$[-1,1]$ $\qquad \frac{1}{1-x^2} \qquad \operatorname{arctanh} x + C.$

<u>Bsp:</u> $F(x) = -\ln|\cos x| = -\frac{1}{2}\ln(\cos x)^2$

und die Ableitung ist (nach Kettenregel)

$$F'(x) = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{(\cos x)^2}\,(2\cos x)(-\sin x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

○

☒

§ 6.3 Partielle Integration

Da das Integration die Umkehrung von differenzieren ist, liefert jede Ableitungsregel eine für das Integrieren.

○ Partielle Integration ist eine Umkehrung der Leibnizschen Produktregel und besagt für unbestimmte bzw das bestimmte integral:

$$(u \cdot v)' = u'v + u \cdot v'$$

$$\Rightarrow \int uv' = uv - \int u'v + c.$$

Satz 6.21 (Partielle Integration) (Satz 6.1.2 Shu)

Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx$$

und

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx$$

Bsp 6.22

① $$\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^x}_{v'} dx = x e^x - \int 1 e^x dx$$

$$= x e^x - e^x$$

② $$\int \underbrace{x^n}_{u} \underbrace{e^x}_{v'} dx = x^n e^x - \int n x^{n-1} e^x dx$$

Durch Induktion über $n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ folgert man daraus das Resultat

$$\int x^n e^x dx = (-1)^n n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-x)^k}{k!} e^x + C.$$

(3) Partielle Integration eignet sich gut dazu, Logarithmusterme zu eliminieren

Manchmal muss man dazu den Integranden erst künstlich als Produkt schreiben.

$$\int \log x \, dx = \int \underbrace{(\log x)}_{u} \underbrace{(1)}_{v'} \, dx$$

$$= (\log x) x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx = x \log x - x + C$$

(4) Manchmal führt wiederholte partielle Integration auf den ursprünglichen Ausdruck zurück. Mit Glück kann man dann noch diesem auflösen

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \underbrace{(\sin x)}_{u} \underbrace{(\sin x)}_{v'} \, dx$$

$$= -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \, dx$$

$$= -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x) \, dx$$

$$= -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x \, dx$$

$$\Rightarrow \quad 2 \int \sin^2 x \, dx = x - \sin x \cos x$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} (x - \sin x \cos x)}$$

Bsp 6.23

(Bsp 6.1-3 stmt))

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{k+1}\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \underbrace{(\sin x)^k}_{u} \underbrace{(\sin x)}_{v'}\,dx$$

$$= \underbrace{(\sin x)^k}_{u} \underbrace{(-\cos x)}_{v} \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \underbrace{k(\sin x)^{k-1}(\cos x)}_{u'} \underbrace{(-\cos x)}_{v}\,dx$$

$$= 0 + k\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{k-1}\left[1-\sin^2 x\right] dx$$

$$= k\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{k-1} - k\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{k+1}\,dx$$

Also:
$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{k+1}\,dx = \frac{k}{(1+k)} \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{k-1}\,dx$$

Falls $k+1 = 2n$

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2n}\,dx = \frac{2n-1}{2n} \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2(n-1)}\,dx$$

$$= \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} 1\,dx$$

$$= \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)\cdots 1}{[(2n)(2n-2)\cdots 2]^2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2}$$

Analog: $\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2n+1}\, dx = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$

Beachte: der π-Term kommt im zweiten Fall nicht vor!

Dies benutzen wir wie folgt um ein "Formel" für π aufzustellen.

Für $0 \leq x \leq \pi/2$:

$$(\sin x)^k - (\sin x)^{k+1} = (\sin x)^k [1 - \sin x] \geq 0$$

$$\Rightarrow (\sin x)^k \geq (\sin x)^{k+1} \qquad (k \geq 0,\quad 0 \leq x \leq \tfrac{\pi}{2})$$

Also $\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2n+1}\, dx \leq \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2n}\, dx \leq \int_0^{\pi/2} \sin x^{2n-}$

d.h

$$\frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} \leq \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \leq \frac{(2^{n-1}(n-1)!)^2}{(2n-1)!}$$

$$\frac{(2^{n-1}(n-1)!)^2}{(2n-1)!} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n)!} \cdot \frac{1}{2n}$$

Also:

$$\frac{(2^n n!)^4 \cdot 2}{(2n+1)!\,(2n)!} \leq \pi \leq \frac{(2^n n!)^4}{(2n!)^2} \cdot \frac{2}{2n}$$

$$\frac{(2^n n!)^4 \cdot 2}{((2n)!)^2 (2n+1)} \leq \pi \leq \frac{(2^n n!)^4}{((2n)!)^2} \cdot \frac{2}{2n}$$

$$\Rightarrow \quad \pi = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \frac{(2^n n!)^4}{(2n!)^2}$$

Wallische Formel.

