§ 8 Differentialrechnung in $\mathbb{R}^n$

§ 8.1 Partielle Ableitungen und Differential

Wie kann man die Begriffe der Di. Differentialrechnung auf Funktionen $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ erweitern?

Funktion in mehreren variablen sind ein bischen komplizierter als Funktionen in einer variablen.

z.B 1) $f(x) = x^2 + 5$ ist in ursprung stetig

da $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

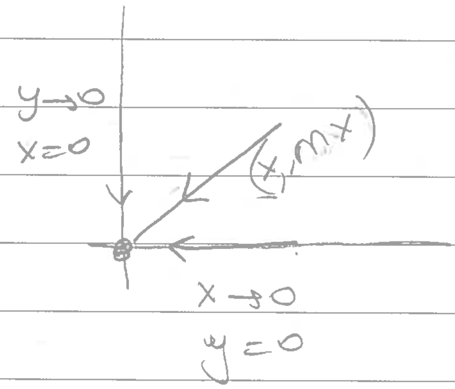
Aber $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x \cdot y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ist im Ursprung nicht stetig.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y = 0!}} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0)$$

$$\lim_{\substack{y \to 0 \\ x = 0!}} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0)$$



Aber der limes entlang der Gerade $y = mx$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0 \\ y = mx}} f(x, mx) = \lim_{x \to 0} \frac{mx^2}{(1+m^2)\, x^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

hängt von m ab

und $\frac{m}{1+m^2} \neq 0$ falls $m \neq 0$.

Eine funktion $f(x,y)$ an der stelle (x_0, y_0) ist stetig wenn der limes $\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y)$

In jeder Richtung den gleichen Wert haben.

Defn. 8.1 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $a \in \Omega$

1) f hat den Grenzwert $c \in \mathbb{R}$, d.h

$\lim_{x \to a} f(x) = c$, wenn es zu jeder

(beliebig kleinen) Schranke $\varepsilon > 0$, eine δ-Umgebung

$B_\delta(a) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x-a| < \delta\}$ gibt, so dass

$|f(x) - a| < \varepsilon$ für alle $x \in \Omega \cap B_\delta(a)$, $x \neq a$ gilt.

2) f heisst in $a \in \Omega$ stetig wenn $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ gilt

3) f heisst in Ω stetig, wenn f in allen $a \in \Omega$ stetig ist.

Die Summe, das Produkt, der Quotient (Nenner ungleich Null) stetiger Funktion sind stetig.

f besitzt keinen Grenzwert in x_0 wenn sich bei Annäherungen an x_0 auf verschiedenen Kurven (z.B Geraden) verschiedene oder keine Grenzwert ergeben.

Sandwich lemma: Sei f, g, h funktionen

wobei $g < f < h$.

Wenn $\lim_{x \to a} g = L = \lim_{x \to a} h$ gilt, dann

gilt $\lim_{x \to a} f = L$.

Da $\lim_{(x,y) \to (0,0)} |y| = 0$, gilt $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 0$.

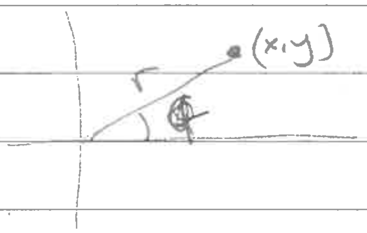
$\Rightarrow$ f ist in $(0,0)$ stetig.

Oder: Für Grenzwertbestimmungen (also auch für Stetigkeitsuntersuchungen) ist es oft nützlich, die Funktionen mittels Polarkoordi umzuschreiben. Vor allem bei Rationalen Funktionen.

Hierbei gilt $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

wobei r = Länge des Vektos (x,y)

und φ der Winkel.



Nun lass wir die Länge r gegen 0 gehen.

Bsp. ① Die Funktionen

$f(x,y) = x^2 + y^2$

$f(x,y,z) = x^3 + \frac{x^2}{y^2+1} + z$

$f(x,y) = 4x^2y^3 + 3xy$

$f(x,y) = \cos xy$ sind stetig, da sie aus stetigen Funktionen zusammengesetzt.

② $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Für $(x,y) \neq (0,0)$ ist f als Quotient von stetigen Funktionen stetig. Es verbleibt f im Punkt $(0,0)$ zu untersuchen.

