Zur Lösung der Inhomogenen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten kann man einen "Ansatz vom Typ der rechten Seite" wählen.

Die Idee ist dass die Lösungfunktion und Störfunktion ähnlich sind.

Störfunk.	Ansatz für Lösung $y_s(x)$
$P_n(x)$	$Q_n(x) = a_n x^n + \dots + a_0$
$k e^{ax}$	$K e^{ax}$
$A \sin bx$ $A \cos bx$	$K_1 \sin(bx) + K_2 \cos bx$
$A e^{\alpha x} \sin(\beta x)$ $B e^{\alpha x} \cos(\beta x)$	$K_1 e^{\alpha x} \sin \beta x + K_2 e^{\alpha x} \cos \beta x$
$P_n(x) e^{\alpha x} \sin(\beta x)$ $Q_n(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x)$	$e^{\alpha x}\left[R_n(x) \sin(\beta x) + S_n(x) \cos(\beta x)\right]$

wobei

P_n, Q_n, S_n, R_n Polynome von Grad n sind.

Bmk 7.9 ① Liegt eine Linearkombination der Störfunktion vor, so hat man auch als Ansatz eine entsprechende Linearkombination zu wählen

Dies ist Superpositionsprinzip.

Bsp. Die DGL $y''+y'-6y=50\sin x$ hat die spezielle Lösung

$$y_{s_1}(x) = -7\sin x - \cos x$$

und

die DGL $y''+y'-6y=10e^{2x}$ hat die spezielle Lösung

$$y_s(x) = 2xe^{2x}$$

Die DGL $y''+y'-6y = 50\sin x + 10e^{2x}$

hat die spezielle Lösung

$$y_s(x) = -7\sin x - \cos x + 2xe^{2x}$$

Die allg. Lösung

$$y(x) = -7\sin x - \cos x + 2xe^{2x} + C_1e^{-3x} + C_2e^{2x}.$$

Superpositionsprinzip

Ist $y_1(x)$ eine spezielle Lösung der L. Differentialgleichung

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)}(x) + \dots + a_0(x)y = b_1(x)$$

und $y_2(x)$ eine spezielle Lösung der

LDGL $\quad y^{n}(x) + \dots + a_0(x)y = b_2(x)$

dann ist $y_1(x) + y_2(x)$ eine spezielle Lösung der DGL

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}\,y^{n-1}(x) + \dots + a_0(x)y = b_1(x) + b_2(x)$$

Bmk ② Falls $\lambda = \alpha + i\beta$ (β kann null sein) eine m-fache Nullstelle des characteristischen Polynoms von (Resonanzfall).

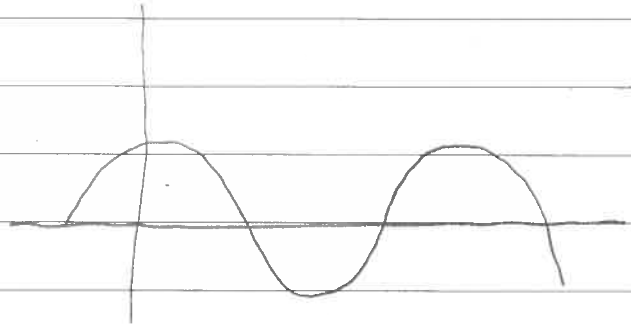
(H) $\quad y^{n}(x) + a_n y^{(n-1)} + \dots + a_0 = 0$

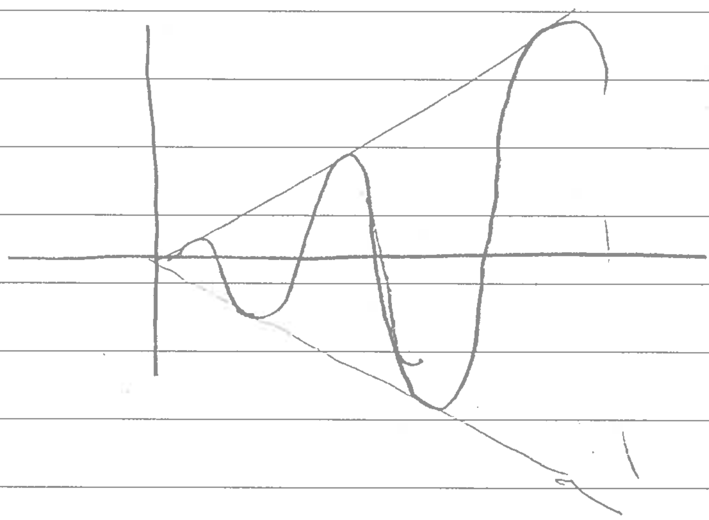
so muss man den Ansatz für $y_s(x)$ mit dem Faktor x^m multiplizieren.

