

## Kapitel 3

# Folgen und Reihen (Der Limes Begriff)

### 3.1 Folgen, allgemeines

**Definition 3.1**

Eine Folge reeller Zahlen ist eine Abbildung  $a : \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  wobei wir das Bild von  $n \geq 1$  mit  $a_n$  (statt  $a(n)$ ) bezeichnen.

Eine Folge wird dann meistens mit  $(a_n)_{n \geq 1}$ , daher mit der geordneten Bildmenge bezeichnet.

Folgen können auf verschiedene Arten gegeben sein.

**Beispiel 3.2**

1.  $a_n = \frac{1}{n}, n \geq 1$
2.  $a_1 = 0.9, a_2 = 0.99, \dots, a_n = \underbrace{0.99 \dots 9}_{n\text{-mal}}$
3.  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, n \geq 1$
4. (Rekursiv) Sei  $d > 0$  eine reelle Zahl  $a_1, \dots, a_{n+1} := \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{d}{a_n}\right), n \geq 1$   
z.B.  $d = 2, a_1 = 1, a_2 = \frac{3}{2}, a_3 = \frac{17}{12}, a_4 = \dots$
5. Fibonacci Zahlen.  $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \forall n \geq 2$

**Definition 3.3**

Eine Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  heißt beschränkt falls die Teilmenge  $\{a_n : n \geq 1\} \subseteq \mathbb{R}$  beschränkt ist. d.h. Es gibt  $c \in \mathbb{R} (c \geq 0)$  so dass  $|a_n| \leq c, \forall n \geq 1$

## 3.2 Grenzwert oder Limes eine Folge. Ein zentraler Begriff

### Definition 3.4

Eine Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  konvergiert gegen  $a$  wann für jedes  $\varepsilon > 0$  ein Index  $N(\varepsilon) \geq 1$  gilt so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon, \forall n > N(\varepsilon)$$

### Definition 3.4 (Version 2)

Eine Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  konvergiert gegen  $a \in \mathbb{R}$  falls für jedes  $\varepsilon > 0$  die Menge der Indizes  $n \geq 1$  für welcher  $a_n \notin (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  endlich ist.

$$(\forall \varepsilon > 0, \#\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \notin (a - \varepsilon, a + \varepsilon)\} < \infty)$$

### Äquivalenz beider Definitionen

Is this supposed to be a title?

(2)  $\Rightarrow$  (1)

Sei für  $\varepsilon > 0$

$$M(\varepsilon) := \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \notin (a - \varepsilon, a + \varepsilon)\} = \{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - a| \geq \varepsilon\}$$

Da  $M(\varepsilon)$  endlich ist, ist es nach oben beschränkt. Es gibt also  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  so dass  $\forall n \in M(\varepsilon), n \leq N(\varepsilon) - 1$ . Insbesondere gilt  $\forall n \geq N(\varepsilon), n \notin M(\varepsilon)$  und daher  $|a_n - a| < \varepsilon$ .

(1)  $\Rightarrow$  (2)

$$M(\varepsilon) = \{n : |a_n - a| \geq \varepsilon\} \subset [0, N(\varepsilon) - 1]$$

Also endlich.

Falls die Eigenschaften in Definition 3.4 zutrifft, dann schreibt man

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ oder } a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a$$

Die Zahl  $a$  nennt sich Grenzwert oder Limes der Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$ . Eine Folge heisst konvergent falls sie einen Limes besitzt, andernfalls heisst sie divergent.

### Bemerkung 3.5

1. Falls  $(a_n)_{n \geq 1}$  konvergent ist der Limes eindeutig bestimmt

### Beweis

Seien  $a$  und  $b$  Grenzwerte von  $(a_n)_{n \geq 1}$ . Sei  $\varepsilon = \left| \frac{b-a}{3} \right| > 0$ , dann gibt es  $N_1, N_2$  so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N_1$$

### KAPITEL 3. FOLGEN UND REIHEN (DER LIMES BEGRIFF)

$$|a_n - b| < \varepsilon \quad \forall n > N_2$$

Also  $\forall n \geq \max\{N_1, N_2\}$

$$(a - b) \cong |(a - a_n) + (a_n - b)| < 2\varepsilon = \frac{2}{3} |b - a|$$

### Binomischen Lehrsatz

Für beliebige Zahlen  $a, b$  und  $n \in \mathbb{N}$  ist

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

2. Falls  $(a_n)_{n \geq 1}$  konvergent ist,  $\{a_n : n \geq 1\}$  beschränkt: Sei  $\varepsilon = 1$ ,  $\lim a_n = a$  und  $N_0$  mit

$$|a_n - a| \leq 1 \quad \forall n > N_0$$

Dann ist  $\forall n \quad |a_n| \geq \max\{|a| + 1, |a_j|, 1 \leq j \leq N_0\}$

### Beispiel 3.6

- Sei  $a_n = \frac{1}{n}, n \geq 1$ . Dann gilt  $\lim a_n = 0$ 
  - Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann  $\frac{1}{\varepsilon} > 0$ . Sei  $n_0 \in \mathbb{N}$ ,  $n_0 \geq 1$  mit  $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$  (Archimedische Eigenschaft, Satz 2.13)

Dann gilt für alle  $n \geq n_0$ ,  $\frac{1}{\varepsilon} < n_0 \leq n \Rightarrow \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon, \forall n \geq n_0$

- Sei  $0 < q < 1$  und  $a_n := q^n$ ,  $n \geq 1$ . Dann gilt  $\lim a_n = 0$  ( $a_n$  konvergiert gegen 0)

Cannot read, page 54 top

### Beweis

Zu beweisen

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$$

Should it be  $\in \mathbb{R}??$

$$\forall n \geq N_0 : q^n < \varepsilon$$

Die Idee ist zu zeigen dass  $\frac{1}{q^n}$  sehr Gross wird und deswegen  $q^n$  sehr klein wird. Setzen wir  $\frac{1}{q} = 1 + \delta$  mit  $\delta > 0$  ( $1 < 1 \Rightarrow \frac{1}{q} > 1$ )

$$\frac{1}{q^n} = \left( \frac{1}{q} \right)^n = (1 + \delta)^n = 1 + n\delta + \binom{n}{2} \delta^2 + \dots + \delta^n \geq 1 + n\delta > n\delta, \forall n \in \mathbb{N}$$

also

$$0 < q^n < \frac{1}{n\delta}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Sei jetzt  $\varepsilon > 0$ , wähle  $N_0 = N_0(\varepsilon)$  mit  $\frac{1}{\varepsilon\delta} < N_0 \Rightarrow \frac{1}{N_0\delta} < \varepsilon$

$$\forall n > N_0 \quad 0 < q^n \leq \frac{1}{n\delta} < \frac{1}{N_0\delta} < \varepsilon$$

### KAPITEL 3. FOLGEN UND REIHEN (DER LIMES BEGRIFF)

3.  $\sqrt[n]{n}$ ,  $\lim a_n = 1$ . Klar:  $n \geq 1$  also  $\sqrt[n]{n} \geq 1$   
Gegeben ein  $\varepsilon > 0$ , wollen wir  $n$  so gross wählen, dass

$$\sqrt[n]{n} - 1 < \varepsilon$$

das heisst,  $n < (1 + \varepsilon)^n$ . Wir entwickeln

$$(1 + \varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \binom{n}{2} \varepsilon^2 + \dots + \varepsilon^n$$

can't read last element  
of the expansion

$\varepsilon$  ist klein aber fixiert.

