for layout issues with title

**Bemerkung 2.6**

What? page 29 bottom

erfüllt dieses Eigenschaft nicht!

Seien

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0, x^2 \leq 2\}$$
$$B = \{y \in Q \mid y \geq 0, y^2 \geq 2\}$$

Dann gilt $a \leq b\ \forall a \in A\ b \in B$. ABer ein $c \in \mathbb{Q}$, mit $a \leq c \leq b$ würde dann $c^2 = 2$ erfüllen! In Satz 2.1 haben wir gesehen dass $x^2 = p$ keine Lösung in $\mathbb{Q}$ hat.

Wir definieren jetzt für $x, y \in \mathbb{R}$

$$\max\{x, y\} = \begin{cases} x \text{ falls } y \leq x \\ y \text{ falls } x \leq y \end{cases}$$

Insbesondere ist der Absolutbetrag einer zahl $x \in \mathbb{R}, |x|$

$$|x| : \max\{x, -x\}$$

Für diesen gilt folgender Wichtiger Satz

**Satz 2.7**

i) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Dreiecks Ungleichung)
ii) $|xy| = |x|\,|y|$

**Beweis 2.7**

i) $x \leq |x|\,, -x \leq |x|$
$y \leq |y|\,, -y \leq |y|$
und $x + y \leq |x| + |y|\,, -(x + y) \leq |x| + |y|$
woraus $|x + y| \leq |x| + |y|$ folgt
ii) ASK FOR BEWEIS

ASK FOR BEWEIS

**Satz (Young)**

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$. $\delta > 0$ gilt $2\,|ab| \leq \delta a^2 + \frac{b^2}{\delta}$

## 2.3 Infimum und Supremum

In Zusammenhang mit der Ordnung führen wir einige Wichtige Definitionen ein:

**Definition 2.8**

Sei $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge

a) $\mathbb{X}$ ist nach oben beschränkt falls es $c \in \mathbb{R}$ gibt $x \leq c, \forall x \in X$. Jeder derartige $c$ heisst eine Obere Schranke für $\mathbb{X}$.

b) $\mathbb{X}$ ist nach unten beschränkt, falls es $c \in \mathbb{R}$ gibt, mit $x \geq c$, $\forall x \in X$. Jeder derartige $c$ heisst untere Schranke für $\mathbb{X}$.

c) $X$ ist beschränkt falls es nach oben und unten beschränkt ist.

d) Ein element $a \in \mathbb{X}$ ist ein maximales Element (oder Maximum) von $\mathbb{X}$ falls $x \leq a$, $\forall x \in \mathbb{X}$. Falls ein Maximum (resp. minimum) existiert, wird es mit $\max \mathbb{X}$ ($\min \mathbb{X}$) bezeichnet. Falls $\mathbb{X}$ keine obere schränke hat, ist $\mathbb{X}$ nach oben unbeschränkt (analog für obere sch.).

**Beispiel 2.9**

WHAT? Page 32 top

1. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ ist nach oben unbeschränkt. $A$ ist nach unten beschränkt. Jedes $\leq 0$ ist eine untere Schranke.
2. $B = [0, 1]$ ist nach oben und nach unten beschränkt.
   - 0 ist ein minimum von $B$
   - 1 ist ein maximum von $B$
3. $C = [0, 1)$ ist nach oben und nach unten beschränkt, $0 = \min(A)$. $C$ hat kein Maximum.

Folgender Satz ist von Zentraler Bedeutung und eine Folgerung der Ordnungsvollständigkeitaxiom.

**Satz 2.10**

i) Jede nicht leere nach oben beschränkte Teilmenge $A \subset B$ besitzt eine kleinste obere Schranke $c$. Die Kleinste obere schranke $c$ ist eindeutig bestimmt und heisst Supremum von $A$, mit $\sup A$ bezeichnet.

ii) Jede nicht leere nach unten beschränkt Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ besitzt eine grösste untere Schranke $d$ und heisst Infimum von $A$, mit $\inf A$ bezeichnet.