<u>Bsp.</u> $y'' + y = \sin x$

hat die spezielle Lösung $y_S = -\frac{1}{2} x \cos x$.

Hom.





Inhom. mit

$b(x) = \frac{1}{2} x \cos x$

<u>Zusatzbedingungen einer DGL.</u>
<u>Anfangs und Randbedingungen:</u>

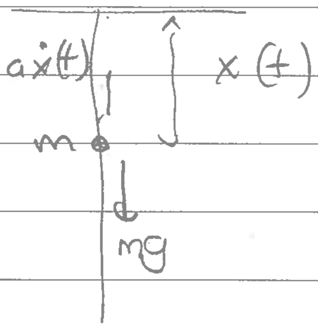
Die in der allgemeinen Lösung einer DGL n-ter Ordnung auftretenden Parameter lassen sich durch Zusatzbedingungen festlegen.

Physikalisch sinnvolle Zusatzbedingungen werden meist in der Form von Anfangsbedingungen oder Randbedingungen vorgegeben.

- Durch Vorgabe von derartigen Bedingungen eliminiert man die Parameter aus der allgemeinen Lösung der DGL und erhält damit eine <u>partikuläre Lösung</u>.

- <u>Bsp 6.10</u> Freifall mit Reibung

m



$$m\ddot{x} = mg - a\dot{x}$$

Anfangsbedingungen: $x(0) = 0$, $v(0) = \dot{x}(0) = 0$

$$m x''(t) + a x'(t) = mg$$

(H) $\quad m x''(t) + a x'(t) = 0$

$$p(\lambda) = m\lambda^2 + a\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0, \quad \lambda = -\frac{a}{m}$$

$$x_h(t) = c_1 + c_2 e^{-a/m\, t}.$$

○ Für die spezielle Lösung, wählen wir als Ansatz $x_s(t) = k t$

($b(t) = mg =$ konstant, aber $e^{0 \cdot t} = 1 =$ konst Ist eine Lösung der (H))

○ $x'(t) = k \qquad x''(t) = 0$

$$m x''(t) + a x'(t) = a k = mg$$

$$\Rightarrow k = +\frac{mg}{a}.$$

allg lösung

$$x(t) = x_h(t) + x_s(t) = c_1 + c_2 e^{-a/m\, t} + \frac{mg t}{a}.$$

Anfangsbedingungen

$$x(0) = 0 = c_1 + c_2 = 0$$

$$x'(t) = c_2\left(\frac{-a}{m}\right)e^{-\frac{a}{m}t} + \frac{mg}{a} = 0.$$

$$x'(0) = 0 \Rightarrow c_2\left(\frac{-a}{m}\right) + \frac{mg}{a} = 0.$$

$$c_2 = +\frac{m^2 g}{a^2} \qquad c_1 = -\frac{m^2 g}{a^2}$$

$$\Rightarrow x(t) = -\frac{m^2 g}{a^2} + \frac{m^2 g}{a^2}e^{-\frac{a}{m}t} + \frac{mg}{a}t$$

$$\boxed{x(t) = \frac{mg}{a}t - \frac{m^2 g}{a^2}\left[1 - e^{-\frac{a}{m}t}\right]}$$

Eine partikuläre Lösung einer DGL n-ter Ordnung
$y^{(n)} + a_n x^{n-1} + \ldots + a_0 = b(x)$
kann man aus der allgemeinen Lösung

$$y(x) = y(x; c_1, c_2, \ldots c_n) \text{ der DGL}$$

erhalten

- durch die Vorgabe von Anfangsbedingungen

$$y(x_0) = A_0$$
$$y'(x_0) = A_1$$
$$\vdots$$
$$y^{(n-1)}(x_0) = A_n$$

(Funktionswert und weitere Ableitungen bis zur $(n-1)$-ten an einer speziellen Stelle x_0.

oder

- durch die Vorgabe von Randbedingungen

$$y(x_1) = B_1, \quad y(x_2) = B_2, \ldots, \quad y(x_n) = B_n$$

Funktionswerte an n verschiedenen Stellen

Bsp. 7.11 Lineares Federpendel:

$$m\,x''(t) + K_1 x = 0 \quad , \quad \omega^2 = K/m$$

$$x''(t) + \omega^2 x = 0 \qquad (H)$$

$p(\lambda)$: $\quad \lambda^2 + \omega^2 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \pm\,\omega i$$