Für  $n$  sehr gross wird  $1 + n\varepsilon$  nie grösser als  $n$  sein. Wir versuchen unsere Glück mit

$$\binom{n}{2} \varepsilon^2 \text{ term}$$

$$\binom{n}{2} \varepsilon^2 = \frac{n(n-1)}{2} \varepsilon^2$$

Wir benutzen also  $(1 + \varepsilon)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} \varepsilon^2$ . Wir wollen  $n$  so wählen dass

$$\frac{n(n-1)}{2} \varepsilon^2 > n$$

d.h.  $n - 1 > \frac{2}{\varepsilon^2}$  oder  $n > 1 + \frac{2}{\varepsilon^2}$

Setzen wir  $N_0 := \left(1 + \frac{2}{\varepsilon^2}\right) + 1$ . Dann gilt für  $\forall n > N_0$

$$(1 + \varepsilon)^n > n \geq 1$$

$$\Rightarrow 1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + \varepsilon$$

$$\Rightarrow -\varepsilon < 0 \leq \sqrt[n]{n} - 1 \leq \varepsilon \Rightarrow |\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon, \forall n > N_0$$

4. Nicht alle Folgen sind konvergent. Es gibt zwei verschiedene Verhältnissen einer divergenten Folge

$$a_n = (-1)^n \Rightarrow \{1, -1, \dots\} \text{ beschränkt aber nicht konvergent}$$

5.  $a_n = n$  unbeschränkt, divergent.

#### Beispiel 3.7

Seien  $p \in \mathbb{N}$ ,  $0 < q < 1$ . Dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p q^n = 0$ . Dass heisst Exponentialfunktion wächst schneller als jede Potenz (Wann  $x$  genügend Gross ist,  $a^x > x^b$ )

### Beweis

Der Trick ist folgender

$$n^p q^n = \left( n^{\frac{p}{n}} \cdot q \right)^n = \left( (\sqrt[n]{n})^p \left( q^{\frac{1}{n}} \right)^p \right)^n$$

Wir werden Beispiel 3.6 (2.), (3.) benutzen.

(d.h.  $\lim \sqrt[n]{n} = 1$   $\lim r^n = 0, 0 < r < 1$ )

Da  $\lim \sqrt[n]{n} = 1, \forall \eta > 0, \exists N_0(\eta)$

$$\sqrt[n]{n} < 1 + \eta, n > N_0(\eta)$$

Wir wählen  $\eta > 0$  so dass  $q^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{(1+\eta)^2}$ . Dann

$$\sqrt[n]{n} \cdot q^{\frac{1}{p}} \leq \frac{(1+\eta)}{(1+\eta)^2} = \frac{1}{1+\eta} \quad \forall n > N_0(\eta)$$

Wobei

$$\forall n > N_0(\eta)$$

$$a_n = \left( \sqrt[n]{n} q^{\frac{1}{p}} \right)^{pn} < r^n$$

mit

$$r := \left( \frac{1}{1+\eta} \right)^p, r < 1$$

Sei jetzt  $\varepsilon > 0$ . Da  $\lim r^n = 0, \exists N_1 = N_1(\varepsilon), \forall n > N_1(\varepsilon), r^n < \varepsilon$

Für  $n > \max\{N_0(\eta), N_1(\varepsilon)\}, a_n < r^n < \varepsilon \Rightarrow \lim a_n = \lim n^p q^n = 0$

## 3.3 Konvergenzkriterien

Mit konvergenten Folgen kann man wie folgender Satz zeigt.

Can't read, page 59 top

### Satz 3.8

Seien  $(a_n)_{n \geq 1}$  und  $(b_n)_{n \geq 1}$  konvergente Folgen mit

$$\lim a_n = a, \lim b_n = b$$

- i) Die Folge  $(a_n + b_n)_{n \geq 1}$  konvergiert und  $\lim (a_n + b_n) = a + b$
- ii) Die Folge  $(a_n \cdot b_n)_{n \geq 1}$  konvergiert und  $\lim (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
- iii) Falls  $b \neq 0$  und  $b_n \neq 0 \forall n \geq 1$  gilt  $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$
- iv) Falls  $a_n \leq b_n$  folgt  $a \leq b$

### KAPITEL 3. FOLGEN UND REIHEN (DER LIMES BEGRIFF)

#### Beweis

Sei  $\varepsilon > 0$ , es gibt  $N_1(\varepsilon)$ ,  $N_2(\varepsilon)$  so dass

$$\begin{aligned} |a_n - a| &< \varepsilon, \forall n > N_1(\varepsilon) \\ |b_n - b| &< \varepsilon, \forall n > N_2(\varepsilon) \end{aligned}$$

i) Für  $n \geq \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$  gilt

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$$

Da dies für alle  $\varepsilon > 0 < 2\varepsilon$  gilt, folgt auch

$$\forall n > \max\left\{N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), N_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right\} := N(\varepsilon)$$

gilt

$$|a_n + b_n - (a + b)| < \varepsilon$$

ii) Sei  $C$  eine Schranke für  $\{|b_n| : n \geq 1\}$  (Bemerkung 3.5: Falls  $(a_n)_{n \geq 1}$  konvergent ist,  $\{b_n : n \geq 1\}$  beschränkt). Für  $N_1(\varepsilon)$ ,  $N_2(\varepsilon)$  wie oben folgt  $\forall n \geq \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \\ &= |b_n(a_n - a) + a(b_n - b)| \\ &\leq \varepsilon |b_n| + |a| \varepsilon \leq \varepsilon (C + |a|) \end{aligned}$$

Also folgt

$$\forall n \geq N(\varepsilon) := \max\left(N_1\left(\frac{\varepsilon}{C + |a|}\right), N_2\left(\frac{\varepsilon}{|C| + a}\right)\right)$$

dass  $|a_n b_n - ab| < \varepsilon$

iii) Wegen (ii) genügt es, dem Fall  $a = a_n = 1$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  zu betrachten

$$|b_n| = |b_n - b + b| \geq |b| - |b_n - b| \geq |b| - \varepsilon$$

Sei  $0 < \varepsilon < \frac{|b|}{2}$ , dann gilt  $|b_n| > \frac{|b|}{2}$ . Es folgt

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b_n - b}{b_n b}\right| < \frac{2}{|b|^2} |b_n - b| \leq \frac{2}{|b|^2} \varepsilon \quad \forall n > n_0(\varepsilon)$$

Also folgt  $\forall n > N(\varepsilon) := n_0\left(\frac{\varepsilon |b|^2}{2}\right)$  dass  $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| < \varepsilon$

iv) (Indirekter Beweis) Falls  $a > b$ ,  $a - b > 0$ . Sei

$$\begin{aligned} \varepsilon &:= \frac{a - b}{2} > 0 \\ 2\varepsilon &= b - a \\ \Rightarrow b - \varepsilon &= a + \varepsilon \\ b_n \rightarrow b &\Rightarrow b_n < b + \varepsilon \quad \forall n > n_0(\varepsilon) \\ a_n \rightarrow a &\Rightarrow -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < a_n \quad \forall n > \text{TODO} \end{aligned}$$

### KAPITEL 3. FOLGEN UND REIHEN (DER LIMES BEGRIFF)

Aber denn die Ungleichung

$$b_n < b + \varepsilon = a - \varepsilon < a_n \quad \forall n \geq n_0$$

im Widerspruch zur Annahme  $a_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$

■

Es ist nicht unbedingt nötig, den ganzen Beweis zu führen um zu wissen dass eine Folge konvergent ist. Es gibt Folgen deren Konvergenz, durch eine Strukturelle Eigenschaft gesichert ist ohne dass man den Limes apriori kennen muss.

