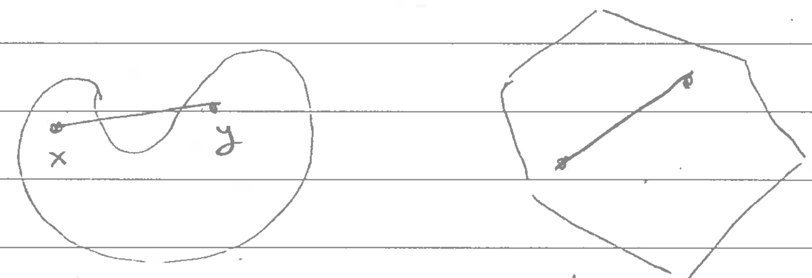
Für den Mittelwertsatz der DR – zu verallgemeinern benutzen wir folgenden Begriffen:

Defn 8.19 Eine Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann konvex falls für jede Paar von Punkten $x, y \in K$ die Menge K auch das segment

$$(1-t)\,x + t\,y \qquad t \in [0,1]$$ mit endpunkte x, y enthält.



nicht konvex　　　　konvex

(Bsp 7.7.2 (II) Struwe)

Satz 8.20 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ konvex $f : \Omega \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $x_0, x_1 \in \Omega$ sowie $x_t := (1-t)\,x_0 + t\,x_1$ $t \in [0,1]$. Dann gibt es $\vartheta \in [0,1]$ mit

$$f(x_1) - f(x_0) = df(x_\vartheta)(x_1 - x_0)$$

Beweis: Sei $g(t) = (1-t)\,x_0 + t\,x_1 = x_t$. Dann ist $t \mapsto (f \circ g)(t)$ auf $[0,1]$ stetig und in $(0,1)$ differenzierbar. Also gibt es $\vartheta \in (0,1)$ mit (nach MWS der DR (einer variable)).

$$f(x_1) - f(x_0) = (f\circ g)(1) - (f\circ g)(0) = (f\circ g)'(\sigma)(1-0)$$

Nun ist $(f\circ g)'(\sigma) = df(g(\sigma)) \cdot \frac{dg}{dt}(\sigma)$

$$(df)(x_\sigma)(-x_0 + x_1).$$

$\blacksquare$

Die Kettenregel wird auch angewandet um Integrale mit Parametern zu studieren.

Ein Beispiel davon ist:

Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(s,t) \to h(s,t)$$

Wir nehmen an, h ist stetig, $\frac{\partial h}{\partial t}$ existiert und ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig. Sei

$$u(t) = \int_a^{b(t)} h(s,t)\, ds, \quad b(t) \in C^1(\mathbb{R}),\ a \in \mathbb{R}.$$

Satz 8.21 Sei $h(s,t)$ eine stetige differenzierbare Funktion von zwei variablen und $b(t)$ differenzierbare Funktion einer variable. Dann ist die Funktion

$$u(t) := \int_a^{b(t)} h(s,t)\, ds, \text{ wo}$$

definiert, differenzierbar mit der Ableitung

$$u'(t) = h(b(t), t) \cdot b'(t) + \int_a^{b(t)} \frac{\partial h}{\partial t}(s,t)\, ds.$$

Kor 8.22 (Struwe S. 162 – Integrale mit Parametern)

Sei $h = h(s,t) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig, und $\frac{\partial h}{\partial t}$ existiert und auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig. Sei

$$u(t) = \int_0^t h(s,t)\, ds.$$ Dann

$u(t) \in C^1(\mathbb{R})$ und $u'(t) = h(t,t) + \int_0^t \frac{\partial h}{\partial t}(s,t)\, ds.$

Beweis. Setze $b(t) = t$, $a = 0$ in Satz 8.21.

Kor 8.23. Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit stetiger partieller Ableitung $\frac{\partial h}{\partial t}$.
Dann ist die Funktion

$$u(t) := \int_a^b h(s,t)\, ds$$ differenzierbar mit

Ableitung $$u'(t) = \int_a^b \frac{\partial h}{\partial t}(s,t)\, ds.$$

Beweis. Setze $b(t) = b$, in Satz 8.20.

Bmk 8.24. Mit Kor 8.23 kann man bestimmte Integrale berechnen, auch wenn die zugehörige unbestimmten Integrale nicht elementar darstellbar sind.

Bsp 8.25. Berechne das Integral $\int_0^1 \frac{x^5-1}{\log x}\,dx$.

Sei $u(\alpha) := \int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\log x}\,dx$

Für $\alpha \geq 0$ erfüllt $u(\alpha)$ die Voraussetzungen des Satzes. Wir berechnen

$$u'(\alpha) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{x^\alpha - 1}{\log x}\right) dx \qquad \left(\frac{d}{d\alpha} a^\alpha = a^\alpha \log a\right)$$

$$= \int_0^1 \frac{x^\alpha \log x}{\log x}\,dx = \int_0^1 x^\alpha\,dx = \left.\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_0^{x=1}$$

$$= \frac{1}{\alpha+1}$$

Daraus folgt aus Fund. Satz der Integral Rechnung

$$u(\alpha) = \int u'(\alpha)\,d\alpha = \int \frac{d\alpha}{\alpha+1} = \log(\alpha+1) + C$$

für eine noch zu bestimmende Konstante C.

Aber $u(0) = \int_0^1 0 \, dx = 0 \Rightarrow c = 0$

$\Rightarrow$

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\log x} dx = \log(\alpha + 1)$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{x^5 - 1}{\log x} dx = \log 6$$

Beweis: Satz 8.21 (Idee).

Sei $f(x,y) = \int_a^x h(s,y) \, ds : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$g(t) = \begin{pmatrix} b(t) \\ t \end{pmatrix} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad g'(t) = \begin{pmatrix} b'(t) \\ 1 \end{pmatrix}$

Dann $u(t) = (f \circ g)(t) = f(b(t), t)$

$$= \int_a^{b(t)} h(s,t) \, ds.$$

Nach Hauptsatz der Integral Rechnung
f ist nach x partielle differenzierbar und
$\frac{\partial f}{\partial x} = h(x,y)$.

