



WARNING!  
READ  
CAREFULLY!



The following document has not been checked for mistakes, and although every effort possible has been made to ensure that the information in this document is correct, it might still contain some mistakes. The following document is given “as is”, without any warranty whatsoever.

# Kapitel 4

## Stetigkeit

### 4.1 Grenzwerte von Funktionen

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  eine Teilmenge und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Abbildung.

#### Definition 4.1

$f$  hat an der Stelle  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  den *Grenzwert*  $a$ , falls für jede Folge  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $\Omega$  mit  $x_k \rightarrow x_0$  ( $k \rightarrow \infty$ ) gilt  $f(x_k) \rightarrow a$ .

Wir schreiben:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$

**Bemerkung:**  $x_0$  muss nicht im Definitionsbereich von  $f$  sein.

#### Definition 4.2

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  heisst *stetig* an der Stelle  $x_0 \in \Omega$ , falls:

1.  $f$  an der Stelle  $x_0$  definiert ist,
2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existiert, und
3.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

#### Definition 4.2'

Die Abbildung  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist im Punkt  $x_0 \in \Omega$  *stetig*, falls für jede gegen  $x_0$  konvergierende Folge  $(x_n)_{n \geq 1}$  in  $\Omega$ , die Folge  $(f(x_n))_{n \geq 1}$  zum Grenzwert  $f(x_0)$  konvergiert, d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right)$$

Anders gesagt:

- Grenzwerte von Folgen werden von stetigen Funktionen nicht verändert.

- Stetige Funktionen erhalten Grenzwerte von Folgen.

**Definition 4.2''**

Die Abbildung  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist auf  $\Omega$  *stetig* (oder *einfach stetig*, wenn der Kontext klar ist), falls  $f$  in jedem Punkt  $x \in \Omega$  stetig ist.

**Beispiele**

Mittels den Resultaten aus dem dritten Kapitel haben wir wichtige Beispiele von stetigen Funktionen.

- Diese Funktion ist auf ganz  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  stetig:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (a, b) &\mapsto (a + b) \end{aligned}$$

(Seien  $(a_n), (b_n)$  Folgen mit  $a = \lim a_n, b = \lim b_n$ . Dann ist die Folge  $(a_n + b_n)$  konvergent, und  $\lim a_n + b_n = a + b$ , nach Satz 3.8)

- Diese Funktion ist auf ganz  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  stetig:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (a, b) &\mapsto ab \end{aligned}$$

- Diese Funktion ist auf  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^x$  stetig:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^x &\rightarrow \mathbb{R} \\ (a, b) &\mapsto a/b \end{aligned}$$

- Aus wiederholter Anwendung von 1. und 2. ergibt sich die Polynomfunktion:

$$\text{Sei } n \geq 0, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} : p(x) := a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

Die polynomielle Funktion ist stetig auf ganz  $\mathbb{R}$ .

- Die folgenden beiden Abbildungen sind stetig auf ihrem Definitionsbereich.

$$\begin{array}{ll} \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \\ (a, b) \mapsto (a + b) & (\lambda, a) \mapsto \lambda a \end{array}$$

- Die folgenden Abbildungen sind stetig.

$$\begin{array}{lll} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} & \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} & \mathbb{C} \times \mathbb{C}^x \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto \bar{z} & (z, w) \mapsto z * w & (z, w) \mapsto z/w \end{array}$$

- Die folgenden Funktionen sind auf ihrem Definitionsbereich stetig:

## KAPITEL 4. STETIGKEIT

$$\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \|x\|$$

$$\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$z \mapsto |z|$$

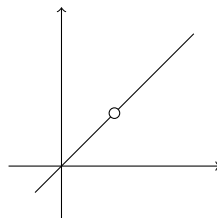
- Die charakteristische Funktion von  $\mathbb{Q}$ :

$$\text{Sei } f(x) = \chi_{\mathbb{Q}} = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Sei  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  fest mit  $(x_k) \in \mathbb{Q}, x_k \rightarrow x$ . Dann ist  $f(x_k) = \chi(x_k) = 1 \not\rightarrow 0 = \chi(x)$ .  
(Zu  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  sei  $x_k$  die an der k-ten Nachkommastelle abgebrochene Dezimaldarstellung von  $x$ . Dann gilt  $x_k \in \mathbb{Q} \forall k \in \mathbb{N}$  und  $x_k \rightarrow x$ .)

- Sei

$$f: \begin{cases} x & x < 1 \\ x & x > 1 \end{cases}$$



$f$  ist in  $x = 1$  nicht stetig, weil  $f$  an der Stelle  $x = 1$  nicht definiert ist. In diesem Beispiel ist die Funktion  $f$  nicht stetig, aber sie ist eigentlich eine “gute” Funktion.

Does that really say gute?

no ozlem number...

### Definition (Struwe 4.1.3 (ii))

$\Omega \subset \mathbb{R}^d, f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, x_0 \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega$  so dass  $\exists (x_k) \in \Omega$  mit  $\lim x_k = x_0$ .

Dann ist  $f$  an der Stelle  $x_0$  *stetig ergänzbar*, falls  $a = \lim f(x_k)$  existiert. In diesem Fall setzen wir

$$f(x_0) = a$$

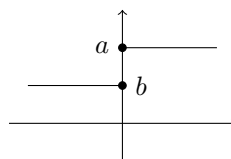
Die durch  $f(x_0) = a$  ergänzte Funktion  $f$  ist offenbar stetig an der Stelle  $x_0$ .

offenbar  $\rightarrow$  offensichtlich?

- Diese stückweise konstante Funktion ist stetig an jeder Stelle  $x_0 \neq 0$ . Sie ist jedoch für  $a \neq b$  an der Stelle  $x_0 = 0$  nicht stetig ergänzbar. (Struwe Beispiel 4.1.3 (vii))

$$f: \mathbb{R}^x \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{falls } x < 0 \\ b & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$



- Sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  monoton wachsend, d.h.  $\forall x, y \in (a, b)$  mit  $x \leq y$  folgt  $f(x) \leq f(y)$ . Sei ausserdem  $x_0 \in (a, b)$ . Dann existieren die *links- und rechtsseitigen Grenzwerte*

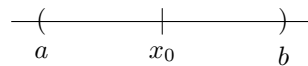
$$f(x_0^+) := \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0 \\ x \downarrow x_0}} f(x), \quad f(x_0^-) := \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0 \\ x \uparrow x_0}} f(x)$$

und  $f$  ist stetig an der Stelle  $x_0$  genau dann, wenn  $f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0)$ .

### Beweis

Wir behaupten, dass für jede Folge  $(y_n)_{n \geq 1}$  mit  $\{y_n : n \geq 1\} \subset (a, x_0)$  und  $\lim y_n = x_0$  die Folge  $(f(y_n))_{n \geq 1}$  konvergent und der linksseitige Limes  $l_-(x_0)$  unabhängig von der Wahl der Folge ist.

$$l_-(x_0) := \text{linksseitiges Limes} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$$



Wir betrachten zunächst die “spezielle” Folge  $x_n = (x_0 - \frac{1}{n})_{n \geq r}$ . Hier ist  $r$  so gewählt, dass  $x_0 - \frac{1}{r} \geq a$ .

