

# Kapitel 1

## Logik und Unterlagen

Im Laufendes Semester werden wir viele mathematische Beweise einführen. Heute werden wir uns mit der Mathematische Logik beschäftigen.

In Mathematik stützen wir uns auf gewisse Grundannahmen "Axiome", die wir als gegeben ansehen. Eine dieser Annahmen ist der

### Satz von ausgeschlossenen Dritten

Eine zulässige mathematische Aussage ist entweder wahr oder falsch, jedoch nie beiden zugleich.

### Beispiel

1.  $5 < 7$  Wahr
2.  $4 < 2$  Falsch

In der Wirklichen Welt ist es anders , z.B. "Mathematik ist schön", wahr oder falsch?

Mit Aussagen kann man "rechnen". Wir führen nun ein Paar Notationen der Logik ein:

Seien  $A, B$  Aussagen

- $A$  und  $B$  wird mit  $A \wedge B$  bezeichnet
- $A$  oder  $B$  wird mit  $A \vee B$  bezeichnet

### Folgerung (eine wahre implikation)

- Aus  $A$  folgt  $B$  wird mit  $\Rightarrow$  bezeichnet
- Wenn  $A$ , dann  $B$  wird mit \_\_\_\_\_
- Die negation der Aussage  $A$  wird mit  $\neg A$  bezeichnet
- $A$  ist equivalent zu  $B$  wird mit  $A \Leftrightarrow B$  bezeichnet
- $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$   $A$  wahr genau dann, wenn  $B$  wahr ist.

??gehäufige?? Page 1

WHAT??

### Bemerkung

Die Folgerung ist transitive. Wir wissen  $A \Rightarrow B$  und  $B \Rightarrow C$ , dann wissen wir dass  $A \Rightarrow C$ .

### Prinzip der Mathematischen Beweises

Wir können hier eine Kette von Folgerungen

$$A \Rightarrow B \Rightarrow C \cdots \Rightarrow S$$

einen mathematischen "Satz"  $S$  aus einer Annahme  $A$  herleiten. (Ein Beweis ist eine Folge von Implikationen von Aussagen).

### Kontraposition (Umkehrschluss)

$A \Rightarrow B$  ist gleichbedeutend mit  $\neg B \Rightarrow \neg A$ .

Falls  $A \Rightarrow B$ , so kann  $A$  nicht wahr sein wenn  $B$  falsch ist (weil  $A$  wahr wäre, würde  $B$  auch wahr sein).

## 1.1 Prinzip des Indirekten Beweises

Zum Beweis der Aussage  $A \Rightarrow B$  genügt es die Aussage  $\neg B \Rightarrow \neg A$  zu zeigen, oder: die Annahme  $A \wedge \neg B$  zum Widerspruch zu führen.

### Indirekten Beweis

Might require an enumerated list

Man fügt  $\neg B$  als Annahme hinzu und kommt nach einer Kette von erlaubten Schlüssen zu einer falschen Aussage.

Hieraus schliesst man, dass die Zusatzannahme  $\neg B$  nicht wahr ist.

### Beispiel 1.1

$A$  = "jede natürliche Zahl  $n$  hat einen Nachfolger  $n + 1$ "

$B$  = "es gibt keine grösste natürliche Zahl"

Wir beweisen dass aus  $A$  folgt  $B$ . Nehmen wir an, dass  $A$  wahr und  $B$  falsch ist.

$\neg B$  = es gibt eine grösste natürliche Zahl  $N_0$  d.h.  $N_0 > l$  für jedes  $l \in \mathbb{N}$ .

Mittels der Aussage  $A$  wissen wir dass  $N_0$  einen Nachfolger  $N_0 + 1$  hat. Dann  $N_0 + 1 > N_0$ . Das ist aber ein Widerspruch.

### Definition 1.1

Eine Menge ist eine Zusammenfassung verschiedener Objekte zu einem Ganzen.

Die Objekte werden Elemente der Menge genannt.

## KAPITEL 1. LOGIK UND UNTERLAGEN

Sei  $A$  eine Menge, dann "a ist element von  $A$ " wird mit " $a \in A$ " bezeichnet. Seien  $A, B$  Mengen, dann "jedes Element von  $A$  ist ein Element von  $B$ " wird mit " $A \subset B$ " bezeichnet, und man sagt " $A$  ist in  $B$  enthalten" (oder  $A$  ist teilmenge von  $B$ ).

Falls zugleich  $A \subset B$  und  $B \subset A$  gilt, bezeichnet man  $A$  und  $B$  als gleich und schreibt  $A = B$ .

### Beispiele 1.2

1. Die Menge  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  der Natürlichen zahlen.
2. Die leere Menge mit " $\emptyset$ " bezeichnet. Sie ist in jeder Menge enthalten.
3. Die Menge  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  aller ganze Zahlen.
4. Meistens werden Mengen nicht durch die Liste ihre Elemente gegeben, sondern durch bestimmte Eigenschaften ihrer Elemente definiert

$$\mathbb{P} = \{2, 3, 4, 5, 7, 11, 13, \dots\}$$

die Menge aller Primzahlen  $\mathbb{P} : \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ primzahl}\}$

## 1.2 Zwei Prinzipien

Wir werden 2 Methoden des Beweises häufig benutzen.

### 1. Prinzip des Indirekten Beweises

Zum Beweis der Aussage  $A \Rightarrow B$  genügt es die Aussage  $\neg B \Rightarrow \neg A$  zu zeigen, oder, die Annahme  $A \wedge \neg B$  zum Widerspruch zu führen.

### 2. Prinzip der Vollständigen Induktion

Sei für jedes  $n \in \mathbb{N}$  eine Behauptung  $A(n)$  gegeben. Soll die Behauptung für alle natürlichen Zahlen  $n \in \mathbb{N}$  bewiesen werden so genügen dazu zwei Beweisschritte:

- i) Der Beweis von  $A(0)$
- ii) Für jedes  $n \in \mathbb{N}$ , der Beweis von  $A(n+1)$  unter der Voraussetzung, dass  $A(n)$  gilt.

Oft Behauptungen nicht von  $n = 0$  antreten.

Soll die Gültigkeit von  $A(n)$  für alle  $n \geq m$  bewiesen werden so genügen wieder zwei Schritte:

- i) Beweis von  $A(m)$
- ii) Für jedes  $n \geq m$  impliziert  $A(n)$  die Behauptung  $A(n+1)$

Das Prinzip der Vollständige Induktion ist genau wie ein Dominoeffekt.

Sie stellen alle Dominosteinen eine nach der andere. Falls der erste Dominostein fällt ( $A(1)$  wahr) und falls wir die Dominosteinen genug nebeneinander gestellt haben, so dass ein fallender Dominostein den nächsten trifft ( $A(k) \Rightarrow A(k+1)$ ) dann wissen wir, dass alle Dominosteinen fallen.

### Beispiel 1.3 (Induktion)

1. Für alle  $n \geq 1$  gilt:

$$1 + 3 + 5 + \dots (2n - 1) = n^2 A(n)$$

Beweis mittels Vollständige Induktion

- i)  $A(i)$  lautet  $1 = 1^2$  und gilt.
- ii) Sei  $n \geq 1$ . Annahme: so gilt  $A(n)$ . Die Linke Seite der Identität  $A(n+1)$  ist

$$1 + 3 + \dots (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

ERRORE!!!!!!!!!!

womit  $A(n + 1)$  bewiesen ist.

2. Als zweite Beispiel für Vollständige Induktion beweisen wir den Fundamental Satz von Euklid:

### Satz 1.4

Jede Natürliche Zahl  $n \geq 2$  ist ein Produkt von Primzahlen, dass bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig ist. Wir werden uns hier nicht mit der Eindeutigkeit befassen.

### Beweis

Sei  $A(n)$  die Aussage: Jede Natürliche Zahl  $m$  mit  $2 \leq m \leq n$  ist ein Produkt von Primzahlen

- i)  $A(2)$  gilt denn 2 ist Primzahl
- ii) Sei  $n \geq 2$ . Wir nehmen an, dass  $A(n)$  gilt. Für  $n + 1$  gibt es zwei Möglichkeiten
  - a)  $n + 1$  ist eine Primzahl und somit gilt  $A(n + 1)$
  - b)  $n + 1$  ist keine Primzahl d.h. es gibt  $2 \leq a \leq n$  die  $n + 1$  teilt. Dann ist  $b := \frac{n+1}{a}$  auch ganz und zudem erfüllt  $2 \leq b \leq n$ . Aus  $A(n)$  folgt dass sowohl  $a$  wie  $b$  ein Produkt von Primzahlen sind somit  $n + 1 = ab$  ein product von Primzahlen ist.

### Satz 1.5

Die Menge  $\mathbb{P}$  der Primzahlen ist unendlich.

## KAPITEL 1. LOGIK UND UNTERLAGEN

### Beweis

Nehmen wir an das Gegenteil "P ist endlich", d.h.  $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$  n aufsteigender Folge; also  $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, \dots$ . Wir betrachten die Zahl  $k = p_1 \dots p_{m+1}$ . Auf Satz 1.4 folgt dass so eine Primzahl  $p_i$  (aus der liste  $p_1 \dots p_m$ ) gilt mit  $p_i$  teilt  $k$ . Da  $p_i$  offensichtlich  $p_1 \dots p_m$  teilt, folgt dass  $p_i$   $k - p_1 \dots p_m = 1$  teilt. Das ist ein Widerspruch.

### Teilbarkeit

#### Formale Definition

Eine Ganze Zahl  $a$  teilt eine ganze Zahl  $b$  genau dann, wenn es eine ganze Zahl  $n$  gibt, für die  $an = b$  ist.

Man sagt dann	Man schreibt
$a$ teilt $b$	$a \mid b$
$a$ ist teiler von $b$	
$b$ ist teilbar durch $a$	
$b$ ist Vielfaches durch $a$	

#### Eigenschaften der Teilbarkeit

- Gilt  $a \mid b$  und  $b \mid c$ , so folgt  $a \mid c$
- Für  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  gilt:  $a \mid b \iff ka \mid kc$
- $a \mid b$  und  $c \mid d \Rightarrow ac \mid bd$
- $a \mid b$  und  $a \mid c \Rightarrow a \mid kb + lc$ , für alle  $l, k \in \mathbb{Z}$

1.  $k = (p_1 p_2 \dots p_i \dots p_m) + 1$   
Es gibt eine Primzahl  $p_i$  dass  $k$  teilt.  $p_i \mid k$  mittels Satz 1.4.
2. Sei  $b = p_1 p_2 \dots p_i \dots p_m =$  produkt aller Primzahlen. Sei  $a = p_i$ ,  $n = p_1 p_2 \dots p_{i-1} p_{i+1} \dots p_m$ . Dann  $b = an$ . Dass heisst  $a$  ist Teiler von  $b$ , d.h.  $p_i \mid (p_1 \dots p_m)$
3.  $p_i \mid k$  und  $p_i \mid (p_1 \dots p_m) \Rightarrow p_i \mid k - (p_1 \dots p_m) = 1$ .  
So erhalten wir einen Widerspruch

### Bemerkung

Letztes mal haben wir gesagt jedes element von  $A$  ist auch Element von  $B$  ( $\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$ ) wird mit  $A \subset B$  ( $A$  ist in  $B$  enthalten,  $A$  ist Teilmenge von  $B$ ) bezeichnet. Falls  $A \subset B$  und eine Element  $b \in B$  gibt mit  $b \notin A$  sagen wir  $A$  ist eine "eigentliche Teilmenge" von  $B$ . Manchmal schreiben wir  $A \subset B$  in diesem Fall.

Aggiungere un notequal sotto al simbolo in

Es gibt viele Bücher, mit der Folgenden Notation: jedes element von  $A$  ist ein element von  $B$  wird mit  $\subseteq$  bezeichnet. Und wenn  $A \subseteq$  und  $A \neq B$  dann benutzen sie  $A \subset B$  statt  $A \subsetneq B$  falls  $x \in A \Leftrightarrow x \in B$ .

guardare ultimo todo

**Satz**

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ und } B \subset A$$

**Beweis**

Annahme:  $A = B$ . Falls  $x \in A$ , dann mittels  $A = B$ ,  $x \in B$  gilt, damit gilt  $A \subset B$  und falls  $x \in B$ , dann  $x \in A$  gilt (mittels  $A = B$ ) damit gilt  $B \subset A$ .

Wir haben bewiesen dass  $A = B \Rightarrow A \subset B$  und  $B \subset A$ . Zunächst nehmen wir an dass  $A \subset B$  und  $B \subset A$ . Wir möchten zeigen dass  $A = B$ .

Sei  $x \in A$ , mittels  $A \subset B$ , haben wir  $x \in B$  somit  $x \in A \Rightarrow x \in B$ . (\*)

Sei  $x \in B$ , mittels  $B \subset A$ , haben wir  $x \in A$  somit  $x \in B \Rightarrow x \in A$ . (\*\*)

(\*) und (\*\*)  $\Rightarrow A = B$  per Definition.

### 1.3 Mengeoperationen

Zunächst erinnern wir kurz an die Definitionen der Elementaren Operationen auf Mengen.

Seien  $A$  und  $B$  Mengen. Wir können dann daraus folgende Mengen bilden:

- Die Vereinigung:  $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$
- Der Durchschnitt:  $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$
- Die Differenz:  $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$
- Symmetrische Differenz:  $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Wir haben dann folgende Eigenschaften

**Satz 1.6**

Seien  $A, B, C$  Mengen.

1.  $A \cap B = B \cap A$ ;  $A \cup B = B \cup A$   
 $A \cap \emptyset = \emptyset$ ;  $A \cup \emptyset = A$

**Bemerkung**

- $\cup$  verhältet sich wie  $+$
  - $\cap$  verhältet sich wie Multiplikation
  - $\emptyset$  verhältet sich wie Null element
2.  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$   
 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
  3.  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

## Beweis

Übung

Ask for correct beweis!!

