Kapitel 5

Differentialrechnung auf $\mathbb{R}$

5.1 Differential (Ableitung), Elementare Eigenschaften

Definition 5.1

Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}$, und $x_0 \in \Omega$

1. f heisst differenzierbar an der Stelle x_0, falls
$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
existiert. Dieser Grenzwert wird dann mit $f'(x_0)$ oder $\frac{df}{dx}(x_0)$ bezeichnet. Die Zahl $f'(x_0)$ heisst die Ableitung oder das Differential von f an der Stelle x_0.

2. f heisst in Ω differenzierbar, falls sie an jeder Stelle $x_0 \in \Omega$ differenzierbar ist. In diesem Fall, nennt sich die Funktion $x \to f'(x)$ Ableitung von f.

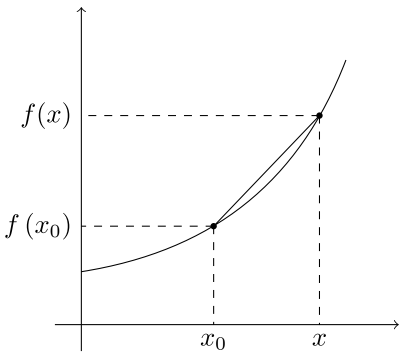
Bemerkung 5.2

In der Definition 5.1 verlangen wir also, dass für jede in $\Omega \backslash \{x_0\}$ enthaltene Folge $(x_n)_{n \geq 1}$ mit Grenzwert x_0, der Limes

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = 0$$

Bemerkung 5.3

Sei f differenzierbar in x_0



Dann ist

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

die Steigung der Geraden durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$.

Geometrisch ist also $f'(x_0)$ die Steigung der Tangenten am Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$. Diese Tangente hat die Gleichung

$$T(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Sei

$$f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) + R_{x_0}(x) = T(x) + R_{x_0}(x)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} + \frac{R(x)}{x - x_0}$$

Dann folgt

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0$$

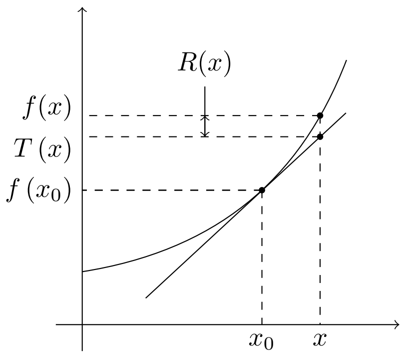
Die lineare Funktion $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ stellt eine gute Approximation der Funktion $f(x)$ dar:

Es gilt

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R_{x_0}(x)$$

mit

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0$$



$$T(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x)$$

Beispiel 5.4

1.
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to mx + b$$
ist überall differenzierbar mit $f'(x) = m$, $\forall x \in \mathbb{R}$
$$f(x) - f(x_0) = m(x - x_0)$$
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} = m$$

2. $f(x) = |x|$ ist für alle $x_0 \neq 0$ differenzierbar, aber nicht für $x_0 = 0$
$$f(x) - f(0) = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$
Also ist
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} 1 & \text{fur } x > 0 \\ -1 & \text{fur } x < 0 \end{cases}$$
und besitzt also keinen Grenzwert für $x \to 0$, $x \neq 0$

3. $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist überall auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und $\exp'(x) = \exp(x)$. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq x = x_0 + h \in \mathbb{R}$
$$\exp(x_0 + h) - \exp(x_0) = \exp(x_0)(\exp(h) - 1)$$
$$\exp(h) - 1 = h + \frac{h^2}{2!} + \dots$$
$$\Rightarrow \frac{\exp(h) - 1}{h} = 1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \dots$$
Also
$$\begin{aligned} \left| \frac{\exp(h) - 1}{h} - 1 \right| &\leq |h| \left[\frac{1}{2!} + \frac{|h|}{3!} + \frac{|h|^2}{4!} + \dots \right] \\ &\leq |h| \left[1 + |h| + \frac{|h|^2}{2!} + \dots \right] \\ &\leq |h| \exp(h) \end{aligned}$$

Woraus

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{\exp(h) - 1}{h} = 1$$

und somit

$$\begin{aligned}
\exp'(x_0) &= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{\exp(x_0 + h) - \exp(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \exp(x_0) \left(\frac{\exp(h) - 1}{h} \right) \\
&= \exp(x_0)
\end{aligned}$$

folgt

4. $\sin(x)$ und $\cos(x)$ sind überall differenzierbar und

$$\begin{aligned}
\sin' &= \cos \\
\cos' &= -\sin
\end{aligned}$$

Mit den Additionsgesetzen:

$$\begin{aligned}
\sin(x + h) - \sin(x) &= \sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x) \\
&= \sin(x)(\cos(h) - 1) + \cos(x)\sin(h)
\end{aligned}$$

Nun ist

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{\cos(h) - 1}{h} &= \frac{\cos^2(h) - 1}{h(\cos(h) + 1)} = \frac{\sin^2(h)}{h(\cos(h) + 1)} \\
&= \underset{\substack{\downarrow \\ \frac{1}{2}}}{\frac{1}{\cos(h) + 1}} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{\sin^2(h)}{h}}
\end{aligned}$$

There is a sin h/h which doesn't seem to belong anywhere, page 188 bottom right corner

$$
\begin{aligned}
\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} &= \sin(x)\left(\frac{\cos(h)-1}{h}\right)+\cos(x)\frac{\sin(h)}{h}\\
\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} &= \lim\left(\sin(x)\lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos(h)-1}{h}\right)\right.\\
&\quad\left.+\cos(x)\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin(h)}{h}\right)\right)\\
&= \sin(x)\lim\left(\frac{\cos(h)-1}{h}\right)\\
&\quad+\cos(x)\lim\left(\frac{\sin(h)}{h}\right)\\
&= (\sin(x))\cdot 0+(\cos(x))\cdot 1=\cos(x)
\end{aligned}
$$

