Kapitel 4

Stetigkeit

4.1 Grenzwerte von Funktionen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine Teilmenge und $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung.

Definition 4.1
f hat an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}^d$ den *Grenzwert* a, falls für jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in Ω mit $x_k \to x_0\,(k \to \infty)$ gilt $f(x_k) \to a$.

Wir schreiben: $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$

Bemerkung: x_0 muss nicht im Definitionsbereich von f sein.

Definition 4.2
$f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ heisst *stetig* an der Stelle $x_0 \in \Omega$, falls:

1. f an der Stelle x_0 definiert ist,
2. $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert, und
3. $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Definition 4.2'
Die Abbildung $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ist im Punkt $x_0 \in \Omega$ *stetig*, falls für jede gegen x_0 konvergierende Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ in Ω, die Folge $(f(x_n))_{n\geq 1}$ zum Grenzwert $f(x_0)$ konvergiert, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$$

Anders gesagt:

- Grenzwerte von Folgen werden von stetigen Funktionen nicht verändert.

- Stetige Funktionen erhalten Grenzwerte von Folgen.

Definition 4.2”
Die Abbildung $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ist auf Ω *stetig* (oder *einfach stetig*, wenn der Kontext klar ist), falls f in jedem Punkt $x \in \Omega$ stetig ist.

Beispiele

Mittels den Resultaten aus dem dritten Kapitel haben wir wichtige Beispiele von stetigen Funktionen.

- Diese Funktion ist auf ganz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ stetig:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (a, b) &\mapsto (a + b) \end{aligned}$$

(Seien $(a_n), (b_n)$ Folgen mit $a = \lim a_n, b = \lim b_n$. Dann ist die Folge $(a_n + b_n)$ konvergent, und $\lim a_n + b_n = a + b$, nach Satz 3.8)

- Diese Funktion ist auf ganz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ stetig:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (a, b) &\mapsto ab \end{aligned}$$

- Diese Funktion ist auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^x$ stetig:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^x &\to \mathbb{R} \\ (a, b) &\mapsto a/b \end{aligned}$$

heisst die wirklich so?

- Aus wiederholter Anwendung von 1. und 2. ergibt sich die *polynomielle Funktion*:

$$\text{Sei } n \geq 0,\ a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R} : p(x) := a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

Die polynomielle Funktion ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$.

- Die folgenden beiden Abbildungen sind stetig auf ihrem Definitionsbereich.

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d &\to \mathbb{R}^d \\ (a, b) &\mapsto (a + b) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d &\to \mathbb{R}^d \\ (\lambda, a) &\mapsto \lambda a \end{aligned}$$

- Die folgenden Abbildungen sind stetig.

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \bar{z} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ (z, w) &\mapsto z * w \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathbb{C} \times \mathbb{C}^x &\to \mathbb{C} \\ (z, w) &\mapsto z/w \end{aligned}$$

what goes there? p130 (week8sem1)

- Die folgenden Funktionen sind auf [...] stetig:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^d &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|x\| \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \mathbb{C} &\to \mathbb{R} \\ z &\mapsto |z| \end{aligned}$$

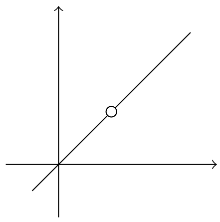
- Die charakteristische Funktion von $\mathbb{Q}$:

  Sei $f(x) = \mathcal{X}_{\mathbb{Q}} = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$

  Sei $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ fest mit $(x_k) \in \mathbb{Q}, x_k \to x$. Dann ist $f(x_k) = \mathcal{X}(x_k) = 1 \not\to 0 = \mathcal{X}(x)$. (Zu $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sei x_k die an der k-ten Nachkommastelle abgebrochene Dezimaldarstellung von x. Dann gilt $x_k \in \mathbb{Q}\ \forall k \in \mathbb{N}$ und $x_k \to x_1$.)

- Sei

  $$f : \begin{cases} x & x < 1 \\ x & x > 1 \end{cases}$$



  f ist in $x = 1$ nicht stetig, weil f an der Stelle $x = 1$ nicht definiert ist. In diesem Beispiel ist die Funktion f nicht stetig, aber sie ist eigentlich eine "gute" Funktion.

Does that really say gute?

no ozlem number...

Definition (Struwe 4.1.3 (ii))
$\Omega \subset \mathbb{R}^d, f : \Omega \to \mathbb{R}^n, x_0 \in \mathbb{R}^d\backslash\mathbb{Q}$ so dass $\exists (x_k) \in \Omega$ mit $\lim x_k = x_0$.

Dann ist f an der Stelle x_0 *stetig ergänzbar*, falls $a = \lim f(x_k)$ existiert. In diesem Fall setzen wir

$$f(x_0) = a$$

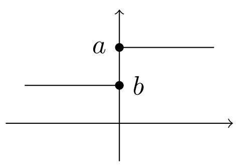
Die durch $f(x_0) = a$ ergänzte Funktion f ist offenbar stetig an der Stelle x_0.

offenbar $\to$ offensichtlich?

- Diese stückweise konstante Funktion ist stetig an jeder Stelle $x_0 \neq 0$. Sie ist jedoch für $a \neq b$ an der Stelle $x_0 = 0$ nicht stetig ergänzbar. (Struwe Beispiel 4.1.3 (vii))

  $$f : \mathbb{R}^x \to \mathbb{R}$$

  $$f(x) = \begin{cases} a & \text{falls } x < 0 \\ b & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$



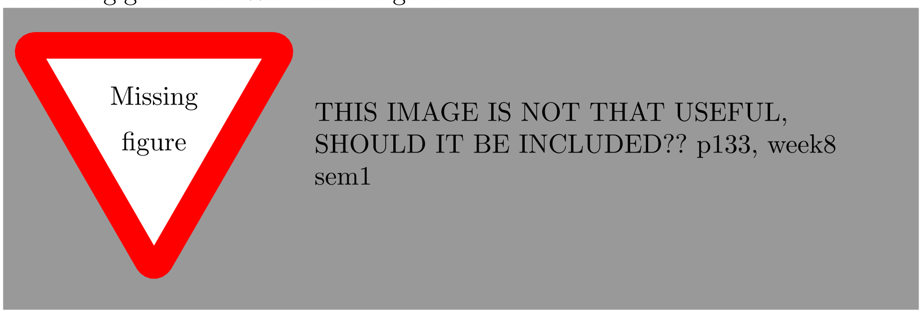
- Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ monoton wachsend, d.h. $\forall x, y \in (a, b)$ mit $x \leq y$ folgt $f(x) \leq f(y)$. Sei ausserdem $x_0 \in (a, b)$. Dann existieren die *links- und rechtsseitigen Grenzwerte*

$$f(x_0^+) := \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0 \\ x \downarrow x_0}} f(x), \qquad f(x_0^-) := \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0 \\ x \uparrow x_0}} f(x)$$

und f ist stetig an der Stelle x_0 genau dann, wenn $f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0)$.

