Kapitel 3

Folgen und Reihen (Der Limes Begriff)

3.1 Folgen, allgemeines

Definition 3.1
Eine Folge reeler zahlen ist eine Abbildung $a : \mathbb{N}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ wobei wir das Bild con $n \geq 1$ mit a_n (statt $a(n)$) bezeichen.

Eine Folge wird dann meistens mit $(a_n)_{n\geq 1}$, daher mit der geordneten Bildmenge bezeichnet.

Folgen können auf verschiedene Arten gegeben sein.

Beispiel 3.2

1. $a_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$
2. $a_1 = 0.9$, $a_2 = 0.99$, $\ldots$, $a_n = 0.\underbrace{99\ldots9}_{n-\text{mal}}$
3. $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \geq 1$
4. (Rekursiv) Sei $d > 0$ eine reelle Zahl $a_1, \ldots, a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{d}{a_n}\right), n \geq 1$
   z.B. $d = 2, a_1 = 1, a_2 = \frac{3}{2}, a_3 = \frac{17}{12}, a_4 = \ldots$
5. Fibonacci Zahlen. $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \forall n \geq 2$

Definition 3.3
Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ heisst beschränkt falls die Teilmenge $\{a_n : n \geq 1\} \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt ist. d.h. Es gibt $c \in \mathbb{R}(c \geq 0)$ so dass $|a_n| \leq c, \forall n \geq 1$

3.2 Grenzwert oder Limes eine Folge. Ein zentraler Begriff

Definition 3.4
Eine Folge $(a_n) \geq 1$ konvergiert gegen a wann für jedes $\varepsilon > 0$ ein Index $N(\varepsilon) \geq 1$ gilt so dass
$$|a_n - a| < \varepsilon, \forall n > N(\varepsilon)$$

Definition 3.4 (Version 2)
Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$ falls für jedes $\varepsilon > 0$ die Menge der Indizen $n \geq 1$ für welcher $a_n \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ endlich ist.

$$(\forall \varepsilon > 0, \#\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\} < \infty)$$

Equivalenz beider Definitionen

Is this supposed to be a title?

(2) $\Rightarrow$ (1)
Sei für $\varepsilon > 0$

$$M(\varepsilon) := \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\} = \{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - a| \geq \varepsilon\}$$

Da $M(\varepsilon)$ endlich ist, ist es nach oben beschränkt. Es gibt also $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ so dass $\forall n \in M(\varepsilon)$, $n \leq N(\varepsilon) - 1$. Insbesondere gilt $\forall n \geq N(\varepsilon)$, $n \notin M(\varepsilon)$ und daher $|a_n - a| < \varepsilon$.

(1) $\Rightarrow$ (2)
$$M(\varepsilon) = \{n : |a_n - a| \geq \varepsilon\} \subset [0, N(\varepsilon) - 1]$$

Also endlich.

Falls die Eigenschaften in Definition 3.4 zutrifft, dann schreibt man

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \text{ oder } a_n \underset{n\to\infty}{\to} a$$

Die Zahl a nennt sich Grenzwert oder Limes der Folge $(a_n)_{n\geq 1}$. Eine Folge heisst konvergent falls sie einen Limes besitzt, andernfalls heisst sie divergent.

Bemerkung 3.5

1. Falls $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergent ist der Limes eindeutig bestimmt

   Beweis

   Seien a und b Grenzwerte von $(a_n)_{n\geq 1}$. Sei $\varepsilon = \left|\frac{b-a}{3}\right| > 0$, dann gibt es N_1, N_2 so dass
   $$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \forall n > N_1$$

$$|a_n - b| < \varepsilon \qquad \forall n > N_2$$

Also$\forall n \geq \max\{N_1, N_2\}$

$$(a - b) \cong |(a - a_n) + (a_n - b)| < 2\varepsilon = \frac{2}{3}|b - a|$$

Binomischen Lehrsatz

Für beliebige Zahlen a, b und $n \in \mathbb{N}$ ist

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) a^{n-k} b^k$$

2. Falls $(a_n)_{n \geq 1}$ konvergent ist, $\{a_n : n \geq 1\}$ beschränkt: Sei $\varepsilon = 1$, $\lim a_n = a$ und N_0 mit

$$|a_n - a| \leq 1 \qquad \forall n > N_0$$

Dann ist $\forall n$ $|a_n| \geq \max\{|a| + 1, |a_j|, 1 \leq j \leq N_0\}$

Beispiel 3.6

1. Sei $a_n = \frac{1}{n}, n \geq 1$. Dann gilt $\lim a_n = 0$
   - Sei $\varepsilon > 0$. Dann $\frac{1}{\varepsilon} > 0$. Sei $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \geq 1$ mit $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ (Archimedische Eigenschaft, Satz 2.13)

   Dann gilt für alle $n \geq n_0$, $\frac{1}{\varepsilon} < n_0 \leq n \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon, \forall n \geq n_0$

2. Sei $0 < q < 1$ und $a_n := q^n$, $n1$. Dann gilt $\lim a_n = 0$ (a_n konvergiert gegen 0) Cannot read, page 54 top

Beweis

Zu beweisen

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 = N_0(\varepsilon) \in N$$

Should it be $\in \mathbb{R}$??

$$\forall n \geq N_0 : q^n < \varepsilon$$

Die Idee ist zu zeigen dass $\frac{1}{q^n}$ sehr Gross wird und deswegen q^n sehr klein wird. Setzen wir $\frac{1}{q} = 1 + \delta$ mit $\delta > 0$ $\left(1 < 1 \Rightarrow \frac{1}{q} > 1\right)$