**Beweis**

i) Sei $\emptyset \neq A \subset B$ nach oben beschränkt. Sei $B := \{b \in \mathbb{R} \mid b \text{ ist obere Schranke für } A\}$. Dann $B \neq \emptyset$ und $a \leq b$, $\forall a \in A$ $b \in B$

   Mit Ordnungsvollständigkeit Axiom folgt die Existens eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ mit $a \leq c \leq b$ $\forall a \in A$, $b \in B$.

   Es ist klar dass $c$ ist eine obere Schranke für $A$. Also $c \in B$. Da $c \leq b$ $\forall b \in B$, ist $c$ die kleinste obere Schranke für $A$. Hierdurch $c$ ist eindeutig bestimmt.

   (Seien $c$ und $c'$ zwei Supremum von $A$, $c$ ist die kleinste obere Schranke und $c'$ ist eine obere Schranke $\Rightarrow c \leq c'$. Das gleiche Argument mit $c$,$c'$ ausgetauscht liefert $c' \leq c$)

ii) Sei $A$ nach unten beschränkte, nicht leere Menge. Sei $-A := \{-x \mid x \in A\}$ die Menge der additive Inversen von $A$. Dann $-A \neq \emptyset$ und nach oben beschränkt. i) $\Rightarrow \exists s = \sup(-A) \Rightarrow -s$ ist das Infimum von $A$

**Korollar 2.11**

1. Falls $E \subset F$ und $F$ nach oben beschränkt ist, gilt $\sup E \leq \sup F$
2. Falls $E \subset F$ und $F$ nach unten beschränkt ist, gilt $\inf F \leq \inf E$
3. Falls $\forall x \in E$, $\forall y \in F$ gilt $x \leq y$ dann folgt $\sup E \leq \inf F$

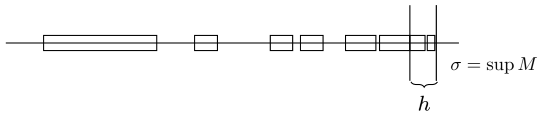
e is clipped, page 34 om

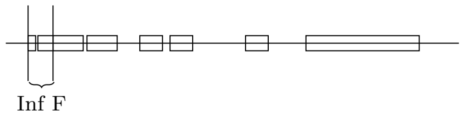
4. Seien $E, F \neq \emptyset$, $E, F, \subset \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$

   (i) Falls $E$ ein sup. besitzt $\Rightarrow \exists x \in E$ mit $x > \sup E$

   can't read, is it E-h? page 34 bottom

   (ii) Falls $E$ ein Inf besitzt $\Rightarrow \exists y \in$: $y < \inf E + h$. Das Supremum, $\sup \mathbb{X} = \sigma$ der Menge $\mathbb{X}$ ist folgendermassen charakterisiert: Es gibt in $\mathbb{X}$ keine Zahlen $> \sigma$; aber für jede Toleranz $h > 0$ gibt es in $\mathbb{X}$ Zahlen $> \sigma - h$




   Es gibt in $\mathbb{X}$ keine Zahlen $< \inf \mathbb{X}$ =aber für jede Toleranz $h > 0$ gibt es in $\mathbb{X}$ Zahlen $< \inf \mathbb{X} + h$

   faded color, can't read, page 34.1 middle to bottom

   (iii) Sei $E + F = \{e + f : e \in E, f \in F\}$. Falls $E$ und $F$ ein Sup. besitzen $\Rightarrow E{+}F$ besitzt ein Sup und $\sup(E{+}F) = \sup(E){+}\sup(F)$. (Analog mit Inf.)

**Beweis**

Ask for full Beweis!!

