

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Logik und Unterlagen</b>	<b>1</b>
1.1	Prinzip des Indirekten Beweises . . . . .	2
1.2	Zwei Prinzipien . . . . .	3
1.3	Mengeoperationen . . . . .	6
1.4	Abbildungen . . . . .	8
1.5	Dedekind Schubladen Prinzip . . . . .	10
1.6	Die Inverse Abbildung (Umkehrfunktion) . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Reelle Zahlen, Euklidische Räume und Komplexe Zahlen</b>	<b>13</b>
2.1	Elementare Zahlen . . . . .	13
2.2	Die Reellen Zahlen . . . . .	14
2.3	Infimum und Supremum . . . . .	17
2.4	Euklidische Räume . . . . .	22
2.5	Die Komplexen Zahlen . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Folgen und Reihen (Der Limes Begriff)</b>	<b>29</b>
3.1	Folgen, allgemeines . . . . .	29
3.2	Grenzwert oder Limes eine Folge. Ein zentraler Begriff . . . . .	30
3.3	Konvergenzkriterien . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Chapter 4</b>	<b>35</b>
<b>5</b>	<b>Chapter 5</b>	<b>37</b>
<b>6</b>	<b>Integration</b>	<b>39</b>
6.1	Riemann Integral: Definition, elementare Eigenschaften . . . . .	41
6.2	Differentiation und Integration . . . . .	53
6.3	Partielle Integration . . . . .	58
6.4	Methode der Substitution . . . . .	64
6.5	Integration rationaler Funktionen (Partialbruchzerlegung) . . . . .	67
6.6	Das Uneigentliche Integral . . . . .	71
<b>7</b>	<b>Gewöhnliche Differenzialgleichungen</b>	<b>77</b>
7.1	Lineare DGL mit konstante Koeffizienten . . . . .	78
7.2	Inhomogene DGL . . . . .	81
7.3	Lineare DGL erster Ordnung (mit allgemeinen koeffizienten) . . . . .	88
7.4	Separierbare DGL . . . . .	91

## INHALTSVERZEICHNIS

<b>8</b>	<b>Differentialrechnung in <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>93</b>
8.1	Partielle Ableitungen und Differential . . . . .	93
8.2	Differentiationsregeln . . . . .	104

# Kapitel 1

## Logik und Unterlagen

Im Laufendes Semester werden wir viele mathematische Beweise einführen. Heute werden wir uns mit der Mathematische Logik beschäftigen.

In Mathematik stützen wir uns auf gewisse Grundannahmen “Axiome”, die wir als gegeben ansehen. Eine dieser Annahmen ist der

### Satz von ausgeschlossenen Dritten

Eine zulässige mathematische Aussage ist entweder wahr oder falsch, jedoch nie beiden zugleich.

### Beispiel

1.  $5 < 7$  Wahr
2.  $4 < 2$  Falsch

In der Wirklichen Welt ist es anders , z.B. “Mathematik ist schön”, wahr oder falsch?

Mit Aussagen kann man “rechnen”. Wir führen nun ein Paar Notationen der Logik ein:

Seien  $A, B$  Aussagen

- $A$  und  $B$  wird mit  $A \wedge B$  bezeichnet
- $A$  oder  $B$  wird mit  $A \vee B$  bezeichnet

### Folgerung (eine wahre implikation)

- Aus  $A$  folgt  $B$  wird mit  $\Rightarrow$  bezeichnet
- Wenn  $A$ , dann  $B$  wird mit \_\_\_\_\_ bezeichnet
- Die negation der Aussage  $A$  wird mit  $\neg A$  bezeichnet
- $A$  ist equivalent zu  $B$  wird mit  $A \Leftrightarrow B$  bezeichnet
- $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$   $A$  wahr genau dann, wenn  $B$  wahr ist.

??gehäufte?? Page 1

Cannot read, page 2  
middle

### Bemerkung

Die Folgerung ist transitive. Wir wissen  $A \Rightarrow B$  und  $B \Rightarrow C$ , dann wissen wir dass  $A \Rightarrow C$ .

### Prinzip der Mathematischen Beweises

Wir können hier eine Kette von Folgerungen

$$A \Rightarrow B \Rightarrow C \cdots \Rightarrow S$$

einen mathematischen "Satz"  $S$  aus einer Annahme  $A$  herleiten. (Ein Beweis ist eine Folge von Implikationen von Aussagen).

### Kontraposition (Umkehrschluss)

$A \Rightarrow B$  ist gleichbedeutend mit  $\neg B \Rightarrow \neg A$ .

Falls  $A \Rightarrow B$ , so kann  $A$  nicht wahr sein wenn  $B$  falsch ist (weil  $A$  wahr wäre, würde  $B$  auch wahr sein).

## 1.1 Prinzip des Indirekten Beweises

Zum Beweis der Aussage  $A \Rightarrow B$  genügt es die Aussage  $\neg B \Rightarrow \neg A$  zu zeigen, oder: die Annahme  $A \wedge \neg B$  zum Widerspruch zu führen.

### Indirekten Beweis

Man fügt  $\neg B$  als Annahme hinzu und kommt nach einer Kette von erlaubten Schlüssen zu einer falschen Aussage.

Hieraus schliesst man, dass die Zusatzannahme  $\neg B$  nicht wahr ist.

#### Beispiel 1.1

- $A$  = "jede natürliche Zahl  $n$  hat einen Nachfolger  $n + 1$ "
- $B$  = "es gibt keine grösste natürliche Zahl"

Wir beweisen dass aus  $A$  folgt  $B$ . Nehmen wir an, dass  $A$  wahr und  $B$  falsch ist.

$\neg B$  = es gibt eine grösste natürliche Zahl  $N_0$  d.h.  $N_0 > l$  für jedes  $l \in \mathbb{N}$ .

Mittels der Aussage  $A$  wissen wir dass  $N_0$  einen Nachfolger  $N_0 + 1$  hat. Dann  $N_0 + 1 > N_0$ . Das ist aber ein Widerspruch.

#### Definition 1.1

Eine Menge ist eine Zusammenfassung verschiedener Objekte zu einem Ganzen.

Die Objekte werden Elemente der Menge genannt.

## KAPITEL 1. LOGIK UND UNTERLAGEN

Sei  $A$  eine Menge, dann “ $a$  ist element von  $A$ ” wird mit “ $a \in A$ ” bezeichnet. Seien  $A, B$  Mengen, dann “jedes Element von  $A$  ist ein Element von  $B$ ” wird mit “ $A \subset B$  bezeichnet, und man sagt “ $A$  ist in  $B$  enthalten” (oder  $A$  ist teilmenge von  $B$ ).

Falls zugleich  $A \subset B$  und  $B \subset A$  gilt, bezeichnet man  $A$  und  $B$  als gleich und schreibt  $A = B$ .

### Beispiele 1.2

1. Die Menge  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  der Natürlichen zahlen.
2. Die leere Menge mit “ $\emptyset$ ” bezeichnet. Sie ist in jeder Menge enthalten.
3. Die Menge  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  aller ganze Zahlen.
4. Meistens werden Mengen nicht durch die Liste ihre Elemente gegeben, sondern durch bestimmte Eigenschaften ihrer Elemente definiert

$$\mathbb{P} = \{2, 3, 4, 5, 7, 11, 13, \dots\}$$

die Menge aller Primzahlen  $\mathbb{P} : \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ primzahl}\}$

## 1.2 Zwei Prinzipien

Wir werden 2 Methoden des Beweises häufig benutzen.

### 1. Prinzip des Indirekten Beweises

Zum Beweis der Aussage  $A \Rightarrow B$  genügt es die Aussage  $\neg B \Rightarrow \neg A$  zu zeigen, oder, die Annahme  $A \wedge \neg B$  zum Widerspruch zu führen.

### 2. Prinzip der Vollständigen Induktion

Sei für jedes  $n \in \mathbb{N}$  eine Behauptung  $A(n)$  gegeben. Soll die Behauptung für alle natürlichen Zahlen  $n \in \mathbb{N}$  bewiesen werden so genügen dazu zwei Beweisschritte:

- i) Der Beweis von  $A(0)$
- ii) Für jedes  $n \in \mathbb{N}$ , der Beweis von  $A(n+1)$  unter der Voraussetzung, dass  $A(n)$  gilt.

Oft Behauptungen nicht von  $n = 0$  antreten.

Soll die Gültigkeit von  $A(n)$  für alle  $n \geq m$  bewiesen werden so genügen wieder zwei Schritte:

- i) Beweis von  $A(m)$
- ii) Für jedes  $n \geq m$  impliziert  $A(n)$  die Behauptung  $A(n+1)$

Das Prinzip der Vollständige Induktion ist genau wie ein Dominoeffekt.

Sie stellen alle Dominosteinen eine nach der andere. Falls der erste Dominostein fällt ( $A(1)$  wahr) und falls wir die Dominosteinen genug nebeneinander gestellt haben, so dass ein fallender Dominostein den nächsten trifft ( $A(k) \Rightarrow A(k+1)$ ) dann wissen wir, dass alle Dominosteinen fallen.

### Beispiel 1.3 (Induktion)

1. Für alle  $n \geq 1$  gilt:

$$1 + 3 + 5 + \dots (2n - 1) = n^2 A(n)$$

Beweis mittels Vollständige Induktion

- i)  $A(i)$  lautet  $1 = 1^2$  und gilt.
- ii) Sei  $n \geq 1$ . Annahme: so gilt  $A(n)$ . Die Linke Seite der Identität  $A(n+1)$  ist

$$1 + 3 + \dots (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

womit  $A(n + 1)$  bewiesen ist.

2. Als zweite Beispiel für Vollständige Induktion beweisen wir den Fundamental Satz von Euklid:

### Satz 1.4

Jede Natürliche Zahl  $n \geq 2$  ist ein Produkt von Primzahlen, dass bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig ist. Wir werden uns hier nicht mit der Eindeutigkeit befassen.

### Beweis

Sei  $A(n)$  die Aussage: Jede Natürliche Zahl  $m$  mit  $2 \leq m \leq n$  ist ein Produkt von Primzahlen

- i)  $A(2)$  gilt denn 2 ist Primzahl
- ii) Sei  $n \geq 2$ . Wir nehmen an, dass  $A(n)$  gilt. Für  $n + 1$  gibt es zwei Möglichkeiten
  - a)  $n + 1$  ist eine Primzahl und somit gilt  $A(n + 1)$
  - b)  $n + 1$  ist keine Primzahl d.h. es gibt  $2 \leq a \leq n$  die  $n + 1$  teilt. Dann ist  $b := \frac{n+1}{a}$  auch ganz und zudem erfüllt  $2 \leq b \leq n$ . Aus  $A(n)$  folgt dass sowohl  $a$  wie  $b$  ein Produkt von Primzahlen sind somit  $n + 1 = ab$  ein product von Primzahlen ist.

### Satz 1.5

Die Menge  $\mathbb{P}$  der Primzahlen ist unendlich.

## KAPITEL 1. LOGIK UND UNTERLAGEN

### Beweis

Nehmen wir an das Gegenteil "P ist endlich", d.h.  $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$  n aufsteigender Folge; also  $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, \dots$ . Wir betrachten die Zahl  $k = p_1 \dots p_{m+1}$ . Auf Satz 1.4 folgt dass so eine Primzahl  $p_i$  (aus der liste  $p_1 \dots p_m$ ) gilt mit  $p_i$  teilt  $k$ . Da  $p_i$  offensichtlich  $p_1 \dots p_m$  teilt, folgt dass  $p_i$   $k - p_1 \dots p_m = 1$  teilt. Das ist ein Widerspruch.

### Teilbarkeit

#### Formale Definition

Eine Ganze Zahl  $a$  teilt eine ganze Zahl  $b$  genau dann, wenn es eine ganze Zahl  $n$  gibt, für die  $an = b$  ist.

Please fill out the table

Man sagt dann	Man schreibt
$a$ teilt $b$	$a \mid b$
$a$ ist teiler von $b$	
$b$ ist teilbar durch $a$	
$b$ ist Vielfaches durch $a$	

#### Eigenschaften der Teilbarkeit

- Gilt  $a \mid b$  und  $b \mid c$ , so folgt  $a \mid c$
- Für  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  gilt:  $a \mid b \iff ka \mid kc$
- $a \mid b$  und  $c \mid d \Rightarrow ac \mid bd$
- $a \mid b$  und  $a \mid c \Rightarrow a \mid kb + lc$ , für alle  $l, k \in \mathbb{Z}$

1.  $k = (p_1 p_2 \dots p_i \dots p_m) + 1$   
Es gibt eine Primzahl  $p_i$  dass  $k$  teilt.  $p_i \mid k$  mittels Satz 1.4.
2. Sei  $b = p_1 p_2 \dots p_i \dots p_m =$  produkt aller Primzahlen. Sei  $a = p_i$ ,  $n = p_1 p_2 \dots p_{i-1} p_{i+1} \dots p_m$ . Dann  $b = an$ . Dass heisst  $a$  ist Teiler von  $b$ , d.h.  $p_i \mid (p_1 \dots p_m)$
3.  $p_i \mid k$  und  $p_i \mid (p_1 \dots p_m) \Rightarrow p_i \mid k - (p_1 \dots p_m) = 1$ .  
So erhalten wir einen Widerspruch

#### Bemerkung

Letztes mal haben wir gesagt jedes element von  $A$  ist auch Element von  $B$  ( $\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$ ) wird mit  $A \subset B$  ( $A$  ist in  $B$  enthalten,  $A$  ist Teilmenge von  $B$ ) bezeichnet. Falls  $A \subset B$  und eine Element  $b \in B$  gibt mit  $b \notin A$  sagen wir  $A$  ist eine "eigentliche Teilmenge" von  $B$ . Manchmal schreiben wir  $A \subsetneq B$  in diesem Fall.

Es gibt viele Bücher, mit der Folgenden Notation: jedes element von  $A$  ist ein element von  $B$  wird mit  $A \subseteq B$  bezeichnet. Und wenn  $A \subseteq B$  und  $A \neq B$  dann benutzen sie  $A \subset B$  statt  $A \subsetneq B$ .  $A = B$  falls  $x \in A \Leftrightarrow x \in B$ .

**Satz**

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ und } B \subset A$$

**Beweis**

Annahme:  $A = B$ . Falls  $x \in A$ , dann mittels  $A = B$ ,  $x \in B$  gilt, damit gilt  $A \subset B$  und falls  $x \in B$ , dann  $x \in A$  gilt (mittels  $A = B$ ) damit gilt  $B \subset A$ .

Wir haben bewiesen dass  $A = B \Rightarrow A \subset B$  und  $B \subset A$ . Zunächst nehmen wir an dass  $A \subset B$  und  $B \subset A$ . Wir möchten zeigen dass  $A = B$ .

Sei  $x \in A$ , mittels  $A \subset B$ , haben wir  $x \in B$  somit  $x \in A \Rightarrow x \in B$ . (\*)

Sei  $x \in B$ , mittels  $B \subset A$ , haben wir  $x \in A$  somit  $x \in B \Rightarrow x \in A$ . (\*\*)

(\*) und (\*\*)  $\Rightarrow A = B$  per Definition.

### 1.3 Mengeoperationen

Zunächst erinnern wir kurz an die Definitionen der Elementaren Operationen auf Mengen.

Seien  $A$  und  $B$  Mengen. Wir können dann daraus folgende Mengen bilden:

- Die Vereinigung:  $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$
- Der Durchschnitt:  $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$
- Die Differenz:  $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$
- Symmetrische Differenz:  $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Wir haben dann folgende Eigenschaften

**Satz 1.6**

Seien  $A, B, C$  Mengen.

1.  $A \cap B = B \cap A$ ;  $A \cup B = B \cup A$   
 $A \cap \emptyset = \emptyset$ ;  $A \cup \emptyset = A$

**Bemerkung**

- $\cup$  verhältet sich wie  $+$
  - $\cap$  verhältet sich wie Multiplikation
  - $\emptyset$  verhältet sich wie Null element
2.  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$   
 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
  3.  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$



## Beweis

Übung

Ask for correct beweis!!

### Definition 1.7

Das Kartesische Produkt  $A \times B$  der Mengen  $A, B$  ist die Menge der geordneten Paare  $(a, b)$  wobei  $a \in A, b \in B$

### Beispiel

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(a, b) : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$ . Falls  $\mathbb{Z}$  als "eindimensionalen" Gebilde dargestellt wird

•   •   -3   -2   -1   0   1   2   3   •   •

so wird  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  als "zweidimensionalen" Gebilde dargestellt

•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•
(1, 0)	(1, 1)	•	•	•	•	•
(0, 0)	(0, 1)	(0, 2)	•	•	•	•

Um die Operationen auf mehrere Mengen zu Verallgemeinern sind die folgenden Quantoren nützlich (\*)

1.  $\forall$  "Für alle" (Allquantor)
2.  $\exists$  "Es gibt" (Existenzquantor)
3.  $\exists!$  "Es gibt genau ein"

Sei nun  $I$  eine beliebige Menge ( $I$ =Indexmenge) und sei für alle  $i \in I$  eine Menge  $A_i$  gegeben. Dann:

- $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I, x \in A_i\}$ . Vereinigung besteht aus den Elementen  $x$ , für welche eine  $i \in I$  gibt so dass  $x$  zu  $A_i$  gehört.
- $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I, x \in A_i\}$ . Durchschnitt.

Wir noch das Kartesische Produkt endlich vieler Mengen  $A_1 \dots A_n$  definiere

?löhnen? page 15

$$A_1 \times A_n = \prod_{i=1}^n A_i = \{(x_1 \dots x_n) \mid x_i \in A_i\}$$

**Satz 1.8**

Seien  $A_1 \dots A_k \subset x, k \in \mathbb{N}$ . Es gilt

1.

$$\left( \bigcap_{i=1}^k A_i \right)^c = \bigcup_{i=1}^k A_i^c$$

2.

$$\left( \bigcup_{i=1}^k A_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^k A_i^c$$

(\*) Wir haben gesehen dass wir manchmal eine Aussage verneinen müssen. Deshalb müssen wir lernen wie man Aussage mit Quantoren verneinen kann.

$$\neg (\forall n : A(n)) \Leftrightarrow (\exists n : \neg A(n))$$

$$\neg (\exists n : A(n)) \Leftrightarrow (\forall n : \neg A(n))$$

$$\neg (\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} : x^2 < 0$$

## 1.4 Abbildungen

Seien  $X, Y$  Mengen.

**Definition 1.9**

Eine Funktion oder Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  der Menge  $X$  in die Menge  $Y$  ist eine Vorschrift (ein Gesetz) die (das) jedem Element  $x \in A$  genau ein Element  $y = f(x) \in Y$  zuordnet.

Es gibt verschiedene wichtige Objekte die in Zusammenhang mit einem Abbildung auftreten

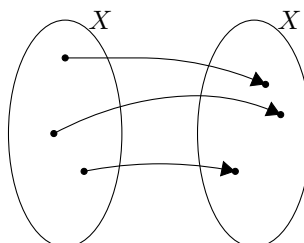
$X =$  Definitionsbereich von  $f$

$Y =$  Die Ziel Menge

$f(x) = \{f(x) \mid x \in X\}$  ist das Bild von  $f$  oder die Bildmenge

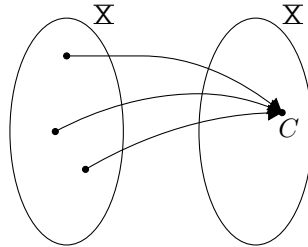
**Beispiel 1.10**

- (Identität) Für jede Menge  $\mathbb{X}$ , ist  $id_X : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$  definiert durch  $id_{\mathbb{X}}(x) = x, \forall x \in X$



## KAPITEL 1. LOGIK UND UNTERLAGEN

2. (Konstante) Sei  $X$  Menge und  $c \in X$ . Die konstante Abbildung mit Wert  $c$  ist  $f(x) = c, \forall x \in X$



3. Seien  $X, Y$  Mengen. Dann sind  
 $pr_x : X \times Y \rightarrow X \quad pr_y : X \times Y \rightarrow Y$   
 $(x, y) \rightarrow x \quad (x, y) \rightarrow y$   
 die Projektionen auf dem ersten respektiv zweiten Faktoren.
4.  $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$   
 $x \rightarrow \sin x$
5.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \rightarrow x^2 + x$

### Definition 1.11

Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung

1.  $f$  heisst injektiv falls auf  $f(x_1) = f(x_2)$  stets  $x_1 = x_2$  folgt, falls jeder  $y \in Y$  höchstens ein Urbild hat.
2.  $f$  heisst surjektiv falls für jedes  $y \in Y$  ein  $x \in X$  gibt mit  $f(x) = y$

$$\forall y \in Y, \exists x \in X : f(x) = y$$

wenn jedes Element  $y \in Y$  mindestens ein Urbild hat.

3.  $f$  heisst bijektiv falls  $f$  injektiv und surjektiv ist, d.h. falls jedes  $y \in Y$  genau ein Urbild hat.