Analog

$$
\begin{aligned}
\cos(x+h)-\cos(x) &= \cos(x)\cos(h)-\sin(x)\sin(h)-\cos(x)\\
&= \cos(x)(\cos(h)-1)+\sin(x)\sin(h)
\end{aligned}
$$

Da wie oben $\frac{\cos(h)-1}{h}\to 0$, $\frac{\sin(h)}{(h)}\to 1$, folgt $\cos' = -\sin$

Der Zusammenhang zwischen Differenzierbarkeit und Sstetigkeit ist:

Satz 5.5

Sei $\Omega\subseteq\mathbb{R}$, $x_0\in\Omega$ und $f:\Omega\to\mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar. Dann ist f in x_0 stetig. (Also ist "Differenzierbarkeit" ist mehr als "Stetigkeit")

Beweis

f differenzierbar in x_0. Sei

$$
\begin{aligned}
T:\Omega\backslash\{x_0\} &\to \mathbb{R}\\
x &\to \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}
\end{aligned}
$$

Da f differenzierbar in x_0 ist, hat T ein Grenzwert in x_0, und

$$\lim_{x\to x_0} T(x)=f'(x)$$

Für $x\neq x_0$

$$f(x)=T(x)(x-x_0)+f(x_0)$$

$f(x)$ ist die Summe von zwei Funktionen $T(x)(x-x_0)$ und $f(x_0)=$ konstant.

Da beide Funktionen einen Grenzwert an der Stelle x_0 besitzen, hat auch f einen Grenzwert in x_0 und

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} f(x) &= \lim_{x\to x_0}(T(x))\lim_{x\to x_0}(x-x_0)+\lim_{x\to x_0} f(x_0)\\
&= f'(x)\cdot 0+f(x_0)=f(x_0)
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ ist stetig in x_0.

■

Bemerkung

Die Umkehrung von Satz 5.5 (s. 5) gilt nicht, z.B. $f(x) = |x|$ ist stetig in $x = 0$ aber nicht differenzierbar.

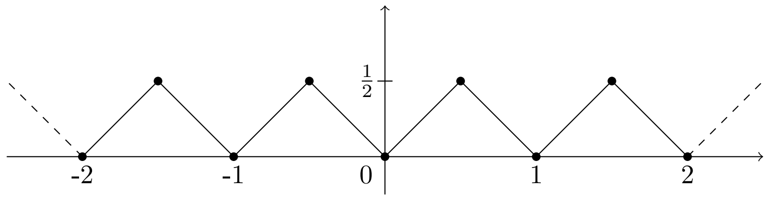
Beispiel 5.6

Das folgende Beispiel zeigt, dass es stetige Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, die an keiner Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar sind. (Von der Waerden (1930))

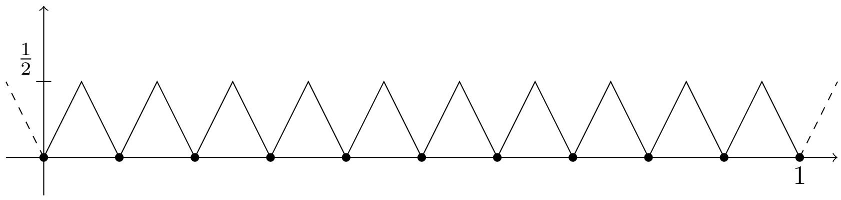
Sei für $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} < x > &= \text{Distanz von } x \text{ zur nächsten ganzen Zahl} \\ &= \min\{|x - m| : m \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

Der Graph von $< x >$ sieht so aus



Graph von $\frac{10x}{10}$



Sei

$$f(x) := < x > + \frac{< 10x >}{10} + \frac{< 10^2 x >}{100} + \dots$$

Da

$$0 \leq < 10^n x > \leq \frac{1}{2}$$

folgt absolute Konvergenz. Ausserdem sei

$$f_k(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{< 10^n x >}{10^n}$$

Dann ist

$$|f(x) - f_k(x)| = \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{< 10^n x >}{10^n} \right| \leq \frac{1}{2} \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{10^n} \right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{10^{-k}}{9}$$

$\forall k \geq 1$ ist $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig.

Da die Folge $(f_k)_{k \geq 1}$ gleichmässig gegen f konvergiert, ist f stetig. Man kann zeigen, dass f in keinem Punkt von $\mathbb{R}$ differenzierbar ist.

End of beweis is put here, I think it is better if it stays up when the bsp begins. Page 192 middle

Satz 5.7

Seien $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ Funktionen, $x_0 \in \mathbb{R}$. Wir nehmen an, dass f und g in x_0 differenzierbar sind. Dann sind $f+g$, $f \cdot g$ und falls $g(x_0) \neq 0$ auch f/gan der Stelle x_0 differenzierbar. Es gelten dann folgende Formeln:

Is this supposed to be a fraction?? page 192 bottom; limenet: yes, function f over function g

1. $(af + bg)'(x_0) = af'(x_0) + bf'(x_0) \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}$
2. $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
3. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

Beweis

1. Für $x \neq x_0$

   $$\frac{(af + bg)(x) - (af + bg)(x_0)}{x - x_0} = a\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right) + b\left(\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right)$$