### Definition 1.7

Das Kartesische Produkt  $A \times B$  der Mengen  $A, B$  ist die Menge der geordneten Paare  $(a, b)$  wobei  $a \in A, b \in B$

### Beispiel

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(a, b) : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$ . Falls  $\mathbb{Z}$  als "eindimensionalen" Gebilde dargestellt wird

•   •   -3   -2   -1   0   1   2   3   •   •

so wird  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  als "zweidimensionalen" Gebilde dargestellt

•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•
(1, 0)	(1, 1)	•	•	•	•	•
(0, 0)	(0, 1)	(0, 2)	•	•	•	•

Um die Operationen auf mehrere Mengen zu Verallgemeinern sind die folgenden Quantoren nützlich (\*)

1.  $\forall$  "Für alle" (Allquantor)
2.  $\exists$  "Es gibt" (Existenzquantor)
3.  $\exists!$  "Es gibt genau ein"

Sei nun  $I$  eine beliebige Menge ( $I$ =Indexmenge) und sei für alle  $i \in I$  eine Menge  $A_i$  gegeben. Dann:

- $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I, x \in A_i\}$ . Vereinigung besteht aus den Elementen  $x$ , für welche eine  $i \in I$  gibt so dass  $x$  zu  $A_i$  gehört.
- $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I, x \in A_i\}$ . Durchschnitt.

Wir noch das Kartesische Produkt endlich vieler Mengen  $A_1 \dots A_n$  definiere

?löhen? page 15

$$A_1 \times A_n = \prod_{i=1}^n A_i = \{(x_1 \dots x_n) \mid x_i \in A_i\}$$

**Satz 1.8**

Seien  $A_1 \dots A_k \subset x, k \in \mathbb{N}$ . Es gilt

1.

$$\left( \bigcap_{i=1}^k A_i \right)^c = \bigcup_{i=1}^k A_i^c$$

2.

$$\left( \bigcup_{i=1}^k A_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^k A_i^c$$

(\*) Wir haben gesehen dass wir manchmal eine Aussage verneinen müssen. Deshalb müssen wir lernen wie man Aussage mit Quantoren verneinen kann.

$$\neg (\forall n : A(n)) \Leftrightarrow (\exists n : \neg A(n))$$

$$\neg (\exists n : A(n)) \Leftrightarrow (\forall n : \neg A(n))$$

$$\neg (\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} : x^2 < 0$$

## 1.4 Abbildungen

Seien  $X, Y$  Mengen.

**Definition 1.9**

Eine Funktion oder Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  der Menge  $X$  in die Menge  $Y$  ist eine Vorschrift (ein Gesetz) die (das) jedem Element  $x \in A$  genau ein Element  $y = f(x) \in Y$  zuordnet.

Es gibt verschiedene wichtige Objekte die in Zusammenhang mit einem Abbildung auftreten

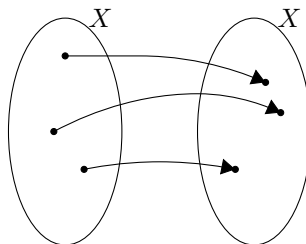
$X =$  Definitionsbereich von  $f$

$Y =$  Die Ziel Menge

$f(x) = \{f(x) \mid x \in X\}$  ist das Bild von  $f$  oder die Bildmenge

**Beispiel 1.10**

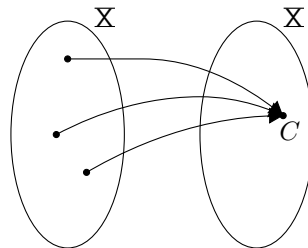
1. (Identität) Für jede Menge  $\mathbb{X}$ , ist  $id_X : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$  definiert durch  $id_{\mathbb{X}}(x) = x, \forall x \in X$





## KAPITEL 1. LOGIK UND UNTERLAGEN

2. (Konstante) Sei  $X$  Menge und  $c \in X$ . Die konstante Abbildung mit Wert  $c$  ist  $f(x) = c, \forall x \in X$



3. Seien  $X, Y$  Mengen. Dann sind  
 $pr_x : X \times Y \rightarrow X \quad pr_y : X \times Y \rightarrow Y$   
 $(x, y) \rightarrow x \quad (x, y) \rightarrow y$   
 die Projektionen auf dem ersten respektiv zweiten Faktoren.
4.  $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$   
 $x \rightarrow \sin x$
5.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \rightarrow x^2 + x$

### Definition 1.11

Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung

1.  $f$  heisst injektiv falls auf  $f(x_1) = f(x_2)$  stets  $x_1 = x_2$  folgt, falls jeder  $y \in Y$  höchstens ein Urbild hat.
2.  $f$  heisst surjektiv falls für jedes  $y \in Y$  ein  $x \in X$  gibt mit  $f(x) = y$

$$\forall y \in Y, \exists x \in X : f(x) = y$$

wenn jedes Element  $y \in Y$  mindestens ein Urbild hat.

3.  $f$  heisst bijektiv falls  $f$  injektiv und surjektiv ist, d.h. falls jedes  $y \in Y$  genau ein Urbild hat.

### Beispiel 1.12

#### Definition: Kardinalität

Wir sagen zwei Mengen  $X$  und  $Y$  sind gleichmächtig falls eine bijektive Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  gibt.

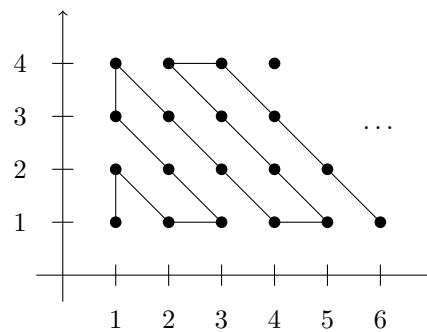
Mit dem ersten Cantorschen Diagonalverfahren kann man die Rationalen zählen abzählen, d.h.  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{N}$  sind gleichmächtig

Pages from 17.1 to 17.4 seem repetition, ask to be sure (document week2)

WRONG POSITION!!

unreadable, page 18

1.  $id_X : X \rightarrow X$  bijektiv.
2. Eine konstante Abbildung  $f : X \rightarrow X, x \rightarrow c$  ist
  - bijektiv  $\Leftrightarrow X = \{c\}$
  - surjektiv  $\Leftrightarrow X = \{c\}$
3. Die Projektionen
  - $pr_x : X \times Y \rightarrow X$
  - $pr_y : X \times Y \rightarrow Y$
 sind stets surjektiv.
4.  $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$   
 $x \rightarrow \sin x$   
 Surjektiv, nicht injektiv
1.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \rightarrow x^2$   
 Nicht surjektiv  
 Nicht injektiv
2.  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$   
 $n \rightarrow 2n$   
 ist Injektiv.  $f(\mathbb{N})$  ist die Menge aller geraden Zahlen
3. Eine Menge  $A$  hat  $n$  Elemente falls es eine bijektive  $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow A$  gibt. Die Zahl  $n$  wird dann die Kardinalität von  $A$  genannt und mit  $\#A$  bezeichnet, gelegentlich auch mit  $\#A$  bezeichnet

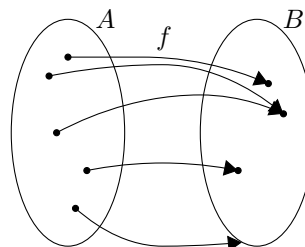


## 1.5 Dedekind Schubladen Prinzip

Is this supposed to be a new chapter?? page 19

Sei  $f : A \rightarrow B$  eine beliebige Abbildung zwischen endliche Mengen. Falls  $|B| < |A|$  dann ist  $f$  nicht injektiv, d.h. es gibt  $b \in B$  und  $a_1, a_2 \in A$  mit

- i)  $a_1 \neq a_2$
- ii)  $f(a_1) = f(a_2) = b$



$$3 = |B| < 5 = |A|$$

Mit Abbildungen kann man "operieren". Die wichtigste Operation ist die Verkettung (oder komposition) zweier Abbildungen.

**Definition**

Abbildungen  $f : X \rightarrow$ ,  $g : Y \rightarrow Z$  kann man miteinander ausführen. Dies ergibt eine neue Abbildung

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

$$F := g \circ f : X \rightarrow Z, x \rightarrow g(f(x))$$

Zwei Funktionen  $f$  und  $g$  können verkettet werden wenn der Wertebereich der ersten Funktion mit dem Definitionsbereich der zweiten Funktion übereinstimmt.

$$\text{Man Sagt } \begin{cases} g \text{ nach } f \text{ oder} \\ g \text{ komponiert mit } f \\ g \circ f \end{cases}$$

Zu Beachten: In dieser Notation steht die zuerst angewandte Abbildung rechts; das heisst bei  $g \circ f$  wird zuerst die Funktion  $f$  angewandt und dann die Funktion  $g$ .

- Die Identische Abbildung verhält sich bei der Komposition , für eine Funk-  
tion

$$f : X \rightarrow Y \text{ gilt also}$$

$$f \circ id_X = f = id_Y \circ Y$$

wobei

$$id_X : X \rightarrow X$$

$$x \rightarrow x$$

$$id_Y : Y \rightarrow Y$$

$$y \rightarrow y$$

- Die Komposition von Funktionen ist assoziativ, d.h. für Funktionen  $f, g, h$  gilt

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

- Aber die Komposition von Funktionen ist im Allgemeinen nicht kommutativ!

$$f \circ g \neq g \circ f$$

Zum Beispiel:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow x^2$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow x + 1$$

$$f \circ g = f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$g \circ f = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1$$

## 1.6 Die Inverse Abbildung (Umkehrfunktion)

Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine bijektiven Funktion.

Die Inverse Funktion  $g : Y \rightarrow X$ , einer bijektiven Funktion  $f : X \rightarrow Y$  ist die Funktion, die jedem Element  $y$  der Zielmenge seien eindeutig bestimmtes Urbildelement zuweist. (bei bijektiven Funktionen hat die Urbildmenge jedes Element  $y$  genau ein Element).

$g(y) := x$ , eindeutig definierte  $x \in \mathbf{X}$ , mit  $f(x) = y$ . Dann ist definitions-gemäss  $(g \circ f)(x) = x$ , d.h.  $g \circ f : id_{\mathbf{X}}$ . Die Eindeutig definierte Abbildung  $g$  wird (auch) mit  $f^{-1}$  bezeichnet und Inverse von  $f$  genannt.

Für  $f \circ f^{-1} : \text{Sei } y \in Y \text{ und sei } x \text{ mit } f(x) = y$ . Dann ist  $(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$

$$f \circ f^{-1} = id_Y$$

### Beispiel

1.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow 2x + 3$$

bijektive

Umkehrfunktion ist gegeben durch

$$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \frac{x-3}{2}$$

2. Sei  $\mathbb{R}^+ = [0, \infty]$  die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen und

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

mit

$$x \rightarrow x^2$$

Dann ist  $f$  bijektive und die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

ist gegeben durch

$$x \rightarrow \sqrt{x}$$

Verallgemeinerungen Falls  $f : X \rightarrow Y$  injektive ist, kann man die Umkehrabbildung

$$f^{-1} : f(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{X}$$

definieren. Das heisst, die Funktion  $f^{-1}$  erfüllt: wenn  $f(x) = y$ , dann  $f^{-1}(y) = x$

Vorsicht:  $f^{-1} \circ f = id_{\mathbf{X}}$  aber  $f \circ f^{-1} = id_{f(\mathbf{X})}$  und  $f \circ f^{-1} = id_Y$  genau dann wenn  $f(X) = Y$ , d.h.  $f$  bijektive ist.

## Kapitel 2

# Reelle Zahlen, Euklidische Räume und Komplexe Zahlen

### 2.1 Elementare Zahlen

Naturzahl	$\mathbb{N}$	$=$	$\{0, 1, 2, \dots\}$	addieren und multiplizieren
	$\cap$			
LOOK TODO	$\mathbb{Z}$	$=$	$\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$	subtrahieren
	$\cap$			
Rationalzahlen	$\mathbb{Q}$	$=$	$\left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$	dividieren

Viele Gleichungen haben keine Lösung in  $\mathbb{Q}$ .

Before set Z, can't read,  
page 22

#### Satz 2.1

Sei  $p \in \mathbb{N}$  eine Primzahl. Dann hat  $x^2 = p$  keine Lösung in  $\mathbb{Q}$

#### Beweis

Zur Erinnerung: zwei natürliche Zahlen  $a$  und  $b$  sind teilerfremd (oder relativ prim) wenn es keine natürliche Zahl außer der Eins gibt, die beiden Zahlen teilt.

$$((a, b) = 1) \rightarrow \text{größte Gemeinsame Teiler}$$

#### Indirekter Beweis

Wir nehmen an: es gibt  $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$  mit  $x^2 = p$ , wobei  $a, b$  teilerfremd und  $\geq 1$  sind. Dann gilt

$$a^2 = pb^2$$

woraus folgt, dass  $p$   $a$  teilt also ist  $a = pk$ ,  $k \in \mathbb{N}$  und somit

$$a^2 = p^2 k^2 = pb^2 \Rightarrow pk^2 = b^2$$

woraus folgt, dass  $p$   $b$  teilt.

## 2.2 Die Reellen Zahlen

Wir werden jetzt das System von Axiomen beschreiben das die Menge der Reellen Zahlen "eindeutig" charakterisiert.

