

# Kapitel 5

## Differentialrechnung auf $\mathbb{R}$

### 5.1 Differential (Ableitung), Elementare Eigenschaften

**Definition 5.1**

Sei  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}$ , und  $x_0 \in \Omega$

1.  $f$  heisst differenzierbar an der Stelle  $x_0$  falls

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Dieser Grenzwert wird dann mit  $f'(x_0)$  oder  $\frac{df}{dx}(x_0)$  bezeichnet. Die Zahl  $f'(x_0)$  heisst die Ableitung oder das Differential von  $f$  an der Stelle  $x_0$

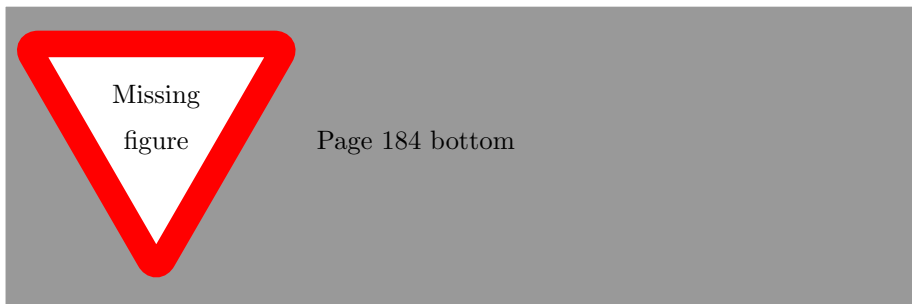
2.  $f$  heisst in  $\Omega$  differenzierbar, falls sie an jeder Stelle  $x_0 \in \Omega$  differenzierbar. In diesem Fall, nennt sich die Funktion  $x \rightarrow f'(x)$  Ableitung von  $f$

**Bemerkung 5.2**

In der Definition 5.1, verlangen wir also, dass für jede in  $\Omega \setminus \{x_0\}$  erhaltene Folge  $(x_n)_{n \geq 1}$  mit Grenzwert  $x_0$ , der Limes

**Bemerkung 5.3**

Sei  $f$  differenzierbar in  $x_0$



Dann ist

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

die Steigung der Geraden durch die Punkte  $(x_0, f(x_0))$  und  $(x, f(x))$ .

Geometrisch ist also  $f'(x_0)$  die Steigung der Tangenten am Graphen von  $f$  im Punkt  $(x_0, f(x_0))$ . Diese Tangente hat die Gleichung

$$T(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Sei

$$\begin{aligned} f(x) &= f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) + R_{x_0}(x) = T(x) + R_{x_0}(x) \\ \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} + \frac{R(x)}{x - x_0} \end{aligned}$$

Dann folgt

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0$$

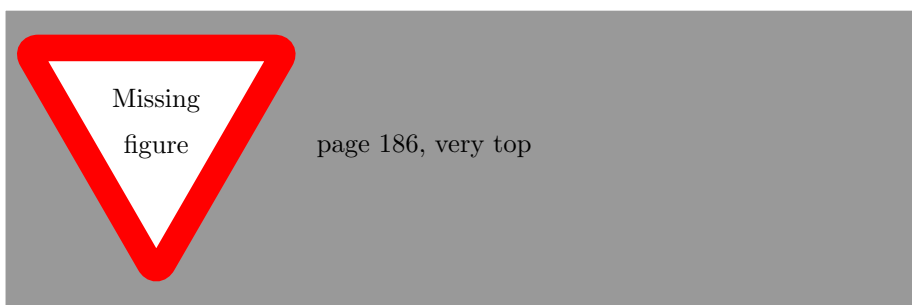
Die Lineare Funktion  $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  stellt eine gute Approximation der Funktion  $f(x)$  dar:

Es gilt

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R_{x_0}(x)$$

mit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0$$



**Beispiel 5.4**

1.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto mx + b \end{aligned}$$

ist überall differenzierbar mit  $f'(x) = m, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= m(x - x_0) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} &= m \end{aligned}$$