   Da f und g in x_0 differenzierbar sind, folgt, dass $af + bg$ in x_0 differenzierbar ist und

   $$(af + bg)(x_0) = af'(x_0) + bf'(x_0)$$

2. $$f(x)\,g(x) - f(x_0)\,g(x_0) = g(x)\,[f(x) - f(x_0)] + f(x_0)\,[g(x) - g(x_0)]$$

   Durch $(x - x_0)$ dividiert

   $$\begin{aligned}\frac{f(x)\,g(x) - f(x_0)\,g(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} \cdot g(x_0) \\ &\quad + \frac{g(x) - g(x_0)}{(x - x_0)} \cdot f(x_0)\end{aligned}$$

   Da g in x_0 differenzierbar ist, ist g in x_0 stetig und (Satz 5.5, s. 5)

   $$\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$$

   Die Formel folgt dann aus der Differenzierbarkeit von f und g in x_0

3. $$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} &= \frac{f(x)\,g(x_0) - f(x_0)\,g(x)}{g(x)\,g(x_0)} \\ &= \frac{[f(x) - f(x_0)]\,g(x_0) - f(x_0)\,[g(x) - g(x_0)]}{g(x)\,g(x_0)}\end{aligned}$$

   Man dividiere duch $x - x_0$ und benutze die Stetigkeit von g in x_0

■

Beispiel 5.8

1. $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = x^n$ ist überall differenzierbar und $f_n'(x) = nx^{n-1}$

Beweis

Induktion: $f_0(x) = 1 \ \forall x$

$$f_0'(x) = 0 \left(= 0 \cdot x^{-1}\right)$$

- $f_1(x) = x, \ \forall x$
- $f_1'(x) = 1 = 1 \cdot x^{1-1}$ ✓

Sei $n \geq 2$. Wir nehmen an, dass die Formel für $n-1$ gilt, i.e.

$$\begin{aligned} f_{n-1}'(x) &= \left(x^{n-1}\right)' = (n-1)\,x^{n-2} \\ f_n(x) &= x^n = x \cdot x^{n-1} = x \cdot f_{n-1}(x) \end{aligned}$$

Nach 2., Satz 5.7 (s. 7)

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= (x)' f_{n-1}(x) + x f_{n-1}'(x) \\ &= f_{n-1}(x) + x\,(n-1)\,x^{n-2} \\ &= x^{n-1} + (n-1)\,x^{n-1} = nx^{n-1} \end{aligned}$$

■

2.

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 \\ p'(x) &= n a_n x^{n-1} + (n-1)\,a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_1 \end{aligned}$$

Insbesondere ist die Ableitung eines Polynoms von Grad n ein Polynom von Grad $(n-1)$, $n \geq 1$.

3. Sei $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, wobei p, q Polynome bezeichnen. $R(x)$ ist eine sogenannte rationale Funktion mit Definitionsbereich

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$$

$$R'(x) = \frac{p'(x)q(x) - p(x)q'(x)}{q^2(x)}$$

z.B.

$$R(x) = \frac{x^3+1}{x-1}$$

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{\left(3x^2\right)(x-1) - \left(x^3+1\right)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{3x^3 - 3x^2 - x^3 - 1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{2x^3 - 3x^2 - 1}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

Die nächste Rechenregel wird uns erlauben, Funktionen wie z.B. $\exp\left(x^3+1\right)$ und $\sin\left(x^2\right)$ abzuleiten

Satz 5.9 (Kettenregel)

Seien $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $g : T \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(\Omega) \subset T$, und $x_0 \in \Omega$. Wir nehmen an, dass f an der Stelle x_0 und g an der Stelle $f(x_0)$, differenzierbar sind. Dann ist $g \circ f : \Omega \to \mathbb{R}$ an der Stelle x_0 differenzierbar und

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0)$$

Bemerkung

f ist differenzierbar in x_0, falls

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert, d.h. für jede in $\Omega \backslash \{x_0\}$ enthaltene Folge $(x_n)_{n \geq 1}$ mit Grenzwert x_0, existiert der Limes

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$$

Beweis

Sei $(x_n)_{n \geq 1}$ mit $\lim x_n = x_0$, $x_n \neq x_0$. Dann gilt

$$\lim f(x_n) = f(x_0)$$

(Nach Satz 5.5, s. 5, f differenzierbar $\Rightarrow$ f stetig (in x_0)).

Sei $y_n := f(x_n)$ $(y_0 := f(x_0))$. Wir nehmen an, dass $y_n \neq f(x_0)$, $\forall n$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\frac{(g \circ f)(x_n) - (g \circ f)(x_0)}{x_n - x_0} &= \frac{g(f(x_n)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \\
&= \left(\frac{g(f(x_n)) - g(f(x_0))}{f(x_n) - f(x_0)}\right) \cdot \left(\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x - x_0}\right) \\
&= \underbrace{\left(\frac{g(y_n) - g(x_0)}{y_n - y_0}\right)}_{\downarrow \lim_{n\to\infty} \; g'(y_0)} \cdot \underbrace{\left(\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x - x_0}\right)}_{\downarrow \lim_{n\to\infty} \; f'(x_0)} \\
&\overset{n \to \infty}{=} g'(f(x_0))\, f'(x_0)
\end{aligned}$$

■

Beispiel 5.10

1. Berechne die Ableitung von $\exp\left(x^3 + 1\right)$

$$\begin{array}{ll} g(x) = \exp(x) & f(x) = x^3 + 1 \\ g'(x) = \exp(x) & f'(x) = 3x^2 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(x) &= \exp\left(x^3 + 1\right) \\
(g \circ f)'(x) &= g'(f(x)) \cdot f'(x) = \left[\exp\left(x^3 + 1\right)\right] \cdot 3x^2
\end{aligned}$$

