

# Kapitel 4

## Stetigkeit

### 4.1 Grenzwerte von Funktionen

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  eine Teilmenge und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Abbildung.

#### Definition 4.1

$f$  hat an der Stelle  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  den *Grenzwert*  $a$ , falls für jede Folge  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $\Omega$  mit  $x_k \rightarrow x_0$  ( $k \rightarrow \infty$ ) gilt  $f(x_k) \rightarrow a$ .

Wir schreiben:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$

**Bemerkung:**  $x_0$  muss nicht im Definitionsbereich von  $f$  sein.

#### Definition 4.2

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  heisst *stetig* an der Stelle  $x_0 \in \Omega$  falls:

1.  $f$  an der Stelle  $x_0$  definiert ist,
2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existiert, und
3.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

#### Definition 4.2'

Die Abbildung  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist im Punkt  $x_0 \in \Omega$  *stetig*, falls für jede gegen  $x_0$  konvergierende Folge  $(x_n)_{n \geq 1}$  in  $\Omega$ , die Folge  $(f(x_n))_{n \geq 1}$  zum Grenzwert  $f(x_0)$  konvergiert, d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right)$$

Anders gesagt:

- Grenzwerte von Folgen werden von stetigen Funktionen nicht verändert.

- Stetige Funktionen erhalten Grenzwerte von Folgen.

**Definition 4.2''**

Die Abbildung  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist auf  $\Omega$  *stetig* (oder *einfach stetig*, wenn der Kontext klar ist), falls  $f$  in jedem Punkt  $x \in \Omega$  stetig ist.

**Beispiele**

Mittels Resultate aus dem dritten Kapitel haben wir wichtige Beispiele von stetigen Funktionen.

- Diese Funktion ist auf ganz  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  stetig:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (a, b) &\mapsto (a + b) \end{aligned}$$

(Seien  $(a_n), (b_n)$  Folgen mit  $a = \lim a_n, b = \lim b_n$ . Dann ist die Folge  $(a_n + b_n)$  konvergent, und  $\lim a_n + b_n = a + b$ , nach Satz 3.8)

- Diese Funktion ist auf ganz  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  stetig:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (a, b) &\mapsto ab \end{aligned}$$

- Diese Funktion ist auf  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^x$  stetig:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^x &\rightarrow \mathbb{R} \\ (a, b) &\mapsto a/b \end{aligned}$$

- Aus wiederholter Anwendung von 1. und 2. ergibt sich die *Polynomiale Funktion*:

heisst die wirklich so?

Sei  $n \geq 0, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} : p(x) := a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$

Die Polynomiale Funktion ist stetig auf ganz  $\mathbb{R}$ .

- Die beiden folgenden Abbildungen sind stetig auf ihrem Definitionsbereich.

$$\begin{array}{ll} \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \\ (a, b) \mapsto (a + b) & (\lambda, a) \mapsto \lambda a \end{array}$$

- Die folgenden Abbildungen sind stetig.

$$\begin{array}{lll} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} & \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} & \mathbb{C} \times \mathbb{C}^x \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto \bar{z} & (z, w) \mapsto z * w & (z, w) \mapsto z/w \end{array}$$

what goes there? p130  
(week8sem1)

- Die folgenden Funktionen sind auf [...] stetig:

## KAPITEL 4. STETIGKEIT

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^d &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|x\|\end{aligned}$$

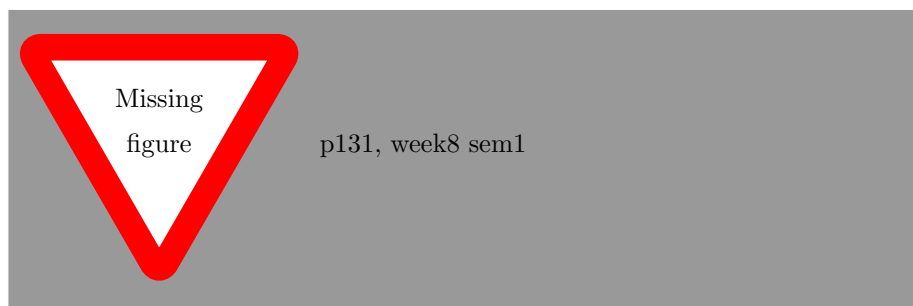
$$\begin{aligned}\mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{R} \\ z &\mapsto |z|\end{aligned}$$

- Die charakteristische Funktion von  $\mathbb{Q}$ :

$$\text{Sei } f(x) = \chi_{\mathbb{Q}} = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Sei  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  fest mit  $(x_k) \in \mathbb{Q}, x_k \rightarrow x$ . Dann ist  $f(x_k) = \chi(x_k) = 1 \not\rightarrow 0 = \chi(x)$ .  
(Zu  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , sei  $x_k$  die an der  $k$ -ten Nachkommastelle abgebrochene Dezimaldarstellung von  $x$ . Dann gilt  $x_k \in \mathbb{Q} \forall k \in \mathbb{N}$  und  $x_k \rightarrow x$ .)

