



WARNING!  
READ  
CAREFULLY!



The following document has not been checked for mistakes, and although every effort possible has been made to ensure that the information in this document is correct, it might still contain some mistakes. The following document is given “as is”, without any warranty whatsoever.

## Kapitel 5

# Differentialrechnung auf $\mathbb{R}$

### 5.1 Differential (Ableitung), Elementare Eigenschaften

**Definition 5.1**

Sei  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}$ , und  $x_0 \in \Omega$

1.  $f$  heisst differenzierbar an der Stelle  $x_0$ , falls

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Dieser Grenzwert wird dann mit  $f'(x_0)$  oder  $\frac{df}{dx}(x_0)$  bezeichnet. Die Zahl  $f'(x_0)$  heisst die Ableitung oder das Differential von  $f$  an der Stelle  $x_0$ .

2.  $f$  heisst in  $\Omega$  differenzierbar, falls sie an jeder Stelle  $x_0 \in \Omega$  differenzierbar ist. In diesem Fall, nennt sich die Funktion  $x \rightarrow f'(x)$  Ableitung von  $f$ .

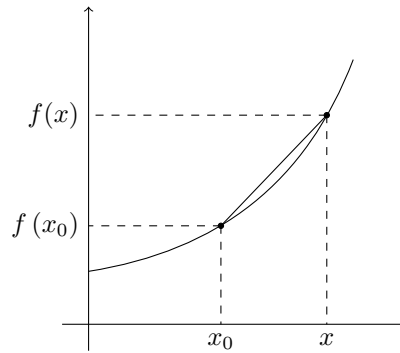
**Bemerkung 5.2**

In der Definition 5.1 verlangen wir also, dass für jede in  $\Omega \setminus \{x_0\}$  enthaltene Folge  $(x_n)_{n \geq 1}$  mit Grenzwert  $x_0$ , der Limes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = 0$$

**Bemerkung 5.3**

Sei  $f$  differenzierbar in  $x_0$



Dann ist

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

die Steigung der Geraden durch die Punkte  $(x_0, f(x_0))$  und  $(x, f(x))$ .

Geometrisch ist also  $f'(x_0)$  die Steigung der Tangenten am Graphen von  $f$  im Punkt  $(x_0, f(x_0))$ . Diese Tangente hat die Gleichung

$$T(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Sei

$$f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) + R_{x_0}(x) = T(x) + R_{x_0}(x)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} + \frac{R(x)}{x - x_0}$$

Dann folgt

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0$$

Die lineare Funktion  $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  stellt eine gute Approximation der Funktion  $f(x)$  dar:

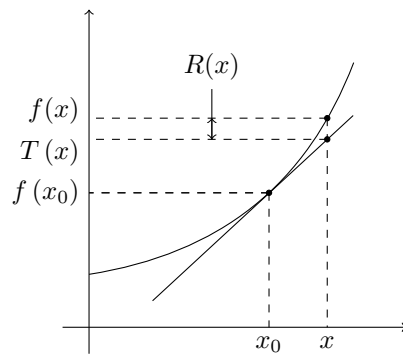
Es gilt

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R_{x_0}(x)$$

mit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0$$

## KAPITEL 5. DIFFERENTIALRECHNUNG AUF $\mathbb{R}$



$$T(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

### Beispiel 5.4

1.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto mx + b$$

ist überall differenzierbar mit  $f'(x) = m, \forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) - f(x_0) = m(x - x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} = m$$

2.  $f(x) = |x|$  ist für alle  $x_0 \neq 0$  differenzierbar, aber nicht für  $x_0 = 0$

$$f(x) - f(0) = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

Also ist

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

und besitzt also keinen Grenzwert für  $x \rightarrow 0, x \neq 0$

3.  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist überall auf  $\mathbb{R}$  differenzierbar und  $\exp'(x) = \exp(x)$ . Sei  $x_0 \in \mathbb{R}, x_0 \neq x = x_0 + h \in \mathbb{R}$

$$\exp(x_0 + h) - \exp(x_0) = \exp(x_0)(\exp(h) - 1)$$

$$\exp(h) - 1 = h + \frac{h^2}{2!} + \dots$$

$$\Rightarrow \frac{\exp(h) - 1}{h} = 1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \dots$$

Also

$$\left| \frac{\exp(h) - 1}{h} - 1 \right| \leq |h| \left[ \frac{1}{2!} + \frac{|h|}{3!} + \frac{|h|^2}{4!} + \dots \right]$$

$$\leq |h| \left[ 1 + |h| + \frac{|h|^2}{2!} + \dots \right]$$

$$\leq |h| \exp(h)$$

Woraus

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{\exp(h) - 1}{h} = 1$$

und somit

$$\begin{aligned} \exp'(x_0) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{\exp(x_0 + h) - \exp(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \exp(x_0) \left( \frac{\exp(h) - 1}{h} \right) \\ &= \exp(x_0) \end{aligned}$$

folgt

4.  $\sin(x)$  und  $\cos(x)$  sind überall differenzierbar und

$$\begin{aligned} \sin' &= \cos \\ \cos' &= -\sin \end{aligned}$$

Mit den Additionsgesetzen:

$$\begin{aligned} \sin(x + h) - \sin(x) &= \sin(x) \cos(h) + \cos(x) \sin(h) - \sin(x) \\ &= \sin(x) (\cos(h) - 1) + \cos(x) \sin(h) \end{aligned}$$

Nun ist

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\cos(h) - 1}{h} &= \frac{\cos^2(h) - 1}{h(\cos(h) + 1)} = \frac{\sin^2(h)}{h(\cos(h) + 1)} \\ &= \frac{1}{\cos(h) + 1} \cdot \frac{\sin^2(h)}{h} \\ &\quad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ &\quad \frac{1}{2} \qquad \qquad 0 \end{aligned}$$