**Beispiel**

1. $E = (+\infty, 2) \subset F(-\infty, 4]$
   $\sup E = 2, \sup F = 4 = \max F$
   $E$ hat kein Max: $\sup E \leq \sup F$

2. $G : [4, 5) \subset H = (3, 6)$
   $\min E = \inf G = 4 \geq \inf H = 3$

3. $K = (3, \infty)$, $E = (-\infty, 2)$
   $\forall x \in E$, $y \in K$ gilt $x \leq y$
   $2 = \sup E \leq 3 = \inf K$

4. $A\{\sin x \mid x \in \mathbb{R}\}$
   $\inf S = -1 = \min A$
   $\sup A = 1 = \max A$

5. $A = \{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Wir werden sehen dass $A$ ist nach unten und nach unten beschränkt.
   $\inf A = \min A = 2$, $\sup A = e = 2.718\ldots$ Vereinbarung

   Check for better layout

   Für nach oben unbeschränkte Mengen $A \neq \emptyset$ setzen wir $\sup A = \infty$ unendlich. Analog fèr nach unten unbeschränkte Menge $\emptyset \neq A$ setzen wir $\inf A = -\infty$

Die Folgende Satz zeigt wie die Ordnungsvollständigkeit von $\mathbb{R}$ die Lösbarkeit gewisser Gleichungen in $\mathbb{R}$ garantiert.

**Satz 2.12**

Für jedes $x > 0$ gibt es genau ein $y > 0$ mit $y^2 = x$. Diese Lösung wird mit $\sqrt{x}$ bezeichnet.

(Im Allgemein: Für jedes $x > 0$ und $n \geq 1$, $n \in \mathbb{R}$ gibt es genau ein $y > 0$ mit $y^2 = 0$. Diese Lösung wird mit $\sqrt[n]{x}$ bezeichnet)

**Beweis**

Not sure, page 35 bottom

Sei $x > 1$, und $A := \{z \in \mathbb{R} \mid z > 0 \text{ mit } z^2 \leq x\}$. Dann ist $A$ nach oben beschränkt und $A \neq \emptyset (1 \in A)$. $\Rightarrow A$ besitzt ein Supremum.
Sei $y := \sup A$. Wir zeigen dass $y^2 = x$

- Schnitt 1: Annahme $y^2 < x$.
  Sei $0 \leq h \leq 1$. Wir nehmen

$$
\begin{aligned}
(y+h)^2 &= y^2 + 2hy + h^2 \\
&= y^2 + h(2y+h) \\
&\leq y^2 + h(2y+1) \\
&= y^2 + h\left((y+1)^2 - y^2\right)
\end{aligned}
$$

  Weil $y^2 < x$ ist, $\frac{x-y^2}{(y+1)^2-y^2} > 0$ und daher gibt es $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$, $h \leq \frac{x-y^2}{(y+1)^2-y^2}$ (sei $h = \min\{1, \frac{x-y^2}{2x+1}\}$)

  Für solche $h$ gilt

$$
(y+h)^2 \leq y^2 + \left(\frac{x-y^2}{(y+1)^2-y^2}\right)\left((y+1)^2 - y^2\right) =
$$

chopped result, page 35.1

  Also $y + h \in A$ und $y + h > y$. Ein widerspruch: $y$ ist eine obere schranke für $A$, d.h., $z < y$
  $\Rightarrow y^2 \geq x$ Analog beweist man $y^2 \leq x$

- Schnitt 2: Annahme $y^2 > x$
  Sei $h = \frac{y^2-x}{2y} \neq 0$

$$
(y-h)^2 = y^2 - 2hy + h^2 > y^2 - 2hy = y^2 - (y^2 - = x
$$

Chopped, page 35.2 top

  $\Rightarrow y - h$ ist eine Obere Schranke für $A$

  $\left(\forall z \in A, z^2 \leq x \text{Da } (y-h)^2 > x \text{ ist, } (y-h)^2 > x \geq z^2 \text{Damit } y - h > z, \forall z \in A\right)$

break into three lines, page 35.2

  Aber $y - h < y$, wiederspruch zur Minimalität von y.

Falls $0 < x < 1$, dann $\frac{1}{x} > 1$
$\Rightarrow \exists u \in \mathbb{R}$, mit $u^2 = \frac{1}{x}$
Somit $\left(\frac{1}{u}\right)^2 = x$ und $y = \frac{1}{u}$ ist eine Lösung von $y^2 = x$.

Zum Abschluss dieses Themas erwähren wir noch eine Wichtige Eigenschaft der Reelen Zahlen

**Satz 2.13 (Archimedische Eigenschaft)**

Zu jeder Zahl $0 < b \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b < n$.

