Letzte Mal:

Ordungsvollständigkeit Axiom

Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ nicht leere Teilmenge von $\mathbb{R}$ so dass
$$a \leq b \text{ für alle } a \in A, b \in B$$
Dann gibt es $c \in \mathbb{R}$ mit
$$a \leq c \leq b \quad \forall a \in A, b \in B.$$

- $X \subseteq \mathbb{R}$ Teilmenge
  X ist noch oben beschränkt falls es $c \in \mathbb{R}$ gibt mit $x \leq c \quad \forall x \in X$
  jeder derartige c heisst eine obere Schranke

  X ist noch unten beschränkt falls es $c \in \mathbb{R}$ gibt mit $x \geq c \quad \forall x \in X$
  — c — untere Schranke f

  X ist beschränkt falls es nach oben und unten beschränkt ist.

  $x \in X$ ist ein Maximales Element (oder Maxim
  von X falls $x \leq a \quad \forall x \in X$

Bsp 2.9 ① $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \}$
ist nach oben unbeschränkt

A ist nach unten beschränkt
jedes $L \leq 0$ ist eine untere Schranke

② $B = [0,1]$ ist nach oben und nach unten beschränkt.
0 ist ein minimum von B
1 ist ein maximum von B

$\boxed{\text{Oct 1. Let}}$

③ $C = [0,1)$ ist n.o und n.u beschränkt
$0 = \min(A)$
C hat kein Maximum.

Folgender Satz ist von zentraler Bedeutung und eine Folgerung der Ordnungsvollständigkeitsaxiom.

Satz 2.10 i) Jede nicht leere nach oben beschränkte Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ besitzt eine kleinste obere Schranke c.
Die kleinste obere Schranke c ist eindeutig bestimmt und heisst Suprem von A, mit $\sup A$ bezeichnet

(ii) Jede nicht leere nach unten beschränkte Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ besitzt eine grösste untere Schranke d und heisst infimum von A, mit $\operatorname{Inf} A$ bezeichnet.

Beweis: (i) Sei $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt
sei $B := \{ b \in \mathbb{R} \mid b \text{ ist obere Schranke für } A \}$

Dann $B \neq \emptyset$ und
$a \leq b \quad \forall a \in A,\ b \in B$ (definitionsgemäss)

Mit Ordnungsvollständigkeits Axiom folgt die Existens eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ mit
$a \leq c \leq b \quad \forall a \in A,\ b \in B$

Es ist klar dass c ist eine obere Schranke für A. Also $c \in B$.
Da $c \leq b \quad \forall b \in B$ ist c die kleinste obere Schranke für A. Hierdurch c ist eindeutig bestimmt.

(Seien c und c' zwei Supremum von A
c ist die kleinste obere Schranke und
c' ist eine obere Schranke $\Rightarrow c \leq c'$
Das gleiche Argument mit c, c' ausgetauscht
liefert $c' \leq c$.)

(II) Sei A nach unten beschränkte, nicht leere Menge
Sei $-A := \{-x \mid x \in A\}$ die Menge
der additive Inversen von A.
Dann $-A \neq \emptyset$ und nach oben
beschränkt. $(I) \Rightarrow \exists s = \sup(-A)$
$\Rightarrow -s$ ist das Infimum von A

$\rightarrow$ 34-1

Korollar 2.11 1) Falls $E \subset F$ und
F nach oben beschränkt ist,
gilt $\sup E \leq \sup F$

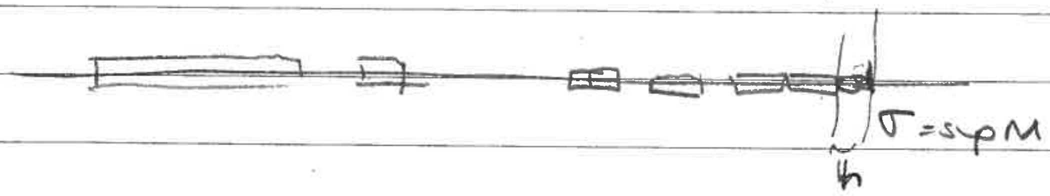
2) Falls $E \subset F$ und F nach unten
beschränkt ist, gilt $\inf F \leq \inf E$

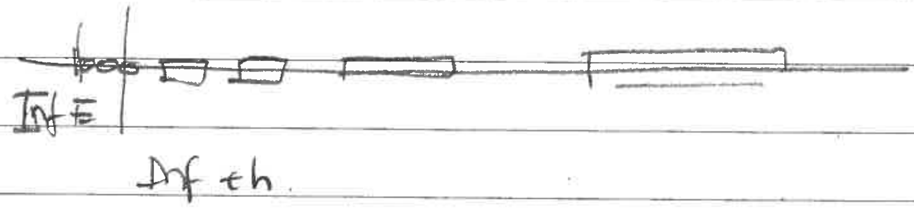
3) Falls $\forall x \in E$, $\forall y \in F$ gilt $x \leq y$ dann
folgt $\sup E \leq \inf F$.