There is a  $\sin h/h$  which doesn't seem to belong anywhere, page 188 bottom right corner

$$\begin{aligned}
 \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} &= \sin(x) \left( \frac{\cos(h) - 1}{h} \right) + \cos(x) \frac{\sin(h)}{h} \\
 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} &= \lim \left( \sin(x) \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\cos(h) - 1}{h} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \cos(x) \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\sin(h)}{h} \right) \right) \\
 &= \sin(x) \lim \left( \frac{\cos(h) - 1}{h} \right) \\
 &\quad + \cos(x) \lim \left( \frac{\sin(h)}{h} \right) \\
 &= (\sin(x)) \cdot 0 + (\cos(x)) \cdot 1 = \cos(x)
 \end{aligned}$$

Analog

$$\begin{aligned}
 \cos(x+h) - \cos(x) &= \cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x) \\
 &= \cos(x)(\cos(h) - 1) + \sin(x)\sin(h)
 \end{aligned}$$

Da wie oben  $\frac{\cos(h)-1}{h} \rightarrow 0$ ,  $\frac{\sin(h)}{h} \rightarrow 1$ , folgt  $\cos' = -\sin$

Der Zusammenhang zwischen Differenzierbarkeit und Stetigkeit ist:

### Satz 5.5

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \Omega$  und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0$  differenzierbar. Dann ist  $f$  in  $x_0$  stetig. (Also ist "Differenzierbarkeit" mehr als "Stetigkeit")

### Beweis

$f$  differenzierbar in  $x_0$ . Sei

$$\begin{aligned}
 T : \Omega \setminus \{x_0\} &\rightarrow \mathbb{R} \\
 x &\rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}
 \end{aligned}$$

Da  $f$  differenzierbar in  $x_0$  ist, hat  $T$  einen Grenzwert in  $x_0$ , und

$$\lim_{x \rightarrow x_0} T(x) = f'(x)$$

Für  $x \neq x_0$

$$f(x) = T(x)(x - x_0) + f(x_0)$$

$f(x)$  ist die Summe von zwei Funktionen  $T(x)(x - x_0)$  und  $f(x_0) = \text{konstant}$ .

Da beide Funktionen einen Grenzwert an der Stelle  $x_0$  besitzen, hat auch  $f$  einen Grenzwert in  $x_0$  und

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (T(x)) \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) \\
 &= f'(x) \cdot 0 + f(x_0) = f(x_0)
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  ist stetig in  $x_0$ .

■

**Bemerkung**

Die Umkehrung von Satz 5.5 (s. 5) gilt nicht, z.B.  $f(x) = |x|$  ist stetig in  $x = 0$  aber nicht differenzierbar.

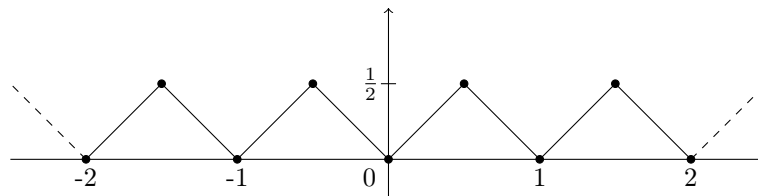
**Beispiel 5.6**

Das folgende Beispiel zeigt, dass es stetige Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, die an keiner Stelle  $x_0 \in \mathbb{R}$  differenzierbar sind. (Von der Waerden (1930))

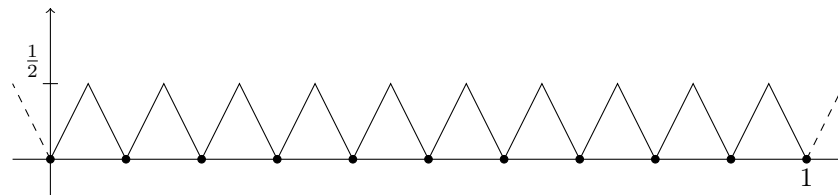
Sei für  $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \text{Distanz von } x \text{ zur nächsten ganzen Zahl} \\ &= \min \{|x - m| : m \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

Der Graph von  $\langle x \rangle$  sieht so aus



Graph von  $\frac{10x}{10}$



Sei

$$f(x) := \langle x \rangle + \frac{\langle 10x \rangle}{10} + \frac{\langle 10^2 x \rangle}{100} + \dots$$

Da

$$0 \leq \langle 10^n x \rangle \leq \frac{1}{2}$$

folgt absolute Konvergenz. Ausserdem sei

$$f_k(x) = \sum_{n=0}^k \frac{\langle 10^n x \rangle}{10^n}$$

Dann ist

$$|f(x) - f_k(x)| = \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{\langle 10^n x \rangle}{10^n} \right| \leq \frac{1}{2} \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{10^n} \right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{10^{-k}}{9}$$

$\forall k \geq 1$  ist  $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig.

Da die Folge  $(f_k)_{k \geq 1}$  gleichmässig gegen  $f$  konvergiert, ist  $f$  stetig. Man kann zeigen, dass  $f$  in keinem Punkt von  $\mathbb{R}$  differenzierbar ist.