Beweis

Wir behaupten, dass für jede Folge $(y_n)_{n \geq 1}$ mit $\{y_n : n \geq 1\} \subset (a, x_0)$ und $\lim y_n = x_0$ die Folge $(f(y_n))_{n \geq 1}$ kovergent und der linksseitige Limes $l_-(x_0)$ unabhängig von der Wahl der Folge ist.



Wir betrachten zuächst die "spezielle" Folge $x_n = (x_0 - \frac{1}{n})_{n \geq r}$. Hier ist r so gewählt, dass $x_0 - \frac{1}{r} \geq a$.
Dann ist $(f(x_0 - \frac{1}{n}))_{n \geq r}$ monoton wachsend ($x_0 - \frac{1}{n+1} > x_0 - \frac{1}{n}$ und f monoton wachsend) und $(f(x_0 - \frac{1}{n}))_{n > r}$ beschränkt ($f(a) < [...] < f(b)$).

missing in source material p134week8sem1

$$\text{Sei } l_- := \lim_{n \to \infty} f(x_0 - \frac{1}{n})$$

Wir möchten zeigen, dass für jede $(y_n) \subset (a, x_0)$ mit $\lim y_n = x_0$ $\lim f(y_n)$ existiert und $\lim f(y_n) = l_-$.

$= l_-$ oder $= l.$?

Da es für jedes $x < x_0$ ein n gibt, mit $x \leq x_0 - \frac{1}{n}$, folgt

$$f(x) \leq f(x_0 - \frac{1}{n} \leq l_-$$

Sei nun $(y_n)_{n \geq 1}$ beliebig in (a, x_0) mit $\lim y_n = x_0$. Sei $\varepsilon > 0$, $(y_n < x_0)$ und $n_0(\varepsilon)$ mit

$$l_- - \varepsilon < f(x_0 - \frac{1}{n}) \leq l_- \quad \forall n > n_0(\varepsilon)$$

Insbesondere

$$l_- - \varepsilon < f(x_0 - \frac{1}{n_0(\varepsilon)}) \leq l_-$$

Sei jetzt $n_1(\varepsilon) = n_1(n_0(\varepsilon)) > 0$, so dass

$$x_{n_0(\varepsilon)} = x_0 - \frac{1}{n_0(\varepsilon)} < y_n < x_0 = \lim_{n \to \infty} x_n \quad \forall n \geq n_1(\varepsilon)$$

$$((y_n) < (a, x_0), \lim y_n = x_0)$$

Da f monoton ist, folgt

$$l_- - \varepsilon < f(x_0 - \frac{1}{n_0(\varepsilon)}) \leq f(y_n) \leq l_- = \lim f(x_n)$$

Insbesondere $\lim f(y_n) = l_-$.

Der Beweis für L_+ verläuft ganz analog.

Nun zur Stetigkeit: Es gilt immer

$$l_-(x_0) \leq f(x_0) \leq l_+(x_0)$$

Falls $l_-(x_0) < l_+(x_0)$, sei $(t_n)_{n\geq 1}$ wie folgt definiert:

$$t_n = \begin{cases} x_0 - \frac{1}{n} & n \text{ gerade} \\ x_0 + \frac{1}{n} & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Dann gilt $\lim t_n = x_0$. Aber $f(t_{2n+1}) - f(t_n) \geq l_+(x_0) - l_+(x_0) > 0$, woraus folgt dest $(f(t_n))_{n>1}$ nicht konvergent. dest? p 135 bottom
Falls $l_-(x_0) = l_+(x_0)$ folgt die Stetigkeit sofort.

Satz 4.3

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Dann ist die Menge der Unstetigkeitspunkte von f entweder endlich oder abzählbar.

Beweis

Sei $U(f) = \{x \in (a, b) : f \text{ ist nicht stetig an x}\}$. Dann ist $\forall x \in U(f), \quad l_-(x) < l_+(x)$ und wir wählen ein $g(x) \in ??n(l_-(x), l_+(x))$. Falls $x_1 < x_2$ in $U(f)$, folgt unreadable.. p136 mid
$l_+(x_1) < l_-(x_2)$ und somit $g(x_1) < g(x_2)$. Damit ist $g : U(f) \to ??$ injektiv. same unreadable character
Stetigkeit verträgt sich gut mit den üblichen Operationen auf Funktionen.

Satz 4.4

Seien $f, g : \Omega \to \mathbb{R}^n$ und $x_0 \in \Omega$. Falls f und g in x_0 stetig sind, so sind es auch $f + g$ und $\alpha f,\ \alpha \in \mathbb{R}$.

Korollar 4.5

Falls f, g auf Ω stetig sind, so sind es auch $f + g$ und αf.

Definition 4.6

$$C(\Omega, \mathbb{R})$$

bezeichnet die Menge der stetigen Abbildungen $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Nach Korollar 4.5 ist es ein Vektorraum.

Satz 4.7

Seien $f : \Omega \to \mathbb{R}^n, \Omega \subset \mathbb{R}^d$ und $g : \Gamma \to \mathbb{R}^n$ mit $f(\Omega) \subset \Gamma$ und $x_0 \in \Omega, y_0 = f(x_0) \subset \Gamma$. Falls f in x_0 und g in y_0 stetig sind, folgt, dass $g \circ f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ in x_0 stetig ist.

Beweis

Sei $(t_n)_{n\geq 1}$ in Ω mit $\lim t_n = x_0$. Da f stetig ist, $\lim f(t_n) = f(x_0) = y_0$, und aus der Stetigkeit von g folgt, dass

$$\lim_{n\to\infty} g(f(t_n)) = g(y_0) = (g \circ f)(x_0)$$

Korollar 4.8

Falls $f : \Omega \to \mathbb{R}^d, f(\Omega) \subset \Gamma$ und $g : \Gamma \to \mathbb{R}^m$, auf Ω bzw auf Γ stetig sind, so folgt, dass $g \circ f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ auf Ω stetig ist.

4.2 Stetige Funktionen

In diesem Abschnitt behandeln wir die erste der fundamentalen Eigenschaften von stetigen Funktionen, nämlich, dass eine auf einem endlichen Intervall $[a, b]$ (Endpunkte eingeschlossen) stetige Funktion immer ein Maximum und Minimum besitzt. Dies verallgemeinern wir dann auf Abbildungen von $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ nach $\mathbb{R}n$, wobei Ω eine spezielle Eigenschaft haben muss (Kompaktheit).

Satz 4.9

Seien $-\infty < a \leq b < \infty$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig.
Dann ist $f([a, b])$ in $\mathbb{R}$ beschränkt und es gibt $c_-, c_+ \in [a, b]$ mit

$$f(c_+) = \sup \{f(x) : x \in [a, b]\}$$
$$f(c_-) = \inf \{f(x) : x \in [a, b]\}$$

d.h. Supremum und Infimum werden angenommen.

