Kapitel 3

Folgen und Reihen (Der Limes Begriff)

3.1 Folgen, allgemeines

Definition 3.1
Eine Folge reeler zahlen ist eine Abbildung $a : \mathbb{N}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ wobei wir das Bild con $n \geq 1$ mit a_n (statt $a(n)$) bezeichen.

Eine Folge wird dann meistens mit $(a_n)_{n\geq 1}$, daher mit der geordneten Bildmenge bezeichnet.

Folgen können auf verschiedene Arten gegeben sein.

Beispiel 3.2

1. $a_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$
2. $a_1 = 0.9$, $a_2 = 0.99$, $\ldots$, $a_n = 0.\underbrace{99\ldots9}_{n-\text{mal}}$
3. $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \geq 1$
4. (Rekursiv) Sei $d > 0$ eine reelle Zahl $a_1, \ldots, a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{d}{a_n}\right), n \geq 1$
   z.B. $d = 2, a_1 = 1, a_2 = \frac{3}{2}, a_3 = \frac{17}{12}, a_4 = \ldots$
5. Fibonacci Zahlen. $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \forall n \geq 2$

Definition 3.3
Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ heisst beschränkt falls die Teilmenge $\{a_n : n \geq 1\} \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt ist. d.h. Es gibt $c \in \mathbb{R}(c \geq 0)$ so dass $|a_n| \leq c, \forall n \geq 1$

3.2 Grenzwert oder Limes eine Folge. Ein zentraler Begriff

Definition 3.4
Eine Folge $(a_n) \geq 1$ konvergiert gegen a wann für jedes $\varepsilon > 0$ ein Index $N(\varepsilon) \geq 1$ gilt so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon, \forall n > N(\varepsilon)$$

Definition 3.4 (Version 2)
Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$ falls für jedes $\varepsilon > 0$ die Menge der Indizen $n \geq 1$ für welcher $a_n \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ endlich ist.

$$(\forall \varepsilon > 0, \#\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\} < \infty)$$

Equivalenz beider Definitionen

Is this supposed to be a title?

(2) $\Rightarrow$ (1)
Sei für $\varepsilon > 0$

$$M(\varepsilon) := \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\} = \{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - a| \geq \varepsilon\}$$

Da $M(\varepsilon)$ endlich ist, ist es nach oben beschränkt. Es gibt also $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ so dass $\forall n \in M(\varepsilon)$, $n \leq N(\varepsilon) - 1$. Insbesondere gilt $\forall n \geq N(\varepsilon)$, $n \notin M(\varepsilon)$ und daher $|a_n - a| < \varepsilon$.

(1) $\Rightarrow$ (2)

$$M(\varepsilon) = \{n : |a_n - a| \geq \varepsilon\} \subset [0, N(\varepsilon) - 1]$$

Also endlich.

Falls die Eigenschaften in Definition 3.4 zutrifft, dann schreibt man

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \text{ oder } a_n \underset{n\to\infty}{\to} a$$

Die Zahl a nennt sich Grenzwert oder Limes der Folge $(a_n)_{n\geq 1}$. Eine Folge heisst konvergent falls sie einen Limes besitzt, andernfalls heisst sie divergent.

Bemerkung 3.5

1. Falls $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergent ist der Limes eindeutig bestimmt

   Beweis

   Seien a und b Grenzwerte von $(a_n)_{n\geq 1}$. Sei $\varepsilon = \left|\frac{b-a}{3}\right| > 0$, dann gibt es N_1, N_2 so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \forall n > N_1$$

$$|a_n - b| < \varepsilon \qquad \forall n > N_2$$

Also$\forall n \geq \max\{N_1, N_2\}$

$$(a-b) \cong |(a-a_n) + (a_n - b)| < 2\varepsilon = \frac{2}{3}|b-a|$$

Binomischen Lehrsatz

Für beliebige Zahlen a, b und $n \in \mathbb{N}$ ist

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) a^{n-k} b^k$$

2. Falls $(a_n)_{n \geq 1}$ konvergent ist, $\{a_n : n \geq 1\}$ beschränkt: Sei $\varepsilon = 1$, $\lim a_n = a$ und N_0 mit

$$|a_n - a| \leq 1 \qquad \forall n > N_0$$

Dann ist $\forall n \; |a_n| \geq \max\{|a|+1, |a_j|, 1 \leq j \leq N_0\}$

Beispiel 3.6

1. Sei $a_n = \frac{1}{n}, n \geq 1$. Dann gilt $\lim a_n = 0$

   - Sei $\varepsilon > 0$. Dann $\frac{1}{\varepsilon} > 0$. Sei $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \geq 1$ mit $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ (Archimedische Eigenschaft, Satz 2.13)

   Dann gilt für alle $n \geq n_0$, $\frac{1}{\varepsilon} < n_0 \leq n \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon, \forall n \geq n_0$

2. Sei $0 < q < 1$ und $a_n := q^n$, $n1$. Dann gilt $\lim a_n = 0$ (a_n konvergiert gegen 0) Cannot read, page 54 top

   Beweis

   Zu beweisen

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 = N_0(\varepsilon) \in N$$

Should it be $\in \mathbb{R}$??

$$\forall n \geq N_0 : q^n < \varepsilon$$

Die Idee ist zu zeigen dass $\frac{1}{q^n}$ sehr Gross wird und deswegen q^n sehr klein wird. Setzen wir $\frac{1}{q} = 1 + \delta$ mit $\delta > 0$ $\left(1 < 1 \Rightarrow \frac{1}{q} > 1\right)$

$$\frac{1}{q^n} = \left(\frac{1}{q}\right)^n = (1+\delta)^n = 1 + n\delta + \left(\begin{array}{c} n \\ 2 \end{array} \right) \delta^2 + \cdots + \delta^n \geq 1 + n\delta > n\delta, \forall n \in \mathbb{N}$$

also

$$0 < q^n < \frac{1}{n\delta}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Sei jetzt $\varepsilon > 0$, wähle $N_0 = N_0(\varepsilon)$ mit $\frac{1}{\varepsilon\delta} < N_0 \Rightarrow \frac{1}{N_0 \delta} < \varepsilon$

$$\forall n > N_0 \qquad 0 < q^n \leq \frac{1}{n\delta} < \frac{1}{N_0\delta} < \varepsilon$$

3. $\sqrt[n]{n}$, $\lim a_n = 1$. Klar: $n \geq 1$ also $\sqrt[n]{n} \geq 1$
   Gegeben ein $\varepsilon > 0$, wollen wir n so gross wählen, dass

$$\sqrt[n]{n} - 1 < \varepsilon$$

   das heisst, $n < (1+\varepsilon)^n$. Wir entwickeln

$$(1+\varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \binom{n}{2}\varepsilon^2 + \cdots + \varepsilon^n$$

can't read last element of the expansion

   ε ist klein aber fixiert.

   Für n sehr gross wird $1 + n\varepsilon$ nie grösser als n sein. Wir versuchen unsere Glück mit

$$\binom{n}{2}\varepsilon^2 \text{ term}$$

$$\binom{n}{2}\varepsilon^2 = \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon$$

   Wir benutzen also $(1+\varepsilon)^n \geq \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2$. Wir wollen n so wählen dass

$$\frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 > n$$

   d.h. $n - 1 > \frac{2}{\varepsilon^2}$ oder $n > 1 + \frac{2}{\varepsilon^2}$

   Setzen wir $N_0 := \left(1 + \frac{2}{\varepsilon^2}\right) + 1$. Dann gilt für $\forall n > N_0$

$$(1+\varepsilon)^n > n \geq 1$$

$$\Rightarrow 1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + \varepsilon$$

$$\Rightarrow -\varepsilon < 0 \leq \sqrt[n]{n} - 1 \leq \varepsilon \Rightarrow \left|\sqrt[n]{n} - 1\right| < \varepsilon, \forall n > N_0$$

4. Nicht alle Folgen sind konvergent. Es gibt zwei verschiedene Verhältnissen einer divergenten Folge

$$a_n = (-1)^n \Rightarrow \{1, -1, \ldots\} \text{ beschränkt aber nicht konvergent}$$

5. $a_n = n$ unbeschränkt, divergent.