2.  $f(x) = |x|$  ist für alle  $x_0 \neq 0$  differenzierbar aber nicht für  $x_0 = 0$

$$f(x) - f(0) = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

Also ist

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Besitzt also keinen Grenzwert für  $x \rightarrow 0, x \neq 0$

3.  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist überall auf  $\mathbb{R}$  differenzierbar und  $\exp'(x) = \exp(x)$ . Sei  $x_0 \in \mathbb{R}, x_0 \neq x = x_0 + h \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \exp(x_0 + h) - \exp(x_0) &= \exp(x_0)(\exp(h) - 1) \\ \exp(h) - 1 &= h + \frac{h^2}{2!} + \dots \\ \Rightarrow \frac{\exp(h) - 1}{h} &= 1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \dots \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} \left| \frac{\exp(h) - 1}{h} - 1 \right| &\leq |h| \left[ \frac{1}{2!} + \frac{|h|}{3!} + \frac{|h|^2}{4!} + \dots \right] \\ &\leq |h| \left[ 1 + |h| + \frac{|h|^2}{2!} + \dots \right] \\ &\leq |h| \exp(h) \end{aligned}$$

Woraus

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{\exp(h) - 1}{h} = 1$$

und somit

$$\begin{aligned} \exp'(x_0) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{\exp(x_0 + h) - \exp(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \exp(x_0) \left( \frac{\exp(h) - 1}{h} \right) \\ &= \exp(x_0) \end{aligned}$$

4.  $\sin(x)$  und  $\cos(x)$  sind überall differenzierbar und

$$\begin{aligned}\sin' &= \cos \\ \cos' &= -\sin\end{aligned}$$

Aus der Additionsgesetzen:

$$\begin{aligned}\sin(x+h) - \sin(x) &= \sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x) \\ &= \sin(x)(\cos(h) - 1) + \cos(x)\sin(h)\end{aligned}$$

Nun ist

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$$

und

$$\begin{aligned}\frac{\cos(h) - 1}{h} &= \frac{\cos^2(h) - 1}{h(\cos(h) + 1)} = \frac{\sin^2(h)}{h(\cos(h) + 1)} \\ &= \frac{1}{\cos(h) + 1} \cdot \frac{\sin^2(h)}{h} \\ &\quad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ &\quad \frac{1}{2} \qquad \qquad 0\end{aligned}$$

There is a  $\sin h/h$  which doesn't seem to belong anywhere, page 188 bottom right corner

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} &= \sin(x) \left( \frac{\cos(h) - 1}{h} \right) + \cos(x) \frac{\sin(h)}{h} \\ \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} &= \lim \left( \sin(x) \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\cos(h) - 1}{h} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cos(x) \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\sin(h)}{h} \right) \right) \\ &= \sin(x) \lim \left( \frac{\cos(h) - 1}{h} \right) \\ &\quad + \cos(x) \lim \left( \frac{\sin(h)}{h} \right) \\ &= (\sin(x)) \cdot 0 + (\cos(x)) \cdot 1 = \cos(x)\end{aligned}$$

Analog

$$\begin{aligned}\cos(x+h) - \cos(x) &= \cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x) \\ &= \cos(x)(\cos(h) - 1) + \sin(x)\sin(h)\end{aligned}$$

Da wie oben  $\frac{\cos(h)-1}{h} \rightarrow 0$ ,  $\frac{\sin(h)}{h} \rightarrow 1$  folgt  $\cos' = -\sin$

Der Zusammenhang zwischen differenzierbarkeit und stetigkeit ist

## KAPITEL 5. DIFFERENTIALRECHNUNG AUF $\mathbb{R}$

### Satz 5.5

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \Omega$  und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0$  differenzierbar. Dann ist  $f$  in  $x_0$  stetig.  
(Also, "Diff" ist mehr als "Stetigkeit")

### Beweis

$f$  differenzierbar in  $x_0$ . Sei

$$T : \Omega \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Da  $f$  differenzierbar in  $x_0$  ist, hat  $T$  ein Grenzwert in  $x_0$ , und

$$\lim_{x \rightarrow x_0} T(x) = f'(x)$$

Für  $x \neq x_0$

$$f(x) = T(x)(x - x_0) + f(x_0)$$

$f(x)$  ist die Summe von 2 Funktionen  $T(x)(x - x_0)$  und  $f(x_0) = \text{konstant}$ .