Die Menge  $\mathbb{R}$  der Reellen Zahlen ist mit zwei Verknüpfungen "+" (Addition) und "·" (Multiplikation) versehen sowie mit einer Ordnungsrelation  $\leq$ . Die axiome werden wie folgt gruppiert:

### 1. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein Körper

Es gibt 2 Operationen (Zweistellige Verknüpfungen)

- $+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(a, b) \rightarrow a + b$
- $\times: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(a, b) \rightarrow a \cdot b$

und 2 ausgezeichnete Element 0 und 1 in  $\mathbb{R}$  die folgenden Eigenschaften haben:

Kommutivität	A1)	$x + y = y + x$	M1)	$x \cdot y = y \cdot x$
Assoziativität	A2)	$(x + y) + z = x + (y + z)$	M2)	$(xy)z = x(yz)$
Neutrales Element	A3)	$x + 0 = x = 0 + x$	M3)	$x \cdot 1 = 1 \cdot x$
Inverse Element	A4)	$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$ mit $x + y = 0 = y + x$	M4)	$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ $\exists y \in \mathbb{R}$ mit $xy = 1 = yx$

resize table

und Die Multiplikation ist verträglich it der Addition im Sinne des Distributivitäts-Gesetz (D)

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x(y + z) = xy + xz$$

- $(\mathbb{R}, +)$  mit A1→A4 ist eine Abelsche Gruppe bezüglich der Addition
- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  mit A1→A4, M1→M4 und D ist ein Zahlkörper.

### Bemerkung 2.2

Eine Menge  $G$  versetzen mit Verknüpfung  $+$  und Neutrales Element  $O$  die den obigen Eigenschaften A2→A4 genügen heisst Gruppe.

Eine enge  $K$  versetzen mit Verknüpfung  $+, \cdot$  und Elementen  $0 \neq 1$  die den obigen Eigenschaften A1→A4, M1→M4, D genügen heisst Körper.

### Folgerung 2.3

Seien  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

- i)  $a + b = a + c \Rightarrow b = c$  und  $O$  ist eindeutig, d.h. Falls  $z \in \mathbb{R}$  der Eigenschaften  $a + z = a \forall a \in \mathbb{R}$  genügt, so folgt  $z = 0$

## KAPITEL 2. REELE ZAHLEN, EUKLIDISCHE RÄUME UND KOMPLEXE ZAHLEN

- ii)  $\forall a, b \in \mathbb{R}, \exists!$  (eindeutig bestimmtes)  $x \in \mathbb{R} : a + x = b$ . Wir schreiben  $x = b - a$  und  $0 - a = -a$  ist das additive Inverse zu  $a$
- iii)  $b - a = b + (-a)$
- iv)  $-(-a) = a$
- v) Falls  $ab = ac$  und  $a \neq 0 \Rightarrow b = c$  und 1 ist eindeutig, d.h. falls  $x \in \mathbb{R}$  der Eigenschaften  $ax = a \forall a \in \mathbb{R}$  genügt so folgt  $x = 1$
- vi)  $\forall a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, \exists! x \in \mathbb{R} : ax = b$ . Wir schreiben  $x = \frac{b}{a}$  und  $\frac{1}{a}a = a^{-1}$  ist das Multiplikativ Inverse zu  $a$ .
- vii) Falls  $a \neq 0 \Rightarrow (a^{-1})^{-1} = a$
- viii)  $\forall a \in \mathbb{R}, a \cdot 0 = 0$
- ix) Falls  $ab = 0$  dann folgt  $a = 0$  oder  $b = 0$

### Beweis 2.3

- i) Sei  $a + b = a + c$   
 $A4 \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R} : a + y = 0$   
 $a + b = a + c \Rightarrow y + (a + b) = y + (a + c)$   
 $\Rightarrow (y + a) + b = (y + a) + c$   
 $\Rightarrow 0 + b = 0 + c \Rightarrow b = c$

Nehmen wir an, dass es  $0' \in \mathbb{R}$  gibt so dass  $x + 0' = x, \forall x \in \mathbb{R}$ , d.h. es gibt eine zweite neutrale Element für +.

add rules to top of arrows, page 26 top

Dann  $0 + 0' = 0$  aber auch  $A3 \Rightarrow 0 + 0 = 0 \Rightarrow 0 + 0' = 0 + 0 \Rightarrow 0 = 0'$

- ii) Seien  $a, b \in \mathbb{R}$ , und sei  $y \in \mathbb{R}$  mit  $a + y = 0$ . Definieren wir  $x := y + b \Rightarrow a + x = a + (y + b) = (a + y) + b = 0 + b = b$   
 $\Rightarrow \exists$  mindestens eine Lösung der Gleichung  $a + x = b$ . Von i) folgt dass  $x$  eindeutig bestimmt ist  $a + x = b = a + x' \Rightarrow x = x'$
- iii) Seien  $x = b - a, y = b + (-a)$ . Wir Wollen beweisen dass  $x = y$ .

Aus i) wissen wir dass  $b - a$  eine Lösung von  $a + x = b$

$$y + a = (b + (-a)) + a = b + ((-a) + a) = b + 0 = 0$$

$\Rightarrow y$  ist auch eine Lösung.

Weil die Lösung von  $a + x = b$  ist eindeutig bestimmt, ist  $y = x$

iv)

v)

vi)

vii)

ASK FOR BEWEISE;  
PAGE 27 TOP

- viii)  $\forall a \in \mathbb{R}, a \cdot 0 = 0$   
 $a \cdot 0 = a(0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0 \Rightarrow a \cdot 0 = 0$

- ix)  $ab = 0 \Rightarrow a = 0$  oder  $b = 0$

Wir nehmen an:  $a \neq 0$  mit Inversen  $a^{-1}$ , ( $a^{-1}$  existiert mittels M4).  
 So folgt  $b = 1 \cdot b = (a^{-1} \cdot a) b = a^{-1}(a \cdot b) = a^{-1} \cdot 0 = 0$

?multipli? page 27  
middle to top

## KAPITEL 2. REELE ZAHLEN, EUKLIDISCHE RÄUME UND KOMPLEXE ZAHLEN

### 2. Ordnungsaxiome $\leq$

Auf  $\mathbb{R}$  gibt es eine Relation,  $\leq$ , genannten Ordnung, die folgenden Eigenschaften genügt

- (a) Reflexivität:  $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x$
- (b) Transitivität:  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$
- (c) Identivität:  $\forall x, y \in \mathbb{R}, (x \leq y) \text{ und } (y \leq x) \Rightarrow x = y$
- (d) Die Ordnung ist total:  $\forall x, y \in \mathbb{R}$  gilt entweder  $x \leq y$  oder  $y \leq x$

Die Ordnung ist konsistent mit  $+$ , und  $\cdot$ .

- (a)  $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$
- (b)  $x, y \geq 0 \Rightarrow xy \geq 0$

Mit  $\leq$  hat man auch  $\geq, <, >$ . Wir verzichten auf eine Auflistung aller Folgerungen und beschränken uns auf einige wichtige Folgerungen.

#### Folgerungen 2.4

- i)  $x \leq 0 \text{ und } y \leq 0 \Rightarrow xy \geq 0$
- ii)  $x \leq 0 \text{ und } y \geq 0 \Rightarrow xy \leq 0$
- iii)  $x \leq y \text{ und } z \geq 0 \Rightarrow xz \leq yz$
- iv)  $1 > 0$
- v)  $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0$
- vi)  $0 < 1 < 2 < 3 < \dots$
- vii)  $\forall x > 0 : x^{-1} > 0$

{Annahme:  $x^{-1} \leq 0$ . Nach Multiplikation mit  $x > 0$  folgt (mittels ii)  $1 = x^{-1} \cdot x \leq 0 \cdot x = 0$ }

#### Bemerkung 2.5

What? page 28 bottom

$\leq$  auf  $\mathbb{R}$  genügt den obigen Eigenschaften. Die entscheidende weitere Eigenschaft von  $\mathbb{R}$  ist das.

### 3. Ordnungsvollständigkeit

Check for layout issues with title

Vollständigkeitsaxiom:

Seien  $A, B \subset \mathbb{R}$  nicht leere Teilmenge von  $\mathbb{R}$ , so dass  $a \leq b$  für alle  $a \in A, b \in B$ . Dann gibt es  $c \in \mathbb{R}$  mit  $a \leq c \leq b \quad \forall a \in A, b \in B$

#### Bemerkung 2.6

What? page 29 bottom

erfüllt diese Eigenschaft nicht!

Seien

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0, x^2 \leq 2\}$$

$$B = \{y \in \mathbb{Q} \mid y \geq 0, y^2 \geq 2\}$$



## KAPITEL 2. REELE ZAHLEN, EUKLIDISCHE RÄUME UND KOMPLEXE ZAHLEN

Dann gilt  $a \leq b \forall a \in A \ b \in B$ . Aber ein  $c \in \mathbb{Q}$ , mit  $a \leq c \leq b$  würde dann  $c^2 = 2$  erfüllen! In Satz 2.1 haben wir gesehen dass  $x^2 = p$  keine Lösung in  $\mathbb{Q}$  hat.

Wir definieren jetzt für  $x, y \in \mathbb{R}$

$$\max\{x, y\} = \begin{cases} x & \text{falls } y \leq x \\ y & \text{falls } x \leq y \end{cases}$$

Insbesondere ist der Absolutbetrag einer Zahl  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|x|$

$$|x| := \max\{x, -x\}$$

Für diesen gilt folgender Wichtiger Satz

### Satz 2.7

- i)  $|x + y| \leq |x| + |y|$  (Dreiecks Ungleichung)
- ii)  $|xy| = |x| |y|$

### Beweis 2.7

- i)  $x \leq |x|, -x \leq |x|$   
 $y \leq |y|, -y \leq |y|$   
 und  $x + y \leq |x| + |y|, -(x + y) \leq |x| + |y|$   
 woraus  $|x + y| \leq |x| + |y|$  folgt

ii) ASK FOR BEWEIS

ASK FOR BEWEIS

### Satz (Young)

Für alle  $a, b \in \mathbb{R}$ .  $\delta > 0$  gilt  $2|ab| \leq \delta a^2 + \frac{b^2}{\delta}$

## 2.3 Infimum und Supremum

In Zusammenhang mit der Ordnung führen wir einige Wichtige Definitionen ein:

### Definition 2.8

Sei  $X \subset \mathbb{R}$  eine Teilmenge

- a)  $X$  ist nach oben beschränkt falls es  $c \in \mathbb{R}$  gibt  $x \leq c, \forall x \in X$ . Jeder derartige  $c$  heisst eine Obere Schranke für  $X$ .
- b)  $X$  ist nach unten beschränkt, falls es  $c \in \mathbb{R}$  gibt, mit  $x \geq c, \forall x \in X$ . Jeder derartige  $c$  heisst untere Schranke für  $X$ .
- c)  $X$  ist beschränkt falls es nach oben und unten beschränkt ist.
- d) Ein element  $a \in X$  ist ein maximales Element (oder Maximum) von  $X$  falls  $x \leq a, \forall x \in X$ . Falls ein Maximum (resp. minimum) existiert, wird es mit  $\max X$  ( $\min X$ ) bezeichnet. Falls  $X$  keine obere schranke hat, ist  $X$  nach oben unbeschränkt (analog für obere sch.).

**Beispiel 2.9**

WHAT? Page 32 top

1.  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$  ist nach oben unbeschränkt.  $A$  ist nach unten beschränkt. Jedes  $\leq 0$  ist eine untere Schranke.
2.  $B = [0, 1]$  ist nach oben und nach unten beschränkt.
  - 0 ist ein minimum von  $B$
  - 1 ist ein maximum von  $B$
3.  $C = [0, 1)$  ist nach oben und nach unten beschränkt,  $0 = \min(A)$ .  $C$  hat kein Maximum.

Folgender Satz ist von Zentraler Bedeutung und eine Folgerung der Ordnungsvollständigkeitsaxiom.

**Kapitel 3**

**Chapter 3**

Kapitel 4

Chapter 4

**Kapitel 5**

**Chapter 5**

## Kapitel 6

# Integration

- I) a) Gegeben sei eine stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Gesucht ist eine differenzierbare Funktion  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$F'(t) = f(t), \forall t \in [a, b]$$

- b) Für Naturwissenschaft und Technik ist die folgende Verallgemeinerung von a) wichtig:  
Sei  $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben. Gesucht ist eine differenzierbare Funktion  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)), t \in [a, b]$$

Man nennt ein solches  $\varphi$  eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = f(x, y)$$

- II) Viele in der Natur und Ingenieurwissenschaften auftretenden Größen benötigen zu ihrer exakten Definition einen Grenzprozess der folgenden Art:

Wirkt eine konstante Kraft  $f$  längs eines Weges der Länge  $s$ , und zwar längs der  $x$ -Achse vom Punkt  $a$  bis zum Punkt  $b := a + s$ , so versteht man unter der von der Konstanten Kraft  $f$  geleisteten Arbeit das Produkt  $f \times s = f(b - a)$ .

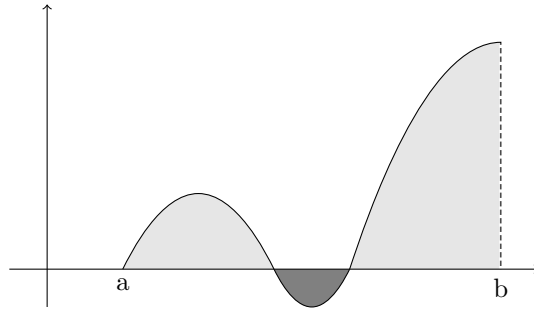
Ist die Kraft  $f$  jedoch örtlich variabel, d.h.  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion des Ortes  $x \in [a, b]$ , so wird man folgendermaßen vorgehen.

