

## Kapitel 9

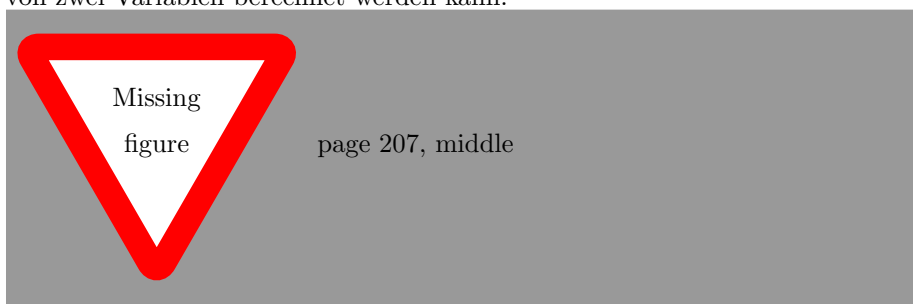
# Integration in $\mathbb{R}^n$

Im Eindimensionalen hatten wir mit dem Integral

$$\int_a^b f(x) dx$$

den Flächeninhalt unter dem Graphen von  $f$  berechnet. Wir suchen nach einer Verallgemeinerung mit der z.B. Volumen unter dem Graphen einer Funktion von zwei Variablen berechnet werden kann.

can't understand word,  
page 207 middle



Erinnerung: Das bestimmte Riemann-Integral einer Funktion  $f(x)$  über einem Intervall ist  $[a, b]$  :

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Das Integral  $I$  war als Grenzwert der Riemannschen Ober- und Untersumme definiert (falls diese Grenzwerte jeweils existieren und übereinstimmen).

Das Konstruktionsprinzip für Bereichsintegrale ist analog. Aber der Definitionsbereich  $D$  ist komplizierter. Wir betrachten zunächst den Fall zweier Variablen,  $n = 2$ , und einen Definitionsbereich  $D \subset \mathbb{R}^2$  der Form

$$D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$$

d.h.  $D$  ist ein kompakter Quader (Rechteck). Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Funktion.

**Definition 9.1**

Mann nennt  $Z = \{(x_0, x_1, \dots, x_n), (y_0, y_1, \dots, y_m)\}$  eine Zerlegung des Quaders  $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$  falls gilt

$$a_1 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b_1$$

$$a_2 = y_0 < y_1 < \dots < y_m = b_2$$

1. WHERE IS NUMBER 1??

2. Die Feinheit einer Zerlegung  $Z \in \mathcal{Z}(D)$  ist

$$\|Z\| := \max_{i,j} \{|x_{i+1} - x_i|, |y_{j+1} - y_j|\}$$

3. Für eine vorgegebene Zerlegung  $Z$ , nennt man die Mengen

$$Q_{ij} := [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$$

die Teilquader der Zerlegung  $Z$ . Das Volumen des Teilquaders  $Q_{ij}$  ist

$$\text{vol}(Q_{ij}) := (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$$

4. Für beliebige Punkte  $\xi_{ij} \in Q_{ij}$  der jeweiligen Teilquader nennt man

$$R_f(Z) := \sum_{i,j} f(\xi_{ij}) \text{vol}(Q_{ij})$$

eine Riemannsche Summe zur Zerlegung  $Z$

5. Analog zum Integral einer Variablen heissen für eine Zerlegung  $Z$

$$U_f(Z) := \sum_{i,j} \inf_{\mathbf{X} \in Q_{ij}} f(\mathbf{X}) \text{vol}(Q_{ij})$$

$$O_f(Z) := \sum_{i,j} \sup_{\mathbf{X} \in Q_{ij}} f(\mathbf{X}) \text{vol}(Q_{ij})$$

die Riemannsche Untersumme bzw. Riemannsche Obersumme von  $f(x)$

**Bemerkung 9.2**

1. Es gilt

$$U_f(Z) \leq R_f(Z) \leq O_f(Z)$$

d.h. eine Riemannsche Summe zur Zerlegung  $Z$  liegt stets zwischen der Unter und Obersumme dieser Zerlegung.