Bsp 6.24 (Bsp 6-1-4. Strauss) (Stirlingsche Formel)

Für $n \geq 2$ sei $\ln(n!) = \sum_{k=2}^{n} \ln(k)$

Wir zeigen dass man $\ln|k|$ sehr gut durch $\int_{k-1/2}^{k+1/2} \ln x \, dx$ approximieren:

Da $x \ln x - x$ Stammfunktion von $\ln(x)$ ist, folgt $\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln x \, dx = x \ln x - x \Big|_{k-\frac{1}{2}}^{k+1/2}$

Darin kommen also $\ln\left(k+\frac{1}{2}\right)$ sowie $\ln\left(k-\frac{1}{2}\right)$ vor. Wir benutzen nun Taylor:

Falls $g(x) = \ln(x)$ sei

$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + \frac{g''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{g^{(3)}(\xi)}{3!}(x-x_0)^3$$

mit ξ zwischen x und x_0.

Auf $\left.\begin{array}{l} x = k + \frac{1}{2} \\ x_0 = k \end{array}\right\}$ aufgewendet ergibt:

$$\ln\left(k + \frac{1}{2}\right) = \ln k + \frac{1}{2k} - \frac{1}{8k^2} + t_k$$

wobei $t_k = \frac{2}{\xi^3} \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{24 \xi^3}$

$$|t_k| \leq \frac{1}{24 k^3} \qquad \xi \in \left[k, k + \frac{1}{2}\right]$$

Analog

$$\ln\left(k - \frac{1}{2}\right) = \ln k - \frac{1}{2k} - \frac{1}{8k^2} + t_k'$$

$$|t_k'| \leq \frac{1}{24 \left(k - \frac{1}{2}\right)^3}$$

Also: $\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+1/2} \ln x \, dx =$

$$\left(k + \frac{1}{2}\right)\left(\ln(k) + \frac{1}{2k} - \frac{1}{8k^2} + t_k\right) - \left(k + \frac{1}{2}\right)$$

$$- \left[\left(k - \frac{1}{2}\right)\left(\ln k - \frac{1}{2k} - \frac{1}{8k^2} + t_k'\right) - \left(k - \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= \ln k - \frac{1}{8k^2} + \left(k + \frac{1}{2}\right) t_k - \left(k - \frac{1}{2}\right) t_k'$$

$$= \ln k + r_k \quad \text{wobei} \quad |r_k| \leq \frac{c}{k^2}$$

Nun folgt:

$$\ln n! = \sum_{k=2}^{n} \ln k = \sum_{k=2}^{n} \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln x \, dx - \sum_{k=2}^{n} r_k$$

$$\left(\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+1/2} \ln x \, dx = \ln k + r_k \right)$$

$$= \underbrace{\int_{1}^{n+\frac{1}{2}} \ln x \, dx}_{(*)} - \int_{1}^{3/2} \ln x \, dx - \sum_{k=2}^{n} r_k$$

$$(*) = \int_{1}^{n+\frac{1}{2}} \ln x \, dx = x \ln x - x \Big|_{1}^{n+\frac{1}{2}}$$

$$= \left(n+\frac{1}{2}\right) \ln\left(n+\frac{1}{2}\right) - \left(n+\frac{1}{2}\right) + 1$$

$$= \left(n+\frac{1}{2}\right) \ln\left(n+\frac{1}{2}\right) - n + \frac{1}{2}$$

Ersetzen wir $\ln\left(n+\frac{1}{2}\right) = \ln n + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + t_n$

so folgt

$$(*) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n - n + \left(n+\frac{1}{2}\right)\left\{\frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + t_n\right\} + \frac{1}{2}$$

$$= \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n - n + \frac{1}{2} - \frac{1}{8n} + n t_n + \frac{1}{4n} - \frac{1}{16n^2} + \frac{1}{2}t_n$$

$$+ \frac{1}{2}$$

$$= \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n - n + 1 + \frac{1}{8n} + n t_n - \frac{1}{16n^2} + \frac{1}{2} t_n$$