### Beispiel 1.12

#### Definition: Kardinalität

Wir sagen zwei Mengen  $X$  und  $Y$  sind gleichmächtig falls eine bijektive Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  gibt.

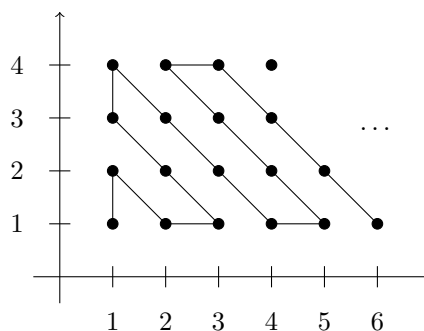
Mit dem ersten Cantorschen Diagonalverfahren kann man die Rationalen zählen abzählen, d.h.  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{N}$  sind gleichmächtig

Pages from 17.1 to 17.4 seem repetition, ask to be sure (document week2)

WRONG POSITION!!

unreadable, page 18

1.  $id_X : X \rightarrow X$  bijektiv.
2. Eine konstante Abbildung  $f : X \rightarrow X, x \rightarrow c$  ist
  - bijektiv  $\Leftrightarrow X = \{c\}$
  - surjektiv  $\Leftrightarrow X = \{c\}$
3. Die Projektionen
  - $pr_x : X \times Y \rightarrow X$
  - $pr_y : X \times Y \rightarrow Y$
 sind stets surjektiv.
4.  $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$   
 $x \rightarrow \sin x$   
 Surjektiv, nicht injektiv
1.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \rightarrow x^2$   
 Nicht surjektiv  
 Nicht injektiv
2.  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$   
 $n \rightarrow 2n$   
 ist Injektiv.  $f(\mathbb{N})$  ist die Menge aller geraden Zahlen
3. Eine Menge  $A$  hat  $n$  Elemente falls es eine bijektive  $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow A$  gibt. Die Zahl  $n$  wird dann die Kardinalität von  $A$  genannt und mit  $\#A$  bezeichnet, gelegentlich auch mit  $|A|$  bezeichnet

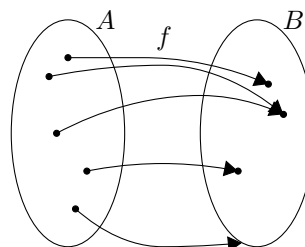


## 1.5 Dedekind Schubladen Prinzip

Is this supposed to be a new chapter?? page 19

Sei  $f : A \rightarrow B$  eine beliebige Abbildung zwischen endliche Mengen. Falls  $|B| < |A|$  dann ist  $f$  nicht injektiv, d.h. es gibt  $b \in B$  und  $a_1, a_2 \in A$  mit

- i)  $a_1 \neq a_2$
- ii)  $f(a_1) = f(a_2) = b$



$$3 = |B| < 5 = |A|$$

Mit Abbildungen kann man "operieren". Die wichtigste Operation ist die Verkettung (oder komposition) zweier Abbildungen.

**Definition**

Abbildungen  $f : X \rightarrow$ ,  $g : Y \rightarrow Z$  kann man miteinander ausführen. Dies ergibt eine neue Abbildung

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

$$F := g \circ f : X \rightarrow Z, x \rightarrow g(f(x))$$

Zwei Funktionen  $f$  und  $g$  können verkettet werden wenn der Wertebereich der ersten Funktion mit dem Definitionsbereich der zweiten Funktion übereinstimmt.

$$\text{Man Sagt } \begin{cases} g \text{ nach } f \text{ oder} \\ g \text{ komponiert mit } f \\ g \circ f \end{cases}$$

Zu Beachten: In dieser Notation steht die zuerst angewandte Abbildung rechts; das heisst bei  $g \circ f$  wird zuerst die Funktion  $f$  angewandt und dann die Funktion  $g$ .

- Die Identische Abbildung verhält sich bei der Komposition , für eine Funk-  
tion

$$f : X \rightarrow Y \text{ gilt also}$$

$$f \circ id_X = f = id_Y \circ Y$$

wobei

$$id_X : X \rightarrow X$$

$$x \rightarrow x$$

$$id_Y : Y \rightarrow Y$$

$$y \rightarrow y$$

- Die Komposition von Funktionen ist assoziativ, d.h. für Funktionen  $f, g, h$  gilt

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

- Aber die Komposition von Funktionen ist im Allgemeinen nicht kommutativ!

$$f \circ g \neq g \circ f$$

Zum Beispiel:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow x^2$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow x + 1$$

$$f \circ g = f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$g \circ f = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1$$

## 1.6 Die Inverse Abbildung (Umkehrfunktion)

Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine bijektiven Funktion.

Die Inverse Funktion  $g : Y \rightarrow X$ , einer bijektiven Funktion  $f : X \rightarrow Y$  ist die Funktion, die jedem Element  $y$  der Zielmenge seien eindeutig bestimmtes Urbildelement zuweist. (bei bijektiven Funktionen hat die Urbildmenge jedes Element  $y$  genau ein Element).

$g(y) := x$ , eindeutig definierte  $x \in \mathbf{X}$ , mit  $f(x) = y$ . Dann ist definitions-gemäss  $(g \circ f)(x) = x$ , d.h.  $g \circ f : id_{\mathbf{X}}$ . Die Eindeutig definierte Abbildung  $g$  wird (auch) mit  $f^{-1}$  bezeichnet und Inverse von  $f$  genannt.

Für  $f \circ f^{-1} : \text{Sei } y \in Y \text{ und sei } x \text{ mit } f(x) = y$ . Dann ist  $(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$

$$f \circ f^{-1} = id_Y$$

### Beispiel

1.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow 2x + 3$$

bijektive

Umkehrfunktion ist gegeben durch

$$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \frac{x-3}{2}$$

2. Sei  $\mathbb{R}^+ = [0, \infty]$  die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen und

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

mit

$$x \rightarrow x^2$$

Dann ist  $f$  bijektive und die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

ist gegeben durch

$$x \rightarrow \sqrt{x}$$

Verallgemeinerungen Falls  $f : X \rightarrow Y$  injektive ist, kann man die Umkehrabbildung

$$f^{-1} : f(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{X}$$

definieren. Das heisst, die Funktion  $f^{-1}$  erfüllt: wenn  $f(x) = y$ , dann  $f^{-1}(y) = x$

Vorsicht:  $f^{-1} \circ f = id_{\mathbf{X}}$  aber  $f \circ f^{-1} = id_{f(\mathbf{X})}$  und  $f \circ f^{-1} = id_Y$  genau dann wenn  $f(X) = Y$ , d.h.  $f$  bijektive ist.

## Kapitel 2

# Reelle Zahlen, Euklidische Räume und Komplexe Zahlen

### 2.1 Elementare Zahlen

Naturzahl	$\mathbb{N}$	=	$\{0, 1, 2, \dots\}$	addieren und multiplizieren
	$\cap$			
LOOK TODO	$\mathbb{Z}$	=	$\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$	subtrahieren
	$\cap$			
Rationalzahlen	$\mathbb{Q}$	=	$\left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$	dividieren

Viele Gleichungen haben keine Lösung in  $\mathbb{Q}$ .

Before set Z, can't read,  
page 22

#### Satz 2.1

Sei  $p \in \mathbb{N}$  eine Primzahl. Dann hat  $x^2 = p$  keine Lösung in  $\mathbb{Q}$

#### Beweis

Zur Erinnerung: zwei natürliche Zahlen  $a$  und  $b$  sind teilerfremd (oder relativ prim) wenn es keine natürliche Zahl außer der Eins gibt, die beiden Zahlen teilt.

$$((a, b) = 1) \rightarrow \text{größte Gemeinsame Teiler}$$

#### Indirekter Beweis

Wir nehmen an: es gibt  $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$  mit  $x^2 = p$ , wobei  $a, b$  teilerfremd und  $\geq 1$  sind. Dann gilt

$$a^2 = pb^2$$

woraus folgt, dass  $p$   $a$  teilt also ist  $a = pk$ ,  $k \in \mathbb{N}$  und somit

$$a^2 = p^2 k^2 = pb^2 \Rightarrow pk^2 = b^2$$

woraus folgt, dass  $p$   $b$  teilt.

## 2.2 Die Reellen Zahlen

Wir werden jetzt das System von Axiomen beschreiben das die Menge der Reellen Zahlen "eindeutig" charakterisiert.

Die Menge  $\mathbb{R}$  der Reellen Zahlen ist mit zwei Verknüpfungen "+" (Addition) und "·" (Multiplikation) versehen sowie mit einer Ordnungsrelation  $\leq$ . Die axiome werden wie folgt gruppiert:

1.  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  **ist ein Körper**

Es gibt 2 Operationen (Zweistellige Verknüpfungen)

- $+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(a, b) \rightarrow a + b$
- $\times: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(a, b) \rightarrow a \cdot b$

und 2 ausgezeichnete Element 0 und 1 in  $\mathbb{R}$  die folgenden Eigenschaften haben:

Kommutivität	A1)	$x + y = y + x$
Assoziativität	A2)	$(x + y) + z = x + (y + z)$
Neutrales Element	A3)	$x + 0 = x = 0 + x$
Inverse Element	A4)	$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \text{ mit } x + y = 0 = y + x$
Kommutivität	M1)	$x \cdot y = y \cdot x$
Assoziativität	M2)	$(xy)z = x(yz)$
Neutrales Element	M3)	$x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$
Inverse Element	M4)	$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0 \exists y \in \mathbb{R} \text{ mit } xy = 1 = yx$

und Die Multiplikation ist verträglich mit der Addition im Sinne des Distributivitäts-Gesetz (D)

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x(y + z) = xy + xz$$

- $(\mathbb{R}, +)$  mit A1→A4 ist eine Abelsche Gruppe bezüglich der Addition
- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  mit A1→A4, M1→M4 und D ist ein Zahlkörper.

### Bemerkung 2.2

Eine Menge  $G$  versetzen mit Verknüpfung  $+$  und Neutrales Element  $0$  die den obigen Eigenschaften A2→A4 genügen heisst Gruppe.

Eine Menge  $K$  versetzen mit Verknüpfung  $+, \cdot$  und Elementen  $0 \neq 1$  die den obigen Eigenschaften A1→A4, M1→M4, D genügen heisst Körper.



KAPITEL 2. REELE ZAHLEN, EUKLIDISCHE RÄUME UND  
KOMPLEXE ZAHLEN

**Folgerung 2.3**

Seien  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

- |  |   |
|--|---|
| i) $a + b = a + c \Rightarrow b = c$ und $0$ ist eindeutig, d.h. Falls $z \in \mathbb{R}$ der Eigenschaften $a + z = a \ \forall a \in \mathbb{R}$ genügt, so folgt $z = 0$            | A |
| ii) $\forall a, b \in \mathbb{R}, \exists!$ (eindeutig bestimmtes) $x \in \mathbb{R} : a + x = b$ . Wir schreiben $x = b - a$ und $0 - a = -a$ ist das additive Inverse zu $a$         |   |
| iii) $b - a = b + (-a)$  |   |
| iv) $-(-a) = a$  |   |
| v) Falls $ab = ac$ und $a \neq 0 \Rightarrow b = c$ und $1$ ist eindeutig, d.h. falls $x \in \mathbb{R}$ der Eigenschaften $ax = a \ \forall a \in \mathbb{R}$ genügt so folgt $x = 1$ | M |
| vi) $\forall a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, \exists! x \in \mathbb{R} : ax = b$ . Wir schreiben $x = \frac{b}{a}$ und $\frac{1}{a} = a^{-1}$ ist das Multiplikativ Inverse zu $a$ .    |   |
| vii) Falls $a \neq 0 \Rightarrow (a^{-1})^{-1} = a$  |   |
| viii) $\forall a \in \mathbb{R}, a \cdot 0 = 0$  |   |
| ix) Falls $ab = 0$ dann folgt $a = 0$ oder $b = 0$   |   |

**Beweis 2.3**

- (a) Sei  $a + b = a + c$   
 $A4 \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R} : a + y = 0$   
 $a + b = a + c \Rightarrow y + (a + b) = y + (a + c)$   
 $\stackrel{A2}{\Rightarrow} (y + a) + b = (y + a) + c$   
 $\Rightarrow 0 + b = 0 + c \stackrel{A3}{\Rightarrow} b = c$   
 Nehmen wir an, dass es  $0' \in \mathbb{R}$  gibt so dass  $x + 0' = x, \forall x \in \mathbb{R}$ , d.h. es gibt eine zweite neutrale Element für  $+$ .

Dann  $0 + 0' = 0$  aber auch  $A3 \Rightarrow 0 + 0 = 0 \Rightarrow 0 + 0' = 0 + 0 \Rightarrow 0 = 0'$

- (b) Seien  $a, b \in \mathbb{R}$ , und sei  $y \in \mathbb{R}$  mit  $a + y = 0$ . Definieren wir  $x := y + b \Rightarrow a + x = a + (y + b) = (a + y) + b = 0 + b = b$   
 $\Rightarrow \exists$  mindestens eine Lösung der Gleichung  $a + x = b$ . Von i) folgt dass  $x$  eindeutig bestimmt ist  $a + x = b = a + x' \Rightarrow x = x'$
- (c) Seien  $x = b - a, y = b + (-a)$ . Wir Wollen beweisen dass  $x = y$ .

Aus i) wissen wir dass  $b - a$  eine Lösung von  $a + x = b$

$$y + a = (b + (-a)) + a = b + ((-a) + a) = b + 0 = 0$$

$\Rightarrow y$  ist auch eine Lösung.

Weil die Lösung von  $a + x = b$  ist eindeutig bestimmt, ist  $y = x$

- (d)

ASK FOR BEWEISE;  
PAGE 27 TOP

?multipl? page 27  
middle to top

(e)

(f)

(g)

(h)  $\forall a \in \mathbb{R}, a \cdot 0 = 0$   
 $a \cdot 0 = a(0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0 \Rightarrow a \cdot 0 = 0$

(i)  $ab = 0 \Rightarrow a = 0$  oder  $b = 0$

Wir nehmen an:  $a \neq 0$  mit Inversen  $a^{-1}$ , ( $a^{-1}$  existiert mittels M4).

So folgt  $b = 1 \cdot b = (a^{-1} \cdot a) b = a^{-1}(a \cdot b) = a^{-1} \cdot 0 = 0$

## 2. Ordnungsaxiome $\leq$

Auf  $\mathbb{R}$  gibt es eine Relation,  $\leq$ , genannten Ordnung, die folgenden Eigenschaften genügt

(a) Reflexivität:  $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x$

(b) Transitivität:  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$

(c) Identivität:  $\forall x, y \in \mathbb{R}, (x \leq y) \text{ und } (y \leq x) \Rightarrow x = y$

(d) Die Ordnung ist total:  $\forall x, y \in \mathbb{R}$  gilt entweder  $x \leq y$  oder  $y \leq x$

Die Ordnung ist konsistent mit  $+$ , und  $\cdot$

(a)  $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$

(b)  $x, y \geq 0 \Rightarrow xy \geq 0$

Mit  $\leq$  hat man auch  $\geq, <, >$ . Wir verzichten auf eine Auflistung aller Folgerungen und beschränken uns auf einige wichtige Folgerungen.

## Folgerungen 2.4

i)  $x \leq 0$  und  $y \leq 0 \Rightarrow xy \geq 0$

ii)  $x \leq 0$  und  $y \geq 0 \Rightarrow xy \leq 0$

iii)  $x \leq y$  und  $z \geq 0 \Rightarrow xz \leq yz$

iv)  $1 > 0$

v)  $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0$

vi)  $0 < 1 < 2 < 3 < \dots$

vii)  $\forall x > 0 : x^{-1} > 0$

{Annahme:  $x^{-1} \leq 0$ . Nach Multiplikation mit  $x > 0$  folgt (mittels ii)  
 $1 = x^{-1} \cdot x \leq 0 \cdot x = 0$ }

## Bemerkung 2.5

What? page 28 bottom

$\leq$  auf  $\mathbb{R}$  genügt den obigen Eigenschaften. Die entscheidende weitere Eigenschaft von  $\mathbb{R}$  ist das.

## 3. Ordnungsvollständigkeit

Check for layout issues  
with title

Vollständigkeitsaxiom:

Seien  $A, B \subset \mathbb{R}$  nicht leere Teilmenge von  $\mathbb{R}$ , so dass  $a \leq b$  für alle  $a \in A, b \in B$ . Dann gibt es  $c \in \mathbb{R}$  mit  $a \leq c \leq b \quad \forall a \in A, b \in B$

## KAPITEL 2. REELE ZAHLEN, EUKLIDISCHE RÄUME UND KOMPLEXE ZAHLEN

### Bemerkung 2.6

erfüllt diese Eigenschaft nicht!

What? page 29 bottom

Seien

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0, x^2 \leq 2\}$$

$$B = \{y \in \mathbb{Q} \mid y \geq 0, y^2 \geq 2\}$$

Dann gilt  $a \leq b \forall a \in A, b \in B$ . Aber ein  $c \in \mathbb{Q}$ , mit  $a \leq c \leq b$  würde dann  $c^2 = 2$  erfüllen! In Satz 2.1 haben wir gesehen dass  $x^2 = 2$  keine Lösung in  $\mathbb{Q}$  hat.

Wir definieren jetzt für  $x, y \in \mathbb{R}$

$$\max\{x, y\} = \begin{cases} x & \text{falls } y \leq x \\ y & \text{falls } x \leq y \end{cases}$$

Insbesondere ist der Absolutbetrag einer Zahl  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|x|$

$$|x| := \max\{x, -x\}$$

Für diesen gilt folgender wichtiger Satz

### Satz 2.7

- i)  $|x + y| \leq |x| + |y|$  (Dreiecks Ungleichung)
- ii)  $|xy| = |x| |y|$

### Beweis 2.7

- i)  $x \leq |x|, -x \leq |x|$   
 $y \leq |y|, -y \leq |y|$   
und  $x + y \leq |x| + |y|, -(x + y) \leq |x| + |y|$   
woraus  $|x + y| \leq |x| + |y|$  folgt

- ii) ASK FOR BEWEIS

ASK FOR BEWEIS

### Satz (Young)

Für alle  $a, b \in \mathbb{R}$ .  $\delta > 0$  gilt  $2|ab| \leq \delta a^2 + \frac{b^2}{\delta}$

## 2.3 Infimum und Supremum

In Zusammenhang mit der Ordnung führen wir einige wichtige Definitionen ein:

### Definition 2.8

Sei  $X \subset \mathbb{R}$  eine Teilmenge

- a)  $X$  ist nach oben beschränkt falls es  $c \in \mathbb{R}$  gibt  $x \leq c, \forall x \in X$ . Jeder derartige  $c$  heisst eine Obere Schranke für  $X$ .
- b)  $X$  ist nach unten beschränkt, falls es  $c \in \mathbb{R}$  gibt, mit  $x \geq c, \forall x \in X$ . Jeder derartige  $c$  heisst untere Schranke für  $X$ .
- c)  $X$  ist beschränkt falls es nach oben und unten beschränkt ist.
- d) Ein element  $a \in X$  ist ein maximales Element (oder Maximum) von  $X$  falls  $x \leq a, \forall x \in X$ . Falls ein Maximum (resp. minimum) existiert, wird es mit  $\max X$  ( $\min X$ ) bezeichnet. Falls  $X$  keine obere schranke hat, ist  $X$  nach oben unbeschränkt (analog für obere sch.).

### Beispiel 2.9

WHAT? Page 32 top

1.  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$  ist nach oben unbeschränkt.  $A$  ist nach unten beschränkt. Jedes  $\leq 0$  ist eine untere Schranke.
2.  $B = [0, 1]$  ist nach oben und nach unten beschränkt.
  - 0 ist ein minimum von  $B$
  - 1 ist ein maximum von  $B$
3.  $C = [0, 1)$  ist nach oben und nach unten beschränkt,  $0 = \min(A)$ .  $C$  hat kein Maximum.

Folgender Satz ist von Zentraler Bedeutung und eine Folgerung der Ordnungsvollständigkeitaxiom.

### Satz 2.10

- i) Jede nicht leere nach oben beschränkte Teilmenge  $A \subset \mathbb{R}$  besitzt eine kleinste obere Schranke  $c$ . Die Kleinste obere schranke  $c$  ist eindeutig bestimmt und heisst Supremum von  $A$ , mit  $\sup A$  bezeichnet.
- ii) Jede nicht leere nach unten beschränkt Teilmenge  $A \subset \mathbb{R}$  besitzt eine grösste untere Schranke  $d$  und heisst Infimum von  $A$ , mit  $\inf A$  bezeichnet.

### Beweis

- i) Sei  $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$  nach oben beschränkt. Sei  $B := \{b \in \mathbb{R} \mid b \text{ ist obere Schranke für } A\}$ . Dann  $B \neq \emptyset$  und  $a \leq b, \forall a \in A, b \in B$

Mit Ordnungsvollständigkeit Axiom folgt die Existenz eine Zahl  $c \in \mathbb{R}$  mit  $a \leq c \leq b \forall a \in A, b \in B$ .