2. Entsteht eine Zerlegung  $Z_2$  aus der Zerlegung  $Z_1$  durch Hinzunahme wei-

## KAPITEL 9. INTEGRATION IN $\mathbb{R}^n$

terer Zwischenpunkte  $x_i$  und/oder  $y_j$ , so gilt

$$U_f(Z_2) \geq U_f(Z_1) \quad \text{und} \\ O_f(Z_2) \leq O_f(Z_1)$$

Für zwei beliebige Zerlegungen  $Z_1, Z_2$  gilt stets

$$U_f(Z_1) \leq O_f(Z_2)$$



### Definition 9.3

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt

1. Das Riemannsche Unterintegral bzw. Riemannsche Oberintegral der Funktion  $f(x)$  über  $D$  ist

$$U_f := \sup \{U_f(z) : z \in Z(D)\} := \int_{\underline{D}} f(x) d\mu$$

$$O_f := \inf \{O_f(z) : z \in Z(D)\} := \int_{\bar{D}} f(x) d\mu$$

2. Die Funktion  $f(x)$  nennt man Riemann - integrierbar über  $D$ , falls Unter und Oberintegral übereinstimmen. Das Riemann Integral von  $f(x)$  über  $D$  ist

$$\int_D f(x) d\mu = \int_{\bar{D}} f(x) d\mu = \int_{\underline{D}} f(x) d\mu$$

### Bemerkung

In höheren Dimensionen,  $n > 2$ , ist die Vorgehensweise analog. Schreibweise:  
Für  $n = 2, n = 3$

$$\int_D f(x, y) d\mu \quad \text{bzw.} \quad \int_D f(x, y, z) d\mu$$

oder auch

$$\int_D f(x, y) \, dx dy \text{ bzw. } \int_D f(x, y, z) \, dx dy dz$$

oder

$$\int_D f \, dx dy \text{ bzw. } \int_D f \, dx dy dz$$

### Satz 9.4 (Elementare Eigenschaften des Integrals)

1. Linearität: Seien  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und  $R$  integrierbar,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Dann sind  $\alpha f, f + g$  Riemann-Integrierbar

$$\int_D (\alpha f + \beta g) \, d\mu = \alpha \int_D f \, d\mu + \beta \int_D g \, d\mu$$

2. Monotonie: Gilt  $f(x) \leq g(x), \forall x \in D$ , so folgt

$$\int_D f \, d\mu \leq \int_D g \, d\mu$$

3. Positivität: Gilt für alle  $x \in D, f(x) \geq 0$  (d.h.  $f(x)$  ist nicht negativ), so folgt

$$\int_D f \, d\mu \geq 0$$

4. Abschätzung

$$\left| \int_D f(x) \, d\mu \right| \leq \sup_{x \in D} |f(x)| \, \text{vol}(D)$$

5. Sind  $D_1, D_2, D$  Quader,  $D = D_1 \cup D_2$  und  $\text{vol}(D_1 \cap D_2) = 0$ , so ist  $f$  genau dann über  $D$  integrierbar, falls  $f$  über  $D_1$  und über  $D_2$  integrierbar ist und es gilt

$$\int_D f \, d\mu = \int_{D_1} f \, d\mu + \int_{D_2} f \, d\mu$$

(Gebietsadditivität)

## 9.1 Der Satz von Fubini

According to the notes it should be 9.2, which one is right??

Wie kann man das Riemann-Integral konkret berechnen? Der Satz von Fubini hilft uns.

**Satz 9.5 (Satz von Fubini)**

Sei  $Q = [a, b] \times [c, d] \in \mathbb{R}^2$  und sei  $f \in C^0(Q)$ . Dann gilt

$$\int_Q f d\mu = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

d.h. das Integral von  $f$  über  $Q$  kann iterativ durch 1-dimensionale Integration bestimmt werden.

**Beispiel 9.6**

1. Sei  $f(x, y) = 2x + 2yx$ ,  $Q = [0, 1] \times [-2, 2]$

$$\begin{aligned} \int_Q f d\mu &= \int_{-2}^2 \left( \int_0^1 (2x + 2yx) dx \right) dy \\ &= \int_{-2}^2 \left( x^2 + yx^2 \Big|_0^1 \right) dy \\ &= \int_{-2}^2 (1 + y) dy = y + \frac{y^2}{2} \Big|_{-2}^2 = 4 \end{aligned}$$

Oder:

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \left( \int_{-2}^2 (2x + 2yx) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left( 2xy + y^2x \Big|_{-2}^2 \right) dx \\ &= \int_0^1 [(4x + 4x) - (-4x + 4x)] dx \\ &= \int_0^1 8x dx = 4x^2 \Big|_0^1 = 4 \end{aligned}$$

- 2.