Folgender Satz illustriert dieses, es benützt die Vollständigkeitsaxiom

#### Satz 3.9 (Monotone Konvergenz)

1. Sei  $(a_n)_{n \geq 1}$  eine monoton Wachsende beschränkte Folge. Dann ist sie konvergent und es gilt zudem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup \{a_n : n \geq 1\}$$

2. Sei  $(b_n)_{n \geq 1}$  eine Monotone fallende beschränkte Folge. Dann ist es konvergent und es gilt zudem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \inf \{b_n \mid n \geq 1\}$$

#### Definition 3.10

- **Monotone wachsend:**

$$a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \geq 1$$

- **Monotone fallend:**

$$b_{n+1} \leq b_n \quad \forall n \geq 1$$

Number might be wrong, page 63 middle

#### Beweis 3.9

- i)  $a_1 \leq a_2 \leq \dots$  und  $\{a_n : n \geq 1\}$  nach oben beschränkt  $\Rightarrow \exists C$  mit  $a_n \leq C \quad \forall n \geq 1$ . Sei nach Satz 2.9 (Jede nach oben beschränkte Teilmenge  $A \subset \mathbb{R}$  besitzt ein kleinste obere Schranke)  $a := \sup \{a_n : n \geq 1\}$  die kleinste Obere Schranke.

Wir behaupten dass:  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Sei  $\varepsilon > 0$ , dann ist  $a - \varepsilon$  keine Obere Schranke und deswegen gibt es  $n(\varepsilon) \geq 1$  mit  $a_{n(\varepsilon)} > a - \varepsilon$ . Aus Monotonität folgt

$$a_n > a_{n(\varepsilon)} > a - \varepsilon \quad \forall n > n(\varepsilon)$$

### KAPITEL 3. FOLGEN UND REIHEN (DER LIMES BEGRIFF)

und folgt somit

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > n(\varepsilon)$$

ii) Ähnlich.

■

Sätze 3.8, 3.9 haben vielfähige Anwendungen die wir durch einige Beispiele illustrieren.

#### Beispiel 3.10

1. Sei

$$a_n = \frac{3n^6 + 11n^4 - 1}{2n^6 - 7n^3 + n} = \frac{3 + \frac{11}{n^2} - \frac{1}{n^6}}{2 - \frac{7}{n^3} + \frac{1}{n^5}} \rightarrow \frac{3}{2}$$

2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  existiert.

Wir werden beweisen dass  $a_n$  monotone wachsend und beschränkt ist. Der limes wird mit “ $e$ ” bezeichnet, wobei  $e = 2.71828\dots$  (Eulerische Konstante)

#### Beweis

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Wir möchten den Binomischen Lehrsatz anwenden

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &= 1 + n \left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n(n-1)}{2!} \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^n \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \\ &\quad + \dots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \dots \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) &< \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) &< \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \\ &\text{usw} \end{aligned}$$

deswegen folgt

$$2 < a_n < a_{n+1} \quad \forall n \geq 1$$

d.h.  $a_n$  ist monoton wachsend.



### KAPITEL 3. FOLGEN UND REIHEN (DER LIMES BEGRIFF)

Die Produkte der Form

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) &< 1 \\ \Rightarrow a_n &< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \\ &< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} \dots = 3 \end{aligned}$$

d.h.  $a_n$  ist beschränkt. Monotone Konvergenz  $\Rightarrow (a_n)_{n \geq 1}$  konvergiert

■

#### 3. Rekursive Definitionen

Sei  $c > 1$ ,  $a_1 = c$ ,  $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{c}{a_n}\right)$ ,  $n \geq 1$ . Dann ist  $\lim a_n = \sqrt{c}$

#### Beweis

Dies ist ein wichtiges Beispiel. Hier wird vorgeführt wie man aus der apriori Existenz des Limes dessen Wert schliessen kann.

##### 1. Schnitt:

$$a_{n+1}^2 \geq c \quad \forall n \geq 1$$

$a_n$  ist (nach unten) beschränkt.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{c + a_n^2}{2a_n} = a_n + \frac{c - a_n^2}{2a_n} \\ \Rightarrow a_{n+1}^2 &= a_n^2 + (c - a_n^2) + \left(\frac{c - a_n^2}{2a_n}\right)^2 \\ &= c + \left(\frac{c - a_n^2}{2a_n}\right)^2 \geq c \quad (*) \end{aligned}$$

##### 2. Schnitt:

$$a_{n+1} \leq a_n$$

d.h.  $a_n$  ist monoton fallend.

$$\begin{aligned} (*) : a_{n+1}^2 &\geq c \\ \Rightarrow \frac{c}{a_{n+1}} &\leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ insbesondere} \\ \frac{c}{a_n} &\leq a_n \\ \Rightarrow a_{n+1} &= \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) \leq \frac{1}{2} (a_n + a_n) = a_n \end{aligned}$$

Monotone Konvergenz Satz  $\Rightarrow (a_n)$  konvergiert.

Sei  $a = \lim a_n$ . Da  $a_n^2 \geq c$ ,  $\forall n \geq 2$  folgt  $a^2 \geq c$ . Aus  $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{c}{a_n}\right)$  und Satz 3.8 folgt  $a = \frac{1}{2} \left(a + \frac{c}{a}\right) \Rightarrow \frac{c}{a} = a \Rightarrow c = a^2 \Rightarrow a = \sqrt{c}$ .  
Schliesslich  $\lim a_n = \sqrt{c}$

■

### 3.4 Teilfolgen, Häufungspunkte

**Definition 3.11**

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  eine Folge und sei  $l(n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine strikt monotone wachsende Folge von positiven natürlichen Zahlen. Die Verkettung von  $l(n)$  und  $(a_n)$  heisst eine Teilfolge  $(a_{l(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$n \rightarrow l(n) \rightarrow a_{l(n)}$$

Die Idee ist sehr einfach: Wir haben die Folge

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots, a_j, \dots, a_{j+1}, \dots$$

und wir definieren eine neue Folge mit einigen Elementen von  $(a_n)$

$$a_1, a_3, a_6, a_{j+1}, \dots$$

**Beispiel**

1.