**Beweis (Indirekt)**

Andernfalls gibt es $b \in \mathbb{R}$ mit $n \leq b$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$(\neg (\exists n \in \mathbb{N} : b < n) = (\forall n \in \mathbb{N} : b \geq n))$$

Dann ist $b$ eine obere Schranke für $\mathbb{N}$ und es existiert $c = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$. Mit $n \in \mathbb{R}$ ist jedoch auch $n + 1 \in \mathbb{N}$.
Also: $n + 1 \leq c$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Somit folgt $n \leq c - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ein widerspruch zur minimalität von . Chopped content, page 36 bottom

**Korollar 2.14**

1. Seien $x > 0$ und $y \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann gibt es $n \in \mathbb{Z}$ mit $y < nx$
2. Falls $x, y, a \in \mathbb{R}$ die ungleichkeiten $a \leq x \leq a + \frac{y}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ erfüllen, ist $x = a$.

**Beweis**

1. ASK FOR BEWEIS Ask for beweis
2. $a < x \Rightarrow x - a > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$
   $\Rightarrow x > a + \frac{y}{n}$ Widerspruch

Wir wissen dass gewisse Gleichungen in $\mathbb{R}$ Lösbar ist: z.B. $y^2 = a$, $\forall a > 0$. Aber man kann nicht alle GLeichugen in $\mathbb{R}$ lösen, z.B. $x^2 + 1 = 0$. Da für alle $x \in \mathbb{R}$, $x^2 > 0$, ist $x^2 = -1$ nicht lösbar. Um eine Lösung für diese Gleichung zu finden, müssen wir die komplexen Zahlen betrachten.

Zuerst, werden wir die Euklidischen Räume $\mathbb{R}^n$ einführen

## 2.4 Euklidische Räume

Von der Mengentheorie können wir die Kartesische Produkt zweier Mengen; es Lässt sich ohne schwierigkeiten zu endlichen Familien $A_1, \ldots, A_n$ verallgemeinen; nähmlich

$$A_1 \times \cdots \times A_n := \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in A_i\}$$

ist die Menge der geordneten $n-$tuple von Elementen aus $A_1, \ldots, A_n$.

Für beliebige $n \geq 1$ betrachten wir $\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}$und untersuchen Seine Struktur. Auf $\mathbb{R}^n$ haben wir zwei Verknüpfungen Add n-mal to underbrace

1. $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Addition.
   $$\Big(\underbrace{(x_1, \ldots, x_n)}_{x}, \underbrace{(y_1, \ldots, y_n)}_{y}\Big) \to \underbrace{(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)}_{\text{Komponentenweise Addition}}.$$ Dann ist $(\mathbb{R}^n, +)$ eine Abelische Gruppe, mit $0 := (0, \ldots, 0)$ aln neutrales Element

2. $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Skalarmultiplikation.
   $(\lambda, x) \to \lambda \cdot x := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$. Dann gelten die folgende Eigenschaften: $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
   (a) Distributivität: $(\alpha + \beta)\, x = \alpha x + \beta x$
   (b) Distributivität: $\alpha\, (x + y) = \alpha x + \alpha y$
   (c) Assoziativität: $(\alpha\beta)\, x = \alpha\, (\beta)\, x$
   (d) Einzelelement: $1 \cdot x = x$

**Definition 2.15**
Eine Menge $\mathbb{V}$ ,it $+, \cdot$ und $0 \in \mathbb{V}$ so dass $(\mathbb{V}, +)$ eine Abelische Gruppe mit Neutralen Element 0 ist und zudem (a)-(d) gelten nennt sich ein Vektorraum über den Körper $\mathbb{R}$ und seine Elemente heissen Vektoren

Also ist $\mathbb{R}^n$ ein Vektorraum. In der Linearen Algebra führt man dann Begriffe wie Basis usw. ein. Die Standard basis von $\mathbb{R}^n$ ist die Menge $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ wobei $e_i := \{0, \dots, 0, 1, \dots, 0\}$

Jeder Vektor $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$ besitzt eine eindeutige Darstellung $x = \sum x_i e_i$ bezüglich der Standardbasis.

