WARNING!

READ CAREFULLY!

The following document has not been checked for mistakes, and although every effort possible has been made to ensure that the information in this document is correct, it might still contain some mistakes. The following document is given “as is”, without any warranty whatsoever.

Kapitel 5

Differentialrechnung auf $\mathbb{R}$

5.1 Differential (Ableitung), Elementare Eigenschaften

Definition 5.1

Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}$, und $x_0 \in \Omega$

1. f heisst differenzierbar an der Stelle x_0, falls

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

   existiert. Dieser Grenzwert wird dann mit $f'(x_0)$ oder $\frac{df}{dx}(x_0)$ bezeichnet. Die Zahl $f'(x_0)$ heisst die Ableitung oder das Differential von f an der Stelle x_0.

2. f heisst in Ω differenzierbar, falls sie an jeder Stelle $x_0 \in \Omega$ differenzierbar ist. In diesem Fall, nennt sich die Funktion $x \to f'(x)$ Ableitung von f.

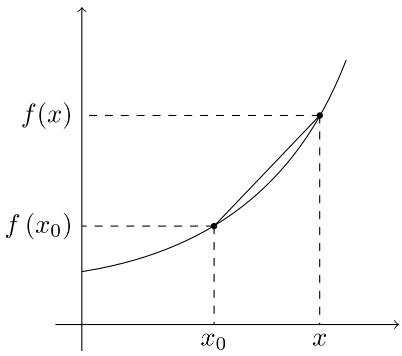
Bemerkung 5.2

In der Definition 5.1 verlangen wir also, dass für jede in $\Omega \backslash \{x_0\}$ enthaltene Folge $(x_n)_{n \geq 1}$ mit Grenzwert x_0, der Limes

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = 0$$

Bemerkung 5.3

Sei f differenzierbar in x_0



Dann ist

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

die Steigung der Geraden durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$.

Geometrisch ist also $f'(x_0)$ die Steigung der Tangenten am Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$. Diese Tangente hat die Gleichung

$$T(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Sei

$$f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) + R_{x_0}(x) = T(x) + R_{x_0}(x)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} + \frac{R(x)}{x - x_0}$$

Dann folgt

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0$$

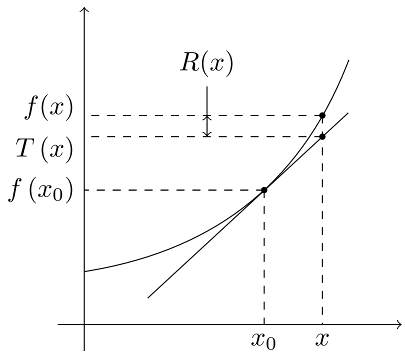
Die lineare Funktion $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ stellt eine gute Approximation der Funktion $f(x)$ dar:

Es gilt

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R_{x_0}(x)$$

mit

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0$$



$$T(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x)$$

Beispiel 5.4

1.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to mx + b \end{aligned}$$

ist überall differenzierbar mit $f'(x) = m$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) - f(x_0) = m(x - x_0)$$
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} = m$$

2. $f(x) = |x|$ ist für alle $x_0 \neq 0$ differenzierbar, aber nicht für $x_0 = 0$

$$f(x) - f(0) = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

Also ist

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} 1 & \text{fur } x > 0 \\ -1 & \text{fur } x < 0 \end{cases}$$

und besitzt also keinen Grenzwert für $x \to 0$, $x \neq 0$

3. $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist überall auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und $\exp'(x) = \exp(x)$. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq x = x_0 + h \in \mathbb{R}$

$$\exp(x_0 + h) - \exp(x_0) = \exp(x_0)(\exp(h) - 1)$$
$$\exp(h) - 1 = h + \frac{h^2}{2!} + \ldots$$
$$\Rightarrow \frac{\exp(h) - 1}{h} = 1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \ldots$$

Also

$$\begin{aligned}\left|\frac{\exp(h)-1}{h}-1\right| &\le |h|\left[\frac{1}{2!}+\frac{|h|}{3!}+\frac{|h|^2}{4!}+\dots\right]\\ &\le |h|\left[1+|h|+\frac{|h|^2}{2!}+\dots\right]\\ &\le |h|\exp(h)\end{aligned}$$

Woraus

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}\frac{\exp(h)-1}{h}=1$$

und somit

$$\begin{aligned}\exp'(x_0) &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}\frac{\exp(x_0+h)-\exp(x_0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\exp(x_0)\left(\frac{\exp(h)-1}{h}\right)\\ &= \exp(x_0)\end{aligned}$$

folgt

4. $\sin(x)$ und $\cos(x)$ sind überall differenzierbar und

$$\begin{aligned}\sin' &= \cos\\ \cos' &= -\sin\end{aligned}$$

Mit den Additionsgesetzen:

$$\begin{aligned}\sin(x+h)-\sin(x) &= \sin(x)\cos(h)+\cos(x)\sin(h)-\sin(x)\\ &= \sin(x)(\cos(h)-1)+\cos(x)\sin(h)\end{aligned}$$

Nun ist

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}=1$$

und

$$\begin{aligned}\frac{\cos(h)-1}{h} &= \frac{\cos^2(h)-1}{h(\cos(h)+1)} = \frac{\sin^2(h)}{h(\cos(h)+1)}\\ &= \underset{\substack{\downarrow\\ \frac{1}{2}}}{\frac{1}{\cos(h)+1}}\cdot\underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\frac{\sin^2(h)}{h}}\end{aligned}$$

There is a sin h/h which doesn't seem to belong anywhere, page 188 bottom right corner