$$\begin{aligned} a_n &= \{1, 0, -1, 1, 0, -1, 1, 0, -1, \dots\} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 3k + 2 \\ 1 & \text{falls } n = 3k + 1 \\ -1 & \text{falls } n = 3k + 3 \end{cases} \end{aligned}$$

$$n \rightarrow 3n + 2 \rightarrow a_{3n+2} = (0, 0, \dots)$$

$$n \rightarrow 3n + 1 \rightarrow a_{3n+1} = (1, 1, \dots)$$

$$n \rightarrow 3n \rightarrow a_{3n} = (-1, -1, \dots)$$

2.  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, a_n = n \Rightarrow (2^n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Teilfolge  $n \rightarrow 2^n \rightarrow a_{2^n}$

3.  $a_n = (-1)^n, (a_{2n})_{n \geq 1}, (a_{2n+1})$  sind Teilfolgen

**Bemerkung 3.12**

Im Definition 3.11 ist  $l(\mathbb{N} \setminus \{0\})$  eine unendliche Teilmenge von  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Umgekehrt, falls  $\Lambda \subset \mathbb{N} \setminus \{0\}$  eine unendliche Teilmenge ist dann enthält man eine Teilfolge von  $(a_n)_{n \geq 1}$  mittels einer Monoton Abzählung  $l : \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \Lambda$  von  $\Lambda$  ( $l(n) := \min(\Lambda \setminus \{l(1), l(2), \dots, l(n-1)\})$ )

**Definition 3.13**

$a \in \mathbb{R}$  ist Häufungspunkt von  $(a_n)_{n \geq 1}$  falls es eine gegen  $a$  konvergierende Teilfolge  $(a_{l(n)})_{n \geq 1}$  gibt.

**Beispiel 3.14**

Looks like there is no number 2, removed list in its entirety, page 71 middle to top

$a_n = (-1)^n$  hat  $+1$  und  $-1$  als Häufungspunkte. Wir werden jetzt die Menge der Häufungspunkte einer Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  näher studieren und Insbesondere zeigen dass sie für beschränkte Folgen nicht leer ist.

Sei  $(a_n)_{n \geq 1}$  beschränkt und  $C$  eine Obere Schranke für  $\{|a_n| : n \geq 1\}$ . Für jedes  $k \geq 1$  ist die Menge

$$A_k := \{a_n : n \geq k\} = \{a_k, a_{k+1}, \dots\}$$

beschränkt und zudem gilt

$$A_{k+1} \subset A_k, \forall k \geq 1$$

Sei also

- $m_k := \inf A_k \nearrow (\inf A_k < \inf A_{k+1})$
- $M_k := \sup A_k \searrow (\sup A_{k+1} < \sup A_k)$

Dann folgt aus Korollar 2.11

- i)  $(m_k)_{k \geq 1}$  monotone wachsend
- ii)  $(M_k)_{k \geq 1}$  monotone fallend

Nach Monotone Konvergenz Satz (Satz 3.9, s.) konvergieren beide Folgen

add reference!!

**Definition 3.15**

Wir definieren

- $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{k \rightarrow \infty} m_k$  limes inferior
- $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{k \rightarrow \infty} M_k$  limes superior

Offensichtlich gilt  $\liminf a_n \geq \limsup a_n$

Interessant ist nun:

**Lemma 3.16**

Sei  $(a_n)_{n \geq 1}$  beschränkt. Dann sind  $\limsup a_n$  und  $\liminf a_n$  Häufungspunkte von  $(a_n)_{n \geq 1}$

**Beweis**

Sei  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . Wir möchten zeigen dass, eine Teilfolge  $a_{l(n)}$  gibt mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{l(n)} = a$ . Wir definieren  $l : \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$  Induktive wie folgt:

$l(1) \geq 1$  sei so gewählt, dass  $M_1 - 1 \leq a_{l(1)} \leq M_1 = \sup A_1 = \{a_1, a_2, \dots\}$

**Korollar 2.11**

Sei  $h \in \mathbb{R}$ ,  $h > 0$

4. Falls  $E$  ein sup besitzt  $\Rightarrow \exists x \in E$  mit  $x > \sup E - h$

Sei  $E = \{a_1, \dots\} = A_1$ ,  $h = 1$

Sei  $l(2) \in \{k \in \mathbb{N} \mid k > l(1) + 1\}$  so dass

$$M_{l(1)+1} \leq a_{l(2)} \leq M_{l(1)+1}$$

(Sei  $E = \{a_{l(1)+1}, a_{l(1)+2}, \dots\}$ ,  $h = \frac{1}{2}$ ). Falls  $l(1), l(2), \dots, l(n-1)$  definiert ist, wählen wir  $l(n)$  so dass:

$$l(n) \in \{k \in \mathbb{N} : k > l(n-1) + 1\}$$

und

$$(*) \quad M_{l(n-1)+1} - \frac{1}{n} \leq a_{l(n)} \leq M_{l(n-1)+1}$$

$$|M_{l(n-1)+1} - a_{l(n)}| < \frac{1}{n}$$

Dann ist  $l(n)$  strikt monotone steigend und

$$|a_{l(n)} - M_{l(n-1)+1}| \leq \frac{1}{n}$$

Sei nun  $\varepsilon > 0$  und  $n(\varepsilon)$  so gewählt dass  $\frac{1}{n(\varepsilon)} < \frac{\varepsilon}{2}$  und

$$a - \frac{\varepsilon}{2} \leq M_{l(n(\varepsilon)-1)+1} \leq a + \frac{\varepsilon}{2}$$

( $a = \lim M_k$ : d.h.  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists N(\varepsilon)$  so dass  $|M_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \forall n > N(\varepsilon)$ ). Dann gilt  $\forall n > n(\varepsilon) : \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$

$$(**) \quad |M_{l(n-1)+1} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

und

$$(*) \quad |M_{l(n-1)+1} - a_{l(n)}| < \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$(*) \text{ und } (**) \Rightarrow |a_{l(n)} - a| < \varepsilon \text{ d.h. } \lim a_{l(n)} = a.$$

■

Wir schliessen aus Lemma 3.16 den folgenden wichtiger Satz

**Satz 3.18 (Bolzano - Weierstrass)**

Jede Beschränkte Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  besitzt eine konvergente Teilfolge.