Da $\left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right| \leq 1$

$0 \leq |f(x,y)| \leq |y|$

18

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = \frac{(r^2\cos^2\theta)(r\sin\theta)}{r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = r\cos^2\theta\sin\theta$$

$$= r\cos^2\theta\sin\theta$$

$$\lim_{r\to 0} f(r,\theta) = \lim_{r\to 0} r\cos^2\theta\sin\theta = 0.$$

③ Wir können nochmals die Stetigkeit der Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

mittels Polarkoordinaten untersuchen.

$$f(x,y) = \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2} = \cos\theta\sin\theta$$

$\lim_{r\to 0} f(x,y) = \cos\theta\sin\theta$ hängt von θ ab.

$\Rightarrow$ f in $(0,0)$ nicht stetig.

Bmk: Eine trickreiche Variante Grenzwerte zu berechnen, ergibt sich durch Substitution. d.h man berechnet den Grenzwert $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(g(x,y))$

indem man zunächst $t = g(x,y)$ setzt und den Grenzwert $t_0 = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)$ bestimmt. Dann ist

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(g(x,y)) = \lim_{t\to t_0} f(t)$$

Bsp. $\lim_{(x,y)\to(4,0)} \frac{\sin xy}{xy}$. Hier ist $g(x,y) = xy$

$\lim_{(x,y)\to(4,0)} g(x,y) = 0$.

Somit $\lim_{(x,y)\to(4,0)} \frac{\sin xy}{xy} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$

Wir werden auch sehen das die Existenz der Ableitungen in einigen Richtungen ungenugend für die Differenzierbarkeit der Funktion ist.

Was beduetet die Ableitung in einiger Richtung

Bsp. Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \longrightarrow (x^2 + xy)\cos(xy)$$

Man kann für jedes y, die Funktion

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to (x^2 + xy)(\cos xy)$$

als Funktion einer Variablen x auffassen und die Ableitung davon berechnen.

Das Resultat mit $\frac{\partial f}{\partial x}$ bezeichnet, ist die erste partielle Ableitung von f nach x.

In diesem Fall ist es durch

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (2x + y)(\cos xy) - (x^2 + xy)\, y \sin(xy)$$ gegeben

Analog definiert man $\frac{\partial f}{\partial y}$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x(\cos xy) - (x^2+xy)x\sin(xy)$$

Die allgemeine Definition nimmt folgende Gestallt ein. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. In Zukunft bezeichnen wir die i-te Koordinate eines Vektors $x \in \mathbb{R}^n$ mit x^i; also ist $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$

Sei $e_i := (0, 0 \ldots 0, 1, 0, \ldots, 0)$ der i-te Basisvektor von $\mathbb{R}^n$.

(Defn 7.1.1 Struwe)

Defn 8.2 . Die Funktion $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heisst an der Stelle $x_0 \in \Omega$ in Richtung e_i (oder nach x^i) partielle differenzierbar falls der limes

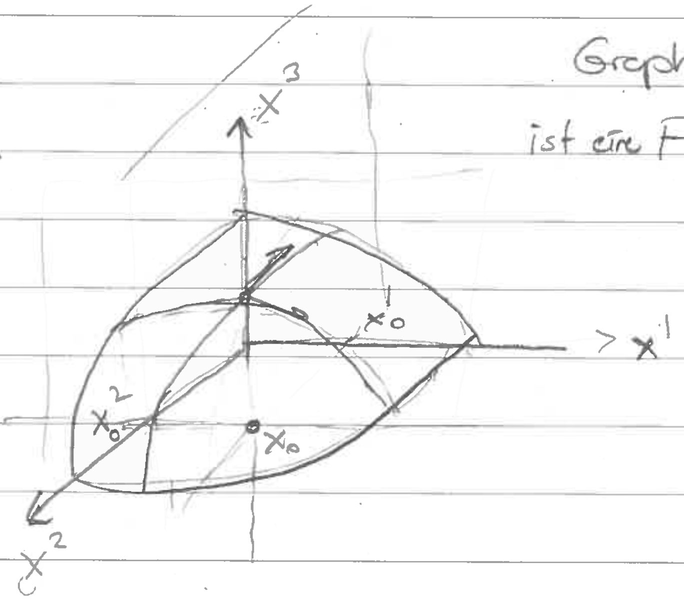
$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) := f_{x^i}(x_0) := \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_0+he_i) - f(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{\substack{h \to 0 \\ \neq 0}} \frac{f(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^i + h, x_0^{i+1}, \dots, x_0^n) - f(x_0^1, \dots, x_0^n)}{h}$$

existiert.