Zerlege das Intervall  $[a, b]$  in kleine Teilintervalle  $I_1, \dots, I_n$ . Wähle in jedem Intervall  $I_k := [x_{k-1}, x_k]$  einen Punkt  $\xi$  aus. Man wird dann die "Riemannsche Summe"

$$A \sim \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

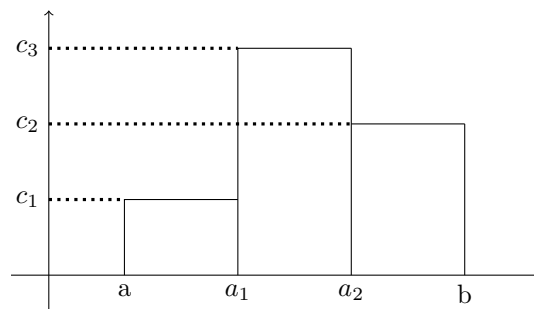
als Näherung für die gesuchte Arbeit  $A$  ansehen. Hierzu wird man insbesondere dann berechtigt sein, wenn man mit jeder genüge feinen Zerlegung des Intervalls  $I$ , einem festen Wert  $A$  beliebig nahe kommt.

- III) Sei  $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty]$  eine (stetige) Funktion. Gesucht ist eine vernünftige Definition des Flächeninhalts  $A$  des Gebietes zwischen der  $x$ -Achse und dem Graphen von  $f$

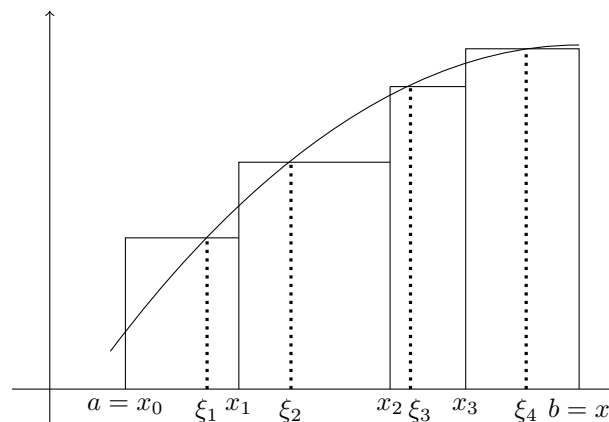


Dies ist sehr einfach, wenn die Funktion  $f$  überall den konstanten Wert  $f(x) = c$  hat für eine feste reelle Zahl  $c \in \mathbb{R}$ . In diesem Fall ist die Fläche unter dem Graphen von  $f$  ein Rechteck und wir definieren dessen Flächeninhalt einfach als Breite mal Höhe, also das Product  $A = (b - a)c$ . Man beachte, dass die Zahl  $c$  auch negativ sein darf und dann ist auch  $A$  negativ.

Eine einfache Formel ergibt sich auch für eine Funktion, die sich aus konstanten Funktionen auf endlich vielen Teilintervalle von  $[a, b]$  zusammensetzen lässt.



Für allgemeine beschränkte Funktionen kann man nun wie in II) vorgehen.



subscript of b=?

Wir wählen eine Aufteilung (Zerlegung, Einteilung, Partition) des Intervalls  $I = [a, b]$  in endlich viele Teilintervalle.

Aus jedem dieser Teilintervall  $I_k$  ersetzen  $f$  durch eine Funktion die auf diesem Teilintervall konstant ist und in einem noch zu klärenden Sinn nicht allzu stark von  $f$  abweicht. Dann bilden wir die Summe der Flächeninhalte der auf diese Weise erhaltenen Rechtecke. Diese Summe ist als Näherungswert für das gewünschte Fläche zu verstehen.

Um den genauen Wert der Fläche festzulegen bilden wir immer feiner zerlegungen des Intervalls. Es ist dann das Grenzwertverhalten der diesen Summen zu unterstehen.

## 6.1 Riemann Integral

1. Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Funktion.

### Definition 6.1

Eine Partition (oder Zerlegung, Einteilung, Unterteilung) eines Intervalls  $[a, b]$  ist eine endliche Menge  $P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ ,  $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$   
 $P(I) := \{P \subset I \mid a, b \in P, P \text{ ist endlich}\}$  die Menge alle Partitionen

$$a = x_0 \quad x_1 \quad \dots \quad x_2 \quad x_2 \quad \dots \quad b = x_n$$

Die Freiheit der zerlegung  $P$  ist dabei definiert durch

$$\delta(P) := \max(x_i - x_{i-1}), 1 \leq i \leq n$$



d.h.  $\delta(P)$  ist die Länge des grössten Teilintervalls  $I_i := [x_i, x_{i+1}]$ ,  $k = i, \dots, n$

2. Wahl  $\xi_i$  von Zwischenpunkten  $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .  
Jede Summe der Form

$$S(f, P, \xi) := \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

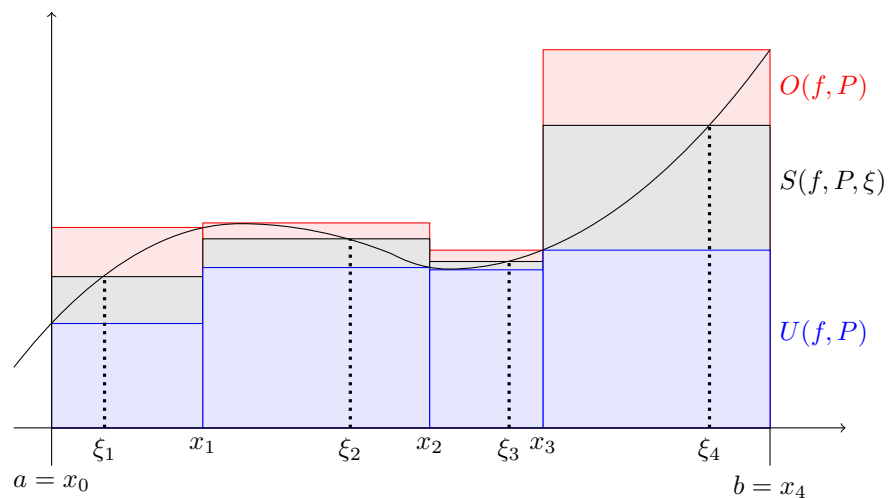
nennt man eine **Riemannsche Summe** der Zerlegung  $P$  und  $\xi$ .  
Die Summe

$$U(f, P) := \sum_{i=1}^n \left( \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \right) (x_i - x_{i-1})$$

nennt man die **Untersumme** von  $f(x)$  zur Zerlegung  $P$ , und

$$O(f, P) := \sum_{i=1}^n f \left( \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \right) (x_i - x_{i-1})$$

nennt man die **Obersumme** von  $f(x)$  zur Zerlegung  $P$ .



### Bemerkung 6.2

Aus den Definitionen folgt direkt

- a) Für eine feste Zerlegung  $P$  gilt stets  $U(f, P) \leq S(f, P, \xi) \leq O(f, P)$   
b) Für zwei Partitionen  $P, Q \in P(I)$  gilt die Ungleichung  $P \subset Q \Rightarrow U(f, P) \leq U(f, Q) \leq O(f, Q) \leq O(f, P)$ .

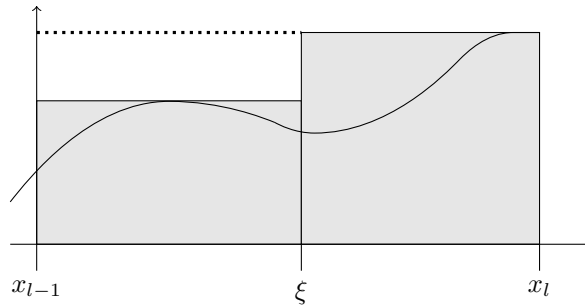
## KAPITEL 6. INTEGRATION

### Beweis

Um dies zu verstehen, ist es nützlich, den Fall zu betrachten, dass die Zerlegung  $Q$  genau einen Punkt mehr enthält als  $P$ .

Sei  $P = \{x_0, \dots, x_N\}$  und  $Q = P \cup \{\xi\}$ , wobei  $\xi$  ein neuer Unterteilungspunkt, also nicht gleich einem der Elemente von  $P$  ist. Dann gibt es genau ein  $l \in \{1, \dots, N\}$  so dass  $x_{l-1} < \xi < x_l$  ist. Damit erhält man

$$(\sup_{[x_{l-1}, \xi]} f)(\xi - x_{l-1}) + (\sup_{[\xi, x_l]} f)(x_l - \xi) \leq (\sup_{[x_{l-1}, x_l]} f)(x_l - x_{l-1})$$



Addiert man dazu alle Summanden in

$$O(f, P) = \sum_i (\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f)(x_i - x_{i-1})$$

mit  $t \neq l$  so ergibt sich die Ungleichung

$$O(f, Q) \leq O(f, P)$$

Ebenso beweist man  $U(f, Q) \geq U(f, P)$ . Damit ist b) für den Fall bewiesen, dass  $Q$  genau ein Element mehr als  $P$  enthält. Der allgemeine Fall lässt sich hierauf leicht durch vollständige Induktion zurückführen.

### Lemma 6.3

Sei  $f : I := [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Funktion. Dann gilt

$$\sup_{P \in P(I)} U(f, P) \leq \inf_{P \in P(I)} O(f, P)$$

### Beweis

Aus

$$P \subset Q \Rightarrow U(f, P) \leq U(f, Q) \leq O(f, Q) \leq O(f, P)$$

folgt, dass die Zahl  $O(f, Q)$  für jede Partition  $Q \in P(I)$  eine obere Schranke für die Menge  $\{U(f, P) \mid P \in P(I)\}$  ist. Also folgt aus der Definition des Supremums als kleinste obere Schranke, dass  $\sup_{P \in P(I)} U(f, P) \leq O(f, Q)$  ist.

Diese Ungleichung gilt für jede Partition  $Q \in P(I)$ . Das heisst wiederum, dass die Zahl  $\sup_{P \in P(I)} U(f, P)$  eine untere Schranke für die Menge  $\{O(f, Q) \mid Q \in P(I)\}$  ist.

Also folgt aus der Definition der Infimum als grösste untere Schranke, dass die Gleichung  $\sup_{P \in P(I)} U(f, P) \leq \inf_{Q \in P(I)} O(f, Q)$  ist. Damit Lemma 6.3 ist bewiesen.

#### Definition 6.4

- 1) Für beschränktes  $f = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  bezeichnen

$$\int_a^b f dx = \sup\{U(f, P) : P \in P(I)\}$$

$$\int_a^{\bar{b}} f dx = \inf\{O(f, P) : P \in P(I)\}$$

das Untere und Obere Integral von  $f$ .

- 2) Ein solches  $f$  heisst über  $[a, b]$  Riemann - Integrabel falls

$$\int_a^b f dx = \int_a^{\bar{b}} f dx$$

In diesem Fall heisst  $A = \int_a^b f dx$  das Riemann Integral von  $f$  über den Intervall  $[a, b]$

#### Beispiel 6.5

- 1) Sei  $c \in \mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  die Konstante Funktion mit dem Wert  $c$ , das heisst  $f(x) = c, \forall x \in I$ . Dann gilt

$$U(f, P) = O(f, P) = (b - a)c, \forall P \in P(I)$$

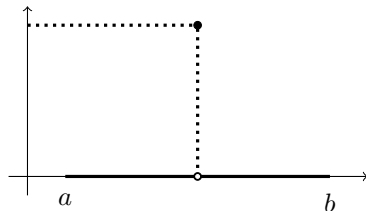
$\Rightarrow f$  ist Riemann Integrierbar und

$$\int_a^b f dx = \int_a^b c dx = c(b - a)$$

In diesem einfachen Fall stimmt also unsere Definition mit der Interpretation des Flächeninhalts als Breite mal Höhe überein. Man beachte, dass die Konstante  $c$  auch negativ sein darf.

## KAPITEL 6. INTEGRATION

$$2) f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq x_0 \\ 1 & \text{für } x = x_0 \end{cases} \quad x_0 \in [a, b]$$



Dann ist  $f$  integrierbar mit

$$\int_a^b f(x) dx = 0$$

denn es gilt  $U(f, P) = 0$  und  $0 < O(f, P) \leq 2\delta(P), \forall P$ .

$O(f, P)$  kann, durch geeignete Wahl der Partition, beliebig klein gewählt werden. z.B.  $P_n = \{a, a + \frac{(b-a)}{n}, \dots, b\} \Rightarrow \delta(P) = \frac{b-a}{n}, \inf_{P \in P(I)} O(f, P) = 0$

$$3) f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [a, b] \setminus Q \\ 0 & \text{für } x \in [a, b] \cap Q \end{cases}$$

Dann gilt  $U(f, P) = 0$  und  $O(f, P) = 1, \forall P \in P(I)$   
 $\Rightarrow f$  ist nicht integrierbar.

### Satz 6.6 (Riemannsches Kriterium für integrierbarkeit)

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent

1.  $f(x)$  ist integrierbar über  $[a, b]$
2. Für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert eine Partition  $Q \in P(I)$  mit

$$O(f, Q) - U(f, Q) < \varepsilon$$

### Beweis

((a) $\Rightarrow$ (b))

Sei  $f$  Riemann integrierbar,  $A := \int_a^b f(x) dx = \sup U(f, P) = \inf O(f, P)$

Nach definition von sup und inf folgt dass zwei Partitionen  $P_1, P_2 \in P(I)$  existieren, so dass

- (i)  $A - \frac{\varepsilon}{2} < U(f, P_1)$
- (ii)  $O(f, P_2) < A + \frac{\varepsilon}{2}$
- (iii)  $U(f, P_1) \leq U(f, Q) < O(f, Q) \leq O(f, P_2)$

Definiere  $Q := P_1 \cup P_2$ . Dann  $P_1 \subset Q$  und  $P_2 \subset Q$ .  
 Nach Bemerkung 6.2b) folgt

$$\begin{aligned} (i), (ii), (iii) &\Rightarrow A - \frac{\varepsilon}{2} < U(f, Q) \leq O(f, Q) < A + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\Rightarrow O(f, Q) - U(f, Q) < \varepsilon \end{aligned}$$

((b) $\Rightarrow$ (a))

Für alle  $P \in P(I)$

$$0 \leq \underbrace{\int_a^b f(x) dx}_{\inf O(f, P)} - \underbrace{\int_a^{\bar{b}} f(x) dx}_{\sup U(f, P)} \leq O(f, P) - U(f, P)$$

Aus (b) folgt das  $\forall \varepsilon > 0$

$$0 < \int_a^{\bar{b}} f(x) dx - \int_a^b f(x) dx < \varepsilon \Rightarrow \int_a^{\bar{b}} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

$\Rightarrow f$  ist integrierbar.