2. $$\left(\sin\left(x^2\right)\right)' = (g \circ f)'(x)$$

   mit
   $$\begin{array}{ll} g(x) = \sin(x) & f(x) = x^2 \\ g'(x) = \cos(x) & f'(x) = 2x \end{array}$$
   $$\left(\sin\left(x^2\right)\right)' = \cos\left(x^2\right) \cdot 2x$$

3. $$\left(\left(3x^7 + 11x^6 + 5\right)^2\right)' = 2\left(3x^7 + 11x^6 + 5\right) \cdot \left(21x^6 + 66x^5\right)$$

4. Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $n \in \mathbb{N}$
   $$f(x) = g(x)^n$$
   Dann ist
   $$f'(x) = ng(x)^{n-1} \cdot g'(x)$$

5. $$\exp(\exp(x)) = e^{e^x}$$
   $$\left(e^{e^x}\right)' = e^{(e^x)} \cdot e^x$$

5.2 Der Mittelwertsatz und Folgerungen

Wichtige Informationen über eine Funktion f lassen sich leicht aus der Ableitung schliessen. Dies geschieht mittels dem Mittelwertsatz . Ein Spezialfalls der Mittelwertsatz ist

Satz 5.12

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Sei $z_+ \in [a,b]$ mit $f(z_+) = \max\{f(x) : x \in [a,b]\}$. Wir nehmen an, dass $z_+ \in (a,b)$. Dann gilt $f'(z_+) = 0$ Eine analoge Aussage gilt für z.

Bemerkung 5.13

1. z_+, z_- existieren nach Satz 4.9
2. Die Voraussetzung $z_+ \in (a,b)$ ist wichtig, z.B. Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Dann ist $z_+ = 1$ und $f'(x) = 1 \neq 0$ $(\forall x \in (a,b))$

Beweis

Sei $z_+ \in (a,b)$. Da $(a,z_+) \neq \varnothing$ und $(z_+,b) \neq \varnothing$, gibt es
$$(x_n)_{n\geq 1} \subset (a, z_+)$$
sowie
$$(y_n)_{n\geq 1} \subset (z_+, b)$$

mit

$$\lim_{n\to\infty} x_n = z_+ = \lim_{n\to\infty} y_n$$

$\left(\text{z.B. } x_n = z_+ - \frac{1}{n}, y_n = z_+ + \frac{1}{n}\right)$

Für $n \geq 1$ folgt

$$f'(z_+) = \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{f(x_n) - f(z_+)}^{<0}}{\underbrace{x_n - z_+}_{<0}} \geq 0$$

$$f(z_+) = \max\{f(x)\}$$

$$f'(z_+) = \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{f(y_n) - f(z_+)}^{<0}}{\underbrace{y_n - z_+}_{>0}} \leq 0$$

Woraus

$$f'(z_+) = 0$$

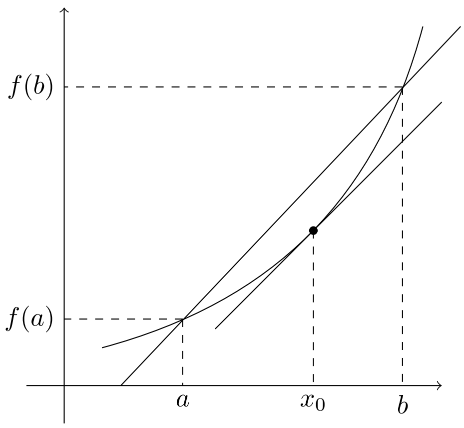
folgt.

■

Satz 5.14 (Mittelwertsatz)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar, $a \neq b$. Dann gibt es $x_0 \in (a,b)$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Beweis

Die Idee lässt sich auf den Fall $f(a) = f(b) = 0$ züruckführen und dann den Satz 5.12 (s. 10) anwenden. Die Gleichung für die Sekante durch die Punkte

$(a, f(a))$, $(b, f(b))$ ist

$$S(x) = (x - a)\left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right) + f(a)$$

Sei nun $g(x) = f(x) - S(x)$. Dann ist $g(a) = 0 = g(b)$

Fall 1: g ist identisch $= 0$. Also ist $f(x) = S(x)$ eine Gerade und die Aussage stimmt $\forall x_0 \in (a, b)$

Fall 2: $g \neq 0$. Also ist entweder

$$\max_x g(x) > 0 \ \left(\text{oder } \min_x g(x) < 0\right)$$

Im "max"-Fall sei z_+ mit

$$g(z_+) = \max\{g(x) : x \in [a, b]\}$$

Dann ist $z_+ \in (a, b)$ (Da $g(a) = g(b) = 0$, und $g(z_+) > 0$) und nach Satz 5.12 (s. 10) $g'(z_+) = 0$, d.h.

$$g(z_+) = f'(z_+) - S'(z_+) = 0$$
$$\Rightarrow f'(z_+) = S'(z_+) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Der "min"-Fall ist analog.

■

Als erste Anwendung haben wir

Korollar 5.15

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ wie im Satz 5.14 (s. 11)

1. Falls $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a, b)$ folgt, dass f konstant ist.
2. Falls $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in (a, b)$ so ist f monoton wachsend.
3. Falls $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a, b)$ so ist f streng monoton wachsend.
4. Falls $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in (a, b)$ so ist f monoton fallend.
5. Falls $f'(x) < 0$, $\forall x \in (a, b)$ so ist f streng monoton fallend.