Bmk 8.3

Graph von $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist eine Fläche im Raum



Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x_0^1, x_0^2) \in \mathbb{R}^2$.
Wir betrachten die Scharen von f

$f(\cdot, x_0^2): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und

$f(x_0^1, \cdot): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\frac{\partial f}{\partial x^1}$, $\frac{\partial f}{\partial x^2}$ sind die Anstieg der Tangente zur entsprechende Schnittkurven

Bsp. ① $f(x,y,z) = \cos yz + \sin xy$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cos xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\sin(yz) \cdot z + \cos(xy)\, x$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\sin(yz) \cdot y$$

② $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim \frac{\frac{h^3 \cdot 0}{h^2} - 0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim \frac{\frac{0^3 h}{0+h^2} - 0}{h} = 0$$

Bmk: Für Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ einer variable impliziert die differenzierbarkeit in x_0, die Stetigkeit in x_0 und zudem eine gute Approximation von f durch eine affine Funktion in einer Umgebung von x_0.

Folgendes Beispiel zeigt, dass in $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ partielle Differenzierbarkeit keine analogous Approximationseigenschaften oder stetigkeit impliziert:

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Für alle $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ist f in ~~beiden~~ Richtungen partiel differenzierbar.

Für $(x_0, y_0) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \left.\frac{y(x^2+y^2) - 2x^2y}{(x^2+y^2)^2}\right|_{(x,y)=(x_0,y_0)} = \frac{y_0^3 - x_0^2 y_0}{(x_0^2+y_0^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x(x^2+y^2) - 2xy^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad (x,y) \neq (0,0)$$

Für $(x_0, y_0) = (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{f(0+h,0) - f(0,0)}^{f(x_0+he_1) - f(x_0)}}{h} = \lim \frac{0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{f(0,0+h) - f(0,0)}^{f(x_0+he_2) - f(x_0)}}{h} = \lim \frac{0}{h} = 0.$$

Im Ursprung besitzt f beide partielle Ableitungen, sie ist aber nicht stetig.

! Wie diese Beispiel zeigt, eine Aussage wie

"Eine Funktion in mehreren Variablen ist differenzierbar falls sie die partielle Ableitungen besitzt"

ist sinnloss !!

Der Grund ist, dass die partielle Ableitungen nur partielle Informationen geben. Wir müssen die Differenzierbarkeit irgend eine andere Weise verallgemeinern.

Die Lösung dieses Problem ist, dass man eine Approximations-Eigenschaft durch eine Lineare Abbildung postuliert.

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0; $f'(x_0)$ existiert. In diesem Fall kann f für alle x nähe x_0 durch die Funktion $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ gut approximiert werden. Dass heisst dass

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x, x_0)$$

mit $$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x, x_0)}{x - x_0} = 0$$

Bmk: $f'(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soll als lineare Abbildung interpretiert werden.

Lineare Abbildungen:

Eine Abbildung $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist linear falls für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$$

Eine solche Abbildung ist durch Ihre Werte

$$A(e_1) =: A_1 \quad , \quad A(e_2) =: A_2 , \quad \dots , \quad A(e_n) =: A_n$$

auf der Standardbasis $e_1, \dots, e_n$ eindeutig bestimmt.

Aus $x = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i$ und Linearität folgt nämlich

$$A(x) = \sum_{i=1}^{n} x^i A(e_i) = \sum_{i=1}^{n} A_i x^i \qquad (*)$$

Umgekehrt bestimmt ein Vektor $(A_1, \dots, A_n)$ vermöge der Formel $(*)$ eine lineare Abbildung.

Schreiben wir $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$ für einen Vektor $x = (x^i)_{1 \le i \le n}$

und

$A = (A_1 \dots A_n)$ für die Darstellung einer lineare Abbildung $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bezüglich die standard Basis $\{e_1, \dots e_n\}$,

so ist $A(x) = (A_1 \dots A_n) \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \sum A_i x^i$

<u>Defn. 8.4</u> (Struwe 7.1-2) Die Funktion $f: \Omega \to \mathbb{R}$ heisst an der stelle $x_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ <u>differenzierbar</u> falls eine lineare Abbildung $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gibt so dass

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + R(x_0, x)$$

wobei $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{R(x, x_0)}{|x - x_0|} = 0.$