### Satz 6.7

1. Jede Stetige Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  ist R. Integrierbar.
2. Jede Monotone Funktion ist R. Integrierbar.

### Beweis

1.  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $I = [a, b]$  kompakt,  $\Rightarrow f$  gleichmässig stetig.  
 d.h. zu jedem  $\varepsilon > 0$ . gibt es  $\delta > 0$  mit

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

Für eine  $P \in P(I)$  mit Feinheit  $\delta(P) < \delta$  gilt dann

$$\begin{aligned} O(f, P) - U(f, P) &= \sum_{i=1}^n \left( \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \right) (x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{b - a} (x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon \end{aligned}$$

Somit ist  $f$  nach Riemannsche Kriterium integrierbar.

2. Sei  $f$  monoton wachsend,  $P \in P(I)$  eine uniforme Partition mit

$$x_i = a + \left( \frac{b - a}{n} \right) i, 0 \leq i \leq n$$

## KAPITEL 6. INTEGRATION

$$\begin{aligned}
 O(f, P) - U(f, P) &= \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i))(x_{i+1} - x_i) \\
 &= \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i)) \\
 &= \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) < \varepsilon
 \end{aligned}$$

Für jede  $\varepsilon > 0$ , haben wir  $\frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{n} < \varepsilon$ . Nach dem Riemannschem Kriterium ist  $f$  integrierbar. (Monoton fallend ist analog).

### Satz 6.8 (Riemannsche Summe)

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Funktion. Folgende Aussagen sind äquivalent.

I)  $f$  ist Riemann integrierbar und  $A := \int_a^b f(x) dx$

II) Für jedes  $\varepsilon > 0$ , existiert eine Zahl  $\xi > 0$ , so dass für jede Partition  $P_i = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$  von  $I$  und alle  $\xi_i, \dots, \xi_N \in \mathbb{R}$  gilt

$$\delta(P) < \delta \Rightarrow \left| A - \sum_{k=1}^N f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| < \varepsilon$$

Dieser Satz lässt sich auch so formulieren: Eine beschränkte Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann Riemann integrierbar wenn der Grenzwert

$$\lim_{\substack{\delta(P) \rightarrow 0 \\ \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]}} \sum_{k=1}^N f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

und dann haben wir

$$A = \int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta(P) \rightarrow 0} S(f, P, \delta)$$

### Beweis

Siehe D.Salomon: Das Riemannsche Integrale (Satz 3.1).

### Korollar 6.8

Seien  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte und integrierbare Funktion.  $\{P^{(n)}\}$  eine Folge von Partitionen der Intervals  $[a, b]$  mit  $\delta(P^{(n)}) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  und  $\{\xi^{(n)}\}$  eine Feste Wahl von Zwischenpunkten zur Partition  $P^{(n)}$ . Dann ist

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, P^{(n)}, \xi^{(n)})$$

**Beweis**

Wegen Satz 6.8 existiert zu jedem  $\varepsilon > 0$ , ein  $\delta > 0$  derart, das für alle Partitionen  $\delta(P) < \delta$  die Ungleichung

$$\left| S(f, P, \xi) - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon$$

gilt und zwar bei beliebiger Wahl der Zwischenpunkten.

Wegen  $\delta(P^{(n)}) \rightarrow 0$  existiert ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $\delta(P^{(n)}) < \delta$  für alle  $n \geq N$ . Für jedes  $n \geq N$  ist daher

$$\left| S(f, P^{(n)}, \xi) - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon$$

voraus sich die Behauptung unmittelbar ergibt.

**Beispiel**

$$\int_0^1 (x^2 - x) dx = ?$$

$$f(x) = x^2 - x \text{ stetig} \Rightarrow f \text{ integrierbar}$$

Wir wenden Korollar 6.8 an. Wir betrachten die Folge  $\{P^{(n)}\}$  von äquidistanten Partition des intervals  $[0, 1]$  mit

$$x_k^{(n)} := \frac{k}{n}, \quad \forall k = 0, 1, \dots, n$$

Dann  $\delta(P^{(n)}) = \frac{1}{n} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Wir wählen die Zwischenpunkte

$$\xi_k^{(n)} := \frac{k}{n}, \quad \forall k = 1, \dots, n$$

Die  $\xi_k^{(n)}$  sind die rechten Endpunkte der Teilintervale  $I_{k-1} := [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ . Hiermit folgt

$$\begin{aligned} S(f, P^{(n)}, \xi^{(n)}) &= \sum_{k=1}^n f(\xi_k^{(n)}) (x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)}) \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{k^2}{n^2} - \frac{k}{n} \right) \left( \frac{k}{n} - \frac{k-1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( \frac{k^2}{n^2} - \frac{k}{n} \right) \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 - \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{n^3} \left( \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) - \frac{1}{n^2} \left( \frac{n(n+1)}{2} \right) \\
 &\quad \rightarrow \frac{2}{6} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} \\
 &\Rightarrow \int_0^1 (x^2 - x) dx = -\frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

## Eigenschaften des Integrals

### Satz 6.9

Seien  $a < c < b$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  und  $f, g : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  zwei Riemann integrierbare Funktionen. Dann gilt folgendes:

1. Die Funktion  $\alpha f + \beta g$  ist integrierbar mit

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

2. Wenn  $f, g$  die Ungleichung  $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b]$  erfüllen, dann gilt

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

3.  $|f|$  sind R. Integrierbar und

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

4. Das Produkt  $fg$  ist Integrierbar.

### Bemerkung 6.10

Wir bezeichnen die Menge aller Riemann integrierbaren Funktionen  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $R(I) := \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ R.Integrierbar}\}$ . Nach Satz 6.9 i), ist dies ein reeller Vektorraum.  $R(I)$  ist ein Unterraum des Vektorraumes aller reelwertigen Funktion

$$F(I) := \{f : I \rightarrow \mathbb{R}\}$$

$$C(I) := \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$$

ist ein Unterraum von  $R(I)$

$$C(I) \subset R(I) \subset F(I)$$



**Beweis 6.9**

1. Setze  $h := \alpha f + \beta g$  und sei  $\varepsilon > 0$  beliebig gegeben. Da  $f$  und  $g$  integrierbar sind, existieren wegen Riem. Kriterium (Satz 6.6). Partitionen  $P_1$  und  $P_2 \in P(I)$  mit

$$O(f, P_1) - U(f, P_1) < \frac{\varepsilon}{(|\alpha| + |\beta|)}$$

und

$$O(g, P_2) - U(g, P_2) < \frac{\varepsilon}{(|\alpha| + |\beta|)}$$

Aus der Definition von  $h$  folgt zunächst

$$|h(x) - h(y)| \leq |\alpha| |f(x) - f(y)| + |\beta| |g(x) - g(y)|$$

Mit der verfeinerte Partition  $P := P_1 \cup P_2$  ergibt sich unter Verwendung von  $(\Lambda)$ , wobei

$$(*) \quad \sup_{x \in I} h(x) - \inf_{x \in I} h(x) = \sup\{h(x) - h(y) \mid x, y \in I\}$$

Für beschränkte Funktion  $h$  auf einem Intervall  $I$  gilt

$$\begin{aligned} O(h, P) - U(h, P) &= \sum_{k=1}^n \left( \sup_{[x_{k-1}, x_k]} h - \inf_{[x_{k-1}, x_k]} h \right) (x_k - x_{k-1}) \\ &\stackrel{*}{=} \sum_{x, y \in I_k} \sup |h(x) - h(y)| (x_k - x_{k-1}) \\ &\leq |\alpha| \sum_{x, y \in I_k} \sup |f(x) - f(y)| (x_k - x_{k-1}) + |\beta| \sum_{x, y \in I_k} \sup |g(x) - g(y)| (x_k - x_{k-1}) \\ &= |\alpha| \sum_{k=1}^n (\sup f - \inf f)(x_k - x_{k-1}) + |\beta| \sum_{k=1}^n (\sup g - \inf g)(x_k - x_{k-1}) \\ &= |\alpha| [O(f, P) - U(f, P)] + |\beta| [O(g, P) - U(g, P)] \\ &< |\alpha| \frac{\varepsilon}{(|\alpha| + |\beta|)} + |\beta| \frac{\varepsilon}{(|\alpha| + |\beta|)} = \varepsilon \end{aligned}$$

Nach Bmk. 6.2  $P_1 \subset P$

$$\Rightarrow U(f, P_1) < U(f, P)$$

und

$$O(f, P) < O(f, P_1)$$

Dann

$$-U(f, P) < -U(f, P_1)$$

und

$$O(f, P) - U(f, P) < O(f, P_1) - U(f, P_1) < \frac{\varepsilon}{(|\alpha| + |\beta|)}$$

## KAPITEL 6. INTEGRATION

2. Seien  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar mit  $f(x) \leq g(x), \forall x \in I$ .  
 Die Funktion  $h := g - f$  ist wegen (1.) integrierbar. Sei nun  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$   
 eine beliebige Partition von  $[a, b]$  folgt dann  $\inf h(x) \geq 0, \forall k = 0, 1, \dots, n$   
 und daher

$$U(h, P) = \sum_P (\inf h)(x_k - x_{k-1}) \geq 0$$

Was wiederum  $\int_a^b h(x) dx = \sup U(h, P) \geq 0$  impliziert.

Da  $h$  aber integrierbar ist, folgt hieraus

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_a^b h(x) dx = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx \\ &= \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx \geq 0 \end{aligned}$$

Dies liefert die Behauptung

3. Nun gilt  $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|, \forall x \in I$   
 Nach (2) folgt daraus die Ungleichung

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Diese Ungleichung ist äquivalent zu

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

4. Als integrierbare Funktionen sind  $f$  und  $g$  beschränkt. Also existieren die Konstanten

$$\alpha := \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \quad \text{und} \quad \beta := \sup_{x \in [a, b]} |g(x)|$$

Wegen Riem. Kriterium (Satz 6.6) gibt es Partitionen  $P_1, P_2$  mit

$$O(f, P_1) - U(f, P_1) < \frac{\varepsilon}{(\alpha + \beta)}, \quad O(g, P_2) - U(g, P_2) < \frac{\varepsilon}{(\alpha + \beta)}$$

Setzen wir  $h := fg$  so gilt

$$\begin{aligned} |h(x) - h(y)| &\leq |f(x)| |g(x) - g(y)| + |g(y)| |f(x) - f(y)| \\ &\leq \alpha |g(x) - g(y)| + \beta |f(x) - f(y)|, \forall x, y \in [a, b] \end{aligned}$$

Sei  $P = P_1 \cup P_2$ .

Wie in dem Beweis von (1.) ergibt sich unter Verwendung von

$$\sup_{x \in I} h - \inf_{x \in I} h = \sup \{|h(x) - h(y)|, x, y \in I\}$$

dann

$$\begin{aligned}
 & O(h, P) - U(h, P) \\
 &= \sum_{k=1}^n (\sup h - \inf h)(x_k - x_{k-1}) \\
 &= \sum_{k=1}^n \sup_{x, y \in I_k} |h(x) - h(y)| (x_k - x_{k-1}) \\
 &\leq |\beta| \sum \sup_{I_k} |f(x) - f(y)| (x_k - x_{k-1}) + |\alpha| \sum \sup_{I_k} |g(x) - g(y)| (x_k - x_{k-1}) \\
 &= |\beta| \sum (\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f)(x_k - x_{k-1}) + |\alpha| \sum (\sup_{I_k} g - \inf_{I_k} g)(x_k - x_{k-1}) \\
 &= |\beta| [O(f, P) - U(f, P)] + |\alpha| [O(g, P) - U(g, P)] < \varepsilon
 \end{aligned}$$

**Satz 6.10 (Standardabschätzungen)**

Sei  $f$  integrierbar über  $[a, b]$ . Dann gelten die Abschätzungen

$$(b - a) \inf_{[a, b]} f \leq \int_a^b f(x) dx \leq (b - a) \sup_{[a, b]} f$$

**Beweis**

Für die Partition  $P = \{a, b\}$  von  $[a, b]$  folgt sofort

$$(b - a) \inf_{[a, b]} f = U(f, P) \leq \int_a^b f(x) dx < O(f, P) = (b - a) \sup_{[a, b]} f$$

**Satz 6.11**

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar. Dann ist  $f$  auch auf jedem Teilintervall  $[c, d] \subseteq [a, b]$  integrierbar.

**Beweis**

$f$  ist auf  $[a, b]$  integrierbar wegen Satz 6.6.