Dann ist  $(f(x_0 - \frac{1}{n}))_{n \geq r}$  monoton wachsend ( $x_0 - \frac{1}{n+1} > x_0 - \frac{1}{n}$  und  $f$  monoton wachsend) und  $(f(x_0 - \frac{1}{n}))_{n \geq r}$  beschränkt ( $f(a) < [...] < f(b)$ ).

missing in source material p134week8sem1

$$\text{Sei } l_- := \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_0 - \frac{1}{n})$$

Wir möchten zeigen, dass für jede  $(y_n) \subset (a, x_0)$  mit  $\lim y_n = x_0$   $\lim f(y_n)$  existiert und  $\lim f(y_n) = l_-$ .

= l\_- oder = l.?

Da es für jedes  $x < x_0$  ein  $n$  gibt, mit  $x \leq x_0 - \frac{1}{n}$ , folgt

$$f(x) \leq f(x_0 - \frac{1}{n}) \leq l_-$$

Sei nun  $(y_n)_{n \geq 1}$  beliebig in  $(a, x_0)$  mit  $\lim y_n = x_0$ . Sei  $\varepsilon > 0$ ,  $(y_n < x_0)$  und  $n_0(\varepsilon)$  mit

$$l_- - \varepsilon < f(x_0 - \frac{1}{n}) \leq l_- \quad \forall n > n_0(\varepsilon)$$

Insbesondere

$$l_- - \varepsilon < f(x_0 - \frac{1}{n_0(\varepsilon)}) \leq l_-$$

Sei jetzt  $n_1(\varepsilon) = n_1(n_0(\varepsilon)) > 0$ , so dass

$$x_{n_0(\varepsilon)} = x_0 - \frac{1}{n_0(\varepsilon)} < y_n < x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \forall n \geq n_1(\varepsilon)$$

$$((y_n) \subset (a, x_0), \lim y_n = x_0)$$

## KAPITEL 4. STETIGKEIT

Da  $f$  monoton ist, folgt

$$l_- - \varepsilon < f(x_0 - \frac{1}{n_0(\varepsilon)}) \leq f(y_n) \leq l_- = \lim f(x_n)$$

Insbesondere  $\lim f(y_n) = l_-$ .

Der Beweis für  $L_+$  verläuft ganz analog.

Nun zur Stetigkeit: Es gilt immer

$$l_-(x_0) \leq f(x_0) \leq l_+(x_0)$$

Falls  $l_-(x_0) < l_+(x_0)$ , sei  $(t_n)_{n \geq 1}$  wie folgt definiert:

$$t_n = \begin{cases} x_0 - \frac{1}{n} & n \text{ gerade} \\ x_0 + \frac{1}{n} & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Dann gilt  $\lim t_n = x_0$ . Aber  $f(t_{2n+1}) - f(t_n) \geq l_+(x_0) - l_-(x_0) > 0$ , woraus folgt, dass  $(f(t_n))_{n \geq 1}$  nicht konvergent.

Falls  $l_-(x_0) = l_+(x_0)$  folgt die Stetigkeit sofort.

dest? p 135 bottom

### Satz 4.3

Sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  monoton wachsend. Dann ist die Menge der Unstetigkeitspunkte von  $f$  entweder endlich oder abzählbar.

### Beweis

Sei  $U(f) = \{x \in (a, b) : f \text{ ist nicht stetig an } x\}$ . Dann ist  $\forall x \in U(f), \quad l_-(x) < l_+(x)$  und wir wählen ein  $g(x) \in (l_-(x), l_+(x))$ . Falls  $x_1 < x_2$  in  $U(f)$ , folgt  $l_+(x_1) < l_-(x_2)$  und somit  $g(x_1) < g(x_2)$ . Damit ist  $g : U(f) \rightarrow \mathbb{R}$  injektiv. Stetigkeit verträgt sich gut mit den üblichen Operationen auf Funktionen.

unreadable.. p136 mid

same unreadable character

### Satz 4.4

Seien  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $x_0 \in \Omega$ . Falls  $f$  und  $g$  in  $x_0$  stetig sind, so sind es auch  $f + g$  und  $\alpha f$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

### Korollar 4.5

Falls  $f, g$  auf  $\Omega$  stetig sind, so sind es auch  $f + g$  und  $\alpha f$ .

### Definition 4.6

$$C(\Omega, \mathbb{R})$$

bezeichnet die Menge der stetigen Abbildungen  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Nach Korollar 4.5 ist es ein Vektorraum.

**Satz 4.7**

Seien  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, \Omega \subset \mathbb{R}^d$  und  $g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $f(\Omega) \subset \Gamma$  und  $x_0 \in \Omega, y_0 = f(x_0) \in \Gamma$ . Falls  $f$  in  $x_0$  und  $g$  in  $y_0$  stetig sind, folgt, dass  $g \circ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  in  $x_0$  stetig ist.

**Beweis**

Sei  $(t_n)_{n \geq 1}$  in  $\Omega$  mit  $\lim t_n = x_0$ . Da  $f$  stetig ist,  $\lim f(t_n) = f(x_0) = y_0$ , und aus der Stetigkeit von  $g$  folgt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(f(t_n)) = g(y_0) = (g \circ f)(x_0)$$

**Korollar 4.8**

Falls  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d, f(\Omega) \subset \Gamma$  und  $g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^m$ , auf  $\Omega$  bzw auf  $\Gamma$  stetig sind, so folgt, dass  $g \circ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  auf  $\Omega$  stetig ist.

## 4.2 Stetige Funktionen

In diesem Abschnitt behandeln wir die erste der fundamentalen Eigenschaften von stetigen Funktionen, nämlich, dass eine auf einem endlichen Intervall  $[a, b]$  (Endpunkte eingeschlossen) stetige Funktion immer ein Maximum und Minimum besitzt. Dies verallgemeinern wir dann auf Abbildungen von  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  nach  $\mathbb{R}^n$ , wobei  $\Omega$  eine spezielle Eigenschaft haben muss (Kompaktheit).

**Satz 4.9**

Seien  $-\infty < a \leq b < \infty$  und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist  $f([a, b])$  in  $\mathbb{R}$  beschränkt und es gibt  $c_-, c_+ \in [a, b]$  mit

$$\begin{aligned} f(c_+) &= \sup \{f(x) : x \in [a, b]\} \\ f(c_-) &= \inf \{f(x) : x \in [a, b]\} \end{aligned}$$

d.h. Supremum und Infimum werden angenommen.