Beispiel 3.7

Seien $p \in \mathbb{N}$, $0 < q < 1$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} n^p q^n = 0$. Dass heisst Exponentialfunktionen wächst schneller als jede Potenz (Wann x genügend Gross ist, $a^x > x^b$)

Beweis

Der Trick ist folgender

$$n^p q^n = \left(n^{\frac{p}{n}} \cdot q\right)^n = \left(\left(\sqrt[n]{n}\right)^p \left(q^{\frac{1}{p}}\right)^p\right)^n$$

Wir werden Beispiel 3.6 (2.),(3.) benutzen.
(d.h. $\lim \sqrt[n]{n} = 1$ $\qquad \lim r^n = 0, 0 < r < 1$)

Da $\lim \sqrt[n]{n} = 1$, $\forall \eta > 0$, $\exists N_0(\eta)$

$$\sqrt[n]{n} < 1 + \eta, n > N_0(\eta)$$

Wir wählen $\eta > 0$ so dass $q^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{(1+\eta)^2}$. Dann

$$\sqrt[n]{n} \cdot q^{\frac{1}{p}} \leq \frac{(1+\eta)}{(1+\eta)^2} = \frac{1}{1+\eta} \qquad \forall n > N_0(\eta)$$

Wobei

$$\forall n > N_0(\eta)$$

$$a_n = \left(\sqrt[n]{n} q^{\frac{1}{p}}\right)^{pn} < r^n$$

mit

$$r := \left(\frac{1}{1+\eta}\right)^p, r < 1$$

Sei jetzt $\varepsilon > 0$. Da $\lim r^n = 0$, $\exists N_1 = N_1(\varepsilon)$, $\forall n > N_1(\varepsilon)$, $r^n < \varepsilon$

Für $n > \max\{N_0(\eta), N_1(\varepsilon)\}$, $a_n < r^n < \varepsilon \Rightarrow \lim a_n = \lim n^p q^n = 0$

3.3 Konvergenzkriterien

Mit konvergenten Folgen kann man wie folgender Satz zeigt. Can't read, page 59 top

Satz 3.8

Seien $(a_n)_{n\geq 1}$ und $(b_n)_{n\geq 1}$ konvergente Folgen mit

$$\lim a_n = a, \ \lim b_n = b$$

i) Die folge $(a_n + b_n)_{n\geq 1}$ konvergiert und $\lim (a_n + b_n) = a + b$

ii) Die folge $(a_n \cdot b_n)_{n\geq 1}$ konvergiert und $\lim (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

iii) Falls $b \neq 0$ und $b_n \neq 0$ $\forall n \geq 1$ gilt $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

iv) Falls $a_n \leq b_n$ folgt $a \leq b$

Beweis

Sei $\varepsilon > 0$, es gibt $N_1(\varepsilon)$, $N_2(\varepsilon)$ so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon, \forall n > N_1(\varepsilon)$$
$$|b_n - b| < \varepsilon, \forall n > N_2(\varepsilon)$$

i) Für $n \geq \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$ gilt

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$$

Da dies für alle $\varepsilon > 0 < 2\varepsilon$ gilt, folgt auch

$$\forall n > \max\left\{N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), N_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right\} := N(\varepsilon)$$

gilt

$$|a_n + b_n - (a + b)| < \varepsilon$$

ii) Sei C eine Schränke für $\{|b_n| : n \geq 1\}$ (Bemerkung 3.5: Falls $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergent ist, $\{b_n : n \geq 1\}$ beschränkt). Für $N_1(\varepsilon)$, $N_2(\varepsilon)$ wie oben folgt $\forall n \geq \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \\ &= |b_n (a_n - a) + a (b_n - b)| \\ &\leq \varepsilon |b_n| + |a| \varepsilon \leq \varepsilon (C + |a|) \end{aligned}$$

Also folgt

$$\forall n \geq N(\varepsilon) := \max\left(N_1\left(\frac{\varepsilon}{C + |a|}\right), N_2\left(\frac{\varepsilon}{|C| + a}\right)\right)$$

dass $|a_n b_n - ab| < \varepsilon$

iii) Wegen (ii) genügt es, dem Fall $a = a_n = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ zu betrachten

$$|b_n| = |b_n - b + b| \geq |b| - |b_n - b| \geq |b| - \varepsilon$$

Sei $0 < \varepsilon < \frac{|b|}{2}$, dann gilt $|b_n| > \frac{|b|}{2}$. Es folgt

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b_n - b}{b_n b}\right| < \frac{2}{|b|^2} |b_n - b| \leq \frac{2}{|b|^2}\varepsilon \qquad \forall n > n_0(\varepsilon)$$

Also folgt $\forall n > N(\varepsilon) := n_0\left(\frac{\varepsilon |b|^2}{2}\right)$ dass $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| < \varepsilon$

iv) (Indirekter Beweis) Falls $a > b$, $a - b > 0$. Sei

$$\begin{aligned} \varepsilon &:= \frac{a-b}{2} > 0 \\ 2\varepsilon &= b - a \\ \Rightarrow b - \varepsilon &= a + \varepsilon \\ b_n \to b \Rightarrow & b_n < b + \varepsilon \qquad \forall n > n_0(\varepsilon) \\ a_n \to a \Rightarrow & -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < a_n \qquad \forall n > TODO \end{aligned}$$

Aber denn die Ungleichung

$$b_n < b + \varepsilon = a - \varepsilon < a_n \qquad \forall n \geq n_0$$

im Widerspruch zur Annahme $a_n \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

■

Es ist nicht unbedingt nötig, den ganzen Beweis zu führen um zu wissen dass eine Folge konvergent ist. Es gibt Folgen deren Konvergenz, durch eine Strukturelle Eigenschaft gesichert ist ohne dass man den Limes apriori kennen muss.

Folgender Satz illustriert dieses, es benützt die Vollständigkeitsaxiom

Satz 3.9 (Monotone Konvergenz)

1. Sei $(a_n)_{n>1}$ eine monoton Wachsende beschränkte Folge. Dann ist sie konvergent und es gilt zudem

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \geq 1\}$$

2. Sei $(b_n)_{n\geq 1}$ eine Monotone fallende beschränkte Folge. Dann ist es konvergent und es gilt zudem

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \inf\{b_n \mid n \geq 1\}$$

Definition 3.10

- **Monotone wachsend**:

$$a_n \leq a_{n+1} \qquad \forall n \geq 1$$

- **Monotone fallend**:

$$b_{n+1} \leq b_n \qquad \forall n \geq 1$$

Number might be wrong, page 63 middle

Beweis 3.9

i) $a_1 \leq a_2 \leq \ldots$ und $\{a_n : n \geq 1\}$ nach oben beschränkt $\Rightarrow \exists C$ mit $a_n \leq C$ $\forall n \geq 1$. Sei nach Satz 2.9 (Jede nach oben beschränkte Teilmenge $A \subset R$ besitzt ein kleinste obere Schränke) $a := \sup\{a_n : n \geq 1\}$ die Kleinste Obere Schranke.

Wir behaupten dass: $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Sei $\varepsilon > 0$, dann ist $a - \varepsilon$ keine Obere Schranke und deswegen gibt es $n(\varepsilon) \geq 1$ mit $a_{n(\varepsilon)} > a - c$. Aus monotonität folgt

$$a_n > a_{n(\varepsilon)} > a - c \qquad \forall n > n(\varepsilon)$$

und folgt somit

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \forall n > n(\varepsilon)$$

ii) Ähnlich.

■

Sätze 3.8, 3.9 haben vielfähige Anwendungen die wir durch einige Beispiele illustrieren.

Beispiel 3.10

1. Sei

$$a_n = \frac{3n^6 + 11n^4 - 1}{2n^6 - 7n^3 + n} = \frac{3 + \frac{11}{n^2} - \frac{1}{n^6}}{2 - \frac{7}{n^3} + \frac{1}{n^5}} \to \frac{3}{2}$$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ existiert.

   Wir werden beweisen dass a_n monotone wachsend und beschränkt ist. Der limes wird mit "e" beteichnet, wobei $e = 2.71828\ldots$ (Eulerische Konstant)

   Beweis

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

   Wir möchten den Binomischen Lehrsatz anwenden

$$\begin{aligned}
a_n =& \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\
=& 1 + n\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{n}\right)^n \\
=& 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \\
& + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \ldots
\end{aligned}$$

   Nun ist aber

$$\frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) < \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)$$

usw

   deswegen folgt

$$2 < a_n < a_{n+1} \qquad \forall n \geq 1$$

   d.h. a_n ist monoton wachsend.

Die Produkte der Form

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)<1$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow a_n &< 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots\\ &< 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}\dots=3\end{aligned}$$

d.h. a_n ist beschränkt. Monotone Konvergenz $\Rightarrow (a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert

■

3. Rekursive Definitionen
Sei $\underset{c\in\mathbb{R}}{c>1}$, $a_1=c$, $a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{c}{a_n}\right)$, $n\geq 1$. Dann ist $\lim a_n=\sqrt{c}$

Beweis

Dies ist ein wichtiges Beispiel. Hier wird vorgeführt wie man aus der apriori Existenz des Limes dessen Wert schliessen kann.

1. Schnitt:

$$a_{n+1}^2\geq c\qquad \forall n\geq 1$$

a_n ist (nach unten) beschränkt.

$$\begin{aligned}a_{n+1}=&\frac{c+a_n^2}{2an}=a_n+\frac{c-a_n^2}{2a_n}\\ \Rightarrow a_{n+1}^2=&a_n^2+(c-a_n^2)+\left(\frac{c-a_n^2}{2a_n}\right)^2\\ =&c+\left(\frac{c-a_n^2}{2a_n}\right)^2\geq c\ \ (*)\end{aligned}$$

2. Schnitt:

$$a_{n+1}\leq a_n$$

d.h. a_n ist monoton fallend.

$$\begin{aligned}&(*): a_{n+1}^2\geq c\\ &\Rightarrow \frac{c}{a_{n+1}}\leq a_{n+1}\qquad \forall n\in\mathbb{N},\text{ insbesondere}\\ &\quad \frac{c}{a_n}\leq a_n\\ &\Rightarrow a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{c}{a_n}\right)\leq\frac{1}{2}(a_n+a_n)=a_n\end{aligned}$$

Monotone Konvergenz Satz $\Rightarrow (a_n)$ konvergiert.