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \int_0^{2\pi} (e^x \sin y) dy dx \\ &= \int_0^1 \left( -e^x \cos y \Big|_0^{2\pi} \right) dx \\ &= \int_0^1 0 dx = 0 \end{aligned}$$

Oder:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 e^x \sin y dx \right) dy \\
 &= \int_0^{2\pi} \left( \sin y e^x \Big|_0^1 \right) dy \\
 &= \int_0^{2\pi} (e - 1) \sin y dy \\
 &= - (e - 1) \cos y \Big|_0^{2\pi} = 0
 \end{aligned}$$

### Geometrische Deutung

Not sure about the text size...



In der Skizze ergibt sich als Volumen der markierten Schicht bei festem  $x$  und sehr kleinen Dicke  $dx$  näherungsweise das Volumen

$$\left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

Das Aufaddieren sämtlicher Schichtvolumen entspricht gerade der Integration über die Variable  $x$ , d.h. für das gesuchte Volumen gilt

$$V = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

Bis jetzt können wir nur Integrale über achsenparallel rechteckige bzw. quaderförmige Bereiche berechnen.

Das reicht für viele praktische Aufgaben nicht aus. Meist ist der Integrationsbereich  $D$  verbogen oder zumindest anders begrenzt.



Die meisten praktischen Aufgaben lassen sich auf die Integration über sogenannte Normalbereiche zurückführen.

**Definition 9.10**

1. Eine Teilmenge  $D \subset \mathbb{R}^2$  heisst ein Normalbereich bezüglich der  $x$ -Achse bzw. bezüglich der  $y$ -Achse falls es stetige Funktionen  $g, h$  bzw.  $\bar{g}, \bar{h}$  gibt mit

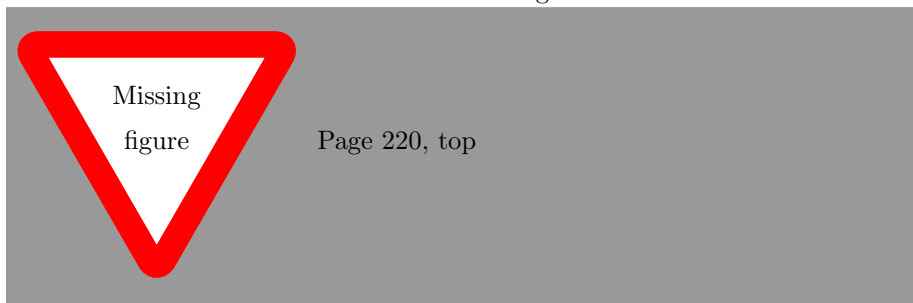
$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \text{ und } g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

bzw.

$$D = \{(x, y) \mid \bar{a} \leq x \leq \bar{b}, \text{ und } \bar{g}(x) \leq y \leq \bar{h}(x)\}$$

**Beispiel**

Kreise und Rechtecke sind Normalbereiche bzgl. beider Achsen



Über Normalbereiche lässt sich sehr bequem integrieren



Die markierte Scheibe bei  $y = \text{const.}$  mit kleiner Dicke  $dx$  besitzt näherungsweise das Volumen

$$V(x) = \left( \int_{g(x)}^{f(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

Nun braucht man  $V(x)$  nur noch über  $[a, b]$  zu integrieren

$$V = \int_a^b \left( \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

**Satz 9.11**

1. Ist  $f(x)$  stetig auf einem Normalbereich

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \text{ und } g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

so gilt

$$\int_D f(x) d\mu = \int_a^b \left( \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

2. bzw. falls

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{a} \leq x \leq \bar{b}, \text{ und } \bar{g}(x) \leq y \leq \bar{h}(x)\}$$

so gilt

$$\int_D f(x) d\mu = \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \left( \int_{\bar{g}(x)}^{\bar{h}(x)} f(x, y) dx \right) dy$$