**Beweis**

1.  $f([a, b])$  ist nach oben beschränkt (Indirekter Beweis)

Falls nicht, so gibt es  $\forall n \in \mathbb{N}$  ein  $t_n \in [a, b]$  mit  $f(t_n) \geq n$ .  
 $(t_n)_{n \geq 1}$  ist beschränkt, nach Bolzano-Weierstrass. Sei  $(t_{l(n)})$  eine konvergente Teilfolge mit  $\lim t_{l(n)} = x$ .  
 Dann ist  $x \in [a, b]$ , da  $a \leq t_n \leq b$   
 (Satz:  $(a_n), (b_n)$  konvergente Folgen mit  $\lim a_n = a, \lim b_n = b$ . Falls  $a_n \leq b_n$ , folgt  $a \leq b$ .)  
 Aus der Stetigkeit von  $f$  folgt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n) = f(x)$ . Insbesondere ist  $f(t_{l(n)})$  beschränkt, was im Widerspruch zu  $f(t_{l(n)}) \geq l(n)$  steht.

$\implies f$  ist nach oben beschränkt.

## KAPITEL 4. STETIGKEIT

2.  $f$  ist nach unten beschränkt (analog)

Sei  $M := \sup \{f(x) : x \in [a, b]\}$ , welches als Folge von 1. existiert.  
Sei für jedes  $n \geq 1$   $x_n \in [a, b]$  mit

$$M - \frac{1}{n} < f(x) \leq M \quad (*)$$

$(M - \frac{1}{n} \text{ ist kein Supremum} \implies \exists x_n \text{ mit } M - \frac{1}{n} < f(x_n))$

3.  $(x_n) \subset [a, b]$  beschränkt.

Sei nach Bolzano-Weierstrass  $(x_{l(n)})_{n \geq 1}$  eine konvergente Teilfolge mit Limes  $c_+$ . Aus der Stetigkeit von  $f$  folgt:

$$f(c_+) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{l(n)})$$

Aus  $(*)$  folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{l(n)}) = M$$

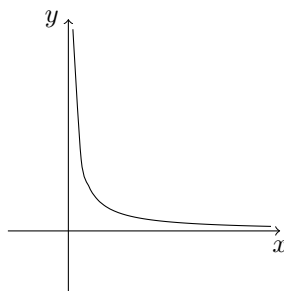
d.h.  $\exists c_+ \in [a, b]$  mit

$$f(c_+) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{l(n)}) = M$$

4. Infimum ist ähnlich.

### Bemerkung

Satz 4.9 kann man als eine Eigenschaft des Intervalls  $[a, b]$  auffassen. Sie gilt zum Beispiel nicht für  $(0, 1]$  wie das Beispiel der auf  $(0, 1]$  stetigen Funktion  $f(x) = \frac{1}{x}$  zeigt.



Die grundlegende Eigenschaft ist Kompaktheit.

#### Definition 4.10

Eine Teilmenge  $K \subset \mathbb{R}^d$  heisst *kompakt*, falls jede Folge  $(x_n)_{n \geq 1}$  von Punkten aus  $K$  einen Häufungspunkt *in*  $K$  besitzt, d.h. falls jede Folge in  $K$  eine *in*  $K$  konvergierende Teilfolge hat.



**Beispiel**

1.  $(0, 1]$  ist nicht kompakt:  
 $(\frac{1}{n})_{n \geq 1} \subset (0, 1]$  konvergiert gegen  $0 \notin (0, 1]$ .
2.  $[a, b]$  ist kompakt.  
 Sei  $(t_n)_{n \geq 1}$  eine Folge mit  $a \leq t_n \leq b$ .  $(t_n)$  ist beschränkt, nach Bolzano-Weierstrass sei  $(t_{l(n)})$  eine konvergente Teilfolge mit Limes  $l$ . Dann folgt aus  $a \leq t_n \leq b$   $(t_{l(n)}) \quad \forall n \geq 1$ , dass

$$a \leq \lim t_{l(n)} \leq b$$

D.h.  $l \in [a, b]$ .

**Lemma 4.11**

Falls  $K \subset \mathbb{R}^d$  kompakt ist, ist es beschränkt und besitzt zudem ein Minimum und Maximum.

**Beweis**

Sonst gibt es zu jedem  $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$  ein  $x_n \in K$  mit  $\|x_n\| \geq n$ . Dann kann aber  $(x_n)_{n \geq 1}$  keine konvergente Teilfolge besitzen:  $(\|x_{l(n)}\| > l(n))$ .

$\implies K$  ist beschränkt.

Sei  $s := \sup K$ . Dann gibt es  $\forall n \geq 1, k_n \in K$  mit

$$s - \frac{1}{n} < k_n \leq s$$

Insbesondere gilt  $\lim k_n = s$ . Da  $K$  kompakt ist, hat  $k_n$  eine in  $K$  konvergierende Teilfolge. Daraus folgt, dass  $s \in K$ .

**Beispiel**

$S^d := \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : \|x\| = 1\}$ , die  $d$ -dimensionale Sphäre, ist kompakt.

**Beweis**

Sei  $(x_n)_{n \geq 1} \subset S^d$ , dann ist diese Folge offensichtlich beschränkt, besitzt sie (nach Bolzano-Weierstrass) eine konvergente Teilfolge  $(x_{l(n)})_{n \geq 1}$ . Sei  $p \in \mathbb{R}^{d+1}$  deren Limes. Da die Funktion  $f(x) := \|x\|$  stetig ist, folgt

$$\|p\| = f(p) \stackrel{\text{defn}}{=} f(\lim x_{l(n)}) \stackrel{f \text{ stetig}}{=} \lim f(x_{l(n)}) = 1$$

$$\implies p \in S^d$$

Die Verallgemeinerung von Satz 4.9 ist

**Satz 4.12**

1. Sei  $K \subset \mathbb{R}^d$  kompakt und  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetige Abbildung. Dann ist  $f(K) \subseteq \mathbb{R}^n$  eine kompakte Teilmenge.
2.  $f$  nimmt ihr Supremum und Infimum an, d.h. es gibt  $c_-, c_+ \in K$  mit

$$f(x_-) \leq f(x) \leq f(x_+) \quad \forall x \in K$$

## KAPITEL 4. STETIGKEIT

### Beweis

1. Sei  $(y_n)_{n \geq 1}$  eine beliebige Folge in  $f(K)$ . Wir müssen zeigen, dass es eine konvergente Teilfolge mit Limes in  $f(K)$  gibt. Sei  $(x_n) \in K$  mit

$$f(x_n) = y_n, n \geq 1$$

Dann ist  $(x_n)_{n \geq 1}$  eine Folge in  $K$ . Da  $K$  kompakt ist, gibt es  $p \in K$  und  $(x_{l(n)})$ , eine konvergente Teilfolge mit  $\lim x_{l(n)} = p$ .

Aus der Stetigkeit von  $f$  folgt

$$f(p) = f(\lim x_n) \stackrel{f \text{ stetig}}{=} \lim f(x_{l(n)}) = \lim y_{l(n)}$$

D.h.  $y_{l(n)}$  ist eine Teilfolge von  $y_n$  mit Limes  $f(p) \in K$ .