Es ist klar dass  $c$  ist eine obere Schranke für  $A$ . Also  $c \in B$ . Da  $c \leq b \forall b \in B$ , ist  $c$  die kleinste obere Schranke für  $A$ . Hierdurch  $c$  ist eindeutig bestimmt.

## KAPITEL 2. REELE ZAHLEN, EUKLIDISCHE RÄUME UND KOMPLEXE ZAHLEN

(Seien  $c$  und  $c'$  zwei Supremum von  $A$ ,  $c$  ist die kleinste obere Schranke und  $c'$  ist eine obere Schranke  $\Rightarrow c \leq c'$ . Das gleiche Argument mit  $c, c'$  ausgetauscht liefert  $c' \leq c$ )

- ii) Sei  $A$  nach unten beschränkte, nicht leere Menge. Sei  $-A := \{-x \mid x \in A\}$  die Menge der additiven Inversen von  $A$ . Dann  $-A \neq \emptyset$  und nach oben beschränkt. i)  $\Rightarrow \exists s = \sup(-A) \Rightarrow -s$  ist das Infimum von  $A$

### Korollar 2.11

1. Falls  $E \subset F$  und  $F$  nach oben beschränkt ist, gilt  $\sup E \leq \sup F$
2. Falls  $E \subset F$  und  $F$  nach unten beschränkt ist, gilt  $\inf F \leq \inf E$
3. Falls  $\forall x \in E, \forall y \in F$  gilt  $x \leq y$  dann folgt  $\sup E \leq \inf F$
4. Seien  $E, F \neq \emptyset, E, F \subset \mathbb{R}, h \in \mathbb{R}, h > 0$

(i) Falls  $E$  ein sup. besitzt  $\Rightarrow \exists x \in E$  mit  $x > \sup E$

(ii) Falls  $E$  ein Inf besitzt  $\Rightarrow \exists y \in E: y < \inf E + h$ . Das Supremum,  $\sup X = \sigma$  der Menge  $X$  ist folgendermassen charakterisiert: Es gibt in  $X$  keine Zahlen  $> \sigma$ ; aber für jede Toleranz  $h > 0$  gibt es in  $X$  Zahlen  $> \sigma - h$



Es gibt in  $X$  keine Zahlen  $< \inf X$  = aber für jede Toleranz  $h > 0$  gibt es in  $X$  Zahlen  $< \inf X + h$

- (iii) Sei  $E + F = \{e + f : e \in E, f \in F\}$ . Falls  $E$  und  $F$  ein Sup. besitzen  $\Rightarrow E + F$  besitzt ein Sup und  $\sup(E + F) = \sup(E) + \sup(F)$ . (Analog mit Inf.)

### Beweis

### Beispiel

1.  $E = (+\infty, 2) \subset F(-\infty, 4]$   
 $\sup E = 2, \sup F = 4 = \max F$   
 $E$  hat kein Max:  $\sup E \leq \sup F$
2.  $G : [4, 5) \subset H = (3, 6)$   
 $\min E = \inf G = 4 \geq \inf H = 3$

## KAPITEL 2. REELE ZAHLEN, EUKLIDISCHE RÄUME UND KOMPLEXE ZAHLEN

3.  $K = (3, \infty)$ ,  $E = (-\infty, 2)$   
 $\forall x \in E, y \in K$  gilt  $x \leq y$   
 $2 = \sup E \leq 3 = \inf K$
4.  $A = \{\sin x \mid x \in \mathbb{R}\}$   
 $\inf A = -1 = \min A$   
 $\sup A = 1 = \max A$
5.  $A = \{(1 + \frac{1}{n})^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Wir werden sehen dass  $A$  ist nach unten und nach unten beschränkt.  
 $\inf A = \min A = 2$ ,  $\sup A = e = 2.718 \dots$  Vereinbarung  
Für nach oben unbeschränkte Mengen  $A \neq \emptyset$  setzen wir  $\sup A = \infty$  unendlich. Analog für nach unten unbeschränkte Menge  $\emptyset \neq A$  setzen wir  $\inf A = -\infty$

Check for better layout

Die folgende Satz zeigt wie die Ordnungsvollständigkeit von  $\mathbb{R}$  die Lösbarkeit gewisser Gleichungen in  $\mathbb{R}$  garantiert.

### Satz 2.12

Für jedes  $x > 0$  gibt es genau ein  $y > 0$  mit  $y^2 = x$ . Diese Lösung wird mit  $\sqrt{x}$  bezeichnet.

(Im Allgemeinen: Für jedes  $x > 0$  und  $n \geq 1$ ,  $n \in \mathbb{R}$  gibt es genau ein  $y > 0$  mit  $y^n = x$ . Diese Lösung wird mit  $\sqrt[n]{x}$  bezeichnet)

### Beweis

Sei  $x > 1$ , und  $A := \{z \in \mathbb{R} \mid z > 0 \text{ mit } z^2 \leq x\}$ . Dann ist  $A$  nach oben beschränkt und  $A \neq \emptyset (1 \in A)$ .  $\Rightarrow A$  besitzt ein Supremum.

Sei  $y := \sup A$ . Wir zeigen dass  $y^2 = x$

- Schnitt 1: Annahme  $y^2 < x$ .  
Sei  $0 \leq h \leq 1$ . Wir nehmen

$$\begin{aligned} (y+h)^2 &= y^2 + 2hy + h^2 \\ &= y^2 + h(2y+h) \\ &\leq y^2 + h(2y+1) \\ &= y^2 + h((y+1)^2 - y^2) \end{aligned}$$

Weil  $y^2 < x$  ist,  $\frac{x-y^2}{(y+1)^2-y^2} > 0$  und daher gibt es  $h \in \mathbb{R}$ ,  $h > 0$ ,  
 $h \leq \frac{x-y^2}{(y+1)^2-y^2}$  (sei  $h = \min\{1, \frac{x-y^2}{(y+1)^2-y^2}\}$ )

Für solche  $h$  gilt

$$(y+h)^2 \leq y^2 + \left( \frac{x-y^2}{(y+1)^2-y^2} \right) ((y+1)^2 - y^2) =$$

chopped result, page 35.1

Also  $y+h \in A$  und  $y+h > y$ . Ein Widerspruch:  $y$  ist eine obere Schranke für  $A$ , d.h.,  $z < y$   
 $\Rightarrow y^2 \geq x$  Analog beweist man  $y^2 \leq x$

## KAPITEL 2. REELE ZAHLEN, EUKLIDISCHE RÄUME UND KOMPLEXE ZAHLEN

- Schnitt 2: Annahme  $y^2 > x$

Sei  $h = \frac{y^2 - x}{2y} \neq 0$

$$(y - h)^2 = y^2 - 2hy + h^2 > y^2 - 2hy = y^2 - (y^2 - x) = x$$

$\Rightarrow y - h$  ist eine Obere Schranke für  $A$

Chopped, page 35.2 top

( $\forall z \in A, z^2 \leq x$ . Da  $(y - h)^2 > x$  ist,  $(y - h)^2 > x \geq z^2$ . Damit  $y - h > z, \forall z \in A$ )

Aber  $y - h < y$ , widerspruch zur Minimalität von  $y$ .

Falls  $0 < x < 1$ , dann  $\frac{1}{x} > 1$

$\Rightarrow \exists u \in \mathbb{R}$ , mit  $u^2 = \frac{1}{x}$

Somit  $(\frac{1}{u})^2 = x$  und  $y = \frac{1}{u}$  ist eine Lösung von  $y^2 = x$ .

Zum Abschluss dieses Themas erwähnen wir noch eine Wichtige Eigenschaft der Reellen Zahlen

### Satz 2.13 (Archimedische Eigenschaft)

Zu jeder Zahl  $0 < b \in \mathbb{R}$  gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $b < n$ .

### Beweis (Indirekt)

Andernfalls gibt es  $b \in \mathbb{R}$  mit  $n \leq b, \forall n \in \mathbb{N}$

$$(\neg(\exists n \in \mathbb{N} : b < n)) = (\forall n \in \mathbb{N} : b \geq n)$$

Dann ist  $b$  eine obere Schranke für  $\mathbb{N}$  und es existiert  $c = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$ . Mit  $n \in \mathbb{R}$  ist jedoch auch  $n + 1 \in \mathbb{N}$ .

Also:  $n + 1 \leq c, \forall n \in \mathbb{N}$ . Somit folgt  $n \leq c - 1, \forall n \in \mathbb{N}$  ein widerspruch zur minimalität von  $c$ .

Chopped content, page 36 bottom

### Korollar 2.14

1. Seien  $x > 0$  und  $y \in \mathbb{R}$  gegeben. Dann gibt es  $n \in \mathbb{Z}$  mit  $y < nx$
2. Falls  $x, y, a \in \mathbb{R}$  die ungleichkeiten  $a \leq x \leq a + \frac{y}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$  erfüllen, ist  $x = a$ .

### Beweis

1. ASK FOR BEWEIS

Ask for beweis

2.  $a < x \Rightarrow x - a > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$   
 $\Rightarrow x > a + \frac{y}{n}$  Widerspruch

Wir wissen dass gewisse Gleichungen in  $\mathbb{R}$  lösbar ist: z.B.  $y^2 = a, \forall a > 0$ . Aber man kann nicht alle Gleichungen in  $\mathbb{R}$  lösen, z.B.  $x^2 + 1 = 0$ . Da für alle  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x^2 > 0$ , ist  $x^2 = -1$  nicht lösbar. Um eine Lösung für diese Gleichung zu finden, müssen wir die komplexen Zahlen betrachten.

Zuerst, werden wir die Euklidischen Räume  $\mathbb{R}^n$  einführen

## 2.4 Euklidische Räume

Von der Mengentheorie können wir die Kartesische Produkt zweier Mengen; es lässt sich ohne Schwierigkeiten zu endlichen Familien  $A_1, \dots, A_n$  verallgemeinern; nämlich

$$A_1 \times \dots \times A_n := \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in A_i\}$$

ist die Menge der geordneten  $n$ -Tupel von Elementen aus  $A_1, \dots, A_n$ .

Für beliebige  $n \geq 1$  betrachten wir  $\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n\text{-mal}}$  und untersuchen seine Struktur. Auf  $\mathbb{R}^n$  haben wir zwei Verknüpfungen

1.  $+: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  Addition.

$$\left( \underbrace{(x_1, \dots, x_n)}_x, \underbrace{(y_1, \dots, y_n)}_y \right) \rightarrow \underbrace{(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)}_{\text{Komponentenweise Addition}}. \text{ Dann ist } (\mathbb{R}^n, +)$$

eine Abelsche Gruppe, mit  $0 := (0, \dots, 0)$  als neutrales Element

2.  $\cdot: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  Skalarmultiplikation.

$$(\lambda, x) \rightarrow \lambda \cdot x := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n). \text{ Dann gelten die folgenden Eigenschaften:}$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

- (a) Distributivität:  $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
- (b) Distributivität:  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
- (c) Assoziativität:  $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$
- (d) Einzelelement:  $1 \cdot x = x$

### Definition 2.15

Eine Menge  $\mathbb{V}$ , mit  $+$ ,  $\cdot$  und  $0 \in \mathbb{V}$  so dass  $(\mathbb{V}, +)$  eine Abelsche Gruppe mit neutralem Element  $0$  ist und zudem (a)-(d) gelten nennt sich ein Vektorraum über den Körper  $\mathbb{R}$  und seine Elemente heißen Vektoren

Also ist  $\mathbb{R}^n$  ein Vektorraum. In der Linearen Algebra führt man dann Begriffe wie Basis usw. ein. Die Standardbasis von  $\mathbb{R}^n$  ist die Menge  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  wobei  $e_i := \{0, \dots, 0, 1, \dots, 0\}$

Jeder Vektor  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  besitzt eine eindeutige Darstellung  $x = \sum x_i e_i$  bezüglich der Standardbasis.

### Definition 2.16

1. Das Skalarprodukt zweier Vektoren  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$  ist die durch

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

definierte reelle Zahl

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ (orthogonal)}$$



## KAPITEL 2. REELE ZAHLEN, EUKLIDISCHE RÄUME UND KOMPLEXE ZAHLEN

2. Falls  $\langle x, y \rangle = 0$  heissen  $x$  und  $y$  senkrecht aufeinander.  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  besitzt folgende Eigenschaften

- (a) Symmetrie:  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- (b) Linearität:  $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle$
- (c) Positivität:  $\langle x, x \rangle \geq 0$  mit Gleichheit genau dann wenn  $x = 0$

### Definition 2.17

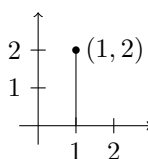
Die Norm  $\|x\|$  eines Vektors ist:

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

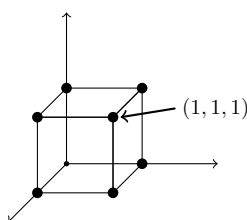
wird oft als Länge interpretiert.

### Beispiel 2.18

- $\|(1, 2)\| = \sqrt{1 + 4}$



- $\|(1, 1, 1)\| = \sqrt{3}$



- $\|e_i\| = 1, \langle e_i, e_j \rangle = 0. e_i \perp e_j$   
 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  ist eine orthonormale Basis. Sie sind orthogonal und auf Länge 1 normiert.

Die erste wichtige Eigenschaft eines Skalarprodukts ist

**Satz 2.19 (Cauchy-Schwarz)**

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$  gilt  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$  und

$$|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\| \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : x = \lambda y$$

Die Euklidische Norm hat die Eigenschaften

**Satz 2.20**

- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$  (Homogenität)
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (Dreiecks Ungleichung)

**Beweis**

ASK FOR BEWEIS

- ASK FOR BEWEIS

•

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \langle x, x + y \rangle + \langle y, x + y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + 2 \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &\leq \|x\|^2 + 2 \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2 \|y\| \|x\| + \|x\|^2 \end{aligned}$$

## 2.5 Die Komplexen Zahlen

Da für alle  $x \in \mathbb{R}$   $x^2 \geq 0$ , gibt es  $\sqrt{-1}$  nicht als reelle Zahl. Seit 18 Jahrhundert haben Mathematiker mit Ausdrücke  $a + b\sqrt{-1}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  gerechnet und auf sie die in  $\mathbb{R}$  geltenden Rechenregel angewandt, z.B.

$$(1 + 2\sqrt{-1})(1 - 2\sqrt{-1}) = 1^2 + 2^2 (\sqrt{-1})^2$$

Allgemein:

$$\begin{aligned} (a + b\sqrt{-1})(c + d\sqrt{-1}) &= ac + ad\sqrt{-1} + bc\sqrt{-1} + bd\sqrt{-1} \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)\sqrt{-1} \end{aligned}$$

Das Problem ist hier, dass  $\sqrt{-1}$  keinen präzisen Mathematisches Sinn hat und dass deshalb auch nicht klar ist, was “+” in “ $a + b\sqrt{-1}$ ” heissen soll.

Das Problem is wie folgt gelöst:

Chopped content, page  
42 middle

Als model von “ $a + b\sqrt{-1}$ ”,  $\mathbb{C}$ , nehmen wir  $\mathbb{R}^2$ . Wir haben schon eine Addition von vektoren und das neutral Element . Wir definieren dann die Multiplikation

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \rightarrow x \cdot y$$

wobei  $x \cdot y = (ac - bd, ad + bc)$ ,  $x = (a, b)$ ,  $y = (c, d)$ . Dann erfüllen “+” und “.” folgende Eigenschaften:

## KAPITEL 2. REELE ZAHLEN, EUKLIDISCHE RÄUME UND KOMPLEXE ZAHLEN

- Assos:  $((a, b)(c, d))(e, f) = (a, b)((c, d)(e, f))$
- Neutrales Element:  $(1, 0)(a, b) = (a, b)$
- Kommutativ:  $(a, b)(c, d) = (c, d)(a, b)$
- Inverses Element  $\forall (a, b) \neq (0, 0)$  in  $\mathbb{R}^2 \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2$  mit  $(a, b)(x, y) = (1, 0)$
- Distributivität:  $((a, b) + (c, d)) \cdot (e, f) = (a, b)(e, f) + (c, d)(e, f)$

### Definition 2.21

Der Körper der komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  ist  $\mathbb{R}^2$  versehen mit “+”, “·”,  $0 = (0, 0)$  und  $1 = (1, 0)$

### Bemerkung 2.22

$z^2 + 1 = 0$  hat in  $\mathbb{C}$  eine Lösung. Nämlich ist  $(0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -(1, 0) = 1$ . Wir führen für  $(0, 1)$  die Bezeichnung “ $i$ ” ein, das heisst Imaginäre Einheit.

Also ist  $i^2 = -1$ . Jede komplexe Zahl  $z = (x, y)$  lässt sich dann wie folgt darstellen:

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x \cdot 1 + y \cdot i$$

In der Rechnungen lässt man oft das 1 in  $x \cdot 1$  fallen und schreibt  $z = x + yi$

### Definition 2.22

1. Sei  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ 
  - $\operatorname{Re} z := x$  heisst der Realteil
  - $\operatorname{Im} z := y$  heisst der Imaginärteil
2. Die zu:  $z = x + iy$  konjugierte Zahl ist  $\bar{z} = x - iy$
3. Wir definieren die Norm von  $z$  als  $\|z\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

### Satz 2.23

- (i)  $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- (ii)  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
- (iii)  $z \cdot \bar{z} = \|z\|^2 \cdot 1$
- (iv)  $\|z_1 \cdot z_2\| = \|z_1\| \cdot \|z_2\|$

### Beweis

ASK FOR BEWEIS

ASK FOR BEWEIS

### Abkürzung

$$|z| := ||z||$$

### Bemerkung 2.24

Wir können  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{C}$  “einbetten” mittels  $\mathbb{R} \ni x \rightarrow (x, 0) \in \mathbb{C}$ . Sei  $\mathbb{C}_0 = \{(x, y) \in \mathbb{C} \mid y = 0\} = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ . Der Abbildung  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}_0, x \rightarrow (x, 0)$  ist eine Bijektion.

Diese Identifikation (von  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}_0$  ist verträglich mit den operationen in  $\mathbb{R}$  und in  $\mathbb{C}$ , d.h.

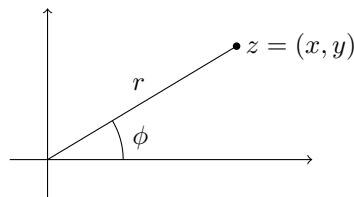
$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

### Polarform

Not sure if this should be a title

Als Polarkoordinaten in die Ebene führen wir  $(r, \phi)$  ein



$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi & y &= r \sin \phi \\ z &= r (\cos \phi + i \sin \phi) \\ r &= |z| \end{aligned}$$

### Definition

Wir definieren (nach Euler)

$$e^{i\phi} := \cos \phi + i \sin \phi$$

$$z = re^{i\phi} = |z| e^{i\phi}$$

Where does the definition end??

