$$\mathrm{Exp}(x)\,\mathrm{Exp}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \mathrm{Exp}(x+y)$$

zum Abschluss behandeln wir noch den Zusammenhang mit "e" und "e^x"

Nov 5. 13 Lec 1

Satz 3.49 (Satz 3.9.1 Struve)

$$\mathrm{Exp}(1) = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Beweis: (1) $\mathrm{Exp}(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon)$, mit

$$\left| \mathrm{Exp}(1) - \sum_{k=0}^{n_0} \frac{1}{k!} \right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad -\varepsilon < \sum_{0}^{n_0} \frac{1}{k!} - \mathrm{Exp}(1) < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad -\varepsilon + \mathrm{Exp}(1) < \sum_{0}^{n_0} \frac{1}{k!} < \varepsilon + \mathrm{Exp}(1)$$

Insbesondere

$$\mathrm{Exp}(1) < \sum_{k=0}^{n_0} \frac{1}{k!} + \varepsilon$$

2 $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k}$$

$$\overset{*}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \underbrace{\left(\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k}\right)}_{a_k^{(n)}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} a_k^{(n)}$$

Da $a_k^{(n)} := \frac{n}{n} \frac{(n-1)}{n} \cdot \frac{n-k+1}{n} < 1$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \mathrm{Exp}(1)$$

$$\Rightarrow \quad 0 < \mathrm{Exp}(1) - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

3 $0 < a_k^{(n)} < 1$, und für jedes k fest

ist $a_k^{(n)} \to 1$, $n \to \infty$.

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} = \frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k+1}{n}\right)}{n^k/n^k}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

somit

$$1 - a_k^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad , (k \text{ fest})$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n_0} \left(1 - a_k^{(n)}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\Longrightarrow$ Für $\varepsilon > 0$ $\exists\ n_1 = n_1(\varepsilon, n_0)$, so dass

$$\forall n \geq n_1 \qquad \sum_{k=0}^{n_0} \left(1 - a_k^{(n)}\right) < \varepsilon$$

Dann haben wir $\forall n \geq \operatorname{Max}\{n_0, n_1\}$

$$0 \overset{(2)}{<} \operatorname{Exp}(1) - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \overset{(1)}{<} \sum_{k=0}^{n_0} \frac{1}{k!} + \varepsilon - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$\overset{(2)(*)}{<} \sum_{k=0}^{n_0} \frac{1}{k!} + \varepsilon - \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} \frac{1}{k!}$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n_0} \frac{1}{k!} + \varepsilon - \sum_{k=0}^{n_0} a_k^{(n)} \frac{1}{k!} \quad , (n_0 \leq n)$$

$$= \sum_{k=0}^{n_0} \frac{1}{k!} \left(1 - a_k^{(n)}\right) + \varepsilon$$

$$< \sum_{k=0}^{n_0} \left(1 - a_k^{(n)}\right) + \varepsilon \quad < 2\varepsilon$$

$$\Longrightarrow \quad \operatorname{Exp}(1) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Analog kann man auch beweisen dass

Satz 3.50 $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{Exp}(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

Siehe 125-1. 125-2

Satz 3.49 $\Rightarrow \operatorname{Exp}(1) = e^1$

$$\operatorname{Exp}(x+y) = (\operatorname{Exp} x)(\operatorname{Exp} y)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Exp}(n) = \operatorname{Exp}(1)\operatorname{Exp}(n-1)$$
$$= \operatorname{Exp}(1)\operatorname{Exp}(1)\operatorname{Exp}(n-2)$$
$$\vdots$$
$$= e \cdot e \cdot \ldots e = e^n. \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$1 = \operatorname{Exp}(0) = \operatorname{Exp}(n)\operatorname{Exp}(-n)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Exp}(-n) = \frac{1}{\operatorname{Exp}(n)} = \frac{1}{e^n} = e^{-n}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Exp}(n) = e^n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

$\forall q \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Exp}\left(\frac{1}{q}\right) = e^{1/q}$

Da $e = \operatorname{Exp}(1) = \operatorname{Exp}\left(q \cdot \frac{1}{q}\right)$

$$= \underbrace{\operatorname{Exp}\left(\frac{1}{q}\right) \ldots \operatorname{Exp}\left(\frac{1}{q}\right)}_{q \text{ mal}}$$

Satz $\operatorname{Exp}(x) = \lim (1+\frac{x}{n})^n \; ; x \in \mathbb{R}$.