$\Rightarrow f(K)$  ist kompakt.

2. Da  $f(K)$  kompakt ist, (nach 1.), ist  $f(K)$  beschränkt, und besitzt zudem ein Minimum und Maximum (nach Lemma 4.11).

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \exists y_+, y_- \in f(K), \text{ mit } y_+ &= \sup f(K) \\ y_- &= \inf f(K) \\ \exists c_+, c_- \in K, \text{ mit } y_+ &= f(c_+) \\ y_- &= f(c_-) \end{aligned}$$

## 4.3 Norm auf $\mathbb{R}^d$

Der Distanzbegriff auf  $\mathbb{R}^d$  kommt vom Skalarprodukt. Es gibt interessante, andere Arten einen Distanzbegriff einzuführen, nämlich mit dem Begriff der Norm.

In the source notes, this is 4.4, but there is no 4.3 that I can find...

### Definition 4.13

Eine *Norm* auf  $\mathbb{R}^d$  ist eine Abbildung

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$$

mit den folgenden Eigenschaften:

1. *Definitheit*:  $\|x\| \geq 0$  mit Gleichheit genau dann wenn  $x = 0$ .
2. *Positive Homogenität*:  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^d$
3. *Dreiecks-Ungleichung*:  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d$

### Beispiel 4.14

- 1.

$$\|x\|_2 = \left( \sum_{i=1}^d |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad x = (x_1, \dots, x_d)$$

kommt vom Skalarprodukt.

2. Für  $1 \leq p < \infty$  sei

$$\|x\|_p := \left( \sum_{i=1}^d |x_i^p| \right)^{\frac{1}{p}}$$

und  $\|x\|_\infty = \max \{|x_i| : 1 \leq i \leq d\}$ , dann sind  $\|\cdot\|_p, 1 \leq p \leq \infty$  Normen auf  $\mathbb{R}^d$ .

Zwischen diesen verschiedenen Normen haben wir die folgenden Verhältnisse:

$$\|x\|_\infty = \max |x_i| \leq \|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^d |x_i|^p} \leq d \|x\|_\infty \quad (*)$$

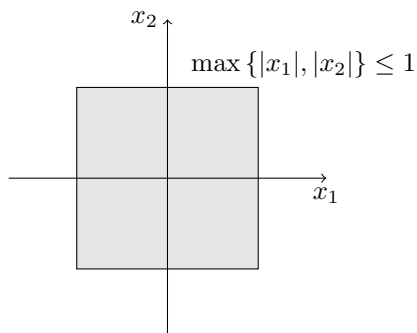
Bild von  $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^d |x_i| \leq 1$



$\|x\|_2 = \sqrt{\sum x_i^2} \leq 1$



$\max_i \{|x_i|\} = \|x\|_\infty \leq 1$



**Definition 4.15**

Zwei Normen  $\|\cdot\|^{(1)}, \|\cdot\|^{(2)}$  auf  $\mathbb{R}^d$  heißen *äquivalent*, falls es  $c_1, c_2 > 0$  gibt, mit

$$c_1 \|x\|^{(1)} \leq \|x\|^{(2)} \leq c_2 \|x\|^{(1)} \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

**Bemerkung:** Sei  $C = \max\{C_2, \frac{1}{C_1}\}$ , dann gilt  $(\frac{1}{C})\|x\|^{(1)} \leq \|x\|^{(2)} \leq C\|x\|^{(1)}$

**Beispiel**

Die Normen  $\|\cdot\|_p$   $1 \leq p \leq \infty$  sind wegen (\*) äquivalent.

**Bemerkung 4.16**

Äquivalente Normen definieren dieselben “offenen Mengen” via Distanzfunktion.

**Beweis**

Für die Normkugeln

$$B_r^{(1)}(x_0) := \{x : \|x - x_0\|^{(1)} < r\}$$

gilt mit  $c_1 \|x\|^{(1)} \leq \|x\|^{(2)} \leq c_2 \|x\|^{(1)}$

$$B_{rc_1}^{(1)}(x_0) \subset B_r^{(2)}(x_0) \subset B_{c_2 r}(x_0)$$

$\implies x_0 \in \Omega$  innerer Punkt von  $\Omega$  bezüglich  $\|\cdot\|^{(2)} \iff x_0 \in \Omega$  innerer Punkt von  $\Omega$  bezüglich  $\|\cdot\|^{(1)}$

Auf  $\mathbb{R}^d$  haben wir

**Satz 4.17**

Je zwei Normen auf  $\mathbb{R}^d$  sind äquivalent.

**Beweis**

Es genügt zu zeigen, dass eine beliebige Norm  $\|\cdot\|$  zu  $\|\cdot\|_2$  äquivalent ist.

Seien  $x = \sum x_i e_i, y = \sum y_i e_i$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \|x - y\| &= \left\| \sum_{i=1}^d (x_i - y_i) e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^d |x_i - y_i| \|e_i\| \leq \|x - y\| \underbrace{\sum_{i=1}^d \|e_i\|}_{:=C} \\ &\stackrel{(*)}{\leq} C' \|x - y\|_2 \end{aligned}$$

Also folgt, dass  $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto \|x\|$  stetig ist.

marked as skip? p152  
week 9 sem1

Layout imperfect, but  
hard to make better..  
p153 week9 sem1

Da  $S^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_2 = 1\}$  kompakt ist, folgt, dass es  $c_+, c_- \in S^{d-1}$  gibt, mit  $k_- := \|c_-\| \leq \|x\| \leq \|c_+\| := k_+ \forall x \in S^{d-1}$ . Da  $c_0 \neq 0$  folgt  $k_- > 0$ .

Sei  $x \neq 0$  allgemein ( $C_- \in S^{d-1}$ ), dann ist  $y := \frac{x}{\|x\|_2} \in S^{d-1}$  also  $k_- \leq \left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\| < k_+$ , woraus

$$k_- \|x\|_2 \leq \|x\| \leq k_+ \|x\|_2$$

folgt.

## 4.4 $\varepsilon - \delta$ Kriterium für Stetigkeit

4.5 in source notes.  
what to do?

