(2) $[a,b]$ ist kompakt.

Sei $(t_n)_{n\geq 1}$ eine Folge mit $a \leq t_n \leq b$.

(t_n) ist beschränkt, nach BW sei

$t_{\ell(n)}$ eine konvergente Teilfolge

mit Limes ℓ. Dann folgt

aus $a \leq t_{\ell(n)} \leq b \quad \forall n \geq 1$, dass

$$a \leq \lim t_{\ell(n)} \leq b$$

d.h. $\ell \in [a,b]$. $\longrightarrow$ Nov/R 13

Ohr. Lemma 4-2-1

Lemma 4.11 Falls $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt ist, ist es beschränkt, und besitzt zudem ein Minimum und Maximum.

Beweis: Sonst gibt es zu jedem $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in K$ mit $\|x_n\| \geq n$.

Dann kann aber $(x_n)_{n\geq 1}$ keine konvergente Teilfolge besitzen: $\left(|x_{\ell(n)}| > \ell(n) \right)$

$\Rightarrow$ K ist beschränkt

Sie $s := \sup K$.

Dann gibt es $\forall n \geq 1$, $k_n \in K$ mit

$$s - \frac{1}{n} < k_n \leq s$$

Insbesondere gilt: $\lim k_n = s$.

Da K kompakt ist, hat k_n eine <u>in K</u> konvergierende Teilfolge.

Daraus folgt dass $s \in K$.

<u>Bsp.</u> $S^d := \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : \|x\| = 1\}$

di d-dimensionale Sphäre, ist kompakt.

<u>Beweis</u>: Sei $(x_n)_{n\geq 1} \subset S^d$, dann ist
$(\|x_n\| = 1)$

diese Folge offensichtlich beschränkt,

besitzt sie (nach BW) eine konvergente

Teilfolge $(x_{\ell(n)})_{n\geq 1}$. Sei $p \in \mathbb{R}^{d+1}$ deren limes.

Da die Funktion $f(x) := \|x\|$ stetig ist,

folgt $\|p\| \underset{\text{defn}}{=} f(p) = f(\lim x_{\ell(n)})$

$\underset{f \text{ stetig}}{=} \lim f(x_{\ell(n)}) = 1.$

$\Rightarrow p \in S^d$. ∎

Die Verallgemeinerung von Satz 4.9 ist
[Struwe Satz 4.2.3]

Satz 4.12. (1) Sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung. Dann ist $f(K) \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge.

(2) f nimmt ihr Supremum und Infimum an, d.h. es gibt $c_-, c_+ \in K$ mit

$$f(c_-) \leq f(x) \leq f(c_+) \quad \forall x \in K$$

Beweis. (1) Sei $(y_n)_{n\geq 1}$ eine beliebige Folge in $f(K)$. Wir müssen zeigen dass es eine konvergente Teilfolge mit Limes in $f(K)$ gibt. Sei $(x_n) \in K$ mit

$$f(x_n) = y_n \ , \ n \geq 1.$$

Dann $(x_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in K. Da K kompakt ist, gibt es $p \in K$ und

$(x_{\ell(n)})$ konvergente Teilfolge mit

$\lim (x_{\ell(n)}) = p$

Aus Stetigkeit von f folgt

$$f(p) = f(\lim (x_{\ell(n)})) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ stetig}}}{=} \lim f(x_{\ell(n)})$$

$$= \lim y_{\ell(n)} .$$

d.h. $y_{\ell(n)}$ ist eine Teilfolge von y_n mit limes $f(p) \in f(K) \Rightarrow f(K)$ ist kompakt.

(2) Da $f(K)$ kompakt ist, (Nach (1)) ist $f(K)$ beschränkt, und besitzt zudem ein Min und Max (Nach Lemma 4-11)

$\Rightarrow \exists \; y_+, y_- \in f(K)$, mit $y_+ = \sup f(K)$

$y_- = \inf f(K)$

$\Rightarrow \exists \; c_+, c_- \in K$ mit $y_+ = f(c_+)$, $y_- = f(c_-)$

§ 4.4 Norm auf $\mathbb{R}^d$.

Der Distanz Begriff auf $\mathbb{R}^d$,

kommt von einem Skalarprodukt

Es gibt interessante, andere Arten einem Distanzbegriff einzuführen, nämlich mit dem Begriff der Norm:

Defn 4.13 (4.4.1 Struwe) Eine Norm auf $\mathbb{R}^d$ ist eine Abbildung $\|\cdot\| : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

1) Definitheit: $\|x\| \geq 0$ mit Gleichheit genau dann wenn $x = 0$

2) Positive Homogenität: $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^d$

3) Dreiecks-Ungleichung: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$.