**Beispiel 9.12**

1. Sei  $f(x, y) = x - y$





$$\begin{aligned}
 \int_D f d\mu &= \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} (x-y) dy dx \\
 &= \int_0^1 \left( xy - \frac{y^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} \right) dx \\
 &= \int_0^1 \left( x\sqrt{1-x^2} - \frac{1-x^2}{2} \right) dx \\
 &= \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx - \frac{1}{2} \int_0^1 1-x^2 dx \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx & \quad \begin{array}{l} u = 1-x^2 \\ du = -2x dx \end{array} \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{u} du = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \\
 \int_D f d\mu &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0
 \end{aligned}$$

2. Sei  $D$  das durch die Gerade  $g(x) = x + 2$  und die Parabel  $b(x) = 4 - x^2$  begrenzte Gebiet

missing content?? page 223 top



Schnittpunkte:

$$\begin{aligned}
 x + 2 &= 4 - x^2 \\
 x^2 + x - 2 &= 0 \\
 (x - y)(x + 2) &
 \end{aligned}$$

Zu Berechnung des Doppelintegrals zerlegen wir das Gebiet in Streifen parallel zur  $y$ -Achse. Für festes  $x$  variiert  $y$  von  $g(x) = x + 2$  bis  $h(x) =$

$$4 - x^2$$

$$\begin{aligned} \int_D x d\mu &= \int_{-2}^1 \left( \int_{x+2}^{4-x^2} x dy \right) dx \\ &= \int_{-1}^2 x (4 - x^2 - x + 2) dx \\ &= \int_{-1}^2 (2x - x^3 - x^2) dx \\ &= x^2 - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^2 \\ &= \left( 4 - 4 - \frac{8}{3} \right) - \left( 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \right) = -\frac{127}{36} \end{aligned}$$

3. Sei  $D$  :



$$\int_D f d\mu \underset{*}{=} \int_{-1}^1 \left( \int_{x=y^2}^1 f dx \right) dy$$

(\* = Zerlegung des Gebietes in Streifen parallel zur  $x$ -Achse)

oder mit Zerlegung in Streifen parallel zur  $y$ -Achse

$$\int_D f d\mu = \int_{x=0}^1 \left( \int_{y=-\sqrt{x}}^{y=\sqrt{x}} f(x, y) dy \right) dx$$

Manchmal muss man  $D$  zerlegen.

4. Bestimme  $\int_D x dx dy$  wobei  $D$  von  $y^2 = 4x$  und  $y = 2x - 4$  begrenzt wird.



Schnittpunkte  $P_1, P_2$ :

$$\begin{aligned} 4x &= y^2 = (2x - 4)^2 \\ \Rightarrow (2x - 4)^2 &= 4x \dots \\ \Rightarrow x &= 1 \text{ und } x = 4 \\ P_1 &= (1, -2) \quad P_2 = (4, 4) \end{aligned}$$

Zerlegung des Gebiets in Streifen parallel zur  $y$ -Achse

$$\int_D x d\mu = \int_0^1 \left( \int_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} x dy \right) dx + \int_1^4 \left( \int_{y=2x-4}^{2\sqrt{x}} x dy \right) dx = \dots = 14.4$$

Wenn wir von aussen nach  $y$  integrieren, brauchen wir keine Unterteilung

$$\begin{aligned} \int_D x d\mu &= \int_{y=-2}^{y=4} \left( \int_{x=\frac{y^2}{4}}^{\frac{y}{2}+2} x dx \right) dy \\ &= \int_{-2}^4 \left( \frac{x^2}{2} \Big|_{\frac{y^2}{4}}^{\frac{y}{2}+2} \right) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^4 \left( \left( \frac{y}{2} + 2 \right)^2 - \frac{y^4}{16} \right) dy \end{aligned}$$

### Bemerkung 9.13

1. Das Integral

$$A = \int_D 1 d\mu$$

ergibt die Fläche von  $D$ . Für einen Normalbereich bzgl. der  $x$ -Achse erhalten wir daraus die bekannte Formel

$$A = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} 1 dy dx = \int_a^b (h(x) - g(x)) dx$$



2. Interpretiert man  $\rho(x, y)$  als ortabhängige Flächendichte, so erhält man mit

$$m = \int_D \rho(x, y) d\mu$$

die Masse von  $D$

**Definition 9.14**

Eine Teilmenge  $D \subset \mathbb{R}^3$  heisst Normalbereich, falls es eine Darstellung

$$D = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b; g(x) < y < h(x); \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y) \}$$

gibt.