$$\operatorname{Exp}(x) = \sum \frac{x}{k!} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon)$$

$$\forall n > n_0 \quad \left| \operatorname{Exp} x - \sum_0^{n_0} \frac{x}{k!} \right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad -\varepsilon < \sum \frac{x}{k!} - \operatorname{Exp} x < \varepsilon$$

$$① \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Exp} x - \varepsilon < \sum_0^{n_0} \frac{x^k}{k!} < \varepsilon + \operatorname{Exp} x.$$

$$② \quad \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_0^n \binom{n}{k} \frac{x^n}{n^k}$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{x^k}{n^k}$$

$$= \sum_0^n \frac{1}{k!} \frac{n!}{(n-k)!\, n^k} x^k$$

$$② \quad = \sum \frac{1}{k!} \underbrace{\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}}_{a_k^{(n)}} x^k$$

$$\leq \sum_0^n \frac{x^k}{k!} < \operatorname{Exp} x$$

$$\Rightarrow \operatorname{Exp} x - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n > 0 \quad ②$$

(125-2)

$0 < a_k^n < 1$ für jedes k fest ist

$a_k^{(n)} \to 1 \quad n \to \infty$

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} = \frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k}{n}+\frac{1}{n}\right)}{n^k/n^k}$$

$$\to 1$$

$$\Rightarrow 1 - a_k^{(n)} \to 0, \quad n \to \infty \quad (k \text{ fest})$$

x fest

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n_0} \left(1 - a_k^{(n)}\right) x^k \to 0 \quad n \to \infty \quad (x, k \text{ fest})$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_1 = n_1(\varepsilon, n_0) \quad \forall n > n_1$$

$$\sum_{k=0}^{n_0} \left(1 - a_k^{(n)}\right) x^k < \varepsilon$$

Dann $\forall n > \operatorname{Max}\{n_0, n_1\}$

$$0 \overset{②}{<} \operatorname{Exp} x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \overset{①}{<} \sum_0^{n_0} \frac{x^k}{k!} + \varepsilon - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

$$< \sum_0^{n_0} \frac{x^k}{k!} + \varepsilon - \sum_0^{n_0} a_k^n \frac{x^k}{k!}$$

$$= \sum_0^{n_0} \frac{\left(1 - a_k^n\right)}{k!} x^k + \varepsilon < \sum_0^{n_0} \left(1 - a_k^{(n)}\right) x^k + \varepsilon$$

$$< 2\varepsilon$$

Somit haben wir

$\boxed{\text{Struve Satz } 3.9.2}$

Satz 3.51 $\forall x \in \mathbb{Q} \quad \operatorname{Exp}(x) = e^x$

Für rein imaginäre Argumente $z = iy$, $y \in \mathbb{R}$

können wir $\operatorname{Exp}(iy)$ durch Umordnung gemäss Satz 3.46 in Real und Imaginärteil zerlegen

$$\operatorname{Exp}(iy) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^k}{k!}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l y^{2l}}{(2l)!} + i \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l y^{2l+1}}{(2l+1)!}$$

$$:= \cos(y) + i\sin(y)$$

Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$

$$\operatorname{Exp}(z) = \operatorname{Exp}(x)\operatorname{Exp}(iy)$$
$$= \operatorname{Exp}(x)(\cos y + i\sin y)$$

Kapitel 4 : Stetigkeit

§ 4.1 Grenzwerte von Funktionen.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine Teilmenge und
$f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung

Struwe. Def 4.1.2.

Defn 4.1 f hat an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}^d$ den **Grenzwert** a, falls für jede Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in Ω mit $x_k \to x_0$ $(k \to \infty)$ gilt $f(x_k) \to a$.

Notation: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$.

Bmk ① x_0 muss nicht in Definitionsbereich von f sein).

Defn 4.2 (4.13) $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ heisst stetig an der Stelle $x_0 \in \Omega$ falls.

① f an der Stelle x_0 definiert ist

② $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert

③ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Defn 4.2' Die Abbildung $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ist im Punkt $x_0 \in \Omega$ stetig, falls

für jede gegen x_0 konvergierende Folge $(x_n)_{n \geq 1}$ in Ω, die Folge $(f(x_n))_{n \geq 1}$ konvergiert mit Grenzwert $f(x_0)$ ist.

d.h. $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \to \infty} x_n)$

d.h "Grenzwerte von Folgen von stetigen Funktionen bewahrt"

"Stetige Funktionen erhalten Grenzwerte von Folgen".