Zu jedem  $\varepsilon > 0$ , existiert eine Partition  $P'$  von  $[a, b]$  mit

$$O(f, P') - U(f, P') < \varepsilon$$

Wir betrachten dann die Verfeinerung

$$P'' := P' \cup \{c, d\}$$

Wegen Bmk. 6.2 haben wir

$$O(f, P'') - U(f, P'') < \varepsilon$$

## KAPITEL 6. INTEGRATION

Sei nun  $P := P'' \cap [c, d]$  die Restriktion der Partition  $P''$  auf  $[c, d]$ . Dann gilt mit  $g := f|_{[c, d]}$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} O(g, P) - U(g, P) &= \sum_P (M_k(g) - m_k(g))(x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_P (M_k(f) - m_k(f))(x_k - x_{k-1}) \\ &\leq \sum_{P''} (M''_k(f) - m''_k(f))(x_k - x_{k-1}) \\ &= O(f, P'') - U(f, P'') < \varepsilon \end{aligned}$$

wobei

$$M_k(f) := \sup_{I_k \subset P} f \quad m_k(f) := \inf_{I_k \subset P} f$$

und, analog

$$M''_k(f) = \sup_{I_k \in P''} f$$

### Satz 6.12

Seien  $a \leq b \leq c$ . Die Funktion  $f : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann integrierbar falls beide Einschränkungen  $f|_{[a, b]}$  und  $f|_{[b, c]}$  integrierbar sind. In diesem Fall gilt

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

### Konvention 6.13

1) Sei  $f$  integrierbar auf einem Intervall  $I$ . Für  $a \leq b$  in  $I$  definiert man

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

Mit dieser Konvention gelten alle bisherigen Eigenschaften. z.B.

$$\forall a, b, c \in I : \int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$$

2)

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

## 6.2 Differentiation und Integration

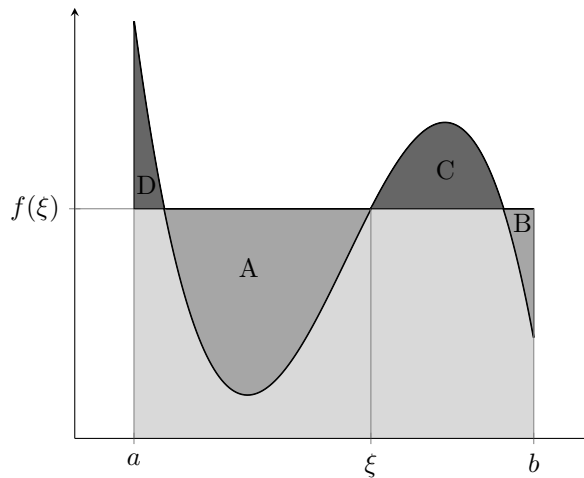
In diesem Kapitel wird der Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration hergestellt. Zu diesem Zweck beginnen wir mit dem folgenden Satz, Mittelwertsatz der Integralrechnung.

**Satz 6.14 (Mws. der Integralrechnung)**

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Dann existiert ein  $\xi \in [a, b]$  mit

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a)$$

Geometrisch:


**Beweis**

Wir setzen

$$m := \min\{f(x) \mid x \in [a, b]\} = f(x_-)$$

$$M := \max\{f(x) \mid x \in [a, b]\} = f(x_+)$$

Wegen Satz 6.10

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$$

$$f(x_-) = m \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx \leq M = f(x_+)$$

Also  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$  für ein  $M \in [m, M]$ . Da  $f$  stetig ist, wegen Zwischenwertsatz gibt es  $\xi \in [a, b]$  mit  $f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ . Nun kommt die erste Hauptsatz der Diff- und Integralrechnung.

## KAPITEL 6. INTEGRATION

### Satz 6.15 (Hauptsatz A)

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Definiere für jeder  $x \in [a, b]$

$$F(x) := \int_x^b f(t) dt$$

Dann ist  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und  $F'(x) = f(x)$ ,  $\forall x \in [a, b]$ .

### Beweis

Für jedes  $h \neq 0$  ist

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \left[ \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right] \stackrel{6.12}{=} \frac{1}{h} \int_a^{x+h} f(t) dt$$

Nach dem Mws der Integralrechnung existiert zu jedem solchen  $h \neq 0$  ein Zwischenpunkt  $\xi_h \in [x, x+h]$  (bzw.  $\xi_h \in [x+h, x]$  falls  $h < 0$ ) mit

$$\int_x^{x+h} f(t) dt = (h)f(\xi_h)$$

Nun ist  $\xi_h \rightarrow x$  für  $h \rightarrow 0$ . Da  $f$  stetig ist

$$f(\xi_h) \rightarrow f(x) \text{ für } h \rightarrow 0$$

Damit erhalten wir

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (hf(\xi_h)) = f(x)$$

Folgender Begriff ist dann naheliegend.

### Definition 6.16

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Eine Stammfunktion von  $f$  (auf  $a, b$ ) ist eine differenzierbare Funktion  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $F'(x) = f(x)$ .

Wegen Satz 6.15, hat jede stetige Funktion mindestens eine Stammfunktion. Mit Ausnahme einer additiven Konstante, die beim Differenzieren ja wegfällt, ist die Stammfunktion auch eindeutig bestimmt. Dies ist der Inhalt des folgenden Satzes.

**Satz 6.17**

Seien  $I \subset \mathbb{R}$  ein beliebiges Intervall und  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Stammfunktion von  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann gelten:

- (a) Die Funktion  $F + c$  ist für jede Konstante  $c \in \mathbb{R}$  ebenfalls eine Stammfunktion von  $f$ .
- (b) Ist  $G : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine weitere Stammfunktion von  $f$ , so gibt es eine Konstante  $c \in \mathbb{R}$  mit  $G = F + c$

**Beweis**

- (a) Offenbar ist mit  $F$  auch  $F + c$  differenzierbar und es gilt  $(F + c)' = F' = f$
- (b) Da  $F$  und  $G$  Stammfunktionen von  $f$  sind, gilt  $F' = f, G' = f$ . Also  $(F - G)' = 0$  und  $F - G = \text{konstante Funktion}$ .

**Definition 6.18**

Eine Stammfunktion von  $f$  heisst auch unbestimmtes Integral von  $f$  und wird bezeichnet mit  $\int f(x)dx$ . Mittels einer Stammfunktion lässt sich das Integral einer gegebenen Abbildung sehr leicht berechnen. Dies ist der Inhalt des Hauptsatz B.

**Satz 6.19 (Hauptsatz der Diff- und Integralberechnung Version B)**

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion und  $F$  eine beliebige Stammfunktion von  $f$ . Dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) := F(x)|_a^b, \quad \forall a, b \in I$$

**Beweis**

Für  $x \in I$  definieren wir

$$F_0(x) := \int_a^x f(t)dt$$

Dann ist  $F_0 : I \rightarrow \mathbb{R}$  wegen Satz 6.15 eine (Spezielle) Stammfunktion von  $f$  mit

$$F_0(a) = 0 \quad F_0(b) = \int_a^b f(t)dt$$

Für die beliebige Stammfunktion  $F$  gilt somit  $F - F_0 = c$  für eine Konstante  $c \in \mathbb{R}$ . Deshalb ist

$$F(b) - F(a) = F_0(b) - F_0(a) = F_0(b) = \int_a^b f(t)dt$$

## KAPITEL 6. INTEGRATION

womit alles bewiesen ist.

Der Satz 6.19 ist das zentrale Ergebnis und zur Berechnung konkreter Integral. Man Benötigt nur eine Stammfunktion uns hat von dieser lediglich die Differenz der Funktionswerte zwischen den beiden Endpunkten des Intervals  $[a, b]$  zu bilden. Insbesondere spielt es keine Rolle, welche Werte die Stammfunktion im Inneren des Intervals  $[a, b]$  annimmt.

### Beispiele von Stammfunktionen

#### Beispiel 6.20

Definitions Bereich	Funktion $f$	Stammfunktion $F$
$(0, \infty)$	$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \neq -1$ $\log  x  + c, \alpha = -1$
$\mathbb{R}$	$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \in \mathbb{N}$
$\mathbb{R}$	$e^x$	$e^x + c$
$\mathbb{R}$	$\sin x$	$-\cos x + c$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x + c$
$(-1, 1)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + c$
$(-1, 1)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x + c$
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\arctan x + c$
$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$\tan x$	$-\ln  \cos x  + c$
$(0, \pi)$	$\cot x$	$\ln  \sin x  + c$
$\mathbb{R}$	$\sinh x$	$\cosh x + c$
$\mathbb{R}$	$\cosh x$	$\sinh x + c$
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{arcsinh} x + c$
$(1, \infty)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arccosh} x + c$
$[-1, 1]$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{arctanh} x + c$



**Beispiel**

$$F(x) = -\ln |\cos x| = -\frac{1}{2} \ln (\cos x)^2$$

und die Ableitung ist (nach Kettenregel):

$$F'(x) = -\frac{1}{2} \frac{1}{\cos(x)^2} (2 \cos x)(-\sin x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

**6.3 Partielle Integration**

Da das Integration die Umkehrung von differenzieren ist, liefert jede Ableitungsregel eine für das Integrieren.

Partielle Integration ist eine Umkehrung der Leibnizschen Produktregel und besagt für unbestimmte bzw. das bestimmte Integral:

$$\begin{aligned} (uv)' &= u'v + uv' \\ \Rightarrow \int uv' &= uv - \int u'v + c \end{aligned}$$

**Satz 6.21 (Partielle Integration)**

Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  zwei stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

und

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

**Beispiel 6.22**

1.  $\int \underbrace{x}_u \underbrace{e^x}_{v'} dx = xe^x - \int 1e^x dx = xe^x - e^x \begin{cases} f(x) = x & g'(x) = e^x \\ f'(x) = 1 & g(x) = e^x \end{cases}$
2.  $\int \underbrace{x^n}_u \underbrace{e^x}_{v'} dx = x^n e^x - \int nx^{n-1}e^x dx$

Durch Induktion über  $n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$  folgert man daraus das Resultat

$$\int x^n e^x dx = (-1)^n n! \sum_{k=0}^n \frac{(-x)^k}{k!} e^x + c$$

3. Partielle Integration eignet sich gut dazu, Logarithmische terme zu eliminieren.

Manchmal muss man dazu den Integranden erst künstlich als Produkt schreiben

$$\int \log x dx = \int \underbrace{(\log x)}_u \underbrace{(1)}_{v'} dx$$

## KAPITEL 6. INTEGRATION

$$= (\log x)x - \int \frac{1}{x} x dx = x \log x - x + c$$

4. Manchmal führt wiederholte partielle Integration auf den ursprünglichen Ausdruck zurück. Mit Glück kann man dann noch diesem auflösen

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x dx &= \int \underbrace{(\sin x)}_u \underbrace{(\sin x)}_{v'} dx \\ &= -\sin x \cos x + \int \cos^2 x dx \\ &= -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x) dx \\ &= -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x dx \\ \Rightarrow 2 \int \sin^2 x dx &= x - \sin x \cos x \\ \Rightarrow \int \sin^2 x dx &= \frac{1}{2} (x - \sin x \cos x) \end{aligned}$$

Andere Möglichkeit:

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x)$$

mit

$$\cos 2x = \left( \frac{\sin 2x}{2} \right)'$$

Dann:

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x &= \frac{1}{2} \int 1 - \cos 2x dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ x - \int \cos 2x dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ x - \frac{\sin 2x}{2} \right] + c \\ \sin 2x &= 2 \sin x \cos x \end{aligned}$$

### Beispiel 6.23

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{k+1} dx &= \int_0^{\pi/2} \underbrace{(\sin x)^k}_u \underbrace{(\sin x)}_{v'} dx \\ &= \underbrace{(\sin x)^k}_u \underbrace{(-\cos x)}_v \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \underbrace{k(\sin x)^{k-1}(\cos x)}_{u'} \underbrace{(-\cos x)}_v dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 0 + k \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{k-1} [1 - \sin^2 x] dx \\
 &= k \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{k-1} - k \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{k+1} dx
 \end{aligned}$$

Also:

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{k+1} dx = \frac{k}{(1+k)} \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{k-1} dx$$

Falls  $k+1 = 2n$ :

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2n} dx &= \frac{2n-1}{2n} \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2(n-1)} dx \\
 &= \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} 1 dx \\
 &= \frac{(2n)(2n-1)(2n-2) \dots 1}{[(2n)(2n-2) \dots 2]^2} \frac{\pi}{2} \\
 &= \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

Analog:

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2n+1} dx = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$

Beachte: der  $\pi$ -Term kommt im Zweiten Fall nicht vor!

Dies benutzen wir wie folgt um ein "Formel" für  $\pi$  aufzustellen.