4) Seien $E, F \neq \emptyset$, $E, F \subset \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$ fest
(I) Falls E ein sup. besitzt
$\Rightarrow \exists x \in E$ mit $x > \sup E - h$

(II) Fall E ein Inf besitzt $\Rightarrow \exists\ y \in E$:
$y < \inf E + h$

Das Supremum, $\sup \mathfrak{X} =: \sigma$ der Menge $\mathfrak{X}$ ist folgendermassen characterisiert:
Es gibt in $\mathfrak{X}$ keine Zahlen $> \sigma$; aber für jede Toleranz $h > 0$ gibt es in $\mathfrak{X}$ Zahlen $> \sigma - h$.





Es gibt in $\mathfrak{X}$ keine Zahlen $< \operatorname{Inf} \mathfrak{X} =:$
aber für jede Toleranz $h > 0$ gibt es in $\mathfrak{X}$ Zahlen $< \operatorname{Inf} \mathfrak{X} + h$.

(iii) Sei $E+F = \{e+f : e \in E, f \in F\}$

Falls E und F ein Sup. besitzten

$\Rightarrow E+F$ besitzt ein Sup und

$\sup(E+F) = \sup E + \sup F$

(Analog mit Infimum)

<u>Beweis</u>: Übung.

<u>Bsp.</u>: ① $E = (-\infty, 2) \subset F = (-\infty, 4]$

$\sup E = 2$, $\sup F = 4 = \max F$

E hat kein Max

$\sup E \leq \sup F$

② $G = [4, 5) \subset H = (3, 6)$

$\min E = \inf G = 4 \geq \inf H = 3$

③ $K = (3, \infty)$ $E = (-\infty, 2)$

$\forall x \in E, \ y \in K$ gilt $x \leq y$

$2 = \sup E \leq 3 = \inf K$.

④ $A = \{\sin x \mid x \in \mathbb{R}\}$ $\inf A = -1 = \min A$

$\sup A = 1 = \max A$

⑤ $A = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ wir werden sehen

dass A ist n.u und n.o beschränkt

$\inf A = \min A = 2$, $\sup A = e = 2.718\ldots$

<u>Vereinbarung</u>: Für nach oben unbeschränkte Mengen $A \neq \emptyset$ setzen wir
$\sup A = \infty$ unendlich
Analog für n. unten unbeschränkte Mengen $\emptyset \neq A$ setzen wir
$\inf A = -\infty$

Oct 1. 2017
Gehe 2

—o—

Die folgenden Satz zeigt wie die Ordnungsvollständigkeit von $\mathbb{R}$ die Lösbarkeit gewisser Gleichungen in $\mathbb{R}$ garantiert.

<u>Satz 2.12</u> Für jedes $x>0$ gibt es genau ein $y>0$ mit $y^2=x$
Diese Lösung wird mit $\sqrt{x}$ bezeichn

(Im Allgemein: Für jedes $x>0$ und $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau ein $y>0$ mit $y^n = 0$)
Diese Lösung wird mit $\sqrt[n]{x}$ bezeichnet

<u>Beweis</u>: Sei $x>1$, und
$A := \{z \in \mathbb{R} \mid z>0$ mit $z^2 \leq x\}$
Dann ist A noch oben beschränkt und $A \neq \emptyset$ $(1 \in A)$
$OV \Rightarrow A$ besitzt ein Sup.
Sei $y := \sup A$. Wir zeigen dass $y^2 = x$.

Schritt 1: Annahme $y^2 < x$. Sei $0 \le h <$

Wir rechnen $(y+h)^2 = y^2 + 2hy + h^2$

$= y^2 + h(2y+h)$

$\overset{0 \le h \le 1}{\le} y^2 + h(2y+1)$

$= y^2 + h((y+1)^2 - y^2)$

Weil $y^2 < x$ ist, $\frac{x-y^2}{(y+1)^2 - y^2} > 0$ und

daher gibt es $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$, $h \le \frac{x-y^2}{(y+1)^2-y^2}$

(Sei $h = \min\{1, \frac{x-y^2}{2x+1}\}$

Für solche h gilt:

$(y+h)^2 \le y^2 + \left(\frac{x-y^2}{(y+1)^2-y^2}\right)((y+1)^2 - y^2) = x$

Also $y+h \in A$ und $y+h > y$ ↯

ein Widerspruch: y ist eine obere Schranke für A, d.h. $z \le y$

$\Rightarrow y^2 \ge x$

Analog beweist man $y^2 \le x$ ☒

35-2

<u>Schnitt 2</u> Annahme $y^2 > x$

Sei $h = \frac{y^2 - x}{2y} \neq 0$

$(y-h)^2 = y^2 - 2hy + h^2 > y^2 - 2hy = \underbrace{y^2 - (y^2 - x)}_{= x}$

$\Rightarrow$ $y-h$ ist eine obere Schranke für A

($\forall z \in A$, $z^2 \leq x$

Da $(y-h)^2 > x$ ist, $(y-h)^2 > x \geq z^2$

Damit $y-h > z$ $\forall z \in A$.)