Beweis

1. Seien $a \leq x < y \leq b$ beliebig und sei (nach Mittelwertsatz) $x_0 \in (x, y)$ mit

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(x_0)$$

da $f'(x_0)$ folgt $f(y) = f(x) \Rightarrow f$ ist konstant

2. Seien $a \leq x < y \leq b$ beliebig und $x_0 \in (x, y)$ mit

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(x_0 > 0)$$

woraus folgt $f(y) \geq f(x)$ folgt $\Rightarrow f$ monoton wachsend.

3. Analog

4. Analog

$\blacksquare$

Beispiel 5.16

1. Bestimme alle differenzierbare Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f' = \lambda f$. Offensichtlich erfüllt $t \to e^{\lambda t}$ diese Gleichung

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{\lambda t} \\ f'(t) &= \lambda e^{\lambda t} = \lambda f(t) \end{aligned}$$

Betrachten wir

$$\begin{aligned} g'(t) &= e^{-\lambda t} f(t) \\ g'(t) &= -\lambda e^{-\lambda t} f(t) + e^{-\lambda t} f'(t) \\ &= e^{-\lambda t} (-\lambda f(t) + f'(t)) \\ &= e^{-\lambda t} (0) \, \forall t \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also folgt, dass g konstant ist, d.h.

$$g(t) = C \Rightarrow f(t) = Ce^{\lambda t}$$

Anders gesagt: Die Menge der Lösungen von $f' = \lambda f$ ist ein 1−dimensionaler Vektorraum

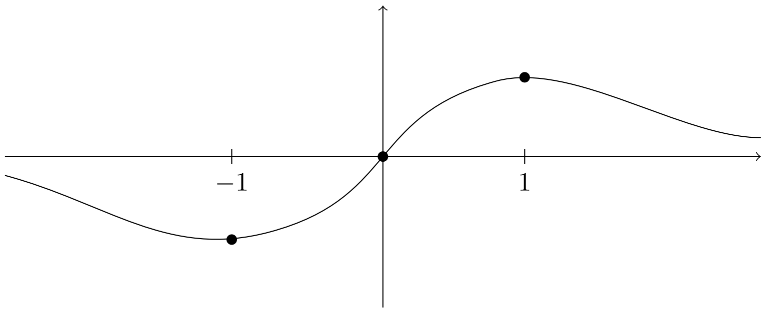
$$V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f' = \lambda f\} = \left\{Ce^{\lambda t} \mid c \in \mathbb{R}\right\}$$

2.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x}{1 + x^2} \\ f'(x) &= \frac{2\left(1 + x^2\right) - (2x)(2x)}{\left(1 + x^2\right)^2} \\ &= \frac{2 - 2x^2}{\left(1 + x^2\right)^2} = \frac{2\left(1 - x^2\right)}{\left(1 + x^2\right)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & f'(x) < 0 \text{ für } |x| > 1 \\ & f'(\pm 1) = 0 \\ & f'(x) > 0 \text{ für } |x| < 1 \end{aligned}$$

x	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$



Korollar 5.17 (Bernoulli, L'Hôpital)

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar in (a, b) mit $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, b)$. Wir nehmen an, dass

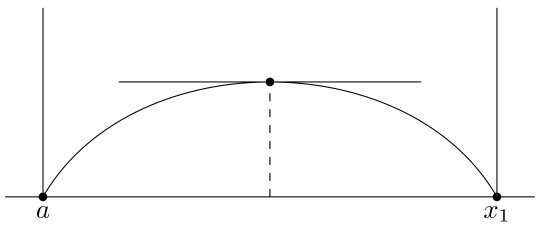
(i) $f(a) = 0 = g(a)$

(ii) $\lim\limits_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$

Dann ist $g(x) \neq 0$, $\forall x > a$ und $\lim\limits_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

Beweis

Falls es $x_1 > a$ gibt mit $g(x_1) = 0$, dann folgt die Existenz von $x_0 \in (a, x_1)$ mit $g'(x_0) = 0$ (MWS.)



Wiederspruch zur Annahme $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, b)$. Also $g(x) \neq 0$, $\forall x > a$. Nun sei $a < s < b$ beliebig, und

$$h(x) := \frac{f(s)}{g(s)} \cdot g(x) - f(x) \qquad x \in [a, s]$$

Dann gilt, $h(a) = 0$ und $h(s) = 0$, es gibt also $x_s \in (a, s)$ mit $h'(x_s) = 0$, d.h.

$$0 = h'(x_s) = \frac{f(s)}{g(s)} \cdot g'(x_s) - f'(x_s)$$

$$(*) \qquad \Rightarrow \frac{f'(x_s)}{g'(x_s)} = \frac{f(s)}{g(s)}$$

Sei nun $s_n \in (a,b)$ beliebig mit $\lim s_n = a$. Da $a < x_{s_n} < s_n$ folgt, $\lim x_{s_n} = a$, und aus $(*)$

$$\lim \frac{f(s_n)}{g(s_n)} = \lim \frac{f'(x_{s_n})}{g'(x_{s_n})} = A$$

■

Bemerkung 5.18

1. Es gibt die selbe Version für $\lim\limits_{x \nearrow b}$

2. (Limes von links und rechts zusammen). Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Sei $a < c < b$, wir nehmen an, f, g sind in $(a,c) \cup (c,b)$ differenzierbar, $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a,c) \cup (c,b)$ und

   (i) $f(c) = g(c) = 0$

   (ii) $\lim\limits_{\substack{x \to c \\ x \neq c}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$