**Satz 5.7**

Seien  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen,  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Wir nehmen an, dass  $f$  und  $g$  in  $x_0$  differenzierbar sind. Dann sind  $f + g$ ,  $f \cdot g$  und falls  $g(x_0) \neq 0$  auch  $f/g$  an der Stelle  $x_0$  differenzierbar. Es gelten dann folgende Formeln:

$$1. (af + bg)'(x_0) = af'(x_0) + bf'(x_0) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

$$2. (f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

$$3. \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Is this supposed to be a fraction?? page 192 bottom; limenet: yes, function f over function g

**Beweis**

1. Für  $x \neq x_0$

$$\frac{(af + bg)(x) - (af + bg)(x_0)}{x - x_0} = a \left( \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) + b \left( \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right)$$

Da  $f$  und  $g$  in  $x_0$  differenzierbar sind, folgt, dass  $af + bg$  in  $x_0$  differenzierbar ist und

$$(af + bg)(x_0) = af'(x_0) + bf'(x_0)$$

2.

$$f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) = g(x)[f(x) - f(x_0)] + f(x_0)[g(x) - g(x_0)]$$

Durch  $(x - x_0)$  dividiert

$$\begin{aligned} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} \cdot g(x_0) \\ &\quad + \frac{g(x) - g(x_0)}{(x - x_0)} \cdot f(x_0) \end{aligned}$$

Da  $g$  in  $x_0$  differenzierbar ist, ist  $g$  in  $x_0$  stetig und (Satz 5.5, s. 5)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$$

Die Formel folgt dann aus der Differenzierbarkeit von  $f$  und  $g$  in  $x_0$

3.

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} &= \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)} \\ &= \frac{[f(x) - f(x_0)]g(x_0) - f(x_0)[g(x) - g(x_0)]}{g(x)g(x_0)} \end{aligned}$$

Man dividiere durch  $x - x_0$  und benutze die Stetigkeit von  $g$  in  $x_0$

■

**Beispiel 5.8**

1.  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n(x) = x^n$  ist überall differenzierbar und  $f'_n(x) = nx^{n-1}$



**Beweis**

Induktion:  $f_0(x) = 1 \quad \forall x$

$$f'_0(x) = 0 (= 0 \cdot x^{-1})$$

- $f_1(x) = x, \forall x$
- $f'_1(x) = 1 = 1 \cdot x^{1-1} \quad \checkmark$

Sei  $n \geq 2$ . Wir nehmen an, dass die Formel für  $n-1$  gilt, i.e.

$$\begin{aligned} f'_{n-1}(x) &= (x^{n-1})' = (n-1)x^{n-2} \\ f_n(x) &= x^n = x \cdot x^{n-1} = x \cdot f_{n-1}(x) \end{aligned}$$

Nach 2., Satz 5.7 (s. 7)

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= (x)' f_{n-1}(x) + x f'_{n-1}(x) \\ &= f_{n-1}(x) + x(n-1)x^{n-2} \\ &= x^{n-1} + (n-1)x^{n-1} = nx^{n-1} \end{aligned}$$

■

2.

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \\ p'(x) &= n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1 \end{aligned}$$

Insbesondere ist die Ableitung eines Polynoms von Grad  $n$  ein Polynom von Grad  $(n-1)$ ,  $n \geq 1$ .

3. Sei  $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ , wobei  $p, q$  Polynome bezeichnen.  $R(x)$  ist eine sogenannte rationale Funktion mit Definitionsbereich

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$$

$$R'(x) = \frac{p'(x)q(x) - p(x)q'(x)}{q^2(x)}$$

z.B.

$$R(x) = \frac{x^3 + 1}{x - 1}$$

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{(3x^2)(x-1) - (x^3+1)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{3x^3 - 3x^2 - x^3 - 1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{2x^3 - 3x^2 - 1}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

Die nächste Rechenregel wird uns erlauben, Funktionen wie z.B.  $\exp(x^3 + 1)$  und  $\sin(x^2)$  abzuleiten

**Satz 5.9 (Kettenregel)**

Seien  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : T \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen mit  $f(\Omega) \subset T$ , und  $x_0 \in \Omega$ . Wir nehmen an, dass  $f$  an der Stelle  $x_0$  und  $g$  an der Stelle  $f(x_0)$ , differenzierbar sind. Dann ist  $g \circ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  an der Stelle  $x_0$  differenzierbar und

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0)$$

**Bemerkung**

$f$  ist differenzierbar in  $x_0$ , falls

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert, d.h. für jede in  $\Omega \setminus \{x_0\}$  enthaltene Folge  $(x_n)_{n \geq 1}$  mit Grenzwert  $x_0$ , existiert der Limes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$$

**Beweis**

Sei  $(x_n)_{n \geq 1}$  mit  $\lim x_n = x_0$ ,  $x_n \neq x_0$ . Dann gilt

$$\lim f(x_n) = f(x_0)$$

(Nach Satz 5.5, s. 5,  $f$  differenzierbar  $\Rightarrow f$  stetig (in  $x_0$ )).

Sei  $y_n := f(x_n)$  ( $y_0 := f(x_0)$ ). Wir nehmen an, dass  $y_n \neq f(x_0)$ ,  $\forall n$ . Dann folgt

$$\begin{aligned} \frac{(g \circ f)(x_n) - (g \circ f)(x_0)}{x_n - x_0} &= \frac{g(f(x_n)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \\ &= \left( \frac{g(f(x_n)) - g(f(x_0))}{f(x_n) - f(x_0)} \right) \cdot \left( \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x - x_0} \right) \\ &= \left( \frac{g(y_n) - g(y_0)}{y_n - y_0} \right) \cdot \left( \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x - x_0} \right) \\ &\quad \downarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \quad \downarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \\ &\quad g'(y_0) \quad f'(x_0) \\ &\stackrel{n \rightarrow \infty}{=} g'(f(x_0)) f'(x_0) \end{aligned}$$

