

# Kapitel 1

## Logik und Unterlagen

Im Laufendes Semester werden wir viele mathematische Beweise einführen. Heute werden wir uns mit der Mathematische Logik beschäftigen.

In Mathematik stützen wir uns auf gewisse Grundannahmen "Axiome", die wir als gegeben ansehen. Eine dieser Annahmen ist der

### Satz von ausgeschlossenen Dritten

Eine zulässige mathematische Aussage ist entweder wahr oder falsch, jedoch nie beiden zugleich.

### Beispiel

1.  $5 < 7$  Wahr
2.  $4 < 2$  Falsch

In der Wirklichen Welt ist es anders , z.B. "Mathematik ist schön", wahr oder falsch?

Mit Aussagen kann man "rechnen". Wir führen nun ein Paar Notationen der Logik ein:

Seien  $A, B$  Aussagen

- $A$  und  $B$  wird mit  $A \wedge B$  bezeichnet
- $A$  oder  $B$  wird mit  $A \vee B$  bezeichnet

### Folgerung (eine wahre implikation)

- Aus  $A$  folgt  $B$  wird mit  $\Rightarrow$  bezeichnet
- Wenn  $A$ , dann  $B$  wird mit \_\_\_\_\_ bezeichnet
- Die negation der Aussage  $A$  wird mit  $\neg A$  bezeichnet
- $A$  ist equivalent zu  $B$  wird mit  $A \Leftrightarrow B$  bezeichnet
- $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$   $A$  wahr genau dann, wenn  $B$  wahr ist.

??gehäufte?? Page 1

Cannot read, page 2  
middle

### Bemerkung

Die Folgerung ist transitive. Wir wissen  $A \Rightarrow B$  und  $B \Rightarrow C$ , dann wissen wir dass  $A \Rightarrow C$ .

### Prinzip der Mathematischen Beweises

Wir können her eine Kette von Folgerungen

$$A \Rightarrow B \Rightarrow C \cdots \Rightarrow S$$

einen mathematischen "Satz"  $S$  aus einer Annahme  $A$  herleiten. (Ein Beweis ist eine Folge von Implikationen von Aussagen).

### Kontraposition (Umkehrschluss)

$A \Rightarrow B$  ist gleichbedeutend mit  $\neg B \Rightarrow \neg A$ .

Falls  $A \Rightarrow B$ , so kann  $A$  nicht wahr sein wenn  $B$  falsch ist (weil  $A$  wahr wäre, würde  $B$  auch wahr sein).

## 1.1 Prinzip des Indirekten Beweises

Zum Beweis der Aussage  $A \Rightarrow B$  genügt es die Aussage  $\neg B \Rightarrow \neg A$  zu zeigen, oder: die Annahme  $A \wedge \neg B$  zum Widerspruch zu führen.

### Indirekten Beweis

Man fügt  $\neg B$  als Annahme hinzu und kommt nach einer Kette von erlaubten Schlüssen zu einer falschen Aussage.

Hieraus schliesst man, dass die Zusatzannahme  $\neg B$  nicht wahr ist.

#### Beispiel 1.1

- $A$  = "jede natürliche Zahl  $n$  hat einen Nachfolger  $n + 1$ "
- $B$  = "es gibt keine grösste natürliche Zahl"

Wir beweisen dass aus  $A$  folgt  $B$ . Nehmen wir an, dass  $A$  wahr und  $B$  falsch ist.

$\neg B$  = es gibt eine grösste natürliche Zahl  $N_0$  d.h.  $N_0 > l$  für jedes  $l \in \mathbb{N}$ .

Mittels der Aussage  $A$  wissen wir dass  $N_0$  einen Nachfolger  $N_0 + 1$  hat. Dann  $N_0 + 1 > N_0$ . Das ist aber ein Widerspruch.

#### Definition 1.1

Eine Menge ist eine Zusammenfassung verschiedener Objekte zu einem Ganzen.

Die Objekte werden Elemente der Menge genannt.

## KAPITEL 1. LOGIK UND UNTERLAGEN

Sei  $A$  eine Menge, dann "a ist element von  $A$ " wird mit " $a \in A$ " bezeichnet. Seien  $A, B$  Mengen, dann "jedes Element von  $A$  ist ein Element von  $B$ " wird mit " $A \subset B$ " bezeichnet, und man sagt " $A$  ist in  $B$  enthalten" (oder  $A$  ist teilmenge von  $B$ ).