Man muss zeigen das $\partial_y f$ ist nach y partielle differenzierbar mit

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \int_a^x \frac{\partial h(s,y)}{\partial y}\, ds.$$

Dann ergibt die Kettenregel

$$u'(t) = \frac{d}{dt}(f\circ g)(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(g(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(g(t))\right)\frac{dg}{dt}$$

$$= \left(h(b(t),t), \left(\int_a^x \frac{\partial h(s,y)}{\partial y}\, ds\right)(b(t),t)\right)\begin{pmatrix} b'(t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \left(h(b(t),t), \int_a^{b(t)} \frac{\partial h}{\partial t}(s,t)\, ds\right)\begin{pmatrix} b'(t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= h(b(t),t)\cdot b'(t) + \int_a^{b(t)} \frac{\partial h}{\partial t}(s,t)\, ds.$$

§ 8.3 Differentialformen und Vektorfelder

Sei $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ der Raum der linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$.

Falls $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion ist, die in jedem Punkt differenzierbar ist, dann ist $df(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und man erhält eine Abbildung

$$\Omega \longrightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$
$$x_0 \longrightarrow df(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0)\right)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0)\,dx^1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0)\,dx^n$$

Dies ist ein Beispiel von 1-form.

Defn 8.26. (Struwe 7.3.1) Eine Differentialform vom Grad 1 (auch "1-Form") auf Ω ist eine Abbildung

$$\lambda : \Omega \longrightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

Bsp. 8.27. ① Seien $x^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Koordinatenfunktionen $1 \leq i \leq n$. Für jedes $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ist $dx^i(x_0) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$; dies führt zur 1-Form

$$dx^i : \mathbb{R}^n \longrightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$
$$x_0 \longrightarrow dx^i(x_0)$$

Für jedes $x_0 \in \mathbb{R}^n$, gilt $dx^i(e_j) = \delta_{ij}$

also bilden $dx^1(x_0), \dots, dx^n(x_0)$ eine Basis für $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Eine beliebig 1-Form $\lambda : \mathbb{R}^n \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ lässt sich dann eindeutig wie folgt darstellen

$$\lambda(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x_0)\, dx^i(x_0)$$

wobei $\lambda_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Funktionen sind.

Bsp ② Für jedes $f \in C^1(\Omega)$ ist das differential df eine 1-Form

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} dx^2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n.$$

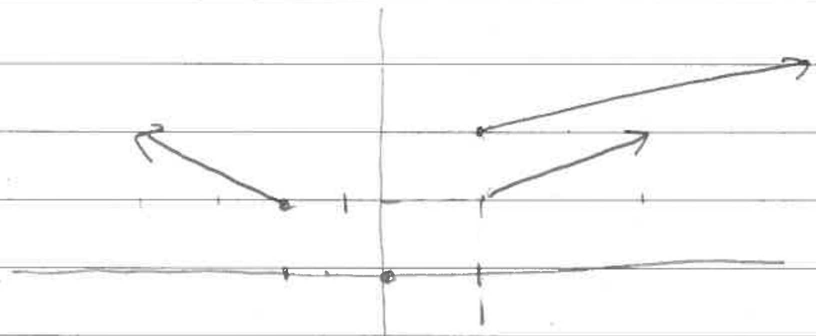
③ Der Ausdruck $\lambda(x, y, z) = 3dx + 5z\,dy + x\,dz$

definiert ein 1-Form auf $\mathbb{R}^3$.

mit $\lambda_1(x, y, z) = 3$
$\lambda_2(x, y, z) = 5z$
$\lambda_3(x, y, z) = x$.

Defn 8.28. Ein Vektorfeld auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung $v : \Omega \to \mathbb{R}^n$.

Bsp. ① $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,
$$(x,y) \to (2xy\,,\, x^2)$$

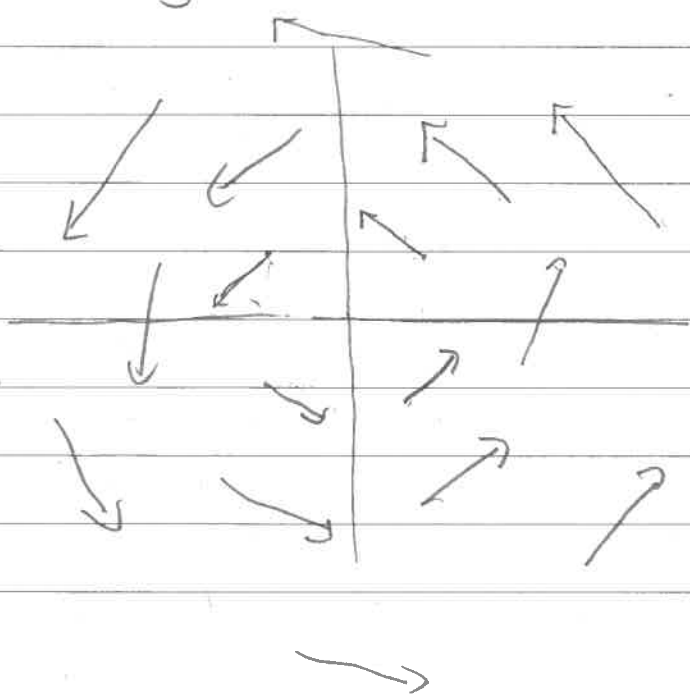


$v(1,1) = (2,1)$ $v(-1,1) = (-2,1)$

$v(0,0) = (0,0)$

$v(1,2) = (4,1)$

② $v(x,y) = (-y\,,x)$



Bmk 8.29 (Siehe Bmk 7.3.1)

Sei $\langle , \rangle$ das übliche Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$, d.h. $\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x^i y^i$

Mittels $\langle , \rangle$ kann man von 1-Formen zu Vektorfelder und umgekehrt übergehen.