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} &= \sin(x)\left(\frac{\cos(h)-1}{h}\right)+\cos(x)\frac{\sin(h)}{h}\\
\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} &= \lim\left(\sin(x)\lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos(h)-1}{h}\right)\right.\\
&\quad\left. +\cos(x)\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin(h)}{h}\right)\right)\\
&= \sin(x)\lim\left(\frac{\cos(h)-1}{h}\right)\\
&\quad +\cos(x)\lim\left(\frac{\sin(h)}{h}\right)\\
&= (\sin(x))\cdot 0+(\cos(x))\cdot 1=\cos(x)
\end{aligned}$$

Analog

$$\begin{aligned}
\cos(x+h)-\cos(x) &= \cos(x)\cos(h)-\sin(x)\sin(h)-\cos(x)\\
&= \cos(x)(\cos(h)-1)+\sin(x)\sin(h)
\end{aligned}$$

Da wie oben $\frac{\cos(h)-1}{h}\to 0$, $\frac{\sin(h)}{(h)}\to 1$, folgt $\cos'=-\sin$

Der Zusammenhang zwischen Differenzierbarkeit und Sstetigkeit ist:

Satz 5.5

Sei $\Omega\subseteq\mathbb{R}$, $x_0\in\Omega$ und $f:\Omega\to\mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar. Dann ist f in x_0 stetig. (Also ist "Differenzierbarkeit" ist mehr als "Stetigkeit")

Beweis

f differenzierbar in x_0. Sei

$$\begin{aligned}
T:\Omega\setminus\{x_0\} &\to \mathbb{R}\\
x &\mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}
\end{aligned}$$

Da f differenzierbar in x_0 ist, hat T ein Grenzwert in x_0, und

$$\lim_{x\to x_0}T(x)=f'(x)$$

Für $x\neq x_0$

$$f(x)=T(x)(x-x_0)+f(x_0)$$

$f(x)$ ist die Summe von zwei Funktionen $T(x)(x-x_0)$ und $f(x_0)=$ konstant.

Da beide Funktionen einen Grenzwert an der Stelle x_0 besitzen, hat auch f einen Grenzwert in x_0 und

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0}f(x) &= \lim_{x\to x_0}(T(x))\lim_{x\to x_0}(x-x_0)+\lim_{x\to x_0}f(x_0)\\
&= f'(x)\cdot 0+f(x_0)=f(x_0)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ ist stetig in x_0.

$\blacksquare$

Bemerkung

Die Umkehrung von Satz 5.5 (s. 5) gilt nicht, z.B. $f(x) = |x|$ ist stetig in $x = 0$ aber nicht differenzierbar.

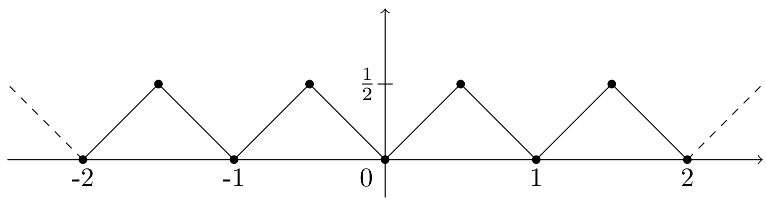
Beispiel 5.6

Das folgende Beispiel zeigt, dass es stetige Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, die an keiner Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar sind. (Von der Waerden (1930))

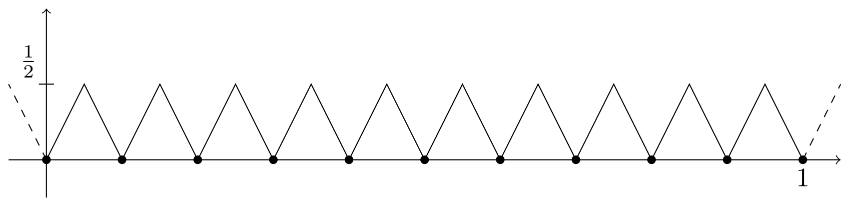
Sei für $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} < x > &= \text{Distanz von } x \text{ zur nächsten ganzen Zahl} \\ &= \min\{|x - m| : m \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

Der Graph von $< x >$ sieht so aus



Graph von $\frac{10x}{10}$



Sei

$$f(x) := < x > + \frac{< 10x >}{10} + \frac{< 10^2 x >}{100} + \ldots$$

Da

$$0 \leq < 10^n x > \leq \frac{1}{2}$$

folgt absolute Konvergenz. Ausserdem sei

$$f_k(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{< 10^n x >}{10^n}$$

Dann ist

$$|f(x) - f_k(x)| = \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{< 10^n x >}{10^n} \right| \leq \frac{1}{2} \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{10^n} \right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{10^{-k}}{9}$$

$\forall k \geq 1$ ist $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig.

Da die Folge $(f_k)_{k\geq 1}$ gleichmässig gegen f konvergiert, ist f stetig. Man kann zeigen, dass f in keinem Punkt von $\mathbb{R}$ differenzierbar ist.