Da beide Funktionen ein Grenzwert an der Stelle  $x_0$  besitzen, hat auch  $f$  einen Grenzwert in  $x_0$  und

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (T(x)) \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) \\ &= f'(x) \cdot 0 + f(x_0) = f(x_0) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  ist stetig in  $x_0$ .

■

### Bemerkung

Die Umkehrung von Satz 5.5 gilt nicht, z.B.  $f(x) = |x|$  ist stetig in  $x = 0$  aber nicht differenzierbar.

Add page + reference,  
page 190 middle

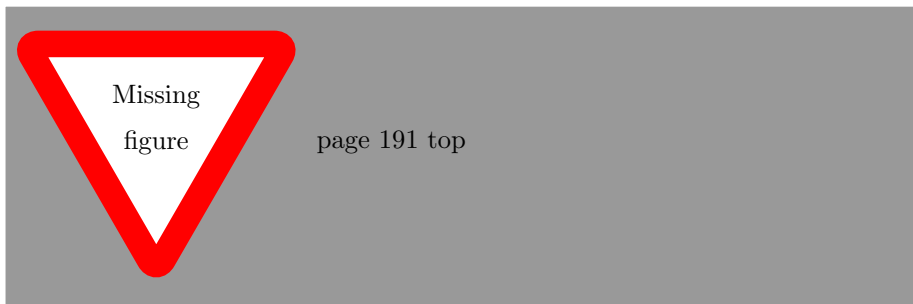
### Beispiel 5.6

Das folgende Beispiel zeigt, dass es stetige Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, die an keiner Stelle  $x_0 \in \mathbb{R}$  differenzierbar sind. (Von der Waerden (1930))

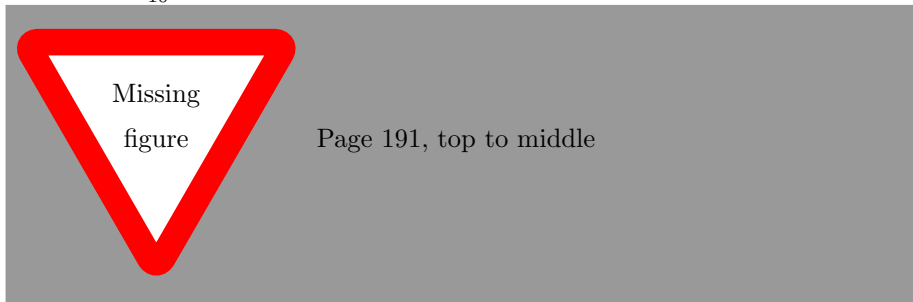
Sei für  $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \text{Distanz von } x \text{ zur nächsten ganzen Zahl} \\ &= \min \{|x - m| : m \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

Der Graph von  $\langle x \rangle$  sieht so aus



Graph von  $\frac{10x}{10}$



Sei

$$f(x) := \langle x \rangle + \frac{\langle 10x \rangle}{10} + \frac{\langle 10^2 x \rangle}{100} + \dots$$

Da

$$0 \leq \langle 10^n x \rangle \leq \frac{1}{2}$$

folgt absolut konvergenz. Ausserdem sei

$$f_k(x) = \sum_{n=0}^k \frac{\langle 10^n x \rangle}{10^n}$$

Dann ist

$$|f(x) - f_k(x)| = \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{\langle 10^n x \rangle}{10^n} \right| \leq \frac{1}{2} \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{10^n} \right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{10^{-k}}{9}$$

$\forall k \geq 1$  ist  $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig.

Da die Folge  $(f_k)_{k \geq 1}$  gleichmässig gegen  $f$  konvergiert ist  $f$  stetig. Man kann zeigen, dass  $f$  in keinem Punkt von  $\mathbb{R}$  differenzierbar ist.