Dies geht wie folgt:

(1) Sei $v : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld. Dann definieren wir $\forall x \in \Omega$, $w \in \mathbb{R}^n$

$$\lambda(x)(w) := \langle v(x), w \rangle$$

Offensichtlich $\lambda(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und somit ist

$$\lambda : \Omega \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$
$$x \mapsto \lambda(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$w \mapsto \langle v(x), w \rangle$$

eine 1-Form auf Ω.

umgekehrt

(2) Sei $\lambda : \Omega \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ 1-Form und $\lambda(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x)\, dx^i$ wie oben

Wir definieren $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$x \longrightarrow (\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_n(x))$$

dann ist v ein Vektorfeld und

$$\lambda(x)(w) = \langle v(x), w \rangle.$$

Sei $w = w^1 e_1 + w^2 e_2 + \ldots + w^n e_n$

$$\lambda(x)(w) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x)\, dx^i(w)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x)\, dx^i(w^1 e_1 + w^2 e_2 + \ldots + w^n e_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x)\, (w^1 dx^i(e_1) + w^i dx^i(e_i) + \ldots + w^n dx^i(e_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x)\, w^i = (\lambda_1(x), \ldots, \lambda_n(x)) \cdot (w^1, \ldots w^n)$$

$dx^i(e_j) = \delta_{ij}$

$$= \langle v(x), w \rangle$$

Diese Diskussion können wir auf das Differential einer Funktion anwenden

Defn 8.30 (Strue Defn 7.3.2).

Sei $f \in C^1(\Omega)$. Das durch

$$\langle v(x), w \rangle := df(x)(w), \quad w \in \mathbb{R}^n$$

definierte Vektorfeld heisst Gradientenfeld von f und wird mit $v(x) = \nabla f(x)$ (Nabla) oder grad f bezeichnet.

Bzgl der Standardbasis $e_1, \ldots, e_n$ des $\mathbb{R}^n$ folgt die Darstellung

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x^1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x^n}(x) \end{pmatrix}, \quad \forall x \in \Omega.$$

(Dabei nehmen wir $\lambda(x) := df(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$, Bmk 8.29 ②)

Satz 8.31 (Siehe Bmk 7.3.2) Sei $f \in C^1(\Omega)$ und $x_0 \in \Omega$. Dann gibt

$\nabla f(x_0)$ die Richtung und $|\nabla f(x_0)|$ den Betrag des steilsten Anstiegen von f an der Stelle x_0.

Beweis. Aus der Definition des Gradientenfeld folgt, $\forall e \in \mathbb{R}^n$, unit vektor, $\|e\|=1$

$$df(x_0)(e) = \langle \nabla f(x_0), e \rangle$$

Richtungableitung von f in Richtung e
(Anstiegen von f in Richtung e)
Mit Cauchy-Schwarz folgt

$$\langle \nabla f(x_0), e \rangle \leq \|\nabla f(x_0)\| \|e\| = \|\nabla f(x_0)\|$$

mit Gleichheit genau dann wann e ein positives Vielfaches von $\nabla f(x_0)$ ist, nämlich $e = \dfrac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|}$

$\Rightarrow \quad df(x_0)e \leq |\nabla f(x_0)|$

mit Gleichheit für $e = \dfrac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|}$

$\boxtimes$

$\nabla f(x_0) \neq 0 \Rightarrow \nabla f(x_0)$ zeigt die Richtung an, in der f am schnellsten wächst.

<u>Geometrische Interpretation</u>.

Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, C^1.

Für jedes $s \in \mathbb{R}$ wird $f^{-1}(s) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = s\}$

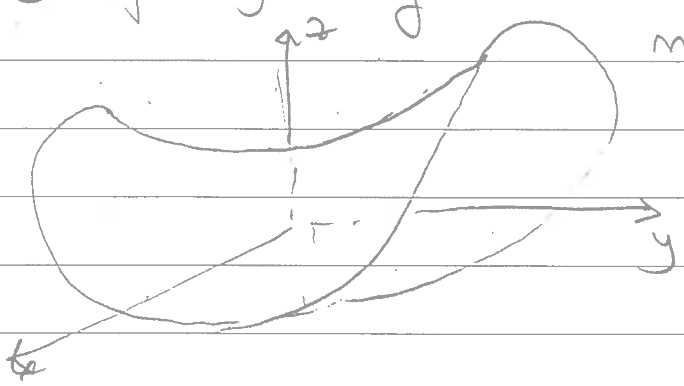
<u>Niveaufläche</u> genannt.

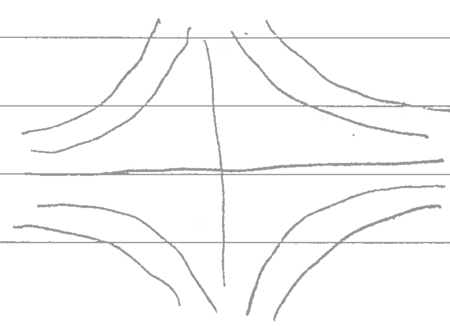
<u>Bsp.</u> (1) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$(x, y, z) \to x^2 + y^2 + z^2$

dann ist $f^{-1}(s)$ = Sphäre mit Zenter 0 und Radius $\sqrt{s}$.

(2) $f(x, y) = xy$ ist ein Hyperbolischer Paraboloid mit Niveaulinien





$xy = c$.

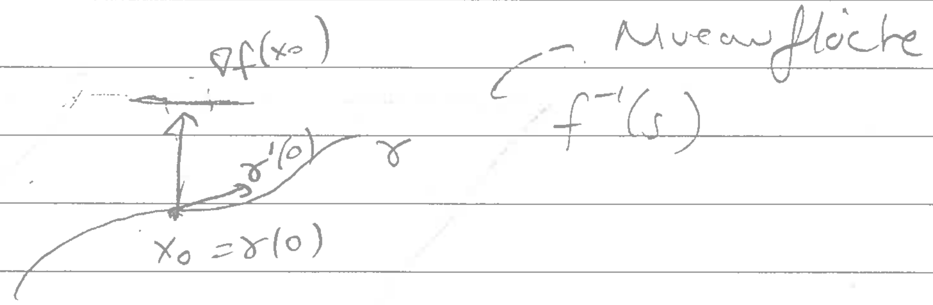
$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Nun sei $x_0 \in \Omega$; mit $f(x_0) = s$

i.e. $x_0 \in f^{-1}(s)$.