End of beweis is put here, I think it is bett if it stays up when the bsp begins. Page 192 middle

Satz 5.7

Seien $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ Funktionen, $x_0 \in \mathbb{R}$. Wir nehmen an, dass f und g in x_0 differenzierbar sind. Dann sind $f+g$, $f \cdot g$ und falls $g(x_0) \neq 0$ auch f/gan der Stelle x_0 differenzierbar. Es gelten dann folgende Formeln:

Is this supposed to be a fraction?? page 192 bottom; limenet: yes, function f over functio g

1. $(af+bg)'(x_0) = af'(x_0) + bf'(x_0) \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}$
2. $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
3. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

Beweis

1. Für $x \neq x_0$
$$\frac{(af+bg)(x) - (af+bg)(x_0)}{x - x_0} = a\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right) + b\left(\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right)$$
Da f und g in x_0 differenzierbar sind, folgt, dass $af + bg$ in x_0 differenzierbar ist und
$$(af+bg)(x_0) = af'(x_0) + bf'(x_0)$$

2.
$$f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) = g(x)[f(x) - f(x_0)] + f(x_0)[g(x) - g(x_0)]$$
Durch $(x - x_0)$ dividiert
$$\begin{aligned}\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} \cdot g(x_0) \\ &+ \frac{g(x) - g(x_0)}{(x - x_0)} \cdot f(x_0)\end{aligned}$$
Da g in x_0 differenzierbar ist, ist g in x_0 stetig und (Satz 5.5, s. 5)
$$\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$$
Die Formel folgt dann aus der Differenzierbarkeit von f und g in x_0

3.
$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} &= \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)} \\ &= \frac{[f(x) - f(x_0)]g(x_0) - f(x_0)[g(x) - g(x_0)]}{g(x)g(x_0)}\end{aligned}$$
Man dividiere duch $x - x_0$ und benutze die Stetigkeit von g in x_0

$\blacksquare$

Beispiel 5.8

1. $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = x^n$ ist überall differenzierbar und $f_n'(x) = nx^{n-1}$

   Beweis

   Induktion: $f_0(x) = 1 \ \forall x$
   $$f_0'(x) = 0 \left(= 0 \cdot x^{-1}\right)$$

   - $f_1(x) = x, \forall x$
   - $f_1'(x) = 1 = 1 \cdot x^{1-1}$ ✓

   Sei $n \geq 2$. Wir nehmen an, dass die Formel für $n-1$ gilt, i.e.
   $$\begin{aligned} f_{n-1}'(x) &= \left(x^{n-1}\right)' = (n-1)\,x^{n-2} \\ f_n(x) &= x^n = x \cdot x^{n-1} = x \cdot f_{n-1}(x) \end{aligned}$$

   Nach 2., Satz 5.7 (s. 7)
   $$\begin{aligned} f_n'(x) &= (x)'\, f_{n-1}(x) + x f_{n-1}'(x) \\ &= f_{n-1}(x) + x\,(n-1)\,x^{n-2} \\ &= x^{n-1} + (n-1)\,x^{n-1} = nx^{n-1} \end{aligned}$$

   ■

2. $$\begin{aligned} p(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 \\ p'(x) &= n a_n x^{n-1} + (n-1)\,a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_1 \end{aligned}$$

   Insbesondere ist die Ableitung eines Polynoms von Grad n ein Polynom von Grad $(n-1)$, $n \geq 1$.

3. Sei $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, wobei p, q Polynome bezeichnen. $R(x)$ ist eine sogenannte rationale Funktion mit Definitionsbereich
   $$\Omega = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$$
   $$R'(x) = \frac{p'(x)q(x) - p(x)q'(x)}{q^2(x)}$$

   z.B.
   $$R(x) = \frac{x^3+1}{x-1}$$
   $$\begin{aligned} R(x) &= \frac{\left(3x^2\right)(x-1) - \left(x^3+1\right)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{3x^3 - 3x^2 - x^3 - 1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{2x^3 - 3x^2 - 1}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

Die nächste Rechenregel wird uns erlauben, Funktionen wie z.B. $\exp\left(x^3+1\right)$ und $\sin\left(x^2\right)$ abzuleiten

Satz 5.9 (Kettenregel)

Seien $f:\Omega\to\mathbb{R}$, $g:T\to\mathbb{R}$ Funktionen mit $f(\Omega)\subset T$, und $x_0\in\Omega$. Wir nehmen an, dass f an der Stelle x_0 und g an der Stelle $f(x_0)$, differenzierbar sind. Dann ist $g\circ f:\Omega\to\mathbb{R}$ an der Stelle x_0 differenzierbar und

$$(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))\,f'(x_0)$$

Bemerkung

f ist differenzierbar in x_0, falls

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

existiert, d.h. für jede in $\Omega\backslash\{x_0\}$ enthaltene Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ mit Grenzwert x_0, existiert der Limes

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}$$

Beweis

Sei $(x_n)_{n\geq 1}$ mit $\lim x_n=x_0$, $x_n\neq x_0$. Dann gilt

$$\lim f(x_n)=f(x_0)$$

(Nach Satz 5.5, s. 5, f differenzierbar $\Rightarrow$ f stetig (in x_0)).

Sei $y_n:=f(x_n)$ $(y_0:=f(x_0))$. Wir nehmen an, dass $y_n\neq f(x_0)$, $\forall n$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\frac{(g\circ f)(x_n)-(g\circ f)(x_0)}{x_n-x_0} &= \frac{g(f(x_n))-g(f(x_0))}{x-x_0}\\
&=\left(\frac{g(f(x_n))-g(f(x_0))}{f(x_n)-f(x_0)}\right)\cdot\left(\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x-x_0}\right)\\
&=\underset{\substack{\downarrow\ \lim_{n\to\infty}\\ g'(y_0)}}{\left(\frac{g(y_n)-g(x_0)}{y_n-y_0}\right)}\cdot\underset{\substack{\downarrow\ \lim_{n\to\infty}\\ f'(x_0)}}{\left(\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x-x_0}\right)}\\
&\overset{n\to\infty}{=} g'(f(x_0))\,f'(x_0)
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Beispiel 5.10