(Vertauscht man die Rollen von  $x, y$  und  $z$  so entstehen weitere Mengen, die auch Normalbereiche genannt werden.)

**Satz 9.15**

Sei  $D \subset \mathbb{R}^3$  ein Normalbereich mit Darstellung wie oben, und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann gilt

$$\int_D f d\mu = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z) dz dy dx$$



$z = \varphi(x, y)$  und  $z = \psi(x, y)$  stellen die “Grund-” und Deckelfläche von  $D$  dar.

Der Normalbereich  $A$  ist die senkrechte Projektion von  $D$  in die  $x-y$  Ebene. Dessen “Grund-” und “Deckelkurve” sind durch  $y = g(x)$  und  $y = h(x)$  gegeben.

**Bemerkung 9.16**

Das Integral

$$V = \int_D 1 d\mu \text{ für } D \subset \mathbb{R}^3$$

ergibt das Volumen von  $D$ . Für einen Normalbereich

$$D = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x), \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$$

erhält man

$$V = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} 1 dz dy dx = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} \psi(x, y) - \varphi(x, y) dy dx$$

## 9.2 Substitutionsregel

Häufig sind kartesische Koordinaten für die Berechnung von Integralen eher ungeeignet. z.B. wenn man Symmetrien bezüglich gewisser Punkte oder Achsen ausnutzen will.

Wir behandeln als nächstes Variablentransformationen vom Typ  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  und verallgemeinern die eindimensionale Substitutionsregel:

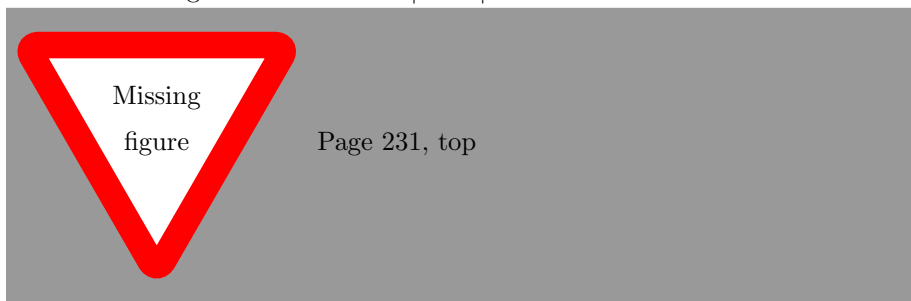
$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

mit  $f$  stetig,  $x = \varphi(t)$   $\varphi : [a, b] \rightarrow I$  stetig differenzierbar,  $I = \text{Intervall}$ . Zunächst erinnern wir uns an die lineare Algebra:

Das Bild des Einheitsquadrats/-würfels unter der linearen Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \vec{x} &\rightarrow A\vec{x} \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n} \end{aligned}$$

ist ein Parallelogramm mit Fläche  $|\det A|$



Dies bleibt wahr, wenn man zur affin-linearen Abbildung  $\Phi(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{b}$  betrachtet, es kommt ja nur eine Verschiebung dazu



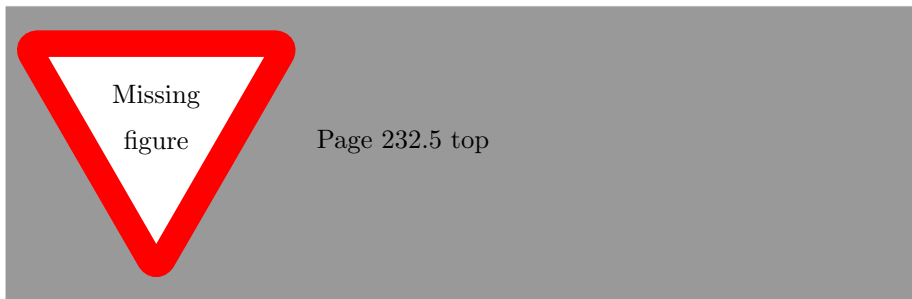
Nun betrachten wir eine differenzierbare nichtlineare Transformation  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Dann gilt, zumindest nahe eines festen Punktes  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ :

$$\Phi(\vec{x}) \approx \Phi(\vec{x}_0) + d\Phi(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0)$$