**Definition 2.16**

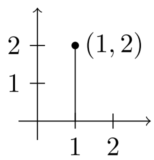
1. Das Skalarprodukt zweier Vektoren $x = (x_1, \dots, x_n)\,, y = (y_1, \dots, y_n)$ ist die durch
$$< x, y > := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$
definierte reele Zahl
$< \cdot, \cdot > = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (orthogonal)

2. Falls $< x, y > = 0$ heissen $x$ und $y$ senkrecht aufeinander. $< \cdot, \cdot >$ besitzt folgende Eigenschaften
   (a) Symmetrie: $< x, y > = < y, x >$
   (b) Linearität: $< x, \alpha y + \beta z > = \alpha < x, y > + \beta < x, z >$
   (c) Positivität: $< x, x > \geq 0$ mit Gleicheit genau dann wenn $x = 0$

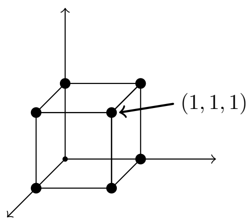
**Definition 2.17**
Die Norm $||x||$ eines Vektors ist:
$$||x|| := \sqrt{< x, x >} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$
wird oft als Länge interpretiert.

**Beispiel 2.18**

- $||(1,2)|| = \sqrt{1+4}$




- $||(1,1,1)|| = \sqrt{3}$




- $||e_i|| = 1$, $< e_i, e_j >= 0$. $e_i \perp e_j$
  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ist eine orthonormale Basis. Sie sind orthogonal und auf Länge 1 normiert.

Die erste wichtige Eigenschaft eines Skalaprodukts ist

**Satz 2.19 (Cauchy-Schwarz)**

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt $|< x, y >| \leq ||x|| \, ||y||$ und

$$|< x, y >| = ||x|| \, ||y|| \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : x = \lambda y$$

Die Euklidische Norm hat die Eigenschaften

**Satz 2.20**

- $||\alpha x|| = |\alpha| \, ||x||$ (Homogenität)
- $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (Dreiecks Ungleichung)

**Beweis**

- ASK FOR BEWEIS
- $$||x+y||^2 =< x+y, x+y >$$
  $$=< x, x+y > + < y, x+y >$$
  $$< x, x > + < x, y > + < y, x > + < y, y >$$

ASK FOR BEWEIS

$$< x, x > +2 < x, y > + < y, y >$$

$$\leq ||x||^2 + 2\,(< x, y >) + ||y||^2$$

$$\leq ||x||^2 + 2||y||||x|| + ||x||^2$$

## 2.5 Die Komplexen Zahlen

Da für alle $x \in \mathbb{R}$ $x^2 \geq 0$, gibt es $\sqrt{-1}$ nicht als reelle Zahl. Seit 18 Jahrhundert haben Mathematiker mit Ausdrücke $a + b\sqrt{-1}$, $a, b \in \mathbb{R}$ gerechnet und auf sie die in $\mathbb{R}$ geltenden Rechnenregel angewendt, z.B.

$$\left(1 + 2\sqrt{-1}\right)\left(1 - 2\sqrt{-1}\right) = 1^2 + 2^2\left(\sqrt{-1}\right)^2$$

Allgemein:

$$\left(a + b\sqrt{-1}\right)\left(c + d\sqrt{-1}\right) = ac + ad\sqrt{-1} + bc\sqrt{-1} + bd\sqrt{-1}$$

$$= (ac - bd) + (ad + bc)\sqrt{-1}$$

Das Problem ist hier, dass $\sqrt{-1}$ keinen präzisen Mathematisches Sinn hat und dass deshalb auch nicht klar ist, was "+" in "$a + b\sqrt{-1}$" heissen soll.