Sei $a=\lim a_n$. Da $a_n^2\geq c$, $\forall n\geq 2$ folgt $a^2\geq c$. Aus $a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{c}{a_n}\right)$ und Satz 3.8 folgt $a=\frac{1}{2}\left(a+\frac{c}{a}\right)\Rightarrow\frac{c}{a}=a\Rightarrow c=a^2\Rightarrow a=\sqrt{c}$. Schliesslich $\lim a_n=\sqrt{c}$

■

3.4 Teilfolgen, Häufungspunkte

Definition 3.11
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine folge und sei $l(n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine strict monotone wachsend Folge von positiven Natürliche Zahlen. Die Verkettung von $l(n)$ und (a_n) heisst eine Teilfolge $\left(a_{l(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$n \to l(n) \to a_{l(n)}$$

Die Idee ist sehr einfach: Wir haben die Folge

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \ldots, a_j, \ldots, a_{j+1}, \ldots$$

und wir definieren eine neue Folge mit einigen Elementen von (a_n)

$$a_1, a_3, a_6, a_{j+1}, \ldots$$

Beispiel

1.

$$\begin{aligned} a_n &= \{1, 0, -1, 1, 0, -1, 1, 0, -1, \ldots\} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad n = 3k+2 \\ 1 & \text{falls} \quad n = 3k+1 \\ -1 & \text{falls} \quad n = 3k+3 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n &\to 3n+2 \to a_{3n+2} = (0, 0, \ldots) \\ n &\to 3n+1 \to a_{3n+1} = (1, 1, \ldots) \\ n &\to 3n \to a_{3n} = (-1, -1, \ldots) \end{aligned}$$

2. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n = n \Rightarrow (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Teilfolge $n \to 2^n \to a_{2^n}$
3. $a_n = (-1)^n$, $(a_{2n})_{n\geq 1}$ (a_{2n+1}) sind Teilfolgen

Bemerkung 3.12

Im Definition 3.11 ist $l\left(\mathbb{N}\backslash\{0\}\right)$ eine unendliche Teilmenge von $\mathbb{N}\backslash\{0\}$. Umgekehrt, falls $\wedge \subset \mathbb{N}\backslash\{0\}$ eine unendliche Teilmenge ist dann enthält man eine Teilfolge von $(a_n)_{n\geq 1}$ mittels einer Monoton Abzählung $l : \mathbb{N}\backslash\{0\} \to \wedge$ von $\wedge$ $(l(n) := \min\left(\wedge\backslash\{l(1), l(2), \ldots, l(n-1)\}\right))$

Definition 3.13
$a \in \mathbb{R}$ ist Häufungspunkt von $(a_n)_{n\geq 1}$ falls es eine gegen a konvergierende Teilfolge $\left(a_{l(n)}\right)_{n\geq 1}$ gibt.

Beispiel 3.14

Looks like there is no number 2, removed list in its entirety, page 71 middle to top

$a_n = (-1)^n$ hat +1 und -1 als Häufungspunkte. Wir werden jetzt die Menge der Häufungspunkte einer Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ näher studieren und Insbesondere zeigen dass sie für beschränkte Folgen nicht leer ist.

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ beschränkt und C eine Obere Schranke für $\{|a_n| : n \geq 1\}$. Für jedes $k \geq 1$ ist die Menge

$$A_k := \{a_n : n \geq k\} = \{a_k, a_{k+1}, \dots\}$$

beschränkt und zudem gilt

$$A_{k+1} \subset a_k, \ \forall k \geq 1$$

Sei also

- $m_k := \inf A_k \nearrow (\inf A_k < \inf A_{k+1})$
- $M_k := \sup A_k \searrow (\sup A_{k+1} < \sup A_k)$

Dann folgt aus Korollar 2.11

i) $(m_k)_{k\geq 1}$ monotone wachsend

ii) $(M_k)_{k\geq 1}$ monotone fallend

Nach Monotone Konvergenz Satz (Satz 3.9, s.) konvergieren beide Folgen add reference!!

Definition 3.15

Wir definieren

- $\lim_{n\to\infty} \inf a_n := \lim_{k\to\infty} m_k$ limes inferior
- $\lim_{n\to\infty} \sup a_n := \lim_{k\to\infty} M_k$ limes superior

Offensichtlich gilt $\lim\inf a_n \geq \lim\sup a_n$

Interessant ist nun:

Lemma 3.16

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ beschränkt. Dann sind $\lim\sup a_n$ und $\lim\inf a_n$ Häufungspunkte von $(a_n)_{n\geq 1}$

Beweis

Sei $\lim_{n\to\infty} \sup a_n = a$. Wir möchten zeigen dass, eine Teilfolge $a_{l(n)}$ gibt mit $\lim a_{l(n)} = a$. Wir definieren $l : \mathbb{N}\backslash\{0\} \to \mathbb{N}\backslash\{0\}$ Induktive wie folgt:

$l(1) \geq 1$ sei so gewählt, dass $M_1 - 1 \leq a_{l(1)} \leq M_1 = \sup A_1 = \{a_1, a_2, \dots\}$

Korollar 2.11
Sei $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$

4. Falls E ein sup besitzt $\Rightarrow \exists x \in E$ mit $x > \sup E - h$

Sei $E = \{a_1, \dots\} = A_1$, $h = 1$

Sei $l(2) \in \{k \in \mathbb{N} \mid k > l(1) + 1\}$ so dass

$$M_{l(1)+1} \leq a_{l(2)} \leq M_{l(1)+1}$$

(Sei $E = \{a_{l(1)+1}, a_{l(1)+2}, \dots\}$, $h = \frac{1}{2}$). Falls $l(1), l(2), \dots, l(n-1)$ definiert ist, wählen wir $l(n)$ so dass:

$$l(n) \in \{k \in \mathbb{N} : k > l(n-1) + 1\}$$

und

$$(*) \qquad M_{l(n-1)+1} - \frac{1}{n} \leq a_{l(n)} \leq M_{l(n-1)+1}$$

$$\left|M_{l(n-1)+1} - a_{l(n)}\right| < \frac{1}{n}$$

Dann ist $l(n)$ strikt monotone steigend und

$$\left|a_{l(n)} - M_{l(n-1)+1}\right| \leq \frac{1}{n}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ und $n(\varepsilon)$ so gewählt dass $\frac{1}{n(\varepsilon)} < \frac{\varepsilon}{2}$ und

$$a - \frac{\varepsilon}{2} \leq M_{l(n(\varepsilon)-1)+1} \leq a + \frac{\varepsilon}{2}$$

($a = \lim M_k$: d.h. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon)$ so dass $|M_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n > N(\varepsilon)$). Dann gilt $\forall n > n(\varepsilon) : \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$

$$(**) \qquad \left|M_{l(n-1)+1} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

und

$$(*) \qquad \left|M_{l(n-1)+1} - a_{l(n)}\right| < \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$(*)$ und $(**)$ $\Rightarrow \left|a_{l(n)} - a\right| < \varepsilon$ d.h. $\lim a_{l(n)} = a$.

■

Wir schliessen aus Lemma 3.16 den folgenden wichtiger Satz

Satz 3.18 (Bolzano - Weierstrass)

Jede Beschränkte Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

MISSING CONTENT: Can't really understand the layout of this part, page 76 middle

Folgende Aussagen sind direkte Konsequenz

Satz 3.19

Sei $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ beschränkt. $a_- := \liminf a_n$, $a_+ := \limsup a_n$

1. $\forall \varepsilon > 0$ gibt es nur endlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n \notin (a_- - \varepsilon, a_+ + \varepsilon)$
2. a_+ ist der grösste, a_- der kleinste Häufungspunkt
3. Folgende Aussagen sind äquivalent
   (i) $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert
   (ii) Jede Teilfolge von $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert
   (iii) $a_- = a_+$

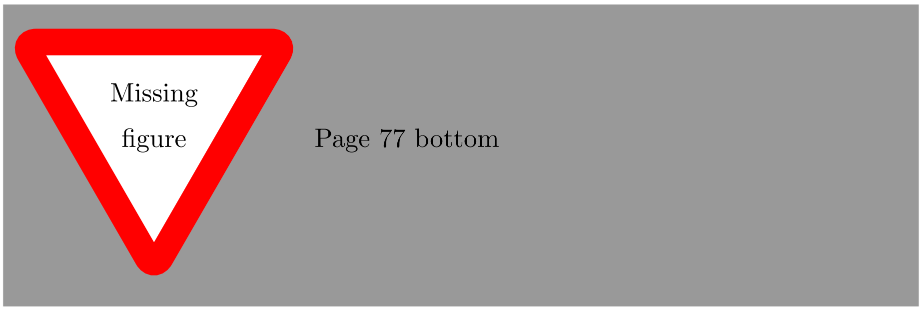
Bemerkung

(a_n) konvergiert gegen $a \Rightarrow$ jede Teilfolge konvergiert gegen a. Das ist ein sehr nutzliches Kriterion für Konvergenz

Beispiel 3.20

Wir definieren rekursiv

$$g_1 = 1, g_{n+1} = 1 + \frac{1}{g_n}, n \geq 1$$
$$g_1 = 1, g_2 = 2, g_3 = \frac{3}{2}, g_4 = \frac{5}{3}$$



So die Folge ist nicht monoton. Offensichtlich gilt $g_n \geq 1$ und damit auch $g_n \leq 2$ d.h. g_n ist beschränkt.

Aber Wir werden werden zwei Monoton Teilfolgen finden

$$\begin{aligned} g_{n+2} &= 1 + \frac{1}{g_{n+1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{g_{n+1}}} \\ &= \frac{2 + \frac{1}{g_{n+1}}}{1 + \frac{1}{g_{n+1}}} = \frac{2g_{n+1}}{g_{n+1}} = 2 - \frac{1}{g_n + 1} \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$g_{n+2} - g_n = \frac{1}{g_{n-2} + 1} - \frac{1}{g_n + 1} = \frac{g_n - g_n - 2}{(g_{n-2} + 1)(g_n + 1)}$$

Nun ist: $g_3 - g_1 = \frac{3}{2} - 1 > 0$ und somit ist $g_{2k+3} - g_{2k+1} > 0$, $\forall k$ d.h. die Teilfolge $(g_{2k+1})_{k\geq 0}$ ist monotone Wachsend.