Die rechte Seite stellt gerade eine Abbildung vom Typ  $A\vec{x} + \vec{b}$  dar, wobei die Jacobi-Matrix  $d\Phi(\vec{x}_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  die Rolle von  $A$  (und  $\Phi(\vec{x}_0)$  von  $\vec{b}$ ) übernimmt. Damit ist der lokale Flächenverzerrungsfaktor von  $\Phi$  gegeben durch  $|\det d\Phi(\vec{x}_0)|$  d.h. den Betrag der Jacobi- oder Funktionaldeterminante. Die lokale Flächenverzerrung muss bei der Substitution in Integralen berücksichtigt werden und zwar in der Form

$$d\vec{x} = |\det d\Phi(\vec{y})| d\vec{y}, \text{ falls } \vec{x} = \Phi(\vec{y})$$

Geometrische Darstellung in  $\mathbb{R}^2$



Die Flächen der einander entsprechenden markierten Vierecke unterscheiden sich gerade um den Faktor  $|\det d\Phi(\vec{x}_1)|$  bzw.  $|\det d\Phi(\vec{x}_2)|$

## Substitutionsregel

### Satz 9.17

Sei  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $\Phi : U \rightarrow V$  bijektiv, stetig diff.,  $\det d\Phi(\vec{y}) \neq 0 \forall \vec{y} \in U$ , sowie  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann gilt

$$\int_V f(\vec{x}) d\mu(\vec{x}) = \int_{\Phi(U)=V} f(\Phi(\vec{y})) |\det d\phi(y)| d\mu$$

**Beispiel 9.18**

1. Berechne  $\iiint_V d\mu$ , wobei

$$\begin{array}{c} V \\ \downarrow \\ \text{Kugeloktanten} \end{array} = \left\{ (x, y, z)^t \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x, y, z \geq 0 \right\}$$

Es ist einfacher in Kugelkoordinaten zu rechnen

chopped content, page 233 middle to bottom

$$\Phi(r, \theta, \psi) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \psi \\ r \sin \theta \cos \psi \\ r \sin \psi \end{pmatrix}$$

Die Transformation  $\Phi$  ist auf ganz  $\mathbb{R}^3$  definiert und mit

$$U = [0, 1] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

gilt

$$\begin{aligned} \Phi(U) &= V \\ \det(d\Phi) &= r^2 \cos \psi \end{aligned}$$

$$\text{vol}(V) = \int_V d\mu(\vec{x}) = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos \psi d\psi d\theta dr = \frac{\pi}{2}$$

2. Berechne das Integral

$$\iint_D x dx dy \text{ wobei } D = \text{Viertelkreis}$$

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} x dy dx &= \int_0^1 \left( xu \Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} \right) dx \\ &= \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx \\ &= \int_0^1 \frac{u^{1/2}}{2} du = -\frac{1}{2} \cdot \frac{u^{3/2}}{3/2} \Big|_0^1 \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

mit  $1 - x^2 = u$ ,  $-2x dx = du$

Oder:

$$\iint_D x dx dy \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix} \quad dxdy = r dr d\theta$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^2 \cos \theta dr d\theta &= \int_0^{\pi/2} \cos \theta \left( \frac{r^3}{3} \Big|_0^1 \right) d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta = -\frac{1}{3} \sin \theta \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

3. Die Substitutionsregel in mehreren Variablen ist manchmal auch nützlich zur Berechnung von Integralen in einer Variable. Zunächst möchten wir das Integral

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

berechnen. Wir berechnen  $I$  durch Berechnung eines Flächenintegrals wie folgt. Es gilt