Sei $\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^n$ ein diff. Kurve

durch x_0 mit $\gamma[-1,1] \subset f^{-1}(s)$, $\gamma(0) = x_0$



Dann gilt $f(\gamma(t)) = s \quad \forall t \in [-1, 1]$.

und es folgt aus Kettenregel:

$$\frac{d}{dt}\left(f(\gamma(t))\right) = \frac{d}{dt}(s) = 0$$

$$\shortparallel$$

$$df(\gamma(t))\, \gamma'(t) = 0 = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$$

Insbesondere $0 = df(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = \langle \nabla f(x_0), \gamma'(0) \rangle$

d.h $\nabla f(x_0)$ steht senkrecht zur Niveaufläche von f durch x_0.

Bsp. (Siehe Bsp 7.3.2)

Sei $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{2}$, $x,y \in \mathbb{R}^2$

$$\nabla f(x,y) = (x, -y)$$

Sei $(x_0, y_0) = (1,-1)$

$$\nabla f(1,-1) = (1,1) \qquad |\nabla f(1,-1)| = \sqrt{2}$$

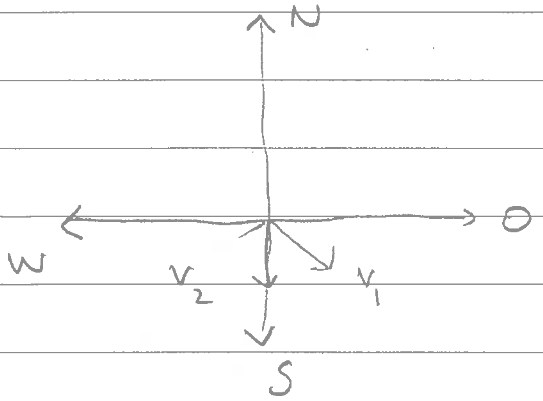
$$\frac{\nabla f}{|\nabla f|}(1,-1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$$

(2) Im Punkt P biegt der Bergweg ab; nach Südosten geht er mit 25% Steigung bergan, nach Süden mit 20% Gefälle bergab. Der Wanderer im Nebel möchte über die Wiese möglichst rascht zum Gipfel. In welche Richtung muss er gehen und wie steil ist es dorthin?

Wir legen die Koordinatensystem so, dass die x-Achse nach Osten und die y-Achse nach Norden zeigt, und setzen voraus, dass die Höhenfunktion h differenzierbar ist. Wir wollen ihren Gradienten in P $\nabla h(P)$ bestimmen. Nach Voraussetzungen hat h die beiden Richtungsableitungen

$$dh(P)(v_1) = 0.25 \qquad dh(P)(v_2) = -0.2$$

wobei $v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $\quad v_2 = (0, -1)$



$$dh(p)(v_1) = \left(\frac{\partial h}{\partial x}(p), \frac{\partial h}{\partial y}(p)\right) \cdot v_1$$

$$= \frac{\partial h}{\partial x}(p)\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\partial h}{\partial y}(p)\frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4}$$

$$dh(p)(v_2) = \left(\frac{\partial h}{\partial x}(p)\right)(0) - \frac{\partial h}{\partial y}(p)(-1) = -\frac{1}{5}$$

Durch Lösen des linearen Gleichungssystem folgern wir: $\frac{\partial h}{\partial x}(p) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{5}$, $\frac{\partial h}{\partial y}(p) = \frac{1}{5}$

Die Richtung des Gradients ist somit

$$\arg \nabla h(p) = \arctan \frac{1/5}{\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{5}} \approx 19.86^\circ$$

und die Steigung in diese Richtung ist

$$|\nabla h(p)| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} \approx 0.59 = 59\%$$

§ 8.4 Wegintegrale.

Wir haben gesehen in Bmk 8.29 dass mittels das übliche Skalarprodukt $\langle , \rangle$ kann man von 1-Formen zu Vektorfelder und umgekehrt übergehen.

In diesem Kapitel werden wir das "Wegintegral" von 1. Formen oder "Wegintegrale" von Vektorfelder längs eine Kurve studieren.

Dazu untersuchen wir zunächst Kurven in $\mathbb{R}^n$.

Parameterdarstellung einer Kurve:

Sei $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ eine Kurve. Eine Parameterdarstellung (P.D) von γ ist eine Funktion $\gamma : I = [a,b] \to \mathbb{R}^n$ wobei

$$t \mapsto \gamma(t)$$

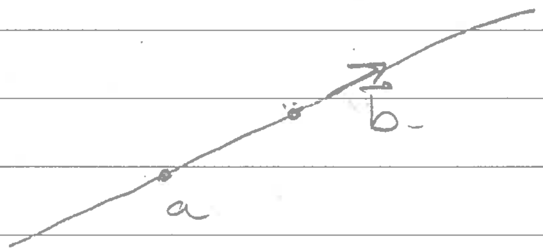
$\gamma(t)$ ein Punkt γ ist und jeder Punkt auf γ kann als $\gamma(t)$ dargestellt werden.

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots \gamma_n(t))$$

Die positive Orientierung von γ ist die Richtung mit der die Kurve durchgelaufen wird.

<u>Bsp 8.32.</u> ① $\gamma(t) = (a_1 + b_1 t, a_2 + b_2 t, a_3 + b_3 t)$ $t \in \mathbb{R}$

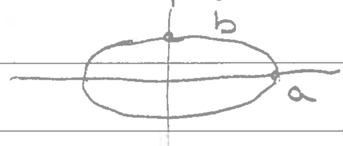
ist die Parameterdarstellung einer Gerade durch den Punkt $a = (a_1, a_2, a_3)$ und parallel zum Vektor (b_1, b_2, b_3)



② $\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t)$ ist eine Parameter Darstellung eine Ellipse

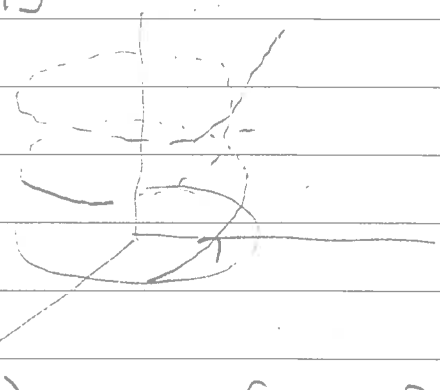
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$t \in [0, 2\pi]$