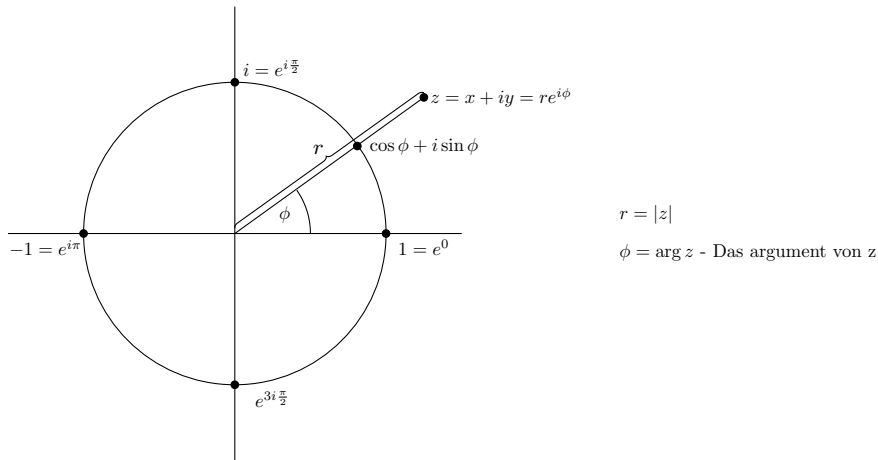
Aus die

??Additions?? page 45 bottom

- $\cos(\phi + \psi) = \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \sin \psi$
- $\sin(\phi + \psi) = \sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \psi$

In der Ebene  $\mathbb{R}^2$  stehen uns neben den kartesischen koordinaten  $x, y$  noch die Polarkoordinaten  $r, \phi$  zur Verfügung. Für beliebiges  $z = x + iy \neq 0$

## KAPITEL 2. REELE ZAHLEN, EUKLIDISCHE RÄUME UND KOMPLEXE ZAHLEN



$$e^{i\phi} = 1 \Leftrightarrow \phi = 2k\pi$$

$$\cos \phi + i \sin \phi = 1 \Leftrightarrow \cos \phi = 1 \text{ und } \sin \phi = 0$$

$$\Leftrightarrow \phi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} e^{i\theta} \cdot e^{i\phi} &= (\cos \theta + i \sin \theta) (\cos \phi + i \sin \phi) \\ &= \underbrace{\cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi}_{\cos(\theta+\phi)} + i \underbrace{(\cos \theta \sin \phi + \sin \theta \cos \phi)}_{\sin(\theta+\phi)} \\ &= e^{i(\theta+\phi)} \end{aligned}$$

folgt  $e^{i\phi} e^{i\psi} = e^{i(\phi+\psi)}$

Somit folgt für  $z = re^{i\theta}$ ,  $\omega = se^{i\phi} \in \mathbb{C}$  die einfache Darstellung  $z\omega = rse^{i(\theta+\phi)}$ ,

$$\frac{z}{\omega} = \left(\frac{r}{s}\right) e^{i(\theta-\phi)}$$

Die Polare Darstellung ist in Berechnungen sehr nützlich, insbesondere um das Produkt und die Division zu berechnen

### Beispiel

1.

$$\begin{aligned} z &= 1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \\ \omega &= \sqrt{3} - i = 2e^{-i\frac{\pi}{6}} \\ \frac{(\sqrt{3} - i)^3}{(1 + i)^2} &= \frac{\omega^3}{z^4} = \frac{8e^{-i\frac{\pi}{2}}}{4e^{i\pi}} = 2e^{-\frac{3\pi}{2}i} = 2e^{\frac{\pi}{2}i} = 2i \end{aligned}$$

2. Die Polarform ist auch sehr nützlich um die wurzel einer Komplexen Zahl zu berechnen. Sei  $\omega \in \mathbb{C}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Wir möchten die Gleichung  $z^n = \omega$  lösen.

$$\begin{aligned} \omega &= |\omega| e^{i\phi} \\ z^n = \omega &= |\omega| e^{i\theta} \Rightarrow z = |\omega|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{(\theta+2k\pi)}{n}} \\ &= |\omega| e^{i(\theta+2k\pi)} \end{aligned}$$

**Beispiel**

is this inside the other  
Beispiel or out??

$$z^3 = 1 \Rightarrow z^3 = (e^{2\pi i k})^{\frac{1}{3}} \in \{e^{i\pi \frac{2k}{3}} : k = 0, 1, 2\} = \{1, e^{2i\frac{\pi}{3}}, e^{4i\frac{\pi}{3}}\}$$

Allgemein Formel der Einheitswurzel  $z = \{e^{i\frac{2\pi k}{n}} : k = 0, 1, \dots, n-1\}$

**Bemerkung**

- (a) Es gibt keine mit der Körperoperationen verträgliche Ordnung von  $\mathbb{C}$
- (b) Hingegen ist  $\mathbb{C}$  im Unterschied zu  $\mathbb{R}$  algebraisch vollständig. Nicht nur die Gleichung  $x^2 + 1 = 0$  hat in  $\mathbb{C}$  eine Lösung, sondern es gilt der Fundamentalsatz der Algebra. Es sagt, dass jedes Polynom  $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$  vom Grad  $n \geq 1$  hat in  $\mathbb{C}$  genau  $n$  Nullstellen.

## Kapitel 3

# Folgen und Reihen (Der Limes Begriff)

### 3.1 Folgen, allgemeines

**Definition 3.1**

Eine Folge reeller Zahlen ist eine Abbildung  $a : \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  wobei wir das Bild von  $n \geq 1$  mit  $a_n$  (statt  $a(n)$ ) bezeichnen.

Eine Folge wird dann meistens mit  $(a_n)_{n \geq 1}$ , daher mit der geordneten Bildmenge bezeichnet.

Folgen können auf verschiedene Arten gegeben sein.

**Beispiel 3.2**

1.  $a_n = \frac{1}{n}, n \geq 1$
2.  $a_1 = 0.9, a_2 = 0.99, \dots, a_n = \underbrace{0.99 \dots 9}_{n\text{-mal}}$
3.  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, n \geq 1$
4. (Rekursiv) Sei  $d > 0$  eine reelle Zahl  $a_1, \dots, a_{n+1} := \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{d}{a_n}\right), n \geq 1$   
z.B.  $d = 2, a_1 = 1, a_2 = \frac{3}{2}, a_3 = \frac{17}{12}, a_4 = \dots$
5. Fibonacci Zahlen.  $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \forall n \geq 2$

**Definition 3.3**

Eine Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  heißt beschränkt falls die Teilmenge  $\{a_n : n \geq 1\} \subseteq \mathbb{R}$  beschränkt ist. d.h. Es gibt  $c \in \mathbb{R} (c \geq 0)$  so dass  $|a_n| \leq c, \forall n \geq 1$

## 3.2 Grenzwert oder Limes eine Folge. Ein zentraler Begriff

### Definition 3.4

Eine Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  konvergiert gegen  $a$  wann für jedes  $\varepsilon > 0$  ein Index  $N(\varepsilon) \geq 1$  gilt so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon, \forall n > N(\varepsilon)$$

### Definition 3.4 (Version 2)

Eine Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  konvergiert gegen  $a \in \mathbb{R}$  falls für jedes  $\varepsilon > 0$  die Menge der Indizes  $n \geq 1$  für welcher  $a_n \notin (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  endlich ist.

$$(\forall \varepsilon > 0, \#\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \notin (a - \varepsilon, a + \varepsilon)\} < \infty)$$

### Äquivalenz beider Definitionen

Is this supposed to be a title?

(2)  $\Rightarrow$  (1)

Sei für  $\varepsilon > 0$

$$M(\varepsilon) := \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \notin (a - \varepsilon, a + \varepsilon)\} = \{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - a| \geq \varepsilon\}$$

Da  $M(\varepsilon)$  endlich ist, ist es nach oben beschränkt. Es gibt also  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  so dass  $\forall n \in M(\varepsilon), n \leq N(\varepsilon) - 1$ . Insbesondere gilt  $\forall n \geq N(\varepsilon), n \notin M(\varepsilon)$  und daher  $|a_n - a| < \varepsilon$ .

(1)  $\Rightarrow$  (2)

$$M(\varepsilon) = \{n : |a_n - a| \geq \varepsilon\} \subset [0, N(\varepsilon) - 1]$$

Also endlich.

Falls die Eigenschaften in Definition 3.4 zutrifft, dann schreibt man

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ oder } a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a$$

Die Zahl  $a$  nennt sich Grenzwert oder Limes der Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$ . Eine Folge heisst konvergent falls sie einen Limes besitzt, andernfalls heisst sie divergent.

### Bemerkung 3.5

1. Falls  $(a_n)_{n \geq 1}$  konvergent ist der Limes eindeutig bestimmt

### Beweis

Seien  $a$  und  $b$  Grenzwerte von  $(a_n)_{n \geq 1}$ . Sei  $\varepsilon = \left| \frac{b-a}{3} \right| > 0$ , dann gibt es  $N_1, N_2$  so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N_1$$



### KAPITEL 3. FOLGEN UND REIHEN (DER LIMES BEGRIFF)

$$|a_n - b| < \varepsilon \quad \forall n > N_2$$

Also  $\forall n \geq \max\{N_1, N_2\}$

$$(a - b) \cong |(a - a_n) + (a_n - b)| < 2\varepsilon = \frac{2}{3} |b - a|$$

### Binomischen Lehrsatz

Für beliebige Zahlen  $a, b$  und  $n \in \mathbb{N}$  ist

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

2. Falls  $(a_n)_{n \geq 1}$  konvergent ist,  $\{a_n : n \geq 1\}$  beschränkt: Sei  $\varepsilon = 1$ ,  $\lim a_n = a$  und  $N_0$  mit

$$|a_n - a| \leq 1 \quad \forall n > N_0$$

Dann ist  $\forall n \quad |a_n| \geq \max\{|a| + 1, |a_j|, 1 \leq j \leq N_0\}$

### Beispiel 3.6

1. Sei  $a_n = \frac{1}{n}, n \geq 1$ . Dann gilt  $\lim a_n = 0$
- Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann  $\frac{1}{\varepsilon} > 0$ . Sei  $n_0 \in \mathbb{N}$ ,  $n_0 \geq 1$  mit  $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$  (Archimedische Eigenschaft, Satz 2.13)

Dann gilt für alle  $n \geq n_0$ ,  $\frac{1}{\varepsilon} < n_0 \leq n \Rightarrow \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon, \forall n \geq n_0$

2. Sei  $0 < q < 1$  und  $a_n := q^n$ ,  $n \geq 1$ . Dann gilt  $\lim a_n = 0$  ( $a_n$  konvergiert gegen 0)

Cannot read, page 54 top

### Beweis

Zu beweisen

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$$

Should it be  $\in \mathbb{R}??$

$$\forall n \geq N_0 : q^n < \varepsilon$$

Die Idee ist zu zeigen dass  $\frac{1}{q^n}$  sehr Gross wird und deswegen  $q^n$  sehr klein wird. Setzen wir  $\frac{1}{q} = 1 + \delta$  mit  $\delta > 0$  ( $1 < 1 \Rightarrow \frac{1}{q} > 1$ )

$$\frac{1}{q^n} = \left( \frac{1}{q} \right)^n = (1 + \delta)^n = 1 + n\delta + \binom{n}{2} \delta^2 + \dots + \delta^n \geq 1 + n\delta > n\delta, \forall n \in \mathbb{N}$$

also

$$0 < q^n < \frac{1}{n\delta}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Sei jetzt  $\varepsilon > 0$ , wähle  $N_0 = N_0(\varepsilon)$  mit  $\frac{1}{\varepsilon\delta} < N_0 \Rightarrow \frac{1}{N_0\delta} < \varepsilon$

$$\forall n > N_0 \quad 0 < q^n \leq \frac{1}{n\delta} < \frac{1}{N_0\delta} < \varepsilon$$

### KAPITEL 3. FOLGEN UND REIHEN (DER LIMES BEGRIFF)

3.  $\sqrt[n]{n}$ ,  $\lim a_n = 1$ . Klar:  $n \geq 1$  also  $\sqrt[n]{n} \geq 1$   
Gegeben ein  $\varepsilon > 0$ , wollen wir  $n$  so gross wählen, dass

$$\sqrt[n]{n} - 1 < \varepsilon$$

das heisst,  $n < (1 + \varepsilon)^n$ . Wir entwickeln

$$(1 + \varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \binom{n}{2}\varepsilon^2 + \dots + \varepsilon^n$$

can't read last element  
of the expansion

$\varepsilon$  ist klein aber fixiert.

Für  $n$  sehr gross wird  $1 + n\varepsilon$  nie grösser als  $n$  sein. Wir versuchen unsere Glück mit

$$\binom{n}{2}\varepsilon^2 \text{ term}$$

$$\binom{n}{2}\varepsilon^2 = \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2$$

Wir benutzen also  $(1 + \varepsilon)^n \geq \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2$ . Wir wollen  $n$  so wählen dass

$$\frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 > n$$

d.h.  $n - 1 > \frac{2}{\varepsilon^2}$  oder  $n > 1 + \frac{2}{\varepsilon^2}$

Setzen wir  $N_0 := \left(1 + \frac{2}{\varepsilon^2}\right) + 1$ . Dann gilt für  $\forall n > N_0$

$$(1 + \varepsilon)^n > n \geq 1$$

$$\Rightarrow 1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + \varepsilon$$

$$\Rightarrow -\varepsilon < 0 \leq \sqrt[n]{n} - 1 \leq \varepsilon \Rightarrow |\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon, \forall n > N_0$$

4. Nicht alle Folgen sind konvergent. Es gibt zwei verschiedene Verhältnissen einer divergenten Folge

$$a_n = (-1)^n \Rightarrow \{1, -1, \dots\} \text{ beschränkt aber nicht konvergent}$$

5.  $a_n = n$  unbeschränkt, divergent.

#### Beispiel 3.7

Seien  $p \in \mathbb{N}$ ,  $0 < q < 1$ . Dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p q^n = 0$ . Dass heisst Exponentialfunktion wächst schneller als jede Potenz (Wann  $x$  genügend Gross ist,  $a^x > x^b$ )

**Beweis**

Der Trick ist folgender

$$n^p q^n = \left( n^{\frac{p}{n}} \cdot q \right)^n = \left( (\sqrt[n]{n})^p \left( q^{\frac{1}{p}} \right)^p \right)^n$$

Wir werden Beispiel 3.6 (2.), (3.) benutzen.

(d.h.  $\lim \sqrt[n]{n} = 1$   $\lim r^n = 0, 0 < r < 1$ )

Da  $\lim \sqrt[n]{n} = 1, \forall \eta > 0, \exists N_0(\eta)$

$$\sqrt[n]{n} < 1 + \eta, n > N_0(\eta)$$

Wir wählen  $\eta > 0$  so dass  $q^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{(1+\eta)^2}$ . Dann

$$\sqrt[n]{n} \cdot q^{\frac{1}{p}} \leq \frac{(1+\eta)}{(1+\eta)^2} = \frac{1}{1+\eta} \quad \forall n > N_0(\eta)$$

Wobei

$$\forall n > N_0(\eta)$$

$$a_n = \left( \sqrt[n]{n} q^{\frac{1}{p}} \right)^{pn} < r^n$$

mit

$$r := \left( \frac{1}{1+\eta} \right)^p, r < 1$$

Sei jetzt  $\varepsilon > 0$ . Da  $\lim r^n = 0, \exists N_1 = N_1(\varepsilon), \forall n > N_1(\varepsilon), r^n < \varepsilon$

Für  $n > \max\{N_0(\eta), N_1(\varepsilon)\}, a_n < r^n < \varepsilon \Rightarrow \lim a_n = \lim n^p q^n = 0$

### 3.3 Konvergenzkriterien

Mit konvergenten Folgen kann man wie folgender Satz zeigt.

Can't read, page 59 top

**Satz 3.8**

Seien

### *KAPITEL 3. FOLGEN UND REIHEN (DER LIMES BEGRIFF)*

Kapitel 4

Chapter 4



**Kapitel 5**

**Chapter 5**





## Kapitel 6

# Integration

- I) a) Gegeben sei eine stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Gesucht ist eine differenzierbare Funktion  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$F'(t) = f(t), \forall t \in [a, b]$$

- b) Für Naturwissenschaft und Technik ist die folgende Verallgemeinerung von a) wichtig:  
Sei  $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben. Gesucht ist eine differenzierbare Funktion  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)), t \in [a, b]$$

Man nennt ein solches  $\varphi$  eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = f(x, y)$$

- II) Viele in der Natur und Ingenieurwissenschaften auftretenden Größen benötigen zu ihrer exakten Definition einen Grenzprozess der Folgenart:

Wirkt eine konstante Kraft  $f$  längs eines Weges der Länge  $s$ , und zwar längs der  $x$ -Achse vom Punkt  $a$  bis zum Punkt  $b := a + s$ , so versteht man unter der von der konstanten Kraft  $f$  geleisteten Arbeit das Produkt  $f \times s = f(b - a)$ .

Ist die Kraft  $f$  jedoch örtlich variable, d.h.  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion des Ortes  $x \in [a, b]$ , so wird man folgendermassen vorgehen.

Zerlege das Intervall  $[a, b]$  in kleine Teilintervalle  $I_1, \dots, I_n$ . Wähle in jedem Intervall  $I_k := [x_{k-1}, x_k]$  einen Punkt  $\xi$  aus. Man wird dann die "Riemannsche Summe"

$$A \sim \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

als Näherung für die gesuchte Arbeit  $A$  ansehen. Hierzu wird man insbesondere dann berechtigt sein, wenn man mit jeder genügend feinen Zerlegung des Intervalls  $I$ , einem festen Wert  $A$  beliebig nahe kommt.

- III) Sei  $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty]$  eine (stetige) Funktion. Gesucht ist eine vernünftige Definition des Flächeninhalts  $A$  des Gebietes zwischen der  $x$ -Achse und dem Graphen von  $f$



Dies ist sehr einfach, wenn die Funktion  $f$  überall den konstanten Wert  $f(x) = c$  hat für eine feste reelle Zahl  $c \in \mathbb{R}$ . In diesem Fall ist die Fläche unter dem Graphen von  $f$  ein Rechteck und wir definieren dessen Flächeninhalt einfach als Breite mal Höhe, also das Produkt  $A = (b - a)c$ . Man beachte, dass die Zahl  $c$  auch negativ sein darf und dann ist auch  $A$  negativ.

Eine einfache Formel ergibt sich auch für eine Funktion, die sich aus konstanten Funktionen auf endlich vielen Teilintervalle von  $[a, b]$  zusammensetzen lässt.



Für allgemeine beschränkte Funktionen kann man nun wie in II) vorgehen.



Wir wählen eine Aufteilung (Zerlegung, Einteilung, Partition) des Intervalls  $I = [a, b]$  in endlich viele Teilintervalle.

Aus jedem dieser Teilintervalle  $I_k$  ersetzen wir  $f$  durch eine Funktion die auf diesem Teilintervall konstant ist und in einem noch zu klärenden Sinn nicht allzu stark von  $f$  abweicht. Dann bilden wir die Summe der Flächeninhalte der auf diese Weise erhaltenen Rechtecke. Diese Summe ist als Näherungswert für die gewünschte Fläche zu verstehen.

Um den genauen Wert der Fläche festzulegen bilden wir immer feinere Zerlegungen des Intervalls. Es ist dann das Grenzwertverhalten der diesen Summen zu untersuchen.

## 6.1 Riemann Integral: Definition, elementare Eigenschaften

1. Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Funktion.

### Definition 6.1

Eine Partition (oder Zerlegung, Einteilung, Unterteilung) eines Intervalls  $[a, b]$  ist eine endliche Menge  $P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$

$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$

$P(I) := \{P \subset I \mid a, b \in P, P \text{ ist endlich}\}$  die Menge alle Partitionen



Die Feinheit der Zerlegung  $P$  ist dabei definiert durch

$$\delta(P) := \max(x_i - x_{i-1}), 1 \leq i \leq n$$

d.h.  $\delta(P)$  ist die Länge des grössten Teilintervalls  $I_i := [x_i, x_{i-1}]$ ,  $k = i, \dots, n$

2. Wahl  $\xi_i$  von Zwischenpunkten  $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .  
Jede Summe der Form

$$S(f, P, \xi) := \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

nennt man eine **Riemannsche Summe** der Zerlegung  $P$  und  $\xi$ .  
Die Summe

$$U(f, P) := \sum_{i=1}^n \left( \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \right) (x_i - x_{i-1})$$

nennt man die **Untersumme** von  $f(x)$  zur Zerlegung  $P$ , und

$$O(f, P) := \sum_{i=1}^n f \left( \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \right) (x_i - x_{i-1})$$

nennt man die **Obersumme** von  $f(x)$  zur Zerlegung  $P$ .



### Bemerkung 6.2

Aus den Definitionen folgt direkt

- a) Für eine feste Zerlegung  $P$  gilt stets  $U(f, P) \leq S(f, P, \xi) \leq O(f, P)$   
b) Für zwei Partitionen  $P, Q \in P(I)$  gilt die Ungleichung  $P \subset Q \Rightarrow U(f, P) \leq U(f, Q) \leq O(f, Q) \leq O(f, P)$ .

## KAPITEL 6. INTEGRATION

### Beweis

Um dies zu verstehen, ist es nützlich, den Fall zu betrachten, dass die Zerlegung  $Q$  genau einen Punkt mehr enthält als  $P$ .

Sei  $P = \{x_0, \dots, x_N\}$  und  $Q = P \cup \{\xi\}$ , wobei  $\xi$  ein neuer Unterteilungspunkt, also nicht gleich einem der Elemente von  $P$  ist. Dann gibt es genau ein  $l \in \{1, \dots, N\}$  so dass  $x_{l-1} < \xi < x_l$  ist. Damit erhält man

$$(\sup_{[x_{l-1}, \xi]} f)(\xi - x_{l-1}) + (\sup_{[\xi, x_l]} f)(x_l - \xi) \leq (\sup_{[x_{l-1}, x_l]} f)(x_l - x_{l-1})$$



Addiert man dazu alle Summanden in

$$O(f, P) = \sum_i (\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f)(x_i - x_{i-1})$$

mit  $t \neq l$  so ergibt sich die Ungleichung

$$O(f, Q) \leq O(f, P)$$

Ebenso beweist man  $U(f, Q) \geq U(f, P)$ . Damit ist b) für den Fall bewiesen, dass  $Q$  genau ein Element mehr als  $P$  enthält. Der allgemeine Fall lässt sich hierauf leicht durch vollständige Induktion zurückführen.