~~Hom.~~ Lösung: $\quad x_h(t) = c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t$

Wenn wir den folgenden Zusatzbedingungen

haben: (I) $x(0) = 1 \qquad x'(0) = 2\omega$

$$x'(t) = -c_1\omega \sin\omega t + c_2\omega\cos\omega t$$

$x(0) = 1 \Rightarrow c_1 \cos 0 + c_2 \sin(0) = c_1 = 1$

$x'(0) = 2\omega \Rightarrow -c_1\omega\sin(0) + c_2\omega\cos(0) = 2\omega$

$$\Rightarrow \omega c_2 = 2\omega \Rightarrow c_2 = 2.$$

$\Rightarrow \quad x_p(t) = \cos\omega t + 2\sin\omega t$

(II) mit Randbedingungen: $\quad x(0) = 1 \quad x\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) = 1$

$$x(0) = c_1\cos 0 + c_2 \sin 0 = c_1 = 1$$

$$x\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) = c_1 \cos\frac{\pi}{2} + c_2 \sin\frac{\pi}{2} = c_2 = 1$$

Also $x_p(t) = \cos\omega t + \sin\omega t$.

§7.3 Lineare DGL erster Ordnung (mit. allgemein Koeffizienten)

Die LDGL hat allgemeine Form

$$y'(x) = a(x)y + b(x).$$

$b(x)$ - inhomogene Term

und $y'(x) = a(x)y$ ist die zugehörige homogene Gleichung.

<u>Lösung von $y'(x) = a(x)y$:</u>

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = a(x).$$

d.h $\left(\ln y(x)\right)' = a(x)$.

sei $A(x)$ eine Stammfunktion von $a(x)$, so ist

$$\ln y(x) = A(x) + C.$$

Also $\quad y(x) = e^{A(x)} \cdot e^{C} = K e^{A(x)}$

<u>Satz 7.12</u> Die Allg. Lösung von $y' = ay$ ist $\quad y(x) = K e^{A(x)}$ wobei

$K \in \mathbb{R}$ und $A'(x) = a(x)$.

<u>Bsp</u>: $\quad xy' - 2y = 0$

$$y' = \frac{2}{x} y \Rightarrow a(x) = \frac{2}{x}$$

$$A(x) = 2\ln|x| = \ln x^2$$

$$e^{A(x)} = e^{\ln x^2} = x^2$$

$\Rightarrow$ Lösung von $y'(x) = \frac{2}{x} y$

$$y(x) = K x^2$$

Jetzt suchen wir eine spezielle Lösung von

$y' = a(x)y + b(x)$.

Ansatz: $y = u \cdot v$ wobei u, v Funk. sind

Dann ist $y' = u'v + uv'$.

und $a(x)y + b(x) = u'v + uv'$

$a(uv) + b = u'v + uv'$

$\Rightarrow u'v + u[v' - av] = b$.

Jetzt wählen wir v: so dass

$v' - av = 0$

d.h. $v = e^{A(x)}$. Dann ist

$u'v = b$. d.h $u' = be^{-A(x)}$

d.h. u ist eine Stammfunk. von $be^{-A(x)}$.

Satz 7.13: Seien $A(x)$ eine Stammfunk von $a(x)$ und $U(x)$ ein Stammfunk von $be^{-A(x)}$. dann ist $y(x) = e^{A(x)} \cdot U$ Lösung von

$y' = a(x)y + b(x)$.

<u>Kor 7.14</u> Die Allgemeine Lösung von LDGL $y' = ay + b$ ist durch

$$y(x) = e^{A(x)} \int b(x) e^{-A(x)} dx + K e^{A(x)}$$ gegeben

wobei $K \in \mathbb{R}$, $A(x)$ eine Stammfunk von $a(x)$

<u>Bsp 7.15 ①</u> $xy' - 2y = 2x^4$

$$\Rightarrow \quad y' = \underbrace{\frac{2}{x}}_{a(x)} y + \underbrace{2x^3}_{b(x)}$$

$A(x) = 2\ln|x| = \ln x^2$

$K e^{A(x)} = Kx^2$ ist die Lösung von hom. DGL $y' = ay$

Wir bestimmen jetzt Stammfunk von

$$b(x) e^{-A(x)} = 2x^3 \cdot e^{-\ln(x^2)}$$

$$= \frac{2x^3}{x^2} = 2x$$

Also ein Stammfunktion: $\int 2x\,dx = x^2$ und $x^2 e^{A(x)} = x^4$.