Für  $0 \leq x \leq \pi/2$ :

$$\begin{aligned}
 (\sin x)^k - (\sin x)^{k+1} &= (\sin x)^k [1 - \sin x] \geq 0 \\
 \Rightarrow (\sin x)^k &\geq (\sin x)^{k+1} \quad (k \geq 0, 0 \leq x \leq \pi/2)
 \end{aligned}$$

Also:

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2n+1} dx \leq \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2n} dx \leq \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2n-1} dx$$

d.h.

$$\frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} \leq \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \leq \frac{(2^{n-1} (n-1)!)^2}{(2n-1)!}$$

Also:

$$\frac{(2^n n!)^4}{(2n+1)!} \cdot \frac{2}{(2n)!} \leq \pi \leq \frac{(2^n n!)^4}{(2n!)^2} \cdot \frac{2}{2n}$$

## KAPITEL 6. INTEGRATION

$$\frac{(2^n!)^4}{(2n+1)} \cdot \frac{2}{((2n)!)^2} \leq \pi \leq \frac{(2^n n!)^4}{(2n!)^2} \cdot \frac{2}{2n}$$

$$\Rightarrow \pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \frac{(2^n n!)^4}{(2n!)^2} \quad \text{Wallische Formel.}$$

### Beispiel 6.24 (Stirlingsche Formel)

Für  $n \geq 2$  sei  $\ln(n!) = \sum_{k=2}^n \ln(k)$ . Wir zeigen dass man kann  $\ln |k|$  sehr gut durch

$$\int_{k-1/2}^{k+1/2} \ln x dx \text{ approximieren.}$$

Da

$$x \ln x - x$$

Stammfunktion von  $\ln(x)$  ist, folgt

$$\int_{k-1/2}^{k+1/2} \ln x dx = x \ln x - x \Big|_{k-1/2}^{k+1/2}$$

Darin kommen also  $\ln(k + \frac{1}{2})$  sowie  $\ln(k - \frac{1}{2})$  vor. Wir benutzen nun Taylor:

Falls  $g(x) = \ln(x)$  sei

$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + \frac{g''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{g^{(3)}(\xi)}{3!}(x - x_0)^3$$

mit  $\xi$  zwischen  $x$  und  $x_0$ .

$$\text{Auf } \left. \begin{array}{l} x = k + \frac{1}{2} \\ x_0 = k \end{array} \right\} \text{aufgewendet ergibt:}$$

$$\ln\left(k + \frac{1}{2}\right) = \ln k + \frac{1}{2k} - \frac{1}{8k^2} + t_k$$

wobei

$$t_k = \frac{2}{\xi^3} \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{24\xi^3}$$

$$|t_k| \leq \frac{1}{24k^3} \quad \xi \in \left[k, k + \frac{1}{2}\right]$$

Analog:

$$\ln\left(k - \frac{1}{2}\right) = \ln k - \frac{1}{2k} - \frac{1}{8k^2} + t'_k$$

$$|t'_k| \leq \frac{1}{24(k - \frac{1}{2})^3}$$

Also:

$$\begin{aligned}
\int_{k-1/2}^{k+1/2} x \ln x - x dx &= \left(k + \frac{1}{2}\right) \left(\ln k + \frac{1}{2k} - \frac{1}{8k^2} + t_k\right) - \left(k + \frac{1}{2}\right) \\
&\quad - \left[\left(k - \frac{1}{2}\right) \left(\ln k - \frac{1}{2k} - \frac{1}{8k^2} + t'_k\right) - \left(k - \frac{1}{2}\right)\right] \\
&= \ln k - \frac{1}{8k^2} + \left(k + \frac{1}{2}\right) t_k - \left(k - \frac{1}{2}\right) t'_k \\
&= \ln k + r_k \quad |r_k| \leq \frac{c}{k^2}
\end{aligned}$$

Nun folgt:

$$\begin{aligned}
\ln n! &= \sum_{k=2}^n \ln k \stackrel{(*)}{=} \sum_{k=2}^n \int_{k-1/2}^{k+1/2} \ln x dx - \sum_{k=2}^n r_k \quad \text{mit } (*) = \left( \int_{k-1/2}^{k+1/2} \ln x dx = \ln k + r_k \right) \\
&= \underbrace{\int_1^{n+1/2} \ln x dx}_{(*)} - \int_1^{3/2} \ln x dx - \sum_{k=2}^n r_k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(*) &= \int_1^{n+1/2} \ln x dx = x \ln x - x \Big|_1^{n+1/2} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(n + \frac{1}{2}\right) - \left(n + \frac{1}{2}\right) + 1 \\
&= \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(n + \frac{1}{2}\right) - n + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Ersetzen wir  $\ln \left(n + \frac{1}{2}\right) = \ln n + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + t_n$  so folgt:

$$\begin{aligned}
(*) &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + \left(n + \frac{1}{2}\right) \left\{ \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + t_n \right\} + \frac{1}{2} \\
&= \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + \frac{1}{2} - \frac{1}{8n^2} + nt_n + \frac{1}{4n} - \frac{1}{16n^2} + \frac{1}{2}t_n + \frac{1}{2} \\
&= \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + 1 + \frac{1}{8n} + nt_n - \frac{1}{16n^2} + \frac{1}{2}t_n
\end{aligned}$$

Also:

$$\ln(n!) = n \ln n + \frac{1}{2} \ln n - n + a_n$$

wobei

$$a_n = \frac{1}{4n} + \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{8n^2} + t_n\right) + \sum_{k=2}^n r_k - \int_1^{3/2} \ln x dx$$

## KAPITEL 6. INTEGRATION

und  $|r_k| \leq \frac{c}{k^2} \Rightarrow \sum_{k=2}^n r_k$  konvergiert.

Sei  $a := \lim a_n$ ,  $b = e^a$  und  $b_n = e^{a_n}$ . Also:

$$\log n! = \left(n + \frac{1}{2}\right) \log n - n + a_n = \log n^{n+\frac{1}{2}} - n + a_n$$

folgt

$$n! = n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{a_n} = \sqrt{n} n^n e^{-n} e^{a_n} \Rightarrow b_n = \frac{n!}{\sqrt{n} n^n e^{-n}}$$

Wir möchten jetzt  $b := e^a$  bestimmen:

$$\begin{aligned} b &= \lim b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n^2}{b_{2n}} = \lim \left( \frac{n!}{\sqrt{n} n^n e^{-n}} \right)^2 \left( \frac{\sqrt{2n} (2n)^{2n} e^{2n}}{(2n)!} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \sqrt{\frac{2}{n}} \frac{(2n)^{2n}}{n^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \sqrt{\frac{2}{n}} 2^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2^n n!)^n}{(2n)!} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \\ &= \sqrt{2\pi} \end{aligned}$$

Also  $b = \sqrt{2\pi}$  womit

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} \quad \text{Stirling's formel}$$

### Beispiel: Der Satz von Taylor

Die Taylor - Entwicklung einer Funktion  $f \in C^{n+1}$  um  $x_0$  erhält man durch  $n$ -fache partielle Integration:

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \int_{x_0}^x f'(t) dt = \int_{x_0}^x \underbrace{(x-t)^0}_{v'} \underbrace{f'(t)}_u dt \\ &= (x-x_0) f'(x_0) + \int_{x_0}^x \underbrace{(x-t)'}_{v'} \underbrace{f''(t)}_u dt \\ &= (x-x_0) f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2} f''(x_0) + \frac{1}{2} \int_{x_0}^x (x-t)^2 f'''(t) dt \\ &\quad \vdots \\ &= \sum_{k=1}^n (x-x_0)^k \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \end{aligned}$$

Aus Mittelwertsatz der Integralrechnung bekommt man die Lagrange Restgliedformel.

$$\frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) (x-x_0)^{n+1} \quad \text{für ein } \xi \in [x_0, x]$$

## 6.4 Methode der Substitution

Methode der Substitution ist eine Umkehrung der Kettenregel.

### Satz 6.25 (Substitutionsregel)

Sei

- $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig
- $g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  der Klasse  $C'$

Sowie  $t_0 \leq t_1$  in  $[\alpha, \beta]$  so dass  $g([t_0, t_1]) \subset [a, b]$ . Dann gilt

$$\int_{g(t_0)}^{g(t_1)} f(x) dx = \int_{t_0}^{t_1} f(g(t)) g'(t) dt$$

### Beweis

Sei  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Stammfunktion für  $f$ . Dann gilt (nach Hauptsatz B)

$$\int_{g(t_0)}^{g(t_1)} f(x) dx = F(g(t_1)) - F(g(t_0))$$

Nach der Kettenregel, haben wir

$$(F \circ g)'(t) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$$

d.h.  $F \circ g$  ist eine Stammfunktion für  $f(g(t))g'(t)$ . Woraus mit dem Hauptsatz B folgt

$$\int_{t_0}^{t_1} f(g(t))g'(t)dt = (F \circ g)(t_1) - (F \circ g)(t_0) = F(g(t_1)) - F(g(t_0))$$

$$= \int_{g(t_0)}^{g(t_1)} f(x)dx$$

### Korollar 6.26

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt + C$$

Dies Formel bedeutet folgenden: Die Linke Seite als Funktion von  $x$  ist gleich der rechten Seite als Funktion von  $t$  vermöge der Relation

$$x = g(t)$$

$$dx = g'(t)dt$$

## KAPITEL 6. INTEGRATION

Für die Substitutionsregel

$$\int_{t_0}^{t_1} f(g(t)) g'(t) dt = \int_{g(t_0)}^{g(t_1)} f(x) dx$$

gibt es im Prinzip zwei lesarten. Mann kann sie entweder von links nach rechts oder von rechts nach links anwenden:

1. (links  $\rightarrow$  rechts)

Liegt ein Integral explizit in der Form

$$\int_{t_0}^{t_1} f(g(t)) g'(t) dt \text{ vor,}$$

so können wir die Substitutionsregel von links nach rechts abwende

### Beispiel

(a)

$$\int_0^1 (1+t^2)^4 (2t) dt$$

Setzt man nämlich  $f(x) := x^4$  und  $g(t) := 1+t^2$ . So folgt:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1+t^2)^4 (2t) dt &= \int_0^1 f(g(t)) g'(t) dt \\ &= \int_{g(0)}^{g(1)} f(x) dx = \int_1^2 x^4 dx = \left[ \frac{1}{5} x^5 \right]_1^2 \\ &= \frac{32}{5} - \frac{1}{5} = \frac{31}{5} \end{aligned}$$

(b)

$$\int \sin^3 t \cos t dt$$

Die substitution  $x = \sin t$  mit  $\frac{dx}{dt} = \cos t \Rightarrow dx = \cos t dt$  liefert

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C = \frac{\sin^4 t}{4} + C$$

(c)

$$\int \tan t dt = \int \frac{\sin t}{\cos t} dt$$

Die Substitution  $x = \cos t$   $\frac{dx}{dt} = -\sin t$ ,  $dx = -\sin t dt$



$$\begin{aligned}\int \tan t dt &= - \int \frac{1}{\cos t} (-\sin t) dt = - \int \frac{1}{x} dx = -\log |x| + C \\ &= -\log |\cos t| + C\end{aligned}$$

2. (rechts  $\rightarrow$  links)

Ein Integral liegt der Gestalt  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$  mit gewissen Grenzen  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  vor, das schwer zu berechnen scheint, versucht man dann mittels geeigneten Substitution  $x = g(t)$ , dieses Integral umzuformulieren, so dass die Substitutionsregel anwendbar ist, wobei  $g(t_0) = \alpha$  und  $g(t_1) = \beta$  gelten muss.

### Beispiel 6.26

(a)

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

Also  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ . Mit der Substitution  $x = g(t) = \sin t, t \in [0, \pi/2]$ ,  $dx = \cos t dt$  ist dann  $g(0) = 0, g(\frac{\pi}{2}) = 1$  und

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_{g(0)}^{g(\pi/2)} f(x) dx = \int_0^{\pi/2} f(g(t)) g'(t) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt \stackrel{(*)}{=} \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} (1 + \cos 2t) dt \\ &= \frac{1}{2} \left( t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} (t + \sin t \cos t) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

mit

(\*)

$$\cos^2(t) = \frac{1 + \cos 2t}{2}$$

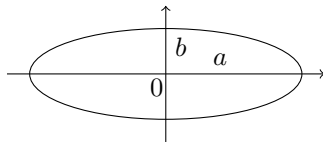
(b)

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x-3}} dx \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \sqrt{2x-3} \\ du = \frac{1}{2}(2x-3)^{-1/2} 2dx = \frac{dx}{\sqrt{2x-3}} \\ u^2 = 2x-3 \\ \frac{u^2+3}{2} = x \end{array} \right.$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x-3}} dx = \int \left( \frac{u^2+3}{2} \right) du = \frac{1}{2} \int (u^2+3) du$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{u^3}{3} + 3u \right) = \frac{u}{2} \left( \frac{u^2}{3} + 3 \right) = \frac{\sqrt{2x-3}}{2} \left[ \frac{2x-3}{3} + 3 \right] + C \\
 &= \sqrt{2x-3} \left( \frac{x}{3} + 1 \right) + C
 \end{aligned}$$

**Beispiel: Flächeninhalt einer Ellipse**



$$\begin{aligned}
 &\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1 \\
 &y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \text{ mit } x, y > 0
 \end{aligned}$$

$$F = 4 \int_0^a b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx$$

mit  $x = au$ ,  $dx = adu$

$$F = 4 \int_0^1 b \sqrt{1 - u^2} adu$$

$$= 4ab \int_0^1 \sqrt{1 - u^2} du$$

mit  $u = \sin t$ ,  $du = \cos t dt$

$$4ab \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt$$

$$= 4ab \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{4ab}{2} (t + \sin t \cos t) \Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \pi ab$$

## 6.5 Integration rationaler Funktionen (Partialbruchzerlegung)

Sei  $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  eine Rationale Funktion, d.h.  $P, Q$  sind polynome mit reellen Koeffizienten. Die Partialbruchzerlegung ist eine Darstellung von  $R(x)$  als summe von "elementaren" rationale Funktionen. Sie basiert auf einem Korollar des Fundamentales Satzes der Algebra, das sagt, dass jedes reelle Polynom ein Produkt von linearen und quadratischen Polynomen mit  $\mathbb{R}$  Koeffizienten.

**Satz 6.27**

Sei  $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  eine rationale Funktion. Dann

$$R(x) = P_1(x) + \sum_{i=1}^n R_i(x) + \sum_{j=1}^m S_j(x)$$

wobei  $P_1$  = Polynom

$$R_i(x) = \frac{a_{i1}}{(x-x_i)} + \frac{a_{i2}}{(x-x_i)^2} + \dots + \frac{a_{ir_i}}{(x-x_i)^{r_i}}$$

$$S_j(x) = \frac{b_{j1}x + d_{j1}}{\left((x-\alpha_j)^2 + \beta_j^2\right)} + \frac{b_{j2}x + d_{j2}}{\left((x-\alpha_j)^2 + \beta_j^2\right)^2} + \dots + \frac{b_{jm_j}x + d_{jm_j}}{\left((x-\alpha_j)^2 + \beta_j^2\right)^{m_j}}$$

Die  $\frac{1}{(x-a)}$ ,  $\frac{bx+d}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^m}$  werden "elementare rationale Funktionen" genannt und wir wollen dafür Stammfunktionen bestimmen.