### Lemma 6.3

Sei  $f : I := [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Funktion. Dann gilt

$$\sup_{P \in P(I)} U(f, P) \leq \inf_{P \in P(I)} O(f, P)$$

### Beweis

Aus

$$P \subset Q \Rightarrow U(f, P) \leq U(f, Q) \leq O(f, Q) \leq O(f, P)$$

folgt, dass die Zahl  $O(f, Q)$  für jede Partition  $Q \in P(I)$  eine obere Schranke für die Menge  $\{U(f, P) \mid P \in P(I)\}$  ist. Also folgt aus der Definition des Supremums als kleinste obere Schranke, dass  $\sup_{P \in P(I)} U(f, P) \leq O(f, Q)$  ist.

Diese Ungleichung gilt für jede Partition  $Q \in P(I)$ . Das heisst wiederum, dass die Zahl  $\sup_{P \in P(I)} U(f, P)$  eine untere Schranke für die Menge  $\{O(f, Q) \mid Q \in P(I)\}$  ist.

Also folgt aus der Definition der Infimums als grösste untere Schranke, dass die Gleichung  $\sup_{P \in P(I)} U(f, P) \leq \inf_{Q \in P(I)} O(f, Q)$  ist. Damit ist Lemma 6.3 bewiesen.

**Definition 6.4**

- 1) Für beschränktes  $f = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  bezeichnen

$$\int_a^b f dx = \sup\{U(f, P) : P \in P(I)\}$$

$$\int_a^{\bar{b}} f dx = \inf\{O(f, P) : P \in P(I)\}$$

das Untere und Obere Integral von  $f$ .

- 2) Ein solches  $f$  heisst über  $[a, b]$  Riemann - Integrabel falls

$$\int_a^b f dx = \int_a^{\bar{b}} f dx$$

In diesem Fall heisst  $A = \int_a^b f dx$  das Riemann Integral von  $f$  über den Intervall  $[a, b]$

**Beispiel 6.5**

- 1) Sei  $c \in \mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  die konstante Funktion mit dem Wert  $c$ , das heisst  $f(x) = c, \forall x \in I$ . Dann gilt

$$U(f, P) = O(f, P) = (b - a)c, \forall P \in P(I)$$

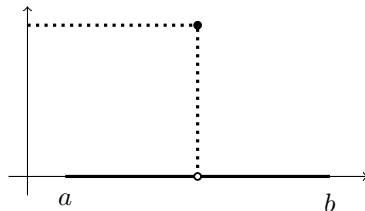
$\Rightarrow f$  ist Riemann integrierbar und

$$\int_a^b f dx = \int_a^b c dx = c(b - a)$$

In diesem einfachen Fall stimmt unsere Definition mit der Interpretation des Flächeninhalts als Breite mal Höhe überein. Man beachte, dass die Konstante  $c$  auch negativ sein darf.

## KAPITEL 6. INTEGRATION

$$2) f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq x_0 \\ 1 & \text{für } x = x_0 \end{cases} \quad x_0 \in [a, b]$$



Dann ist  $f$  integrierbar mit

$$\int_a^b f(x) dx = 0$$

denn es gilt  $U(f, P) = 0$  und  $0 < O(f, P) \leq 2\delta(P), \forall P$ .

$O(f, P)$  kann, durch geeignete Wahl der Partition beliebig klein gewählt werden. z.B.  $P_n = \{a, a + \frac{(b-a)}{n}, \dots, b\} \Rightarrow \delta(P) = \frac{b-a}{n}, \inf_{P \in P(I)} O(f, P) = 0$

$$3) f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [a, b] \setminus Q \\ 0 & \text{für } x \in [a, b] \cap Q \end{cases}$$

Dann gilt  $U(f, P) = 0$  und  $O(f, P) = 1, \forall P \in P(I)$   
 $\Rightarrow f$  ist nicht integrierbar. ( $f$  ist beschränkt aber nicht integrierbar)

### Satz 6.6 (Riemannsches Kriterium für Integrierbarkeit)

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent

1.  $f(x)$  ist integrierbar über  $[a, b]$
2. Für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert eine Partition  $Q \in P(I)$  mit

$$O(f, Q) - U(f, Q) < \varepsilon$$

### Beweis

((a) $\Rightarrow$ (b))

Sei  $f$  Riemann integrierbar,  $A := \int_a^b f(x) dx = \sup U(f, P) = \inf O(f, P)$

Nach definition von  $\sup$  und  $\inf$  folgt dass zwei Partitionen  $P_1, P_2 \in P(I)$  existieren, so dass

- (i)  $A - \frac{\varepsilon}{2} < U(f, P_1)$
- (ii)  $O(f, P_2) < A + \frac{\varepsilon}{2}$
- (iii)  $U(f, P_1) \leq U(f, Q) < O(f, Q) \leq O(f, P_2)$

Definiere  $Q := P_1 \cup P_2$ . Dann  $P_1 \subset Q$  und  $P_2 \subset Q$ .  
 Nach Bemerkung 6.2b) folgt

$$\begin{aligned} (i), (ii), (iii) &\Rightarrow A - \frac{\varepsilon}{2} < U(f, Q) \leq O(f, Q) < A + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\Rightarrow O(f, Q) - U(f, Q) < \varepsilon \end{aligned}$$

((b) $\Rightarrow$ (a))

Für alle  $P \in P(I)$

$$0 \leq \underbrace{\int_a^b f(x) dx}_{\inf O(f, P)} - \underbrace{\int_a^{\bar{b}} f(x) dx}_{\sup U(f, P)} \leq O(f, P) - U(f, P)$$

Aus (b) folgt das  $\forall \varepsilon > 0$

$$0 < \int_a^{\bar{b}} f(x) dx - \int_a^b f(x) dx < \varepsilon \Rightarrow \int_a^{\bar{b}} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

$\Rightarrow f$  ist integrierbar.

### Satz 6.7

1. Jede Stetige Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  ist R. Integrierbar.
2. Jede Monotone Funktion ist R. Integrierbar.

### Beweis

1.  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $I = [a, b]$  kompakt,  $\Rightarrow f$  gleichmässig stetig.  
 d.h. zu jedem  $\varepsilon > 0$ . gibt es  $\delta > 0$  mit

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

Für eine  $P \in P(I)$  mit Feinheit  $\delta(P) < \delta$  gilt dann

$$\begin{aligned} O(f, P) - U(f, P) &= \sum_{i=1}^n \left( \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \right) (x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{b - a} (x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon \end{aligned}$$

Somit ist  $f$  nach Riemannsche Kriterium integrierbar.

2. Sei  $f$  monoton wachsend,  $P \in P(I)$  eine uniforme Partition mit

$$x_i = a + \left( \frac{b - a}{n} \right) i, 0 \leq i \leq n$$



## KAPITEL 6. INTEGRATION

$$\begin{aligned}
 O(f, P) - U(f, P) &= \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i))(x_{i+1} - x_i) \\
 &= \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i)) \\
 &= \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) < \varepsilon
 \end{aligned}$$

Für jede  $\varepsilon > 0$ , haben wir  $\frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{n} < \varepsilon$ . Nach dem Riemannschem Kriterium ist  $f$  integrierbar. (Monoton fallend ist analog).

### Satz 6.8 (Riemannsche Summe)

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Funktion. Folgende Aussagen sind äquivalent.

- I)  $f$  ist Riemann integrierbar und  $A := \int_a^b f(x)dx$
- II) Für jedes  $\varepsilon > 0$ , existiert eine Zahl  $\xi > 0$ , so dass für jede Partition  $P_i = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$  von  $I$  und alle  $\xi_i, \dots, \xi_N \in \mathbb{R}$  gilt

$$\delta(P) < \delta \Rightarrow \left| A - \sum_{k=1}^N f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| < \varepsilon$$

Dieser Satz lässt sich auch so formulieren: Eine beschränkte Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann Riemann integrierbar wenn der Grenzwert

$$\lim_{\substack{\delta(P) \rightarrow 0 \\ \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]}} \sum_{k=1}^N f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

und dann haben wir

$$A = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta(P) \rightarrow 0} S(f, P, \delta)$$

### Beweis

Siehe D.Salomon: Das Riemannsche Integrale (Satz 3.1).

### Korollar 6.8

Seien  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte und integrierbare Funktion.  $\{P^{(n)}\}$  eine Folge von Partitionen der Intervals  $[a, b]$  mit  $\delta(P^{(n)}) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  und  $\{\xi^{(n)}\}$  eine Feste Wahl von Zwischenpunkten zur Partition  $P^{(n)}$ . Dann ist

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, P^{(n)}, \xi^{(n)})$$

**Beweis**

Wegen Satz 6.8 existiert zu jedem  $\varepsilon > 0$ , ein  $\delta > 0$  derart, das für alle Partitionen  $\delta(P) < \delta$  die Ungleichung

$$\left| S(f, P, \xi) - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon$$

gilt und zwar bei beliebiger Wahl der Zwischenpunkten.

Wegen  $\delta(P^{(n)}) \rightarrow 0$  existiert ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $\delta(P^{(n)}) < \delta$  für alle  $n \geq N$ . Für jedes  $n \geq N$  ist daher

$$\left| S(f, P^{(n)}, \xi) - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon$$

voraus sich die Behauptung unmittelbar ergibt.

**Beispiel**

$$\int_0^1 (x^2 - x) dx = ?$$

$$f(x) = x^2 - x \text{ stetig} \Rightarrow f \text{ integrierbar}$$

Wir wenden Korollar 6.8 an. Wir betrachten die Folge  $\{P^{(n)}\}$  von äquidistanten Partition des intervals  $[0, 1]$  mit

$$x_k^{(n)} := \frac{k}{n}, \quad \forall k = 0, 1, \dots, n$$

Dann  $\delta(P^{(n)}) = \frac{1}{n} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Wir wählen die Zwischenpunkte

$$\xi_k^{(n)} := \frac{k}{n}, \quad \forall k = 1, \dots, n$$

Die  $\xi_k^{(n)}$  sind die rechten Endpunkte der Teilintervale  $I_{k-1} := [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ . Hiermit folgt

$$\begin{aligned} S(f, P^{(n)}, \xi^{(n)}) &= \sum_{k=1}^n f(\xi_k^{(n)}) (x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)}) \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{k^2}{n^2} - \frac{k}{n} \right) \left( \frac{k}{n} - \frac{k-1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( \frac{k^2}{n^2} - \frac{k}{n} \right) \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 - \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{n^3} \left( \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) - \frac{1}{n^2} \left( \frac{n(n+1)}{2} \right) \\
 &\quad \rightarrow \frac{2}{6} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} \\
 &\Rightarrow \int_0^1 (x^2 - x) dx = -\frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

## Eigenschaften des Integrals

### Satz 6.9

Seien  $a < c < b$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  und  $f, g : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  zwei Riemann integrierbare Funktionen. Dann gilt folgendes:

1. Die Funktion  $\alpha f + \beta g$  ist integrierbar mit

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

2. Wenn  $f, g$  die Ungleichung  $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b]$  erfüllen, dann gilt

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

3.  $|f|$  sind R. Integrierbar und

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

4. Das Produkt  $fg$  ist Integrierbar.

### Bemerkung 6.10

Wir bezeichnen die Menge aller Riemann integrierbaren Funktionen  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $R(I) := \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ R.Integrierbar}\}$ . Nach Satz 6.9 i), ist dies ein reeller Vektorraum.  $R(I)$  ist ein Unterraum des Vektorraumes aller reellwertigen Funktion

$$F(I) := \{f : I \rightarrow \mathbb{R}\}$$

$$C(I) := \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$$

ist ein Unterraum von  $R(I)$

$$C(I) \subset R(I) \subset F(I)$$

**Beweis 6.9**

1. Setze  $h := \alpha f + \beta g$  und sei  $\varepsilon > 0$  beliebig gegeben. Da  $f$  und  $g$  integrierbar sind, existieren wegen Riem. Kriterium (Satz 6.6). Partitionen  $P_1$  und  $P_2 \in P(I)$  mit

$$O(f, P_1) - U(f, P_1) < \frac{\varepsilon}{(|\alpha| + |\beta|)}$$

und

$$O(g, P_2) - U(g, P_2) < \frac{\varepsilon}{(|\alpha| + |\beta|)}$$

Aus der Definition von  $h$  folgt zunächst

$$|h(x) - h(y)| \leq |\alpha| |f(x) - f(y)| + |\beta| |g(x) - g(y)|$$

Mit der verfeinerten Partition  $P := P_1 \cup P_2$  ergibt sich unter Verwendung von (\*), wobei

$$(*) \quad \sup_{x \in I} h(x) - \inf_{x \in I} h(x) = \sup\{h(x) - h(y) \mid x, y \in I\}$$

Für beschränkte Funktion  $h$  auf einem Intervall  $I$  gilt

$$\begin{aligned} O(h, P) - U(h, P) &= \sum_{k=1}^n \left( \sup_{[x_{k-1}, x_k]} h - \inf_{[x_{k-1}, x_k]} h \right) (x_k - x_{k-1}) \\ &\stackrel{*}{=} \sum_{x, y \in I_k} \sup |h(x) - h(y)| (x_k - x_{k-1}) \\ &\leq |\alpha| \sum_{x, y \in I_k} \sup |f(x) - f(y)| (x_k - x_{k-1}) + |\beta| \sum_{x, y \in I_k} \sup |g(x) - g(y)| (x_k - x_{k-1}) \\ &= |\alpha| \sum_{k=1}^n (\sup f - \inf f)(x_k - x_{k-1}) + |\beta| \sum_{k=1}^n (\sup g - \inf g)(x_k - x_{k-1}) \\ &= |\alpha| [O(f, P) - U(f, P)] + |\beta| [O(g, P) - U(g, P)] \\ &< |\alpha| \frac{\varepsilon}{(|\alpha| + |\beta|)} + |\beta| \frac{\varepsilon}{(|\alpha| + |\beta|)} = \varepsilon \end{aligned}$$

Nach Bmk. 6.2  $P_1 \subset P$

$$\Rightarrow U(f, P_1) < U(f, P)$$

und

$$O(f, P) < O(f, P_1)$$

Dann

$$-U(f, P) < -U(f, P_1)$$

und

$$O(f, P) - U(f, P) < O(f, P_1) - U(f, P_1) < \frac{\varepsilon}{(|\alpha| + |\beta|)}$$

## KAPITEL 6. INTEGRATION

2. Seien  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar mit  $f(x) \leq g(x), \forall x \in I$ .  
 Die Funktion  $h := g - f$  ist wegen (1.) integrierbar. Sei nun  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$   
 eine beliebige Partition von  $[a, b]$  folgt dann  $\inf h(x) \geq 0, \forall k = 0, 1, \dots, n$   
 und daher

$$U(h, P) = \sum_P (\inf h)(x_k - x_{k-1}) \geq 0$$

Was wiederum  $\int_a^b h(x) dx = \sup U(h, P) \geq 0$  impliziert.

Da  $h$  aber integrierbar ist, folgt hieraus

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_a^b h(x) dx = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx \\ &= \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx \geq 0 \end{aligned}$$

Dies liefert die Behauptung

3. Nun gilt  $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|, \forall x \in I$   
 Nach (2) folgt daraus die Ungleichung

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Diese Ungleichung ist äquivalent zu

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

4. Als integrierbare Funktionen sind  $f$  und  $g$  beschränkt. Also existieren die Konstanten

$$\alpha := \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \quad \text{und} \quad \beta := \sup_{x \in [a, b]} |g(x)|$$

Wegen Riem. Kriterium (Satz 6.6) gibt es Partitionen  $P_1, P_2$  mit

$$O(f, P_1) - U(f, P_1) < \frac{\varepsilon}{(\alpha + \beta)}, \quad O(g, P_2) - U(g, P_2) < \frac{\varepsilon}{(\alpha + \beta)}$$

Setzen wir  $h := fg$  so gilt

$$\begin{aligned} |h(x) - h(y)| &\leq |f(x)| |g(x) - g(y)| + |g(y)| |f(x) - f(y)| \\ &\leq \alpha |g(x) - g(y)| + \beta |f(x) - f(y)|, \forall x, y \in [a, b] \end{aligned}$$

Sei  $P = P_1 \cup P_2$ .

Wie in dem Beweis von (1.) ergibt sich unter Verwendung von

$$\sup_{x \in I} h - \inf_{x \in I} h = \sup \{|h(x) - h(y)| \mid x, y \in I\}$$

dann

$$\begin{aligned}
 & O(h, P) - U(h, P) \\
 &= \sum_{k=1}^n (\sup h - \inf h)(x_k - x_{k-1}) \\
 &= \sum_{k=1}^n \sup_{x, y \in I_k} |h(x) - h(y)| (x_k - x_{k-1}) \\
 &\leq |\beta| \sum \sup_{I_k} |f(x) - f(y)| (x_k - x_{k-1}) + |\alpha| \sum \sup_{I_k} |g(x) - g(y)| (x_k - x_{k-1}) \\
 &= |\beta| \sum (\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f)(x_k - x_{k-1}) + |\alpha| \sum (\sup_{I_k} g - \inf_{I_k} g)(x_k - x_{k-1}) \\
 &= |\beta| [O(f, P) - U(f, P)] + |\alpha| [O(g, P) - U(g, P)] < \varepsilon
 \end{aligned}$$

**Satz 6.10 (Standardabschätzungen)**

Sei  $f$  integrierbar über  $[a, b]$ . Dann gelten die Abschätzungen

$$(b - a) \inf_{[a, b]} f \leq \int_a^b f(x) dx \leq (b - a) \sup_{[a, b]} f$$

**Beweis**

Für die Partition  $P = \{a, b\}$  von  $[a, b]$  folgt sofort

$$(b - a) \inf_{[a, b]} f = U(f, P) \leq \int_a^b f(x) dx < O(f, P) = (b - a) \sup_{[a, b]} f$$

**Satz 6.11**

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar. Dann ist  $f$  auch auf jedem Teilintervall  $[c, d] \subseteq [a, b]$  integrierbar.

**Beweis**

$f$  ist auf  $[a, b]$  integrierbar wegen Satz 6.6.

Zu jedem  $\varepsilon > 0$ , existiert eine Partition  $P'$  von  $[a, b]$  mit

$$O(f, P') - U(f, P') < \varepsilon$$

Wir betrachten dann die Verfeinerung

$$P'' := P' \cup \{c, d\}$$

Wegen Bmk. 6.2 haben wir

$$O(f, P'') - U(f, P'') < \varepsilon$$

## KAPITEL 6. INTEGRATION

Sei nun  $P := P'' \cap [c, d]$  die Restriktion der Partition  $P''$  auf  $[c, d]$ . Dann gilt mit  $g := f|_{[c, d]}$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} O(g, P) - U(g, P) &= \sum_P (M_k(g) - m_k(g))(x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_P (M_k(f) - m_k(f))(x_k - x_{k-1}) \\ &\leq \sum_{P''} (M''_k(f) - m''_k(f))(x_k - x_{k-1}) \\ &= O(f, P'') - U(f, P'') < \varepsilon \end{aligned}$$

wobei

$$M_k(f) := \sup_{I_k \subset P} f \quad m_k(f) := \inf_{I_k \subset P} f$$

und, analog

$$M''_k(f) = \sup_{I_k \in P''} f$$

### Satz 6.12

Seien  $a \leq b \leq c$ . Die Funktion  $f : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann integrierbar falls beide Einschränkungen  $f|_{[a, b]}$  und  $f|_{[b, c]}$  integrierbar sind. In diesem Fall gilt

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

### Konvention 6.13

1) Sei  $f$  integrierbar auf einem Intervall  $I$ . Für  $a \leq b$  in  $I$  definiert man

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

Mit dieser Konvention gelten alle bisherigen Eigenschaften. z.B.

$$\forall a, b, c \in I : \int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$$

2)

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

## 6.2 Differentiation und Integration

In diesem Kapitel wird der Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration hergestellt. Zu diesem Zweck beginnen wir mit dem folgenden Satz, Mittelwertsatz der Integralrechnung.

**Satz 6.14 (Mws. der Integralrechnung)**

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Dann existiert ein  $\xi \in [a, b]$  mit

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a)$$

Geometrisch:

**Beweis**

Wir setzen

$$m := \min\{f(x) \mid x \in [a, b]\} = f(x_-)$$

$$M := \max\{f(x) \mid x \in [a, b]\} = f(x_+)$$

Wegen Satz 6.10

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$$

$$f(x_-) = m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M = f(x_+)$$

Also  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$  für ein  $M \in [m, M]$ . Da  $f$  stetig ist, wegen Zwischenwertsatz gibt es  $\xi \in [a, b]$  mit  $f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ . Nun kommt die erste Hauptsatz der Diff- und Integralrechnung.



## KAPITEL 6. INTEGRATION

### Satz 6.15 (Hauptsatz A)

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Definiere für jeder  $x \in [a, b]$

$$F(x) := \int_x^b f(t) dt$$

Dann ist  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und  $F'(x) = f(x)$ ,  $\forall x \in [a, b]$ .