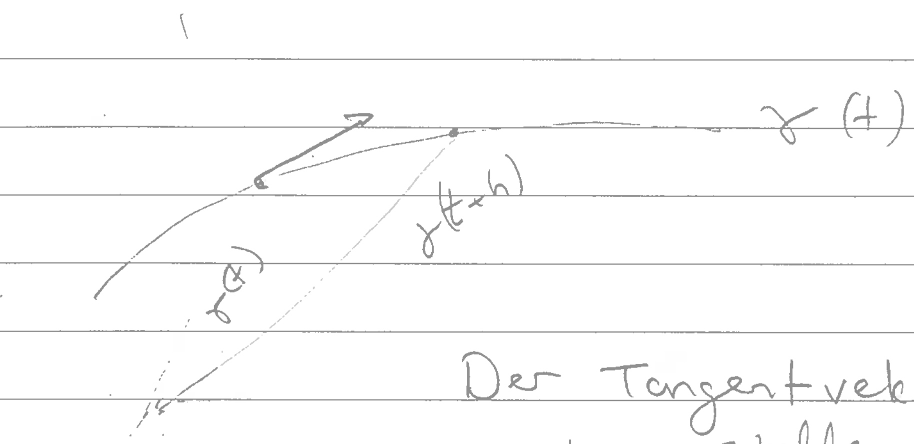
(3) $\gamma_1(t) = (a\cos t,\ b\sin t,\ ct)$ ist eine PD
$t \in [0, 2\pi]$

einer elliptische Helix



$\gamma_2(t) = (a\cos t,\ -b\sin t,\ c(2\pi - t))$ $\quad t \in [0, 2\pi]$

- Ist PD der gleichen Kurve wobei die Orientierung umgekehrt ist.

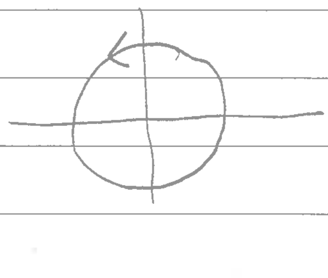


- Der Tangentvektor zur Kurve an der Stelle $\gamma(t)$ ist $\gamma'(t)$

$$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), \dots, \gamma_n'(t))$$

<u>Bsp</u> $\gamma(t) = (a\cos t,\ a\sin t)$ $\quad t \in [0, 2\pi]$

$\gamma'(t) = (-a\sin t,\ a\cos t)$



$\|\gamma'(t)\| = a$

Man kann $\gamma'(t)$ als die Geschwindigkeit eines Punktes, der die Kurve mit der PD $\gamma(t)$ durchläuft.

Sei $v : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld

$\gamma \subset \Omega$ eine Kurve mit PD $\gamma(t)$, $t \in [a,b]$
(Siehe Defn 7.4.2)

Defn 8.33 Das Wegintegral von v längs γ

$$\int_\gamma v\, d\vec{s} = \int_\gamma v(\gamma)\, d\gamma := \int_a^b \langle v(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt$$

$d\vec{s} = \gamma'(t)\,dt$ heisst gerichtetes Längeelement

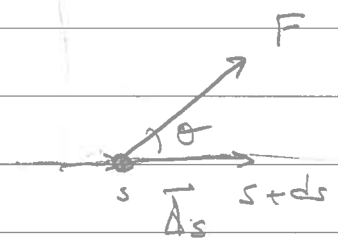
Bsp 8.34 Ein einführendes Beispiel:

Sei ein Massenpunkt, der sich unter den Einfluss eines Kraftfelds $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bewegt.

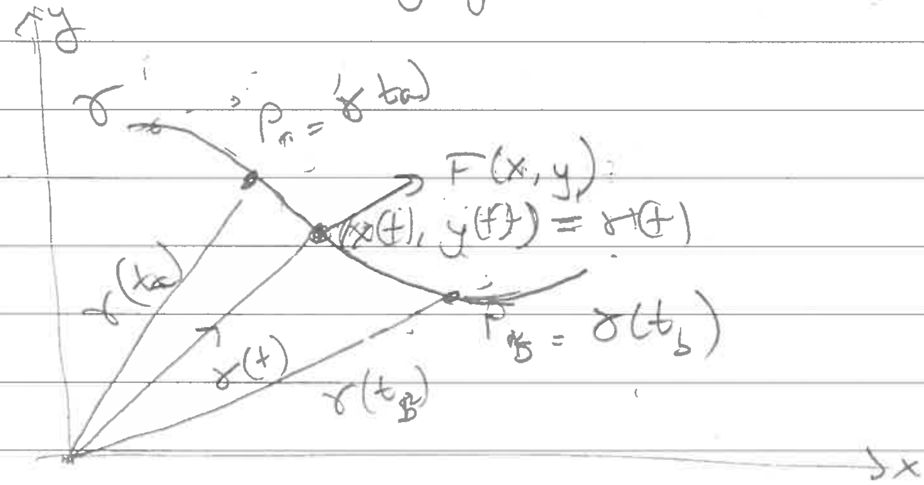
Wenn der Massepunkt durch eine Konstante Kraft $\vec{F}$ längs einer Geraden um den Vektor $\vec{s}$ verschoben.

Die dabei verrichtete Arbeit ist definitionsgemäss das Skalar Produkt aus dem Kraftvektor $\vec{F}$ und dem Verschiebungsvektor $\vec{s}$.

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F s \cos\theta$$



Allgemeiner Fall.: Verschiebungs längs einer Kurve γ in einem Kraftfeld $F = (P(x,y), Q(x,y))$



$\Delta W = F_\gamma \Delta(\gamma)$ = Kraftkomponente entlang des Weges mal zurückgelegter weg.

Da sich Betrag und Richtung der Kraft sowie der jeweilige Winkel zum Weg von Punkt zu Punkt ändern, gilt das zur Berechnung notwendige Skalarprodukt näherungsweise jeweils nur für ein Wegelement $\vec{\Delta r}$. Die Berechnung der Arbeit erfolgt daher in folgender Weise.