1. Berechne die Ableitung von $\exp\left(x^3+1\right)$

$$\begin{array}{ll} g(x)=\exp(x) & f(x)=x^3+1 \\ g'(x)=\exp(x) & f'(x)=3x^2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} (g\circ f)(x) &= \exp\left(x^3+1\right) \\ (g\circ f)'(x) &= g'(f(x))\cdot f'(x)=\left[\exp\left(x^3+1\right)\right]\cdot 3x^2 \end{aligned}$$

2. $$\left(\sin\left(x^2\right)\right)'=(g\circ f)'(x)$$

   mit

$$\begin{array}{ll} g(x)=\sin(x) & f(x)=x^2 \\ g'(x)=\cos(x) & f'(x)=2x \end{array}$$

$$\left(\sin\left(x^2\right)\right)'=\cos\left(x^2\right)\cdot 2x$$

3. $$\left(\left(3x^7+11x^6+5\right)^2\right)'=2\left(3x^7+11x^6+5\right)\cdot\left(21x^6+66x^5\right)$$

4. Sei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ differenzierbar und $n\in\mathbb{N}$

$$f(x)=g(x)^n$$

   Dann ist

$$f'(x)=ng(x)^{n-1}\cdot g'(x)$$

5. $$\begin{aligned} \exp(\exp(x)) &= e^{e^x} \\ \left(e^{e^x}\right)' &= e^{(e^x)}\cdot e^x \end{aligned}$$

5.2 Der Mittelwertsatz und Folgerungen

Wichtige Informationen über eine Funktion f lassen sich leicht aus der Ableitung schliessen. Dies geschieht mittels dem Mittelwertsatz . Ein Spezialfalls der Mittelwertsatz ist

Satz 5.12

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Sei $z_+\in[a,b]$ mit $f(z_+)=\max\{f(x):x\in[a,b]\}$. Wir nehmen an, dass $z_+\in(a,b)$. Dann gilt $f'(z_+)=0$ Eine analoge Aussage gilt für z_-.

Bemerkung 5.13

1. z_+, z_- existieren nach Satz 4.9
2. Die Voraussetzung $z_+\in(a,b)$ ist wichtig, z.B. Sei $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$. Dann ist $z_+=1$ und $f'(x)=1\neq 0$ $(\forall x\in(a,b))$

Beweis

Sei $z_+ \in (a,b)$. Da $(a,z_+) \neq \varnothing$ und $(z_+,b) \neq \varnothing$, gibt es

$$(x_n)_{n\geq 1} \subset (a,z_+)$$

sowie

$$(y_n)_{n\geq 1} \subset (z_+,b)$$

mit

$$\lim_{n\to\infty} x_n = z_+ = \lim_{n\to\infty} y_n$$

$\big($z.B. $x_n = z_+ - \frac{1}{n}, y_n = z_+ + \frac{1}{n}\big)$

Für $n \geq 1$ folgt

$$f'(z_+) = \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{f(x_n) - f(z_+)}^{<0}}{\underbrace{x_n - z_+}_{<0}} \geq 0$$

$$f(z_+) = \max\{f(x)\}$$

$$f'(z_+) = \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{f(y_n) - f(z_+)}^{<0}}{\underbrace{y_n - z_+}_{>0}} \leq 0$$

Woraus

$$f'(z_+) = 0$$

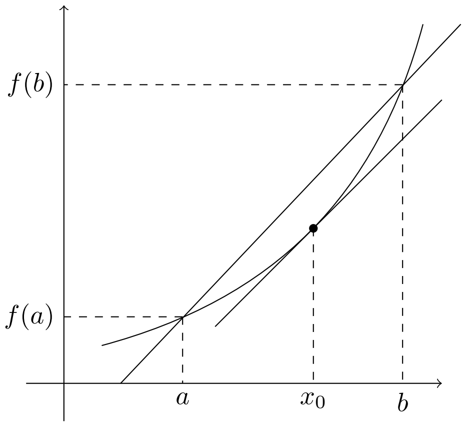
folgt.

■

Satz 5.14 (Mittelwertsatz)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar, $a \neq b$. Dann gibt es $x_0 \in (a,b)$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$



Beweis

Die Idee lässt sich auf den Fall $f(a) = f(b) = 0$ züruckführen und dann den Satz 5.12 (s. 10) anwenden. Die Gleichung für die Sekante durch die Punkte $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ ist

$$S(x) = (x-a)\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right) + f(a)$$

Sei nun $g(x) = f(x) - S(x)$. Dann ist $g(a) = 0 = g(b)$

<u>Fall 1:</u> g ist identisch $= 0$. Also ist $f(x) = S(x)$ eine Gerade und die Aussage stimmt $\forall x_0 \in (a, b)$

<u>Fall 2:</u> $g \neq 0$. Also ist entweder

$$\max_x g(x) > 0 \; \left(\text{oder } \min_x g(x) < 0\right)$$

Im "max"-Fall sei z_+ mit

$$g(z_+) = \max\{g(x) : x \in [a, b]\}$$

Dann ist $z_+ \in (a, b)$ (Da $g(a) = g(b) = 0$, und $g(z_+) > 0$) und nach Satz 5.12 (s. 10) $g'(z_+) = 0$, d.h.

$$g(z_+) = f'(z_+) - S'(z_+) = 0$$
$$\Rightarrow f'(z_+) = S'(z_+) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Der "min"-Fall ist analog.