$g_4 - g_2 = \frac{5}{3} - 2 < 0$ woraus folgt $(g_{2k})_{k\geq 1}$ monotone fallend ist. Seien also

$$a := \lim_k g_{2k+1}$$
$$b := \lim_k g_{2k}$$

Dann

$$\begin{aligned} a := \lim_k g_{2k+1} &= \lim \left(1 + \frac{1}{g_{2k}}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{b} \Rightarrow ab = b + 1 \end{aligned}$$

und Analog $b = 1 + \frac{1}{a} \Rightarrow ab = 1 + a$ woraus $ab = 1 + a = b + 1$ und somit $a = b$. Folgt mit $g := a = b$ $g = +\frac{1}{g} \Rightarrow g = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$g_+ := \limsup g_n$ und $g_- := \liminf g_n$ sind Häufungspunkte, d.h. es gibt Teilfolgen a_n und b_n mit $\lim a_n = g_+$, $\lim b_n = g_-$. Da jede Teilfolge von (g_n) entweder unendlich viele gerade oder ungerade Indizen enthält folgt

$$g = g_+ = g_-$$

Put in big brackets (including math)

Jede Teilfolge hat (ent.) unendliche viele Elemente von (g_{2n}) (oder (g_{2n+1}))

$$\left.\begin{array}{l} g_+ = \lim a_n = \lim g_{2n} = g \\ g_+ = \lim b_n = \lim g_{2n} = g \end{array}\right\} g_+ = g_- \Rightarrow \lim g_n = g = g_- = g_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

3.5 Cauchy Kriterium

Chapter numbering is, according to the handwritten notes, wrong. WHich one is the correct one??

Frage

Wie sieht man allgemein ob eine Folge konvergiert? Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert mit $\lim a_n = a$. Also gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$, $n(\varepsilon)$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ $\forall n \geq n(\varepsilon)$. Daraus folgt, dass $\forall n, m \geq n(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= |a_n - a + a - a_m| \\ &\leq |a_n - a| + |a_m - a| < 2\varepsilon \end{aligned}$$

Definition 3.21
$(a_n)_{n\geq 1}$ ist eine Cauchy Folge falls für $\varepsilon > 0$ ein $n(\varepsilon) \geq 1$ gibt so dass $|a_n - a_m| < \varepsilon$, $\forall n, m \geq n(\varepsilon)$

Wir haben gesehen dass

$$(a_n) \text{ konvergiert } \Rightarrow (a_n) \text{ Cauchy}$$

Wir haben auch

Satz 3.22 (Cauchy Kriterium)

Sei $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ eine folge. Die folgende Aussagen sind äquivalent

1. (a_n) ist eine Cauchy Folge
2. (a_n) ist konvergent

Beweis

(2) $\Rightarrow$ (1) ✓

(1) $\Rightarrow$ (2) Wegen das Satzes von Bolzano - Weierstrass besitzt jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge

Strategie:

I) (a_n) beschränkt

II) $\exists \left(a_{l(n)}\right) \subset (a_n)$ Konvergente Teilfolge

Sei $\lim a_{l(n)} = a$, (a_n) Cauchy.

$$\begin{aligned} |a_n - a| &= \left|a_n - a_{l(n)} + a_{l(n)} - a\right| \\ &\leq \left|a_n - a_{l(n)}\right| + \left|a_{l(n)} - a\right| < 2\varepsilon \end{aligned}$$

I) (a_n) ist beschränkt: Sei $\varepsilon = 1$. Sei $n(1)$ so dass $|a_n - a_m| < 1$, $\forall n, m \geq n(1)$, insbesondere $|a_n - a_m| < 1$. Woraus $|a_n| < a_{n(1)} + 1$, $\forall n \geq n(1)$ folgt und somit $\forall n \geq 1$

$$|a_n| \leq \max\left\{|a_1|, \ldots, \left|a_{n(1)}\right|, \left|a_{n(1)}\right| + 1\right\}$$

d.h. (a_n) ist beschränkt

II) Sei a ein Häufungspunkt von (a_n) (Bolzano - Weierstrass) und $l : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strikt monotone mit

$$\lim_{n\to\infty} a_{l(n)} = a \qquad \text{(Bem.: } l(n) \geq n)$$

Sei $\varepsilon > 0$ und $n_0(\varepsilon)$ so dass

$$\left|a_{l(n)} - a\right| < \varepsilon \qquad \forall n > n_0(\varepsilon)$$

Sowie $n_1(\varepsilon)$ mit

Can't understand, page 83 bottom

$\forall n \geq \max\{n_0(\varepsilon), n_1(\varepsilon)\}$ gilt:

$$\begin{aligned} |a_n - a| &\leq \left|a_n - a_{l(n)}\right| + \left|a_{l(n)} - a\right| \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim a_n = a \Rightarrow (a_n) \text{ Konvergiert}$$

■

Beispiel 3.23

1. Sei

$$a_n := 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Dann ist also $1 \leq a_n \leq a_{n+1} \ldots$ monotone wachsend, aber divergent. Dann:

$$a_{2n} - a_n = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \qquad \forall n \geq 1$$

Es erfüllt also nicht das Cauchy - Kriterium

2. Sei $b_n := 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ die alternierende harmonische Reihe. Insbesondere:

$$\begin{aligned} b_{2k-2} &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2k-3} - \frac{1}{2k-2}\right) \\ b_{2k} &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) \end{aligned}$$

also folgt

$$0 < b_{2k-2} < b_{2k} \qquad \forall k \geq 1$$

und

$$\begin{aligned} b_{2k+1} &= b_{2k-1} - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} \\ &= b_{2k-1} + \underbrace{\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k}\right)}_{<0} \end{aligned}$$

Woraus: $b_{2k+1} < b_{2k-1}$. Zudem

$$b_{2k} = b_{2k-1} - \frac{1}{2k} b_{2k} \qquad\qquad < b_{2k-1}$$

$\forall k \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2} = b_2 < b_4 \ldots < b_{2k-2} < b_{2k} < b_{2k-1} <?? < b_1 = 1$$

Check question marks right above, page 85 bottom

Die Teilfolgen $(b_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert nach Satz 3.9 (Monotone konvergenz Satz). Da

$$\forall n \in \mathbb{N} : |b_n - b_{n+1}| = \frac{1}{n+1}$$

haben sie zudem denselben Limes und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nach Satz 3.19 (Analog wie in Beispiel 3.20)

3.6 Folgen in $\mathbb{R}^d$ oder $\mathbb{C}$

Die Theorie der Folgen in $\mathbb{R}$, der Konvergenzbegriff usw. lassen sich leicht auf Folgen in $\mathbb{R}^d$ oder $\mathbb{C}$ übertragen $\|\cdot\|$ bezeichnet die Euklidische Norm auf $\mathbb{R}^d$ und $\mathbb{C}$

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_d^2}$$

Von diesem Standpunkt identifiziert sich $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ so dass wir von Jetzt an Folgen in $\mathbb{R}^d$ betrachten. Die in 3.1 eingeführte Begriffe lassen sich leicht auf $\mathbb{R}^d$ übertragen

Definition

Eine Folge in $\mathbb{R}^d$ ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} a : \mathbb{N}\backslash\{0\} &\to \mathbb{R}^d \\ n &\to a_n \end{aligned}$$

Definition 3.24

Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ in $\mathbb{R}^d$ heisst beschränkt falls es $c > 0$ gibt mit $\|a_n\| \leq c$, $\forall n \geq 1$

Bemerkung

Für $d \geq 2$ haben wir keine Vollständige Ordnung, deswegen lassen sich Begriffe wie "nach oben beschränkt" nicht übertragen

Definition 3.25

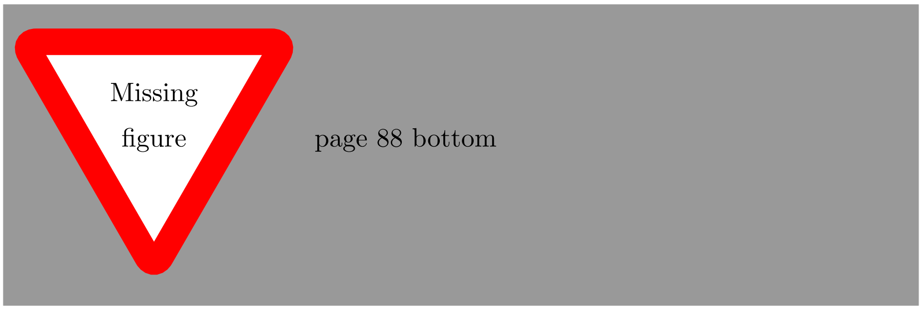
Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ in $\mathbb{R}^d$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}^d$ falls für jedes $\varepsilon > 0$ einen Index $N(\varepsilon) \geq 1$ gibt so dass

$$\|a_n - a\| < \varepsilon \qquad \forall n \geq N(\varepsilon)$$

Not sure where the definition ends

Die andere Version lässt sich auch übertragen. Wir definieren dafür der (offene) mit Zentrum $a \in \mathbb{R}^d$??r.Ball?? page 88 bottom

$$B_{<r}(a) := \left\{x \in \mathbb{R}^d : \|x - a\| < r\right\}$$



??r.Ball?? page 89 top

$B_{<r}(a)$ ist die Verallgemeinerung von $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Nützlich ist auch der (geschlossene)

$$\overline{B}_r(a) : B_{\leq r}(a) := \left\{x \in \mathbb{R}^d : \|x-a\| \leq r\right\}$$

der das Interval $[a-r, a+r]$ verallgemeine.