Beweis

1. $f([a, b])$ ist nach oben beschränkt (Indirekter Beweis)

   Falls nicht, so gibt es $\forall n \in \mathbb{N}$ ein $t_t \in [a, b]$ mit $f(t_n) \geq n$.
   $(t_n)_{n\geq 1}$ ist beschränkt, nach Bolzano-Weierstrass. Sei $(t_{l(n)})$ eine konvergente Teilfolge mit $\lim t_{l(n)} = x$.
   Dann ist $x \in [a, b]$, da $a \leq t_n \leq b$
   (Satz: $(a_n), (b_n)$ konvergente Folgen mit $\lim a_n = a, \lim b_n = b$. Falls $a_n \leq b_n$, folgt $a \leq b$.)
   Aus der Stetigkeit von f folgt: $\lim_{n\to\infty} f(t_n) = f(x)$. Insbesondere ist $f(t_{l(n)})$ beschränkt, was im Widerspruch zu $f(t_{l(n)}) \geq l(n)$ steht.

   $\Longrightarrow$ f ist nach oben beschränkt.

2. f ist nach unten beschränkt (analog)

   Sei $M := \text{Sup }\{f(x) : x \in [a,b]\}$, welches als Folge von 1. existiert.
   Sei für jedes $n \geq 1$ $x_n \in [a,b]$ mit

   $$M - \frac{1}{n} < f(x) \leq M \qquad (*)$$

   ($M - \frac{1}{n}$ ist kein Supremum $\implies \exists x_n$ mit $M - \frac{1}{n} < f(x_n)$)

3. $(x_n) \subset [a,b]$ beschränkt.
   Sei nach Bolzano-Weierstrass $(x_{l(n)})_{n\geq 1}$ eine konvergente Teilfolge mit Limes c_+. Aus der Stetigkeit von f folgt:

   $$f(c_+) = \lim_{n\to\infty} f(x_{l(n)})$$

   Aus $(*)$ folgt

   $$\lim_{n\to\infty} f(x_{l(n)}) = M$$

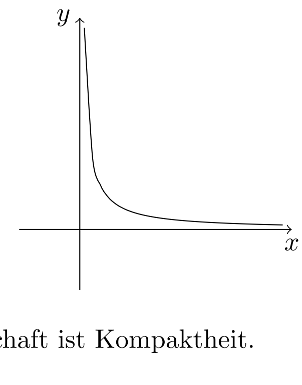
   d.h. $\exists c_+ \in [a,b]$ mit

   $$f(c_+) = \lim f(x_{l(n)}) = M$$

4. Infimum ist ähnlich.

Bemerkung

Satz 4.9 kann man als eine Eigenschaft des Intervalls $[a,b]$ auffassen. Sie gilt zum Beispiel nicht für $(0,1]$ wie das Beispiel der auf $(0,1]$ stetigen Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ zeigt.



Die grundlegende Eigenschaft ist Kompaktheit.

Definition 4.10
Eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^d$ heisst *kompakt*, falls jede Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ von Punkten aus K einen Häufungspunkt *in* K besitzt, d.h. falls jede Folge in K eine *in* K konvergierende Teilfolge hat.

Beispiel

1. $(0,1]$ ist nicht kompakt:
   $(\frac{1}{n})_{n\geq 1} \subset (0,1]$ konvergiert gegen $0 \notin (0,1]$.
2. $[a,b]$ ist kompakt.
   Sei $(t_n)_{n\geq 1}$ eine Folge mit $a \leq t_n \leq b$. (t_n) ist beschränkt, nach Bolzano-Weierstrass sei $(t_{l(n)})$ eine konvergente Teilfolge mit Limes l. Dann folgt aus $a \leq t_n \leq b$. $(t_{l(n)}) \quad \forall n \geq 1$, dass
   $$a \leq \lim t_{l(n)} \leq b$$
   D.h. $l \in [a,b]$.

Lemma 4.11

Falls $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt ist, ist es beschränkt und besitzt zudem ein Minimum und Maximum.

Beweis

Sonst gibt es zu jedem $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in K$ mit $\|x_n\| \geq n$. Dann kann aber $(x_n)_{n\geq 1}$ keine konvergente Teilfolge besitzen: $(\left|x_{l(n)}\right| > l(n))$.
$\implies$ K ist beschränkt.
Sei $s :=$ Sup K. Dann gibt es $\forall n \geq 1, k_n \in K$ mit
$$s - \frac{1}{n} < k_n \leq s$$
Insbesondere gilt $\lim k_n = s$. Da K kompakt ist, hat k_n eine *in* K konvergierende Teilfolge. Daraus folgt, dass $s \in K$.

Beispiel

$S^d := \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : \|x\| = 1\}$, die d-dimensionale Sphäre, ist kompakt.

Beweis

Sei $(x_n)_{n\geq 1} \subset S^d$, dann ist diese Folge offensichtlich beschränkt, besitzt sie (nach Bolzano-Weierstrass) eine konvergente Teilfolge $(x_{l(n)})_{n\geq 1}$. Sei $p \in \mathbb{R}^{d+1}$ deren Limes. Da die Funktion $f(x) := \|x\|$ stetig ist, folgt
$$\|p\| = f(p) \overset{\text{defn}}{=} f(\lim x_{l(n)}) \overset{f \text{ stetig}}{=} \lim f(x_{l(n)}) = 1$$
$\implies p \in S^d$

Die Verallgemeinerung von Satz 4.9 ist

Satz 4.12

1. Sei $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung. Dann ist $f(K) \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge.
2. f nimmt ihr Supremum und Infimum an, d.h. es gibt $c_-, c_+ \in K$ mit
   $$f(x_-) \leq f(x) \leq f(x_+) \quad \forall x \in K$$

Beweis

1. Sei $(y_n)_{n\geq 1}$ eine beliebige Folge in $f(K)$. Wir müssen zeigen, dass es eine konvergente Teilfolge mit Limes in $f(K)$ gibt. Sei $(x_n) \in K$ mit
$$f(x_n) = y_n,\, n \geq 1$$
Dann ist $(x_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in K. Da K kompakt ist, gibt es $p \in K$ und $(x_{l(n)})$, eine konvergente Teilfolge mit $\lim x_{l(n)} = p$.
Aus der Stetigkeit von f folgt
$$f(p) = f(\lim x_n) \overset{f \text{ stetig}}{=} \lim f(x_{l(n)}) = \lim y_{l(n)}$$
D.h. $y_{l(n)}$ ist eine Teilfolge von y_n mit Limes $f(p) \in K$.
$\implies f(K)$ ist kompakt.

2. Da $f(K)$ kompakt ist, (nach 1.), ist $f(K)$ beschränkt, und besitzt zudem ein Minimum und Maximum (nach Lemma 4.11).
$$\begin{aligned} \implies \qquad \exists y_+, y_- \in f(K), \text{ mit } y_+ &= \operatorname{Sup} f(K) \\ y_- &= \operatorname{Inf} f(K) \\ \exists c_+, c_- \in K, \text{ mit } y_+ &= f(c_+) \\ y_- &= f(c_-) \end{aligned}$$

4.3 Norm auf $\mathbb{R}^d$

Der Distanzbegriff auf $\mathbb{R}^d$ kommt vom Skalarprodukt. Es gibt interessante, andere Arten einen Distanzbegriff einzuführen, nämlich mit dem Begriff der Norm.

In the source notes, this is 4.4, but there is no 4.3 that I can find...