   Dann ist $g(x) \neq 0$, $\forall x \in (a,c) \cup (c,b)$ und $\lim\limits_{\substack{x \to c \\ x \neq c}} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

Beispiel 5.19

1. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1} = \lim \frac{3x^2}{2x} = \frac{3}{2}$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim \frac{\cos(x)}{1} = 1$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2x\cos(x^2)}{2x} = \lim\limits_{x \to 0} \cos(x^2) = 1$

4. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2} = \lim \frac{-\sin(x)}{2x} = -\frac{1}{2}$

5. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\left(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!}\right)}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{e^x-1-x}{3x^2}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x-1}{6x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x}{6} = \frac{1}{6}$

Die nächste Anwendung des Mittelwertsatzes ist der sogenannte “Umkehrsatz”

Fundamentale Frage

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und bijektiv und sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die inverse Funktion. Ist dann g auch differenzierbar?

Beispiel

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to x^3 \end{aligned}$$

ist überall differenzierbar und bijektiv. Die “Umkehrfunktion”

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to x^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

ist aber in 0 nicht differenzierbar

$$\frac{g(h) - g(0)}{h} = \frac{h^{\frac{1}{3}}}{h} = h^{-\frac{2}{3}} \to \infty$$

Man kann folgendes bemerken: Falls $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv und die Umkehrfunktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auch differenzierbar ist, dann folgt aus $(f \circ g)(x) = x$, $\forall x$ und der Kettenregel, dass:

$$f'(g(x))\, g'(x) = 1 \qquad \forall x$$

Insbesondere $f'(x) \neq 0$ $(g'(x) \neq 0)$, $\forall x$. Dies ist also eine notwendige Bedingung zur Existenz der Ableitung von f^{-1}

Satz 5.20 (Umkehrsatz)

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a, b)$. Seien $c = \inf_x f(x)$, $d = \sup_x f(x)$. Dann ist $f : (a, b) \to (c, d)$ bijektiv und die Umkehrfunktion $f^{-1} : (c, d) \to (a, b)$ ist differenzierbar mit

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \qquad \forall x \in (a, b)$$

d.h.

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)} \qquad \forall y \in (c, d)$$

Beweis

Sei $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ streng monoton Wachsend. Da f streng monoton wachsend ist, folgt die erste Behauptung aus dem Zwischenwertsatz für monotone Funktionen (d.h. $f : (a, b) \to (c, d)$ bijektive).

Nun zeigen wir: f^{-1} ist differenzierbar. Sei $y_0 \in (c, d)$, und $(y_k)_{k \geq 1}$ eine Folge in (c, d) lim

$$\lim x_k = y_0 \qquad y_k \neq y_0 \qquad \forall k \geq 1$$

Dann gibt es eindeutig bestimmte $(x_k)_{k \geq 1}$ in (a, b) mit $f(x_k) = y_k$ (f bijektiv) und $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) = y_0$. Also ist

$$\frac{f^{-1}(y_k) - f^{-1}(y_0)}{y_k - y_0} = \frac{x_k - x_0}{f(x_k) - f(x_0)}$$

Beachte, dass $x_k \neq x_0$, $\forall k \geq 1$ und dass die Stetigkeit (Satz 4.21) von f^{-1}, $\lim x_k = x_0$ impliziert

$$\left(\begin{array}{cccc} f(x_k) = y_k & \Rightarrow & x_k & = & f^{-1}(y_k) \\ & & \lim x_k & = & f^{-1}(\lim y_k) \\ & & & = & f^{-1}(y_0) \\ & & & = & x_0 \end{array}\right)$$

Nun ist

$$\frac{x_k - x_0}{f(x_k) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x_k)-f(x_0)}{x_k - x_0}} \to \frac{1}{f'(x_0)}$$

da $f'(x_0) \neq 0$

■

Korollar 5.21

Die Funktion $\log : (0,\infty) \to \mathbb{K}$ ist differenzierbar und $\log'(x) = \frac{1}{x}$, $\forall x \in (0,\infty)$

Beweis

$\exp : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ erfüllt alle Bedingungen von Satz 5.20 (s. 16)($\exp' = \exp > 0$). Wir haben also

$$\begin{aligned} \log(\exp(x)) &= x \\ \log' \underbrace{(\exp(x))}_{y} \underbrace{(\exp(x))}_{y} &= 1 \\ \log'(y) &= \frac{1}{y} \end{aligned}$$

■

Wir definieren mittels "exp" die verallgemeinerte Potenzfunktion $x \to x^\alpha$. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$: zunächst bemerken wir für $n \in \mathbb{N}$ und $x > 0$: $x^n = e^{n \log x}$. Wir definieren also für $x > 0$

$$x^\alpha := e^{\alpha \log x}$$

Dann gilt

Korollar 5.22

$\alpha \in \mathbb{R}$, $x \to x^\alpha$ ist differenzierbar und $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$

Exkurs

Die Exponentialfunktion wächst schneller als jedes Polynom

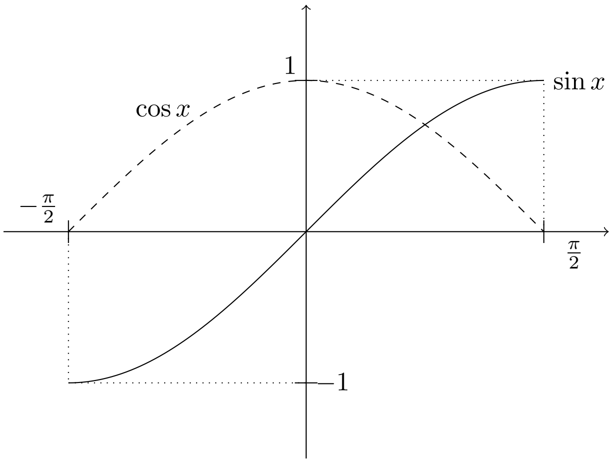
$$e^x > \frac{x^n}{n!} \qquad x \geq 0$$

Insbesondere $e^x > x$, $\forall x \geq 0$. Die log Funktion ist strikt monoton wachsend, Also $e^x > x \Rightarrow x \geq \log(x)$, $\forall x > 0$.