Definition 3.25

Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}^d$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}^d$ falls für jedes $\varepsilon > 0$, die Menge der Indizen $n \geq 1$ für welche $a_n \notin B_{<\varepsilon}(a)$ endlich ist. Falls dieses Zutrifft, schreibt man

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ oder } a_n \overset{n\to\infty}{\to} a$$

Bemerkung

Die Konvergenz von $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}^d$ ist gleichbedeutend mit der Existenz von einem Vektor $a \in \mathbb{R}^d$ so dass die Folge in $\mathbb{R}$, $(\|a_n - a\|)_{n\geq 1}$ gegen 0 konvergiert

Es gilt dann wieder

Lemma 3.26

Sei $(a_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}^d$ konvergent

1. Der Limes ist eindeutig bestimmt
2. Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ ist beschränkt

Der Konvergenzbegriff verträgt auch sehr gut mit Vektorraum Struktur wie das folgende Analog von Satz 3.8 zeigt.

Satz 3.27

Seien $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ konvergente Folgen in $\mathbb{R}^d$, sowie $\lambda \in \mathbb{R}$. Sei $a = \lim a_n$, $b = \lim b_n$. Dann sind $(a_n \pm b_n)_{n\geq 1}$ und $(\lambda a_n)_{n\geq 1}$ Konvergiert und es gilt

$$\lim (a_n \pm b_n) = a \pm b,\ \lim \lambda a_n = \lambda a$$

Folgender Satz ist dann grundlegend um Bolzano - Weierstrass sowie der Cauchy Kriterium auf $\mathbb{R}^d$ zu verallgemeinen.

Für eine Folge (a_n) von Vektoren in $\mathbb{R}^d$ ist es Zweckmässig folgende Notation für die Koordinaten von a_n zu benutzen

$$a_n = \left(a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, a_n^{(3)}\right)$$

Dann gilt

Satz 3.28

Folgende Aussagen sind äquivalent

(i) $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert in $\mathbb{R}^d$

(ii) Jede der Folgen $\left(a_n^i\right)$ konvergiert in $\mathbb{R}$

Falls diese zutrifft seien $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ sowie $a^i = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^{(i)}$ dann gilt $a = \left(a^1, a^2, \ldots, a^d\right)$

Beweis

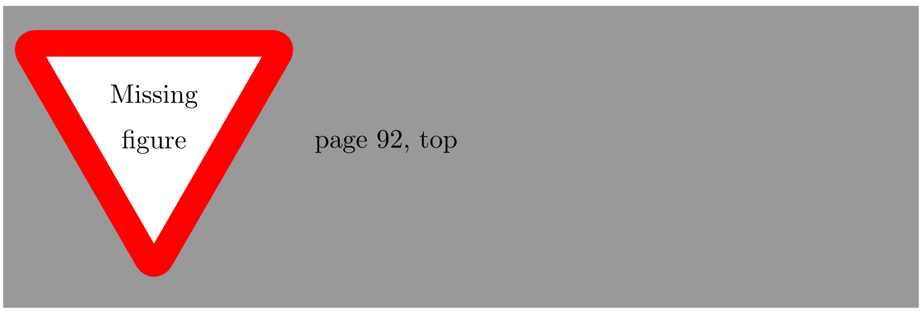
Dazu brauchen wir folgendes geometrisches Lemma:

■

Lemma 3.29

$\forall x = \left(x^1, x^2, \ldots, x^d\right) \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$\begin{array}{ccc} \max\limits_{1\leq i\leq d} \left|x^i\right| \leq & \|x\| & \leq \sqrt{d} \max\limits_{1\leq i\leq d} \left|x^i\right| \\ & \Downarrow & \\ & \sqrt{\sum \left|x^i\right|^2} & \end{array}$$



$$\left(-\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2 \subset B_{\leq r}(0) \subset (-r, r)^2$$

Beweis von Satz 3.28

(i)⇒(ii) Folgt aus der Ungleichung $\left|a_n^{(i)} - a^{(i)}\right| \leq \|a_n - a\|$

(ii)⇒(i) Sei $a^i = \lim a_n^i$ und $a = \left(a^i\right)_i$. Aus

$$\|a_n - a\| \le \sqrt{d} \max_{1\le i\le d} \left|a_n^{(i)} - a^{(i)}\right|$$

folgt (i)

■

Satz 3.29 (Bolzano - Weierstrasse)

Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\ge1}$ in $\mathbb{R}^d$ besitzt eine konvergente Teilfolge

Beispiel

1.
$$(a_n) = \begin{pmatrix} 1/n \\ 2/n \end{pmatrix} \subset \mathbb{R}^2$$
$$\lim a_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.
$$(a_n) = \begin{pmatrix} \frac{n^2+n+1}{2n^2+n+1} \\ n \end{pmatrix}$$

(a_n) ist divergent

$$\lim \frac{n^2+n+1}{2n^2+n+1} \to \frac{1}{2}$$

aber $\lim n = \infty$

Definition 3.30

$(a_n)_{n\ge1}$ ist eine Cauchy Folge falls es $\forall\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \ge 1$ gibt so dass

$$\|a_n - a_m\| < \varepsilon \qquad \forall n, m \ge N(\varepsilon)$$

Aus Sätze 3.28 und 3.22 (Cauchy Kriterium) folgt

Satz 3.31

Es sind äquivalent

1. $(a_n)_{n\ge1}$ konvergiert
2. (a_n) ist eine Cauchy Folge

Für $\mathbb{C}$ haben wir noch dass sich die Körperstruktur mit Konvergenz gut verträgt. Nähmlich

Satz 3.32

Seien (z_n), (w_n) zwei Konvergente Folgen in $\mathbb{C}$ mit $z = \lim z_n$, $w = \lim w_n$. Dann

(i) $\overline{z_n} \to z_n$ und $(\|z_n\|)_{n\geq 1}$ konvergiert gegen $\|z\|$

(ii) Die Folge $(z_n w_n)_{n\geq 1}$konvergiert gegen zw

(iii) Falls $w \neq 0$ und $w_n \neq 0$, $\forall n \geq 1$ so konvergiert $\left(\frac{z_n}{w_n}\right)_{n\geq 1}$ gegen $\frac{z}{w}$

3.7 Reihen

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Sei

$$S_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

die Folge der Partial Summen. Eine Reihe ist eine unendliche Summe

$$a_1 + a_2 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

einer Folge $(a_n)_{n\geq 1}$

Definition 3.33

Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent falls die Folge $(S_n)_{n\geq 1}$ konvergiert. In diesem Fall wird deren Limes mit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ bezeichnet

$$\lim S_n = \lim \sum_{k=1}^{n} a_k := \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Beispiel 3.34

1. Für $|q| < 1$ gilt

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$\lim S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} \text{ (da } \lim q^n = 0)$$

Somit konvergiert $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ und deren Wert ist $\frac{1}{1-q}$

2. Die Harmonische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist nach Beispiel 3.23 (i)divergent. ADD reference

Für Reihen gibt es verschiedene praktische Konvergenz Kriterium. Das erste ergibt sich direkt aus dem Cauchy Kriterium (Satz 3.22) add reference + page number

Satz 3.35 (Cauchy Kriterium)

Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ einer Index $N(\varepsilon) \geq 1$ gibt, so dass

$$\forall n \geq m \geq N(\varepsilon) \qquad \left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon$$

Beweis

It says Übung, maybe incomplete? page 97 top

Die Reihe $\sum\limits_{1}^{\infty} a_j$ konvergiert genau dann, wenn

$$\left|\sum_{m}^{n} a_j\right| \to 0 \qquad \forall n \geq m$$

$\sum\limits_{1}^{\infty} a_j$ konv. $\Leftrightarrow S_n = \sum\limits_{1}^{n} a_k$ konv. $\Leftrightarrow S_n$ Cauchy $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon)$ s.d.

$$\forall n > m > N(\varepsilon) \qquad \underbrace{|S_n - S_m|}_{\sum\limits_{m}^{n} a_k} < \varepsilon$$

■

Korollar

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent $\Rightarrow |a_k| \to 0$

Beweis

Add reference + page number

Nehmen wir $m = n$ in Satz 3.5. Das ist ein Notwendiges Kriterium aber nicht hinreichendes Kriterium

■

Content between brackets looks like personal notes, should these be copied? page 97 bottom

Beispiel

$\sum\limits_{1}^{\infty} k$ ist nicht konvergent, weil $\lim\limits_{k\to\infty} k \neq 0$ (notwendig).
$\sum \frac{1}{k}$ ist nicht konvergent obwohl $\lim \frac{1}{k} = 0$ (nicht genügends)

Im Folgenden leiten wir aus Vergleich mit der geometrischen Reihe verschiedene Konvergenz Kriterium ab (Quotienten, Wurzelkriterium). Dies Stützt sich auf

Satz 3.36

Seien $\sum_1^\infty a_k$, $\sum_1^\infty b_k$ Reihen wobei

1. Es gibt k_0 so dass $|a_k| \leq b_k$, $\forall k > k_0$
2. $\sum b_k$ konvergiert

Dann konvergiert $\sum_{k=1}^\infty a_k$

Beweis

Sei $\varepsilon > 0$ und $N(\varepsilon) > k_0$ so dass

$$\sum_{k=m}^{n} b_k = \left|\sum_{k=m}^{n} b_k\right| \leq \varepsilon \qquad \forall n, m > N(\varepsilon) > k_0$$

Dann folgt aus 1.