**Bemerkung**

1. Das Polynom  $P_1(x)$  tritt nur auf, falls  $\deg P > \deg Q$ . In diesem Fall berechnet man  $P_1(x)$  mit Polynom division und es gilt  $p(x) = P_1(x) - Q(x) + P_2(x)$  mit  $\deg P_2 < \deg Q$
2. Das Nennerpolynom  $Q(x)$  besitze
  - Die reellen Nullstellen  $x_i$  mit Vielfachheit  $r_i$
  - Die Komplexe Nullstellen  $z_j = \alpha_j + i\beta_j$  mit Vielfachheit  $m_j$  und damit komplex konjugierte Nullstellen  $\bar{z}_j = \alpha_j - i\beta_j$
3. Unbekannte Parameter, die bestimmt werden müssen

$$\begin{array}{lll} a_{ik} & k = 1, \dots, r_i & i = 1, \dots, n \\ \beta_{jl}, \alpha_{jl} & l = 1, \dots, m_j & j = 1, \dots, m \end{array}$$

Diese Parameter werden durch Koeffizientenvergleich berechnet, die rechte Seite wird dabei auf den Hauptnenner gebracht.

**Beispiel**

$R(x) = \frac{1-x}{x^2(x^2+1)}$  Ansatz:

$$R(x) = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{b_1x + d_1}{x^2 + 1}$$

$$\Rightarrow 1 - x = x(x^2 + 1)a_1 + a_2(x^2 + 1) + x^2(b_1x + d_1)$$

Ausmultiplizieren:

$$1 - x = (a_1 + b_1)x^3 + (a_2 + d_1)x^2 + a_1x + a_2$$

Koeffizientenvergleich:

$$a_1 + b_1 = 0 \quad a_2 + d_1 = 0 \quad a_1 = -1 \quad a_2 = 1$$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1-x}{x^2(x^2+1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{x-1}{x^2+1}$$

### Grundtypen der Integration rationaler Funktionen

- Typ O: Polynom:

$$\int \sum a_n x^n dx = \sum a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

- Typ I: Inverse Potenzen

$$\int \frac{dx}{(x-x_0)^r} = \begin{cases} \log|x-x_0| + c & \text{für } r=1 \\ \frac{1}{(1-r)} \frac{1}{(x-x_0)^{r-1}} & \text{für } r \geq 2 \end{cases}$$

- Typ II:

$$\int \frac{bx+d}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^m} dx$$

Substitution:  $x - \alpha = \beta t$ ,  $dx = \beta dt$  ergibt

$$\int \frac{b[\beta t + \alpha] + d}{(t^2 + 1)^m \beta^{2m}} \beta dt$$

Dies hat die allgemeine Form

$$\begin{aligned} \int \frac{ct+b}{(t^2+1)^m} dt &= c \int \frac{t}{(t^2+1)^m} dt + \int \frac{b}{(t^2+1)^m} dt \\ \int \frac{t}{(t^2+1)^m} dt &\quad \text{mit } t^2+1 = u, 2t dt = du \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^m} = \begin{cases} \frac{u^{-m+1}}{2(1-m)} & , m \geq 2 \\ \frac{1}{2} \ln|u| & , m = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2(1-m)} \frac{1}{(t^2+1)} (1-m) & , m \geq 2 \\ \frac{1}{2} \ln|1+t^2| & , m = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Sei

$$I_m := \int \frac{dt}{(t^2+1)^m}$$

$$\text{Für } m=1: \quad I_1 = \int \frac{dt}{(t^2+1)} = \arctan t + C$$

$$\text{Für } m \geq 1: \quad I_m := \int \frac{dt}{(t^2+1)^m}$$

Partielle Integration ergibt:

$$\begin{aligned} I_m &:= \int \underbrace{1}_{v'} \cdot \underbrace{\frac{1}{(t^2+1)^m}}_u dt = \frac{t}{(t^2+1)^m} + \int \frac{t \cdot 2m \cdot t}{(t^2+1)^{m+1}} dt \\ &= \frac{t}{(t^2+1)^m} + 2m \int \frac{t^2+1-1}{(t^2+1)^{m+1}} dt \\ &= \frac{t}{(t^2+1)^m} + 2m \int \frac{1}{(t^2+1)^m} dt - 2m \int \frac{1}{(t^2+1)^{m+1}} dt \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I_m = \frac{t}{(t^2+1)^m} + 2m\{I_m - I_{m+1}\}$$

woraus

$$I_{m+1} = \frac{1}{2m} \left[ \frac{t}{(t^2+1)^m} + \left( \frac{2m-1}{2m} \right) I_m \right]$$

z.B.

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{t}{(t^2+1)} + \frac{1}{2} I_1 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{t}{(t^2+1)^2} + \frac{1}{2} \arctan t \right] + C \end{aligned}$$

**Beispiel 6.28**

1.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2-3x-4} &= \frac{1}{(x-4)(x+1)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+1} \\ \Rightarrow A(x+1) + B(x-4) &= 1 \\ x=4 \Rightarrow A \cdot 5 &= 1 \Rightarrow A = \frac{1}{5} \\ x=-1 \Rightarrow B \cdot (-5) &= 1 \Rightarrow B = -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{x^2-3x-4} dx = \frac{1}{5} \int \left( \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{1}{5} \ln \left| \frac{x-4}{x+1} \right| + c$$

2.

$$\begin{aligned} \frac{9}{x^3-3x-2} &= \frac{9}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{(x+1)^2} \\ A(x+1)^2 + (Bx+C)(x-2) &= 9 \end{aligned}$$

$$x=-1 \Rightarrow (-B+C)(-3) = 9$$

$$x=2 \Rightarrow A(9) = 9 \Rightarrow A = 1$$

$$x=0 \Rightarrow A+C(-2) = 9 \Rightarrow -2C = 8 \Rightarrow C = -4$$

$$(-B+C) = -3 \Rightarrow B = C+3 = -1$$

$$\Rightarrow \frac{9}{x^3-3x-2} = \frac{1}{x-2} + \frac{-x-4}{(x+1)^2}$$

$$\int \frac{9}{x^3-3x-2} dx = \int \left( \frac{1}{x-2} + \frac{-x-1}{(x+1)^2} - \frac{3}{(x+1)^2} \right) dx$$

$$= \ln|x-2| - \ln|x+1| + \frac{3}{x+1} + c$$

$$= \ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right| + \frac{3}{x+1} + c$$

## 6.6 Das Uneigentliche Integral

Sei  $f$  eine unbeschränkte Funktion. Dann ist  $f$  nicht R. integrierbar, z.B.  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$  hat keinen Sinn. Aber  $\forall \varepsilon > 0$  ist  $\frac{1}{\sqrt{x}} \in [\varepsilon, 1]$  stetig also integrierbar. Der Wert des Integral ist

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \Big|_{\varepsilon}^1 = 2 - 2\sqrt{\varepsilon}$$

also existiert

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2$$

Dies ist ein Beispiel von uneigentlichen R. Integral.

### Definition 6.29

Sei  $f$  eine Funktion auf einem offenen Intervall  $(a, b)$ , deren Einschränkung auf jedes kompakte Teilintervall  $[a', b']$  integrierbar ist. Dann das uneigentliche Integral von  $f$  von  $a$  bis  $b$  definiert als

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{a' \searrow a} \lim_{b' \nearrow b} \int_{a'}^{b'} f(x) dx$$

falls diese Grenzwerte existieren ( $a$  und  $b$  können  $\pm\infty$  sein)

### Bemerkung 6.30

1. Ist  $f$  schon auf  $[a, b]$  definiert und integrierbar, so existiert das Uneigentliche Integral und stimmt mit dem üblichen bestimmten Integral überein.
2. Ist  $f$  schon  $[a, b)$  definiert und auf jedem kompakten Teilintervall der Form  $[a, b']$  integrierbar, so gilt schon

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{b' \nearrow b} \int_a^{b'} f(x) dx$$

### Beispiel

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( -e^{-x} \Big|_0^b \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} (-e^{-b} + 1) = 1$$

3. Vorsicht: Die beiden Grenzwerte müssen im allgemeinen unabhängig voneinander genommen werden.

**Beispiel**

$$\int_{-b}^b x dx = 0 \quad \forall b > 0, \text{ und daher}$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^b x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \frac{b^2}{2} - \frac{b^2}{2} \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} 0 = 0$$

Die einzelnen Grenzwerte von  $\int_a^b x dx$  für  $b \rightarrow \infty$  und  $a \rightarrow -\infty$  existieren dagegen nicht

$$\left( \int_a^b x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right)$$

und somit auch nicht das uneigentliche Integral  $\int_{-\infty}^{\infty} x dx$

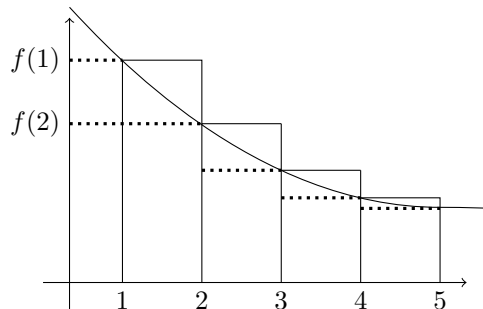
4. Alle Grundeigenschaften und Integrationstechniken für das bestimmte Integral gelten ebenso für das uneigentliche Integral.

Als Beispiel beweisen wir folgendes nützliches Konvergenzkriterium für Reihen

**Satz 6.30**

Sei  $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$  monoton fallend. Dann konvergiert  $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$  genau dann wenn  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  existiert. In diesem Fall gilt:

$$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(k) - \int_1^{\infty} f(x) dx \leq f(1)$$

**Beweis**


$$f(1) + f(2) + \dots + f(n-1) \geq \int_1^n f(x) dx \geq f(2) + \dots + f(n)$$

# KAPITEL 6. INTEGRATION

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n f(k) - f(n) &= \sum_{k=1}^{n-1} f(x) \geq \int_1^n f(x) dx \geq \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) = \sum_{k=1}^n f(x) - f(1) \\ \sum_{k=1}^n f(k) - f(n) &\geq \int_1^n f(x) dx \geq \sum_{k=1}^n f(k) - f(1) \quad (*) \\ \Rightarrow 0 < f(n) &\leq \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx \leq f(1)\end{aligned}$$

Aus

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) \geq \int_1^n f(x) dx$$

folgt das,

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) < \infty \Rightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx < \infty$$

und, aus

$$\int_1^n f(x) dx \geq \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1)$$

folgt dass

$$\int_1^{\infty} f(x) dx < \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f(k) < \infty$$

Aus (\*) folgt:

$$0 < f(n) \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(k) - \int_1^{\infty} f(x) dx \leq f(1)$$

## Beispiel 6.31

1.  $\sum(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$  existiert für alle  $s > 1$

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{1}{x^s} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-s} dx = \lim \begin{cases} \log |b| & s = 1 \\ \frac{x^{-s+1}}{1-s} \Big|_1^b & s > 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \text{divergent falls } s = 1 \\ \text{konvergent gegen } \frac{1}{s-1} \end{cases}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}0 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} - \int_1^{\infty} f(x) dx \leq f(1) = 1 \\ \Rightarrow \frac{1}{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} &\leq 1 + \frac{1}{s-1} = \frac{s}{s-1}\end{aligned}$$



2.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |x| e^{-x^2} dx &= - \int_{-\infty}^0 x e^{-x^2} dx + \int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx \\ \int_0^b x e^{-x^2} dx &= \frac{1}{2} \int_0^{b^2} e^{-u} du \quad \text{mit } u = x^2, du = 2x dx \\ &= \frac{1}{2} (1 - e^{-b^2}) \rightarrow \frac{1}{2} \text{ für } b \rightarrow \infty\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| e^{-x^2} dx = 1$$

3. Wir haben die folgende einfache aber wichtige Beispiele

(a)

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^s} = \begin{cases} \frac{a^{1-s}}{s-1} & \text{für } s > 1 \\ \infty & \text{für } s \leq 1 \end{cases}$$

 (b) Für alle  $a < b$  und  $s \in \mathbb{R}$  gilt

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^s} = \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-s}}{1-s} & \text{für } s < 1 \\ \infty & \text{für } s \geq 1 \end{cases}$$

**Satz 6.32 (Majorantenkriterium)**

 a) Sei  $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann gilt

$$\forall x : |f(x)| < g(x)$$

 und  $\int_a^{\infty} g(x) dx$  konvergent  $\Rightarrow \int_a^{\infty} f(x) dx$  (absolut) konvergent.

 b) Weiterhin gilt folgende Umkehrung:  $\forall x : 0 \leq g(x) \leq f(x)$  und  $\int_a^{\infty} g(x)$ 

 divergent  $\Rightarrow \int_a^{\infty} f(x) dx$  divergent.

**Beispiel 6.33**

1.

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{t^2}{(1+6t^2)^{5/3}} dt &< \int_0^{\infty} \frac{t^2}{(6t^2)^{5/3}} dt < \int_0^{\infty} \frac{c}{t^{4/3}} dt < \infty \\ &\Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{t^2}{(1+6t^2)^{5/2}} dt \text{ konvergiert}\end{aligned}$$

## KAPITEL 6. INTEGRATION

2.

$$\int_0^{\infty} \frac{t^2}{(1+6t^2)^{3/2}} dt$$

$$\frac{t^2}{(1+6t^2)^{3/2}} > \frac{t^2}{(12t^2)^{3/2}} > \frac{c}{t} \quad t \geq 1$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{t^2}{(1+6t^2)^{5/2}} dt \text{ divergiert weil } \int_0^{\infty} \frac{c}{t} dt \text{ divergiert}$$

3. Exponentialintegral:

$$E_i(x) := \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt \text{ für } x < 0$$

Da  $\lim_{t \rightarrow -\infty} te^t = 0$ , gibt es  $c > 0$  mit  $|te^t| \leq c$ ,  $\forall t \in [-\infty, x]$ , und somit gilt

$$\left| \frac{e^t}{t} \right| = \left| \frac{te^t}{t^2} \right| \leq \frac{c}{t^2}$$

Mit der Konvergenz des Integrals  $\int_{-\infty}^x \frac{1}{t^2} dt$  folgt die (Absolut) Konvergenz des  $E_i(x)$  für alle  $x < 0$