Das Problem is wie folgt gelöst:

Chopped content, page 42 middle

Als model von "$a+b\sqrt{-1}$", $\mathbb{C}$, nehmen wir $\mathbb{R}^2$. Wir haben schon eine Addition von vektoren und das neutral Element . Wir definieren dann die Multiplikation

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \to x \cdot y$$

wobei $x \cdot y = (ac - bd, ad + bc)$, $x = (a, b)$, $y = (c, d)$. Dann erfüllen "+" und "$\cdot$" folgende Eigenschaften:

- Assos: $((a, b)(c, d))\,(e, f) = (a, b)\,((c, d)(e, f))$
- Neutrales Element: $(1, 0)(a, b) = (a, b)$
- Kommutativ: $(a, b)(c, d) = (c, d)(a, b)$
- Inverses Element $\forall (a, b) \neq (0, 0)$ in $\mathbb{R}^2$ $\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $(a, b)(x, y) = (1, 0)$
- DIstributivität: $((a, b) + (c, d)) \cdot (e, f) = (a, b)(e, f) + (c, d)(e, f)$

**Definition 2.21**
Der Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist $\mathbb{R}^2$ versehen mit "+","$\cdot$", $0 = (0, 0)$ und $(1, 0) = 1$

**Bemerkung 2.22**

$z^2+1=0$ hat in $\mathbb{C}$ eine Lösung. Nämlich ist $(0,1)(0,1)=(-1,0)=-(1,0)=1$. Wir führen für $(0,1)$ die Bezeichnung "$i$" ein, das heisst Imaginäre Einheit.

Also ist $i^2=-1$. Jede komplexe Zahl $z=(x,y)$ lässt sich dann wie folgt darstellen:

$$z=(x,y)=(x,0)+(0,y)=x(1,0)+y(0,1)=x\cdot 1+y\cdot i$$

In der Rechnungen lässt man oft das 1 in $x\cdot 1$ fallen und schreibt $z=x+yi$

**Definition 2.22**

1. Sei $z=x+iy\in\mathbb{C}$
   - Re $z:=x$ heisst der Realteil
   - Im $z:=y$ heisst der Imaginärteil
2. Die zu: $z=x+iy$ konjugierte Zahl ist $\overline{z}=x-iy$
3. Wir definieren die Norm von $z$ als $||z||=\sqrt{x^2+y^2}$

**Satz 2.23**

(i) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$

(ii) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

(iii) $z\cdot\overline{z}=||z||^2\cdot 1$

(iv) $||z_1\cdot z_2||=||z_1||\cdot||z_2||$

**Beweis**

ASK FOR BEWEIS

ASK FOR BEWEIS

**Abkürzung**

$|z|:=||z||$

**Bemerkung 2.24**

Wir können $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ "einbetten" mittels $\mathbb{R}\ni x\to(x,0)\in\mathbb{C}$. Sei $\mathbb{C}_0=\{(x,y)\in\mathbb{C}\mid y=0\}=\{(x,0)\mid x\in\mathbb{R}\}$. Der Abbildung $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}_0$, $x\to(x,0)$ist eine Bijektion.

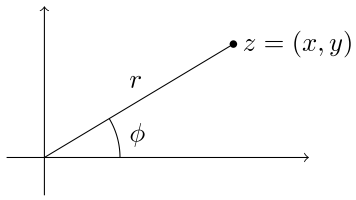
Diese Identifikation (von $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}_0$ ist verträglich mit den operationen in $\mathbb{R}$ und in $\mathbb{C}$, d.h.

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$
$$f(xy)=f(x)f(y)$$

**Polarform**

Not sure if this should be a title

Als Polarkoordinaten in die Ebene führen wir $(r, \phi)$ ein




$$x = r\cos\phi \qquad y = r\sin\phi$$
$$z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$$
$$r = |z|$$

**Definition**

Wir definieren (nach Euler)

$$e^{i\phi} := \cos\phi + i\sin\phi$$

$$z = re^{i\phi} = |z|\, e^{i\phi}$$

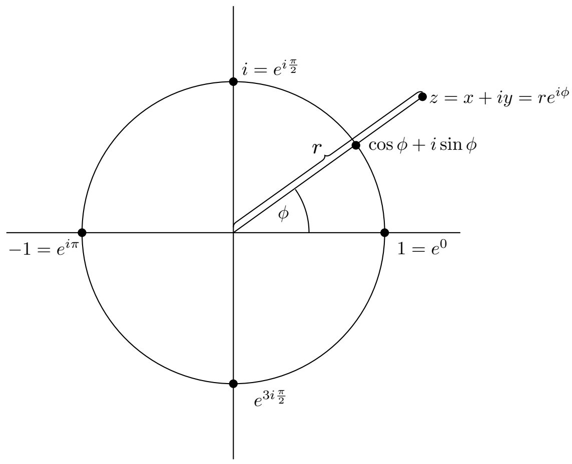
Where does the definition end??