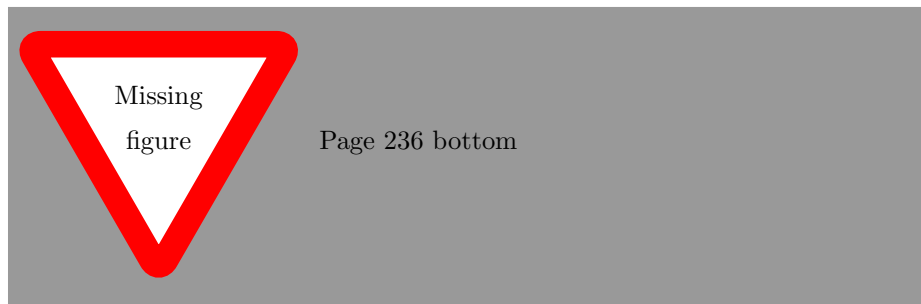
$$\begin{aligned}I^2 &= \left( \int_0^\infty e^{-x^2} dx \right)^2 \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \int_0^R e^{-x^2} dx \right) \left( \int_0^R e^{-y^2} dy \right) \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} I_R\end{aligned}$$

für

$$I_R = \int_{[0,R] \times [0,R]} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

Bezeichnet  $K_\rho$  den Viertelkreis im 1. Quadrant mit Radius  $\rho$ , so gilt

$$\int_{K_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq I_R \int_{K_{\sqrt{2}R}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$



Die Integrale über  $K_\rho$  berechnet man nun über Polarkoordinaten

$$\int_{K_\rho} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^\rho \int_0^{\pi/2} e^{-r^2} r dr d\theta = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-\rho^2})$$



und somit gelten die Abschätzungen

$$\frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2}) \leq I_R \leq \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2R^2})$$

und es gilt schliesslich

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_R = \frac{\pi}{4}$$

d.h.

$$I^2 = \lim_{R \rightarrow \infty} I_R = \frac{\pi}{4}$$

d.h.

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

### 9.3 Der Satz von Green

Wir erinnern uns: Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , ist  $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  ein  $C'$ -Vektorfeld mit Potential  $f$ , so folgt

$$\operatorname{rot}(v(x)) = \operatorname{rot}(\nabla f(x)) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

wobei

$$\operatorname{rot}(v(x, y)) = \frac{\partial v_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial v_1}{\partial y}(x, y)$$

so ist

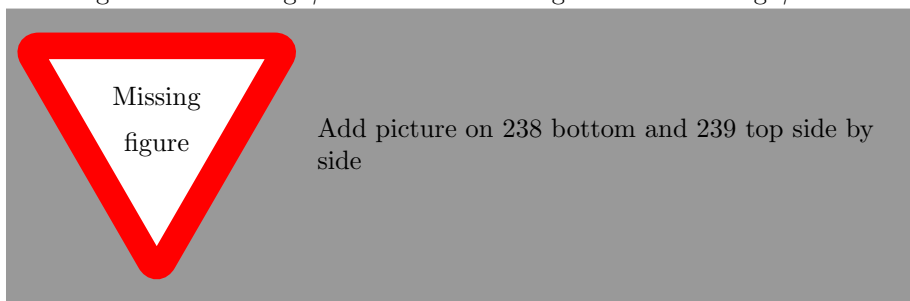
$$\operatorname{rot} v = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0$$

in zwei Dimensionen eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Potentials.

Die Bedingung  $\operatorname{rot}(v) = 0$  ist sogar eine hinreichende Bedingung, falls das Gebiet  $\Omega$  einfach zusammenhängend ist. In diesem Fall

$$\oint_{\gamma} v = \int_{\gamma} \nabla f ds = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = 0$$

für alle geschlossene Weg  $\gamma$  und für einen nichtgeschlossenen Weg  $\gamma$



$$\int_{\gamma} v = \int_{\gamma} \nabla f ds = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))$$

d.h. falls das Vektorfeld ein Gradientenfeld ist, ist das Integral  $\int_{\gamma} v$  eine Funktion der Endpunkte.

Anders gesagt, es gibt Fälle wo ein Wegintegral (d.h. ein Integral auf einem eindimensionalen Objekt mithilfe einer 0-dimensionalen Menge) berechnet werden kann.

### Bemerkung

Auch für Funktionen einer Variable: Falls  $F' = f$  ist, dann gilt

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Hauptsatz der Integralrechnung einer Variable

### Frage

Gibt es auch Fälle wo ein zweidimensionales Integral mithilfe einer eindimensionalen Menge berechnet werden kann?