ⓐ Zerlegung des Weges in Teilobschnitte

$$\Delta r_i = r(t_{i+1}) - r(t_i) = \frac{\Delta r}{\Delta t} \cdot \Delta t$$

ⓑ Ermittlung der jeweils wirkenden Kraft:

$$F(r(t_i)) = F(x(t_i)), y(t_i))$$

ⓒ Berechnen der Arbeit je Teilobschnitt – Skalarprodukt

$$\Delta W_i = F(x(t_i), y(t_i)) \cdot \Delta r_i$$

ⓓ Aufsummeren der Teil-Arbeit

$$W \approx \sum \Delta W_i = \sum F(x(t_i), y(t_i)) \cdot \underbrace{\Delta r}_{\frac{\Delta r}{\Delta t} \cdot \Delta t}$$

ⓔ Durch Verkleinerung des Wegelements enthält man den exacten Wert der geleisteten Arbeit.

$$W = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t)\, dt$$

$$= \int_a^b \langle F(r(t)), r'(t) \rangle\, dt.$$

Bmk 8.35. Wir können das Wegintegral auch mit Differentialformen formulieren.

Sei $v : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld
$x \to (v^i(x))_{i=1}^n$ $\left(v^i(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ stetig}\right)$

dann ist durch $\lambda(x)(w) := \langle v(x), w\rangle$ definierte $\lambda(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ eine 1-Form.

$$\int_\gamma v \, d\vec{s} = \int_a^b \langle v(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \, dt$$

$$= \int_a^b \lambda(\gamma(t))(\gamma'(t)) \, dt$$

Umgekehrt Sei $\lambda : \Omega \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ eine 1-Form die in Folgende Sinne stetig ist:

Sei $\lambda(x) = \sum \lambda_i(x) \, dx^i(x)$. Dann sind

die Funktionen $\lambda_i : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig

Sei $\gamma : [a,b] \to \Omega$ ein C^1-Weg.
$t \to (\gamma^1(t), \gamma^2(t) \dots, \gamma^n(t))$

Dann ist $[a,b] \to \mathbb{R}$
$t \to \lambda(\gamma(t))(\gamma'(t))$

$$= \sum \lambda_i(\gamma(t)) \frac{d\gamma^i(t)}{dt}$$

eine stetige Funktion somit ist das Integral $\int_a^b \lambda(\gamma(t))(\gamma'(t)) \, dt$ wohl definiert.

169

Defn 8.36 (Storrer 7.4-1) Das Wegintegral von $\lambda \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ längs γ ist

$$\int_\gamma \lambda := \int_a^b \lambda(\gamma(t))(\gamma'(t))\,dt$$

Bsp 8.37. (Storrer 7.4-1)

(1) Sei $\gamma \in C^1([0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2)$ mit

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad \text{eine}$$

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

Parametrisierung des Einheitskreises

$\lambda = \lambda(x, y)$ die 1-Form mit

$$\lambda(x, y) = -y\,dx + x\,dy \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

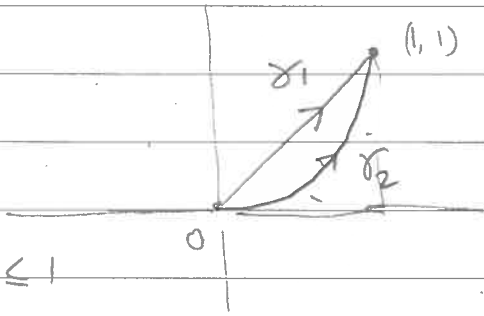
Dann gilt

$$\int_\gamma \lambda = \int_0^{2\pi} \underbrace{(-\sin t, \cos t)}_{\lambda(\gamma(t))} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}}_{\gamma'(t)} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt = 2\pi$$

(2) Sei $\lambda(x,y) = 3x^2y\,dx + (x^3+1)\,dy$

Wir betrachten das Kurvenintegral längs verschiedener Wege



$\gamma_1(t) = (t, t) \quad 0 \leq t \leq 1$

$\gamma_1'(t) = (1, 1)$

$\gamma_2(t) = (t, t^2) \quad 0 \leq t \leq 1, \quad \gamma_2'(t) = (1, 2t)$

$$\int_{\gamma_1} \lambda = \int 3x^2y\,dx + (x^3+1)\,dy = \int_0^1 \left(3t^3 + (t^3+1)\right) dt = 2$$

$$\int_{\gamma} \lambda = \int_0^1 \left(3t^4 + (t^3+1)\,2t\right) dt = 2.$$

Bmk sei $f(x,y) = xy^3 + y$. Dann ist

$$df(x,y) = 3x^2y\,dx + (x^3+1)\,dy$$

und $f(1,1) - f(0,0) = (1+1) - (0,0) = 2$

1. Wir können den Begriff des Wegintegrals auf Wege zu erweitern die stückweise C^1 sind.

Ein stückweise C^1-Weg ist eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ mit einer Unterteilung des Intervals

$$a = a_0 < a_1 < a_2 \ldots < a_n = b$$

so dass $\gamma|_{[a_i, a_{i+1}]} = [a_i, a_{i+1}] \to \mathbb{R}^n$ C^1 ist

d.h $t \to \gamma'(t)$ ist auf (a_i, a_{i+1}) stetig und erweitert sich stetig auf $[a_i, a_{i+1}]$

Bsp

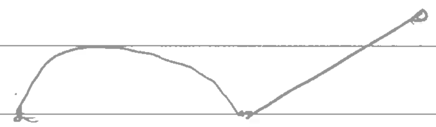


Bild eines stückweise C^1-Weges

Dann definiert man
$$\int_\gamma \lambda = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\gamma|_{[a_i, a_{i+1}]}} \lambda$$

Jetzt werden wir einige Grundlegenden Eigenschaften des Wegintegrals herleiten.

Satz 8.38.

Eigenschaften des Wegintegrals.

E1 Das Wegintegral $\int_\gamma \lambda$ ist unabhängig von einer orientierungserhaltenden Umparametrisierung.