■

Als erste Anwendung haben wir

Korollar 5.15

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ wie im Satz 5.14 (s. 11)

1. Falls $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a,b)$ folgt, dass f konstant ist.
2. Falls $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in (a,b)$ so ist f monoton wachsend.
3. Falls $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a,b)$ so ist f streng monoton wachsend.
4. Falls $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in (a,b)$ so ist f monoton fallend.
5. Falls $f'(x) < 0$, $\forall x \in (a,b)$ so ist f streng monoton fallend.

Beweis

1. Seien $a \leq x < y \leq b$ beliebig und sei (nach Mittelwertsatz) $x_0 \in (x,y)$ mit
$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(x_0)$$
da $f'(x_0)$ folgt $f(y) = f(x) \Rightarrow f$ ist konstant
2. Seien $a \leq x < y \leq b$ beliebig und $x_0 \in (x,y)$ mit
$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(x_0 > 0)$$
woraus folgt $f(y) \geq f(x)$ folgt $\Rightarrow f$ monoton wachsend.
3. Analog
4. Analog

■

Beispiel 5.16

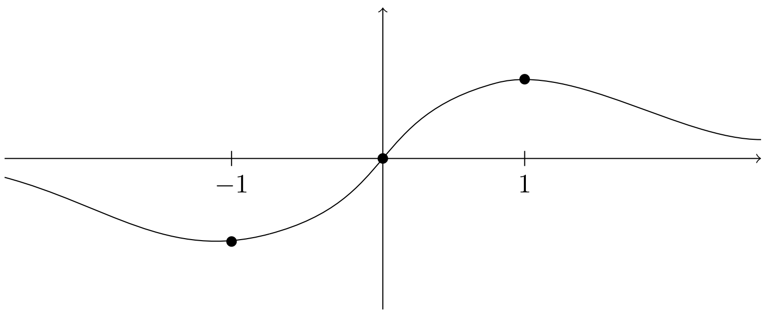
1. Bestimme alle differenzierbare Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f' = \lambda f$. Offensichtlich erfüllt $t \to e^{\lambda t}$ diese Gleichung
$$\begin{aligned} f(t) &= e^{\lambda t} \\ f'(t) &= \lambda e^{\lambda t} = \lambda f(t) \end{aligned}$$
Betrachten wir
$$\begin{aligned} g(t) &= e^{-\lambda t} f(t) \\ g'(t) &= -\lambda e^{-\lambda t} f(t) + e^{-\lambda t} f'(t) \\ &= e^{-\lambda t}\left(-\lambda f(t) + f'(t)\right) \\ &= e^{-\lambda t}(0)\, \forall t \\ &= 0 \end{aligned}$$
Also folgt, dass g konstant ist, d.h.
$$g(t) = C \Rightarrow f(t) = Ce^{\lambda t}$$
<u>Anders gesagt:</u> Die Menge der Lösungen von $f' = \lambda f$ ist ein $1-$dimensionaler Vektorraum
$$V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f' = \lambda f\} = \left\{Ce^{\lambda t} \mid c \in \mathbb{R}\right\}$$

2.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{2x}{1+x^2} \\
f'(x) &= \frac{2\left(1+x^2\right)-(2x)(2x)}{\left(1+x^2\right)^2} \\
&= \frac{2-2x^2}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&f'(x) < 0 \text{ für } |x| > 1 \\
&f'(\pm 1) = 0 \\
&f'(x) > 0 \text{ für } |x| < 1
\end{aligned}$$

x	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$



Korollar 5.17 (Bernoulli, L'Hôpital)

Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar in (a,b) mit $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a,b)$. Wir nehmen an, dass

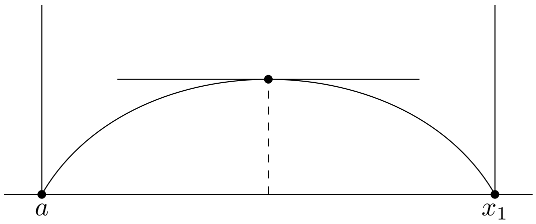
(i) $f(a) = 0 = g(a)$

(ii) $\lim\limits_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$

Dann ist $g(x) \neq 0$, $\forall x > a$ und $\lim\limits_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

Beweis

Falls es $x_1 > a$ gibt mit $g(x_1) = 0$, dann folgt die Existenz von $x_0 \in (a, x_1)$ mit $g'(x_0) = 0$ (MWS.)



Wiederspruch zur Annahme $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a,b)$. Also $g(x) \neq 0$, $\forall x > a$. Nun sei $a < s < b$ beliebig, und

$$h(x) := \frac{f(s)}{g(s)} \cdot g(x) - f(x) \qquad x \in [a,s]$$

Dann gilt, $h(a) = 0$ und $h(s) = 0$, es gibt also $x_s \in (a,s)$ mit $h'(x_s) = 0$, d.h.

$$0 = h'(x_s) = \frac{f(s)}{g(s)} \cdot g'(x_s) - f'(x_s)$$

$$(*) \qquad \Rightarrow \frac{f'(x_s)}{g'(x_s)} = \frac{f(s)}{g(s)}$$

Sei nun $s_n \in (a,b)$ beliebig mit $\lim s_n = a$. Da $a < x_{s_n} < s_n$ folgt, $\lim x_{s_n} = a$, und aus $(*)$

$$\lim \frac{f(s_n)}{g(s_n)} = \lim \frac{f'(x_{s_n})}{g'(x_{s_n})} = A$$

■

Bemerkung 5.18

1. Es gibt die selbe Version für $\lim\limits_{x \nearrow b}$
2. (Limes von links und rechts zusammen). Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Sei $a < c < b$, wir nehmen an, f, g sind in $(a,c) \cup (c,b)$ differenzierbar, $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a,c) \cup (c,b)$ und