### Satz 5.7

Seien  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen,  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Wir nehmen an dass  $f$  und  $g$  in  $x_0$  differenzierbar sind. Dann sind  $f + g$ ,  $f \cdot g$  und falls  $g(x_0) \neq 0$  auch  $f/g$  an der Stelle  $x_0$  differenzierbar. Es gelten dann folgende Formel:

1.  $(af + bg)'(x_0) = af'(x_0) + bf'(x_0) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$
2.  $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
3.  $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

End of beweis is put here, I think it is better if it stays up when the bsp begins. Page 192 middle

Is this supposed to be a fraction?? page 192 bottom

**Beweis**

1. Für  $x \neq x_0$

$$\frac{(af + bg)(x) - (af + bg)(x_0)}{x - x_0} = a \left( \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) + b \left( \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right)$$

Da  $f$  und  $g$  in  $x_0$  differenzierbar sind, folgt dass  $af + bg$  in  $x_0$  differenzierbar ist und

$$(af + bg)(x_0) = af'(x_0) + bf'(x_0)$$

2.

$$f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) = g(x)[f(x) - f(x_0)] + f(x_0)[g(x) - g(x_0)]$$

Durch  $(x - x_0)$  dividiert

$$\begin{aligned} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} \cdot g(x_0) \\ &\quad + \frac{g(x) - g(x_0)}{(x - x_0)} \cdot f(x_0) \end{aligned}$$

Da  $g$  in  $x_0$  differenzierbar ist, ist  $g$  in  $x_0$  stetig und (Satz 5.5)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$$

Add reference + page number, page 194 middle

Die Formel folgt dann aus der Differenzierbarkeit von  $f$  und  $g$  in  $x_0$

3.

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} &= \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)} \\ &= \frac{[f(x) - f(x_0)]g(x_0) - f(x_0)[g(x) - g(x_0)]}{g(x)g(x_0)} \end{aligned}$$

Man dividiere durch  $x - x_0$  und benutze die Stetigkeit von  $g$  in  $x_0$

■

**Beispiel 5.8**

1.  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n(x) = x^n$  ist überall differenzierbar und  $f'_n(x) = nx^{n-1}$

**Beweis**

Induktion:  $f_0(x) = 1 \forall x$

$$f'_0(x) = 0 (= 0 \cdot x^{-1})$$

- $f_1(x) = x, \forall x$
- $f'_1(x) = 1 = 1 \cdot x^{1-1} \checkmark$

Sei  $n \geq 2$ . Wir nehmen an dass die Formel für  $n - 1$  gilt, i.e.

$$\begin{aligned} f'_{n-1}(x) &= (x^{n-1})' = (n-1)x^{n-2} \\ f_n(x) &= x^n = x \cdot x^{n-1} = x \cdot f_{n-1}(x) \end{aligned}$$

Nach 2., Satz 5.7

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= (x)' f_{n-1}(x) + x f'_{n-1}(x) \\ &= f_{n-1}(x) + x(n-1)x^{n-2} \\ &= x^{n-1} + (n-1)x^{n-1} = nx^{n-1} \end{aligned}$$

Add reference + page number, page 195 middle to bottom

■

2.

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \\ p'(x) &= n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1 \end{aligned}$$

Insbesondere ist die Ableitung eines Polynom von Grad  $n$  ein Polynom von Grad  $(n-1)$ ,  $n \geq 1$ .

3. Sei  $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ , wobei  $p, q$  polynome bezeichnen.  $R(x)$  ist eine sogenannte rationale Funktion mit Definitionsbereich

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$$

$$R'(x) = \frac{p'(x)q(x) - p(x)q'(x)}{q^2(x)}$$

z.B.

$$R(x) = \frac{x^3 + 1}{x - 1}$$

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{(3x^2)(x-1) - (x^3+1)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{3x^3 - 3x^2 - x^3 - 1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{2x^3 - 3x^2 - 1}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

Die nächste Rechenregel wird uns erlauben Funktionen wie z.B.  $\exp(x^3 + 1)$ ,  $\sin(x^2)$  abzuleiten

