$f(x) \to \infty$ für $|x| \to \infty$

Also gibt es $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0) = \min f$.

Sei x_0 eine solche. Dann folgt

$$f'(x_0) = 0$$

d.h. $\sum_{i=1}^{n} 2(x_0 - a_i) = 0 = 2\sum_{i=1}^{n} x_0 - \sum_{i=1}^{n} a_i$

d.h $n x_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i \Rightarrow x_0 = \frac{1}{n} \sum a_i$

Nun ist $f''(x) = 2n > 0$ folglich ist

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i = x_0$ die gesuchte Minimalstelle

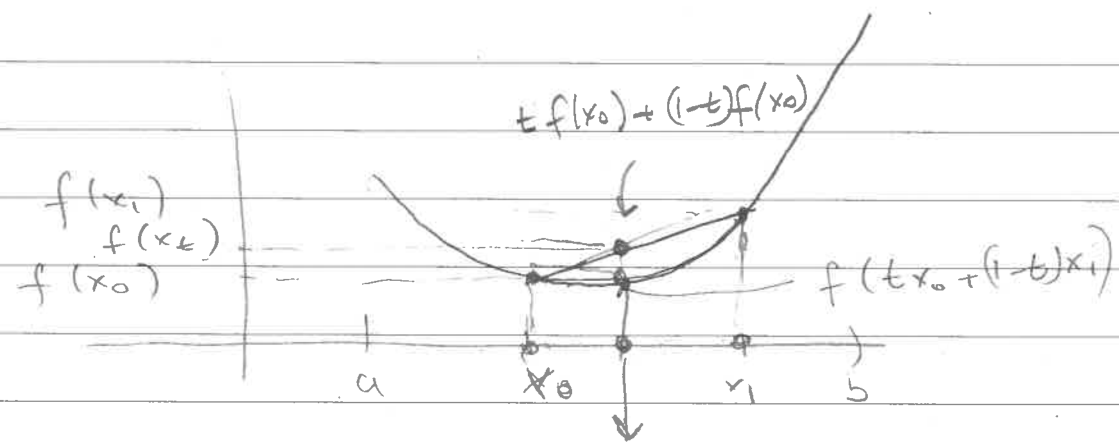
Konvexe Funktionen:

Eine einfache und geometrische Eigenschaft einer Funktion ist Konvexität: für C^2 Funktionen kann Konvexität mittels der zweiten Ableitung getestet werden

Defn 5.4.1 (Defn 5.5.2)
$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ ist **konvex** falls

$\forall\ x_0 \leq x_1$ und $t \in [0,1]$

$$f(t x_0 + (1-t) x_1) \leq t f(x_0) + (1-t) f(x_1)$$



$$x_t = t x_0 + (1-t) x_1$$

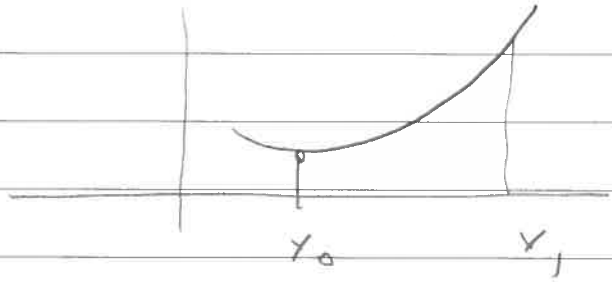
Der Graph der Funktion f liegt unterhalb jeder Verbindungsstrecke zweier seiner Punkte

Satz 5.4.2 (5.5.2) Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ der Klasse C^2, mit $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$

Dann f ist konvex.

Beweis

Seien $x_0 < x_1$ in (a,b)



Wir betrachten $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$t \longmapsto f(tx_0 + (1-t)x_1) - tf(x_0) - (1-t)f(x_1)$$

Dann gilt $g(0) = g(1) = 0$ und

$$g''(t) = f''(tx_0 + (1-t)x_1)(x_0 - x_1)^2 \geq 0$$

(Da $f'' \geq 0$)

(Wir möchten beweisen dass $g \leq 0$)

Falls es t gibt mit $g(t) > 0$ dann ist

$$\max_{t \in [0,1]} g(t) > 0.$$

Sei t_0 so dass

$$g(t_0) = \max_{t \in [0,1]} g(t) > 0$$

Offensichtlich ist $g'(t_0) = 0$;

Nun betrachten wir die (lineare) Taylorentwicklung von g im Punkte t_0, es gibt $\xi \in (t_0, 1)$ mit

$$0 = g(1) = g(t_0) + \underbrace{g'(t_0)}_{=0}(1-t_0) + \frac{\overbrace{g''(\xi)}^{>0}\overbrace{(1-t_0)}^{>0}}{2!}$$

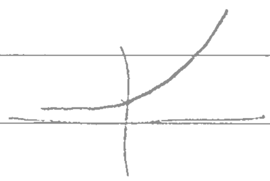
$$\geq g(t_0) > 0$$

Ein Wiederspruch. Also ist $g(t) \leq 0$ $\forall t \in [0,1]$ und f ist konvex $\blacksquare$

Bsp 5.43 (5.4.3).