### Beweis

Für jedes  $h \neq 0$  ist

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \left[ \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right] \stackrel{6.12}{=} \frac{1}{h} \int_a^{x+h} f(t) dt$$

Nach dem Mws der Integralrechnung existiert zu jedem solchen  $h \neq 0$  ein Zwischenpunkt  $\xi_h \in [x, x+h]$  (bzw.  $\xi_h \in [x+h, x]$  falls  $h < 0$ ) mit

$$\int_x^{x+h} f(t) dt = (h)f(\xi_h)$$

Nun ist  $\xi_h \rightarrow x$  für  $h \rightarrow 0$ . Da  $f$  stetig ist

$$f(\xi_h) \rightarrow f(x) \text{ für } h \rightarrow 0$$

Damit erhalten wir

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (hf(\xi_h)) = f(x)$$

Folgender Begriff ist dann naheliegend.

### Definition 6.16

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Eine Stammfunktion von  $f$  (auf  $a, b$ ) ist eine differenzierbare Funktion  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $F'(x) = f(x)$ .

Wegen Satz 6.15, hat jede stetige Funktion mindestens eine Stammfunktion. Mit Ausnahme einer additiven Konstante, die beim Differenzieren ja wegfällt, ist die Stammfunktion auch eindeutig bestimmt. Dies ist der Inhalt des folgenden Satzes.

**Satz 6.17**

Seien  $I \subset \mathbb{R}$  ein beliebiges Intervall und  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Stammfunktion von  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann gelten:

- (a) Die Funktion  $F + c$  ist für jede Konstante  $c \in \mathbb{R}$  ebenfalls eine Stammfunktion von  $f$ .
- (b) Ist  $G : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine weitere Stammfunktion von  $f$ , so gibt es eine Konstante  $c \in \mathbb{R}$  mit  $G = F + c$

**Beweis**

- (a) Offenbar ist mit  $F$  auch  $F + c$  differenzierbar und es gilt  $(F + c)' = F' = f$
- (b) Da  $F$  und  $G$  Stammfunktionen von  $f$  sind, gilt  $F' = f, G' = f$ . Also  $(F - G)' = 0$  und  $F - G = \text{konstante Funktion}$ .

**Definition 6.18**

Eine Stammfunktion von  $f$  heisst auch unbestimmtes Integral von  $f$  und wird bezeichnet mit  $\int f(x)dx$ . Mittels einer Stammfunktion lässt sich das Integral einer gegebenen Abbildung sehr leicht berechnen. Dies ist der Inhalt des Hauptsatz B.

**Satz 6.19 (Hauptsatz der Diff- und Integralberechnung Version B)**

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion und  $F$  eine beliebige Stammfunktion von  $f$ . Dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) := F(x)|_a^b, \quad \forall a, b \in I$$

**Beweis**

Für  $x \in I$  definieren wir

$$F_0(x) := \int_a^x f(t)dt$$

Dann ist  $F_0 : I \rightarrow \mathbb{R}$  wegen Satz 6.15 eine (Spezielle) Stammfunktion von  $f$  mit

$$F_0(a) = 0 \quad F_0(b) = \int_a^b f(t)dt$$

Für die beliebige Stammfunktion  $F$  gilt somit  $F - F_0 = c$  für eine Konstante  $c \in \mathbb{R}$ . Deshalb ist

$$F(b) - F(a) = F_0(b) - F_0(a) = F_0(b) = \int_a^b f(t)dt$$

## KAPITEL 6. INTEGRATION

womit alles bewiesen ist.

Der Satz 6.19 ist das zentrale Ergebnis und zur Berechnung konkreter Integral. Man Benötigt nur eine Stammfunktion uns hat von dieser lediglich die Differenz der Funktionswerte zwischen den beiden Endpunkten des Intervals  $[a, b]$  zu bilden. Insbesondere spielt es keine Rolle, welche Werte die Stammfunktion im Inneren des Intervals  $[a, b]$  annimmt.

### Beispiele von Stammfunktionen

#### Beispiel 6.20

Definitions Bereich	Funktion $f$	Stammfunktion $F$
$(0, \infty)$	$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \neq -1$ $\log x  + c, \alpha = -1$
$\mathbb{R}$	$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \in \mathbb{N}$
$\mathbb{R}$	$e^x$	$e^x + c$
$\mathbb{R}$	$\sin x$	$-\cos x + c$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x + c$
$(-1, 1)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + c$
$(-1, 1)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x + c$
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\arctan x + c$
$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$\tan x$	$-\ln \cos x  + c$
$(0, \pi)$	$\cot x$	$\ln \sin x  + c$
$\mathbb{R}$	$\sinh x$	$\cosh x + c$
$\mathbb{R}$	$\cosh x$	$\sinh x + c$
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{arcsinh} x + c$
$(1, \infty)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arccosh} x + c$
$[-1, 1]$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{arctanh} x + c$

**Beispiel**

$$F(x) = -\ln |\cos x| = -\frac{1}{2} \ln (\cos x)^2$$

und die Ableitung ist (nach Kettenregel):

$$F'(x) = -\frac{1}{2} \frac{1}{\cos(x)^2} (2 \cos x)(-\sin x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

**6.3 Partielle Integration**

Da das Integration die Umkehrung von differenzieren ist, liefert jede Ableitungsregel eine für das Integrieren.

Partielle Integration ist eine Umkehrung der Leibnizschen Produktregel und besagt für unbestimmte bzw. das bestimmte Integral:

$$\begin{aligned} (uv)' &= u'v + uv' \\ \Rightarrow \int uv' &= uv - \int u'v + c \end{aligned}$$

**Satz 6.21 (Partielle Integration)**

Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  zwei stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

und

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

**Beispiel 6.22**

1.  $\int \underbrace{x}_u \underbrace{e^x}_{v'} dx = xe^x - \int 1e^x dx = xe^x - e^x \begin{cases} f(x) = x & g'(x) = e^x \\ f'(x) = 1 & g(x) = e^x \end{cases}$
2.  $\int \underbrace{x^n}_u \underbrace{e^x}_{v'} dx = x^n e^x - \int nx^{n-1}e^x dx$

Durch Induktion über  $n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$  folgert man daraus das Resultat

$$\int x^n e^x dx = (-1)^n n! \sum_{k=0}^n \frac{(-x)^k}{k!} e^x + c$$

3. Partielle Integration eignet sich gut dazu, Logarithmische terme zu eliminieren.

Manchmal muss man dazu den Integranden erst künstlich als Produkt schreiben

$$\int \log x dx = \int \underbrace{(\log x)}_u \underbrace{(1)}_{v'} dx$$

## KAPITEL 6. INTEGRATION

$$= (\log x)x - \int \frac{1}{x} x dx = x \log x - x + c$$

4. Manchmal führt wiederholte partielle Integration auf den ursprünglichen Ausdruck zurück. Mit Glück kann man dann noch diesem auflösen

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x dx &= \int \underbrace{(\sin x)}_u \underbrace{(\sin x)}_{v'} dx \\ &= -\sin x \cos x + \int \cos^2 x dx \\ &= -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x) dx \\ &= -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x dx \\ \Rightarrow 2 \int \sin^2 x dx &= x - \sin x \cos x \\ \Rightarrow \int \sin^2 x dx &= \frac{1}{2} (x - \sin x \cos x) \end{aligned}$$

Andere Möglichkeit:

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x)$$

mit

$$\cos 2x = \left( \frac{\sin 2x}{2} \right)'$$

Dann:

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x &= \frac{1}{2} \int 1 - \cos 2x dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ x - \int \cos 2x dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ x - \frac{\sin 2x}{2} \right] + c \\ \sin 2x &= 2 \sin x \cos x \end{aligned}$$

### Beispiel 6.23

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{k+1} dx &= \int_0^{\pi/2} \underbrace{(\sin x)^k}_u \underbrace{(\sin x)}_{v'} dx \\ &= \underbrace{(\sin x)^k}_u \underbrace{(-\cos x)}_v \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \underbrace{k(\sin x)^{k-1}(\cos x)}_{u'} \underbrace{(-\cos x)}_v dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 0 + k \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{k-1} [1 - \sin^2 x] dx \\
&= k \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{k-1} - k \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{k+1} dx
\end{aligned}$$

Also:

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{k+1} dx = \frac{k}{(1+k)} \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{k-1} dx$$

Falls  $k+1 = 2n$ :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2n} dx &= \frac{2n-1}{2n} \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2(n-1)} dx \\
&= \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} 1 dx \\
&= \frac{(2n)(2n-1)(2n-2) \dots 1}{[(2n)(2n-2) \dots 2]^2} \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Analog:

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2n+1} dx = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$

Beachte: der  $\pi$ -Term kommt im Zweiten Fall nicht vor!

Dies benutzen wir wie folgt um ein "Formel" für  $\pi$  aufzustellen.

Für  $0 \leq x \leq \pi/2$ :

$$\begin{aligned}
(\sin x)^k - (\sin x)^{k+1} &= (\sin x)^k [1 - \sin x] \geq 0 \\
\Rightarrow (\sin x)^k &\geq (\sin x)^{k+1} \quad (k \geq 0, 0 \leq x \leq \pi/2)
\end{aligned}$$

Also:

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2n+1} dx \leq \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2n} dx \leq \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2n-1} dx$$

d.h.

$$\frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} \leq \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \leq \frac{(2^{n-1} (n-1)!)^2}{(2n-1)!}$$

Also:

$$\frac{(2^n n!)^4}{(2n+1)!} \cdot \frac{2}{(2n)!} \leq \pi \leq \frac{(2^n n!)^4}{(2n!)^2} \cdot \frac{2}{2n}$$

## KAPITEL 6. INTEGRATION

$$\frac{(2^n!)^4}{(2n+1)} \cdot \frac{2}{((2n)!)^2} \leq \pi \leq \frac{(2^n n!)^4}{(2n!)^2} \cdot \frac{2}{2n}$$

$$\Rightarrow \pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \frac{(2^n n!)^4}{(2n!)^2} \quad \text{Wallische Formel.}$$

### Beispiel 6.24 (Stirlingsche Formel)

Für  $n \geq 2$  sei  $\ln(n!) = \sum_{k=2}^n \ln(k)$ . Wir zeigen dass man kann  $\ln |k|$  sehr gut durch

$$\int_{k-1/2}^{k+1/2} \ln x dx \text{ approximieren.}$$

Da

$$x \ln x - x$$

Stammfunktion von  $\ln(x)$  ist, folgt

$$\int_{k-1/2}^{k+1/2} \ln x dx = x \ln x - x \Big|_{k-1/2}^{k+1/2}$$

Darin kommen also  $\ln(k + \frac{1}{2})$  sowie  $\ln(k - \frac{1}{2})$  vor. Wir benutzen nun Taylor:

Falls  $g(x) = \ln(x)$  sei

$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + \frac{g''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{g^{(3)}(\xi)}{3!}(x - x_0)^3$$

mit  $\xi$  zwischen  $x$  und  $x_0$ .

$$\text{Auf } \left. \begin{array}{l} x = k + \frac{1}{2} \\ x_0 = k \end{array} \right\} \text{ angewendet ergibt:}$$

$$\ln\left(k + \frac{1}{2}\right) = \ln k + \frac{1}{2k} - \frac{1}{8k^2} + t_k$$

wobei

$$t_k = \frac{2}{\xi^3} \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{24\xi^3}$$

$$|t_k| \leq \frac{1}{24k^3} \quad \xi \in \left[k, k + \frac{1}{2}\right]$$

Analog:

$$\ln\left(k - \frac{1}{2}\right) = \ln k - \frac{1}{2k} - \frac{1}{8k^2} + t'_k$$

$$|t'_k| \leq \frac{1}{24(k - \frac{1}{2})^3}$$

Also:

$$\begin{aligned}
\int_{k-1/2}^{k+1/2} x \ln x - x dx &= \left(k + \frac{1}{2}\right) \left(\ln k + \frac{1}{2k} - \frac{1}{8k^2} + t_k\right) - \left(k + \frac{1}{2}\right) \\
&\quad - \left[\left(k - \frac{1}{2}\right) \left(\ln k - \frac{1}{2k} - \frac{1}{8k^2} + t'_k\right) - \left(k - \frac{1}{2}\right)\right] \\
&= \ln k - \frac{1}{8k^2} + \left(k + \frac{1}{2}\right) t_k - \left(k - \frac{1}{2}\right) t'_k \\
&= \ln k + r_k \quad |r_k| \leq \frac{c}{k^2}
\end{aligned}$$

Nun folgt:

$$\begin{aligned}
\ln n! &= \sum_{k=2}^n \ln k \stackrel{(*)}{=} \sum_{k=2}^n \int_{k-1/2}^{k+1/2} \ln x dx - \sum_{k=2}^n r_k \quad \text{mit } (*) = \left( \int_{k-1/2}^{k+1/2} \ln x dx = \ln k + r_k \right) \\
&= \underbrace{\int_1^{n+1/2} \ln x dx}_{(*)} - \int_1^{3/2} \ln x dx - \sum_{k=2}^n r_k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(*) &= \int_1^{n+1/2} \ln x dx = x \ln x - x \Big|_1^{n+1/2} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(n + \frac{1}{2}\right) - \left(n + \frac{1}{2}\right) + 1 \\
&= \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(n + \frac{1}{2}\right) - n + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Ersetzen wir  $\ln \left(n + \frac{1}{2}\right) = \ln n + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + t_n$  so folgt:

$$\begin{aligned}
(*) &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + \left(n + \frac{1}{2}\right) \left\{ \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + t_n \right\} + \frac{1}{2} \\
&= \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + \frac{1}{2} - \frac{1}{8n^2} + nt_n + \frac{1}{4n} - \frac{1}{16n^2} + \frac{1}{2}t_n + \frac{1}{2} \\
&= \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + 1 + \frac{1}{8n} + nt_n - \frac{1}{16n^2} + \frac{1}{2}t_n
\end{aligned}$$

Also:

$$\ln(n!) = n \ln n + \frac{1}{2} \ln n - n + a_n$$

wobei

$$a_n = \frac{1}{4n} + \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{8n^2} + t_n\right) + \sum_{k=2}^n r_k - \int_1^{3/2} \ln x dx$$



## KAPITEL 6. INTEGRATION

und  $|r_k| \leq \frac{c}{k^2} \Rightarrow \sum_{k=2}^n r_k$  konvergiert.

Sei  $a := \lim a_n$ ,  $b = e^a$  und  $b_n = e^{a_n}$ . Also:

$$\log n! = \left(n + \frac{1}{2}\right) \log n - n + a_n = \log n^{n+\frac{1}{2}} - n + a_n$$

folgt

$$n! = n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{a_n} = \sqrt{n} n^n e^{-n} e^{a_n} \Rightarrow b_n = \frac{n!}{\sqrt{n} n^n e^{-n}}$$

Wir möchten jetzt  $b := e^a$  bestimmen:

$$\begin{aligned} b &= \lim b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n^2}{b_{2n}} = \lim \left( \frac{n!}{\sqrt{n} n^n e^{-n}} \right)^2 \left( \frac{\sqrt{2n} (2n)^{2n} e^{2n}}{(2n)!} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \sqrt{\frac{2}{n}} \frac{(2n)^{2n}}{n^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \sqrt{\frac{2}{n}} 2^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2^n n!)^n}{(2n)!} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \\ &= \sqrt{2\pi} \end{aligned}$$

Also  $b = \sqrt{2\pi}$  womit

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} \quad \text{Stirling's formel}$$

### Beispiel: Der Satz von Taylor

Die Taylor - Entwicklung einer Funktion  $f \in C^{n+1}$  um  $x_0$  erhält man durch  $n$ -fache partielle Integration:

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \int_{x_0}^x f'(t) dt = \int_{x_0}^x \underbrace{(x-t)^0}_{v'} \underbrace{f'(t)}_u dt \\ &= (x-x_0) f'(x_0) + \int_{x_0}^x \underbrace{(x-t)'}_{v'} \underbrace{f''(t)}_u dt \\ &= (x-x_0) f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2} f''(x_0) + \frac{1}{2} \int_{x_0}^x (x-t)^2 f'''(t) dt \\ &\quad \vdots \\ &= \sum_{k=1}^n (x-x_0)^k \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \end{aligned}$$

Aus Mittelwertsatz der Integralrechnung bekommt man die Lagrange Restgliedformel.

$$\frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) (x-x_0)^{n+1} \quad \text{für ein } \xi \in [x_0, x]$$

## 6.4 Methode der Substitution

Methode der Substitution ist eine Umkehrung der Kettenregel.

### Satz 6.25 (Substitutionsregel)

Sei

- $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig
- $g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  der Klasse  $C'$

Sowie  $t_0 \leq t_1$  in  $[\alpha, \beta]$  so dass  $g([t_0, t_1]) \subset [a, b]$ . Dann gilt

$$\int_{g(t_0)}^{g(t_1)} f(x) dx = \int_{t_0}^{t_1} f(g(t)) g'(t) dt$$

### Beweis

Sei  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Stammfunktion für  $f$ . Dann gilt (nach Hauptsatz B)

$$\int_{g(t_0)}^{g(t_1)} f(x) dx = F(g(t_1)) - F(g(t_0))$$

Nach der Kettenregel, haben wir

$$(F \circ g)'(t) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$$

d.h.  $F \circ g$  ist eine Stammfunktion für  $f(g(t))g'(t)$ . Woraus mit dem Hauptsatz B folgt

$$\int_{t_0}^{t_1} f(g(t))g'(t)dt = (F \circ g)(t_1) - (F \circ g)(t_0) = F(g(t_1)) - F(g(t_0))$$

$$= \int_{g(t_0)}^{g(t_1)} f(x) dx$$

### Korollar 6.26

$$\int f(x) dx = \int f(g(t))g'(t)dt + C$$

Dies Formel bedeutet folgenden: Die Linke Seite als Funktion von  $x$  ist gleich der rechten Seite als Funktion von  $t$  vermöge der Relation

$$x = g(t)$$

$$dx = g'(t)dt$$

## KAPITEL 6. INTEGRATION

Für die Substitutionsregel

$$\int_{t_0}^{t_1} f(g(t)) g'(t) dt = \int_{g(t_0)}^{g(t_1)} f(x) dx$$

gibt es im Prinzip zwei lesarten. Mann kann sie entweder von links nach rechts oder von rechts nach links anwenden:

1. (links  $\rightarrow$  rechts)

Liegt ein Integral explizit in der Form

$$\int_{t_0}^{t_1} f(g(t)) g'(t) dt \text{ vor,}$$

so können wir die Substitutionsregel von links nach rechts abwende

### Beispiel

(a)

$$\int_0^1 (1+t^2)^4 (2t) dt$$

Setzt man nämlich  $f(x) := x^4$  und  $g(t) := 1+t^2$ . So folgt:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1+t^2)^4 (2t) dt &= \int_0^1 f(g(t)) g'(t) dt \\ &= \int_{g(0)}^{g(1)} f(x) dx = \int_1^2 x^4 dx = \left[ \frac{1}{5} x^5 \right]_1^2 \\ &= \frac{32}{5} - \frac{1}{5} = \frac{31}{5} \end{aligned}$$

(b)

$$\int \sin^3 t \cos t dt$$

Die substitution  $x = \sin t$  mit  $\frac{dx}{dt} = \cos t \Rightarrow dx = \cos t dt$  liefert

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C = \frac{\sin^4 t}{4} + C$$

(c)

$$\int \tan t dt = \int \frac{\sin t}{\cos t} dt$$

Die Substitution  $x = \cos t$   $\frac{dx}{dt} = -\sin t$ ,  $dx = -\sin t dt$

$$\begin{aligned}\int \tan t dt &= - \int \frac{1}{\cos t} (-\sin t) dt = - \int \frac{1}{x} dx = -\log |x| + C \\ &= -\log |\cos t| + C\end{aligned}$$

2. (rechts  $\rightarrow$  links)

Ein Integral liegt der Gestalt  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$  mit gewissen Grenzen  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  vor, das schwer zu berechnen scheint, versucht man dann mittels geeigneter Substitution  $x = g(t)$ , dieses Integral umzuformulieren, so dass die Substitutionsregel anwendbar ist, wobei  $g(t_0) = \alpha$  und  $g(t_1) = \beta$  gelten muss.

