

Kapitel 1

Gewöhnliche Differenzialgleichungen

Eine Gleichung, in der Ableitungen einer gesuchte Funktionen auftreten, nennt man Differentialgleichung.

$$y'(t) = y + y^2$$

$$(y'(t))^2 = y(t) + 2$$

Hängt die gesuchte Funktion in der DGL nur von einer einzigen Variablen ab, so spricht man von einer "gewöhnliche DGL".

Hängt hingegen die gesuchte Funktion von mehreren Variablen ab, d.h. kommen partielle Ableitungen in der Differentialgleichung vor, so liegt eine "Partielle DGL" vor. Viele physikalische Prozesse lassen sich oft durch Differentialgleichungen beschreiben.

Besipiel

1. Ein lineares Federpendel wird durch folgende DGL beschrieben

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -Kx \quad \text{mit } K = \text{Federkonstante}$$



Unbekannt ist hier die Auslenkung x in Abhängigkeit von der Zeit t

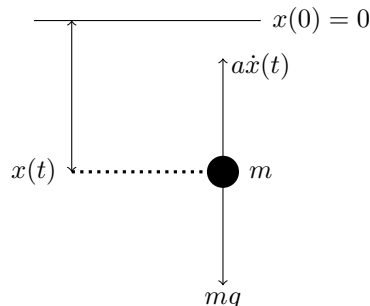
2. Beim radioaktiven Zerfall, haben wir

$$\frac{df(t)}{dt} = -\alpha f \quad f(0) = f_0$$

wobei $f(t)$ = die noch vorhandene Masse eines Stoffes. Pro Zeiteinheit zerfallende Masse ist proportional zur noch vorhandenen Masse

KAPITEL 1. GEWÖHNLICHE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

3. Freier Fall mit Reibung



Sei m eine Massepunkt der Unter Einfluss der Schwerkraft fällt. Es kann auch ein Reibungskraft geben.

Die größe der Reibungskraft ist proportional zur Geschwindigkeit. Dann ist, nach der zweiten Newtonsche Gesetz

$$m\ddot{x} = mg - a\dot{x} \quad v = \frac{dx}{dt}$$

Beim 2., haben wir schon letzte Semester gesehen dass

$$\frac{df(t)}{dt} = -\alpha f$$

als eine Lösung $Ke^{-\alpha t}$, $K \in \mathbb{R}$

$$f' = -\alpha f \Rightarrow \frac{f'}{f} = -\alpha$$

$$\int \frac{f'(t)}{f(t)} dt = - \int \alpha dt$$

$$\ln |f(t)| = -\alpha t + C$$

$$\Rightarrow f(t) = Ke^{-\alpha t} \text{ mit } K = e^{tC}$$

Alle 3 Beispiele sind Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten.

1.1 Lineare DGL mit konstante Koeffizienten

Definition 7.1

Eine lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung hat die Gestalt

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

mit $a_i(x), i = 0, \dots, n-1, b(x)$ Funktionen.