■

**Beispiel 5.10**

1. Berechne die Ableitung von  $\exp(x^3 + 1)$

$$\begin{aligned} g(x) &= \exp(x) & f(x) &= x^3 + 1 \\ g'(x) &= \exp(x) & f'(x) &= 3x^2 \end{aligned}$$

$$(g \circ f)(x) = \exp(x^3 + 1)$$

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = [\exp(x^3 + 1)] \cdot 3x^2$$

2.

$$(\sin(x^2))' = (g \circ f)'(x)$$

mit

$$\begin{aligned} g(x) &= \sin(x) & f(x) &= x^2 \\ g'(x) &= \cos(x) & f'(x) &= 2x \end{aligned}$$

$$(\sin(x^2))' = \cos(x^2) \cdot 2x$$

3.

$$\left((3x^7 + 11x^6 + 5)^2\right)' = 2(3x^7 + 11x^6 + 5) \cdot (21x^6 + 66x^5)$$

4. Sei  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und  $n \in \mathbb{N}$

$$f(x) = g(x)^n$$

Dann ist

$$f'(x) = ng(x)^{n-1} \cdot g'(x)$$

5.

$$\begin{aligned} \exp(\exp(x)) &= e^{e^x} \\ (e^{e^x})' &= e^{(e^x)} \cdot e^x \end{aligned}$$

## 5.2 Der Mittelwertsatz und Folgerungen

Wichtige Informationen über eine Funktion  $f$  lassen sich leicht aus der Ableitung schliessen. Dies geschieht mittels dem Mittelwertsatz. Ein Spezialfalls der Mittelwertsatz ist

### Satz 5.12

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und auf  $(a, b)$  differenzierbar. Sei  $z_+ \in [a, b]$  mit  $f(z_+) = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$ . Wir nehmen an, dass  $z_+ \in (a, b)$ . Dann gilt  $f'(z_+) = 0$ . Eine analoge Aussage gilt für  $z_-$ .

### Bemerkung 5.13

1.  $z_+, z_-$  existieren nach Satz 4.9
2. Die Voraussetzung  $z_+ \in (a, b)$  ist wichtig, z.B. Sei  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$ . Dann ist  $z_+ = 1$  und  $f'(x) = 1 \neq 0$  ( $\forall x \in (a, b)$ )

### Beweis

Sei  $z_+ \in (a, b)$ . Da  $(a, z_+) \neq \emptyset$  und  $(z_+, b) \neq \emptyset$ , gibt es

$$(x_n)_{n \geq 1} \subset (a, z_+)$$

sowie

$$(y_n)_{n \geq 1} \subset (z_+, b)$$

## KAPITEL 5. DIFFERENTIALRECHNUNG AUF $\mathbb{R}$

mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = z_+ = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

(z.B.  $x_n = z_+ - \frac{1}{n}, y_n = z_+ + \frac{1}{n}$ )

Für  $n \geq 1$  folgt

$$f'(z_+) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{f(x_n) - f(z_+)}^{<0}}{\underbrace{x_n - z_+}_{<0}} \geq 0$$

$$f'(z_+) = \max \{f'(x)\}$$

$$f'(z_+) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{f(y_n) - f(z_+)}^{<0}}{\underbrace{y_n - z_+}_{>0}} \leq 0$$

Woraus

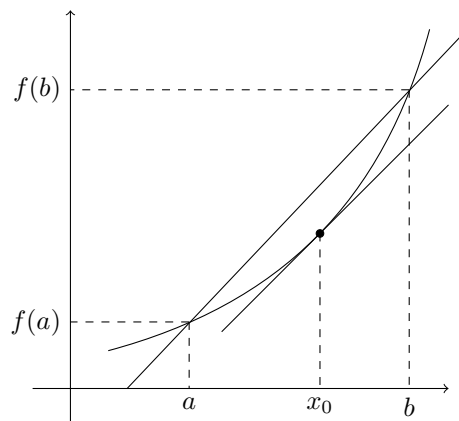
$$f'(z_+) = 0$$

folgt. ■

### Satz 5.14 (Mittelwertsatz)

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und auf  $(a, b)$  differenzierbar,  $a \neq b$ . Dann gibt es  $x_0 \in (a, b)$  mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



### Beweis

Die Idee lässt sich auf den Fall  $f(a) = f(b) = 0$  zurückführen und dann den Satz 5.12 (s. 10) anwenden. Die Gleichung für die Sekante durch die Punkte

$(a, f(a)), (b, f(b))$  ist

$$S(x) = (x - a) \left( \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) + f(a)$$

Sei nun  $g(x) = f(x) - S(x)$ . Dann ist  $g(a) = 0 = g(b)$

Fall 1:  $g$  ist identisch  $= 0$ . Also ist  $f(x) = S(x)$  eine Gerade und die Aussage stimmt  $\forall x_0 \in (a, b)$

Fall 2:  $g \neq 0$ . Also ist entweder

$$\max_x g(x) > 0 \quad \left( \text{oder} \quad \min_x g(x) < 0 \right)$$

Im “max”-Fall sei  $z_+$  mit

$$g(z_+) = \max \{g(x) : x \in [a, b]\}$$

Dann ist  $z_+ \in (a, b)$  (Da  $g(a) = g(b) = 0$ , und  $g(z_+) > 0$ ) und nach Satz 5.12 (s. 10)  $g'(z_+) = 0$ , d.h.

$$\begin{aligned} g(z_+) &= f'(z_+) - S'(z_+) = 0 \\ \Rightarrow f'(z_+) &= S'(z_+) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \end{aligned}$$

Der “min”-Fall ist analog.