Wir haben das folgende Kriterium für Stetigkeit an der Stelle  $x_0$ :

### Satz 4.18

Sei  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  eine Abbildung,  $x_0 \in \Omega$ . Folgende Eigenschaften sind äquivalent:

1.  $f$  ist stetig an der Stelle  $x_0$ .  
D.h. für jede gegen  $x_0$  konvergierende Folge  $(x_n) \subset \Omega$  konvergiert die Folge  $f(x_n)$  gegen  $f(x_0)$ .
2. Für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es  $\delta > 0$ , so dass für alle  $x \in \Omega$  mit  $|x - x_0| < \delta$  gilt:

$$|\delta(x) - \delta(x_0)| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in \Omega, \|x - x_0\| < \delta \implies \|\delta(x) - \delta(x_0)\| < \varepsilon$$

### Beweis 4.18

(1)  $\Rightarrow$  (2) (Indirekt)

Wir nehmen also an, dass (2) nicht gilt, d.h. es gibt  $\varepsilon > 0$ , so dass für jedes  $\delta > 0$  einem Punkt  $x_\delta$  gibt mit

$$\|x_\delta - x_0\| < \delta \text{ und } \|f(x_\delta) - f(x_0)\| > \varepsilon$$

$$\left( \begin{array}{l} \neg (\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \Omega : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon) \\ = (\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in \Omega : |x - x_0| < \delta \not\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon) \\ \text{d.h.} \\ \exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x_\delta \in \Omega : |x_\delta - x_0| < \delta \text{ und } |f(x_\delta) - f(x_0)| > \varepsilon \end{array} \right)$$

Sei  $\varepsilon > 0$ . Wir wählen jetzt  $\delta_n = \frac{1}{n}$ , dann gibt es  $x_n := (x_{\delta_n})_{n \in \mathbb{N}}$ , eine Folge in  $\Omega$ , mit  $\lim x_n = x_0$ . Aber die Folge  $(f(x_n))$  kann offensichtlich nicht gegen  $f(x_0)$  konvergieren (Da  $|f(x_n) - f(x_0)| > \varepsilon$ ), d.h.  $f$  ist nicht stetig in  $x_0$ .

(2)  $\Rightarrow$  (1) Sei  $(x_n)_{n \geq 1}$  eine Folge in  $\Omega$  mit Grenzwert  $x_0$ . Wir möchten zeigen, dass  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ . Sei  $\varepsilon > 0$ , nach (2) sei  $\delta_\varepsilon > 0$ , so dass  $\forall x \in \Omega$  mit

$$|x - x_0| < \delta_\varepsilon \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Da  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ , gibt es  $N \geq 1$ , so dass

$$\|x_n - x_0\| < \delta \quad \forall n \geq N_\delta$$

## KAPITEL 4. STETIGKEIT

(Hier hängt  $N$  von  $\delta$  und also im Endeffekt von  $\varepsilon$  ab). Aus (2) folgt

$$\|f(x_n) - f(x_0)\| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_\delta$$

Dies zeigt  $\lim f(x_n) = f(x_0)$

■

### Beispiel

1.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x + 8$ . Dann  $f$  ist stetig auf  $\mathbb{R}$ . Sei  $\varepsilon > 0$ , sei  $x_0 \in \mathbb{R}$

$$|f(x) - f(x_0)| = |(3x + 8) - (3x_0 + 8)| = 3|x - x_0| \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Sei  $\varepsilon > 0$ . Wenn wir  $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$  wählen, dann

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

In diesem Beispiel hängt  $\delta$  nur von  $\varepsilon$  ab. Das nächste Beispiel zeigt, dass  $\delta$  nicht nur von  $\varepsilon$ , sondern auch von  $x_0$  abhängen kann.

- 2.

$$f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$$

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

ist stetig auf  $(0, \infty)$ . Sei  $x_0 \in (0, \infty)$

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| = \left| \frac{x_0 - x}{x \cdot x_0} \right|$$

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow -\delta < x - x_0 < \delta \Rightarrow x > x_0 - \delta$$

$$|f(x) - f(x_0)| = \frac{|x_0 - x|}{|x||x_0|} < \frac{|x - x_0|}{|x_0||x_0 - \delta|}$$

Sei  $\delta < \frac{x_0}{2}$ , dann folgt

$$\delta < \frac{x_0}{2} \Rightarrow x_0 - \delta > x_0 - \frac{x_0}{2} > \frac{x_0}{2}$$

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{|x_0 - x|}{|x||x_0 - \delta|} \leq \frac{|x - x_0| \cdot 2}{|x_0|^2} \leq \frac{2\delta}{|x_0|}$$

Sei

$$\delta_{\varepsilon; x_0} = \min \left\{ \frac{x_0}{2}, \frac{\varepsilon |x_0|^2}{2} \right\}$$

Dann

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon |x_0|^2}{2} \cdot \frac{2}{|x_0|^2} = \varepsilon$$

## 4.5 Zwischenwertsatz

### Satz 4.19

Seien  $a < b$  in  $\mathbb{R}$  und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion, mit  $f(a) \leq f(b)$  (oder  $f(a) \geq f(b)$ ). Dann gibt es zu jedem  $y \in [f(a), f(b)]$  ein  $x \in [a, b]$  mit  $f(x) = y$ .

### Beweis

Die Idee ist einfach. Wir benutzen ein Approximationsverfahren (In diesem Fall ein Bisektionsverfahren). Wir definieren zwei monotone Folgen

$$a = a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq b_2 \leq b_1 = b$$

mit  $a_n \nearrow, b_n \searrow, \lim a_n = \lim b_n = c$  und

$$f(a_n) < y \leq f(b_n)$$

Dann folgt aus der Stetigkeit von  $f$ , dass

$$\lim f(a_n) = \lim f(b_n) = f(c) = y$$



Fall 1:

Falls  $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq y$ , setzen wir:

$$\begin{aligned} a_2 &= a \\ b_2 &= \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$



Fall 2:

Falls  $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < y$ , setzen wir:

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{a+b}{2} \\ b_2 &= b \end{aligned}$$

Auf jeden Fall gibt es

1.  $a_1 \leq a_2 < b_2 \leq b_1$
2.  $(b_2 - a_2) = \frac{1}{2}(b_1 - a_1)$
3.  $f(a_2) < y \leq f(b_2)$

Wir iterieren jetzt dieses Verfahren. Wir nehmen an, dass wir Folgen nach  $(k-1)$ -Schnitten definiert haben

## KAPITEL 4. STETIGKEIT

1.  $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \cdots \leq a_k < b_k \leq b_{k-1} \cdots \leq b_1$
2.  $(b_k - a_k) = \frac{1}{2^{k-1}} (b_1 - a_1)$
3.  $f(a_k) < y \leq f(b_k)$

Nun unterscheiden wir wieder zwei Fälle

Fall 1:

$$f\left(\frac{a_k + b_k}{2}\right) \geq y$$

dann definieren wir  $a_{k+1} = a_k$  und  $b_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2}$

Fall 2:

$$f\left(\frac{a_k + b_k}{2}\right) < y$$

dann definieren wir  $a_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2}$  und  $b_{k+1} = b_k$ . Dann ist immer

1.  $a_k \leq a_{k+1} < b_{k+1} \leq b_k$
2.  $b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{1}{2} (b_k - a_k) = \frac{1}{2^k} |b_1 - a_1|$
3.  $f(a_{k+1}) < y \leq f(b_{k+1})$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion erhalten wir zwei Folgen  $(a_n)_{n \geq 1}$ ,  $(b_n)_{n \geq 1}$ , die die Eigenschaften 1., 2. und 3. erfüllen.  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  sind monoton und beschränkt  $\Rightarrow$  gibt es

$$\bar{a} = \lim a_k \leq \bar{b} = \lim b_k$$

Wegen 2.

$$\lim |a_k - b_k| = \lim \left| \frac{b_1 - a_1}{2^k} \right| = 0$$

d.h.  $\lim a_k = \lim b_k$ . Sei  $c \in [a, b]$  dieser Wert. Aus Stetigkeit von  $f$  folgt

$$f(c) = \lim f(a_n) = \lim f(b_n)$$

Aus 3. folgt

$$\begin{aligned} f(a_n) < y &\Rightarrow f(c) \leq y \\ g \leq f(b_n) &\Rightarrow y \leq f(c) \end{aligned}$$

also  $f(c) = y$ .