MISSING CONTENT: Can't really understand the layout of this part, page 76 middle

Folgende Aussagen sind direkte Konsequenz

### KAPITEL 3. FOLGEN UND REIHEN (DER LIMES BEGRIFF)

#### Satz 3.19

Sei  $(a_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}$  beschränkt.  $a_- := \liminf a_n$ ,  $a_+ := \limsup a_n$

1.  $\forall \varepsilon > 0$  gibt es nur endlich viele  $n \in \mathbb{N}$  mit  $a_n \notin (a_- - \varepsilon, a_+ + \varepsilon)$
2.  $a_+$  ist der grösste,  $a_-$  der kleinste Häufungspunkt
3. Folgende Aussagen sind äquivalent
  - (i)  $(a_n)_{n \geq 1}$  konvergiert
  - (ii) Jede Teilfolge von  $(a_n)_{n \geq 1}$  konvergiert
  - (iii)  $a_- = a_+$

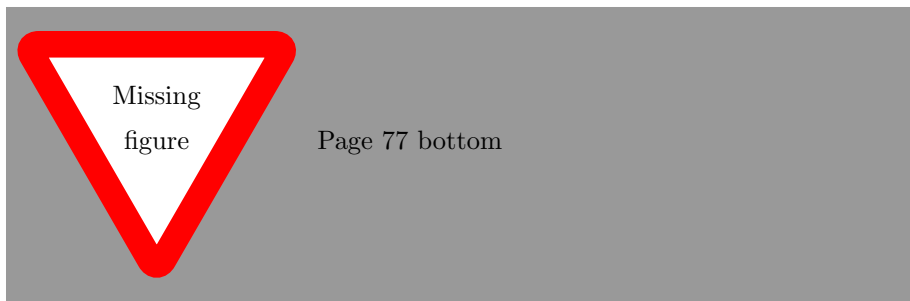
#### Bemerkung

$(a_n)$  konvergiert gegen  $a \Rightarrow$  jede Teilfolge konvergiert gegen  $a$ . Das ist ein sehr nützliches Kriterium für Konvergenz

#### Beispiel 3.20

Wir definieren rekursiv

$$g_1 = 1, g_{n+1} = 1 + \frac{1}{g_n}, n \geq 1$$
$$g_1 = 1, g_2 = 2, g_3 = \frac{3}{2}, g_4 = \frac{5}{3}$$



So die Folge ist nicht monoton. Offensichtlich gilt  $g_n \geq 1$  und damit auch  $g_n \leq 2$  d.h.  $g_n$  ist beschränkt.

Aber Wir werden werden zwei Monoton Teilfolgen finden

$$\begin{aligned} g_{n+2} &= 1 + \frac{1}{g_{n+1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{g_n}} \\ &= \frac{2 + \frac{1}{g_n}}{1 + \frac{1}{g_n}} = \frac{2g_n + 1}{g_n + 1} = 2 - \frac{1}{g_n + 1} \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$g_{n+2} - g_n = \frac{1}{g_{n-2} + 1} - \frac{1}{g_n + 1} = \frac{g_n - g_{n-2} - 2}{(g_{n-2} + 1)(g_n + 1)}$$

### KAPITEL 3. FOLGEN UND REIHEN (DER LIMES BEGRIFF)

Nun ist:  $g_3 - g_1 = \frac{3}{2} - 1 > 0$  und somit ist  $g_{2k+3} - g_{2k+1} > 0, \forall k$  d.h. die Teilfolge  $(g_{2k+1})_{k \geq 0}$  ist monotone Wachsend.

$g_4 - g_2 = \frac{5}{3} - 2 < 0$  woraus folgt  $(g_{2k})_{k \geq 1}$  monotone fallend ist. Seien also

$$a := \lim_k g_{2k+1}$$

$$b := \lim_k g_{2k}$$

Dann

$$a := \lim_k g_{2k+1} = \lim \left( 1 + \frac{1}{g_{2k}} \right)$$

$$= 1 + \frac{1}{b} \Rightarrow ab = b + 1$$

und Analog  $b = 1 + \frac{1}{a} \Rightarrow ab = 1 + a$  woraus  $ab = 1 + a = b + 1$  und somit  $a = b$ . Folgt mit  $g := a = b$   $g = +\frac{1}{g} \Rightarrow g = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$g_+ := \limsup g_n$  und  $g_- := \liminf g_n$  sind Häufungspunkte, d.h. es gibt Teilfolgen  $a_n$  und  $b_n$  mit  $\lim a_n = g_+$ ,  $\lim b_n = g_-$ . Da jede Teilfolge von  $(g_n)$  entweder unendlich viele gerade oder ungerade Indizes enthält folgt

$$g = g_+ = g_-$$

Put in big brackets (including math)

Jede Teilfolge hat (ent.) unendliche viele Elemente von  $(g_{2n})$  (oder  $(g_{2n+1})$ )

$$\left. \begin{array}{l} g_+ = \lim a_n = \lim g_{2n} = g \\ g_+ = \lim b_n = \lim g_{2n} = g \end{array} \right\} g_+ = g_- \Rightarrow \lim g_n = g = g_- = g_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

## 3.5 Cauchy Kriterium

Chapter numbering is, according to the handwritten notes, wrong. Which one is the correct one??

### Frage

Wie sieht man allgemein ob eine Folge konvergiert? Sei  $(a_n)_{n \geq 1}$  konvergiert mit  $\lim a_n = a$ . Also gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$ ,  $n(\varepsilon)$  mit  $|a_n - a| < \varepsilon \forall n \geq n(\varepsilon)$ . Daraus folgt, dass  $\forall n, m \geq n(\varepsilon)$

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m|$$

$$\leq |a_n - a| + |a_m - a| < 2\varepsilon$$

#### Definition 3.21

$(a_n)_{n \geq 1}$  ist eine Cauchy Folge falls für  $\varepsilon > 0$  ein  $n(\varepsilon) \geq 1$  gibt so dass  $|a_n - a_m| < \varepsilon, \forall n, m \geq n(\varepsilon)$

Wir haben gesehen dass

$$(a_n) \text{ konvergiert} \Rightarrow (a_n) \text{ Cauchy}$$

Wir haben auch

**Satz 3.22 (Cauchy Kriterium)**

Sei  $(a_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}$  eine Folge. Die folgende Aussagen sind äquivalent

1.  $(a_n)$  ist eine Cauchy Folge
2.  $(a_n)$  ist konvergent

**Beweis**

(2)  $\Rightarrow$  (1) ✓

(1)  $\Rightarrow$  (2) Wegen des Satzes von Bolzano - Weierstrass besitzt jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge

Strategie:

I)  $(a_n)$  beschränkt

II)  $\exists (a_{l(n)}) \subset (a_n)$  Konvergente Teilfolge

Sei  $\lim a_{l(n)} = a$ ,  $(a_n)$  Cauchy.

$$\begin{aligned} |a_n - a| &= |a_n - a_{l(n)} + a_{l(n)} - a| \\ &\leq |a_n - a_{l(n)}| + |a_{l(n)} - a| < 2\varepsilon \end{aligned}$$

I)  $(a_n)$  ist beschränkt: Sei  $\varepsilon = 1$ . Sei  $n(1)$  so dass  $|a_n - a_m| < 1$ ,  $\forall n, m \geq n(1)$ , insbesondere  $|a_n - a_m| < 1$ . Woraus  $|a_n| < a_{n(1)} + 1$ ,  $\forall n \geq n(1)$  folgt und somit  $\forall n \geq 1$

$$|a_n| \leq \max \{ |a_1|, \dots, |a_{n(1)}|, |a_{n(1)}| + 1 \}$$

d.h.  $(a_n)$  ist beschränkt

II) Sei  $a$  ein Häufungspunkt von  $(a_n)$  (Bolzano - Weierstrass) und  $l : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strikt monotone mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{l(n)} = a \quad (\text{Bem.: } l(n) \geq n)$$

Sei  $\varepsilon > 0$  und  $n_0(\varepsilon)$  so dass

$$|a_{l(n)} - a| < \varepsilon \quad \forall n > n_0(\varepsilon)$$

Sowie  $n_1(\varepsilon)$  mit

$\forall n \geq \max \{n_0(\varepsilon), n_1(\varepsilon)\}$  gilt:

$$\begin{aligned} |a_n - a| &\leq |a_n - a_{l(n)}| + |a_{l(n)} - a| \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \end{aligned}$$

$\Rightarrow \lim a_n = a \Rightarrow (a_n)$  Konvergiert

Can't understand, page 83 bottom



**Beispiel 3.23**

1. Sei

$$a_n := 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Dann ist also  $1 \leq a_n \leq a_{n+1} \dots$  monotone wachsend, aber divergent.