Definition 4.13
Eine *Norm* auf $\mathbb{R}^d$ ist eine Abbildung
$$\|.\| : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$$
mit den folgenden Eigenschaften:

1. *Definitheit*: $\|x\| \geq 0$ mit Gleichheit genau dann wenn $x = 0$.
2. *Positive Homogenität*: $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^d$
3. *Dreiecks-Ungleichung*: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d$

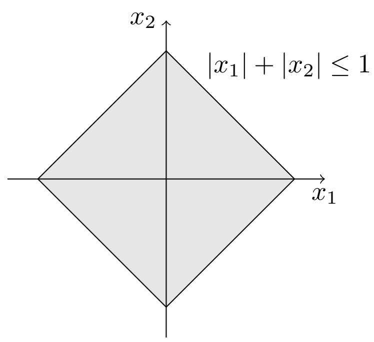
Beispiel 4.14

1. $$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i|\right)^{\frac{1}{2}} \qquad x = (x_1, \ldots, x_d)$$
kommt vom Skalarprodukt.

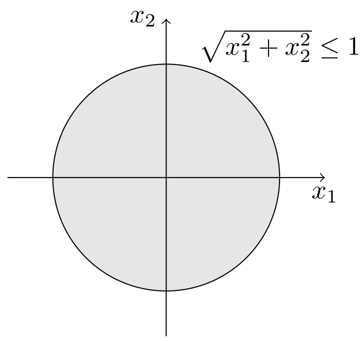
2. Für $1 \leq p < \infty$ sei
$$\|x\|_p := \Big(\sum_{i=1}^{d} |x_i^p|\Big)^{\frac{1}{p}}$$
und $\|x\|_\infty = \max\{|x_i| : 1 \leq i \leq d\}$, dann sind $\|.\|_p, 1 \leq p \leq \infty$ Normen auf $\mathbb{R}^d$.

Zwischen diesen verschiedenen Normen haben wir die folgenden Verhältnisse:
$$\|x\|_\infty = \max|x_i| \leq \|x\|_p = \sqrt[d]{\sum_{i=1}^{d} |x_i|^p} \leq d\|x\|_\infty \qquad (*)$$

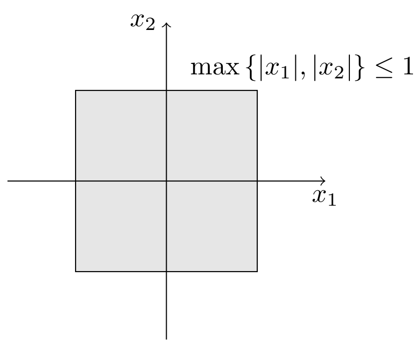
Bild von $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{d} |x_i| \leq 1$



$\|x\|_2 = \sqrt{\sum x_i^2} \leq 1$



$\max\limits_i \{|x_i|\} = \|x\|_\infty \leq 1$



Definition 4.15
Zwei Normen $\|.\|^{(1)}, \|.\|^{(2)}$ auf $\mathbb{R}^d$ heissen *äquivalent*, falls es $c_1, c_2 > 0$ gibt, mit

$$c_1\|x\|^{(1)} \leq \|x\|^{(2)} \leq c_2\|x\|^{(1)} \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

Bemerkung: Sei $C = \max\{C_2, \frac{1}{C_1}\}$, dann gilt $(\frac{1}{C})\|x\|^{(1)} \leq \|x\|^{(2)} \leq C\|x\|^{(1)}$

Beispiel

Die Normen $\|.\|_p \quad 1 \leq p \leq \infty$ sind wegen $(*)$ äquivalent.

Bemerkung 4.16

Äquivalente Normen definieren dieselben "offenen Mengen" via Distanzfunktion.

Beweis

Für die Normkugeln

marked as skip? p152 week 9 sem1

$$B_r^{(1)}(x_0) := \{x : \|x - x_0\|^{(1)} < r\}$$

gilt mit $c_1\|x\|^1 \leq \|x\|^2 \leq c_2\|x\|^1$

$$B_{rc_1}^{(1)}(x_0) \subset B_r^{(2)}(x_0) \subset B_{c_2 r}(x_0)$$

$\implies x_0 \in \Omega$ innerer Punkt von Ω bezüglich $\|.\|^2 \iff x_0 \in \Omega$ innerer Punkt von Ω bezüglich $\|.\|^1$

Auf $\mathbb{R}^d$ haben wir

Satz 4.17

Je zwei Normen auf $\mathbb{R}^d$ sind äquivalent.

Beweis

Es genügt zu zeigen, dass eine beliebige Norm $\|.\|$ zu $\|.\|_2$ äquivalent ist.
Seien $x = \sum x_i e_i$, $y = \sum y_i e_i$. Dann ist

$$\|x - y\| = \left\|\sum_{i=1}^{d}(x_i - y_i)e_i\right\| \leq \sum_{i=1}^{d}|x_i - y_i|\|e_i\| \leq \|x - y\|\underbrace{\sum_{i=1}^{d}\|e_i\|}_{:=C}$$

$$\underset{(*)}{\leq} C'\|x - y\|_2$$

Layout imperfect, but hard to make better.. p153 week9 sem1

Also folgt, dass $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \|x\|$ stetig ist.

Da $S^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_2 = 1\}$ kompakt ist, folgt, dass es $c_+, c_- \in S^{d-1}$ gibt, mit $k_- := \|c_-\| \leq \|x\| \leq \|c_+\| := k_+ \; \forall x \in S^{d-1}$. Da $c_0 \neq 0$ folgt $k_- > 0$.
Sei $x \neq 0$ allgemein ($C_- \in S^{d-1}$), dann ist $y := \frac{x}{\|x\|_2} \in S^{d-1}$ also $k_- \leq \left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\| < k_+$, woraus

$$k_- \|x\|_2 \leq \|x\| \leq k_+ \|x\|_2$$

folgt.

4.4 $\varepsilon - \delta$ Kriterium für Stetigkeit

4.5 in source notes. what to do?

Wir haben das folgende Kriterium für Stetigkeit an der Stelle x_0:

Satz 4.18

Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine Abbildung, $x_0 \in \Omega$. Folgende Eigenschaften sind äquivalent:

1. f ist stetig an der Stelle x_0.
   D.h. für jede gegen x_0 konvergierende Folge $(x_n) \subset \Omega$ konvergiert die Folge $f(x_n)$ gegen $f(x_0)$.
2. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$, so dass für alle $x \in \Omega$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt:
   $$|\delta(x) - \delta(x_0)| < \varepsilon$$
   $$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in \Omega, \|x - x_0\| < \delta \implies \|\delta(x) - \delta(x_0)\| < \varepsilon$$

Beweis 4.18

(1) $\Rightarrow$ (2) (Indirekt)
Wir nehmen also an, dass (2) nicht gilt, d.h. es gibt $\varepsilon > 0$, so dass für jedes $\delta > 0$ einem Punkt x_δ gibt mit

$$\|x_\delta - x_0\| < \delta \text{ und } \|f(x_\delta) - f(x_0)\| > \varepsilon$$

Start of big bracket

$$\neg \left(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \Omega : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\right)$$
$$= \left(\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in \Omega : |x - x_0| < \delta \;\not\Rightarrow\; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\right)$$

d.h.