   (i) $f(c) = g(c) = 0$

   (ii) $\lim\limits_{\substack{x \to c \\ x \neq c}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$

   Dann ist $g(x) \neq 0$, $\forall x \in (a,c) \cup (c,b)$ und $\lim\limits_{\substack{x \to c \\ x \neq c}} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

Beispiel 5.19

1. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \lim \frac{3x^2}{2x} = \frac{3}{2}$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim \frac{\cos(x)}{1} = 1$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2x\cos(x^2)}{2x} = \lim\limits_{x \to 0} \cos(x^2) = 1$

4. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2} = \lim \frac{-\sin(x)}{2x} = -\frac{1}{2}$

5. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\left(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!}\right)}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{e^x - 1 - x}{3x^2}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{6x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x}{6} = \frac{1}{6}$

Die nächste Anwendung des Mittelwertsatzes ist der sogenannte “Umkehrsatz”

Fundamentale Frage

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und bijektiv und sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die inverse Funktion. Ist dann g auch differenzierbar?

Beispiel

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to x^3 \end{aligned}$$

ist überall differenzierbar und bijektiv. Die “Umkehrfunktion”

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to x^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

ist aber in 0 nicht differenzierbar

$$\frac{g(h) - g(0)}{h} = \frac{h^{\frac{1}{3}}}{h} = h^{-\frac{2}{3}} \to \infty$$

Man kann folgendes bemerken: Falls $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv und die Umkehrfunktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auch differenzierbar ist, dann folgt aus $(f \circ g)(x) = x$, $\forall x$ und der Kettenregel, dass:

$$f'(g(x))\, g'(x) = 1 \qquad \forall x$$

Insbesondere $f'(x) \neq 0$ $(g'(x) \neq 0)$, $\forall x$. Dies ist also eine notwendige Bedingung zur Existenz der Ableitung von f^{-1}

Satz 5.20 (Umkehrsatz)

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a, b)$. Seien $c = \inf\limits_{x} f(x)$, $d = \sup\limits_{x} f(x)$. Dann ist $f : (a, b) \to (c, d)$ bijektiv und die Umkehrfunktion $f^{-1} : (c, d) \to (a, b)$ ist differenzierbar mit

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \qquad \forall x \in (a, b)$$

d.h.

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)} \qquad \forall y \in (c, d)$$

Beweis

Sei $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ streng monoton Wachsend. Da f streng monoton wachsend ist, folgt die erste Behauptung aus dem Zwischenwertsatz für monotone Funktionen (d.h. $f : (a,b) \to (c,d)$ bijektive).

Nun zeigen wir: f^{-1} ist differenzierbar. Sei $y_0 \in (c,d)$, und $(y_k)_{k\geq 1}$ eine Folge in (c,d) lim

$$\lim x_k = y_0 \qquad y_k \neq y_0 \qquad \forall k \geq 1$$

Dann gibt es eindeutig bestimmte $(x_k)_{k\geq 1}$ in (a,b) mit $f(x_k) = y_k$ (f bijektiv) und $x_0 \in (a,b)$ mit $f(x_0) = y_0$. Also ist

$$\frac{f^{-1}(y_k) - f^{-1}(y_0)}{y_k - y_0} = \frac{x_k - x_0}{f(x_k) - f(x_0)}$$

Beachte, dass $x_k \neq x_0$, $\forall k \geq 1$ und dass die Stetigkeit (Satz 4.21) von f^{-1}, $\lim x_k = x_0$ impliziert

$$\left(\begin{array}{cccc} f(x_k) = y_k & \Rightarrow & x_k & = & f^{-1}(y_k) \\ & & \lim x_k & = & f^{-1}(\lim y_k) \\ & & & = & f^{-1}(y_0) \\ & & & = & x_0 \end{array}\right)$$

Nun ist

$$\frac{x_k - x_0}{f(x_k) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x_k) - f(x_0)}{x_k - x_0}} \to \frac{1}{f'(x_0)}$$

da $f'(x_0) \neq 0$

■

Korollar 5.21

Die Funktion $\log : (0,\infty) \to \mathbb{K}$ ist differenzierbar und $\log'(x) = \frac{1}{x}$, $\forall x \in (0,\infty)$

Beweis

$\exp : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ erfüllt alle Bedingungen von Satz 5.20 (s. 16)($\exp' = \exp > 0$). Wir haben also

$$\begin{aligned} \log(\exp(x)) &= x \\ \log'\underbrace{(\exp(x))}_{y}\underbrace{(\exp(x))}_{y} &= 1 \\ \log'(y) &= \frac{1}{y} \end{aligned}$$

■

Wir definieren mittels "exp" die verallgemeinerte Potenzfunktion $x \to x^\alpha$. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$: zunächst bemerken wir für $n \in \mathbb{N}$ und $x > 0$: $x^n = e^{n \log x}$. Wir definieren also für $x > 0$

$$x^\alpha := e^{\alpha \log x}$$

Dann gilt

Korollar 5.22

$\alpha \in \mathbb{R}$, $x \to x^\alpha$ ist differenzierbar und $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

Exkurs

Die Exponentialfunktion wächst schneller als jedes Polynom

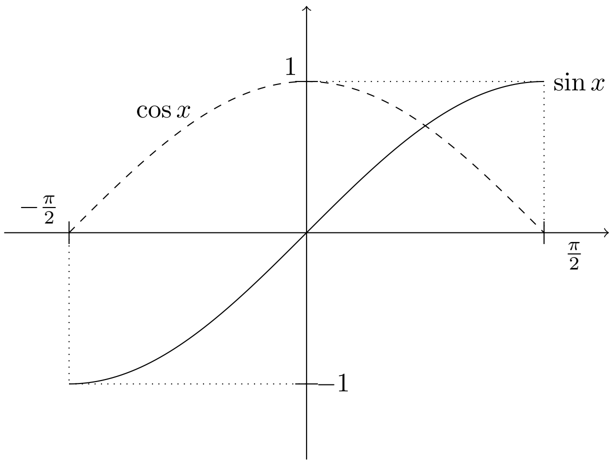
$$e^x > \frac{x^n}{n!} \qquad x \geq 0$$

Insbesondere $e^x > x$, $\forall x \geq 0$. Die log Funktion ist strikt monoton wachsend, Also $e^x > x \Rightarrow x \geq \log(x)$, $\forall x > 0$.