Bsp 4-~~14~~ (4.4.1)

① $\|x\|_2 := \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^2\right)^{1/2}$ $x = (x_1, \dots x_d)$

kommt von skalar Produkt

② Für $1 \leq p < \infty$ sei

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

und $\|x\|_\infty = \max\{|x_i| : 1 \leq i \leq d\}$.

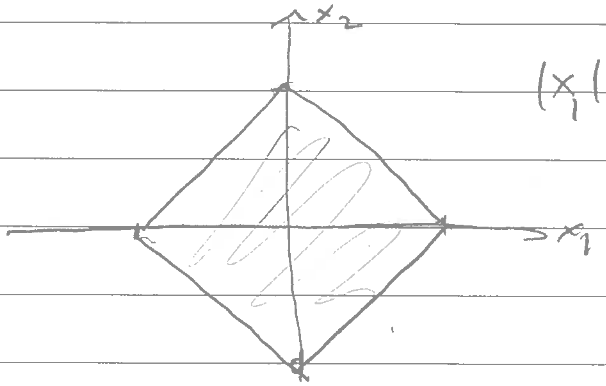
dann sind $\| \ \|_p$, $1 \leq p \leq \infty$ Normen auf $\mathbb{R}^d$.

Zwischen diesen verschiedenen Normen haben wir die folgende verhältnissen

(*) $\|x\|_\infty = \max_i |x_i| \leq \|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_1^d |x_i|^p} \leq \sum_{i=1} |x_i|$

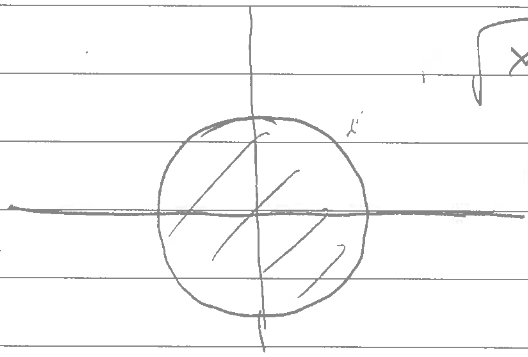
$\leq d \|x\|_\infty$.

Bild von $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{d} |x_i| \leq 1$



$|x_1| + |x_2| \leq 1$

$\|x\|_2 = \sqrt{\sum |x_i|^2} \leq 1$

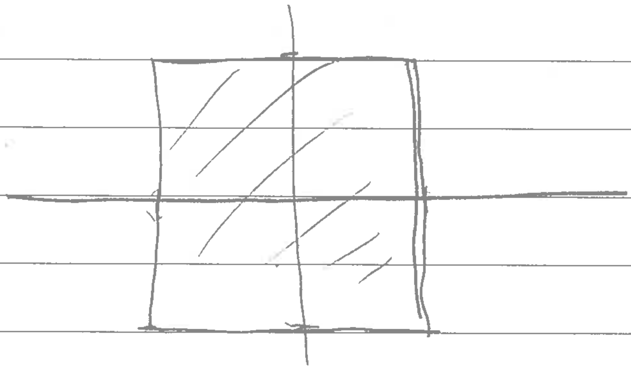


$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 1$

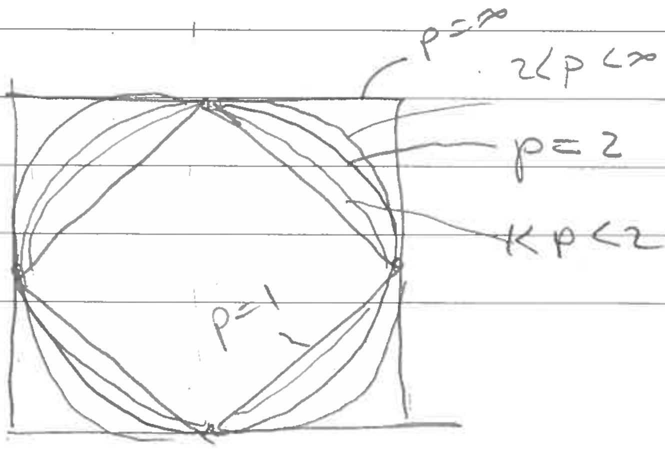
$\|x\|_\infty \leq 1$

$\|$

$\max_i \{|x_i|\}$



$\max\{|x_1|, |x_2|\} \leq$



<u>Defn. 4.15</u> (4.4.2) Zwei Normen $\| \|^{(1)}, \| \|^{(2)}$ auf $\mathbb{R}^d$ heissen <u>äquivalent</u>, falls es $c_1, c_2 > 0$ gibt mit $c_1 \|x\|^{(1)} \leq \|x\|^{(2)} \leq c_2 \|x\|^{(1)}$

$\forall x \in \mathbb{R}^d$.