Defn Die Abbildung $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ist auf Ω stetig (oder einfach stetig wenn der Kontext klar ist), falls f in jedem Punkt $x \in \Omega$ stetig ist.

Bsp. Mittels Resultate von Kapitel 3 haben wir wichtige Beispiele von stetigen Funktionen.

① $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(a, b) \mapsto (a+b)$ ist auf ganz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ stetig.

(Seien (a_n), (b_n) Folgen mit $a = \lim a_n$, $b = \lim b_n$. Dann: die Folge $(a_n + b_n)$ konv, und $\lim a_n + b_n = a + b$ (Satz 3.8 S. 59)

② $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(a, b) \mapsto ab$ ist auf ganz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

③ $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{x} \to \mathbb{R}$, $(a, b) \mapsto a/b$ ist auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{x}$ stetig

④ Aus wiederholter Anwendung von ① und ② ergibt sich:

Sei $n \geq 0$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ dann ist

(Polynomiale Funktion)

$p(x) := a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ stetig auf ganz $\mathbb{R}$.

(5) Die Abbildungen $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $(a, b) \to (a+b)$

und $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $(\lambda, a) \to \lambda a$ sind stetig auf ihrem Definitionsbereich.

(6) Die Abbildungen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \to \bar{z}$

$\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $(z, w) \to z \cdot w$ $\quad$ $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$, $(z, w) \to z/w$

sind stetig.

(7) $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $x \to \|x\|$, $\quad$ $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $z \to |z|$ sind auf stetig.

(8) Sei $f(x) = \chi_{\mathbb{Q}} = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

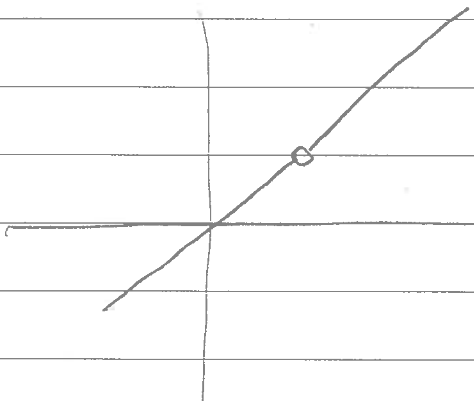
characteristische Funktion von $\mathbb{Q}$

Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ fest mit $(x_k) \in \mathbb{Q}$, $x_k \to x$.

(zu $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, sei x_k die an der k-ten Nachkommastelle abgebrochene Dezimaldarstellung von x. Dann gilt $x_k \in \mathbb{Q}$ $\forall k \in \mathbb{N}$ und $x_k \to x$.)

Dann ist $f(x_k) = \chi(x_k) = 1 \not\to 0 = \chi(x)$.

9 Sei $f : \begin{cases} x & x < 1 \\ x & x > 1 \end{cases}$



f ist in $x=1$ nicht stetig.

weil f an der stelle $x=1$ nicht definiert ist.

Im diesem Beispiel ist die Funktion f nicht stetig aber sie ist eigentlich eine "gute" Funktion.

S. Defn 4-1-3 (ii)

Defn: $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega$ so dass $\exists (x_k) \in \Omega$ mit $\lim x_k = x_0$

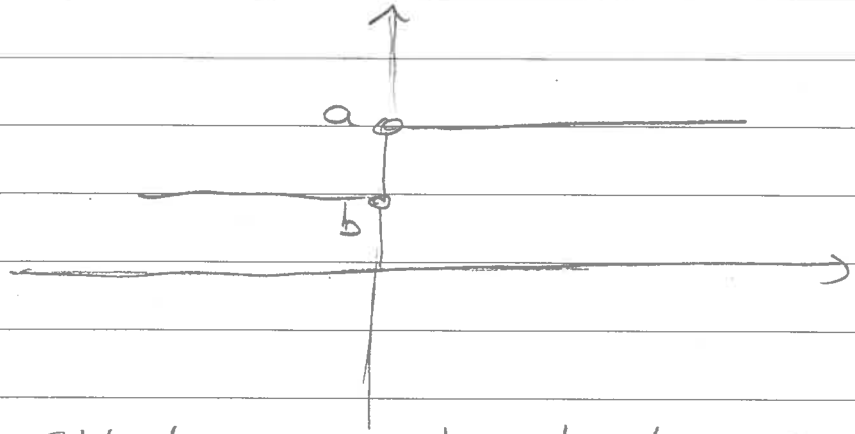
Dann ist f an der Stelle x_0 stetig ergänzbar falls $a := \lim f(x_k)$ existiert. In diesem fall setzen wir

$$f(x_0) = a.$$

Die durch $f(x_0) = a$ ergänzte funktion f offenbar stetig an der stelle x_0.