Also:

$$\ln(n!) = n\ln n + \frac{1}{2}\ln n - n + a_n$$

wobei $a_n = \frac{1}{4n} + \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-1}{8n^2} + t_n\right) + \sum_{k=2}^{n} r_k - \int_1^{3/2} \ln x\,dx + 1$

und $|r_k| \leq \frac{c}{k^2} \Rightarrow \sum_{k=2}^{n} r_k$ konvergiert

Sei $a := \lim a_n$, $b = e^a$ und $b_n = e^{a_n}$

Also $\log n! = \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n - n + a_n$

$$= \log n^{n+\frac{1}{2}} - n + a_n$$

folgt

$$n! = n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{a_n} = \sqrt{n}\, n^n e^{-n} \underbrace{e^{a_n}}_{b_n}$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{n!}{\sqrt{n}\, n^n e^{-n}}$$

Wir möchten jetzt $b := e^a$ bestimmen

$$b = \lim b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n^2}{b_{2n}} = \lim \left(\frac{n!}{\sqrt{n}\, n^n e^{-n}}\right)^2 \left(\frac{\sqrt{2n}\,(2n)^{2n} e^{-2n}}{(2n)!}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} b_{2n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \sqrt{\frac{2}{n}} \frac{(2n)^{2n}}{n^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \sqrt{\frac{2}{n}}\, 2^{2n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2^n n!)^2}{(2n)!} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$$

Wallische Formel.

$$= \sqrt{2\pi}$$

Also $b = \sqrt{2\pi}$ somit

$$\boxed{n! \approx \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}}$$ Stirling's formula.

Das asymptotische Verhalten von $n!$

Bsp. Der Satz von Taylor.

Die Taylor-Entwicklung einer Funktion $f \in C^{n+1}$ um x_0 erhält man durch n-fache partielle Integration:

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} \underbrace{(x-t)^0}_{v'} \underbrace{f'(t)}_{u}\,dt$$

$$= (x-x_0) f'(x_0) + \int_{x_0}^{x} \underbrace{(x-t)^1}_{v'} \underbrace{f''(t)}_{u}\,dt$$

$$= (x-x_0) f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2} f''(x_0) + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} (x-t)^2 f'''(t)$$

$$\vdots$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (x-x_0)^k \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Aus Mittelwertsatz der Integralrechnung bekommt man die Lagrange-Restgliedformel.

$$\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$ für ein $\xi \in [x_0, x]$

§ 6.3 Methode der Substitution

Methode der Substitution ist eine Umkehrung der Kettenregel

(Satz 6.1.5 - Stirne)

Satz 6.25 (Substitutionregel)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig

$g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ der Klasse C^1

so wie $t_0 \leq t_1$ in $[\alpha, \beta]$ so dass

$g([t_0, t_1]) \subset [a,b]$.

Dann gilt

$$\int_{g(t_0)}^{g(t_1)} f(x)\,dx = \int_{t_0}^{t_1} f(g(t))\,g'(t)\,dt.$$

Beweis: Sei $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion für f. Dann gilt
(Nach Hauptsatz B)

$$\int_{g(t_0)}^{g(t_1)} f(x)\,dx = F(g(t_1)) - F(g(t_0))$$

Noch der Kettenregel haben wir

$$(F\circ g)'(t) \overset{\text{KRegel}}{=} F'(g(t)) \cdot g'(t) \overset{F'=f}{=} f(g(t)) \cdot g'(t)$$

d.h $F\circ g$ ist eine Stammfunktion für

$f(g(t))\, g'(t)$.