Somit ist die Allg. Lösung:

$$y(x) = x^4 + Kx^2.$$

(2): $y' = 4x + 5y - 3$

$y' - \underbrace{5}_{a} y = \underbrace{4x - 3}_{b}$ LDGL mit konst. coeff stamfunk $4x - 3$.

Homog: $y' - 5y = 0$

$$\frac{y'}{y} = \underbrace{5}_{a(x)}$$

$$\ln y(x) = 5x + C$$

$y_H(x) = Ke^{5x}$ Hom. Lösung.

$A(x) = 5x$

Spez. Lösung: Sei $U(x)$ stamm funk von

$$(4x-3)e^{-5x}$$

Dann ist spez. Lösung $e^{5x}U(x) = e^{5x}\int (4x-3)e^{-5x}dx$

$$\int \underbrace{(4x-3)}_{u}\underbrace{e^{-5x}}_{v'}\,dx$$

P.I.

$$= (4x-3)\frac{e^{-5x}}{-5} + \frac{4}{5}\int e^{-5x}\,dx$$

$$= \left[\left(\frac{4x-3}{-5}\right) - \frac{4}{25}\right]e^{-5x}$$

$$= \left(\frac{-4x}{5} + \frac{11}{25}\right)e^{-5x}$$

$\Rightarrow$ spez. Lösung: $y_s(x) = e^{5x} \cdot U(x)$

$$= \frac{-4x}{5} + \frac{11}{25}$$

Allg. Lösung = $\boxed{y(x) = Ke^{5x} - \frac{4x}{5} + \frac{11}{25}}$

§7.4

Separierbare DGL.

Defn 7.16 Eine separierbare DGL ist eine der Form

$$y' = f(x)g(y).$$

Ein einfaches Verfahren, so genannte "Separation der Variablen" lässt sich anwenden, wenn die DGL separierbar ist.

Der "Trick": Wir trennen die Terme voneinander und dann integrieren.

Dabei ist es hilfreich $y' = \frac{dy}{dx}$ zu schreiben und formal dy bzw dx als Zähler bzw Nenner des Bruches aufzufassen

Bsp 7.17 ① $y' = 2xy$

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2x\,dx$$

"trennen formal x bzw y Terme

jetzt integrieren wir auf beiden Seiten

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x \, dx$$

$$\ln|y| = x^2 + c$$

Da wir an der Lösung y interessiert sind und nicht am Logarithmus davon, wenden wir die exponentialfunktion an

$$|y| = e^{x^2+c} = e^c e^{x^2}$$

Links und rechts stehen nur +ve Grössen.

Wenn wir aber auf der Rechten Seite nicht nur positive konst $e^c > 0$ zulassen sondern irgendwelche Konstanten $K \in \mathbb{R}$ so erhalten wir

$$y(x) = Ke^{x^2}.$$

② $y' = 1 + y^2$ ist separabel

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int dx$$

$\Rightarrow \arctan y = x + c \Leftrightarrow y = \tan(x+c)$

○ Bmk 7.18 $y' = f(x)g(x)$ hat die Konstante Lösungen $y = y_0$ für alle y_0 mit $g(y_0) = 0$.

Der Fall $g(y) = 0$ muss gesondert betrachtet werden.

○

Bsp ③ $|x|, |y| < 1$, $y' = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$

hat keine konstante Lösungen

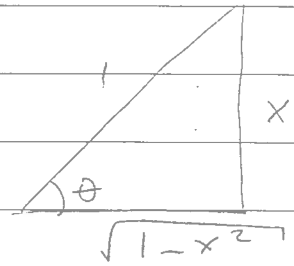
$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow \arcsin y = \arcsin x + C$$

$$y = \sin\left[\arcsin x + C\right]$$

$$= x\cos C \pm \sqrt{1-x^2}\,\sin C$$

$$= ax + b\sqrt{1-x^2}$$



wobei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a^2 + b^2 = 1$

Rückeinsetzen in die DGL liefert die Zusatzbedingung

$$y' = a - \frac{bx}{\sqrt{1-x^2}} > 0 . \quad (1 + y^2 > 0)$$