Die Antwort ist genau der Inhalt des Satzes von Green

### Satz 9.19 (Green)

Sei  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  ein Gebiet, dessen Rand  $\partial\Omega$  eine stückweise  $C'$  Parameterdarstellung hat. Sei  $U$  eine offene Menge mit  $\Omega \subset U$  und sei

$$f = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)$$

wobei  $P, Q \in C'(U)$ . Dann gilt

$$\iint_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\mu = \int_{\partial\Omega} P dx + Q dy$$

wobei  $\partial\Omega$  so parametrisiert wird, dass  $\Omega$  zur Linken des Randes liegt.

Anders gesagt:

Sei  $V = (P, Q)$  ein  $C'$  Vektorfeld auf dem Gebiet  $U$ . Sei  $\Omega \subset U$  ein Gebiet, dessen Rand  $\partial\Omega$  eine stückweise  $C'$  Parameterdarstellung hat. Die Parametrisierung von  $\Omega$  sei so gewählt dass  $\Omega$  stets links zur Durchlaufrichtung liegt. Dann gilt

$$\int_{\partial\Omega} V ds = \int_{\partial\Omega} P dx + Q dy = \iint_{\Omega} \operatorname{rot}(V) d\mu$$

Bevor wir die Idee des Beweises geben, geben wir einige Beispiele und Anwendungen

**Beispiel 9.20**

1. Wir betrachten das Vektorfeld

$$F(x, y) = (y + 3x, y - 2x)$$

und wir möchten dieses Kraftfeldes entlang der im Gegenuhzeigersinn durchlaufenen Ellipse  $\gamma : 4x^2 + y^2 = 4$  bestimmen. Die Arbeit ist

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F d\vec{s} &= \int_{\gamma} P dx + Q dy \\ &= \int_{\gamma} (y + 3x) dx + (2y - x) dy \\ \text{Green} \rightarrow &= \iint_{\Omega} \frac{\partial (2y - x)}{\partial x} - \frac{\partial (y + 3x)}{\partial y} \\ &= \iint_{\Omega} -1 - 1 d\mu = -2 \iint_{\Omega} d\mu \\ &= -2 \cdot (\text{Flächeninhalt von Ellipse } 4x^2 + y^2 = 4) \end{aligned}$$

Can't understand the result, page 242 top



2. Berechne das Wegintegral

$$\int_{\partial\Omega} (5 - xy - y^2) dx - (2xy - x^2) dy$$

wobei  $\Omega$  das Quadrat mit Eckpunkten  $(0, 0), (0, 1), (1, 1), (1, 0)$  im Gegen-

uhrzeigersinn ist

$$\begin{aligned}
 & \int_{\partial A} (5 - xy - y^2) dx - (2xy - x^2) dy \\
 &= \iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (2xy - x^2) - \frac{\partial}{\partial y} (5 - xy - y^2) \right] d\mu \\
 &= \iint_{\Omega} (2y - 2x) - (-x - 2y) d\mu \\
 &= 3 \iint_{\Omega} d\mu = \int_0^1 \int_0^1 x dx dy = \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

3. Mittels des Satzes von Green können wir den Flächeninhalt eines Gebiets mithilfe eines Wegintegrals berechnen. Und zwar

$$\text{Flächeninhalt}(\Omega) = \iint_{\Omega} d\mu = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\mu$$

wobei  $P$  und  $Q$  Funktionen mit  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$  sind. Zum Beispiel können wir

$$\begin{aligned}
 Q(x, y) &= \frac{1}{2}x \\
 P(x, y) &= -\frac{1}{2}x
 \end{aligned}$$

nehmen. Daraus folgt, dass

$$F(\Omega) = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} -y dx + x dy$$

Als ein Beispiel können wir verifizieren dass der Flächeninhalt des Kreises  $x^2 + y^2 \leq 4$  gleich  $4\pi$  ist.

Betrachte die Parameterdarstellung  $\gamma(\theta) = (2 \cos \theta, 2 \sin \theta)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$  des Randes  $\partial\Omega$

$$\begin{aligned}
 F(\Omega) &= \iint_{\Omega} d\mu = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} -y dx + x dy \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (-2 \sin \theta) (-2 \sin \theta) + (2 \cos \theta) (2 \cos \theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 4 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) d\theta = 2 \cdot 2\pi = 4\pi
 \end{aligned}$$