D.h. Sei $\gamma : [a,b] \to \Omega$ C^1 und

$\varphi : [a',b'] \to [a,b]$, C^1 mit

$\varphi(a') = a$, $\varphi(b') = b$, $\varphi'(t) > 0$ $\forall t \in [a',b']$

Dann ist

$$\int_{\gamma \circ \varphi} \lambda = \int_{a'}^{b'} \lambda(\gamma(\varphi(t)))(\gamma \circ \varphi)'(t)\, dt$$

$$= \int_{a'}^{b'} \lambda\big(\gamma(\varphi(t))\big)\, \gamma'(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt$$

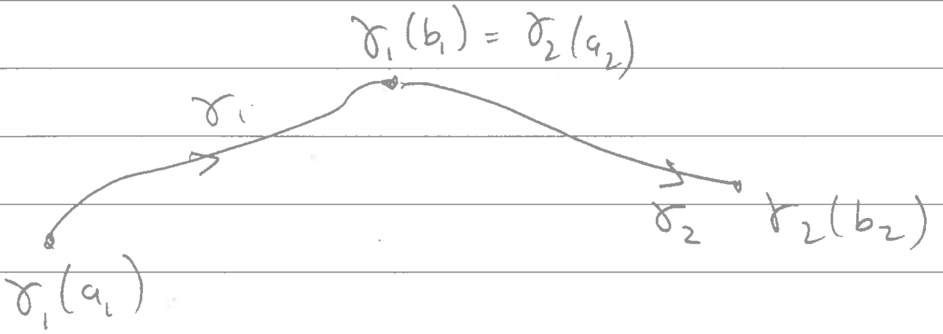
$$= \int_a^b \lambda(\gamma(s))\, \gamma'(s)\, ds = \int_\gamma \lambda$$

Geometrisch heisst dies, dass $\int_\gamma \lambda$ nur vom Bild $\gamma([a,b])$ mit vorgegebenen Durchlaufsinn abhängt.

(E2) Seien $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \Omega$ und

$$\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \Omega$$

zwei Wege mit $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$



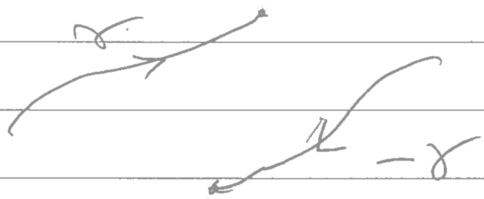
Wir definieren $\gamma_1 + \gamma_2$ der Weg der durch aneindrhängen von γ_1 mit γ_2 entsteht

d.h. $$\gamma_1 + \gamma_2 = \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [a_1, b_1] \\ \gamma_2(t - b_1 + a_2) & t \in [b_1, b_1 + b_2 - a_2] \end{cases}$$

Dann gilt $$\int_{\gamma_1 + \gamma_2} \lambda = \int_{\gamma_1} \lambda + \int_{\gamma_2} \lambda$$

E3 Sei $\gamma : [a,b] \to \Omega$ ein Weg.

Dann sei $-\gamma : [a,b] \to \Omega$ der gleiche Weg aber im entgegengesetzten Durchlaufsinn, d.h. $(-\gamma)(t) = \gamma(-t+a+b)$



Dann gilt $\displaystyle\int_{-\gamma} \lambda = -\int_{\gamma} \lambda.$

(Struwe Bsp. 7.4.1)

E4 Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion sowie

$\gamma : [a,b] \to \Omega$ stückweise C^1.

Dann gilt $\displaystyle\int_{\gamma} df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$

γ ist C^1, dann ist $\displaystyle\int_{\gamma} df = \int_a^b df(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$

$$\underset{\text{Kettenregel}}{=} \int_a^b \frac{d}{dt}(f\circ\gamma)(t)\,dt \underset{\text{Haupsatz der IR}}{=} (f\circ\gamma)(b) - (f\circ\gamma)(a)$$

$$= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

Mittels den Wegintegrals können wir die C^1-Funktionen charakteriesieren deren Differential verschwinden.

<u>Satz 8.39</u> Sei Ω "offen" und (C^1-) Weg zusammenhängend. Sei $f \in C^1(\Omega)$

Falls $df(x) = 0$ $\forall x \in \Omega$ so ist f konstant.

<u>Beweis</u> Ω weg zusammenhängend heisst dass zu je zwei Punkten $x, y \in \Omega$ gibt es in C^1-Weg $\gamma : [0,1] \to \gamma$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$, $\gamma([0,1]) \subset \Omega$.

Sei $x, y \in \Omega$ und γ wie oben

Dann folgt $f(y) - f(x) = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))$

$$= \int_\gamma df = 0$$

$\Rightarrow f(y) = f(x)$ $\forall x, y \in \Omega$ $\Rightarrow f$ ist konstant.

Frage: Wann ist eine 1-Form λ von der Form $\lambda = df$, d.h. differential einer Funktion?

d.h. Gegeben eine 1-Form λ, gibt es eine Funktion $f: \Omega \to \mathbb{R}$ s.d. $df = \lambda$.

Wenn ein $f: \Omega \to \mathbb{R}$ gibt so dass $df = \lambda$, heisst f ein <u>Potential</u>.

(Potential ist wie ein Stammfunktion für ein 1-Form.)

Mittels Wegintegral, stellen wir jetzt ein Kriterium auf.

<u>Satz 8.30</u> (Struwe 7.4.2). Sei $\lambda \in \Omega \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ eine stetige 1-Form. Folgende Aussage sind äquivalent.

(1) Es gibt $f \in C^1(\Omega)$ mit $df = \Omega$

(2) Für je zwei stückweise C^1-Wege $\gamma_i = [a_i, b_i) \to \Omega$ mit selben Anfangs und Endpunkten (d.h. $\gamma_1(a_1) = \gamma_2(a_2)$, $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(b_2)$) gilt $\int_{\gamma_1} \lambda = \int_{\gamma_2} \lambda$

(3) Für jede geschlossene C^1-Weg γ gilt

$$\int_\gamma \lambda = 0 .$$

Beweis: (1) ⇒ (2) Folgt aus E4.