Falls zugleich  $A \subset B$  und  $B \subset A$  gilt, bezeichnet man  $A$  und  $B$  als gleich und schreibt  $A = B$ .

### Beispiele 1.2

1. Die Menge  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  der Natürlichen zahlen.
2. Die leere Menge mit " $\emptyset$ " bezeichnet. Sie ist in jeder Menge enthalten.
3. Die Menge  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  aller ganze Zahlen.
4. Meistens werden Mengen nicht durch die Liste ihre Elemente gegeben, sondern durch bestimmte Eigenschaften ihrer Elemente definiert

$$\mathbb{P} = \{2, 3, 4, 5, 7, 11, 13, \dots\}$$

die Menge aller Primzahlen  $\mathbb{P} : \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ primzahl}\}$

## 1.2 Zwei Prinzipien

Wir werden 2 Methoden des Beweises häufig benutzen.

### 1. Prinzip des Indirekten Beweises

Zum Beweis der Aussage  $A \Rightarrow B$  genügt es die Aussage  $\neg B \Rightarrow \neg A$  zu zeigen, oder, die Annahme  $A \wedge \neg B$  zum Widerspruch zu führen.

### 2. Prinzip der Vollständigen Induktion

Sei für jedes  $n \in \mathbb{N}$  eine Behauptung  $A(n)$  gegeben. Soll die Behauptung für alle natürlichen Zahlen  $n \in \mathbb{N}$  bewiesen werden so genügen dazu zwei Beweisschritte:

- i) Der Beweis von  $A(0)$
- ii) Für jedes  $n \in \mathbb{N}$ , der Beweis von  $A(n+1)$  unter der Voraussetzung, dass  $A(n)$  gilt.

Oft Behauptungen nicht von  $n = 0$  antreten.

Soll die Gültigkeit von  $A(n)$  für alle  $n \geq m$  bewiesen werden so genügen wieder zwei Schritte:

- i) Beweis von  $A(m)$
- ii) Für jedes  $n \geq m$  impliziert  $A(n)$  die Behauptung  $A(n+1)$

Das Prinzip der Vollständige Induktion ist genau wie ein Dominoeffekt.

Sie stellen alle Dominosteinen eine nach der andere. Falls der erste Dominostein fällt ( $A(1)$  wahr) und falls wir die Dominosteinen genug nebeneinander gestellt haben, so dass ein fallender Dominostein den nächsten trifft ( $A(k) \Rightarrow A(k+1)$ ) dann wissen wir, dass alle Dominosteinen fallen.

### Beispiel 1.3 (Induktion)

1. Für alle  $n \geq 1$  gilt:

$$1 + 3 + 5 + \dots (2n - 1) = n^2 A(n)$$

Beweis mittels Vollständige Induktion

- i)  $A(i)$  lautet  $1 = 1^2$  und gilt.
- ii) Sei  $n \geq 1$ . Annahme: so gilt  $A(n)$ . Die Linke Seite der Identität  $A(n+1)$  ist

$$1 + 3 + \dots (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

womit  $A(n + 1)$  bewiesen ist.

2. Als zweite Beispiel für Vollständige Induktion beweisen wir den Fundamental Satz von Euklid:

### Satz 1.4

Jede Natürliche Zahl  $n \geq 2$  ist ein Produkt von Primzahlen, dass bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig ist. Wir werden uns hier nicht mit der Eindeutigkeit befassen.

### Beweis

Sei  $A(n)$  die Aussage: Jede Natürliche Zahl  $m$  mit  $2 \leq m \leq n$  ist ein Produkt von Primzahlen

- i)  $A(2)$  gilt denn 2 ist Primzahl
- ii) Sei  $n \geq 2$ . Wir nehmen an, dass  $A(n)$  gilt. Für  $n + 1$  gibt es zwei Möglichkeiten
  - a)  $n + 1$  ist eine Primzahl und somit gilt  $A(n + 1)$
  - b)  $n + 1$  ist keine Primzahl d.h. es gibt  $2 \leq a \leq n$  die  $n + 1$  teilt. Dann ist  $b := \frac{n+1}{a}$  auch ganz und zudem erfüllt  $2 \leq b \leq n$ . Aus  $A(n)$  folgt dass sowohl  $a$  wie  $b$  ein Produkt von Primzahlen sind somit  $n + 1 = ab$  ein product von Primzahlen ist.