■

Als erste Anwendung haben wir

### Korollar 5.15

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  wie im Satz 5.14 (s. 11)

1. Falls  $f'(x) = 0, \forall x \in (a, b)$  folgt, dass  $f$  konstant ist.
2. Falls  $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a, b)$  so ist  $f$  monoton wachsend.
3. Falls  $f'(x) > 0, \forall x \in (a, b)$  so ist  $f$  streng monoton wachsend.
4. Falls  $f'(x) \leq 0, \forall x \in (a, b)$  so ist  $f$  monoton fallend.
5. Falls  $f'(x) < 0, \forall x \in (a, b)$  so ist  $f$  streng monoton fallend.

### Beweis

1. Seien  $a \leq x < y \leq b$  beliebig und sei (nach Mittelwertsatz)  $x_0 \in (x, y)$  mit

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(x_0)$$

da  $f'(x_0)$  folgt  $f(y) = f(x) \Rightarrow f$  ist konstant

## KAPITEL 5. DIFFERENTIALRECHNUNG AUF $\mathbb{R}$

2. Seien  $a \leq x < y \leq b$  beliebig und  $x_0 \in (x, y)$  mit

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(x_0) > 0$$

woraus folgt  $f(y) \geq f(x)$  folgt  $\Rightarrow f$  monoton wachsend.

3. Analog

4. Analog

■

### Beispiel 5.16

1. Bestimme alle differenzierbare Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f' = \lambda f$ . Offensichtlich erfüllt  $t \rightarrow e^{\lambda t}$  diese Gleichung

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{\lambda t} \\ f'(t) &= \lambda e^{\lambda t} = \lambda f(t) \end{aligned}$$

Betrachten wir

$$\begin{aligned} g'(t) &= e^{-\lambda t} f(t) \\ g'(t) &= -\lambda e^{-\lambda t} f(t) + e^{-\lambda t} f'(t) \\ &= e^{-\lambda t} (-\lambda f(t) + f'(t)) \\ &= e^{-\lambda t} (0) \quad \forall t \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also folgt, dass  $g$  konstant ist, d.h.

$$g(t) = C \Rightarrow f(t) = C e^{\lambda t}$$

Anders gesagt: Die Menge der Lösungen von  $f' = \lambda f$  ist ein 1-dimensionaler Vektorraum

$$V = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f' = \lambda f\} = \{C e^{\lambda t} \mid C \in \mathbb{R}\}$$

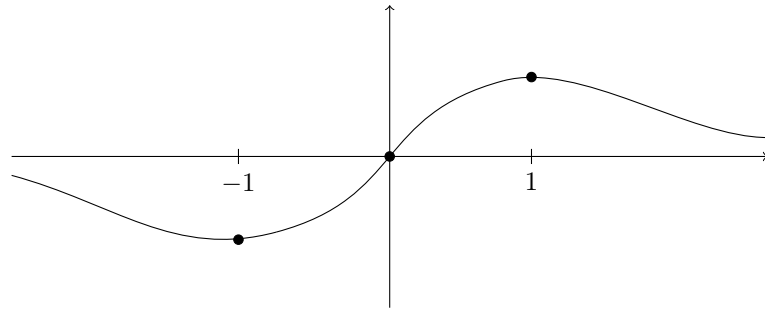
- 2.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x}{1+x^2} \\ f'(x) &= \frac{2(1+x^2) - (2x)(2x)}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &< 0 \text{ für } |x| > 1 \\ f'(\pm 1) &= 0 \\ f'(x) &> 0 \text{ für } |x| < 1 \end{aligned}$$

KAPITEL 5. DIFFERENTIALRECHNUNG AUF  $\mathbb{R}$

$x$	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$



**Korollar 5.17 (Bernoulli, L'Hôpital)**

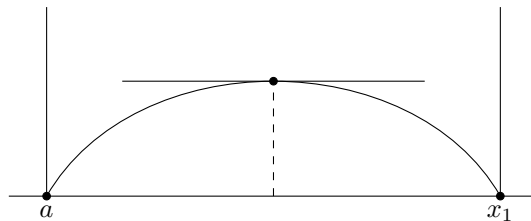
Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar in  $(a, b)$  mit  $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$ . Wir nehmen an, dass

- (i)  $f(a) = 0 = g(a)$
- (ii)  $\lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$

Dann ist  $g(x) \neq 0, \forall x > a$  und  $\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

**Beweis**

Falls es  $x_1 > a$  gibt mit  $g(x_1) = 0$ , dann folgt die Existenz von  $x_0 \in (a, x_1)$  mit  $g'(x_0) = 0$  (MWS.)



Widerspruch zur Annahme  $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$ . Also  $g(x) \neq 0, \forall x > a$ . Nun sei  $a < s < b$  beliebig, und

$$h(x) := \frac{f(s)}{g(s)} \cdot g(x) - f(x) \quad x \in [a, s]$$

Dann gilt,  $h(a) = 0$  und  $h(s) = 0$ , es gibt also  $x_s \in (a, s)$  mit  $h'(x_s) = 0$ , d.h.

$$\begin{aligned} 0 &= h'(x_s) = \frac{f(s)}{g(s)} \cdot g'(x_s) - f'(x_s) \\ (*) \quad &\Rightarrow \frac{f'(x_s)}{g'(x_s)} = \frac{f(s)}{g(s)} \end{aligned}$$

## KAPITEL 5. DIFFERENTIALRECHNUNG AUF $\mathbb{R}$

Sei nun  $s_n \in (a, b)$  beliebig mit  $\lim s_n = a$ . Da  $a < x_{s_n} < s_n$  folgt,  $\lim x_{s_n} = a$ , und aus (\*)

$$\lim \frac{f(s_n)}{g(s_n)} = \lim \frac{f'(x_{s_n})}{g'(x_{s_n})} = A$$

■

### Bemerkung 5.18

1. Es gibt die selbe Version für  $\lim_{x \nearrow b}$
2. (Limes von links und rechts zusammen). Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Sei  $a < c < b$ , wir nehmen an,  $f, g$  sind in  $(a, c) \cup (c, b)$  differenzierbar,  $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, c) \cup (c, b)$  und

$$(i) \quad f(c) = g(c) = 0$$

$$(ii) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x \neq c}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