Für $a > 0$, $x^a > \log(x^a) = a\log(x)$. Also $\log(x) < \frac{x^a}{a}$. Die $\log$ –Funktion wächst also langsamer als jede positive Potenz.

5.3 Die Trigonometrischen und Hyperbolischen Funktionen

1. $\sin(x)$



$\sin'(x) = \cos(x)$; d.h. $\sin'(x) > 0$, $\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ und besitzt daher eine differenzierbare Umkehrfunktion

$$\arcsin : (-1, 1) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

deren Ableitung wie folgt berechnet wird

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

Falls $\alpha = \arcsin(x)$, $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. So ist

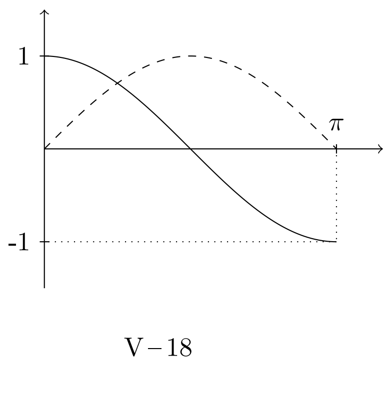
$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$
$$\cos^2(\alpha) + x^2 = 1$$

d.h. $\cos^2(\alpha) = 1 - x^2$. Da nun $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ folgt aus $\cos(\alpha) > 0 \Rightarrow \cos(\alpha) = \sqrt{1 - x^2}$. Daraus ergibt sich

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Analog haben wir

2. $\cos$, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$



$$\cos : (0, \pi) \to (-1, 1)$$

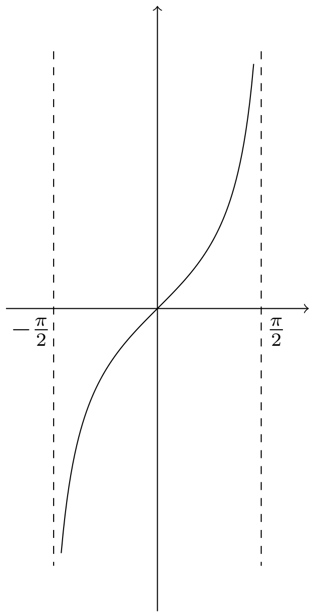
bijektiv und

$$\arccos : (-1, 1) \to (0, \pi)$$

ist die inverse Funktion und

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

3. $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$



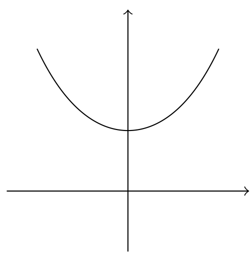
$$\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

und

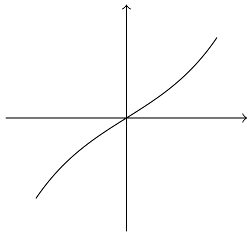
$$\arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

4. Hyperbelfunktionen

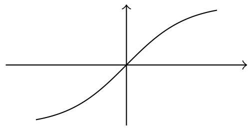
$$\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



$$\tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$



Dann ist $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv und differenzierbar mit $\sinh'(x) = \cosh(x)$ und somit monotone steigend und $\operatorname{arcsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Inverse

- $\cosh : [0, \infty) \to [1, \infty)$ bijektiv.
  Inverse: $\operatorname{arccosh} : (1, \infty) \to (0, \infty)$
- $\tanh : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ ist bijektiv.
  Inverse: $\operatorname{arctanh} : (-1, 1) \to \mathbb{R}$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \sinh'(x) &= \cosh(x) \\ \cosh'(x) &= \sinh(x) \\ \tanh'(x) &= \frac{1}{\cosh^2(x)} \end{aligned}$$

mit der Beziehung $\cosh^2 + \sinh^2 + 1$ folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{arcsinh}'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ \operatorname{arccosh}'(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \\ \operatorname{arctanh}'(x) &= \frac{1}{1-x^2} \end{aligned}$$

5.4 Funktionen der Klasse C^m

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ differenzierbar

Definition 5.23
$f : \Omega \to \mathbb{R}$ heisst C' (von der Klasse C'), falls f auf Ω differenzierbar ist und $x \to f'(x)$ auf Ω stetig ist.

Notation: $C'(\Omega)$ = Vektorraum der auf Ω C'−Funktionen

Beispiel 5.24

1. $\exp, \cos, \sin, \text{Polynom} \in C'(\mathbb{R})$

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

<u>In 0:</u>

Is this “In 0” or “ln 0” (Nat. Log), page 223 bottom

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h} = h \sin\left(\frac{1}{h}\right)$$

$$\lim_{h \to 0} h \sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0$$

Also $f'(0) = 0$, f ist differenzierbar in $x_0 = 0$. Aber f' ist in 0 nicht stetig. Für $x_n = \frac{1}{n\pi}$ ist

$$f'(x_n) = \frac{2 \sin(n\pi)}{n\pi} + (-1)^{n+1} = (-1)^{n+1}$$

$\lim x_n = 0$, $\lim f'(x_n)$ (insbesondere $\neq f'(0)$) nicht existiert.