(Bmk: Sei $c = \max\{c_2, 1/c_1\}$, dann gilt
$(1/c)\|x\|^{(1)} \leq \|x\|^{(2)} \leq c\|x\|^{(1)}$)

<u>Bsp.</u>: Die Normen $\| \|_p$ $1 \leq p \leq \infty$ wegen (*) sind äquivalent.

<u>Bmk 4.16</u> (4.4.1) Äquivalente Normen definieren dieselben "offenen Mengen" via Distanzfunktion.

<u>Beweis</u>. Für die Normkugeln
$B_r^{(1)}(x_0) := \{x : \|x - x_0\|^{(1)} < r\}$

gilt mit $c_1 \|x\|^1 \leq \|x\|^2 \leq c_2 \|x\|^1$

$$B^{(1)}_{rc_1}(x_0) \subset B^{(2)}_r(x_0) \subset B_{c_2 r}(x_0)$$

$\Rightarrow x_0 \in \Omega$ innerer Punkt von Ω bzgl $\| \|^2$
$\Leftrightarrow x_0 \in \Omega$ innerer Punkt von Ω bzgl $\| \|^1$

Auf $\mathbb{R}^d$, haben wir

<u>Satz 4.17</u> (4.4.1 Struwe). Je zwei Normen auf $\mathbb{R}^d$ sind äquivalent.

<u>Beweis</u>: Es genügt zu zeigen, dass eine beliebige Norm $\| \|$, zu $\| \|_2$ äquivalent ist.

Seien $x = \sum x_i e_i$, $y = \sum y_i e_i$

Dann ist $\|x-y\| = \|\sum_{i=1}^{d} (x_i - y_i) e_i\| \leq$

$$\leq \sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i| \|e_i\| \leq \|x-y\|_\infty \underbrace{\sum_{i=1}^{d} \|e_i\|}_{=: C}$$

$(\|x\|_\infty \leq \|x\|_p)$ $\underset{(*)}{\leq} C' \|x-y\|_2$

Also folgt, dass
$$\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$$
$$x \to \|x\| \quad \text{stetig ist}$$

Da, $S^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_2 = 1\}$ kompakt ist, folgt dass es $c_+, c_- \in S^{d-1}$

gibt mit $k_- =: \|c_-\| \leq \|x\| \leq \|c_+\| =: k_+$

$\forall x \in S^{d-1}$, Da $\underset{(c_- \in S^{d-1})}{c_- \neq 0}$ folgt $k_- > 0$

Sei $x \neq 0$ allgemein, dann ist

$y := \frac{x}{\|x\|_2} \in S^{d-1}$ also $k_- \leq \left\|\frac{x}{\|x\|_2}\right\| < k_+$

Woraus $k_- \|x\|_2 \leq \|x\| \leq k_+ \|x\|_2$ folgt.

NOV 14.13
lec. 7

§4.5 ε-δ Kriterium für Stetigkeit

Wir haben die Folgende Kriterium für Stetigkeit an der Stelle x_0

Satz 4.18. (4.5-1) Sei $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$
$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine Abbildung, $x_0 \in \Omega$

Folgende Eigenschaften sind äquivalent

① f ist stetig an der Stelle x_0
d.h. Für jede gegen x_0 konv. folge $(x_n) \subset \Omega$ die folge
$f(x_n)$ konv. gegen $f(x_0)$.

② Für jedes $\varepsilon > 0$, gibt es $\delta > 0$ so dass für alle $x \in \Omega$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt:
$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, so dass:
$\forall x \in \Omega, \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$

Beweis 4.18. (1) $\Rightarrow$ (2) (Indirekt)

Wir nehmen also an, dass (2) nicht gilt.

d.h es gibt $\varepsilon > 0$ so dass für jedes $\delta > 0$ einem punkt x_δ gibt mit

$\|x_\delta - x_0\| < \delta$ und $\|f(x_\delta) - f(x_0)\| > \varepsilon$

$$\neg \left[\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \Omega : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \right.$$

$$= \exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in \Omega : |x - x_0| < \delta \not\Rightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

d.h $\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x_\delta \in \Omega : |x_\delta - x_0| <$ und $|f(x) - f(x_0)| > \varepsilon$

Sei $\varepsilon > 0$, Wir wählen jetzt $\delta_n = 1/n$, dann gibt es

$x_n := (x_{\delta_n})_{n \in \mathbb{N}}$, ein Folge in Ω, mit $\lim x_n = x_0$

$\left(|x_n - x_0| < \delta_n = \frac{1}{n} \right)$! Aber die Folge

$(f(x_m))$ kann offensichtlich nicht gegen $f(x_0)$ konvergieren (Da $|f(x_m) - f(x_0)| > \varepsilon$)

d.h. f ist nicht stetig in x_0.