Woraus mit dem Hauptsatz B folgt

$$\int_{t_0}^{t_1} f(g(t))g'(t)\,dt = (F\circ g)(t_1) - (F\circ g)\,t_0$$

$$= F(g(t_1)) - F(g(t_0))$$

$$= \int_{g(t_0)}^{g(t_1)} f(x)\,dx$$

$\boxtimes$

Kor 6.26 $\int f(x)dx = \int f(g(t))\, g'(t)\,dt + C$.

Dies Formel bedeutet folgenden:

Die Linke Seite als Funktion von x ist gleich der rechten Seite als Funktion von t vermöge der Relation

$$x = g(t)$$

$$dx = g'(t)\,dt$$

Für die Substitutionsregel

$$\int_{t_0}^{t_1} f(g(t))\, g'(t)\,dt = \int_{g(t_0)}^{g(t_1)} f(x)\,dx$$

gibt es im Prinzip zwei Lesarten:

Man kann sie entweder von links nach rechts oder von rechts nach links anwenden:

(A) (links → rechts)

Liegt ein Integral explizit in der Form

$$\int_{t_0}^{t_1} f(g(t))\, g'(t)\,dt \quad \text{vor,}$$

so können wir die Substitutionsregel von links nach rechts anwenden.

Bsp: (1) $\int_0^1 (1+t^2)^4 (2t)\,dt$

Setzt man nämlich $f(x) := x^4$

$$x = g(t) := 1 + t^2$$

$$dx = g'(t)\,dt = 2t\,dt$$

so folgt

$$\int_0^1 (1+t^2)^4 (2t)\,dt = \int_0^1 f(g(t))\,g'(t)\,dt$$

$$= \int_{g(0)}^{g(1)} f(x)\,dx = \int_1^2 x^4\,dx = \frac{1}{5} x^5 \Big|_1^2$$

$$= \frac{32}{5} - \frac{1}{5} = \frac{31}{5}$$

(2) $\int \sin^3 t \cos t \, dt$

Die Substitution $x = \sin t$ mit $\frac{dx}{dt} = \cos t$

$$dx = \cos t\,dt$$

liefert $\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C = \frac{\sin^4 t}{4} + C.$

(3) $\int \tan t\,dt = \int \frac{\sin t}{\cos t}\,dt$

Die Substitution $x = \cos t$ $\frac{dx}{dt} = -\sin t$, $dx = -\sin t\,dt$

$$\int \tan t\,dt = -\int \frac{1}{\cos t}(-\sin t)\,dt = -\int \frac{1}{x}\,dx = -\log|x| + C$$

$$= -\log|\cos t| + C.$$

(B) (rechts → links)

Ein integral liegt der Gestalt
$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$ mit gewissen Grenzen
$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vor,

das schwer zu berechnen scheint,

versucht man dann mittels geeigneter Substitution $x = g(t)$, dieses Integral umzuformulieren, so dass die Substitutionsregel anwendbar ist, wobei $g(t_0) = \alpha$ und $g(t_1) = \beta$ gelten muss.

Bsp 6.26 (1) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ für

Also $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Mit der Substitution

$x = g(t) := \sin t$, $t \in [0, \pi/2]$, $dx = \cos t\,dt$

ist dann $g(0) = 0$, $g(\frac{\pi}{2}) = 1$

und
$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{g(0)}^{g(\pi/2)} f(x)\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} f(g(t))\, g'(t)\,dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cdot \cos t\,dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt \qquad \left(\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}\right)$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\,dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2}(t + \sin t \cos t)\Big|_0^{\pi/2} = \pi/4$$

Bsp 2
$$\int \frac{x}{\sqrt{2x-3}}\,dx \qquad u = \sqrt{2x-3}$$

$$du = \frac{1}{2}(2x-3)^{-1/2} \cdot 2\,dx$$

$$= \int \left(\frac{u^2+3}{2}\right) du \qquad = \frac{dx}{\sqrt{2x-3}}$$

$$u^2 = 2x-3$$

$$= \frac{1}{2}\int (u^2+3)\,du \qquad \frac{u^2+3}{2} = x$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{u^3}{3} + 3u\right) = \frac{u}{2}\left(\frac{u^2}{3}+3\right) = \frac{\sqrt{2x-3}}{2}\cdot\left[\frac{2x-3}{3}+3\right] + C$$

$$= \sqrt{2x-3}\left(\frac{x}{3}+1\right) + C$$