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x_\delta \in \Omega : |x_\delta - x_0| < \delta \text{ und } |f(x) - f(x_0)| > \varepsilon$$

end of big bracket

Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen jetzt $\delta_n = \frac{1}{n}$, dann gibt es $x_n := (x_{\delta_n})_{n \in \mathbb{N}}$, eine Folge in Ω, mit $\lim x_n = x_0$. Aber die Folge $(f(x_n))$ kann offensichtlich nicht gegen $f(x_0)$ konvergieren (Da $|f(x_n) - f(x_0)| > \varepsilon$), d.h. f ist nicht stetig in x_0.

(2) $\Rightarrow$ (1) Sei $(x_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in Ω mit Grenzwert x_0. Wir möchten zeigen, dass $f(x_n) \to f(x_0)$. Sei $\varepsilon > 0$, nach (2) sei $\delta_\varepsilon > 0$, so dass $\forall x \in \Omega$ mit

$$|x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Da $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, gibt es $N \geq 1$, so dass

$$\|x_n - x_0\| < \delta \qquad \forall n \geq N_\delta$$

(Hier hängt N von δ und also im Endeffekt von ε ab). Aus (2) folgt

$$\|f(x_n) - f(x_0)\| < \varepsilon \qquad \forall n \geq N_\delta$$

Dies zeigt $\lim f(x_n) = f(x_0)$

■

Beispiel

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 8$. Dann f ist stetig auf $\mathbb{R}$. Sei $\varepsilon > 0$, sei $x_0 \in \mathbb{R}$

$$|f(x) - f(x_0)| = |(3x + 8) - (3x_0 + 8)| = 3\,|(x - x_0)| \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wenn wir $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ wählen, dann

week9p156-1

$$\text{CAN'T READ}, |x - x_0| < \delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

In diesem Beispiel hängt δ nur von ε ab. Das nächste Beispiel zeigt, dass δ nicht nur von ε, sondern auch von x_0 abhängen kann.

2.
$$f : (0, \infty) \to (0, \infty)$$
$$x \to \frac{1}{x}$$

ist stetig auf $(0, \infty)$. Sei $x_0 \in (0, \infty)$

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \left|\frac{x_0 - x}{x \cdot x_0}\right|$$

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow -\delta < x - x_0 < \delta \Rightarrow x > x_0 - \delta$$

$$|f(x) - f(x_0)| = \frac{|x_0 - x|}{|x|\,|x_0|} < \frac{|x - x_0|}{|x_0|\,|x_0 - \delta|}$$

Sei $\delta < \frac{x_0}{2}$, dann folgt

$$\delta < \frac{x_0}{2} \Rightarrow x_0 - \delta > x_0 - \frac{x_0}{2} > \frac{x_0}{2}$$

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{|x_0 - x|}{|x|\,|x_0 - \delta|} \leq \frac{|x - x_0| \cdot 2}{|x_0|^2} \leq \frac{2\delta}{|x_0|}$$

Sei

$$\delta_{\varepsilon;x_0} = \min\left\{\frac{x_0}{2}, \frac{\varepsilon |x_0|^2}{2}\right\}$$

Dann

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon |x_0|^2}{2} \cdot \frac{2}{|x_0|^2} = \varepsilon$$

4.5 Zwischenwertsatz

Satz 4.19

Seien $a < b$ in $\mathbb{R}$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, mit $f(a) \leq f(b)$ (oder $f(a) \geq f(b)$). Dann gibt es zu jedem $y \in [f(a), f(b)]$ ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$.

Beweis

Die Idee ist einfach. Wir benutzen ein Approximationsverfahren (In diesem Fall ein Bisektionsverfahren). Wir definieren zwei monotone Folgen

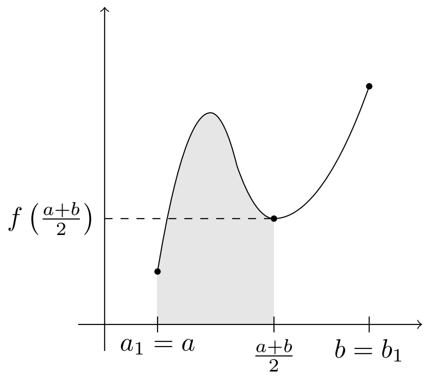
$$a = a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1 = b$$

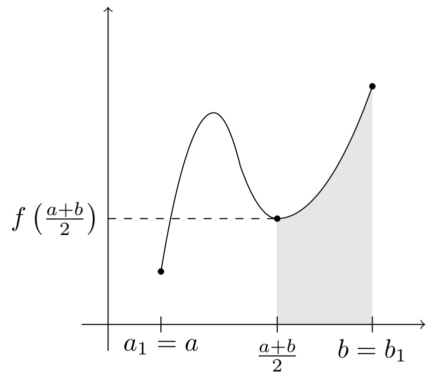
mit $a_n \nearrow$, $b_n \searrow$, $\lim a_n = \lim b_n = c$ und

$$f(a_n) < y \leq f(b_n)$$

Dann folgt aus der Stetigkeit von ff, dass

$$\lim f(a_n) = \lim f(b_n) = f(c) = y$$





Fall 1:

Falls $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq y$, setzen wir:

$$a_2 = a$$
$$b_2 = \frac{a+b}{2}$$

Fall 2:

Falls $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < y$, setzen wir:

$$a_2 = \frac{a+b}{2}$$
$$b_2 = b_1$$

Auf jeden Fall gibt es

1. $a_1 \leq a_2 < b_2 \leq b_1$
2. $(b_2 - a_2) = \frac{1}{2}(b_1 - a_1)$
3. $f(a_2) < y \leq f(b_2)$

Wir iterieren jetzt dieses Verfahren. Wir nehmen an, dass wir Folgen nach $(k-1)-$Schnitten definiert haben

1. $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \cdots \leq a_k < b_k \leq b_{k-1} \cdots \leq b_1$
2. $(b_k - a_k) = \frac{1}{2^{k-1}} (b_1 - a_1)$
3. $f(a_k) < y \leq f(b_k)$

Nun unterscheiden wir wieder zwei Fälle

Fall 1:

$$f\left(\frac{a_k + b_k}{2}\right) \geq y$$

dann definieren wir $a_{k+1} = a_k$ und $b_{k+1} = \frac{a_k+b_k}{2}$

Fall 2:

$$f\left(\frac{a_k + b_k}{2}\right) < y$$

dann definieren wir $a_{k+1} = \frac{a_k+b_k}{2}$ und $b_{k+1} = b_k$. Dann ist immer

1. $a_k \leq a_{k+1} < b_{k+1} \leq b_k$
2. $b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{1}{2}(b_k - a_k) = \frac{1}{2^k} |b_1 - a_1|$
3. $f(a_{k+1}) < y \leq f(b_{k+1})$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion erhalten wir zwei Folgen $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$, die die Eigenschaften 1., 2. und 3. erfüllen. (a_n), (b_n) sind monoton und beschränkt $\Rightarrow$ gibt es

$$\overline{a} = \lim a_k \leq \overline{b} = \lim b_k$$

Wegen 2.

$$\lim |a_k - b_k| = \lim \left|\frac{b_1 - a_1}{2^k}\right| = 0$$

d.h. $\lim a_k = \lim b_k$. Sei $c \in [a, b]$ dieser Wert. Aus stetigkeit von f folgt

$$f(c) = \lim f(a_n) = \lim f(b_n)$$

Aus 3. folgt

$$\begin{aligned} f(a_n) < y &\Rightarrow f(c) \leq y \\ g \leq f(b_n) &\Rightarrow y \leq f(c) \end{aligned}$$

also $f(c) = y$.