■

### Korollar 4.20

1. Sei

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

ein Polynom mit reellen Koeffizienten, so dass  $a_n \neq 0$  und  $n$  ungerade ist. Dann besitzt  $p$  mindestens eine reelle Nullstelle.



**Beweis**

Sei

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{p(x)}{a_n} \\ &= x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot x^{n-1} + \dots + \frac{a_0}{a_n} \\ &= x^n \left[ 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{x} + \dots + \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{x^n} \right] \end{aligned}$$

Dann

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^5} = 0$$

Folgt insbesondere, dass es  $c > 0$  gibt so dass für  $|x| \geq c$

$$1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{x} + \dots + \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{x^n} \geq \frac{1}{2}$$

Folglich ist:

$$q(c) \geq c^n \frac{1}{2} > 0$$

$$(n = \text{ungerade}) \quad q(-c) \leq -c^n \frac{1}{2} < 0$$

Also gibt  $x_0 \in [-c, c]$  mit  $q(x_0) = 0$

■

2. Eine reelle  $3 \times 3$  Matrix besitzt immer einen reellen Eigenwert.

**Satz 4.21**

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, streng monoton wachsend (d.h.  $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ ).  
Dann ist

$$\text{Bild}(f) = [c, d] = [f(a), f(b)]$$

$f : [a, b] \rightarrow [c, d]$  ist bijektiv und  $f^{-1} : [c, d] \rightarrow [a, b]$  ist stetig.

**Beweis**

1.  $f$  streng monoton wachsend, d.h. falls  $x \neq y$ , dann ist  $f(x) \neq f(y) \Rightarrow f$  Injektiv.

Zwischenwertsatz  $\Rightarrow f$  surjektiv.  $c = f(a) < f(b) = d$ , Sei  $y \in [c, d]$ , ZWS  
 $\Rightarrow \exists x \in (a, b)$  mit  $f(x) = y \Rightarrow f$  ist bijektiv.

2.  $f^{-1}$  ist stetig: Sei  $y \in [c, d]$  und sei  $(y_0) \in [c, d]$  eine Folge mit  $\lim y_n = y_0$ .  $f$  bijektiv,  $\exists x_n, x_0 = f^{-1}(y_0)$ ,  $(x_n)$  beschränkt. Sei  $f^{-1}(y_{l(n)})$  eine beliebige konvergente Teilfolge und  $x$  deren Grenzwert

$$\lim f^{-1}(y_{l(n)}) = x$$

## KAPITEL 4. STETIGKEIT

$$f \text{ stetig} \Rightarrow \lim f(f^{-1}(y_{l(n)})) = f(f^{-1}(y_{l(n)})) = f(x)$$

aber

$$\lim f(f^{-1}(y_{l(n)})) = \lim y_{l(n)}$$

$$\Rightarrow \lim y_{l(n)} = f(x), y_n \text{ ist aber auch konvergent}$$

$$\Rightarrow \lim y_{l(n)} = f(x), \text{ aber } \lim y_n = y_0$$

$$\Rightarrow y_0 = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y_0) = x_0$$

$$\Rightarrow \text{Jede Teilfolge von } (x_0) \text{ hat denselben Häufungspunkt } x_0.$$

$$\Rightarrow \limsup x_n = x_0 = \liminf x_n, \text{ also } \lim f^{-1}(y_n) = \lim x_n = x_0 = f^{-1}(y_0) \Rightarrow f \text{ stetig}$$

■

### Korollar 4.22

Sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und streng monoton wachsend mit monotonem Limes

$$-\infty < c := \lim_{x \downarrow a} f(x) < \lim_{x \uparrow b} f(x) =: d < \infty$$

dann ist  $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$  bijektiv und  $f^{-1}$  ist stetig.

### Korollar 4.22

Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Die Potenzfunktion  $f(x) = x^n$  ist auf ganz  $\mathbb{R}$  stetig. Sie ist auf  $(0, \infty)$  streng monoton wachsend mit Bild  $(0, \infty)$ . Die Umkehrfunktion

$$(0, \infty) \rightarrow (0, \infty) \\ x \rightarrow \sqrt[n]{x}$$

ist stetig.

### Beweis

$$y^n - x^n = (y - x) \underbrace{(y^{n-1} + y^{n-2}x + \dots x^{n-1})}_{>0}$$

Für  $0 < x, y < \infty$ ,  $y^{n-1} + y^{n-2}x + \dots x^{n-1} > 0$ . Also folgt  $x < y \Rightarrow x^n < y^n$ , d.h.  $f$  streng monoton wachsend

■

### Satz 4.23

Die Funktion  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig, streng monoton wachsend mit

$$\text{Bild}(\exp) = \exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$$

#### Definition 4.24

Die Umkehrfunktion von  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  wird mit  $\log : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  bezeichnet

Dann

**Korollar 4.25**

$\log : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  hat folgende Eigenschaften

1. ist strikt monoton wachsend und stetig
2.  $\log(1) = 0$
3.  $\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$

**Beweis Satz 4.23**

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

ist absolut konvergent auf ganz  $\mathbb{R}$

1.

$$\exp(x) = \exp\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left(\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \geq 0$$

2. Falls  $x \geq 0$ , ist

$$\exp(x) > 1 > 0 \quad (\exp(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0)$$

3. Wegen

$$\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} \neq 0$$

$$\exp(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

d.h.

$$\exp(\mathbb{R}) \subset (0, \infty)$$

4.

$$\exp(y) - \exp(x) = \exp(x) [\exp(y-x) - 1]$$

Falls  $x < y$ , so ist  $\exp(y-x) > 1$  und somit  $\exp(y) > \exp(x)$  (da  $\exp(x) > 0$ ), d.h.  $\exp$  ist streng monoton wachsend.