Dann ist  $g(x) \neq 0, \forall x \in (a, c) \cup (c, b)$  und  $\lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x \neq c}} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

### Beispiel 5.19

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2}{2x} = \frac{3}{2}$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cos(x^2)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos(x^2) = 1$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{2x} = -\frac{1}{2}$$

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!})}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^x - 1 - x}{3x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{6} = \frac{1}{6}$$

Die nächste Anwendung des Mittelwertsatzes ist der sogenannte "Umkehrsatz"

### Fundamentale Frage

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und bijektiv und sei  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die inverse Funktion. Ist dann  $g$  auch differenzierbar?

### Beispiel

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow x^3 \end{aligned}$$



ist überall differenzierbar und bijektiv. Die “Umkehrfunktion”

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow x^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

ist aber in 0 nicht differenzierbar

$$\frac{g(h) - g(0)}{h} = \frac{h^{\frac{1}{3}}}{h} = h^{-\frac{2}{3}} \rightarrow \infty$$

Man kann folgendes bemerken: Falls  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  bijektiv und die Umkehrfunktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  auch differenzierbar ist, dann folgt aus  $(f \circ g)(x) = x$ ,  $\forall x$  und der Kettenregel, dass:

$$f'(g(x)) g'(x) = 1 \quad \forall x$$

Insbesondere  $f'(x) \neq 0$  ( $g'(x) \neq 0$ ),  $\forall x$ . Dies ist also eine notwendige Bedingung zur Existenz der Ableitung von  $f^{-1}$

**Satz 5.20 (Umkehrsatz)**

Sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar mit  $f'(x) > 0$ ,  $\forall x \in (a, b)$ . Seien  $c = \inf_x f(x)$ ,  $d = \sup_x f(x)$ . Dann ist  $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$  bijektiv und die Umkehrfunktion  $f^{-1} : (c, d) \rightarrow (a, b)$  ist differenzierbar mit

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \quad \forall x \in (a, b)$$

d.h.

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \quad \forall y \in (c, d)$$

**Beweis**

Sei  $f'(x) > 0 \Rightarrow f$  streng monoton wachsend. Da  $f$  streng monoton wachsend ist, folgt die erste Behauptung aus dem Zwischenwertsatz für monotone Funktionen (d.h.  $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$  bijektiv).

Nun zeigen wir:  $f^{-1}$  ist differenzierbar. Sei  $y_0 \in (c, d)$ , und  $(y_k)_{k \geq 1}$  eine Folge in  $(c, d)$  mit

$$\lim x_k = y_0 \quad y_k \neq y_0 \quad \forall k \geq 1$$

Dann gibt es eindeutig bestimmte  $(x_k)_{k \geq 1}$  in  $(a, b)$  mit  $f(x_k) = y_k$  ( $f$  bijektiv) und  $x_0 \in (a, b)$  mit  $f(x_0) = y_0$ . Also ist

$$\frac{f^{-1}(y_k) - f^{-1}(y_0)}{y_k - y_0} = \frac{x_k - x_0}{f(x_k) - f(x_0)}$$

Beachte, dass  $x_k \neq x_0$ ,  $\forall k \geq 1$  und dass die Stetigkeit (Satz 4.21) von  $f^{-1}$ ,  $\lim x_k = x_0$  impliziert

$$\left( \begin{array}{lcl} f(x_k) = y_k & \Rightarrow & x_k = f^{-1}(y_k) \\ & & \lim x_k = f^{-1}(\lim y_k) \\ & & = f^{-1}(y_0) \\ & & = x_0 \end{array} \right)$$

## KAPITEL 5. DIFFERENTIALRECHNUNG AUF $\mathbb{R}$

Nun ist

$$\frac{x_k - x_0}{f(x_k) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x_k) - f(x_0)}{x_k - x_0}} \rightarrow \frac{1}{f'(x_0)}$$

da  $f'(x_0) \neq 0$

■

### Korollar 5.21

Die Funktion  $\log : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  ist differenzierbar und  $\log'(x) = \frac{1}{x}$ ,  $\forall x \in (0, \infty)$

### Beweis

$\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  erfüllt alle Bedingungen von Satz 5.20 (s. 16) ( $\exp' = \exp > 0$ ). Wir haben also

$$\begin{aligned} \log(\exp(x)) &= x \\ \log'(\underbrace{\exp(x)}_y) \underbrace{(\exp(x))}_y &= 1 \\ \log'(y) &= \frac{1}{y} \end{aligned}$$

■

Wir definieren mittels “exp” die verallgemeinerte Potenzfunktion  $x \rightarrow x^\alpha$ . Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$ : zunächst bemerken wir für  $n \in \mathbb{N}$  und  $x > 0$ :  $x^n = e^{n \log x}$ . Wir definieren also für  $x > 0$

$$x^\alpha := e^{\alpha \log x}$$

Dann gilt

### Korollar 5.22

$\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $x \rightarrow x^\alpha$  ist differenzierbar und  $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