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=m}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=m}^{n} b_k \leq \varepsilon$$

Der Satz folgt aus dem Cauchy Kriterium

■

Beispiel

1.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = ?$$

$$\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}} \qquad \forall k \geq 1 \Rightarrow \sum_1^\infty \frac{1}{k!} < \sum_1^\infty \frac{1}{2^{k-1}} = 2$$

2.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = ?$$

   Zum erst zeigen wir dass $\sum_1^\infty \frac{1}{k(k+1)}$ konvergiert. Da

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \qquad \forall k \geq 1$$

$$S_n = \sum_1^\infty \frac{1}{k(k+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{n}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$, d.h. $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$.
$\forall k > 1$ Da

$$(k+1)^2 > k(k+1)$$
$$\frac{1}{(k+1)^2} < \frac{1}{k(k+1)}$$

Daraus folgt

$$\sum \frac{1}{(k+1)^2} \leq \sum \frac{1}{k(k+1)} = 1$$

$\sum \frac{1}{(k+1)^2}$ konvergiert.

Satz 3.37 (Quotientenkriterium)

Sei $a_k \neq 0$, $\forall k \geq 1$

(i) Falls

$$\lim_{k\to\infty} \sup \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1$$

so ist $\sum a_k$ konvergent

(ii) Falls

$$\lim_{k\to\infty} \inf \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| > 1$$

so ist $\sum a_k$ divergent

Beweis

(i) Sei $q_0 := \lim\sup \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$

$$\lim_{k\to\infty} \left(\sup \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{k\geq n} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \right)$$

Wähle $q \in \mathbb{R}$ mit $q_0 < q < 1$. Dann gilt für genugend gross $n_0 \in \mathbb{N}$

$$\forall n \geq n_0 : \left| \sup_{k\geq n} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| - q_0 \right| \leq \underbrace{(q - q_0)}_{\varepsilon}$$

$$\text{d.h.} \quad \sup_{k\geq n} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q \qquad \forall n \geq n_0$$

Insbesondere bei Wahl von $n = n_0$

$$\forall k \geq n_0 \qquad \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q$$

Es folgt für $k \geq n_0$ die Abschätzung

$$|a_k| = \left| \frac{a_k}{a_{k-1}} \cdot \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \cdot a_{n_0} \right|$$
$$\leq q^{k-n_0} |a_{n_0}| = \underbrace{q^n |a_{n_0}|}_{C} q^k = Cq^k$$

refence + page
ber

Wir können nun $b_k = Cq^k$ setzen und Satz 3.36 anwenden. Da $\sum b_k$ konvergiert (da $|q| < 1$) $\sum a_k$ konvergiert.

(ii) Sei

$$q_0 := \lim_{k\to\infty} \inf \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$$

(falls es existiert). Wähle $q \in \mathbb{R}$ mit $q_0 > q > 1$. Dann existiert n_0 mit

$$\forall k > n_0 : \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > \inf_{k>n_0} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq q$$

$$\begin{pmatrix} \left|\inf\limits_{k\geq n} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| - q_0\right| < \underbrace{q - q_0}_{\varepsilon} & \forall k > n_0 \\ \Rightarrow -q_0 + q < \inf \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| - q_0 & \forall k > n_0 \end{pmatrix}$$

Dann folgt analog wie in (i) dass

$$\begin{aligned} |a_k| &= \left|\frac{a_k}{a_{k-1}} \cdot \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \cdot a_{n_0}\right| \\ &> q^{k-n_0} |a_{n_0}| > Cq^k, \forall k > k_0 \end{aligned}$$

Insbesondere ist $\{|a_k| : k \geq 1\}$ nicht beschränkt $\Rightarrow \lim a_k \not\to 0 \Rightarrow \sum a_k$ divergent.
Falls $\lim \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$ existiert, dann

$$\liminf \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \limsup \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = L$$

■

Satz 3.36'

Sei $a_k \neq 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$ und sei $L = \lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$

(i) Falls $L < 1$, so ist $\sum a_k$ konvergent

(ii) Falls $L > 1$, so ist $\sum a_k$ divergent

(iii) Falls $L = 1$, kann man daraus nichts ableiten

Beispiel

1. $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ konvergiert. Da

$$\begin{aligned} \left|\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!}\right| &= (n+1) \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\ &= \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n \to \frac{1}{e} < 1 \end{aligned}$$

Insbesondere $\frac{n!}{n^n} \to 0$ falls $n \to \infty$, d.h. n^n wächst schneller als $n!$ (schon gesehen)

Maybe add where??
page 104 top

2. Wir haben schon gesehen dass $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergiert. Aber Quotientenkriterium gibt kein informations dass

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)^2}{n^2}\right| \to 1$$

3. Wir haben auch schon gesehen dass $\sum \frac{1}{n}$ divergiert. In diesem fall auch

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{k+1}{k} \to 1$$

d.h. das Quotientenkriterium ist nicht anwendbar.

4. Exponentialreihen

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

konvergiert für jedes $z \in \mathbb{C}$. Sei $a_k := \frac{z^k}{k!}$.

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{z^k} = \frac{z}{k+1}$$

Also

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{z}{k+1}\right| = 0 < 1 \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

Add reference + page number

Nach Satz 3.37 (i)ist $\sum \frac{z^k}{k!}$ konvergent. Wir werden darauf züruckkommen.

5. Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k k!}{k^k}$$

Sei $a_n = \frac{z^k k!}{k^k}$

$$\begin{aligned}\frac{a_{k+1}}{a_k} &= \frac{z^{k+1}(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{k^k}{k! z^k} \\ &= z\frac{(k+1)}{(k+1)}\left(\frac{k}{k+1}\right)^k = z\frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}\end{aligned}$$

Dann ist $\lim\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{|z|}{e}$ Somit folgt konvergenz für $|z| < e$ und Divergenz für $|z| > e$. $|z| < e$ ist der "konvergenzkreis" für $\sum \frac{z^k k!}{k^k}$

Beispiele 4., 5. sind die erste Einführung des Begriffs von Konvergenzkreis. Die Quotientenkriterium versagt, wenn unendlich viele a_k verschwinden oder falls $\lim\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = 1$

Satz 3.39 (Wurzelkriterium)

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

(i) Falls $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} < 1$ so konvergiert $\sum\limits_{1}^{\infty} a_k$

(ii) Falls $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} > 1$ so divergiert $\sum\limits_{1}^{\infty} a_k$

Beweis

Ask for full beweis

■

Beispiel

$$\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

konvergiert, da

$$\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} < 1$$

Satz ist ganz fundamental im Studium der Potenzreihen. Potenzreihen sind wichtig weil sie analytische Funktionen darstellen.

??Letzterer?? page 107 middle to bottom

Definition

Sei $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Betrachte die Potenzreihe in $z \in \mathbb{C}$

$$p(z) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

Mit Satz 3.39 (Wurzelkriterium) erhalten wir die folgende Characteresieurung das Konvergenzbereichs von $p(z)$

Add reference + page number

Satz 3.40

Die Potenzreihe

$$p(z) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

ist konvergent $\forall z \in \mathbb{C}$, mit

$$|z| < \rho := \frac{1}{\limsup \sqrt[k]{|c_k|}} \in [0, \infty]$$

Sie ist divergent für alle $|z| > \rho$

Konvention: Falls $\left\{ \sqrt[k]{|c_k|}, k > 1 \right\}$ nicht beschränkt ist setzen wir

$$\limsup \sqrt[k]{|c_k|} = +\infty \text{ und } \rho = 0$$

Falls $\left\{ \sqrt[k]{|c_k|}, k \geq 1 \right\}$ beschränkt ist und zudem $\limsup \sqrt[k]{|c_k|} = 0$, setzen wir $\rho = +\infty$ d.h. die Reihe $\rho(z)$ konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$

Bemerkung

Insbesondere ist der Konvergenzbereich von $p(z)$ ein Kreis

Beispiel 3.41

Sei

$$c_k = \begin{cases} 1 & k \text{ gerade} \\ \frac{1}{k} & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

Dann gilt

$$\frac{c_{k+1} z^{k+1}}{c_k z^k} = \begin{cases} \frac{z}{(k+1)} & k \text{ gerade} \\ zk & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \liminf \left| \frac{c_{k+1} z^{k+1}}{c_k z^k} \right| &= |z| \left(\liminf a_k \right) \text{ mit } a_k = \begin{cases} \frac{1}{(k+1)} \\ k \end{cases} \\ &= |z| \lim_k \inf_{n \geq k} a_n = 0 < 1 \end{aligned}$$

und

$$|z| \limsup \left| \frac{c_{k+1}}{c_k} \right| = |z| \limsup a_k = |z|\, k$$

unbeschränkt für $|z| \neq 0$. Das Quotientenkriterium gibt also keine Information. Das Wurzelkriterium dagegen gibt

$$|z| \sqrt[k]{|c_k|} = |k| \begin{cases} 1 & k \text{ gerade} \\ \frac{1}{\sqrt[k]{k}} & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

Also

$$\rho = \lim \sqrt[k]{|c_k|} = 1 \ \left(\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \right)$$

Somit konvergiert für $\sum c_k z^k$ für $|z| < 1$ und divergiert für $|z| > 1$

Bemerkung

Das Wurzelkriterium ist "starker" als das Quotientenkriterium

Quotientenkriterium vs. Wurzelkriterium

Lemma

Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ eine Folge. Dann

$$\liminf \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \underset{3}{\leq} \liminf |a_n|^{\frac{1}{n}} \underset{1}{\leq} \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} \underset{2}{\leq} \limsup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