- Sei  $f : \begin{cases} x & x < 1 \\ x & x > 1 \end{cases}$



$f$  ist in  $x = 1$  nicht stetig, weil  $f$  an der Stelle  $x = 1$  nicht definiert ist. In diesem Beispiel ist die Funktion  $f$  nicht stetig, aber sie ist eigentlich eine "gute" Funktion.

Does that really say gute?

no ozlem number...

### Definition (Struwe 4.1.3 (ii))

$\Omega \subset \mathbb{R}^d, f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, x_0 \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega$  so dass  $\exists (x_k) \in \Omega$  mit  $\lim x_k = x_0$ .

Dann ist  $f$  an der Stelle  $x_0$  *stetig ergänzbar* falls  $a = \lim f(x_k)$  existiert. In diesem Fall setzen wir

$$f(x_0) = a$$

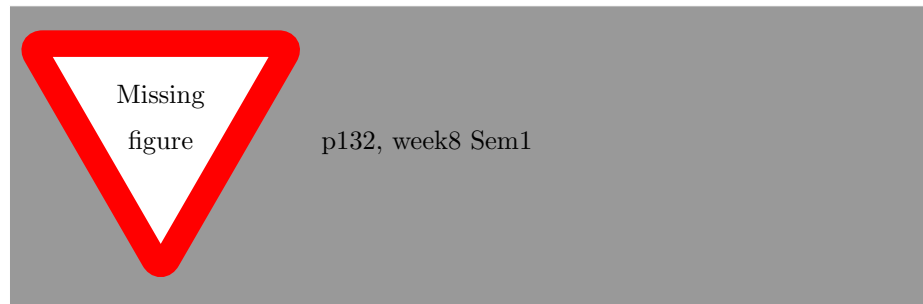
Die durch  $f(x_0) = a$  ergänzte Funktion  $f$  ist offenbar stetig an der Stelle  $x_0$ .

offenbar  $\rightarrow$  offensichtlich?

- Diese stückweise konstante Funktion ist stetig an jeder Stelle  $x_0 \neq 0$ . Sie ist jedoch für  $a \neq b$  an der Stelle  $x_0 = 0$  nicht stetig ergänzbar. (Struwe Beispiel 4.1.3 (vii))

$$f : \mathbb{R}^x \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{falls } x < 0 \\ b & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$



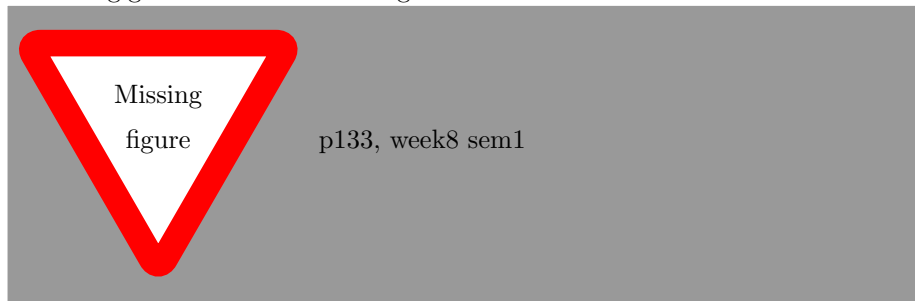
- Sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  monoton wachsend, d.h.  $\forall x, y \in (a, b)$  mit  $x \leq y$  folgt  $f(x) \leq f(y)$ . Sei ausserdem  $x_0 \in (a, b)$ . Dann existieren die *links- und rechtsseitigen Grenzwerte*

$$f(x_0^+) := \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0 \\ x \downarrow x_0}} f(x), \quad f(x_0^-) := \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0 \\ x \uparrow x_0}} f(x)$$

und  $f$  ist stetig an der Stelle  $x_0$  genau dann, wenn  $f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0)$ .

### Beweis

Wir behaupten, dass für jede Folge  $(y_n)_{n \geq 1}$  mit  $\{y_n : n \geq 1\} \subset (a, x_0)$  und  $\lim y_n = x_0$  die Folge  $(f(y_n))_{n \geq 1}$  konvergent und der linksseitige Limes  $l_-(x_0)$  unabhängig von der Wahl der Folge ist.



Wir betrachten zunächst die “spezielle” Folge  $x_n = (x_0 - \frac{1}{n})_{n \geq r}$ . Hier ist  $r$  so gewählt, dass  $x_0 - \frac{1}{r} \geq a$ .

Dann ist  $(f(x_0 - \frac{1}{n}))_{n \geq r}$  monoton wachsend ( $x_0 - \frac{1}{n+1} > x_0 - \frac{1}{n}$  und  $f$  monoton wachsend) und  $(f(x_0 - \frac{1}{n}))_{n \geq r}$  beschränkt ( $f(a) < \dots < f(b)$ ).

$$\text{Sei } l_- := \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_0 - \frac{1}{n})$$

Wir möchten zeigen, dass für jede  $(y_n) \subset (a, x_0)$  mit  $\lim y_n = x_0$   $\lim f(y_n)$  existiert und  $\lim f(y_n) = l_-$ .