(2) $\Rightarrow$ (1) Sei $(x_n)_{n \geq 1}$ eine Folge in Ω mit Grenzwert x_0.

Wir möchten zeigen dass $f(x_n) \to f(x_0)$

Sei $\varepsilon > 0$, nach (2) sei $\delta_\varepsilon > 0$ so dass $\forall x \in \Omega$ mit

$|x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Da $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$, gibt es $N \geq 1$ so dass $\|x_n - x_0\| < \delta$ $\forall n > N_\delta$.

(Hier hängt N von δ, und also im Endeffekt von ε ab).

Aus (2) folgt $\|f(x_n) - f(x_0)\| < \varepsilon$ $\forall n \geq N_\delta$.

Dies zeigt $\lim f(x_n) = f(x_0)$.

Nov 14. 13
Tek. 2 156-1

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

<u>Bsp.</u> $f(x) = 3x + 8$

Dann f ist stetig auf $\mathbb{R}$.

Sei $\varepsilon > 0$, sei $x_0 \in \mathbb{R}$

$$|f(x) - f(x_0)| = |(3x+8) - (3x_0+8)|$$

$$= 3\,|x - x_0| \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Sei $\varepsilon > 0$.
Wenn wir $\delta = \varepsilon/3$ wählen, dann

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; |x - x_0| < \delta_\varepsilon = \varepsilon/3 \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

In diesem Bsp δ hängt nur von ε ab.

Nächste Bspl zeigt dass

δ nicht nur von ε, sondern auch von x_0 abhängen kann

156-2

(2) $f: (0,\infty) \to (0,\infty)$
$x \to 1/x$

ist stetig auf $(0,\infty)$

Sei $x_0 \in (0,\infty)$

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \left|\frac{x_0 - x}{x x_0}\right|$$

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow -\delta < x - x_0 < \delta$$

$$\Rightarrow x > x_0 - \delta.$$

$$|f(x) - f(x_0)| = \frac{|x_0 - x|}{|x||x_0|} < \frac{|x - x_0|}{|x_0||x_0 - \delta|}$$

Sei $\delta \leq \frac{x_0}{2}$, dann folgt

$$\delta < \frac{x_0}{2} \Rightarrow x_0 - \delta > x_0 - \frac{x_0}{2} > \frac{x_0}{2}$$

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{|x_0 - x|}{|x_0||x_0 - \delta|} \leq \frac{|x_0 - x| \cdot 2}{|x_0|^2} < \frac{\delta \cdot 2}{|x_0|}$$

Sei $\delta_{\varepsilon; x_0} = \min\left\{\frac{x_0}{2}, \frac{\varepsilon |x_0|^2}{2}\right\}$

Dann $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon |x_0|^2}{2} \cdot \frac{2}{|x_0|^2} = \varepsilon.$

§ 4.6 Zwischenwertsatz

Satz 4.19 (Struwe 4.6.1).

Seien $a < b$ in $\mathbb{R}$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, mit $f(a) \leq f(b)$ (oder $f(a) \geq f(b)$)
Dann gibt es zu jedem $y \in [f(a), f(b)]$ ein $x \in [a,b]$ mit $f(x) = y$.

Beweis Idee ist einfach.
Wir benutzen ein Approximationsverfahren
(In diesem Fall Bisektionsverfahren.