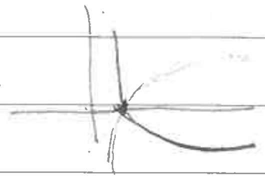
1) exp ist konv in $\mathbb{R}$

$$f''(x) = \exp x > 0$$



(2) $f(x) = -\ln x \qquad x > 0$

$f'(x) = -\frac{1}{x}$, $\quad f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$.



3) $f(x) = x \ln x$, $\quad x > 0$

$f'(x) = \ln x + 1 \qquad f''(x) = \frac{1}{x}$

4) $f(x) = x^{\alpha}$, $\quad f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$, $\quad x > 0$

$f''(x) = \alpha(\alpha - 1) x^{\alpha - 2} > 0 \Leftrightarrow \alpha > 1$

$(x^{\alpha} = \exp(\alpha \log x))$

Satz: 5.44 (Satz 4.4.3) (Jensen's ungleichung)

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ konvex.

Für alle $x_1, \dots, x_n \in (a, b)$ und $t_1, \dots, t_n \in [0, 1]$ mit $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$ gilt

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i)$$

253

Kor 5-45 Seien $x_1, \dots, x_n \in (0,\infty)$
(Bsp 5-5-4) $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0,1]$

mit $\sum \alpha_i = 1$. Dann

gilt $\prod_{i=1}^{n} \cancel{x_i}^{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$

Insbesondere $(\alpha_i = 1/n, \ 1 \leq i \leq n)$

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

(Vergleich von arithmetischen und geometrischen Mittel)

→ 253-1

Beweis: Die Funktion exp ist konvex.

Nun schreiben wir

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} = \prod_{i=1}^{n} \exp(\alpha_i \ln x_i)$$

$$= \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ln x_i\right)$$

$$\underset{\text{Jensen}}{\leq} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \exp(\ln x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

☒

253_1

Vergleich von arithmetischen und geometrischen Mittel.

Arithmetic Geometric Mean (AGM)

n=2 : $\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2}$

$$\Rightarrow 2(x_1 + x_2) \geq \underbrace{4\sqrt{x_1 x_2}}$$

Ein Rechteck mit dem Seiten x_1 und x_2 hat den Gesamtumfang $2x_1 + 2x_2$.

Ein quadrat mit dem gleichen Flächeninhalt $(x_1 x_2)$ hat den Umfang $4\sqrt{x_1 \cdot x_2}$.

AGM sagt dass Unter allen Reechtecken mit Gleichen Inhalt $A = x_1 x_2$, das Quadrat die kleinste Umfangt hat

254

Beweis 5.44 (Jensen's Ungleichung).

Induktion über $n \geq 1$.
Für $n=1$ steht $f(1 \cdot x_1) \leq 1 f(x_1)$ ✓

Für $n=2$ ist es die Definition der Konvexität

Sei nun $n \geq 3$. Wir können annehmen dass
$t_1 \neq 1$. (Ansonsten sind alle $t_i = 0$ $\forall i \geq 2$
und die Ungleichung ist trivial).

Nun schreiben wir

$$\sum_{k=1}^{n} t_k x_k = t_1 x_1 + (1-t_1) \left(\frac{\sum_{k=2}^{n} t_k x_k}{1-t_1} \right)$$

Aus Konvexität folgt dann

$$f\left(\sum t_k x_k\right) \leq t_1 f(x_1) + (1-t_1) f\left(\frac{\sum_{k=2}^{n} t_k x_k}{1-t_1}\right)$$

Nun sind $x_2, x_3, \ldots x_n$ $(n-1)$-Punkte,

die Koeffizienten $\frac{t_2}{1-t_1}, \frac{t_3}{1-t_1}, \ldots \frac{t_n}{1-t_1}$ sind alle ≥ 0

und deren Summe

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{t_k}{1-t_1} = \frac{1}{1-t_1} \sum_{k=2}^{n} t_k = \frac{1-t_1}{1-t_1} = 1$$

Jetzt kann man Induktions-Annahme anwend

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} t_k x_k\right) \leq t_1 f(x_1) + (1-t_1) f\left(\sum_{k=2}^{n} \frac{t_k}{1-t_1} x_k\right)$$

$$\leq t_1 f(x_1) + (1-t_1) \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{t_k}{1-t_1}\right) f(x_k)$$

$$= t_1 f(x_1) + \sum_{k=2}^{n} t_k f(x_k)$$

$\square$