Da es für jedes  $x < x_0$  ein  $n$  gibt, mit  $x \leq x_0 - \frac{1}{n}$  folgt

$$f(x) \leq f(x_0 - \frac{1}{n}) \leq l_-$$

## KAPITEL 4. STETIGKEIT

unreadable p134 mid

Sei nun  $(y_n)_{n \geq 1}$  beliebig in  $(a, x_0)$  mit  $\lim y_n = x_0$ . Sei  $\varepsilon > 0$ ,  $(y_n < x_0)$  und  $n_0(\varepsilon)$  mit

$$l_- - \varepsilon < f(x_0 - \frac{1}{n}) \leq l_- \quad \forall n > n_0(\varepsilon)$$

Insbesondere

$$l_- - \varepsilon < f(x_0 - \frac{1}{n_0(\varepsilon)}) \leq l_-$$

Sei jetzt  $n_1(\varepsilon) = n_1(n_0(\varepsilon)) > 0$  so dass

$$x_{n_0(\varepsilon)} = x_0 - \frac{1}{n_0(\varepsilon)} < y_n < x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \forall n \geq n_1(\varepsilon)$$

$$((y_n) < (a, x_0), \lim y_n = x_0)$$

Da  $f$  monoton ist, folgt

$$l_- - \varepsilon < f(x_0 - \frac{1}{n_0(\varepsilon)}) \leq f(y_n) \leq l_- = \lim f(x_n)$$

Insbesondere  $\lim f(y_n) = l_-$ .

Der Beweis für  $L_+$  verläuft ganz analog.

Nun zur Stetigkeit: Es gilt immer

$$l_-(x_0) \leq f(x_0) \leq l_+(x_0)$$

Falls  $l_-(x_0) < l_+(x_0)$  sei  $(t_n)_{n \geq 1}$  wie folgt definiert:

$$t_n = \begin{cases} x_0 - \frac{1}{n} & n \text{ gerade} \\ x_0 + \frac{1}{n} & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Dann gilt  $\lim t_n = x_0$ . Aber  $f(t_{2n+1}) - f(t_n) \geq l_+(x_0) - l_+(x_0) > 0$ , woraus folgt dass  $(f(t_n))_{n \geq 1}$  nicht konvergent.

Falls  $l_-(x_0) = l_+(x_0)$  folgt die Stetigkeit sofort.

dest? p 135 bottom

### Satz 4.3

Sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  monoton wachsend. Dann ist die Menge der Unstetigkeitspunkte von  $f$  entweder endlich oder abzählbar.

### Beweis

Sei  $U(f) = \{x \in (a, b) : f \text{ ist nicht stetig an } x\}$ . Dann ist  $\forall x \in U(f), \quad l_-(x) < l_+(x)$  und wir wählen ein  $g(x) \in (l_-(x), l_+(x))$ . Falls  $x_1 < x_2$  in  $U(f)$  folgt  $l_+(x_1) < l_-(x_2)$  und somit  $g(x_1) < g(x_2)$ . Damit ist  $g : U(f) \rightarrow \mathbb{R}$  injektiv.

Stetigkeit verhält sich gut mit den üblichen Operationen auf Funktionen.

unreadable.. p136 mid

same unreadable character

### Satz 4.4

Seien  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $x_0 \in \Omega$ . Falls  $f$  und  $g$  in  $x_0$  stetig sind, so sind es auch  $f + g$  und  $\alpha f$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

verträgt?

**Korollar 4.5**

Falls  $f, g$  auf  $\Omega$  stetig sind, so sind es  $f + g$  und  $\alpha f$ .

**Definition 4.6**

$$C(\Omega, \mathbb{R})$$

bezeichnet die Menge der stetigen Abbildungen  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Nach Korollar 4.5 ist es ein Vektorraum.

**Satz 4.7**

Seien  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, \Omega \subset \mathbb{R}^d$  und  $g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $f(\Omega) \subset \Gamma$  und  $x_0 \in \Omega, y_0 = f(x_0) \in \Gamma$ . Falls  $f$  in  $x_0$  und  $g$  in  $y_0$  stetig sind, folgt, dass  $g \circ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  in  $x_0$  stetig ist.

**Beweis**

Sei  $(t_n)_{n \geq 1}$  in  $\Omega$  mit  $\lim t_n = x_0$ . Da  $f$  stetig ist,  $\lim f(t_n) = f(x_0) = y_0$ , und aus der Stetigkeit von  $g$  folgt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(f(t_n)) = g(y_0) = (g \circ f)(x_0)$$

**Korollar 4.8**

Falls  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d, f(\Omega) \subset \Gamma$  und  $g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^m$ , auf  $\Omega$  bzw auf  $\Gamma$  stetig sind, so folgt, dass  $g \circ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  auf  $\Omega$  stetig ist.

**4.2 Stetige Funktionen**