(7) $f: \mathbb{R}^{\times} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{falls } x<0 \\ b & x>0 \end{cases}$$



Stückweise konstante Funktion ist stetig an jeder Stelle $x_0 \neq 0$. Sie ist jedoch für $a \neq b$ an der Stelle $x_0 = 0$ nicht stetig ergänzbar.

$\boxed{\text{S. Bsp 4.1.3, VII}}$ Nov. 7.13

(8) Sei $f: (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ monoton wachsend d.h. $\forall\, x,y \in (a,b)$ mit $x \leq y$ folgt $f(x) \leq f(y)$.

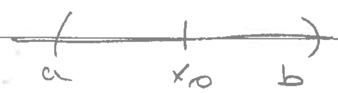
Sei nun $x_0 \in (a,b)$. Dann existieren die Links und rechtsseitigen Grenzwerte

$$f(x_0^+) := \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0 \\ x \downarrow x_0}} f(x), \qquad f(x_0^-) := \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0 \\ x \uparrow x_0}} f(x)$$

und f ist stetig an der Stelle x_0 genau dann, wenn $f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0)$

<u>Beweis.</u> Wir behaupten, dass für jede Folge $(y_n)_{n\geq 1}$ mit ① $\{y_n : n \geq 1\} \subset (a, x_0)$ und ② $\lim y_n = x_0$

die Folge $(f(y_n))_{n\geq 1}$ konvergiert und der Limes $\ell(x_0)$ unabhängig von der Wahl der Folge ist ($\ell(x_0)$:= linksseitiges Limes)



$$= \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$$

Wir betrachten zunächst die "spezielle" Folge $x_n = \left(x_0 - \frac{1}{n}\right)_{n \geq r}$ (hier ist r so gewählt, dass $x_0 - \frac{1}{r} \geq a$).

Dann ist $\left(f\left(x_0 - \frac{1}{n}\right)\right)_{n \geq r}$ monoton wachsend

$\left(x_0 - \frac{1}{n+1} > x_0 - \frac{1}{n} \text{ und } f \text{ monot. wachsend}\right)$

134

und $\left(f(x_0 - \frac{1}{n})\right)_{n \geq r}$ beschränkt $(f(a) < \cdot < f(b))$

Sei $\ell_- := \lim_{n \to \infty} f(x_0 - \frac{1}{n})$.

Wir möchten zeigen dass für jede $(y_n) \subset (a, x_0)$ mit $\lim y_n = x_0$.

$\lim f(y_n)$ existiert und $\lim f(y_n) = \ell_-$

Da es für jede $x < x_0$ ein n gibt mit $x \leq x_0 - \frac{1}{n}$ folgt

$$f(x) \leq f(x_0 - \frac{1}{n}) \leq \ell_-$$

Sei nun $(y_n)_{n \geq 1}$ beliebig in (a, x_0) mit $(y_n < x_0)$ $\lim y_n = x_0$. Sei $\varepsilon > 0$, und $n_0(\varepsilon)$ mit

$$\ell_- - \varepsilon < f(x_0 - \frac{1}{n}) \leq \ell_- \qquad \forall n > n_0(\varepsilon)$$

Insbesondere

$$\ell_- - \varepsilon < f\left(x_0 - \frac{1}{n_0(\varepsilon)}\right) \leq \ell_-$$

Sei jetzt $n_1(\varepsilon) = n_1(n_0(\varepsilon)) > 0$ so dass

$$x_{n_0(\varepsilon)} = x_0 - \frac{1}{n_0(\varepsilon)} < y_n < x_0 = \lim_{n \to \infty} x_n \qquad \forall n \geq n_1(\varepsilon)$$

$\left((y_n) \subset (a, x_0), \quad \lim y_n = x_0 \right)$

Da f monoton ist, folgt

$$l_- - \varepsilon < f\left(x_0 - \frac{1}{n_0(\varepsilon)}\right) \leq f(y_n) \leq l_-$$

Insbesondere $\lim f(y_n) = l_-$ $\quad = \lim f(x_n$

Der Beweis für l_+ verläuft ganz analog.