### Satz 5.9 (Kettenregel)

Seien  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : T \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen mit  $f(\Omega) \subset T$ , und  $x_0 \in \Omega$ . Wir nehmen an, dass  $f$  an der Stelle  $x_0$  und  $g$  an der Stelle  $f(x_0)$ , differenzierbar sind. Dann ist  $g \circ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  an der Stelle  $x_0$  differenzierbar und

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0)$$



**Bemerkung**

$f$  ist differenzierbar in  $x_0$  falls

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert, d.h. für jede in  $\Omega \setminus \{x_0\}$  enthaltene Folge  $(x_n)_{n \geq 1}$  mit Grenzwert  $x_0$ , der Limes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$$

existiert

**Beweis**

Sei  $(x_n)_{n \geq 1}$  mit  $\lim x_n = x_0$ ,  $x_n \neq x_0$ . Dann gilt

$$\lim f(x_n) = f(x_0)$$

(Nach Satz 5.5  $f$  differenzierbar  $\Rightarrow f$  stetig (in  $x_0$ )).

Add reference + page number, page 198 top

Sei  $y_n := f(x_n)$  ( $y_0 := f(x_0)$ ). Wir nehmen an dass  $y_n \neq f(x_0)$ ,  $\forall n$ . Dann folgt

$$\begin{aligned} \frac{(g \circ f)(x_n) - (g \circ f)(x_0)}{x_n - x_0} &= \frac{g(f(x_n)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \\ &= \left( \frac{g(f(x_n)) - g(f(x_0))}{f(x_n) - f(x_0)} \right) \cdot \left( \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x - x_0} \right) \\ &= \left( \frac{g(y_n) - g(y_0)}{y_n - y_0} \right) \cdot \left( \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x - x_0} \right) \\ &\quad \downarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \quad \downarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \\ &\quad g'(y_0) \quad f'(x_0) \\ &\stackrel{n \rightarrow \infty}{=} g'(f(x_0)) f'(x_0) \end{aligned}$$

■

**Beispiel 5.10**

1. Berechne die Ableitung von  $\exp(x^3 + 1)$

$$\begin{aligned} g(x) &= \exp(x) & f(x) &= x^3 + 1 \\ g'(x) &= \exp(x) & f'(x) &= 3x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= \exp(x^3 + 1) \\ (g \circ f)'(x) &= g'(f(x)) \cdot f'(x) = [\exp(x^3 + 1)] \cdot 3x^2 \end{aligned}$$

- 2.

$$(\sin(x^2))' = (g \circ f)'(x)$$

mit

$$\begin{aligned} g(x) &= \sin(x) & f(x) &= x^2 \\ g'(x) &= \cos(x) & f'(x) &= 2x \\ (\sin(x^2))' &= \cos(x^2) \cdot 2x \end{aligned}$$

3.

$$\left( (3x^7 + 11x^6 + 5)^2 \right)' = 2(3x^7 + 11x^6 + 5) \cdot (21x^6 + 66x^5)$$

4. Sei  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und  $n \in \mathbb{N}$

$$f(x) = g(x)^n$$

Dann ist

$$f'(x) = ng(x)^{n-1} \cdot g'(x)$$

5.

$$\begin{aligned} \exp(\exp(x)) &= e^{e^x} \\ (e^{e^x})' &= e^{(e^x)} \cdot e^x \end{aligned}$$

## 5.2 Der Mittelwertsatz und Folgerungen

Wichtige Informationen über eine Funktion  $f$  lassen sich leicht aus der Ableitung schliessen. Dies geschieht mittels dem Mittelwertsatz. Ein Spezialfalls der Mittelwertsatz ist

### Satz 5.12

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und auf  $(a, b)$  differenzierbar. Sei  $z_+ \in [a, b]$  mit  $f(z_+) = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$ . Wir nehmen an dass  $z_+ \in (a, b)$ . Dann gilt  $f'(z_+) = 0$ . Eine Analog Aussage gilt für  $z_-$

### Bemerkung 5.13

1.  $z_+, z_-$  existieren nach Satz 4.9
2. Die Voraussetzung  $z_+ \in (a, b)$  ist wichtig, z.B. Sei  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$ . Dann ist  $z_+ = 1$  und  $f'(x) = 1 \neq 0$  ( $\forall x \in (a, b)$ )