### Beispiel 6.26

(a)

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

Also  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ . Mit der Substitution  $x = g(t) = \sin t, t \in [0, \pi/2], dx = \cos t dt$  ist dann  $g(0) = 0, g(\frac{\pi}{2}) = 1$  und

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_{g(0)}^{g(\pi/2)} f(x) dx = \int_0^{\pi/2} f(g(t)) g'(t) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt \stackrel{(*)}{=} \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} (1 + \cos 2t) dt \\ &= \frac{1}{2} \left( t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} (t + \sin t \cos t) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

mit

$$(*) \quad \cos^2(t) = \frac{1 + \cos 2t}{2}$$

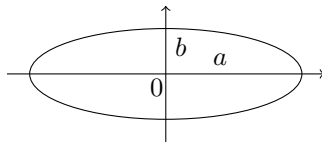
(b)

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x-3}} dx \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \sqrt{2x-3} \\ du = \frac{1}{2}(2x-3)^{-1/2} 2dx = \frac{dx}{\sqrt{2x-3}} \\ u^2 = 2x-3 \\ \frac{u^2+3}{2} = x \end{array} \right.$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x-3}} dx = \int \left( \frac{u^2+3}{2} \right) du = \frac{1}{2} \int (u^2+3) du$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{u^3}{3} + 3u \right) = \frac{u}{2} \left( \frac{u^2}{3} + 3 \right) = \frac{\sqrt{2x-3}}{2} \left[ \frac{2x-3}{3} + 3 \right] + C \\
 &= \sqrt{2x-3} \left( \frac{x}{3} + 1 \right) + C
 \end{aligned}$$

**Beispiel: Flächeninhalt einer Ellipse**



$$\begin{aligned}
 &\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1 \\
 &y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \text{ mit } x, y > 0
 \end{aligned}$$

$$F = 4 \int_0^a b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx$$

mit  $x = au$ ,  $dx = a du$

$$F = 4 \int_0^1 b \sqrt{1 - u^2} a du$$

$$= 4ab \int_0^1 \sqrt{1 - u^2} du$$

mit  $u = \sin t$ ,  $du = \cos t dt$

$$4ab \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt$$

$$= 4ab \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{4ab}{2} (t + \sin t \cos t) \Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \pi ab$$

## 6.5 Integration rationaler Funktionen (Partialbruchzerlegung)

Sei  $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  eine Rationale Funktion, d.h.  $P, Q$  sind polynome mit reellen Koeffizienten. Die Partialbruchzerlegung ist eine Darstellung von  $R(x)$  als summe von "elementaren" rationale Funktionen. Sie basiert auf einem Korollar des Fundamentales Satzes der Algebra, das sagt, dass jedes reelle Polynom ein Produkt von linearen und quadratischen Polynomen mit  $\mathbb{R}$  Koeffizienten.

**Satz 6.27**

Sei  $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  eine rationale Funktion. Dann

$$R(x) = P_1(x) + \sum_{i=1}^n R_i(x) + \sum_{j=1}^m S_j(x)$$

wobei  $P_1$  = Polynom

$$R_i(x) = \frac{a_{i1}}{(x-x_i)} + \frac{a_{i2}}{(x-x_i)^2} + \dots + \frac{a_{ir_i}}{(x-x_i)^{r_i}}$$

$$S_j(x) = \frac{b_{j1}x + d_{j1}}{\left((x-\alpha_j)^2 + \beta_j^2\right)} + \frac{b_{j2}x + d_{j2}}{\left((x-\alpha_j)^2 + \beta_j^2\right)^2} + \dots + \frac{b_{jm_j}x + d_{jm_j}}{\left((x-\alpha_j)^2 + \beta_j^2\right)^{m_j}}$$

Die  $\frac{1}{(x-a)}$ ,  $\frac{bx+d}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^m}$  werden "elementare rationale Funktionen" genannt und wir wollen dafür Stammfunktionen bestimmen.

**Bemerkung**

1. Das Polynom  $P_1(x)$  tritt nur auf, falls  $\deg P > \deg Q$ . In diesem Fall berechnet man  $P_1(x)$  mit Polynom division und es gilt  $p(x) = P_1(x) - Q(x) + P_2(x)$  mit  $\deg P_2 < \deg Q$
2. Das Nennerpolynom  $Q(x)$  besitze
  - Die reellen Nullstellen  $x_i$  mit Vielfachheit  $r_i$
  - Die Komplexe Nullstellen  $z_j = \alpha_j + i\beta_j$  mit Vielfachheit  $m_j$  und damit komplex konjugierte Nullstellen  $\bar{z}_j = \alpha_j - i\beta_j$
3. Unbekannte Parameter, die bestimmt werden müssen

$$\begin{array}{lll} a_{ik} & k = 1, \dots, r_i & i = 1, \dots, n \\ \beta_{jl}, \alpha_{jl} & l = 1, \dots, m_j & j = 1, \dots, m \end{array}$$

Diese Parameter werden durch Koeffizientenvergleich berechnet, die rechte Seite wird dabei auf den Hauptnenner gebracht.

**Beispiel**

$R(x) = \frac{1-x}{x^2(x^2+1)}$  Ansatz:

$$R(x) = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{b_1x + d_1}{x^2 + 1}$$

$$\Rightarrow 1 - x = x(x^2 + 1)a_1 + a_2(x^2 + 1) + x^2(b_1x + d_1)$$

Ausmultiplizieren:

$$1 - x = (a_1 + b_1)x^3 + (a_2 + d_1)x^2 + a_1x + a_2$$

Koeffizientenvergleich:

$$a_1 + b_1 = 0 \quad a_2 + d_1 = 0 \quad a_1 = -1 \quad a_2 = 1$$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1-x}{x^2(x^2+1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{x-1}{x^2+1}$$

### Grundtypen der Integration rationaler Funktionen

- Typ O: Polynom:

$$\int \sum a_n x^n dx = \sum a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

- Typ I: Inverse Potenzen

$$\int \frac{dx}{(x-x_0)^r} = \begin{cases} \log|x-x_0| + c & \text{für } r=1 \\ \frac{1}{(1-r)} \frac{1}{(x-x_0)^{r-1}} & \text{für } r \geq 2 \end{cases}$$

- Typ II:

$$\int \frac{bx+d}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^m} dx$$

Substitution:  $x - \alpha = \beta t$ ,  $dx = \beta dt$  ergibt

$$\int \frac{b[\beta t + \alpha] + d}{(t^2 + 1)^m \beta^{2m}} \beta dt$$

Dies hat die allgemeine Form

$$\begin{aligned} \int \frac{ct+b}{(t^2+1)^m} dt &= c \int \frac{t}{(t^2+1)^m} dt + \int \frac{b}{(t^2+1)^m} dt \\ \int \frac{t}{(t^2+1)^m} dt &\quad \text{mit } t^2+1 = u, 2t dt = du \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^m} = \begin{cases} \frac{u^{-m+1}}{2(1-m)} & , m \geq 2 \\ \frac{1}{2} \ln|u| & , m = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2(1-m)} \frac{1}{(t^2+1)} (1-m) & , m \geq 2 \\ \frac{1}{2} \ln|1+t^2| & , m = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Sei

$$I_m := \int \frac{dt}{(t^2+1)^m}$$

$$\text{Für } m=1: \quad I_1 = \int \frac{dt}{(t^2+1)} = \arctan t + C$$

$$\text{Für } m \geq 1: \quad I_m := \int \frac{dt}{(t^2+1)^m}$$

Partielle Integration ergibt:

$$\begin{aligned} I_m &:= \int \underbrace{1}_{v'} \cdot \underbrace{\frac{1}{(t^2+1)^m}}_u dt = \frac{t}{(t^2+1)^m} + \int \frac{t \cdot 2m \cdot t}{(t^2+1)^{m+1}} dt \\ &= \frac{t}{(t^2+1)^m} + 2m \int \frac{t^2+1-1}{(t^2+1)^{m+1}} dt \\ &= \frac{t}{(t^2+1)^m} + 2m \int \frac{1}{(t^2+1)^m} dt - 2m \int \frac{1}{(t^2+1)^{m+1}} dt \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I_m = \frac{t}{(t^2+1)^m} + 2m\{I_m - I_{m+1}\}$$

woraus

$$I_{m+1} = \frac{1}{2m} \left[ \frac{t}{(t^2+1)^m} + \left( \frac{2m-1}{2m} \right) I_m \right]$$

z.B.

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{t}{(t^2+1)} + \frac{1}{2} I_1 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{t}{(t^2+1)^2} + \frac{1}{2} \arctan t \right] + C \end{aligned}$$

### Beispiel 6.28

1.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2-3x-4} &= \frac{1}{(x-4)(x+1)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+1} \\ \Rightarrow A(x+1) + B(x-4) &= 1 \\ x=4 \Rightarrow A \cdot 5 &= 1 \Rightarrow A = \frac{1}{5} \\ x=-1 \Rightarrow B \cdot (-5) &= 1 \Rightarrow B = -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{x^2-3x-4} dx = \frac{1}{5} \int \left( \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{1}{5} \ln \left| \frac{x-4}{x+1} \right| + c$$

2.

$$\begin{aligned} \frac{9}{x^3-3x-2} &= \frac{9}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{(x+1)^2} \\ A(x+1)^2 + (Bx+C)(x-2) &= 9 \end{aligned}$$

$$x=-1 \Rightarrow (-B+C)(-3) = 9$$

$$x=2 \Rightarrow A(9) = 9 \Rightarrow A = 1$$

$$x=0 \Rightarrow A+C(-2) = 9 \Rightarrow -2C = 8 \Rightarrow C = -4$$

$$(-B+C) = -3 \Rightarrow B = C+3 = -1$$

$$\Rightarrow \frac{9}{x^3-3x-2} = \frac{1}{x-2} + \frac{-x-4}{(x+1)^2}$$

$$\int \frac{9}{x^3-3x-2} dx = \int \left( \frac{1}{x-2} + \frac{-x-1}{(x+1)^2} - \frac{3}{(x+1)^2} \right) dx$$

$$= \ln|x-2| - \ln|x+1| + \frac{3}{x+1} + c$$

$$= \ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right| + \frac{3}{x+1} + c$$



## 6.6 Das Uneigentliche Integral

Sei  $f$  eine unbeschränkte Funktion. Dann ist  $f$  nicht R. integrierbar, z.B.  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$  hat keinen Sinn. Aber  $\forall \varepsilon > 0$  ist  $\frac{1}{\sqrt{x}} \in [\varepsilon, 1]$  stetig also integrierbar. Der Wert des Integral ist

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \Big|_{\varepsilon}^1 = 2 - 2\sqrt{\varepsilon}$$

also existiert

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2$$

Dies ist ein Beispiel von uneigentlichen R. Integral.

### Definition 6.29

Sei  $f$  eine Funktion auf einem offenen Intervall  $(a, b)$ , deren Einschränkung auf jedes kompakte Teilintervall  $[a', b']$  integrierbar ist. Dann das uneigentliche Integral von  $f$  von  $a$  bis  $b$  definiert als

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{a' \searrow a} \lim_{b' \nearrow b} \int_{a'}^{b'} f(x) dx$$

falls diese Grenzwerte existieren ( $a$  und  $b$  können  $\pm\infty$  sein)

### Bemerkung 6.30

1. Ist  $f$  schon auf  $[a, b]$  definiert und integrierbar, so existiert das Uneigentliche Integral und stimmt mit dem üblichen bestimmten Integral überein.
2. Ist  $f$  schon  $[a, b)$  definiert und auf jedem kompakten Teilintervall der Form  $[a, b']$  integrierbar, so gilt schon

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{b' \nearrow b} \int_a^{b'} f(x) dx$$

### Beispiel

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( -e^{-x} \Big|_0^b \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} (-e^{-b} + 1) = 1$$

3. Vorsicht: Die beiden Grenzwerte müssen im allgemeinen unabhängig voneinander genommen werden.

**Beispiel**

$$\int_{-b}^b x dx = 0 \quad \forall b > 0, \text{ und daher}$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^b x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \frac{b^2}{2} - \frac{b^2}{2} \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} 0 = 0$$

Die einzelnen Grenzwerte von  $\int_a^b x dx$  für  $b \rightarrow \infty$  und  $a \rightarrow -\infty$  existieren dagegen nicht

$$\left( \int_a^b x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right)$$

und somit auch nicht das uneigentliche Integral  $\int_{-\infty}^{\infty} x dx$

4. Alle Grundeigenschaften und Integrationstechniken für das bestimmte Integral gelten ebenso für das uneigentliche Integral.

Als Beispiel beweisen wir folgendes nützliches Konvergenzkriterium für Reihen

**Satz 6.30**

Sei  $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$  monoton fallend. Dann konvergiert  $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$  genau dann wenn  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  existiert. In diesem Fall gilt:

$$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(k) - \int_1^{\infty} f(x) dx \leq f(1)$$

**Beweis**

$$f(1) + f(2) + \dots + f(n-1) \geq \int_1^n f(x) dx \geq f(2) + \dots + f(n)$$

## KAPITEL 6. INTEGRATION

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n f(k) - f(n) &= \sum_{k=1}^{n-1} f(x) \geq \int_1^n f(x) dx \geq \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) = \sum_{k=1}^n f(x) - f(1) \\ \sum_{k=1}^n f(k) - f(n) &\geq \int_1^n f(x) dx \geq \sum_{k=1}^n f(k) - f(1) \quad (*) \\ \Rightarrow 0 < f(n) &\leq \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx \leq f(1)\end{aligned}$$

Aus

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) \geq \int_1^n f(x) dx$$

folgt das,

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) < \infty \Rightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx < \infty$$

und, aus

$$\int_1^n f(x) dx \geq \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1)$$

folgt dass

$$\int_1^{\infty} f(x) dx < \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f(k) < \infty$$

Aus (\*) folgt:

$$0 < f(n) \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(k) - \int_1^{\infty} f(x) dx \leq f(1)$$

### Beispiel 6.31

1.  $\sum(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$  existiert für alle  $s > 1$

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{1}{x^s} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-s} dx = \lim \begin{cases} \log |b| & s = 1 \\ \frac{x^{-s+1}}{1-s} \Big|_1^b & s > 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \text{divergent falls } s = 1 \\ \text{konvergent gegen } \frac{1}{s-1} \end{cases}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}0 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} - \int_1^{\infty} f(x) dx \leq f(1) = 1 \\ \Rightarrow \frac{1}{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} &\leq 1 + \frac{1}{s-1} = \frac{s}{s-1}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |x| e^{-x^2} dx &= - \int_{-\infty}^0 x e^{-x^2} dx + \int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx \\ \int_0^b x e^{-x^2} dx &= \frac{1}{2} \int_0^{b^2} e^{-u} du \quad \text{mit } u = x^2, du = 2x dx \\ &= \frac{1}{2} (1 - e^{-b^2}) \rightarrow \frac{1}{2} \text{ für } b \rightarrow \infty\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| e^{-x^2} dx = 1$$

3. Wir haben die folgende einfache aber wichtige Beispiele

(a)

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^s} = \begin{cases} \frac{a^{1-s}}{s-1} & \text{für } s > 1 \\ \infty & \text{für } s \leq 1 \end{cases}$$

 (b) Für alle  $a < b$  und  $s \in \mathbb{R}$  gilt

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^s} = \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-s}}{1-s} & \text{für } s < 1 \\ \infty & \text{für } s \geq 1 \end{cases}$$

**Satz 6.32 (Majorantenkriterium)**

 a) Sei  $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann gilt

$$\forall x : |f(x)| < g(x)$$

 und  $\int_a^{\infty} g(x) dx$  konvergent  $\Rightarrow \int_a^{\infty} f(x) dx$  (absolut) konvergent.

 b) Weiterhin gilt folgende Umkehrung:  $\forall x : 0 \leq g(x) \leq f(x)$  und  $\int_a^{\infty} g(x)$ 

 divergent  $\Rightarrow \int_a^{\infty} f(x) dx$  divergent.

**Beispiel 6.33**

1.

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{t^2}{(1+6t^2)^{5/3}} dt &< \int_0^{\infty} \frac{t^2}{(6t^2)^{5/3}} dt < \int_0^{\infty} \frac{c}{t^{4/3}} dt < \infty \\ &\Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{t^2}{(1+6t^2)^{5/2}} dt \text{ konvergiert}\end{aligned}$$

## KAPITEL 6. INTEGRATION

2.

$$\int_0^{\infty} \frac{t^2}{(1+6t^2)^{3/2}} dt$$

$$\frac{t^2}{(1+6t^2)^{3/2}} > \frac{t^2}{(12t^2)^{3/2}} > \frac{c}{t} \quad t \geq 1$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{t^2}{(1+6t^2)^{5/2}} dt \text{ divergiert weil } \int_0^{\infty} \frac{c}{t} dt \text{ divergiert}$$

3. Exponentialintegral:

$$E_i(x) := \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt \text{ für } x < 0$$

Da  $\lim_{t \rightarrow -\infty} te^t = 0$ , gibt es  $c > 0$  mit  $|te^t| \leq c$ ,  $\forall t \in [-\infty, x]$ , und somit gilt

$$\left| \frac{e^t}{t} \right| = \left| \frac{te^t}{t^2} \right| \leq \frac{c}{t^2}$$

Mit der Konvergenz des Integrals  $\int_{-\infty}^x \frac{1}{t^2} dt$  folgt die (Absolut) Konvergenz des  $E_i(x)$  für alle  $x < 0$



## Kapitel 7

# Gewöhnliche Differenzialgleichungen

Eine Gleichung, in der Ableitungen einer gesuchte Funktionen auftreten, nennt man Differentialgleichung.

$$y'(t) = y + y^2$$

$$(y'(t))^2 = y(t) + 2$$

Hängt die gesuchte Funktion in der DGL nur von einer einzigen Variablen ab, so spricht man von einer “gewöhnliche DGL”.

Hängt hingegen die gesuchte Funktion von mehreren Variablen ab, d.h. kommen partielle Ableitungen in der Differentialgleichung vor, so liegt eine “Partielle DGL” vor. Viele physikalische Prozesse lassen sich oft durch Differentialgleichungen beschreiben.

### Beispiel

1. Ein lineares Federpendel wird durch folgende DGL beschrieben

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -Kx \quad \text{mit } K = \text{Federkonstante}$$



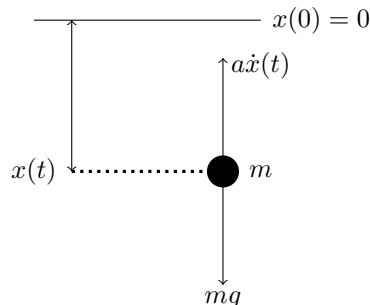
Unbekannt ist hier die Auslenkung  $x$  in Abhängigkeit von der Zeit  $t$

2. Beim radioaktiven Zerfall, haben wir

$$\frac{df(t)}{dt} = -\alpha f \quad f(0) = f_0$$

wobei  $f(t)$  = die noch vorhandene Masse eines Stoffes. Pro Zeiteinheit zerfallende Masse ist proportional zur noch vorhandenen Masse

### 3. Freier Fall mit Reibung



Sei  $m$  ein Massepunkt der unter Einfluss der Schwerkraft fällt. Es kann auch eine Reibungskraft geben.

Die Größe der Reibungskraft ist proportional zur Geschwindigkeit. Dann ist, nach dem zweiten Newtonschen Gesetz

$$m\ddot{x} = mg - a\dot{x} \quad v = \frac{dx}{dt}$$

Beim 2., haben wir schon letztes Semester gesehen dass

$$\frac{df(t)}{dt} = -\alpha f$$

als eine Lösung  $Ke^{-\alpha t}$ ,  $K \in \mathbb{R}$

$$f' = -\alpha f \Rightarrow \frac{f'}{f} = -\alpha$$

$$\int \frac{f'(t)}{f(t)} dt = - \int \alpha dt$$

$$\ln |f(t)| = -\alpha t + C$$

$$\Rightarrow f(t) = Ke^{-\alpha t} \text{ mit } K = e^{tC}$$

Alle 3 Beispiele sind lineare DGL mit konstanten Koeffizienten.

## 7.1 Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

### Definition 7.1

Eine lineare Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung hat die Gestalt

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

mit  $a_i(x), i = 0, \dots, n-1, b(x)$  Funktionen.



## KAPITEL 7. GEWÖHNLICHE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

ere is the end of the  
ition??

Ist das so genannte Störfunktion  $b(x)$  konstant gleich 0, so heisst die DGL homogen, andernfalls inhomogen. Im Falle  $a_i(x) = a_i$  Konstanten, heisst die LDG, LDG mit Konstanten Koeffizienten.

In diesem Abschnitt betrachten wir DGL mit konstanten Koeffizienten. Eine DGL ist genau dann linear wenn alle Potenzen der gesuchte Funktion und deren Ableitung(en) nur mit Potenz 1 vorkommen. z.B.:

- $(y')^2 + y^2 = 1$  ist nicht linear
- $y' = 2xy$  ist linear
- $y' = \sqrt{y} + 1$  ist nicht linear
- $y'' + 2y' + x = 0$  ist linear

Zum nächst betrachten wir Homogene LDG mit konstanten Koeffizienten. Sei

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0 = 0 \quad (\text{H})$$

wobei  $a_i \in \mathbb{R} \ i = 0, \dots, n-1$

### Definition 7.2

Das charakteristische Polynom der Gleichung (H) ist gegeben durch

$$p(t) := t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_0$$

### Lemma 7.3

Die Funktion  $y(x) = e^{\lambda x}$  ist genau dann Lösung von (H) falls  $p(\lambda) = 0$

### Beweis

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

$$y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$$

$$y^j(x) = \lambda^j e^{\lambda x}$$

Also mit

$$= y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_0 = (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0)e^x =$$

$$\Leftrightarrow \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0 = p(\lambda) = 0$$

### Satz 7.4

Sei  $p(\lambda) = \prod_{i=1}^l (\lambda - \lambda_i)^{m_i}$  mit  $\lambda_j \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda_i \neq \lambda_j (i \neq j)$ . Dann ist jede Lösung der zugehörigen HDGL darstellbar als Linearkombination der  $n$  linear unabhängigen Funktionen  $y_{ik}(x) = x^k e^{\lambda_i x}$ ,

Can't understand limits, page 81 bottom

**Bemerkung 7.5**

1. Falls die charakteristische Polynom  $n$  verschiedene reelle Nullstelle  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  besitzt, so bilden  $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$  eine Basis des Vektorraums der Lösungen, das heisst für jede Lösung  $y(x)$  gibt es  $c_1, c_2, \dots, c_n$  so dass

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x}$$

2. Sei  $\lambda$  eine  $k$ -fache reelle Nullstelle des charakteristischen polynoms. Dann sind

$$e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda x}$$

$k$  linear unabhängige Lösungen.