■

Korollar 4.20

1. Sei

   $$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$$

   ein Polynom mit reellen Koeffizienten, so dass $a_n \neq 0$ und n ungerade ist. Dann besitzt p mindestens eine reelle Nullstelle.

Beweis

Sei

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{p(x)}{a_n} \\ &= x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot x^{n-1} + \ldots + \frac{a_0}{a_n} \\ &= x^n \left[1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{x} + \ldots + \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{x^n} \right] \end{aligned}$$

Dann

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^5} = 0$$

Folgt insbesondere, dass es $c > 0$ gibt so dass für $|x| \geq c$

$$1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{x} + \ldots + \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{x^n} \geq \frac{1}{2}$$

Folglich ist:

$$q(c) \geq c^n \frac{1}{2} > 0$$

$(n = \text{ungerade})$ $$q(-c) \leq -c^n \frac{1}{2} < 0$$

Also gibt $x_0 \in [-c, c]$ mit $q(x_0) = 0$

■

2. Eine reelle 3×3 Matrix besitzt immer einen reellen Eigenwert.

Satz 4.21

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, streng monoton wachsend (d.h. $x < y = f(x) < f(y)$). Dann ist

$$\text{Bild}(f) = [c, d] = [f(a), f(b)]$$

$f : [a, b] \to [c, d]$ ist bijektiv und $f^{-1} : [c, d] \to [a, b]$ ist stetig.

Beweis

1. f streng monoton wachsend, d.h. falls $x \neq y$, dann ist $f(x) \neq f(y) \Rightarrow f$ Injektive.

   Zwischenwertsatz $\Rightarrow f$ surjektiv. $c = f(a) < f(b) = d$, Sei $y \in [c, d]$, ZWS $\Rightarrow \exists x \in (a, b)$ mit $f(x) = y \Rightarrow$ ist bijektiv.

2. f^{-1} ist stetig: Sei $y \in [c, d]$ und sei $(y_0) \in [c, d]$ eine Folge mit $\lim y_n = y_0$. f bijektiv, $\exists x_n, x_0 = f^{-1}(y_0)$, (x_n) beschränkt. Sei $f^{-1}\left(y_{l(n)}\right)$ eine beliebige konvergente Teilfolge und x deren Grenzwert

$$\lim f^{-1}\left(y_{l(n)}\right) = x$$

$$f \text{ stetig } \Rightarrow \lim f\left(f^{-1}\left(y_{l(n)}\right)\right) = f\left(f^{-1}\left(y_{l(n)}\right)\right) = f(x)$$

aber

$$\lim f\left(f^{-1}\left(y_{l(n)}\right)\right) = \lim y_{l(n)}$$

$\Rightarrow$ $\lim y_{l(n)} = f(x)$, y_n ist aber auch konvergent

$\Rightarrow$ $\lim y_{(n)} = f(x)$, aber $\lim y_n = y_0$

$\Rightarrow$ $y_0 = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y_0) = x_0$

$\Rightarrow$ Jede Teilfolge von (x_0) hat denselben Häufungspunkt x_0.

$\Rightarrow$ $\limsup x_n = x_0 = \liminf x_n$, also $\lim f^{-1}(y_n) = \lim x_n = x_0 = f^{-1}(y_0) \Rightarrow f$ stetig

■

Korollar 4.22

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend mit monotonem Limes

$$-\infty < c := \lim_{x \downarrow a} f(x) < \lim_{x \uparrow b} f(x) =: d < \infty$$

dann ist $f : (a, b) \to (c, d)$ bijektiv und f^{-1} ist stetig.

Korollar 4.22

Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Potenzfunktion $f(x) = x^n$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. Sie ist auf $(0, \infty)$ streng monoton wachsend mit Bild $(0, \infty)$. Die Umkehrfunktion

$$\begin{aligned}(0, \infty) &\to (0, \infty)\\ x &\to \sqrt[n]{x}\end{aligned}$$

ist stetig.

Beweis

$$y^n - x^n = (y - x)\underbrace{\left(y^{n-1} + y^{n-2}x + \ldots x^{n-1}\right)}_{>0}$$

Für $0 < x, y < \infty$, $y^{n-1} + y^{n-2}x + \ldots x^{n-1} > 0$. Also folgt $x < y \Rightarrow x^n < y^n$, d.h. f streng monoton wachsend

■

Satz 4.23

Die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig, streng monoton wachsend mit

$$\text{Bild}(\exp) = \exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$$

Definition 4.24

Die Umkehrfunktion von $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ wird mit $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ bezeichnet

Dann

Korollar 4.25

$\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ hat folgende Eigenschaften

1. ist strikt monoton wachsend und stetig
2. $\log(1) = 0$
3. $\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$

Beweis Satz 4.23

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

ist absolut konvergent auf ganz $\mathbb{R}$

1. $$\exp(x) = \exp\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left(\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \geq 0$$

2. Falls $x \geq 0$, ist
$$\exp(x) > 1 > 0 \qquad (\exp(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0)$$

3. Wegen
$$\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} \neq 0$$
$$\exp(x) > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$
d.h.
$$\exp(\mathbb{R}) \subset (0, \infty)$$

4. $$\exp(y) - \exp(x) = \exp(x)\left[\exp(y - x) - 1\right]$$
Falls $x < y$, so ist $\exp(y - x) > 1$ und somit $\exp(y) > \exp(x)$ (da $\exp(x) > 0$), d.h. exp ist streng monoton wachsend.