Aber $y-h < y$ $\lightning$ Widerspruch zur Minimalität von y.

$\lightning$

Falls $0 < x < 1$, dann $1/x > 1$

$\Rightarrow \exists\, u \in \mathbb{R}$ mit $u^2 = 1/x$

Somit $(1/u)^2 = x$ und $y = \frac{1}{u}$ ist eine Lösung von $y^2 = x$

Zum Abschluss dieses Themas erwähren wir noch eine wichtige Eigenschaft der Reelen Zahlen

<u>Satz 2.13</u> (Archimedische Eigenschaft)
Zu jeder Zahl $0 \leq b \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b < n$. oct 3

<u>Beweis</u> (Indirekt) Andernfalls gibt es $b \in \mathbb{R}$ mit $n \leq b \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\Big(\overset{\forall b \in \mathbb{R}}{\neg (\exists n \in \mathbb{N} : b < n)} = \overset{\exists b \in \mathbb{R}}{(\forall n \in \mathbb{N} : b \geq n)} \Big)$$

Dann ist b eine obere Schranke für $\mathbb{N}$ und es existiert $c = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$.
Mit $n \in \mathbb{N}$ ist jedoch auch $n+1 \in \mathbb{N}$.
Also $n+1 \leq c \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
Somit folgt $n \leq c-1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
ein Widerspruch zur Minimalität von c

$\square$

<u>Korollar 2.14</u>: 1) Seien $x>0$ und $y \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann gibt es $n \in \mathbb{Z}$ mit
$y < nx$

2) Falls $x, y, a \in \mathbb{R}$ die ungleichkeiten
$a \leq x \leq a + \frac{y}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ erfüllen,
Ist $x = a$.

<u>Beweis</u> 1) Übung

2) $a < x \Rightarrow x - a > 0 \overset{(1)}{\Longrightarrow} \exists n \in \mathbb{N}:$
$n(x-a) > y$
$\Rightarrow x > a + \frac{y}{n}$ Widerspruch $\lightning$

Wir wissen dass gewisse Gleichungen in $\mathbb{R}$ lösbar ist : z.B. $y^2 = a$ $\forall a > 0$.

Aber Man kann nicht alle Gleichyen in $\mathbb{R}$ lösen

Bsp: $x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$

Da für alle $x \in \mathbb{R}$, $x^2 > 0$, ist $x^2 = -1$ nicht lösbar

Um eine Lösung für diese Gleichung zu finden, müssen wir die Komplexen Zahlen betrachten.

Zuerst, werden wir die Euklidischen Räume $\mathbb{R}^n$ einführen

5.2.4 Euklidische Räume

Von der Mengentheorie kennen wir die Kartesische Produkt zweier Mengen; es lässt sich ohne schwierigkeiten zu endlichen Familien $A_1, \ldots, A_n$ verallgemeinern; nämlich.

$$A_1 \times \ldots \times A_n := \{ (x_1, \ldots, x_n) : x_i \in A_i \}.$$

ist die Menge der geordneten n-tuple von Elementen aus $A_1, \ldots, A_n$

Für beliebige $n \geq 1$ betrachten wir $\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots}_{n \text{ mal}}$

und untersuchen seine Struktur

Auf $\mathbb{R}^n$ haben wir zwei Verknüpfungen

① $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ Addition

$$(\underbrace{(x_1, \dots, x_n)}_{x}, \underbrace{(y_1 \dots y_n)}_{y}) \to (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

komponentenweiser Addition.

Dann ist $(\mathbb{R}^n, +)$ eine Abelsche Gruppe

mit $\underbrace{0 := (0, \dots 0)}_{\text{Nullvektor}}$ als neutrales Element.

② $\circ : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ Skalarmultiplikation

$$(\lambda, x) \longrightarrow \lambda \circ x := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

Dann gelten die folgende Eigenschaften $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n, \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(S1) Distributivität : $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

(S2) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

(S3) Associativität : $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

(S4) Einselelement : $1x = x$.