### Beweis

Sei  $z_+ \in (a, b)$ . Da  $(a, z_+) \neq \emptyset, (z_+, b) \neq \emptyset$  gibt es

$$(x_n)_{n \geq 1} \subset (a, z_+)$$

sowie

$$(y_n)_{n \geq 1} \subset (z_+, b)$$

mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = z_+ = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

## KAPITEL 5. DIFFERENTIALRECHNUNG AUF $\mathbb{R}$

(z.B.  $x_n = z_+ - \frac{1}{n}, y_n = z_+ + \frac{1}{n}$ )

Für  $n \geq 1$  folgt

$$f'(z_+) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{f(x_n) - f(z_+)}^{<0}}{\underbrace{x_n - z_+}_{<0}} \geq 0$$

$$f(z_+) = \max \{f(x)\}$$

$$f'(z_+) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{f(y_n) - f(z_+)}^{<0}}{\underbrace{y_n - z_+}_{>0}} \leq 0$$

Woraus

$$f'(z_+) = 0$$

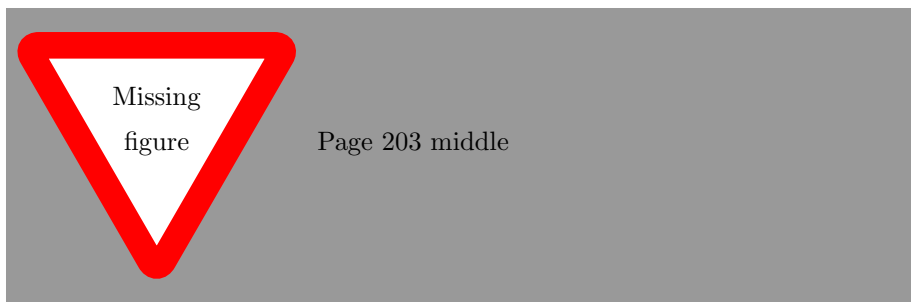
folgt.

■

### Satz 5.14 (Mittelwertsatz)

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und auf  $(a, b)$  differenzierbar,  $a \neq b$ . Dann gibt es  $x_0 \in (a, b)$  mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



### Beweis

Die Idee ist sich auf den Fall  $f(a) = f(b) = 0$  zurückführen und dann der Satz 5.12 anwenden. Die Gleichung für die Sekante durch die Punkte  $(a, f(a))$ ,  $(b, f(b))$  ist

$$S(x) = (x - a) \left( \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) + f(a)$$

Sei nun  $g(x) = f(x) - S(x)$ . Dann ist  $g(a) = 0 = g(b)$

Add reference + page number

Fall 1:  $g$  ist identisch  $= 0$ . Also  $f(x) = S(x)$  eine Gerade und die Aussage Stimmt  $\forall x_0 \in (a, b)$

Fall 2:  $g \neq 0$ . Also ist entweder

$$\max_x g(x) > 0 \quad \left( \text{oder} \quad \min_x g(x) < 0 \right)$$

Im “max” Fall sei  $z_+$  mit

$$g(z_+) = \max \{g(x) : x \in [a, b]\}$$

Dann ist  $z_+ \in (a, b)$  (Da  $g(a) = g(b) = 0$ , und  $g(z_+) > 0$ ) und nach Satz 5.12  $g'(z_+) = 0$ , d.h.

$$\begin{aligned} g(z_+) &= f'(z_+) - S'(z_+) = 0 \\ \Rightarrow f'(z_+) &= S'(z_+) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \end{aligned}$$

Der “min” Fall ist Analog. ■

Als erste Anwendung haben wir

#### Korollar 5.15

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  wie im Satz 5.14

1. Falls  $f'(x) = 0, \forall x \in (a, b)$  folgt dass  $f$  konstant ist.
2. Falls  $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a, b)$  so ist  $f$  monotone wachsend.
3. Falls  $f'(x) > 0, \forall x \in (a, b)$  so ist  $f$  streng monoton wachsend.
4. Falls  $f'(x) \leq 0, \forall x \in (a, b)$  so ist  $f$  monotone fallend.
5. Falls  $f'(x) < 0, \forall x \in (a, b)$  so ist  $f$  streng monoton fallend.