Beweis

1. $\liminf |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}$ gilt immer

2. Sei $\sigma = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$, $q_0 = \limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Wir mochten zeigen dass $\sigma \leq q_0$. Sei $q > q_0$. $\exists n_0$ gross genüg so dass

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q \qquad \forall n > n_0 \qquad \text{(wie im Beweis das Quot. krit)}$$

Dann

$$\begin{aligned} |a_{n+k}| &\leq \left|\frac{a_{n+k}}{a_{n+k-1}}\right| \left|\frac{a_{n+k-1}}{a_{n+k-2}}\right| \dots \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |a_n| \\ &\leq q^k |a_n| = q^{n+k} \frac{|a_n|}{q^n} \\ \Rightarrow |a_{n+k}| &\leq q^{n+k} \left|\frac{a_n}{q^n}\right| \\ \Rightarrow a_{n+k}^{\frac{1}{n+k}} &\leq q \left|\frac{a_n}{q^n}\right|^{\frac{1}{n+k}} \qquad \forall n \geq n_0 \end{aligned}$$

Für beliebige n ($n-$fixed), gilt

$$\lim_{k \to \infty} \left|\frac{a_n}{q^n}\right|^{\frac{1}{n+k}} = 1 \Rightarrow \limsup a_k^{\frac{1}{k}} \leq q \cdot 1 \Rightarrow \sigma \leq q \leq q_0$$

3. ASK FOR BEWEIS

Ask for beweis, page 110.2 middle

■

Korollar

1. Wurzelkriterium ist starker als Quotientenkriterium, d.h. Liefert bei einer Reihe das Quotientenkriterium eine Enstcheidung (d.h. $\limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ im Falle der konvergenz, $\liminf \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ im Falle der Divergenz) so liefert auch das Wurzelkriterium eine Entscheidung (d.h. $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$ im Fall der Konvergenz, $\liminf \sqrt[n]{a_n} > 1$ im Fall der Divergenz)

2. Wurzelkriterium gibt kein Information $\Rightarrow$ Quotientenkriterium gibt kein-Information

$$\left(\limsup \sqrt[n]{a_n} = 1 \Rightarrow \liminf \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq 1\right)$$

Frage: Warum benutzen wir Quotientenkriterium?
Antwort: Manchmal ist es einfacher anzuwenden!

Bemerkung

Das Wurzelkriterium liefert eine Entscheidung der divergenz auch wenn $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, d.h.

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ divergent}$$

da

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow \lim a_n \neq 0$$

Beweis

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow \forall k_0 \in \mathbb{N} \sup_{k \geq k_0} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$$

$\Rightarrow \forall k_0 \in \mathbb{N}$, gibt es dann ein $k \geq k_0$ mit $\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1 \Rightarrow |a_k| \geq 1 \Rightarrow \lim a_k \neq 0 \Rightarrow \sum a_k$ divergent

d.h. Für das Wurzelkriterium eine Entscheidung der Divergenz um zu liefern ist es hinreichend dass $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1$

■

Beispiel 3.42 (Riemann Zeta Funktion)

Für $s > 0$ betrachten wir die Reihe

$$\xi(s) := 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \ldots + + \frac{1}{n^s} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

und fragen nach Konvergenz

(i) Für $0 < s \leq 1$ gilt $\frac{1}{k^s} \geq \frac{1}{k}$ also

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \to \infty$$

Also für $0 < s \leq 1$, ist $\xi(s)$ divergent.

(ii) Für $s > 1$, sei $a_k = \frac{1}{k^s}$. Dann haben wir

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^s \to 1$$

und

$$\sqrt[k]{a_k} = \frac{1}{\left(k^{\frac{1}{k}}\right)^s} \to 1$$

Also funktionieren weder Quotientenkriterium nach Wurzelkriterium.

Can't read character, page 112 top

Wir werden die Idee an, die zur Divergenz von $\sum \frac{1}{k}$ führt, ein wenig modifiziert. Wir hatten (für die Harmonische Reihe)

$$\begin{aligned}
&1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}_{\substack{> \\ \frac{1}{4}+\frac{1}{4}}}+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}}_{\substack{> \\ \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}}+\dots \\
\geq &1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\dots
\end{aligned}$$

Nun sei $s > 1$: Wir segmentieren die Reihe auf die selbe Art

$$\begin{aligned}
&1+\underbrace{\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}}_{\substack{> \\ \frac{1}{2^s}+\frac{1}{2^s}}}+\underbrace{\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{6^s}+\frac{1}{7^s}}_{\substack{> \\ \frac{1}{4^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{4^s}}}+\dots \\
= &1+\frac{1}{2^{s-1}}+\frac{2^2}{2^2 s}+\frac{2^3}{2^3 s}+\dots \\
= &1+\frac{1}{2^{s-1}}+\left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^2+\left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^3+\dots \\
= &\frac{1}{1-\frac{1}{2^{s-1}}}
\end{aligned}$$

Also konvergiert, da $\frac{1}{2^{s-1}} < 1$

3.8 Absolute Konvergenz von Reihen

Wir haben schon gesehen, dass

- $\sum \frac{1}{n}$ ist nicht konvergent
- $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ ist konvergent

Wir können deshalb herleiten dass

$$\sum a_n \text{ Konvergiert } \not\Rightarrow \sum |a_n| \text{ Konvergiert}$$

Definition 3.43

Die Reihe $\sum\limits_{1}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut, falls die Reihe $\sum |a_k|$ konvergiert

$$\text{Konv.} \Rightarrow \text{abs. konv.}$$

Is this sentence really needed? “Warum sind absolut konvergent Reihen gut?”, page 113 middle

Frage

Wenn wir eine Reihe haben, können wir in sehr unterschiedlicher weise summieren? Kommt es auf die Reihenfolge an?

Antwort

Ja! Es kommt auf die Reihenfolge an!

Beispiel 3.44

Die Reihe $\sum \frac{(-1)^k}{k}$ konvergiert jedoch ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}$ divergent.

Wählt man zu $l \in \mathbb{N}$ den index k_l so das

$$\sum_{k=1}^{k_l} \frac{1}{2k} > l + \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{2k-1}$$

und ordnet man die Folge $\sum \frac{(-1)^k}{k}$ non so um, dass auf die ersten k_j positiven Folgengleider jeweils das $j-$te negative Glied folgt, $j \in \mathbb{N}$, dann erhält man für die so umgeordneten harmonische Reihe

$$\begin{aligned}
\sum \frac{(-1)^k}{k} =& \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2k_1} - 1 \\
& \vdots \\
& + \frac{1}{2(k_1+1)} + \ldots + \frac{1}{2k_1} - \frac{1}{3} \\
& \vdots \\
& + \frac{1}{2(k_{l-1}+1)} + \ldots + \frac{1}{2k_l} - \frac{1}{2l-1} \\
& \vdots \\
=& \sum_{l=1}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{k_l} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{2k-1} \right)}_{>l} \\
>& \sum_{l=1}^{\infty} l
\end{aligned}$$

d.h. die umgeordnete alternwende harmonische Reihe ist divergent! Der Stärkeren konvergenz begriff, Absolut konvergenz ausschliesst solche pathologische verhältnis. Falls die Reihe absolute konvergent ist, ist die konvergenz sehr stabil, sehr robust.

Bemerkung 3.45

1. Konv. $\not\Rightarrow$ Abs. Konv. Aber Abs. Konv. $\Rightarrow$ konv.

   Beweis

   $\sum |a_n|$ konv. Sei $b_n = a_n + |a_n|$

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } a_n \leq 0 \\ 2a_n = 2\,|a_n| & \text{falls } a_n \geq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow 0 \leq b_n \leq 2|a_n| \Rightarrow \sum b_n$ konv.
$a_n = b_n - |a_n|$ und beide Reihen konv. $\Rightarrow \sum a_n = \sum b_n - \sum |a_n|$ konv.

■

2. Wurzel und Quotientenkriterium sind kriterium für absolute konvergenz.

3. Da
$$S_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k| < S_{n+1} = S_n + |a_n|$$
ist, ist die Folge $(S_n)_{n\geq 1}$ monotone wachsend; Absolute konvergenz ist somit äquivalent mit der Beschänkheit von $(S_n)_{n\geq 1}$

4. Falls $\sum a_k$ absolut konvergent, dann konvergiert natürlich $\sum_{k=j}^{\infty} |a_n|$ für jede j und $\forall \varepsilon > 0$, $\exists j(\varepsilon)$ so dass
$$\sum_{k=j}^{\infty} |a_n| < \varepsilon \qquad \forall j > j(\varepsilon)$$

$$\underline{\text{Notation:}} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |a_n| < \infty = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ konvergiert}$$

Satz 3.46

Sei $\sum_{1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent, und $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion. Dann ist auch die "umgeordnete Reihe" $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ absolut konvergent mit gleicher Summe

Beweis

It says Übung, maybe want to add something?? page 117 bottom

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da $\sum_{1}^{\infty} |a_k|$ konvergent, gibt es $n_0(\varepsilon)$ mit $\sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k| < \varepsilon$. Sei
$$n_1(\varepsilon) := \max\left\{\varphi^{-1}(1), \varphi^{-1}(2), \ldots, \varphi^{-1}(n_0)\right\}$$
Falls $k > n_1(\varepsilon)$ dann folgt $\varphi(k) > n_0$ (φ injektive). Also $\forall n, m \geq n_1(\varepsilon)$
$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_{\varphi(k)}\right| \leq \sum_{k=m}^{n} \left|a_{\varphi(k)}\right| \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k| < \varepsilon$$