Dann:

$$a_{2n} - a_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \quad \forall n \geq 1$$

Es erfüllt also nicht das Cauchy - Kriterium

2. Sei  $b_n := 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$  die alternierende harmonische Reihe.  
Insbesondere:

$$\begin{aligned} b_{2k-2} &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2k-3} - \frac{1}{2k-2}\right) \\ b_{2k} &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) \end{aligned}$$

also folgt

$$0 < b_{2k-2} < b_{2k} \quad \forall k \geq 1$$

und

$$\begin{aligned} b_{2k+1} &= b_{2k-1} - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} \\ &= b_{2k-1} + \underbrace{\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k}\right)}_{<0} \end{aligned}$$

Woraus:  $b_{2k+1} < b_{2k-1}$ . Zudem

$$b_{2k} = b_{2k-1} - \frac{1}{2k} b_{2k} < b_{2k-1}$$

$\forall k \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2} = b_2 < b_4 < \dots < b_{2k-2} < b_{2k} < b_{2k-1} < \dots < b_1 = 1$$

Check question marks right above, page 85 bottom

Die Teilfolgen  $(b_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_{2k+1})_{k \in \mathbb{N}}$  konvergiert nach Satz 3.9 (Monotone konvergenz Satz). Da

$$\forall n \in \mathbb{N} : |b_n - b_{n+1}| = \frac{1}{n+1}$$

haben sie zudem denselben Limes und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert nach Satz 3.19 (Analog wie in Beispiel 3.20)



### 3.6 Folgen in $\mathbb{R}^d$ oder $\mathbb{C}$

Die Theorie der Folgen in  $\mathbb{R}$ , der Konvergenzbegriff usw. lassen sich leicht auf Folgen in  $\mathbb{R}^d$  oder  $\mathbb{C}$  übertragen.  $\|\cdot\|$  bezeichnet die Euklidische Norm auf  $\mathbb{R}^d$  und  $\mathbb{C}$

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_d^2}$$

Von diesem Standpunkt identifiziert sich  $\mathbb{C}$  mit  $\mathbb{R}^2$  so dass wir von Jetzt an Folgen in  $\mathbb{R}^d$  betrachten. Die in 3.1 eingeführte Begriffe lassen sich leicht auf  $\mathbb{R}^d$  übertragen

#### Definition

Eine Folge in  $\mathbb{R}^d$  ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} a : \mathbb{N} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R}^d \\ n &\rightarrow a_n \end{aligned}$$

#### Definition 3.24

Eine Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  in  $\mathbb{R}^d$  heisst beschränkt falls es  $c > 0$  gibt mit  $\|a_n\| \leq c$ ,  $\forall n \geq 1$

#### Bemerkung

Für  $d \geq 2$  haben wir keine Vollständige Ordnung, deswegen lassen sich Begriffe wie “nach oben beschränkt” nicht übertragen

#### Definition 3.25

Eine Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  in  $\mathbb{R}^d$  konvergiert gegen  $a \in \mathbb{R}^d$  falls für jedes  $\varepsilon > 0$  einen Index  $N(\varepsilon) \geq 1$  gibt so dass

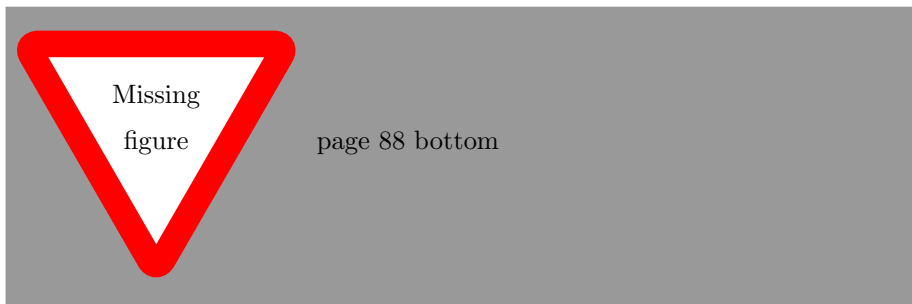
$$\|a_n - a\| < \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon)$$

Not sure where the definition ends

Die andere Version lässt sich auch übertragen. Wir definieren dafür der (offene) Kugel mit Zentrum  $a \in \mathbb{R}^d$

$$B_{<r}(a) := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x - a\| < r\}$$

??r.Ball?? page 88 bottom



??r.Ball?? page 89 top

$B_{<r}(a)$  ist die Verallgemeinerung von  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ . Nützlich ist auch der (geschlossene)

$$\overline{B}_r(a) : B_{\leq r}(a) := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x - a\| \leq r\}$$

der das Intervall  $[a - r, a + r]$  verallgemeinert.

### Definition 3.25

Eine Folge  $(a_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}^d$  konvergiert gegen  $a \in \mathbb{R}^d$  falls für jedes  $\varepsilon > 0$ , die Menge der Indizes  $n \geq 1$  für welche  $a_n \notin B_{<\varepsilon}(a)$  endlich ist. Falls dieses Zutritt, schreibt man

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ oder } a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$$

### Bemerkung

Die Konvergenz von  $(a_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}^d$  ist gleichbedeutend mit der Existenz von einem Vektor  $a \in \mathbb{R}^d$  so dass die Folge in  $\mathbb{R}$ ,  $(\|a_n - a\|)_{n \geq 1}$  gegen 0 konvergiert

Es gilt dann wieder

### Lemma 3.26

Sei  $(a_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathbb{R}^d$  konvergent

1. Der Limes ist eindeutig bestimmt
2. Die Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  ist beschränkt

Der Konvergenzbegriff verträgt auch sehr gut mit Vektorraum Struktur wie das folgende Analog von Satz 3.8 zeigt.

### Satz 3.27

Seien  $(a_n)_{n \geq 1}, (b_n)_{n \geq 1}$  konvergente Folgen in  $\mathbb{R}^d$ , sowie  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Sei  $a = \lim a_n$ ,  $b = \lim b_n$ . Dann sind  $(a_n \pm b_n)_{n \geq 1}$  und  $(\lambda a_n)_{n \geq 1}$  konvergent und es gilt

$$\lim (a_n \pm b_n) = a \pm b, \quad \lim \lambda a_n = \lambda a$$

Folgender Satz ist dann grundlegend um Bolzano - Weierstrass sowie der Cauchy Kriterium auf  $\mathbb{R}^d$  zu verallgemeinern.