### Satz 1.5

Die Menge  $\mathbb{P}$  der Primzahlen ist unendlich.

### Beweis

Nehmen wir an das Gegenteil "P ist endlich", d.h.  $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$  n aufsteigender Folge; also  $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, \dots$ . Wir betrachten die Zahl  $k = p_1 \dots p_{m+1}$ . Auf Satz 1.4 folgt dass so eine Primzahl  $p_i$  (aus der liste  $p_1 \dots p_m$ ) gilt mit  $p_i$  teilt  $k$ . Da  $p_i$  offensichtlich  $p_1 \dots p_m$  teilt, folgt dass  $p_i$   $k - p_1 \dots p_m = 1$  teilt. Das ist ein Widerspruch.

### Teilbarkeit

#### Formale Definition

Eine Ganze Zahl  $a$  teilt eine ganze Zahl  $b$  genau dann, wenn es eine ganze Zahl  $n$  gibt, für die  $an = b$  ist.

Please fill out the table

Man sagt dann	Man schreibt
$a$ teilt $b$	$a \mid b$
$a$ ist teiler von $b$	
$b$ ist teilbar durch $a$	
$b$ ist Vielfaches durch $a$	

#### Eigenschaften der Teilbarkeit

- Gilt  $a \mid b$  und  $b \mid c$ , so folgt  $a \mid c$
- Für  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  gilt:  $a \mid b \iff ka \mid kc$
- $a \mid b$  und  $c \mid d \Rightarrow ac \mid bd$
- $a \mid b$  und  $a \mid c \Rightarrow a \mid kb + lc$ , für alle  $l, k \in \mathbb{Z}$

1.  $k = (p_1 p_2 \dots p_i \dots p_m) + 1$   
Es gibt eine Primzahl  $p_i$  dass  $k$  teilt.  $p_i \mid k$  mittels Satz 1.4.
2. Sei  $b = p_1 p_2 \dots p_i \dots p_m =$  produkt aller Primzahlen. Sei  $a = p_i$ ,  $n = p_1 p_2 p_{i-1} p_{i+1} \dots p_m$ . Dann  $b = an$ . Dass heisst  $a$  ist Teiler von  $b$ , d.h.  $p_i \mid (p_1 \dots p_m)$
3.  $p_i \mid k$  und  $p_i \mid (p_1 \dots p_m) \Rightarrow p_i \mid k - (p_1 \dots p_m) = 1$ .  
So erhalten wir einen Widerspruch

#### Bemerkung

Letztes mal haben wir gesagt jedes element von  $A$  ist auch Element von  $B$  ( $\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$ ) wird mit  $A \subset B$  ( $A$  ist in  $B$  enthalten,  $A$  ist Teilmenge von  $B$ ) bezeichnet. Falls  $A \subset B$  und eine Element  $b \in B$  gibt mit  $b \notin A$  sagen wir  $A$  ist eine "eigentliche Teilmenge" von  $B$ . Manchmal schreiben wir  $A \subsetneq B$  in diesem Fall.

Es gibt viele Bücher, mit der Folgenden Notation: jedes element von  $A$  ist ein element von  $B$  wird mit  $A \subseteq B$  bezeichnet. Und wenn  $A \subseteq B$  und  $A \neq B$  dann benutzen sie  $A \subset B$  statt  $A \subsetneq B$ .  $A = B$  falls  $x \in A \Leftrightarrow x \in B$ .

**Satz**

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ und } B \subset A$$

**Beweis**

Annahme:  $A = B$ . Falls  $x \in A$ , dann mittels  $A = B$ ,  $x \in B$  gilt, damit gilt  $A \subset B$  und falls  $x \in B$ , dann  $x \in A$  gilt (mittels  $A = B$ ) damit gilt  $B \subset A$ .

Wir haben bewiesen dass  $A = B \Rightarrow A \subset B$  und  $B \subset A$ . Zunächst nehmen wir an dass  $A \subset B$  und  $B \subset A$ . Wir möchten zeigen dass  $A = B$ .

Sei  $x \in A$ , mittels  $A \subset B$ , haben wir  $x \in B$  somit  $x \in A \Rightarrow x \in B$ . (\*)

Sei  $x \in B$ , mittels  $B \subset A$ , haben wir  $x \in A$  somit  $x \in B \Rightarrow x \in A$ . (\*\*)

(\*) und (\*\*)  $\Rightarrow A = B$  per Definition.