Nun zur Stetigkeit: Es gilt immer

$$l_-(x_0) \leq f(x_0) \leq l_+(x_0)$$

Falls $l_-(x_0) < l_+(x_0)$ sei

$(t_n)_{n\geq 1}$ wie folgt definiert

$$t_n = \begin{cases} x_0 - \frac{1}{n} & n \text{ gerade} \\ x_0 + \frac{1}{n} & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Dann gilt $\lim t_n = x_0$

Aber $f(t_{2n+1}) - f(t_n) \geq l_+(x_0) - l_-(x_0) > 0$

Woraus folgt dass $(f(t_n))_{n\geq 1}$ nicht konvergiert.

Falls $l_-(x_0) = l_+(x_0)$ folgt die Stetigkeit sofort

☒

Struwe Satz 4-1-1

Satz 4.3 Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ monotone wachsend. Dann ist die Menge der Unstetigkeitspunkte von f entweder endlich oder abzählbar.

Beweis Sei $U(f) = \{x \in (a,b) : f$ ist nicht stetig an $x\}$

Dann ist $\forall x \in U(f)$, $l_-(x) < l_+(x)$

und wir wählen ein $g(x) \in \mathbb{Q} \cap (l_-(x), l_+(x))$

Falls $x_1 < x_2$ in $U(f)$ folgt

$l_+(x_1) < l_-(x_2)$

und somit $g(x_1) < g(x_2)$. Damit

ist $g : U(f) \to \mathbb{Q}$ injektiv. $\boxtimes$

Stetigkeit verhält sich gut mit der üblichen Operationen auf Funktionen

[Str. Satz 4.2.2]

Satz 4.4 Seien $f, g : \Omega \to \mathbb{R}^n$ und $x_0 \in \Omega$. Falls f und g in x_0 stetig sind, so sind es auch $f+g$ und αf, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(Folgt aus den Reihenregeln mit Folgen in $\mathbb{R}^n$.)

Kor 4.5 Falls f, g auf Ω stetig sind so sind es $f+g$ und αf

Defn 4.6 $C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ bezeichnet die Menge der stetigen Abbildungen $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Nach Kor 4.5 ist es ein Vektorraum.

Nov 7. 13
lec. 2

138

Struwe Satz 4.2.1

Satz 4.7 Seien $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$

und $g: \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^m$ mit $f(\Omega) \subset \Gamma$

und $x_0 \in \Omega$, $y_0 = f(x_0) \subset \Gamma$.

Falls f in x_0 und g in y_0 stetig sind,

folgt dass $g \circ f: \Omega \to \mathbb{R}^m$ in x_0 stetig ist.

○

Beweis: Sei $(t_n)_{n \geq 1}$ in Ω mit $\lim t_n = x_0$

Da f stetig ist, $\lim f(t_n) = f(x_0) = y_0$,

und aus stetigkeit von g folgt

$$\lim_{n\to\infty} g\big(f(t_n)\big) = g(y_0) = (g \circ f)(x_0).$$

○

Kor 4.8 Falls $f: \Omega \to \mathbb{R}^d$, $f(\Omega) \subset \Gamma$

und $g: \Gamma \to \mathbb{R}^m$ resp. auf Ω und

Γ stetig sind, so folgt dass

$g \circ f: \Omega \to \mathbb{R}^m$ auf Ω stetig ist.

§ 4.2 Stetige Funktionen

In diesem Abschnitt, behandeln wir die erste der fundamentalen Eigenschaften von stetigen Funktionen nämlich der eine auf einem endlichen Interval $[a,b]$ (Endpunkte eingeschlossen) stetige Funktion immer ein Max und Min besitzt. Dies verallgemeinern wir dann auf Abbildungen von $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ nach $\mathbb{R}^m$ wobei Ω ein spezielle Eigenschaft haben muss (Kompaktheit).

<u>Satz 4.9.</u> Seien $-\infty < a \leq b < \infty$

und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig.

Dann ist $f([a,b])$ in $\mathbb{R}$ beschränkt

und es gibt $c_-, c_+ \in [a,b]$ mit

$$f(c_+) = \sup \{ f(x) : x \in [a,b] \}$$

○ $f(c_-) = \inf \{ f(x) : x \in [a,b]$

d.h Supremum und Infimum werden angenommen.

<u>Beweis</u>: (i) $f([a,b])$ ist nach oben beschränkt:

○ Indirekter Beweis: Falls nicht, so gibt es $\forall n \in \mathbb{N}$ ein $t_n \in [a,b]$ mit

$$f(t_n) \geq n.$$

$(t_n)_{n \geq 1}$ ist beschränkt, Nach Bolzano Weierstrass sei $(t_{\ell(n)})$ eine konvergente Teilfolge.

mit $\lim t_{\ell(n)} = x$

Dann $x \in [a, b]$, da $a \leq t_n \leq b$

(**Satz:** (a_n), (b_n) konv. Folgen mit $\lim a_n = a$
$\lim b_n = b$
Falls $a_n \leq b_n$, folgt $a \leq b$.)