In diesem fall heisst A der Differential an der stelle x_0 und wird mit df_{x_0} bezeichnet oder $df(x_0)$

d.h f ist total differenzierbar in $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n)$ falls reelle Zahlen $A_1, \ldots, A_n$ existieren so dass gilt

$$f(x) = f(x_0) + A_1(x^1 - x_0^1) + A_2(x^2 - x_0^2) + \cdots + A_n(x^n - x_0^n) + R(x, x_0)$$

mit $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{R(x, x_0)}{|x - x_0|} = 0$

Bmk Geometrische Interpretation

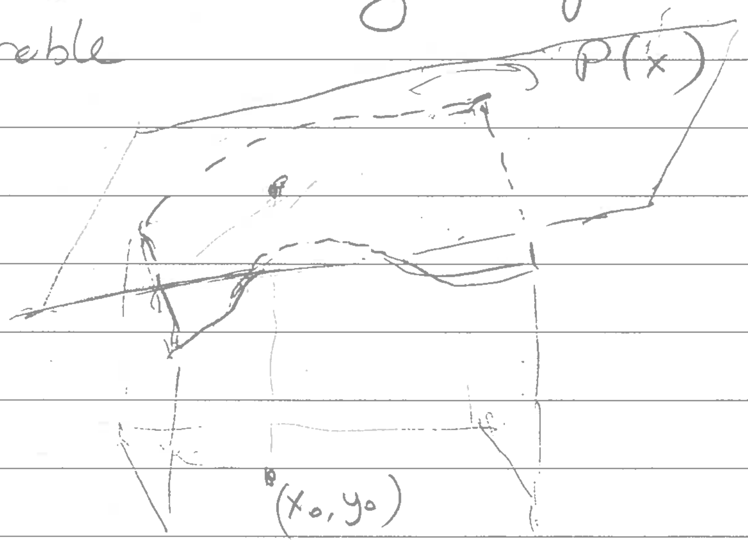
Sei $f: \Omega \to \mathbb{K}$, $\Omega \in \mathbb{R}^2$. Wir können die differenzierbare Funktion nähe dem Punkt $x_0 = (x_0^1, x_0^2)$ mit hilfe der Linearen Funktion

$$P(x) = P(x^1, x^2) = f(x_0^1, x_0^2) + \underbrace{A_1(x^1 - x_0^1) + A_2(x^2 - x_0^2)}_{d_{x_0} f(x - x_0)}$$

approximieren.

Die Differenz $\underbrace{f(x) - P(x)}_{R(x, x_0)} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ schneller als $(x - a)$

$P(x)$ ist eine Ebene. Die ist die Tangentebene zur f an der Stelle x_0 und spielt die Rolle des Tangente für Funktionen in einer Varieble



Bsp 8.5 (Stme 7.1.3.)

a) Jede affin Lineare Funktion

$f(x) = Ax + b$, $x \in \mathbb{R}^n$, wobei $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ linear, $b \in \mathbb{R}$

ist an jeder stelle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar.

mit $df_{x_0} = A$ unabhängig von x_0

da $f(x) - f(x_0) - A(x - x_0) = 0 \quad \forall x, x_0 \in \mathbb{R}^n$.

(b) Koordinaten funktionen $x^i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$(x^1, x^2, \dots, x^n) \to x^i$

$x^i(x) = x^i$.

Dann ist x^i differenzierbar an jeder stelle

$x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $dx^i|_{x = x_0} = (0, 0, \dots, 1, 0 \dots 0)$

$\uparrow$ i th stelle

die Differentiale $dx^1, dx^2, \ldots, dx^n$ bilden also an jeder Stelle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ eine Basis des Raumes $L(\mathbb{R}^n ; \mathbb{R}) := \{A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} ; A \text{ linear}\}$

wobei wir $A \in L(\mathbb{R}^n ; \mathbb{R})$ mit der Darstellung

$A = (A_1, \ldots, A_n)$ bzg del Standardbasis $\{e_1, \ldots e_n\}$

des $\mathbb{R}^n$ identifizieren, und mit $A_i = A(e_i)$

$$dx^i = (0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots, 0)$$

$$(dx^i(e_1), dx^i(e_2) \ldots \quad dx^i(e_n))$$

Da gilt $dx^i(e_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j, \end{cases}$

ist $(dx^i)_{1 \leq i \leq n}$ die duale Basis von $L(\mathbb{R}^n ; \mathbb{R})$

zur Standardbasis $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ des $\mathbb{R}^n$.

(E) Jedes $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \in C^1(\mathbb{R})$ besitzt das

Differential $df(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) \cdot dx = f'(x_0)\, dx$