Defn 2.15 Eine Menge V mit $+, \circ$ und $0 \in V$ so dass $(V, +)$ eine Abelsche Gruppe mit neutralem Element 0 ist und zudem S1 – S4 gelten nennt sich ein Vektorraum über den Körper $\mathbb{R}$.

und sein Elemente heissen Vektoren

Also ist $\mathbb{R}^n$ ein Vektorraum. In der Linearen Algebra führt man dann Begriffe wie Basis usw ein

Die ~~Standard basis~~ von $\mathbb{R}^n$ ist die Menge $\{e_1, e_2, .. e_n\}$ wobei

$$e_i := (0 \ldots 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-te position}}}{1}, \ldots 0)$$

Jeder Vektor $x = (x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n$ besitzt eine eindeutige Darstellung

$$x = \sum x_i e_i \text{ bezüglich der Standardbasis}$$

Defn 2.16 ① Das Skalarprodukt zweier Vektoren $x = (x_1 \ldots x_n)$, $y = (y_1, \ldots y_n)$ ist die durch

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

definierte reele Zahl

Oct 3 2013 → Lecture

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}.$$

(orthogonal)

② Falls $\langle x, y \rangle = 0$ heissen x und y senkrecht aufeinander

$\langle , \rangle$ besitzt folgende Eigenschaften

SP1 Symmetrie : $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

SP2 Linearität : $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle$

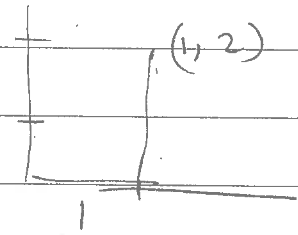
SP3 Positivität : $\langle x, x \rangle \geq 0$ mit Gleichheit genau dann wenn $x = 0$

[letztere Eigenschaft ist spesifisch zu $\mathbb{R}$)

Defn 2.17 Die Norm $\|x\|$ eines Vektors ist: $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

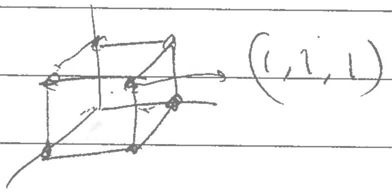
wird oft als Länge interpretiert.

Bsp 2.18 ①



$\|(1,2)\| = \sqrt{1+4}$

②



$\|(1,1,1)\| = \sqrt{3}$.

③ $\|e_i\| = 1$

$\langle e_i, e_j \rangle = 0$. $e_i \perp e_j$

$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ ist eine orthonormale Basis. Sie sind orthogonal und auf Länge 1 normiert.

Die erste wichtige Eigenschaft eines Skalarprodukts ist

Satz 2.19 (Cauchy-Schwarz) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$$ und

$$|\langle x, y \rangle| = \|x\| \, \|y\| \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : x = \lambda y.$$

Die Euclidische Norm hat die Eigenschaften

Satz 2.20 (I) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$ Homogenität

(II) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecks Ungleichung)

Beweis (II) $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle$

$$= \langle x, x+y \rangle + \langle y, x+y \rangle$$
$$= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle$$
$$= \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle$$
$$\leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2$$
$$\overset{CS}{\leq} \|x\|^2 + 2\|y\|\,\|x\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

§ 2.5 Die komplexen Zahlen.

Da für alle $x \in \mathbb{R}$ $x^2 \geq 0$, gibt es $\sqrt{-1}$ nicht als reelle Zahl.

Seit 18 Jahrhundert haben Mathematiker mit Ausdrücke

$$a + b\sqrt{-1} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

gerechnet und auf sie die in $\mathbb{R}$ geltenden Rechnenregeln angewandt z.B

$$(1+2\sqrt{-1})(1-2\sqrt{-1}) = 1^2 - 2^2(\sqrt{-1})^2 = 5$$

Allgemeinen:

$$(a+b\sqrt{-1})(c+d\sqrt{-1}) = ac + ad\sqrt{-1} + bc\sqrt{-1} + bd(\sqrt{-1})^2$$

$$= (ac - bd) + (ad + bc)\sqrt{-1}$$

Das Problem ist hier, dass $\sqrt{-1}$ keinen präzisen Matmahsche Sinn hat und dass deshalb auch nicht klar ist was "+" in "$a+b\sqrt{-1}$" heissen soll.

Das Problem ist wie folgt gelöst:

Als model von "$a+b\sqrt{-1}$", $\mathbb{C}$, nehmen wir $\mathbb{R}^2$. Wir haben schon eine Addition von Vektoren und das neutral Element $0 = (0,0) \in$

Wir definieren dann die Multiplikation

$$\cdot \quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \to x \cdot y$$

wobei $x \cdot y = (ac - bd, ad + bc)$ $\quad x = (a, b)$
$\quad y = (c, d)$

Dann erfüllen "+" und "·" folgende Eigenschaften.