### 1.3 Mengeoperationen

Zunächst erinnern wir kurz an die Definitionen der Elementaren Operationen auf Mengen.

Seien  $A$  und  $B$  Mengen. Wir können dann daraus folgende Mengen bilden:

- Die Vereinigung:  $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$
- Der Durchschnitt:  $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$
- Die Differenz:  $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$
- Symmetrische Differenz:  $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Wir haben dann folgende Eigenschaften

**Satz 1.6**

Seien  $A, B, C$  Mengen.

1.  $A \cap B = B \cap A$ ;  $A \cup B = B \cup A$   
 $A \cap \emptyset = \emptyset$ ;  $A \cup \emptyset = A$

**Bemerkung**

- $\cup$  verhältet sich wie  $+$
  - $\cap$  verhältet sich wie Multiplikation
  - $\emptyset$  verhältet sich wie Null element
2.  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$   
 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
  3.  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

## Beweis

Übung

Ask for correct beweis!!

### Definition 1.7

Das Kartesische Produkt  $A \times B$  der Mengen  $A, B$  ist die Menge der geordneten Paare  $(a, b)$  wobei  $a \in A, b \in B$

### Beispiel

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(a, b) : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$ . Falls  $\mathbb{Z}$  als "eindimensionalen" Gebilde dargestellt wird

$\bullet \quad \bullet \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \bullet \quad \bullet$

so wird  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  als "zweidimensionalen" Gebilde dargestellt

$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
$(1, 0)$	$(1, 1)$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
$(0, 0)$	$(0, 1)$	$(0, 2)$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$

Um die Operationen auf mehrere Mengen zu Verallgemeinern sind die folgenden Quantoren nützlich (\*)

1.  $\forall$  "Für alle" (Allquantor)
2.  $\exists$  "Es gibt" (Existenzquantor)
3.  $\exists!$  "Es gibt genau ein"

Sei nun  $I$  eine beliebige Menge ( $I$ =Indexmenge) und sei für alle  $i \in I$  eine Menge  $A_i$  gegeben. Dann:

- $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I, x \in A_i\}$ . Vereinigung besteht aus den Elementen  $x$ , für welche eine  $i \in I$  gibt so dass  $x$  zu  $A_i$  gehört.
- $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I, x \in A_i\}$ . Durchschnitt.

Wir noch das Kartesische Produkt endlich vieler Mengen  $A_1 \dots A_n$  definiere

?löhen? page 15

$$A_1 \times A_n = \prod_{i=1}^n A_i = \{(x_1 \dots x_n) \mid x_i \in A_i\}$$

**Satz 1.8**

Seien  $A_1 \dots A_k \subset x, k \in \mathbb{N}$ . Es gilt

1.

$$\left( \bigcap_{i=1}^k A_i \right)^c = \bigcup_{i=1}^k A_i^c$$

2.

$$\left( \bigcup_{i=1}^k A_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^k A_i^c$$

(\*) Wir haben gesehen dass wir manchmal eine Aussage verneinen müssen. Deshalb müssen wir lernen wie man Aussage mit Quantoren verneinen kann.

$$\neg (\forall n : A(n)) \Leftrightarrow (\exists n : \neg A(n))$$

$$\neg (\exists n : A(n)) \Leftrightarrow (\forall n : \neg A(n))$$

$$\neg (\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} : x^2 < 0$$

## 1.4 Abbildungen

Seien  $X, Y$  Mengen.

**Definition 1.9**

Eine Funktion oder Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  der Menge  $X$  in die Menge  $Y$  ist eine Vorschrift (ein Gesetz) die (das) jedem Element  $x \in A$  genau ein Element  $y = f(x) \in Y$  zuordnet.