#### Beweis

1. Seien  $a \leq x < y \leq b$  beliebig und sei (nach mittelwertsatz)  $x_0 \in (x, y)$  mit

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(x_0)$$

da  $f'(x_0)$  folgt  $f(y) = f(x) \Rightarrow f$  ist konstant

2. Seien  $a \leq x < y \leq b$  beliebig und  $x_0 \in (x, y)$  mit

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(x_0) > 0$$

woraus folgt  $f(y) \geq f(x)$  folgt  $\Rightarrow f$  monotone wachsend.

3. Analog

4. Analog ■

**Beispiel 5.16**

- Bestimme alle differenzierbaren Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f' = \lambda f$ . Offensichtlich erfüllt  $t \rightarrow e^{\lambda t}$  dieser Gleichung

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{\lambda t} \\ f'(t) &= \lambda e^{\lambda t} = \lambda f(t) \end{aligned}$$

Betrachten wir

$$\begin{aligned} g'(t) &= e^{-\lambda t} f(t) \\ g'(t) &= -\lambda e^{-\lambda t} f(t) + e^{-\lambda t} f'(t) \\ &= e^{-\lambda t} (-\lambda f(t) + f'(t)) \\ &= e^{-\lambda t} (0) \quad \forall t \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also folgt dass  $g$  konstant ist, d.h.

$$g(t) = C \Rightarrow f(t) = C e^{\lambda t}$$

Anders sagt: Die Menge der Lösungen von  $f' = \lambda f$  ist ein 1-dimensionales Vektorraum

$$V = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f' = \lambda f\} = \{C e^{\lambda t} \mid c \in \mathbb{R}\}$$

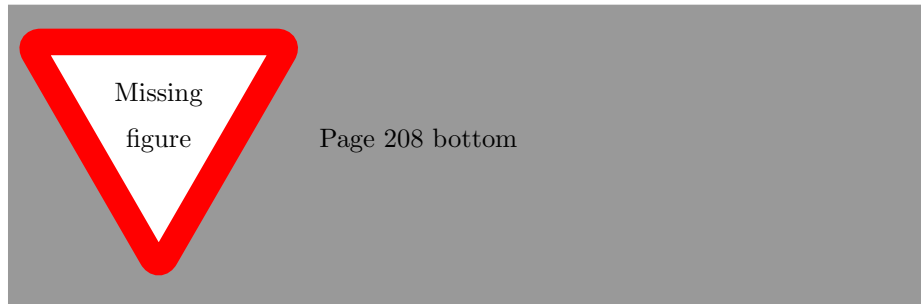
- 

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x}{1+x^2} \\ f'(x) &= \frac{2(1+x^2) - (2x)(2x)}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &< 0 \text{ für } |x| > 1 \\ f'(\pm 1) &= 0 \\ f'(x) &> 0 \text{ für } |x| < 1 \end{aligned}$$

$x$	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
$f'(x)$	−	+	+	−
$f(x)$	↘	↗	↗	↘

Fix vertical positioning in table, page 208 bottom



**Korollar 5.17 (Bernoulli, l'Hopital)**

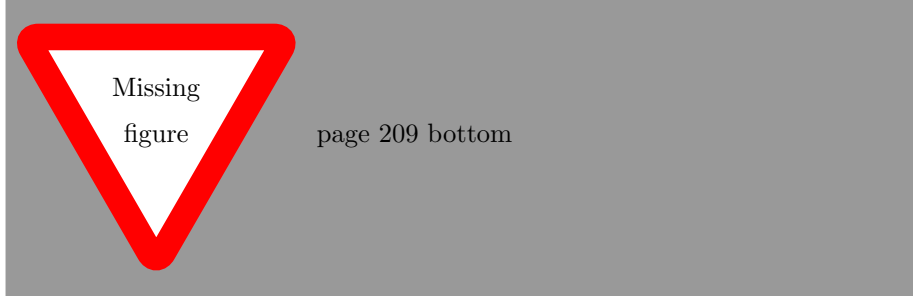
Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar in  $(a, b)$  mit  $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$ .  
Wir nehmen an, dass