Für $a > 0$, $x^a > \log(x^a) = a\log(x)$. Also $\log(x) < \frac{x^a}{a}$. Die log −Funktion wächst also langsamer als jede positive Potenz.

5.3 Die Trigonometrischen und Hyperbolischen Funktionen

1. $\sin(x)$



$\sin'(x) = \cos(x)$; d.h. $\sin'(x) > 0$, $\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ und besitzt daher eine differenzierbare Umkehrfunktion

$$\arcsin : (-1,1) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

deren Ableitung wie folgt berechnet wird

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

Falls $\alpha = \arcsin(x)$, $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. So ist

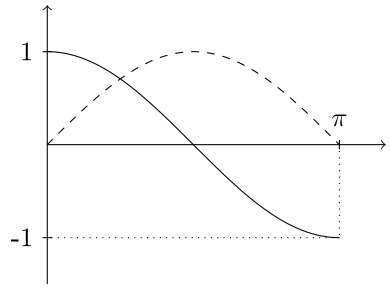
$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$
$$\cos^2(\alpha) + x^2 = 1$$

d.h. $\cos^2(\alpha) = 1 - x^2$. Da nun $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ folgt aus $\cos(\alpha) > 0 \Rightarrow \cos(\alpha) = \sqrt{1-x^2}$. Daraus ergibt sich

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Analog haben wir

2. $\cos$, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$



$$\cos : (0, \pi) \to (-1, 1)$$

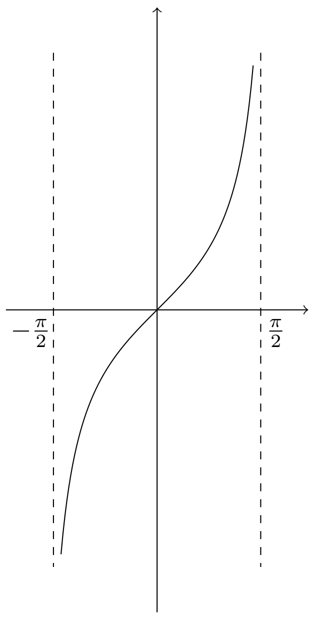
bijektiv und

$$\arccos : (-1, 1) \to (0, \pi)$$

ist die inverse Funktion und

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3. $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$



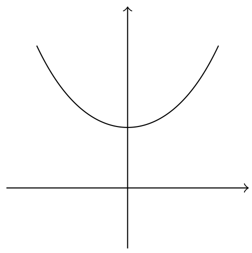
$$\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

und

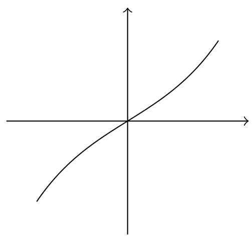
$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

4. Hyperbelfunktionen

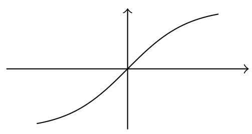
$$\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



$$\tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$



Dann ist $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv und differenzierbar mit $\sinh'(x) = \cosh(x)$ und somit monotone steigend und $\operatorname{arcsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Inverse

- $\cosh : [0, \infty) \to [1, \infty)$ bijektiv.
  Inverse: $\operatorname{arccosh} : (1, \infty) \to (0, \infty)$
- $\tanh : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ ist bijektiv.
  Inverse: $\operatorname{arctanh} : (-1, 1) \to \mathbb{R}$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}\sinh'(x) &= \cosh(x)\\ \cosh'(x) &= \sinh(x)\\ \tanh'(x) &= \frac{1}{\cosh^2(x)}\end{aligned}$$

mit der Beziehung $\cosh^2 + \sinh^2 + 1$ folgt

$$\begin{aligned}\operatorname{arcsinh}'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\\ \operatorname{arccosh}'(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\\ \operatorname{arctanh}'(x) &= \frac{1}{1-x^2}\end{aligned}$$

5.4 Funktionen der Klasse C^m

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ differenzierbar

Definition 5.23

$f : \Omega \to \mathbb{R}$ heisst C^1 (von der Klasse C^1), falls f auf Ω differenzierbar ist und $x \to f'(x)$ auf Ω stetig ist.

Notation: $C^1(\Omega) =$ Vektorraum der auf Ω C^1-Funktionen

Beispiel 5.24

1. $\exp, \cos, \sin, \text{Polynom} \in C^1(\mathbb{R})$
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

In 0:

Is this "In 0" or "ln 0"(Nat. Log), page 223 bottom

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h} = h \sin\left(\frac{1}{h}\right)$$

$$\lim_{h \to 0} h \sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0$$

Also $f'(0) = 0$, f ist differenzierbar in $x_0 = 0$. Aber f' ist in 0 nicht stetig. Für $x_n = \frac{1}{n\pi}$ ist

$$f'(x_n) = \frac{2\sin(n\pi)}{n\pi} + (-1)^{n+1} = (-1)^{n+1}$$

$\lim x_n = 0$, $\lim f'(x_n)$ (insbesondere $\neq f'(0)$) nicht existiert.