Wir definieren zwei Monotone Folgen

$$a = a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq b_2 \leq b_1 = b$$

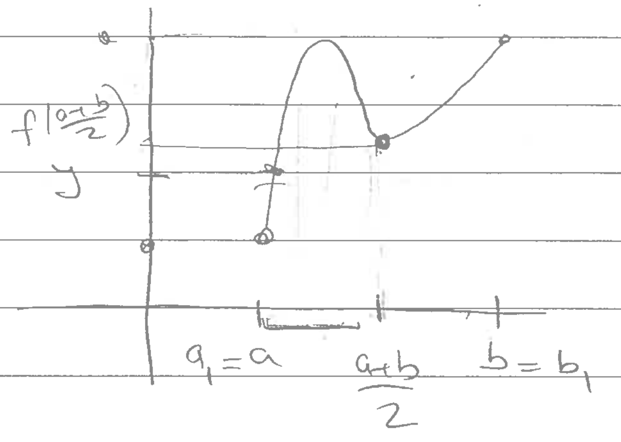
mit $a_n \nearrow$, $b_n \searrow$, $\lim a_n = \lim b_n = c$

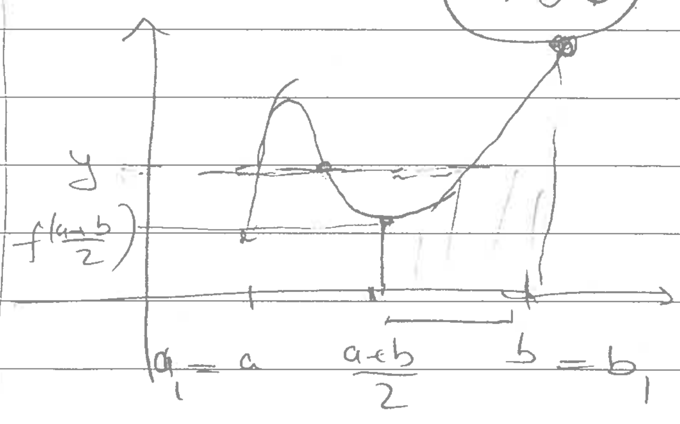
und $f(a_n) < y \leq f(b_n)$

Dann aus Stetigkeit von f, folgt dass

$$\lim f(a_n) = \lim f(b_n) = f(c) = y.$$

158





Fall 1

Fall 2

Falls $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq y$,

Setzen wir: $a_2 = a$

$b_2 = \frac{a+b}{2}$

Falls $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < y$.

Setzen wir: $a_2 = \frac{a+b}{2}$

$b_2 = b_1$

Auf jedem Fall gibt

1. $a_1 \leq a_2 < b_2 \leq b_1$
2. $(b_2 - a_2) = \frac{1}{2}(b_1 - a_1)$
3. $f(a_2) < y \leq f(b_2)$

Wir iterieren jetzt dieses Verfahren. Wir nehmen an, dass wir Folgen definiert haben nach $(k-1)$-Schritten

1. $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \ldots \leq a_k < b_k \leq b_{k-1} \ldots \leq b_1$
2. $(b_k - a_k) = \frac{1}{2^{k-1}}(b_1 - a_1)$
3. $f(a_k) < y \leq f(b_k)$

Nun unterscheiden wir wieder zwei Fälle

<u>Fall 1</u> $f\left(\frac{a_k+b_k}{2}\right) \geq y$, dann definieren wir $a_{k+1} = a_k$ und $b_{k+1} = \frac{a_k+b_k}{2}$

<u>Fall 2</u> $f\left(\frac{a_k+b_k}{2}\right) < y$, dann definieren wir $a_{k+1} = \frac{a_k+b_k}{2}$ $b_{k+1} = b_k$.

Dann ist immer ① $a_k \leq a_{k+1} < b_{k+1} \leq b_k$

② $b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{1}{2}(b_k - a_k)$

$= \frac{1}{2^k}(b_1 - a_1)$

③ $f(a_{k+1}) < y \leq f(b_{k+1})$

Nach dem Prinzip der Vollständigen Induktion erhalten wir zwei Folgen $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ die den Eigenschaften ①, ②, ③ erfüllen.

(a_n), (b_n) sind monotone und beschränkt
$\Rightarrow$ gibt es $\bar{a} = \lim a_k \leq \bar{b} = \lim b_k$

Wegen (2) $\lim |a_k - b_k| = \lim \left| \frac{b_1 - a_1}{2^k} \right| = 0$

d.h. $\lim a_k = \lim b_k$. Sei $c \in [a, b]$ dieser Wert.

Aus Stetigkeit von f folgt

$$f(c) = \lim f(a_n) = \lim f(b_n)$$

Aus (3) folgt $f(a_n) < y \Rightarrow f(c) \leq y$

$y \leq f(b_n) \Rightarrow y \leq f(c)$

also $f(c) = y$. Nov 19. 13

Kor. 4.20 (1) (Bsp. 4.6.1) Sei

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ ein polynome

mit reellen Koeffizienten so dass $a_n \neq 0$ und n ungerade ist.

Dann besitzt p mindestens eine reelle Nullstelle.