Aus Stetigkeit von f folgt:

$$\lim_{n \to \infty} f(t_{\ell(n)}) = f(x)$$

Insbesondere $f(t_{\ell(n)})$ ist beschränkt

was ein Widerspruch mit $f(t_{\ell(n)}) \geq \ell(n)$

$(i) \Longrightarrow$ f ist nach oben beschränkt.

f nach unten beschränkt: Analog.

(ii) Sei $M := \sup \{f(x) : x \in [a, b]\}$
(nach (i) existiert).

Sei für jedes $n \geq 1$ $x_n \in [a, b]$ mit

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M \quad (*)$$

($M - \frac{1}{n}$ ist kein Sup $\Rightarrow \exists\, x_n$ mit $M - \frac{1}{n} < f(x_n)$)

$(x_n) \subset [a,b]$ beschränkt.

Sei ~~Nach~~ BW $(x_{\ell(n)})_{n\geq 1}$ eine konv. Teilfolge mit Limes c_+

Aus Stetigkeit von f folgt:

$$f(c_+) = \lim_{n\to\infty} f(x_{\ell(n)})$$

Aus (*): $M - \frac{1}{\ell(n)} < f(x_{\ell(n)}) \leq M$

folgt $\lim_{n\to\infty} f(x_{\ell(n)}) = M$

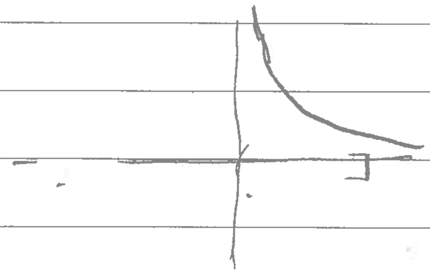
d.h $\exists\, c_+ \in [a,b]$ mit

$$f(c_+) = \lim f(x_{\ell(n)}) = M.$$

(iv) Infimum ist ähnlich. ☒

<u>Bmk</u>: Satz 4.9 kann man als eine Eigenschaft des Intervals $[a,b]$ auffassen.

Sie gilt zum Beispiel nicht für $(0,1]$ wie das Beispiel der auf $(0,1]$ stetigen Funktion $f(x) = 1/x$ zeigt.



Die grundlegende Eigenschaft ist Kompaktheit

$\boxed{\text{Defn 4.2.2 Schmee}}$

Defn 4.10. Eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^d$ heisst kompakt, falls jede Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ von Punkten aus K, einen Häufungspunkt in K besitzt. d.h.

Falls jede Folge in K eine in K konvergierende Teilfolge hat.

Bsp. ① $(0,1]$ ist nicht kompakt:

$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1} \subset (0,1]$ konvergiert gegen $0 \notin (0$

(2) $[a,b]$ ist kompakt.

Sei $(t_n)_{n\geq 1}$ eine Folge mit $a \leq t_n \leq b$.

(t_n) ist beschränkt, nach BW sei

$t_{\ell(n)}$ eine konvergente Teilfolge

mit Limes ℓ. Dann folgt

aus $a \leq t_{\ell(n)} \leq b \quad \forall n \geq 1$, dass

$$a \leq \lim t_{\ell(n)} \leq b$$

d.h. $\ell \in [a,b]$. $\longrightarrow$ Nov 11 13

Ihr Lemma 4.2.1

Lemma 4.11 Falls $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt ist, ist es beschränkt, und besitzt zudem ein Minimum und Maximum.

Beweis. Sonst gibt es zu jedem $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in K$ mit $\|x_n\| \geq n$.

Dann kann aber $(x_n)_{n\geq 1}$ keine konvergente Teilfolge besitzen: $\left(|x_{\ell(n)}| > \ell(n) \right)$

$\Rightarrow$ K ist beschränkt

165

Sei $s := \sup K$.

Dann gibt es $\forall n \geq 1$, $k_n \in K$ mit

$$s - \frac{1}{n} < k_n \leq s$$

Insbesondere gilt: $\lim k_n = s$.

Da K kompakt ist, hat k_n eine in K konvergierende Teilfolge.

Daraus folgt dass $s \in K$.