??Additions?? page 45 bottom

Aus die

- $\cos(\phi + \psi) = \cos\phi\cos\psi - \sin\psi\sin\phi$
- $\sin(\phi + \psi) = \sin\phi\cos\psi + \cos\phi\sin\psi$

In der Ebene $\mathbb{R}^2$ stehen uns neben den kartesischen koordinaten $x, y$ noch die Polarkoordinaten $r, \phi$ zur Verfügung. Für beliebiges $z = x + iy \neq 0$




$r = |z|$

$\phi = \arg z$ - Das argument von z

$$e^{i\phi} = 1 \Leftrightarrow \phi = 2k\pi$$

$$\cos\phi + i\sin\phi = 1 \Leftrightarrow \cos\phi = 1 \text{ und } \sin\phi = 0$$

$$\Leftrightarrow \phi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$e^{i\theta} \cdot e^{i\phi} = (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\phi + i\sin\phi)$$

$$= \underbrace{\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi}_{\cos(\theta+\phi)} + i\underbrace{(\cos\theta\sin\phi + \sin\theta\cos\phi)}_{\sin(\theta+\phi)}$$
$$= e^{i(\theta+\phi)}$$

folgt $e^{i\phi}e^{i\psi} = e^{i(\phi+\psi)}$

Somit folgt für $z = re^{i\theta}$, $\omega = se^{i\phi} \in \mathbb{C}$ die einfache Darstellung $z\omega = rse^{i(\theta+\phi)}$,

$$\frac{z}{\omega} = \left(\frac{r}{s}\right) e^{i(\theta-\phi)}$$

Die Polare Darstellung ist in Berechnungen sehr nützlich, insbesondere um das Produkt und die Division zu berechnen

**Beispiel**

1.
$$z = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$
$$\omega = \sqrt{3} - i = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$$
$$\frac{(\sqrt{3}-i)^3}{(1+i)^2} = \frac{\omega^3}{z^4} = \frac{8e^{-i\frac{\pi}{2}}}{4e^{i\pi}} = 2e^{-\frac{3\pi}{2}i} = 2e^{\frac{\pi}{2}i} = 2i$$

2. Die Polarform ist auch sehr nützlich um die wurzel einer Komplexen Zahl zu berechnen. Sei $\omega \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Wir möchten die Gleichung $z^n = \omega$ lösen.
$$\omega = |\omega|\, e^{i\phi}$$
$$z^n = \omega = |\omega|\, e^{i\theta} \Rightarrow z = |\omega|^{\frac{1}{n}}\, e^{i\frac{(\theta+2k\pi)}{n}}$$
$$= |\omega|\, e^{i(\theta+2k\pi}$$

**Beispiel**

is this inside the other Beispiel or out??

$$z^3 = 1 \Rightarrow z^3 = \left(e^{2\pi ik}\right)^{\frac{1}{3}} \in \{e^{i\pi\frac{2k}{3}} : k = 0, 1, 2\} = \{1, e^{2i\frac{\pi}{3}}, e^{4i\frac{\pi}{3}}\}$$

Allgemein Formel der Einheitswurfel $z = \{e^{i\frac{2\pi k}{n}} : k = 0, 1, \dots, n-1\}$

**Bemerkung**

(a) Es gibt keine mit der Körperoperationen verträgliche Ordnung con $\mathbb{C}$

(b) Hingegen ist $\mathbb{C}$ im Untershied zu $\mathbb{R}$ algebraisch vollständig. Nicht nur die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hat in $\mathbb{C}$ eine Lösung, sondern es gilt der Fundamental Satz der Algebra. Es sagt, dass jedes Polynom $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$ vom Grad $n \geq 1$ hat in $\mathbb{C}$ genau $n$ Nullstellen.