(2) ⇔ (3) : Klar.

(2) ⇒ (1) Sei $p_0 \in \Omega$; für jedes $x \in \Omega$

sei $\gamma : [0,1] \to \Omega$ stückweise C^1

mit $\gamma(0) = p_0$, $\gamma(1) = x$

Definiere $f(x) := \int_\gamma \lambda$

Dann ist f nach Annahme (2) wohldefiniert (d.h unabhängig von dem Weg von p_0 nach x)

(Wir können f auch mit $\int_{p_0}^{x} \lambda$ bezeichnen.)

Behauptung: $f \in C^1(\Omega)$ und $df = \lambda$.
Um zu zeigen dass $df = \lambda$
müssen wir zeigen dass für $x, x_0 \in \Omega$

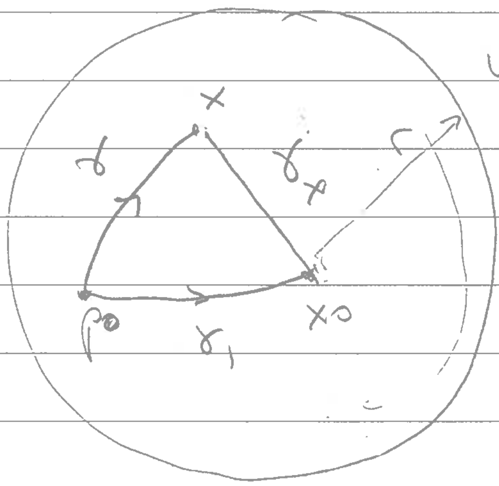
$$f(x) - f(x_0) = \lambda(x_0)(x - x_0) + R(x, x_0)$$

mit $\dfrac{R(x, x_0)}{|x - x_0|} \to 0$.

Sei $x_0 \in \Omega$, sei $\gamma_1 : [-1, 0] \to \Omega$ ein Weg von p_0 nach x_0. Dann gilt

$$\int_{\gamma_1} \lambda = f(x_0)$$

Sei $\gamma_x : [0,1] \to \Omega$
$t \to (1-t)x_0 + tx$



Um $\gamma^x([0,1]) \subset \Omega$ zu garantieren, nehmen wir $r > 0$ so dass $B_r(x_0) \subset \Omega$ und nehmen an, dass $x \in B_r(x_0)$

Dann ist $f(x) = \int_{\gamma_1 + \gamma_x} \lambda = \int_{\gamma_1} \lambda + \int_{\gamma^x} \lambda$

$$= f(x_0) + \int_{\gamma^x} \lambda$$

Nun ist

$$\int_{\gamma^x} \lambda = \int_0^1 \lambda(\gamma_x(t))\, \gamma_x'(t)\, dt$$

$$= \int_0^1 \lambda(\gamma_x(t))\,(x - x_0)\, dt$$

$$= \lambda(x_0)(x - x_0) + \int_0^1 \Big(\lambda(\gamma^x(t)) - \lambda(x_0)\Big)(x - x_0)\, dt$$

Set $\lambda = \sum \lambda^i dx^i$ dann ist obigen Integrand

gleich $\displaystyle \sum \int_0^1 \left[\lambda_i(\gamma^x(t)) - \lambda_i(x_0)\right](x^i - x_0^i)\, dt$

$$\leq \sum \left(\int_0^1 \left[\lambda_i(\gamma^x(t)) - \lambda_i(x_0)\right]^2 \right)^{1/2} |x - x_0|$$

Also $f(x) - f(x_0) = \lambda(x_0)(x - x_0) + R(x, x_0)$

wobei $\displaystyle \frac{|R(x, x_0)|}{|x - x_0|} \leq \left(\sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 \left(\lambda_i(\gamma^x(t)) - \lambda_i(x_0)\right) dt \right)^2 \right)^{1/2}$

Aus Stetigkeit der λ_i's folgt das

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x, x_0)}{|x - x_0|} \to 0. \qquad \blacksquare$$

Bsp. 8.31 (1) Sei $\lambda = 2xy^2 dx + 2x^2y\, dy$

Ansatz: $f(x,y) = \int_{\gamma_{(x,y)}} \lambda$

wobei $\gamma_{(x,y)}(t) = (tx, ty) \quad t \in (0,1)$

Dann ist $\int_\gamma \lambda = \int_0^1 \lambda(tx, ty).(x,y)\, dt$

$$= \int_0^1 \left[2(tx)(ty)^2 . x + 2(tx)^2(ty)\, y\right] dt$$

$$= 4x^2y^2 \int_0^1 t^3\, dt = x^2y^2$$

und $df(x,y) = 2xy^2 dx + 2x^2y\, dy$ ✓

oder: Ansatz: $df = \lambda \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2 \Rightarrow f(x,y) = \int 2xy^2 dx$$

$$= x^2y^2 + c(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y + \frac{d}{dy}c(y) = 2x^2y \Rightarrow \frac{d}{dy}c(y) = 0$$

$$\Rightarrow c(y) = \text{konstant}$$

$$\Rightarrow f(x,y) = x^2y^2 + c.$$

Analog wie für 1-Formen kann man Satz 8.30 für Vektorfelder formulieren:

Defn 8.32 Ein Vektorfeld $V: \Omega \to \mathbb{R}^n$ heisst *konservative* falls $\forall \gamma : [0,1] \to \Omega$ geschlossen $\int_\gamma V\, ds = 0$

Aus Satz 8.30 folgt

Satz 8.33 Für eine stetige Vektorfeld $V: \Omega \to \mathbb{R}^n$ sind folgende Aussagen equivalent

1. V ist konservative
2. Es gibt $f \in C^1(\Omega)$ mit $V = \nabla f$.

In diesem Fall heisst V *Potentialfeld* mit dem Potential f.

In Nächstem Kapitel, mittels höher Partielle Ableitungen, erhalten wir eine einfach zu handhabende notwendige Bedingung für ein konservatives Vektorfeld.

Wir werden sehen dass

$$v = (v^i)_{1 \le i \le n} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \text{ konservative}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial v^i}{\partial x^j} = \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \quad 1 \le i, j \le n.$$