### Exkurs

Die Exponentialfunktion wächst schneller als jedes Polynom

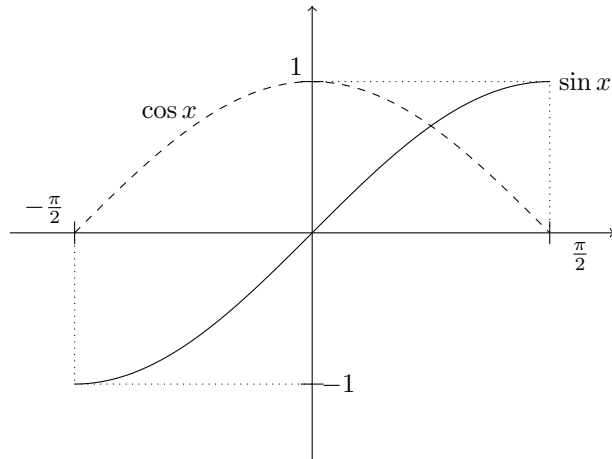
$$e^x > \frac{x^n}{n!} \quad x \geq 0$$

Insbesondere  $e^x > x$ ,  $\forall x \geq 0$ . Die  $\log$  Funktion ist strikt monoton wachsend, Also  $e^x > x \Rightarrow x \geq \log(x)$ ,  $\forall x > 0$ .

Für  $a > 0$ ,  $x^a > \log(x^a) = a \log(x)$ . Also  $\log(x) < \frac{x^a}{a}$ . Die  $\log$  – Funktion wächst also langsamer als jede positive Potenz.

### 5.3 Die Trigonometrischen und Hyperbolischen Funktionen

1.  $\sin(x)$



$\sin'(x) = \cos(x)$ ; d.h.  $\sin'(x) > 0$ ,  $\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  und besitzt daher eine differenzierbare Umkehrfunktion

$$\arcsin : (-1, 1) \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

deren Ableitung wie folgt berechnet wird

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

Falls  $\alpha = \arcsin(x)$ ,  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . So ist

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

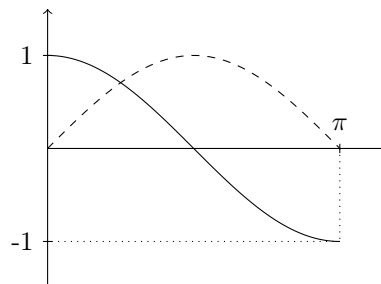
$$\cos^2(\alpha) + x^2 = 1$$

d.h.  $\cos^2(\alpha) = 1 - x^2$ . Da nun  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$  folgt aus  $\cos(\alpha) > 0 \Rightarrow \cos(\alpha) = \sqrt{1 - x^2}$ . Daraus ergibt sich

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Analog haben wir

2.  $\cos, \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



## KAPITEL 5. DIFFERENTIALRECHNUNG AUF $\mathbb{R}$

$$\cos : (0, \pi) \rightarrow (-1, 1)$$

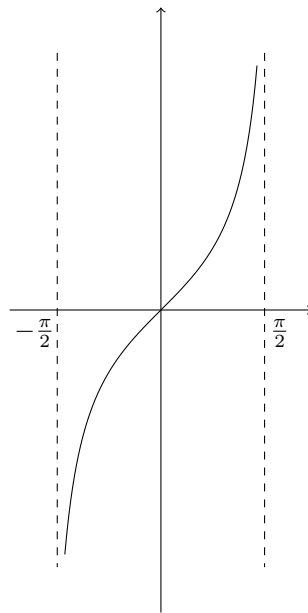
bijektiv und

$$\arccos : (-1, 1) \rightarrow (0, \pi)$$

ist die inverse Funktion und

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3.  $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$



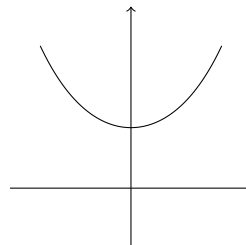
$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

und

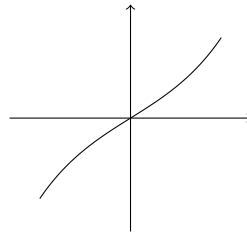
$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

## 4. Hyperbelfunktionen

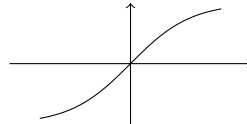
$$\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



$$\tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$



Dann ist  $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  bijektiv und differenzierbar mit  $\sinh'(x) = \cosh(x)$  und somit monotone steigend und  $\operatorname{arcsinh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die Inverse

- $\cosh : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$  bijektiv.  
Inverse:  $\operatorname{arccosh} : (1, \infty) \rightarrow (0, \infty)$
- $\tanh : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$  ist bijektiv.  
Inverse:  $\operatorname{artanh} : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}\sinh'(x) &= \cosh(x) \\ \cosh'(x) &= \sinh(x) \\ \tanh'(x) &= \frac{1}{\cosh^2(x)}\end{aligned}$$

mit der Beziehung  $\cosh^2 + \sinh^2 + 1$  folgt

$$\begin{aligned}\operatorname{arcsinh}'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ \operatorname{arccosh}'(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \\ \operatorname{artanh}'(x) &= \frac{1}{1-x^2}\end{aligned}$$

## 5.4 Funktionen der Klasse $C^m$

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar

### Definition 5.23

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heisst  $C'$  (von der Klasse  $C'$ ), falls  $f$  auf  $\Omega$  differenzierbar ist und  $x \rightarrow f'(x)$  auf  $\Omega$  stetig ist.

Notation:  $C'(\Omega) =$  Vektorraum der auf  $\Omega$   $C'$ -Funktionen

**Beispiel 5.24**

1.  $\exp, \cos, \sin, \text{Polynom} \in C'(\mathbb{R})$

2.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

In 0:

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h} = h \sin\left(\frac{1}{h}\right)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} h \sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0$$

Also  $f'(0) = 0$ ,  $f$  ist differenzierbar in  $x_0 = 0$ . Aber  $f'$  ist in 0 nicht stetig. Für  $x_n = \frac{1}{n\pi}$  ist

$$f'(x_n) = \frac{2 \sin(n\pi)}{n\pi} + (-1)^{n+1} = (-1)^{n+1}$$

$\lim x_n = 0$ ,  $\lim f'(x_n)$  (insbesondere  $\neq f'(0)$ ) nicht existiert.