5. Zur Stetigkeit: Sei $x = x_0 + h$, $0 < h < 1$
$$\exp(x) - \exp(x_0) = \exp(x_0)(\exp(h) - 1)$$
da
$$|\exp(h) - 1| = \left|\overset{\to 0}{\sum_{k=1}^{\infty}} \frac{h^k}{k!}\right| \leq \left|\overset{h \to 0}{\sum_{k=1}^{\infty}} \left|h^k\right|\right| = \frac{|h|}{1 - |h|} \to 0$$
Also für $x = x_0 + h \to x_0$, $\exp(x) - (x_0) \to 0$ und die Funktion exp ist stetig
$$\exp(x) \to \infty\,(x \to \infty) \text{ und } \exp(x) \to 0\,(x \to -\infty)$$

do 3 and 4 belong together?? in your notes you gave number 3 to two different ones, page 166 bottom

■

$$\begin{aligned}
\exp(\log(x)) &= x \\
\exp(\log(x) + \log(y)) &= \exp(\log(x)) \cdot \exp(\log(x)) \\
&= xy
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\log(x) + \log(y) = \log(xy)}$$

4.6 Gleichmässige Stetigkeit

Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf Ω, d.h.

$$\forall x_0 \in \Omega, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Begin big rounded parenthesis

f ist nicht stetig auf $\Omega \Leftrightarrow \exists x_0 \in \Omega, \exists \varepsilon > 0, \forall > 0, \exists \in \Omega : |x - x_0| < \delta$ und $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$

End big rounded parenthesis

Definition 4.24

Gleichmässig stetig:

$f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ heisst gleichmässig stetig, falls für jedes $\varepsilon > 0$ es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $\forall x, x_0 \in \Omega$

$$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Stetig:

$\forall x_0 \in \omega,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_{x_0,\varepsilon} > 0,\ \forall x \in \Omega$:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Gleich stetig:

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon > 0,\ \forall x, x_0 \in \Omega$:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Stetig: δ ist abhängig von ε und x_0.
Gleichmässig stetig:δ ist abhängig von ε, aber unabhängig von x_0.

Beispiel 4.25

I) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist nicht gleichmässig stetig

$$|\exp(x) - \exp(x_0)| = |\exp(x - x_0) - 1| \exp(x_0)$$

Falls $x - x_0 = \pm\delta$, $\delta \neq 0$ und $x_0 \to \infty$ dann

$$|\exp(x) - \exp(x_0)| \to \infty$$

II)

$$\begin{aligned} f(x) : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to 2x + 5 \end{aligned}$$

Dann ist f gleichmässig stetig

Beweis

Sei $\varepsilon > 0$, $x_0, x \in \mathbb{R}$. Dann

$$|f(x) - f(x_0)| = |2x + 5 - 2x_0 + 5| = 2|x - x_0|$$

$\Rightarrow$ Wenn wir $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ wählen, dann

$$|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

■

III)

$$\begin{aligned} f : \Omega &\to \Omega \qquad \Omega = (0, \infty) \\ x &\to x^2 \end{aligned}$$

f ist stetig, aber nicht gleichmässig stetig.

i) f stetig: Sei $x_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|x^2 - x_0^2\right| = |(x - x_0)(x + x_0)|$$

Sei $|x - x_0| < \varepsilon < 1$. Dann, $x < x_0 + 1 := a$. Dann $x, x_0 + 1 < a$

$$\left|x^2 - x_0^2\right| = |x - x_0| |x + x_0| < 2a |x - x_0|$$

Wenn wir $\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2a}\right)$ wählen, dann

$$\left|x - x_0^2\right| < 2a |x - x_a| \leq \varepsilon$$

Bemerkung

f ist abhängig von ε, und a ist $x_0 + 1$ abhängig von x_0.

ii) f ist nicht gleichmässig stetig, d.h.

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x_0 \in \Omega, \exists x \in \Omega : |x - x_0| < \delta \text{ und } \left|x^2 - x_0^2\right| \geq \varepsilon$$

Sei $\varepsilon = 1$, $\delta > 0$, $x_0 = \frac{1}{\delta}$ und $x = x_0 + \frac{\delta}{2}$. Dann $|x - x_0| < \frac{\delta}{2} < \delta$ aber

$$\left|x^2 - x_0^2\right| = \left|\left(\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right)^2 - \frac{1}{\delta^2}\right| = 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1 = \varepsilon$$

IV)

$$\begin{aligned} f : \Omega &\to \Omega \qquad \Omega = [0, 4] \\ x &\to x^2 \end{aligned}$$

Dann ist f gleichmässig stetig

Beweis

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Sei $x_0, x \in \Omega = [0,4]$, $0 \leq x, x_0 \leq 4 \Rightarrow 0 \leq x + x_0 \leq 8$

$$\begin{aligned} |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| &= \left|x^2 - x_0^2\right| \\ &= |x - x_0|\,|x + x_0| \leq (4+4)\,\delta \end{aligned}$$

Sei $\delta = \frac{\varepsilon}{8}$, dann

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

■

V)

$$\begin{aligned} f : (0,\infty) &\to (0,\infty) \\ x &\to \sqrt{x} \end{aligned}$$

ist gleichmässig stetig auf $(0,\infty)$

Beweis

Ask for beweis! page 172 bottom

■

Wir haben gesehen, dass

$$\begin{aligned} f : (0,\infty) &\to (0,\infty) \\ x &\to x^2 \end{aligned}$$

nicht gleichmässig stetig ist, aber

$$\begin{aligned} f : [0,4] &\to [0,4] \\ x &\to x^2 \end{aligned}$$

ist gleichmässig stetig. Was ist der Unterschied? $[0,4]$ ist kompakt, $(0,\infty)$ nicht.

Satz 4.26

Sei $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann ist f gleichmässig stetig.

Beweis (Indirekt)

Sonst gibt es $\varepsilon > 0$, so dass für jedes $\delta > 0$ Punkte $x, y \in k$ gibt mit

$$\|x - y\| < \delta \qquad |f(x) - f(y)| > \varepsilon$$

Sei $\forall k \geq 1$, mit $\delta = \frac{1}{k}$, ein Paar (x_k, y_k) gewählt, so dass

$$|x_k - y_k| < \frac{1}{k} \text{ und } |f(x_k) - f(y_k)| > \varepsilon$$

Da k kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge $x_{l(k)} \to z$. Aus $|x_k - y_k| < \frac{1}{k}$ folgt dass $y_{l(k)} \to z$. Sei nun k_0 so dass

$$\underbrace{\left\| f\left(x_{l(k_0)}\right) - f(z) \right\|}_{f \text{ stetig}} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall k > k_0$$

Dann folgt $\forall k > k_0$:

$$\left\| f\left(y_{l(k_0)}\right) - f(z) \right\| \geq \left| \underbrace{f\left(y_{l(k)}\right) - f\left(x_{l(k)}\right)}_{>\varepsilon} \right| - \left| \underbrace{f\left(x_{l(k)}\right) - f(z)}_{<\varepsilon/2} \right| \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

■

4.7 Punktweise und Gleichmässige Konvergenz

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $f, f_k : \Omega \to \mathbb{R}^n$

Definition 4.28
$(f_k)_{k\geq 1}$ konvergiert punktweise gegen f, falls $\forall x \in \Omega$

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$$

$\forall x \in \Omega$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists k_{\varepsilon,x}$ s.d. $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$, $\forall k > k_{\varepsilon,x}$. Es stellt sich die Frage, ob f stetig ist, falls alle $(f_k)_{k\geq 1}$ stetig sind.

Beispiel 4.30

Sei $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_k(x) = x^k$, $k \geq 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 \leq x < 1 : \lim_{k\to\infty} x^k &= 0 \\ x = 1 : \lim_{x\to\infty} x^k &= 1 \end{aligned}$$

Also konvergiert (f_k) punktweise gegen

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

Insbesondere ist $f(x)$ nicht stetig.