### KAPITEL 3. FOLGEN UND REIHEN (DER LIMES BEGRIFF)

Für eine Folge  $(a_n)$  von Vektoren in  $\mathbb{R}^d$  ist es Zweckmässig folgende Notation für die Koordinaten von  $a_n$  zu benutzen

$$a_n = (a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, a_n^{(3)})$$

Dann gilt

#### Satz 3.28

Folgende Aussagen sind äquivalent

- (i)  $(a_n)_{n \geq 1}$  konvergiert in  $\mathbb{R}^d$
- (ii) Jede der Folgen  $(a_n^{(i)})$  konvergiert in  $\mathbb{R}$

Falls diese zutrifft seien  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  sowie  $a^i = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{(i)}$  dann gilt  $a = (a^1, a^2, \dots, a^d)$

#### Beweis

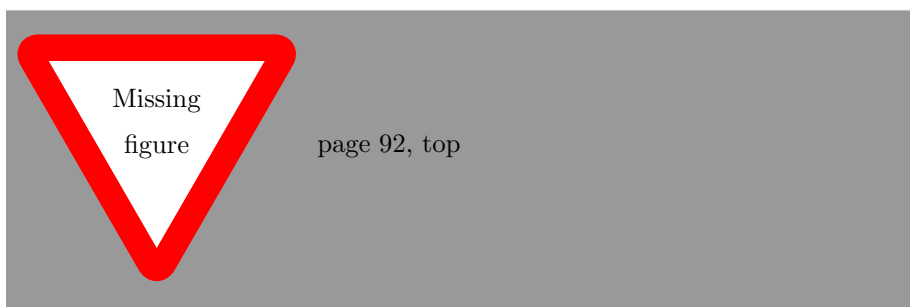
Dazu brauchen wir folgendes geometrisches Lemma:

■

#### Lemma 3.29

$\forall x = (x^1, x^2, \dots, x^d) \in \mathbb{R}^d$  gilt

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq i \leq d} |x^i| &\leq \frac{\|x\|}{\sqrt{\sum_{i=1}^d |x^i|^2}} \leq \sqrt{d} \max_{1 \leq i \leq d} |x^i| \\ &\Downarrow \\ &\sqrt{\sum_{i=1}^d |x^i|^2} \end{aligned}$$



$$\left(-\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2 \subset B_{\leq r}(0) \subset (-r, r)^2$$

#### Beweis von Satz 3.28

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Folgt aus der Ungleichung  $|a_n^{(i)} - a^{(i)}| \leq \|a_n - a\|$

### KAPITEL 3. FOLGEN UND REIHEN (DER LIMES BEGRIFF)

(ii)⇒(i) Sei  $a^i = \lim a_n^i$  und  $a = (a^i)_i$ . Aus

$$\|a_n - a\| \leq \sqrt{d} \max_{1 \leq i \leq d} |a_n^{(i)} - a^{(i)}|$$

folgt (i)

■

#### Satz 3.29 (Bolzano - Weierstrasse)

Jede beschränkte Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  in  $\mathbb{R}^d$  besitzt eine konvergente Teilfolge

#### Beispiel

1.

$$(a_n) = \begin{pmatrix} 1/n \\ 2/n \end{pmatrix} \subset \mathbb{R}^2$$

$$\lim a_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.

$$(a_n) = \begin{pmatrix} \frac{n^2+n+1}{2n^2+n+1} \\ n \end{pmatrix}$$

$(a_n)$  ist divergent

$$\lim \frac{n^2 + n + 1}{2n^2 + n + 1} \rightarrow \frac{1}{2}$$

aber  $\lim n = \infty$

#### Definition 3.30

$(a_n)_{n \geq 1}$  ist eine Cauchy Folge falls es  $\forall \varepsilon > 0$  ein  $N(\varepsilon) \geq 1$  gibt so dass

$$\|a_n - a_m\| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N(\varepsilon)$$

Aus Sätze 3.28 und 3.22 (Cauchy Kriterium) folgt

#### Satz 3.31

Es sind äquivalent

1.  $(a_n)_{n \geq 1}$  konvergiert
2.  $(a_n)$  ist eine Cauchy Folge

Für  $\mathbb{C}$  haben wir noch dass sich die Körperstruktur mit Konvergenz gut verträgt.  
Nämlich

### KAPITEL 3. FOLGEN UND REIHEN (DER LIMES BEGRIFF)

#### Satz 3.32

Seien  $(z_n), (w_n)$  zwei Konvergente Folgen in  $\mathbb{C}$  mit  $z = \lim z_n, w = \lim w_n$ . Dann

- (i)  $\overline{z_n} \rightarrow \overline{z}$  und  $(\|z_n\|)_{n \geq 1}$  konvergiert gegen  $\|z\|$
- (ii) Die Folge  $(z_n w_n)_{n \geq 1}$  konvergiert gegen  $zw$
- (iii) Falls  $w \neq 0$  und  $w_n \neq 0, \forall n \geq 1$  so konvergiert  $\left(\frac{z_n}{w_n}\right)_{n \geq 1}$  gegen  $\frac{z}{w}$

## 3.7 Reihen

Sei  $(a_n)_{n \geq 1}$  eine Folge in  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ . Sei

$$S_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

die Folge der Partial Summen. Eine Reihe ist eine unendliche Summe

$$a_1 + a_2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

einer Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$

#### Definition 3.33

Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ist konvergent falls die Folge  $(S_n)_{n \geq 1}$  konvergiert. In diesem Fall wird deren Limes mit  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  bezeichnet

$$\lim S_n = \lim \sum_{k=1}^n a_k := \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

#### Beispiel 3.34

1. Für  $|q| < 1$  gilt

$$S_n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$\lim S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} \quad (\text{da } \lim q^n = 0)$$

Somit konvergiert  $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$  und deren Wert ist  $\frac{1}{1-q}$

2. Die Harmonische Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  ist nach Beispiel 3.23 (i) divergent.

ADD reference

Für Reihen gibt es verschiedene praktische Konvergenz Kriterium. Das erste ergibt sich direkt aus dem Cauchy Kriterium (Satz 3.22)

add reference + page number

**Satz 3.35 (Cauchy Kriterium)**

Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergiert genau dann wenn es für jedes  $\varepsilon > 0$  einer Index  $N(\varepsilon) \geq 1$  gibt, so dass

$$\forall n \geq m \geq N(\varepsilon) \quad \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \varepsilon$$

**Beweis**

It says Übung, maybe incomplete? page 97 top

Die Reihe  $\sum_1^{\infty} a_j$  konvergiert genau dann, wenn

$$\left| \sum_m^n a_j \right| \rightarrow 0 \quad \forall n \geq m$$

$$\sum_1^{\infty} a_j \text{ konv.} \Leftrightarrow S_n = \sum_1^n a_k \text{ konv.} \Leftrightarrow S_n \text{ Cauchy} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \text{ s.d.}$$

$$\forall n > m > N(\varepsilon) \quad \underbrace{|S_n - S_m|}_{\sum_m^n a_k} < \varepsilon$$

■

**Korollar**

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \Rightarrow |a_k| \rightarrow 0$$

**Beweis**

Add reference + page number

Nehmen wir  $m = n$  in Satz 3.5. Das ist ein Notwendiges Kriterium aber nicht hinreichendes Kriterium

■

Content between brackets looks like personal notes, should these be copied? page 97 bottom

**Beispiel**

$\sum_1^{\infty} k$  ist nicht konvergent, weil  $\lim_{k \rightarrow \infty} k \neq 0$  (notwendig).