Insbesondere konvergiert $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ Absolut und

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{n_0} a_k - \sum_{k=1}^{n_1} a_{\varphi(k)}\right| + \left|\sum_{n_1+1}^{\infty} a_{\varphi(k)}\right| + \left|\sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_k\right|$$
$$\leq 3 \sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k| \leq 3\varepsilon$$

■

Beispiel 3.47

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} kq^k$ ist für absolut konvergent (z.B. Quotientenkriterium)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} kq^k = q + q^2 + q^3 + q^4 \ldots \\ +q^2 + q^3 + q^4 \ldots \\ +q^3 + q^4 \ldots \\ +q^4 \ldots \\ \vdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} kq^k &= q\{1 + q + \ldots\} + q^2\{1 + q + \ldots\} \\ &= \underbrace{\{1 + q + \ldots\}}_{\frac{1}{1-q}} \underbrace{\{q + q^2 + \ldots\}}_{\frac{q}{(1-q)}} = \frac{q}{(1-q)^2} \\ &= \sum_{l=1}^{\infty}\left(q^l \sum_{k=0}^{\infty} q^k\right) = \sum_{l=1}^{\infty} q^l \left(\frac{1}{1-q}\right) = \left(\frac{1}{1-q}\right)\underbrace{\sum_{l=1}^{\infty} q^l}_{\frac{q}{1-q}} \\ &= \frac{q}{(1-q)^2}\end{aligned}$$

Umordnung der Summation: Statt $\downarrow$ wird $\rightarrow$ summiert

Satz 3.47

Seien $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ Folgen in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Wir betrachten $(a_n b_k)_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ als folge, wobei wir eine beliebige Abzählung von $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ durch $\mathbb{N}$ zulassen. Falls $\sum a_k$, $\sum b_k$ absolut konvergiert, ist $\sum a_k b_k$ absolut konvergiert und

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{l=1}^{\infty} b_l$$

unabhängig von der Summationsreihenfolge. Als korollar

Korollar 3.48

Für alle x, y in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ gilt

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$$

$\left(\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right)$

Beweis

$$\exp(x)\exp(y) \overset{\text{Satz 3.47}}{=} \sum_{k \neq l = 0}^{\infty} \frac{x^k y^l}{k!l!}$$

Wir zählen jetzt $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ wie folgt ab

Can't understand the formula, page 121 bottom

$$\exp(x)\exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \exp(x+y)$$

■

Zum Abschluss behandeln wir noch den Zusammenhang mit "e" und "e^x".

Satz 3.49

$$\exp(1) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Beweis

1.

$$\exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon), \text{mit } \left|\exp(1) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} < \varepsilon\right|$$

$$\Leftrightarrow -\varepsilon < \sum_{0}^{n_0} \frac{1}{k!} - \exp(1) < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow -\varepsilon + \exp(1) < \sum_{0}^{n_0} \frac{1}{k!} < \varepsilon + \exp(1)$$

Insbesondere

$$\exp(1) < \sum_{k=0}^{n_0} \frac{1}{k!} + \varepsilon$$

2.

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \underbrace{\left(\frac{n\,(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k}\right)}_{a_k^{(n)}} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} a_k^{(n)}
\end{aligned}$$

Da

$$a_k^{(n)} := \frac{n}{n} \cdot \frac{(n-1)}{n} \ldots \frac{n-k+1}{n} < 1$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \exp(1) \Rightarrow 0 < \exp(1) - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

3. $0 < a_k^{(n)} < 1$, und für jedes k fest ist $a_k^{(n)} \to 1$, $n \to \infty$.

$$\frac{n\,(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} = \frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k}{n}+\frac{1}{n}\right)}{\frac{n^k}{n^k}} \underset{n\to\infty}{\to} 1$$

somit

$$1 - a_k^{(n)} \underset{n\to\infty}{\to} 0, \ (k \text{ fest})$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \left(1 - a_k^{(n)}\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

$\Rightarrow$ Für $\varepsilon > 0$, $\exists n_1 = n_1(\varepsilon, n_0)$, so dass

$$\forall n \geq n_1 \qquad \sum_{k=0}^{n_0} \left(1 - a_k^{(n)}\right) < \varepsilon$$

Dann haben wir $\forall n \geq \max\{n_0, n_1\}$

$$
\begin{aligned}
0 &\overset{2}{<} \exp(1) - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \overset{()}{<} \sum_{k=0}^{n_0} \frac{1}{k!} + \varepsilon - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\
&\overset{2(*)}{<} \sum_{k=0}^{n_0} \frac{1}{k!} + \varepsilon - \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} \frac{1}{k!} \\
&< \sum_{k=0}^{n_0} \frac{1}{k!} + \varepsilon - \sum_{k=0}^{n_0} a_k^{(n)} \frac{1}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{n_0} \frac{1}{k!} \left(1 - a_k^{(n)}\right) + \varepsilon \\
&< \sum_{k=0}^{n_0} \left(1 - a_k^{(n)}\right) + \varepsilon < 2\varepsilon \\
\Rightarrow \exp(1) &= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n
\end{aligned}
$$

■

Analog kann man auch beweisen dass

Satz 3.50

$\forall x \in \mathbb{R}$

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Start of additional content, page 125. This has to bre reviewed for layout issues (it's pretty much a mess)

Satz

$$\exp(x) = \sum \frac{x}{k!} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon)$$

$$\forall n > n_0 \qquad \left|\exp(x) - \sum_{0}^{n_0} \frac{x}{k!}\right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow -\varepsilon < \sum \frac{x}{k!} - \exp(x) < \varepsilon$$

$$1 \Leftrightarrow \exp(x) - \varepsilon < \sum_{0}^{n_0} \frac{x}{k!} < \varepsilon + \exp(x)$$

$$\textcircled{2}\ \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_0^n \binom{n}{k} \frac{x^n}{n^k}$$
$$= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \cdot \frac{x^k}{n^k}$$
$$= \sum_0^n \frac{1}{k!} \cdot \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{x^k}{n^k}$$
$$\overset{\textcircled{2}}{=} \sum \frac{1}{k!} \cdot \underbrace{\frac{n\,(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k}}_{a_k^{(n)}} \cdot x^k$$
$$\leq \sum_0^n \frac{x^k}{n^k} < \exp(x)$$
$$\Rightarrow \exp(x) - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n > 0 \ \textcircled{2}$$

$0 < a_k^n < 1$ für jedes k fest ist $a_k^{(n)} \to 1,\ n \to \infty$

$$\frac{n\,(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} = \frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k}{n}+\frac{1}{n}\right)}{\frac{n^k}{n^k}} \to 1$$

$$\Rightarrow 1 - a_k^{(n)} \to 0, n \to \infty \qquad (k \text{ fest})$$
$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n_0} \left(1 - a_k^{(n)}\right) x^k \to 0, n \to \infty \qquad (x, k \text{ fest})$$
$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_1 = n_1\,(\varepsilon, n_0) \qquad \forall n > n_1$$

$$\sum_{k=0}^{n_0} \left(1 - a_k^{(n)}\right) x^k < \varepsilon$$

Dann $\forall n > \max\{n_0, n_1\}$

$$0 \overset{\textcircled{2}}{<} \exp(x) - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \overset{\textcircled{1}}{<} \sum_0^{n_0} \frac{x^k}{k!} + \varepsilon - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$
$$< \sum_0^{n_0} \frac{x^k}{k!} + \varepsilon - \sum_0^{n_0} a_k^n \frac{x^k}{k!}$$
$$= \sum_0^{n_0} \frac{(1-a_k^n)}{k!} x^k + \varepsilon < \sum_0^{n_0} (1-a_k^n) x^k + \varepsilon < 2\varepsilon$$

End of additional content

Satz 3.49 $\Rightarrow \exp(1) = e^1$

$$\exp\,(x+y) = (\exp\,(x))\,(\exp\,(y))$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \exp(n) &= \exp(1)\exp(n-1)\\ &= \exp(1)\exp(1)\exp(n-2)\\ &\vdots\\ &= e\cdot e\cdot\ldots\cdot e = e^n, \forall n\in\mathbb{N}\end{aligned}$$

$$1 = \exp(0) = \exp(n)\exp(-n)$$

$$\Rightarrow \exp(-n) = \frac{1}{\exp(n)} = \frac{1}{e^n} = e^{-n}$$

$$\Rightarrow \exp(n) = e^n, \forall n\in\mathbb{Z}$$

$$\forall q\in\mathbb{N}, \exp\left(\frac{1}{q}\right) = e^{\frac{1}{q}}$$

Da

$$e = \exp(1) = \exp\left(q\cdot\frac{1}{q}\right) = \underbrace{\exp\left(\frac{1}{q}\right)\ldots\exp\left(\frac{1}{q}\right)}_{q \text{ mal}}$$

Somit haben wir

Satz 3.51

$\forall x\in\mathbb{Q}$, $\exp(x) = e^x$. Für rein imaginare Argumente $z = iy$, $y\in\mathbb{R}$ können wir $\exp(iy)$ durch Umordnung gemäs Satz 3.46 in Real und Imaginärteil zerlegen

add reference + page number, page 126 middle

$$\begin{aligned}\exp(iy) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(iy)^k}{k!}\\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l y^{2l}}{(2l)!} + i\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l y^{2l+1}}{(2l+1)!}\\ &:= \cos(y) + i\sin(y)\end{aligned}$$

Für $z = x + iy \in\mathbb{C}$

$$\exp(z) = \exp(x)\exp(iy) = \exp(x)(\cos(y) + i\sin(y))$$