Wir haben einen Konvergenzbegriff auf  $C^0(\Omega)$  gesehen: Gleichmässige Konvergenz

$$f_n \xrightarrow{\text{glm.}} f \text{ falls } \sup_{x \in \Omega} \|f_n - f\| \rightarrow 0$$

Falls alle  $f_n$  stetig sind, folgt, dass  $f$  stetig ist. Für  $C'(\Omega)$  haben wir

**Satz 5.26**

Sei  $(f_n)_{n \geq 1}$  eine Folge in  $C'(\Omega)$ . Wir nehmen an, dass  $f_n \xrightarrow{\text{glm.}} f$  und  $f'_n \xrightarrow{\text{glm.}} g$ . Dann gilt  $f \in C'(\Omega)$  und  $g = f'$

**Beweis**

Da  $f_n \xrightarrow{\text{glm.}} f$  und  $f'_n \xrightarrow{\text{glm.}} g$ , sind  $f$  und  $g$  stetig  
Zu Zeigen:  $f$  ist differenzierbar und  $f' = g$ .

Seien  $x \neq x_0$  in  $\Omega$ . Aus  $f_n \xrightarrow{\text{glm.}} f$  folgt,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = f(x_0)$

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - g(x_0) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} - g(x_0) \right|$$

Mittelwertsatz:  $\exists \xi_n$  zwischen  $x$  und  $x_0$ , so dass

$$\frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} = f'_n(\xi_n)$$

Nun

$$\begin{aligned} |f'_n(\xi_n) - g(x_0)| &\leq |f'_n(\xi_n) - g(\xi_n)| + |g(\xi_n) - g(x_0)| \\ &\leq \sup_{\xi \in \Omega} |f'_n(\xi) - g(\xi)| + |g(\xi_n) - g(x_0)| \\ &\quad \downarrow \quad \text{Da } f'_n \rightarrow g \quad \downarrow \quad \begin{array}{l} \text{falls } x \rightarrow x_0 \\ (\xi_n \rightarrow x_0) \end{array} \\ &\quad 0 \quad \quad \quad 0 \quad \text{(Stet. von } g) \end{aligned}$$

Folglich

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - g(x_0) \right| = 0 \Rightarrow f' = g$$

■

### Beispiel 5.28

Die gleichmässige Konvergenz von  $f'_n \rightarrow g$  ist notwendig: Sei

$$f_n(x) = \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + x^2}, x \in (-1, 1)$$

### Behauptung

$$f_n(x) \xrightarrow{\text{glm.}} f = |x| \text{ für } |x| < 1$$

### Beweis

$$\begin{aligned} |f_n(x) - |x|| &= \left| \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + x^2} - |x| \right| \\ &= \left| \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + x^2} - |x| \right| \cdot \frac{\left| \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + x^2} + |x| \right|}{\left| \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + x^2} + |x| \right|} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + x^2 - (|x|)^2}{\left| \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + x^2} + |x| \right|} = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left| \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + x^2} + |x| \right|} \leq \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left(\frac{1}{n}\right)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

$$\text{d.h. } f_n(x) \xrightarrow{\text{glm.}} |x|$$

Nun:  $|x|$  ist stetig aber nicht differenzierbar

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= \frac{x}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + x^2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} \frac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \\ g(x) &= \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$f'_n(x) \rightarrow g(x)$  konvergiert nicht gleichmässig ( $g$  nicht stetig in  $x = 0$ )

■

Eine sehr wichtige Anwendung von Satz 5.26 (s. 21) ist auf die Eigenschaften von Funktionen, die Summe von Potenzreihen sind. Sei  $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}$ . Wir nehmen an

$$\rho := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} > 0$$

**Satz 5.29**

Sei  $x \in (-\rho, \rho) = \Omega$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

die Summe der absolut konvergenten Potenzreihe. Dann ist  $f \in C'(\Omega)$  und

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

mit dem selben Konvergenzradius

**Beweis**

Sei

$$f_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Sei  $0 < r < \rho$ . Dann gilt,  $\forall x \in (-r, r)$ :

$$|f_k(x) - f(x)| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} |a_n| r^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Also  $f_k \rightarrow f$  gleichmässig auf  $(-r, r)$ . Da

$$\begin{aligned} \limsup \sqrt[n]{|n a_n|} &= \limsup \left( \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{|a_n|} \right) \\ (\text{Da } \lim \sqrt[n]{n} &= 1) = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \rho \end{aligned}$$

konvergiert

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} =: g(x)$$

absolut  $\forall x \in (-\rho, \rho)$ . Nun ist

$$f'_k(x) = \sum_{n=0}^k n a_n x^{n-1}$$

und es folgt wie oben  $f'_n(x) \xrightarrow{\text{glm.}} g$ . Nach Satz 5.26 (s. 21) folgt, dass  $f, g$  stetig und  $g = f'$ , auf  $(-\rho, \rho)$ .

■



**Beispiel 5.30**

1.

$$\begin{aligned}\exp(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \exp'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x)\end{aligned}$$

2.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad |x| < 1$$

Daraus folgt

$$\begin{array}{ccc} \sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1} & = & \frac{1}{(1-x)^2} \\ & \downarrow & \\ & \text{eine} & \\ & \text{nicht} & \\ & \text{WHAT} & \\ & \text{Identität} & \end{array}$$

Can't understand word, page 230 very bottom