Beispiel

$$f_n(x) = \frac{nx^2+1}{nx+1}, \Omega = [0,1]$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nx^2+1}{nx+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2 + \frac{1}{n}}{x + \frac{1}{n}} = \frac{x^2}{x} = x$$

$f_n(x) \to f(x) = x$ und $f(x) = x$ ist stetig

$$|f_n(x) - x| = \left|\frac{nx^2+1}{nx+1} - x\right| = \left|\frac{1-x}{nx+1}\right| \leq \frac{1+|x|}{|nx+1|} \leq \frac{3}{1+n}$$

Da $x \in [1,2]$, $|nx+1| \geq n+1$ und $1 + |x| \leq 3$

$$\frac{3}{1+n} \leq \varepsilon \Rightarrow \frac{3}{\varepsilon} - 1 \leq n$$

d.h. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon$ s.d. für $n > N_\varepsilon = \frac{3}{\varepsilon} - 1$

$$|f_n(x) - x| < \varepsilon \qquad \forall x \in [1,2]$$

N_ε hängt nur von ε ab und nicht von $x \in [1,2]$.

Definition 4.29

(f_k) konvergiert gleichmässig gegen f, falls

$$\sup_{x\in\Omega} \|f_k(x) - f(x)\| \to 0, k \to \infty$$

d-h- $\forall \varepsilon > 0$, $\exists k_\varepsilon$, so dass $\forall k > k_\varepsilon$

$$\forall x \in \Omega : \|f_k(x) - f(x)\| < \varepsilon$$

Beispiel 4.30

Seien $(a_k)_{k\geq 1} \in \mathbb{C}$

$$p(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

mit Konvergenzradius

$$\rho := \frac{1}{\limsup \sqrt[k]{a_k}} \leq \infty$$

Sei $\rho > 0$, und $0 \leq r < \rho$. Dann konvergiert die Folge

$$p_n(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

gleichmässig auf $\overline{B_r(0)}$ gegen $p(z)$

Beweis

Sei $z \in \overline{B_r(0)}$ und $r < s < \rho$

$$\begin{aligned}
|p(z) - p_n(z)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k \right| \\
&\underset{z \in \overline{B_r(0)}}{\leq} \sum_{n+1}^{\infty} |a_n| \, r^k \\
&= \sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k) \left| \frac{r}{s} \right|^k s^k \\
&\overset{(*)}{\leq} \left(\frac{r}{s} \right)^{n+1} \sum_{n+1}^{\infty} |a_k| \, s^k \\
&\leq \left(\frac{r}{s} \right)^{n+1} C_s
\end{aligned}$$

wobei

$$C_s := \sum_{0}^{\infty} |a_k| \, s^k < \infty$$

$$\Rightarrow |p(z) - p_n(z)| \underset{n \to \infty}{\to} 0$$

mit

$$(*) \qquad \left| \frac{r}{s} \right| < 1, k > n+1 \Rightarrow \left(\frac{r}{s} \right)^k < \left(\frac{r}{s} \right)^{n+1}$$

■

Die Bedeutung dieses Konvergenzbegriffs ist

Satz 4.31

Seien $f_k : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig und $f : \Omega \to \mathbb{R}$, so dass f_k gleichmässig gegen f konvergiert. Dann ist f stetig.

Korollar 4.32

Potenzreihen sind stetig im Inneren ihres Konvergenzkreises.

Beweis

Folgt aus Satz 4.31 und Beispiel 4.30

■

Beweis 4.31

Sei $x_0 \in \Omega$, und $(x_n)_{n>1}$ eine Folge in Ω mit Grenzwert x_0. Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen ein k, so dass

$$\sup_{x \in \Omega} |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Da f_k stetig ist, sei nun $N \geq 1$ mit

$$|f_k\left(x_n\right) - f_k\left(x\right)| \leq \varepsilon \qquad \forall n > N$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\|f\left(x_n\right) - f\left(x_0\right)\| &= |f\left(x_n\right) - f_k\left(x_n\right) + f_k\left(x_n\right) + f_k\left(x_0\right) - f_k\left(x_0\right) - f\left(x_0\right)| \\
&\leq |f\left(x_n\right) - f_k\left(x_n\right)| + |f_k\left(x_n\right) - f_k\left(x_0\right)| + |f_k\left(x_0\right) - f\left(x_0\right)| \\
&\leq 3\varepsilon
\end{aligned}$$

■

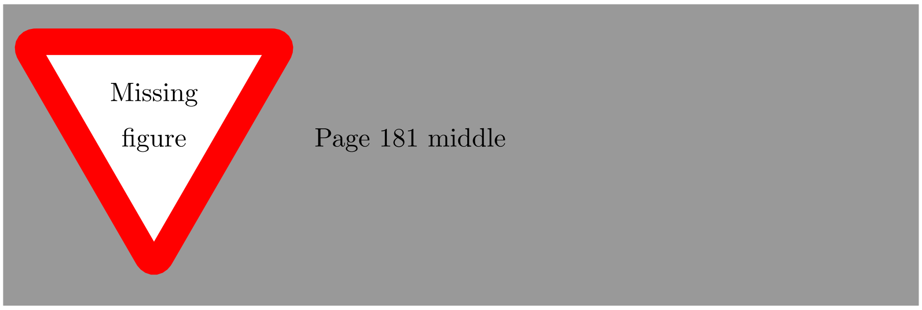
Eine natürliche Frage ist, was sind die “einfachsten” Funktionen, mit denen man alle stetigen Funktionen gleichmässig approximieren kann?
Es gibt einen sehr allgemeines Satz von Stone - Weierstrass, der insbesondere ein Kriterium für Funktionen auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^d$ gibt.

Satz von Weierstrass

Mann kann jede stetige Funktion auf einem kompakten Intervall durch Polynome approximieren.

Ein explizites Approximationsverfahren für auf $[0,1]$ stetige Funktionen mittels Polynomen wurde von S.Bernstein gefunden (1911). Sei

$$B_{i,n}(x) = \left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array}\right) x^i (1-x)^{n-1}, 0 \leq i \leq n$$



Dieses Polynom bildet ein Basis für den Vektorraum der Polynomen von Grad $= n$. Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, dann ist

$$B_n\left(f\right)\left(x\right) := \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}\left(x\right) f\left(\frac{i}{n}\right)$$

Satz (Bernstein)

Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann konvergiert die Folge $B_n\left(f\right)\left(x\right)_{n \geq 1}$ gleichmässig gegen f.

Mit den Bernstein-Polynomen kann man eine Bezierkurve $n-$ten Gerades zu gegebenen $n+1$ Bezierpunkten $P_0, \ldots, P_n$ definieren. Die Bezierkurve stellt Can’t read word, page 182 middle ein wichtiges Werkzeug in der Vektorgrafik dar..

Seien z.B. $P_0, \ldots, P_n$ $n-$Kontrollpunkte in der Ebene. Dann ist die parametrische Kurve

$$t \to \sum_{i=1}^{n} B_{i,n}(t)\, P_i$$

die Bezierkurve. Diese Kurve liegt immer in der konvexen Hülle des Kontrollpolygons.