Es gibt verschiedene wichtige Objekte die in Zusammenhang mit einem Abbildung auftreten

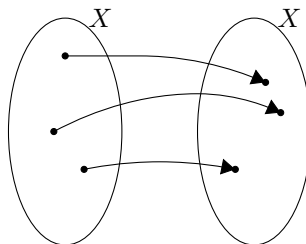
$X =$  Definitionsbereich von  $f$

$Y =$  Die Ziel Menge

$f(x) = \{f(x) \mid x \in X\}$  ist das Bild von  $f$  oder die Bildmenge

**Beispiel 1.10**

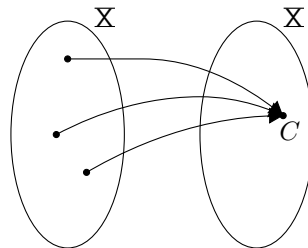
1. (Identität) Für jede Menge  $\mathbb{X}$ , ist  $id_X : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$  definiert durch  $id_{\mathbb{X}}(x) = x, \forall x \in X$





## KAPITEL 1. LOGIK UND UNTERLAGEN

2. (Konstante) Sei  $X$  Menge und  $c \in X$ . Die konstante Abbildung mit Wert  $c$  ist  $f(x) = c, \forall x \in X$



3. Seien  $X, Y$  Mengen. Dann sind  
 $pr_x : X \times Y \rightarrow X \quad pr_y : X \times Y \rightarrow Y$   
 $(x, y) \rightarrow x \quad (x, y) \rightarrow y$   
 die Projektionen auf dem ersten respektiv zweiten Faktoren.
4.  $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$   
 $x \rightarrow \sin x$
5.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \rightarrow x^2 + x$

### Definition 1.11

Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung

1.  $f$  heisst injektiv falls auf  $f(x_1) = f(x_2)$  stets  $x_1 = x_2$  folgt, falls jeder  $y \in Y$  höchstens ein Urbild hat.
2.  $f$  heisst surjektiv falls für jedes  $y \in Y$  ein  $x \in X$  gibt mit  $f(x) = y$

$$\forall y \in Y, \exists x \in X : f(x) = y$$

wenn jedes Element  $y \in Y$  mindestens ein Urbild hat.

3.  $f$  heisst bijektiv falls  $f$  injektiv und surjektiv ist, d.h. falls jedes  $y \in Y$  genau ein Urbild hat.

### Beispiel 1.12

#### Definition: Kardinalität

Wir sagen zwei Mengen  $X$  und  $Y$  sind gleichmächtig falls eine bijektive Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  gibt.

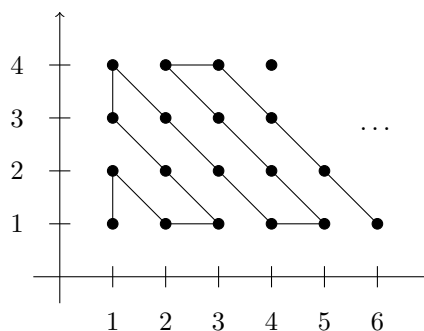
Mit dem ersten Cantorschen Diagonalverfahren kann man die Rationalen zählen abzählen, d.h.  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{N}$  sind gleichmächtig

Pages from 17.1 to 17.4 seem repetition, ask to be sure (document week2)

WRONG POSITION!!

unreadable, page 18

1.  $id_X : X \rightarrow X$  bijektiv.
2. Eine konstante Abbildung  $f : X \rightarrow X, x \rightarrow c$  ist
  - bijektiv  $\Leftrightarrow X = \{c\}$
  - surjektiv  $\Leftrightarrow X = \{c\}$
3. Die Projektionen
  - $pr_x : X \times Y \rightarrow X$
  - $pr_y : X \times Y \rightarrow Y$
 sind stets surjektiv.
4.  $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$   
 $x \rightarrow \sin x$   
 Surjektiv, nicht injektiv
1.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \rightarrow x^2$   
 Nicht surjektiv  
 Nicht injektiv
2.  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$   
 $n \rightarrow 2n$   
 ist Injektiv.  $f(\mathbb{N})$  ist die Menge aller geraden Zahlen
3. Eine Menge  $A$  hat  $n$  Elemente falls es eine bijektive  $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow A$  gibt. Die Zahl  $n$  wird dann die Kardinalität von  $A$  genannt und mit  $\#A$  bezeichnet, gelegentlich auch mit  $|A|$  bezeichnet

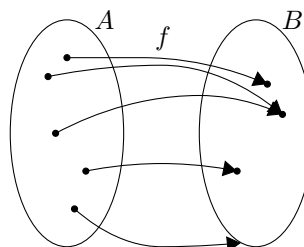


## 1.5 Dedekind Schubladen Prinzip

Is this supposed to be a new chapter?? page 19

Sei  $f : A \rightarrow B$  eine beliebige Abbildung zwischen endliche Mengen. Falls  $|B| < |A|$  dann ist  $f$  nicht injektiv, d.h. es gibt  $b \in B$  und  $a_1, a_2 \in A$  mit

- i)  $a_1 \neq a_2$
- ii)  $f(a_1) = f(a_2) = b$



$$3 = |B| < 5 = |A|$$

Mit Abbildungen kann man "operieren". Die wichtigste Operation ist die Verkettung (oder komposition) zweier Abbildungen.