5. Zur Stetigkeit: Sei  $x = x_0 + h$ ,  $0 < h < 1$

$$\exp(x) - \exp(x_0) = \exp(x_0) (\exp(h) - 1)$$

da

$$|\exp(h) - 1| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^k}{k!} \right| \leq \left| \sum_{k=1}^{\infty} |h^k| \right| = \frac{|h|}{1 - |h|} \rightarrow 0$$

Also für  $x = x_0 + h \rightarrow x_0$ ,  $\exp(x) - \exp(x_0) \rightarrow 0$  und die Funktion  $\exp$  ist stetig

$$\exp(x) \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow \infty) \quad \text{und} \quad \exp(x) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow -\infty)$$

do 3 and 4 belong together?? in your notes you gave number 3 to two different ones, page 166 bottom

■

$$\begin{aligned}\exp(\log(x)) &= x \\ \exp(\log(x) + \log(y)) &= \exp(\log(x)) \cdot \exp(\log(y)) \\ &= xy \\ \Rightarrow \boxed{\log(x) + \log(y) &= \log(xy)}\end{aligned}$$

## 4.6 Gleichmässige Stetigkeit

Sei  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion auf  $\Omega$ , d.h.

$$\forall x_0 \in \Omega, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Die logische Negation,  $f$  ist *nicht* stetig auf  $\Omega$ :

$$\exists x_0 \in \Omega, \exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in \Omega : |x - x_0| < \delta \text{ und } |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

### Definition 4.24

Gleichmässig stetig:

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  heisst gleichmässig stetig, falls für jedes  $\varepsilon > 0$  es ein  $\delta > 0$  gibt, so dass  $\forall x, x_0 \in \Omega$

$$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Stetig:

$\forall x_0 \in \Omega, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_{x_0, \varepsilon} > 0, \forall x \in \Omega$ :

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Gleichmässig stetig:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall x, x_0 \in \Omega$ :

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Stetig:  $\delta$  ist abhängig von  $\varepsilon$  und  $x_0$ .

Gleichmässig stetig:  $\delta$  ist abhängig von  $\varepsilon$ , aber *unabhängig* von  $x_0$ .

### Beispiel 4.25

I)  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist nicht gleichmässig stetig

$$|\exp(x) - \exp(x_0)| = |\exp(x - x_0) - 1| \exp(x_0)$$

Falls  $x - x_0 = \pm\delta$ ,  $\delta \neq 0$  und  $x_0 \rightarrow \infty$  dann gilt

$$|\exp(x) - \exp(x_0)| \rightarrow \infty$$

II)

$$\begin{aligned} f(x) : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2x + 5 \end{aligned}$$

Dann ist  $f$  gleichmässig stetig.

**Beweis**

Sei  $\varepsilon > 0$ ,  $x_0, x \in \mathbb{R}$ . Dann

$$|f(x) - f(x_0)| = |2x + 5 - 2x_0 + 5| = 2|x - x_0|$$

$\Rightarrow$  Wenn wir  $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$  wählen, dann

$$|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

■

III)

$$\begin{aligned} f : \Omega &\rightarrow \Omega \quad \Omega = (0, \infty) \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

$f$  ist stetig, aber nicht gleichmässig stetig.

i)  $f$  stetig: Sei  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$

$$|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |(x - x_0)(x + x_0)|$$

Sei  $|x - x_0| < \delta < 1$ . Dann,  $x < x_0 + 1 := a$ . Dann  $x, x_0 + 1 < a$

$$|x^2 - x_0^2| = |x - x_0||x + x_0| < 2a|x - x_0|$$

Wenn wir  $\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2a}\right)$  wählen, dann

$$|x - x_0^2| < 2a|x - x_0| \leq \varepsilon$$

**Bemerkung**  $\delta$  ist abhängig von  $\varepsilon$ , und  $a$  ist  $x_0 + 1$ , abhängig von  $x_0$ .

ii)  $f$  ist nicht gleichmässig stetig, d.h.

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x_0 \in \Omega, \exists x \in \Omega : |x - x_0| < \delta \text{ und } |x^2 - x_0^2| \geq \varepsilon$$

Sei  $\varepsilon = 1$ ,  $\delta > 0$ ,  $x_0 = \frac{1}{\delta}$  und  $x = x_0 + \frac{\delta}{2}$ . Dann  $|x - x_0| < \frac{\delta}{2} < \delta$  aber

$$|x^2 - x_0^2| = \left| \left( \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2} \right)^2 - \frac{1}{\delta^2} \right| = 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1 = \varepsilon$$

IV)

$$\begin{aligned} f : \Omega &\rightarrow \Omega \quad \Omega = [0, 4] \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

Dann ist  $f$  gleichmässig stetig.

## KAPITEL 4. STETIGKEIT

### Beweis

Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Sei  $x_0, x \in \Omega = [0, 4]$ ,  $0 \leq x, x_0 \leq 4 \Rightarrow 0 \leq x + x_0 \leq 8$

$$\begin{aligned} |x - x_0| < \delta &\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| \\ &= |x - x_0||x + x_0| \leq (4 + 4)\delta \end{aligned}$$

Sei  $\delta = \frac{\varepsilon}{8}$ , dann

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

■

V)

$$\begin{aligned} f : (0, \infty) &\rightarrow (0, \infty) \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

ist gleichmässig stetig auf  $(0, \infty)$

### Beweis

Ask for beweis! page 172 bottom

This thread has a pretty decent one: Matheplanet Thread

■

Wir haben gesehen, dass

$$\begin{aligned} f : (0, \infty) &\rightarrow (0, \infty) \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

nicht gleichmässig stetig ist, aber auch, dass

$$\begin{aligned} f : [0, 4] &\rightarrow [0, 4] \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

gleichmässig stetig ist. Was ist der Unterschied?  $[0, 4]$  ist kompakt,  $(0, \infty)$  nicht.

### Satz 4.26

Sei  $K \subset \mathbb{R}^d$  kompakt und  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig. Dann ist  $f$  gleichmässig stetig.

**Beweis (Indirekt)**

Sonst gibt es  $\varepsilon > 0$ , so dass für jedes  $\delta > 0$  Punkte  $x, y \in k$  gibt mit

$$\|x - y\| < \delta \quad |f(x) - f(y)| > \varepsilon$$

Sei  $\forall k \geq 1$ , mit  $\delta = \frac{1}{k}$ , ein Paar  $(x_k, y_k)$  gewählt, so dass

$$|x_k - y_k| < \frac{1}{k} \quad \text{und} \quad |f(x_k) - f(y_k)| > \varepsilon$$

Da  $k$  kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge  $x_{l(k)} \rightarrow z$ . Aus  $|x_k - y_k| < \frac{1}{k}$  folgt dass  $y_{l(k)} \rightarrow z$ . Sei nun  $k_0$  so dass

$$\|f(x_{l(k_0)}) - f(z)\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall k > k_0$$

$f$  stetig

Dann folgt  $\forall k > k_0$ :

$$\|f(y_{l(k_0)}) - f(z)\| \geq \left| \underbrace{f(y_{l(k)}) - f(x_{l(k)})}_{>\varepsilon} - \underbrace{f(x_{l(k)}) - f(z)}_{<\varepsilon/2} \right| \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

■

**4.7 Punktweise und Gleichmässige Konvergenz**

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $f, f_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$

**Definition 4.28**

$(f_k)_{k \geq 1}$  konvergiert punktweise gegen  $f$ , falls  $\forall x \in \Omega$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x)$$

$\forall x \in \Omega$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists k_{\varepsilon, x}$  s.d.  $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ ,  $\forall k > k_{\varepsilon, x}$ . Es stellt sich die Frage, ob  $f$  stetig ist, falls alle  $(f_k)_{k \geq 1}$  stetig sind.