Wir haben einen Konvergenzbegriff auf $C^0(\Omega)$ gesehen: Gleichmässige Konvergenz

$$f_n \overset{\text{glm.}}{\to} f \text{ falls } \sup_{x \in \Omega} \|f_n - f\| \to 0$$

Falls alle f_n stetig sind, folgt, dass f stetig ist. Für $C'(\Omega)$ haben wir

Satz 5.26

Sei $(f_n)_{n \geq 1}$ eine Folge in $C'(\Omega)$. Wir nehmen an, dass $f_n \overset{\text{glm.}}{\to} f$ und $f_n' \overset{\text{glm.}}{\to} g$. Dann gilt $f \in C'(\Omega)$ und $g = f'$

Beweis

Da $f_n \overset{\text{glm.}}{\to} f$ und $f_n' \overset{\text{glm.}}{\to} g$, sind f und g stetig
<u>Zu Zeigen:</u> f ist differenzierbar und $f' = g$.

Seien $x \neq x_0$ in Ω. Aus $f_n \overset{\text{glm.}}{\to} f$ folgt, $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ und $\lim_{n \to \infty} f_n(x_0) = f(x_0)$

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - g(x_0) \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} - g(x_0) \right|$$

<u>Mittelwertsatz:</u> $\exists \xi_n$ zwischen x und x_0, so dass

$$\frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} = f_n'(\xi_n)$$

Nun

$$\begin{aligned}
\left|f_n'(\xi_n) - g(x_0)\right| &\leq \left|f_n'(\xi_n) - g(\xi_n)\right| + \left|g(\xi_n) - g(x_0)\right| \\
&\leq \sup_{\xi\in\Omega} \underbrace{\left|f_n'(\xi) - g(\xi)\right|}_{\substack{\downarrow \text{ Da } f_n' \to g \\ 0}} + \underbrace{\left|g(\xi_n) - g(x_0)\right|}_{\substack{\downarrow \; \text{falls } x\to x_0 \; (\xi_n\to x_0) \\ 0 \; \text{(Stet. von } g)}}
\end{aligned}$$

Folglich

$$\lim_{x\to x_0}\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - g(x_0)\right| = 0 \Rightarrow f' = g$$

■

Beispiel 5.28

Die gleichmässige Konvergenz von $f_n' \to g$ ist notwendig: Sei

$$f_n(x) = \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + x^2}, x \in (-1,1)$$

Behauptung

$f_n(x) \overset{\text{glm.}}{\to} f = |x|$ für $|x| < 1$

Beweis

$$\begin{aligned}
\left|f_n(x) - |x|\right| &= \left|\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + x^2} - |x|\right| \\
&= \left|\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + x^2} - |x|\right| \cdot \frac{\left|\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + x^2} + |x|\right|}{\left|\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + x^2} + |x|\right|} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + x^2 - (|x|)^2}{\left|\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + x^2} + |x|\right|} = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left|\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + x^2} + |x|\right|} \leq \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left(\frac{1}{n}\right)} \overset{n\to\infty}{\to} 0
\end{aligned}$$

d.h. $f_n(x) \overset{\text{glm.}}{\to} |x|$
<u>Nun:</u>$|x|$ ist stetig aber nicht differenzierbar

$$f_n'(x) = \frac{x}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + |x|^2}} \underset{n\to\infty}{\to} \begin{cases} \frac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x > 1 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 1 \end{cases}$$

$f_n'(x) \to g(x)$ konvergiert nicht gleichmässig (g nicht stetig in $x = 0$)

■

Eine sehr wichtige Anwendung von Satz 5.26 (s. 21) ist auf die Eigenschaften von Funktionen, die Summe von Potenzreihen sind. Sei $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}$. Wir nehmen an

$$\rho := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} > 0$$

Satz 5.29

Sei $x \in (-\rho, \rho) = \Omega$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

die Summe der absolut konvergenten Potenzreihe. Dann ist $f \in C'(\Omega)$ und

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

mit dem selben Konvergenzradius

Beweis

Sei

$$f_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Sei $0 < r < \rho$. Dann gilt, $\forall x \in (-r, r)$:

$$|f_k(x) - f(x)| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} |a_n| r^n \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

Also $f_k \to f$ gleichmässig auf $(-r, r)$. Da

$$\begin{aligned}\limsup \sqrt[n]{|na_n|} &= \limsup \left(\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{|a_n|}\right)\\ \left(\text{Da } \lim \sqrt[n]{n} = 1\right) &= \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \rho\end{aligned}$$

konvergiert

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} =: g(x)$$

absolut $\forall x \in (-\rho, \rho)$. Nun ist

$$f'_k(x) = \sum_{n=0}^{k} n a_n x^{n-1}$$

und es folgt wie oben $f'_n(x) \overset{\text{glm.}}{\to} g$. Nach Satz 5.26 (s. 21) folgt, dass f, g stetig und $g = f'$, auf $(-\rho, \rho)$.

■

Beispiel 5.30

1.

$$\begin{aligned}\exp(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \\ \exp'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x)\end{aligned}$$

2.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \qquad |x| < 1$$

Daraus folgt

$$\sum_{k=0}^{\infty} k x^{k-1} \quad \underset{\substack{\downarrow \\ \text{eine} \\ \text{nicht} \\ \text{WHAT} \\ \text{Identität}}}{=} \quad \frac{1}{(1-x)^2}$$

Can't understand word, page 230 very bottom