$\sum_1^{\infty} \frac{1}{k}$  ist nicht konvergent obwohl  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0$  (nicht genügens)

Im Folgenden leiten wir aus Vergleich mit der geometrischen Reihe verschiedene Konvergenz Kriterium ab (Quotienten, Wurzelkriterium). Dies Stützt sich auf

### KAPITEL 3. FOLGEN UND REIHEN (DER LIMES BEGRIFF)

#### Satz 3.36

Seien  $\sum_1^\infty a_k, \sum_1^\infty b_k$  Reihen wobei

1. Es gibt  $k_0$  so dass  $|a_k| \leq b_k, \forall k > k_0$
2.  $\sum b_k$  konvergiert

Dann konvergiert  $\sum_{k=1}^\infty a_k$

#### Beweis

Sei  $\varepsilon > 0$  und  $N(\varepsilon) > k_0$  so dass

$$\sum_{k=m}^n b_k = \left| \sum_{k=m}^n b_k \right| \leq \varepsilon \quad \forall n, m > N(\varepsilon) > k_0$$

Dann folgt aus 1.

$$\left| \sum_{k=m}^n a_k \right| \leq \sum_{k=m}^n |a_k| \leq \sum_{k=m}^n b_k \leq \varepsilon$$

Der Satz folgt aus dem Cauchy Kriterium

■

#### Beispiel

1.

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k!} = ?$$

$$\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}} \quad \forall k \geq 1 \Rightarrow \sum_1^\infty \frac{1}{k!} < \sum_1^\infty \frac{1}{2^{k-1}} = 2$$

2.

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(k+1)^2} = ?$$

Zum erst zeigen wir dass  $\sum_1^\infty \frac{1}{k(k+1)}$  konvergiert. Da

$$\begin{aligned} \frac{1}{k(k+1)} &= \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \quad \forall k \geq 1 \\ S_n &= \sum_1^n \frac{1}{k(k+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

KAPITEL 3. FOLGEN UND REIHEN (DER LIMES BEGRIFF)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1, \text{ d.h. } \sum_1^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

$\forall k > 1$  Da

$$\begin{aligned} (k+1)^2 &> k(k+1) \\ \frac{1}{(k+1)^2} &< \frac{1}{k(k+1)} \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\sum \frac{1}{(k+1)^2} \leq \sum \frac{1}{k(k+1)} = 1$$

$\sum \frac{1}{(k+1)^2}$  konvergiert.

**Satz 3.37 (Quotientenkriterium)**

Sei  $a_k \neq 0, \forall k \geq 1$

(i) Falls

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1$$

so ist  $\sum a_k$  konvergent

(ii) Falls

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \inf \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| > 1$$

so ist  $\sum a_k$  divergent

**Beweis**

(i) Sei  $q_0 := \limsup \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sup \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sup_{k \geq n} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \right)$$

Wähle  $q \in \mathbb{R}$  mit  $q_0 < q < 1$ . Dann gilt für genügend gross  $n_0 \in \mathbb{N}$

$$\forall n \geq n_0 : \left| \sup_{k \geq n} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| - q_0 \right| \leq \underbrace{(q - q_0)}_{\varepsilon}$$

$$\text{d.h. } \sup_{k \geq n} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q \quad \forall n \geq n_0$$

Insbesondere bei Wahl von  $n = n_0$

$$\forall k \geq n_0 \quad \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q$$

Es folgt für  $k \geq n_0$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} |a_k| &= \left| \frac{a_k}{a_{k-1}} \cdot \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} \cdot \dots \cdot \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \cdot a_{n_0} \right| \\ &\leq q^{k-n_0} |a_{n_0}| = \underbrace{q^{n_0} |a_{n_0}|}_C q^k = C q^k \end{aligned}$$



Wir können nun  $b_k = Cq^k$  setzen und Satz 3.36 anwenden. Da  $\sum b_k$  konvergiert (da  $|q| < 1$ )  $\sum a_k$  konvergiert.

(ii) Sei

$$q_0 := \liminf_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$$

(falls es existiert). Wähle  $q \in \mathbb{R}$  mit  $q_0 > q > 1$ . Dann existiert  $n_0$  mit

$$\forall k > n_0 : \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| > \inf_{k > n_0} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \geq q$$

$$\left( \begin{array}{l} \left| \inf_{k \geq n} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| - q_0 \right| < \underbrace{q - q_0}_{\varepsilon} \quad \forall k > n_0 \\ \Rightarrow -q_0 + q < \inf_{k \geq n} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| - q_0 \quad \forall k > n_0 \end{array} \right)$$

Dann folgt analog wie in (i) dass

$$\begin{aligned} |a_k| &= \left| \frac{a_k}{a_{k-1}} \cdot \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} \cdot \dots \cdot \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \cdot a_{n_0} \right| \\ &> q^{k-n_0} |a_{n_0}| > Cq^k, \forall k > k_0 \end{aligned}$$

Insbesondere ist  $\{|a_k| : k \geq 1\}$  nicht beschränkt  $\Rightarrow \lim a_k \not\rightarrow 0 \Rightarrow \sum a_k$  divergent.

Falls  $\lim \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$  existiert, dann

$$\liminf \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \limsup \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = L$$

■

### Satz 3.36'

Sei  $a_k \neq 0, \forall k \in \mathbb{N}$  und sei  $L = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$

- (i) Falls  $L < 1$ , so ist  $\sum a_k$  konvergent
- (ii) Falls  $L > 1$ , so ist  $\sum a_k$  divergent
- (iii) Falls  $L = 1$ , kann man daraus nichts ableiten

### Beispiel

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$  konvergiert. Da

$$\begin{aligned} \left| \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} \right| &= (n+1) \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left( \frac{n}{n+1} \right)^n \\ &= \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^n \rightarrow \frac{1}{e} < 1 \end{aligned}$$

Insbesondere  $\frac{n!}{n^n} \rightarrow 0$  falls  $n \rightarrow \infty$ , d.h.  $n^n$  wächst schneller als  $n!$  (schon gesehen)

Maybe add where??  
page 104 top

*KAPITEL 3. FOLGEN UND REIHEN (DER LIMES BEGRIFF)*

2. Wir haben schon gesehen dass  $\sum \frac{1}{n^2}$  konvergiert. Aber Quotientenkriterium gibt keine Informationen dass

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{(n+1)^2}{n^2} \right| \rightarrow 1$$

3. Wir haben auch schon gesehen dass  $\sum \frac{1}{n}$  divergiert. In diesem Fall auch

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{k+1}{k} \rightarrow 1$$

, d.h. das Quotientenkriterium ist nicht anwendbar.