- (i)  $f(a) = 0 = g(a)$
- (ii)  $\lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$

Dann ist  $g(x) \neq 0, \forall x > a$  und  $\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

**Beweis**

Falls es  $x_1 > a$  gibt mit  $g(x_1) = 0$ , dann folgt die Existenz von  $x_0 \in (a, x_1)$  mit  $g'(x_0) = 0$  (MWS.)



Widerspruch zur Annahme  $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$ . Also  $g(x) \neq 0, \forall x > a$ .  
Nun sei  $a < s < b$  beliebig, und

$$h(x) := \frac{f(s)}{g(s)} \cdot g(x) - f(x) \quad x \in [a, s]$$

Dann gilt,  $h(a) = 0$  und  $h(s) = 0$ , es gibt also  $x_s \in (a, s)$  mit  $h'(x_s) = 0$ , d.h.

$$\begin{aligned} 0 = h'(x_s) &= \frac{f(s)}{g(s)} \cdot g'(x_s) - f'(x_s) \\ (*) \quad \Rightarrow \frac{f'(x_s)}{g'(x_s)} &= \frac{f(s)}{g(s)} \end{aligned}$$

Sei nun  $s_n \in (a, b)$  beliebig mit  $\lim s_n = a$ . Da  $a < x_{s_n} < s_n$  folgt,  $\lim x_{s_n} = a$ ,  
und aus (\*)

$$\lim \frac{f(s_n)}{g(s_n)} = \lim \frac{f'(x_{s_n})}{g'(x_{s_n})} = A$$



**Bemerkung 5.18**

1. Es gibt die selbe Version für  $\lim_{x \nearrow b}$
2. (Limes von links und rechts zusammen). Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Sei  $a < c < b$ , wir nehmen an  $f, g$  sind in  $(a, c) \cup (c, b)$  differenzierbar,  $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, c) \cup (c, b)$  und

$$(i) \quad f(c) = g(c) = 0$$

$$(ii) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x \neq c}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

Dann ist  $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, c) \cup (c, b)$  und  $\lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x \neq c}} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

**Beispiel 5.19**

1.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2}{2x} = \frac{3}{2}$
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$
3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cos(x^2)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos(x^2) = 1$
4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{2x} = -\frac{1}{2}$
5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!})}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^x - 1 - x}{3x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{6} = \frac{1}{6}$

Die nächste Anwendung der MWS ist der sogenannte "Umkehrsatz"

**Fundamentale Frage**

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und bijektiv, und sei  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die Inverse Funktion. Ist dann  $g$  auch differenzierbar?

**Beispiel**

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow x^3 \end{aligned}$$

ist überall differential und Bijektiv. Die "Umkehrfunktion"

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow x^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

ist aber in nicht differenzierbar

Can't understand, page 213 middle to bottom

$$\frac{g(h) - g(0)}{h} = \frac{h^{\frac{1}{3}}}{h} = h^{-\frac{2}{3}} \rightarrow \infty$$

Man kann folgendes bemerken: Falls  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  bijektiv und die Umkehrfunktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  auch differenzierbar ist dann folgt aus  $(f \circ g)(x) = x$ ,  $\forall x$  und der Kettenregel dass:

$$f'(g(x))g'(x) = 1 \quad \forall x$$

Insbesondere  $f'(x) \neq 0$  ( $g'(x) \neq 0$ ),  $\forall x$ . Dies ist also eine Notwendige Bedingung zur Existenz der Ableitung von  $f^{-1}$

**Satz 5.20 (Umkehrsatz)**

Sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar mit  $f'(x) > 0$ ,  $\forall x \in (a, b)$ . Seien  $c = \inf_x f(x)$ ,  $d = \sup_x f(x)$ . Dann ist  $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$  bijektiv, und die Umkehrfunktion