**Definition**

Abbildungen  $f : X \rightarrow$ ,  $g : Y \rightarrow Z$  kann man miteinander ausführen. Dies ergibt eine neue Abbildung

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

$$F := g \circ f : X \rightarrow Z, x \rightarrow g(f(x))$$

Zwei Funktionen  $f$  und  $g$  können verkettet werden wenn der Wertebereich der ersten Funktion mit dem Definitionsbereich der zweiten Funktion übereinstimmt.

$$\text{Man Sagt } \begin{cases} g \text{ nach } f \text{ oder} \\ g \text{ komponiert mit } f \\ g \circ f \end{cases}$$

Zu Beachten: In dieser Notation steht die zuerst angewandte Abbildung rechts; das heisst bei  $g \circ f$  wird zuerst die Funktion  $f$  angewandt und dann die Funktion  $g$ .

- Die Identische Abbildung verhält sich bei der Komposition , für eine Funk-[?neu?, page 19.2 top](#)tion

$$f : X \rightarrow Y \text{ gilt also}$$

$$f \circ id_X = f = id_Y \circ Y$$

wobei

$$id_X : X \rightarrow X$$

$$x \rightarrow x$$

$$id_Y : Y \rightarrow Y$$

$$y \rightarrow y$$

- Die Komposition von Funktionen ist assoziativ, d.h. für Funktionen  $f, g, h$  gilt

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

- Aber die Komposition von Funktionen ist im Allgemeinen nicht kommutativ!

$$f \circ g \neq g \circ f$$

Zum Beispiel:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow x^2$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow x + 1$$

$$f \circ g = f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$g \circ f = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1$$

## 1.6 Die Inverse Abbildung (Umkehrfunktion)

Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine bijektiven Funktion.

Die Inverse Funktion  $g : Y \rightarrow X$ , einer bijektiven Funktion  $f : X \rightarrow Y$  ist die Funktion, die jedem Element  $y$  der Zielmenge seien eindeutig bestimmtes Urbildelement zuweist. (bei bijektiven Funktionen hat die Urbildmenge jedes Element  $y$  genau ein Element).

$g(y) := x$ , eindeutig definierte  $x \in \mathbf{X}$ , mit  $f(x) = y$ . Dann ist definitions-gemäss  $(g \circ f)(x) = x$ , d.h.  $g \circ f : id_{\mathbf{X}}$ . Die Eindeutig definierte Abbildung  $g$  wird (auch) mit  $f^{-1}$  bezeichnet und Inverse von  $f$  genannt.

Für  $f \circ f^{-1} : \text{Sei } y \in Y \text{ und sei } x \text{ mit } f(x) = y$ . Dann ist  $(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$

$$f \circ f^{-1} = id_Y$$

### Beispiel

1.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow 2x + 3$$

bijektive

Umkehrfunktion ist gegeben durch

$$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \frac{x-3}{2}$$

2. Sei  $\mathbb{R}^+ = [0, \infty]$  die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen und

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

mit

$$x \rightarrow x^2$$

Dann ist  $f$  bijektive und die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

ist gegeben durch

$$x \rightarrow \sqrt{x}$$

Verallgemeinerungen Falls  $f : X \rightarrow Y$  injektive ist, kann man die Umkehrabbildung

$$f^{-1} : f(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{X}$$

definieren. Das heisst, die Funktion  $f^{-1}$  erfüllt: wenn  $f(x) = y$ , dann  $f^{-1}(y) = x$

Vorsicht:  $f^{-1} \circ f = id_{\mathbf{X}}$  aber  $f \circ f^{-1} = id_{f(\mathbf{X})}$  und  $f \circ f^{-1} = id_Y$  genau dann wenn  $f(X) = Y$ , d.h.  $f$  bijektive ist.