Wir haben einen Konvergenzbegriff auf $C^0(\Omega)$ gesehen: Gleichmässige Konvergenz

$$f_n \overset{\text{glm.}}{\to} f \text{ falls } \sup_{x \in \Omega} \|f_n - f\| \to 0$$

Falls alle f_n stetig sind, folgt, dass f stetig ist. Für $C^1(\Omega)$ haben wir

Satz 5.26

Sei $(f_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $C^1(\Omega)$. Wir nehmen an, dass $f_n \overset{\text{glm.}}{\to} f$ und $f_n' \overset{\text{glm.}}{\to} g$. Dann gilt $f \in C^1(\Omega)$ und $g = f'$

Beweis

Da $f_n \overset{\text{glm.}}{\to} f$ und $f_n' \overset{\text{glm.}}{\to} g$, sind f und g stetig
Zu Zeigen: f ist differenzierbar und $f' = g$.

Seien $x \neq x_0$ in Ω. Aus $f_n \overset{\text{glm.}}{\to} f$ folgt, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ und $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - g(x_0)\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_n(x)-f_n(x_0)}{x-x_0} - g(x_0)\right|$$

Mittelwertsatz: $\exists \xi_n$ zwischen x und x_0, so dass

$$\frac{f_n(x)-f_n(x_0)}{x-x_0} = f_n'(\xi_n)$$

Nun

$$\begin{aligned} |f_n'(\xi_n) - g(x_0)| &\leq |f_n'(\xi_n) - g(\xi_n)| + |g(\xi_n) - g(x_0)| \\ &\leq \underbrace{\sup_{\xi\in\Omega} |f_n'(\xi) - g(\xi)|}_{\downarrow \text{ Da } f_n' \to g \atop 0} + \underbrace{|g(\xi_n) - g(x_0)|}_{\downarrow \,\text{falls } x\to x_0\, (\xi_n \to x_0) \atop 0 \text{ (Stet. von } g)} \end{aligned}$$

Folglich

$$\lim_{x\to x_0}\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - g(x_0)\right| = 0 \Rightarrow f' = g$$

■

Beispiel 5.28

Die gleichmässige Konvergenz von $f_n' \to g$ ist notwendig: Sei

$$f_n(x) = \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + x^2}, x \in (-1,1)$$

Behauptung

$f_n(x) \overset{\text{glm.}}{\to} f = |x|$ für $|x| < 1$

Beweis

$$
\begin{aligned}
|f_n(x) - |x|| &= \left| \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + x^2} - |x| \right| \\
&= \left| \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + x^2} - |x| \right| \cdot \frac{\left| \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + x^2} + |x| \right|}{\left| \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + x^2} + |x| \right|} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + x^2 - (|x|)^2}{\left| \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + x^2} + |x| \right|} = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left| \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + x^2} + |x| \right|} \leq \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left(\frac{1}{n}\right)} \overset{n\to\infty}{\to} 0
\end{aligned}
$$

d.h. $f_n(x) \overset{\text{glm.}}{\to} |x|$
<u>Nun:</u>$|x|$ ist stetig aber nicht differenzierbar

$$
f_n'(x) = \frac{x}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + |x|^2}} \underset{n\to\infty}{\to} \begin{cases} \frac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}
$$

$$
g(x) = \begin{cases} 1 & x > 1 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 1 \end{cases}
$$

$f_n'(x) \to g(x)$ konvergiert nicht gleichmässig (g nicht stetig in $x = 0$)

■

Eine sehr wichtige Anwendung von Satz 5.26 (s. 22) ist auf die Eigenschaften von Funktionen, die Summe von Potenzreihen sind. Sei $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}$. Wir nehmen an

$$
\rho := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} > 0
$$

Satz 5.29

Sei $x \in (-\rho, \rho) = \Omega$

$$
f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n
$$

die Summe der absolut konvergenten Potenzreihe. Dann ist $f \in C^1(\Omega)$ und

$$
f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}
$$

mit dem selben Konvergenzradius

Beweis

Sei

$$f_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Sei $0 < r < \rho$. Dann gilt, $\forall x \in (-r, r)$:

$$|f_k(x) - f(x)| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} |a_n| r^n \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

Also $f_k \to f$ gleichmässig auf $(-r, r)$. Da

$$\begin{aligned} \limsup \sqrt[n]{|na_n|} &= \limsup \left(\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{|a_n|}\right) \\ \left(\text{Da } \lim \sqrt[n]{n} = 1\right) &= \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \rho \end{aligned}$$

konvergiert

$$\sum_{n=0}^{\infty} na_n x^{n-1} =: g(x)$$

absolut $\forall x \in (-\rho, \rho)$. Nun ist

$$f_k'(x) = \sum_{n=0}^{k} na_n x^{n-1}$$

und es folgt wie oben $f_n'(x) \overset{\text{glm.}}{\to} g$. Nach Satz 5.26 (s. 22) folgt, dass f, g stetig und $g = f'$, auf $(-\rho, \rho)$.

$\blacksquare$

Beispiel 5.30

1.

$$\begin{aligned} \exp(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \\ \exp'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x) \end{aligned}$$

2.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \qquad |x| < 1$$

Daraus folgt

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{eine} \\ \text{nicht} \\ \text{WHAT} \\ \text{Identität}}}{=} \frac{1}{(1-x)^2}$$

Can't understand word, page 230 very bottom