**Beispiel 4.30**

Sei  $f_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_k(x) = x^k$ ,  $k \geq 1$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 \leq x < 1 : \lim_{k \rightarrow \infty} x^k &= 0 \\ x = 1 : \lim_{k \rightarrow \infty} x^k &= 1 \end{aligned}$$

Also konvergiert  $(f_k)$  punktweise gegen

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

Inbesondere ist  $f(x)$  nicht stetig.

## KAPITEL 4. STETIGKEIT

### Beispiel

$$f_n(x) = \frac{nx^2 + 1}{nx + 1}, \Omega = [0, 1]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx^2 + 1}{nx + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 + \frac{1}{n}}{x + \frac{1}{n}} = \frac{x^2}{x} = x$$

$f_n(x) \rightarrow f(x) = x$  und  $f(x) = x$  ist stetig

$$|f_n(x) - x| = \left| \frac{nx^2 + 1}{nx + 1} - x \right| = \left| \frac{1 - x}{nx + 1} \right| \leq \frac{1 + |x|}{|nx + 1|} \leq \frac{3}{1 + n}$$

Da  $x \in [1, 2]$ ,  $|nx + 1| \geq n + 1$  und  $1 + |x| \leq 3$

$$\frac{3}{1 + n} \leq \varepsilon \Rightarrow \frac{3}{\varepsilon} - 1 \leq n$$

d.h.  $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon$  s.d. für  $n > N_\varepsilon = \frac{3}{\varepsilon} - 1$

$$|f_n(x) - x| < \varepsilon \quad \forall x \in [1, 2]$$

$N_\varepsilon$  hängt nur von  $\varepsilon$  ab und nicht von  $x \in [1, 2]$ .

#### Definition 4.29

$(f_k)$  konvergiert gleichmässig gegen  $f$ , falls

$$\sup_{x \in \Omega} \|f_k(x) - f(x)\| \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$$

d.h.  $\forall \varepsilon > 0, \exists k_\varepsilon$ , so dass  $\forall k > k_\varepsilon$

$$\forall x \in \Omega : \|f_k(x) - f(x)\| < \varepsilon$$

### Beispiel 4.30

Seien  $(a_k)_{k \geq 1} \in \mathbb{C}$

$$p(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

mit Konvergenzradius

$$\rho := \frac{1}{\limsup \sqrt[k]{|a_k|}} \leq \infty$$

Sei  $\rho > 0$ , und  $0 \leq r < \rho$ . Dann konvergiert die Folge

$$p_n(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

gleichmässig auf  $\overline{B_r(0)}$  gegen  $p(z)$



**Beweis**

Sei  $z \in \overline{B_r(0)}$  und  $r < s < \rho$

$$\begin{aligned}
 |p(z) - p_n(z)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k \right| \\
 &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| r^k \\
 &= \sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k) \left| \frac{r}{s} \right|^k s^k \\
 &\stackrel{(*)}{\leq} \left( \frac{r}{s} \right)^{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| s^k \\
 &\leq \left( \frac{r}{s} \right)^{n+1} C_s
 \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
 C_s &:= \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| s^k < \infty \\
 \Rightarrow |p(z) - p_n(z)| &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0
 \end{aligned}$$

mit

$$(*) \quad \left| \frac{r}{s} \right| < 1, k > n+1 \Rightarrow \left( \frac{r}{s} \right)^k < \left( \frac{r}{s} \right)^{n+1}$$

■

Die Bedeutung dieses Konvergenzbegriffs ist

**Satz 4.31**

Seien  $f_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass  $f_k$  gleichmässig gegen  $f$  konvergiert. Dann ist  $f$  stetig.

**Korollar 4.32**

Potenzreihen sind stetig im Inneren ihres Konvergenzkreises.

**Beweis**

Folgt aus Satz 4.31 und Beispiel 4.30

■

**Beweis 4.31**

Sei  $x_0 \in \Omega$ , und  $(x_n)_{n>1}$  eine Folge in  $\Omega$  mit Grenzwert  $x_0$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Wir wählen ein  $k$ , so dass

$$\sup_{x \in \Omega} |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$$

## KAPITEL 4. STETIGKEIT

Da  $f_k$  stetig ist, sei nun  $N \geq 1$  mit

$$|f_k(x_n) - f_k(x)| \leq \varepsilon \quad \forall n > N$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \|f(x_n) - f(x_0)\| &= |f(x_n) - f_k(x_n) + f_k(x_n) + f_k(x_0) - f_k(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x_n) - f_k(x_n)| + |f_k(x_n) - f_k(x_0)| + |f_k(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq 3\varepsilon \end{aligned}$$

■

Eine natürliche Frage ist, was sind die “einfachsten” Funktionen, mit denen man alle stetigen Funktionen gleichmässig approximieren kann?

Es gibt einen sehr allgemeinen Satz von Stone - Weierstrass, der insbesondere ein Kriterium für Funktionen auf kompakten Teilmengen von  $\mathbb{R}^d$  gibt.

### Satz von Weierstrass

Man kann jede stetige Funktion auf einem kompakten Intervall durch Polynome approximieren.

Ein explizites Approximationsverfahren für auf  $[0, 1]$  stetige Funktionen mittels Polynomen wurde von S. Bernstein gefunden (1911). Sei

$$B_{i,n}(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}, 0 \leq i \leq n$$



Dieses Polynom bildet eine Basis für den Vektorraum der Polynome von Grad  $= n$ . Sei  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , dann ist

$$B_n(f)(x) := \sum_{i=0}^n B_{i,n}(x) f\left(\frac{i}{n}\right)$$

**Satz (Bernstein)**

Sei  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann konvergiert die Folge  $B_n(f)(x)_{n \geq 1}$  gleichmässig gegen  $f$ .

Can't read word, page  
182 middle

Mit den Bernstein-Polynomen kann man eine Bezierkurve  $n$ -ten Grades zu gegebenen  $n + 1$  Bezierpunkten  $P_0, \dots, P_n$  definieren. Die Bezierkurve stellt ein wichtiges Werkzeug in der Vektorgrafik dar..

Seien z.B.  $P_0, \dots, P_n$   $n$ -Kontrollpunkte in der Ebene. Dann ist die parametrische Kurve

$$t \rightarrow \sum_{i=1}^n B_{i,n}(t) P_i$$

die Bezierkurve. Diese Kurve liegt immer in der konvexen Hülle des Kontrollpolygons.