What ?? page 82 bottom

3. Sind  $\lambda = \alpha + i\beta, \bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ , ein Paar konjugiert komplexer  $k$ -fache nullstellen, so sind die Funktionen

$$\begin{array}{cc} e^{\alpha x} \cos(\beta x) & e^{\alpha x} \sin(\beta x) \\ \vdots & \vdots \\ x^{k-1} e^{\alpha x} \cos(\beta x) & x^{k-1} e^{\alpha x} \sin(\beta x) \end{array}$$

$2k$  linear unabhängige Lösungen der DGL

$$\left( e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x} \cos(\beta x) + i e^{\alpha x} \sin(\beta x) \right)$$

**Beispiel 7.6**

- 1.

$$y'' - y = 0$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 1 = 0 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

- 2.

$$y'' + y = 0$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 1 = (\lambda + i)(\lambda - i)$$

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

- 3.

$$y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0$$

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0 = (\lambda^2 + 1)^2 = (\lambda - i)^2 (\lambda + i)^2$$

is there subscript like  $y_1(x)$ ?? page 84 middle

Also,  $\cos x, \sin x, x \cos x, x \sin x$  sind Lösungen.

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 x \cos x + c_3 \sin x + c_4 x \sin x$$

4.

$$y^{(4)} - y = 0$$

$$p(\lambda) = t^4 - 1 = (t^2 - 1)(t^2 + 1) = (t + 1)(t - 1)(t + i)(t - i)$$

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \sin x + c_4 \cos x$$

5.

$$2y'' + 20y' + 48y = 0$$

$$p(\lambda) = 2\lambda^2 + 20\lambda + 48 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -4, -6$$

Die Lösung ist

$$y(x) = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{-6x}$$

## 7.2 Inhomogene DGL

Bisher haben wir nur Homogene Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten betrachtet. Sehr oft treten auch Zusatzterme in den Gleichung auf. Wir haben der Folgende Allgemeine Satz für die Lösungsstruktur linearer DGL

### Satz 7.7

Die allgemeine Lösung einer inhomogenen DGL

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = b(x)$$

ist die Summe einer "spezielle" Lösung der inhomogenen DGL und der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen DGL

$$\underbrace{y_A(x)}_{\text{Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL}} = \underbrace{y_S(x)}_{\text{Spezielle Lösung der inhomogenen DGL}} + \underbrace{y_{AH}(x)}_{\text{Allgemeine Lösung der Homogenen DGL}}$$

### Beispiel

$$y'' + y = \sin x$$

Um diese inhomogene DGL zu lösen, benötigen wir die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen DGL  $y'' + y = 0$

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow y_{AH}(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

Nun wird noch eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL  $y'' + y = \sin x$  benötigt. Wir verifizieren dass  $y(x) = -\frac{1}{2}x \cos x$  eine derartige Lösung ist

$$y'(x) = -\frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2}x \sin x$$

$$y''(x) = \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2}x \cos x = \sin x + \frac{1}{2}x \cos x$$

$$y''(x) + y(x) = \sin x + \frac{1}{2}x \cos x - \frac{1}{2}x \cos x = \sin x$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL ist damit

$$y(x) = \underbrace{-\frac{1}{2}x \cos x}_{\text{Spezielle Lösung der inhomogenen DGL}} + \underbrace{c_1 \sin x + c_2 \cos x}_{\text{Allgemeine Lösung der Homogenen DGL}}$$

## KAPITEL 7. GEWÖHNLICHE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

### Bemerkung

Man kann als Speziell Lösung der inhomogenes DGL auch

$$y(x) = -\frac{1}{2}x \cos x + 5 \sin x$$

wählen. Dann gilt auch hier  $y'' + y = \sin x$ . Die allgemeine Lösung der inhomogenes DGL

$$y(x) = \underbrace{-\frac{1}{2}x \cos x + 5 \sin x}_{\text{Spezielle Lösung inhomogenes DGL}} + \underbrace{k_1 \sin x + k_2 \cos x}_{\text{Allgemeine Lösung homogenes DGL}}$$

Sie unterscheidet sich nicht von der Lösung

$$y(x) = -\frac{1}{2}x \cos x + c_1 \sin x + c_2 \cos x$$
$$c_1 = 5 + k$$

### Frage:

Wie kann man eine spezielle Lösung finden?

### Antwort:

Zur Lösung der inhomogenes DGL kann man in vielen Fällen einen so genannte “Ansatz vom Typ der rechten Seite” wählen. Hier geht man davon aus, dass die Lösung die gleiche Gestalt wie die Störfunktion haben wird.

z.B.: ist die Störfunktion ein Polynom, so nimmt man an, dass die spezielle Lösung auch ein polynom sein wird. Ist die Störfunktion ein exponentialfunktion so nimmt man an, dass die Lösung auch ein exponentialfunktion sein wird.

### Beispiel 7.8

1. Wir betrachten die DGL

$$y'' + y' - 6y = 3e^{-4x}$$

Die Zugehörige homogenes DGL

$$y'' + y' - 6y = 0$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \quad \lambda_{1,2} = 2, -3$$

Die Allgemeine Lösung der Homogenes DGL ist

$$y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x}$$

Zur Lösung der inhomogenes DGL verwenden wir einen “Ansatz vom Typ der Rechten Seite”, gehen also davon aus, dass die spezielle Lösung der inhomogenes DGL die ähnliche Gestalt hat (als die Störfunktion)

$$y_s(x) = K e^{-4x}$$

## KAPITEL 7. GEWÖHNLICHE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

Für die Ableitungen des Ansatzes haben wir

$$y'_s(x) = -4Ke^{-4x}$$

$$y''_s(x) = 16Ke^{-4x}$$

Eingesetzt in die homogenes DGL ergibt sich

$$y'' + y' - 6y = 16Ke^{-4x} - 4Ke^{-4x} - 6Ke^{-4x} = 6Ke^{-4x} = 3e^{-4x}$$

Also  $6K = 3 \Rightarrow K = \frac{1}{2}$ . Damit ist  $y_s(x) = \frac{1}{2}e^{-4x}$  und die allgemeine Lösung der DGL

$$y(x) = \frac{1}{2}e^{-4x} + c_1e^{-3x} + c_2e^{2x} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

2.

$$y'' + y' - 6y = 50 \sin x$$

Wählen wir als "Ansatz vom Typ der rechten Seite"

$$y_s(x) = K_1 \sin x + K_2 \cos x$$

$$y'_s(x) = K_1 \cos x - K_2 \sin x$$

$$y''_s(x) = -K_1 \sin x - K_2 \cos x$$

$$\begin{aligned} y'' + y' - 6y &= -K_1 \sin x - K_2 \cos x + K_1 \cos x - K_2 \sin x + 6K_1 \sin x + 6K_2 \cos x \\ &= (-7K_1 - K_2) \sin x + (-7K_2 + K_1) \cos x \\ &= 50 \sin x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -7K_2 + K_1 = 0 \Rightarrow K_1 = 7K_2$$

$$-7K_1 - K_2 = 50 \Rightarrow -49K_2 - K_2 = 50$$

$$\Rightarrow K_2 = -1, K_1 = -7$$

$$y_s(x) = -7 \sin x - \cos x$$

Damit ist die allgemeine Lösung der inhomogenes DGL

$$y(x) = -7 \sin x - \cos x + c_1e^{-3x} + c_2e^{2x}$$

Ein problem ergibt sich, wenn als Störfunktion eine Lösung der homogenes DGL erscheint:

3.

$$y'' + y' - 6y = e^{2x}$$

"Der Ansatz vom Typ der rechten Seite"

$$y(x) = Ke^{2x}$$

führt nicht weiter da dieser Ansatz eingesetzt in homogenes DGL 0 ergeben muss und nicht  $e^{2x}$ . Wir führen nun der Ansatz

$$y(x) = Kxe^{2x}$$

## KAPITEL 7. GEWÖHNLICHE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

$$y'(x) = Ke^{2x} + 2Kxe^{2x}$$

$$y''(x) = 2Ke^{2x} + 2Ke^{2x} + 4Kxe^{2x}$$

$$\begin{aligned} y'' + y' - 6y &= 4Kxe^{2x} + 4Kxe^{2x} + Ke^{2x} + 2Kxe^{2x} - 6Kxe^{2x} \\ &= 5Ke^{2x} = 10e^{2x} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow K = 2$$

Der Ansatz führte also auf die Lösung

$$y_s(x) = 2xe^{2x}$$

Ingesamt:

$$y(x) = 2xe^{2x} + c_1e^{-3x} + c_2e^{2x} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

3.

$$y'' + y = \sin x$$

$$y_H = c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

Für die Spezielle Lösung zu finden, wählen wir den Ansatz vom Typ der rechten Seite

$$y_s(x) = x(K_1 \sin x + K_2 \cos x)$$

$$y'_s(x) = (K_1 \sin x + K_2 \cos x) + x(K_1 \cos x - K_2 \sin x)$$

$$y''_s(x) = K_1 \cos x - K_2 \sin x + K_1 \cos x - K_2 \sin x + x(-K_1 \sin x - K_2 \cos x)$$

Eingesetzt in die DGL ergibt sich

$$y''_s(x) + y_s(x) = 2K_1 \cos x - 2K_2 \sin x - x(K_1 \sin x + K_2 \cos x) + x(K_1 \sin x + K_2 \cos x)$$

$$= 2K_1 \cos x - 2K_2 \sin x = \sin x$$

$$\Rightarrow 2K_1 = 0, -2K_2 = 1 \Rightarrow K_1 = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y_s(x) = -\frac{1}{2}x \cos x$$

$$y_A = -\frac{1}{2}x \cos x + c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

Zur Lösung der Inhomogenen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, kann man einen “Ansatz vom Typ der rechten Seite” wählen. Die Idee ist dass die Lösungsfunktion und Störfunktion ähnlich sind.

## KAPITEL 7. GEWÖHNLICHE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

Störfunktion	Ansatz für Lösung $y_s(x)$
$P_n(x)$	$Q_n(x) = a_n x^n + \dots + a_0$
$K e^{ax}$	$K e^{ax}$
$A \sin bx$ $A \cos bx$	$K_1 \sin bx + K_2 \cos bx$
$A e^{\alpha x} \sin \beta x$ $B e^{\alpha x} \cos \beta x$	$K_1 e^{\alpha x} \sin \beta x + K_2 e^{\alpha x} \cos \beta x$
$P_n(x) e^{\alpha x} \sin \beta x$	$e^{\alpha x} [R_n(x) \sin \beta x + S_n(x) \cos \beta x]$

wobei  $P_n, Q_n, S_n, R_n$  Polynome von Grad  $n$  sind.

### Bemerkung 7.9

1. Liegt eine Linearkombination der Störfunktion vor, so hat man auch als Ansatz eine entsprechende Linearkombination zu wählen. Dies ist Superprinzip

Where is the end of this list??

### Beispiel

Die DGL  $y'' + y' - 6y = 50 \sin x$  hat die spezielle Lösung

$$y_s(x) = -7 \sin x - \cos x$$

und die DGL  $y'' + y' - 6y = 10e^{2x}$  hat die spezielle Lösung

$$y_s(x) = 2xe^{2x}$$

Die DGL  $y'' + y' - 6y = 50 \sin x + 10e^{2x}$  hat die spezielle Lösung

$$y_s(x) = -7 \sin x - \cos x + 2xe^{2x}$$

Die allgemeine Lösung

$$y(x) = -7 \sin x - \cos x + 2xe^{2x} + c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x}$$

### Superpositionsprinzip

Ist  $y_1(x)$  eine spezielle Lösung der L. Differentialgleichung

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_0(x)y = b_1(x)$$

und  $y_2(x)$  eine spezielle Lösung der LDGL

$$y^n(x) + \dots + a_0(x)y = b_2(x)$$

Does this have to be in the enumerated list or outside??

## KAPITEL 7. GEWÖHNLICHE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

dann ist  $y_1(x) + y_2(x)$  eine Spezielle Lösung der DGL

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0(x)y = b_1(x) + b_2(x)$$

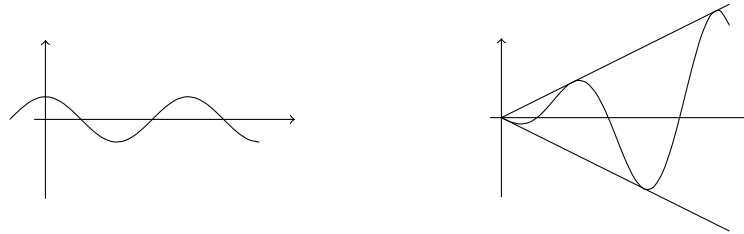
2. Falls  $\lambda = \alpha + i\beta$  ( $\beta$  kann null sein) eine  $m$ -fache Nullstelle der charakteristischen Polynoms von (Resonanzfall)

$$(H) \quad y^n(x) + a_n y^{(n-1)} + \cdots + a_0 = 0$$

so muss man den Ansatz für  $y_s(x)$  mit dem Faktor  $x^m$  multiplizieren.

### Beispiel

$y'' + y = \sin x$  hat die spezielle Lösung  $y_s = -\frac{1}{2}x \cos x$



Inhomogene mit  $b(x) = -\frac{1}{2}x \cos x$

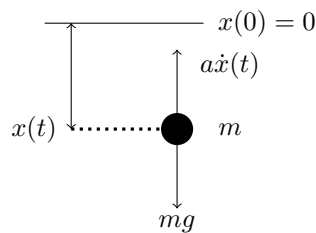
### Zusatzbedingungen einer DGL. Anfangs und Randbedingungen

Die in der allgemeinen Lösung einer DGL  $n$ -ter Ordnung auftretenden Parameter lassen sich durch Zusatzbedingungen festlegen. Physikalische sinnvolle Zusatzbedingungen werden meist in der Form von Anfangsbedingungen oder Randbedingungen vorgegeben.

Durch Vorgabe von derartigen Bedingungen eliminiert man die Parameter aus der allgemeinen Lösung der DGL und erhält damit eine partikuläre Lösung.

### Beispiel 7.10

Freifall mit Reibung





## KAPITEL 7. GEWÖHNLICHE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

$m\ddot{x} = mg - a\dot{x}$ . Anfangsbedingungen:  $x(0) = 0; v(0) = \dot{x}(0) = 0$

$$mx''(t) + ax'(t) = mg$$

$$(H) \quad mx''(t) + ax'(t) = 0$$

$$p(\lambda) = m\lambda^2 + a\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0, \lambda = -\frac{a}{m}$$

$$x_h(t) = c_1 + c_2 e^{-\frac{a}{m}t}$$

Für die spezielle Lösung, wählen wir als Ansatz  $x_s(t) = kt$

$$\left( \begin{array}{l} b(t) = mg = \text{konstant, aber } e^{0 \cdot t} = 1 = \text{konstant} \\ \text{ist eine Lösung der (H)} \end{array} \right)$$

$$x'(t) = k \quad x''(t) = 0$$

$$mx''(t) + ax'(t) = ak = mg \Rightarrow k = \frac{mg}{a}$$

Allgemeine Lösung

$$x(t) = x_h(t) + x_s(t) = c_1 + c_2 e^{-\frac{a}{m}t} + \frac{mg}{a}t$$

Anfangsbedingungen

$$x(0) = 0 = c_1 + c_2 = 0$$

$$x'(t) = c_2 \left(-\frac{a}{m}\right) e^{-\frac{a}{m}t} + \frac{mg}{a} = 0$$

$$x'(0) = 0 \Rightarrow c_2 \left(-\frac{a}{m}\right) + \frac{mg}{a} = 0$$

$$c_2 = \frac{m^2g}{a^2} \quad c_1 = -\frac{m^2g}{a^2}$$

$$\Rightarrow x(t) = -\frac{m^2g}{a^2} + \frac{m^2g}{a^2} e^{-\frac{a}{m}t} + \frac{mg}{a}t$$

$$x(t) = \frac{mg}{a}t - \frac{m^2g}{a^2} [1 - e^{-\frac{a}{m}t}]$$

Eine partikuläre Lösung einer DGL  $n$ -ter Ordnung

$$y'(n) + a_n x^{n-1} + \dots + a_0 = b(x)$$

kann man aus der allgemeine Lösung

$$y(x) = y(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$$

der DGL erhalten

- Durch die Vorgabe von Anfangsbedingungen

$$y(x_0) = A_0$$

$$y'(x_0) = A_1$$

$$y^{(n-1)}(x_0) = A_n$$

(Funktionswert und weitere Ableitungen bis zur  $(n-1)$ -ten an einer speziellen stelle  $x_0$ .

do y and x have anything on top?? page 101 top

## KAPITEL 7. GEWÖHNLICHE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

- Durch die Vorgabe von Randbedingungen

$$y(x_1) = B_1, y(x_2) = B_2, \dots, y(x_n) = B_n$$

Funktionswerte an  $n$  verschiedene Stellen

### Beispiel 7.11

Lineares Federpendel:

$$mx''(t) + K_1 x = 0, \omega^2 = \frac{K}{m}$$

$$x''(t) + \omega^2 x = 0 \quad (H)$$

$$p(\lambda) : \lambda^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm \omega i$$

Homogene Lösung:  $x_h(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$  Wenn wir den folgenden Zusatzbedingungen haben

(i)  $x(0) = 1, x'(0) = 2\omega$

$$x'(t) = -c_1 \omega \sin \omega t + c_2 \omega \cos \omega t$$

$$x(0) = 1 \Rightarrow c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = c_1 = 1$$

$$x'(0) = 2\omega \Rightarrow -c_1 \omega \sin 0 + c_2 \omega \cos 0 = 2\omega$$

$$\Rightarrow \omega c_2 = 2\omega \Rightarrow c_2 = 2$$

$$\Rightarrow x_p(t) = \cos \omega t + 2 \sin \omega t$$

(ii) Mit Randbedingungen:  $x(0) = 1, x\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) = 1$

$$x(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = c_1 = 1$$

$$x\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) = c_1 \cos \frac{\pi}{2} + c_2 \sin \frac{\pi}{2} = c_2 = 1$$

$$\text{Also } x_p(t) = \cos \omega t + \sin \omega t$$

## 7.3 Lineare DGL erster Ordnung (mit allgemeinen Koeffizienten)

Die LDGL hat allgemeine Form

$$y'(x) = a(x)y + b(x)$$

$b(x)$  - inhomogener Term.

Und  $y'(x) = a(x)y$  ist die zugehörige homogene Gleichung. Lösung von  $y'(x) = a(x)y$ :

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = a(x)$$

d.h.  $(\ln y(x))' = a(x)$ . Sei  $A(x)$  eine Stammfunktion von  $a(x)$ , so ist

$$\ln y(x) = A(x) + c$$

$$\text{Also } y(x) = e^{A(x)} \cdot e^c = K e^{A(x)}$$

## KAPITEL 7. GEWÖHNLICHE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

### Satz 7.12

Die allgemeine Lösung von  $y' = ay$  ist  $y(x) = Ke^{A(x)}$  wobei  $K \in \mathbb{R}$  und  $A'(x) = a(x)$

### Beispiel

$$xy' - 2y = 0$$

$$y' = \frac{2}{x}y \Rightarrow a(x) = \frac{2}{x}, A(x) = 2 \ln |x| = \ln x^2$$

$$e^{A(x)} = e^{\ln x^2} = x^2$$

$$\Rightarrow \text{Lösung von } y'(x) = \frac{2}{x}y \Rightarrow y(x) = Kx^2$$

Jetzt suchen wir eine spezielle Lösung von  $y' = a(x)y + b(x)$

### Ansatz

$y = uv$  wobei  $u, v$  Funktionen sind. Dann ist

$$y' = u'v + uv'$$

und

$$a(x)y + b(x) = u'v + uv'$$

$$a(uv) + b = u'v + uv'$$

$$\Rightarrow u'v + u[v' - av] = b$$

Jetzt wählen wir  $v$  so dass

$$v' - av = 0$$

d.h.  $v = e^{A(x)}$ . Dann ist  $u'v = b$  d.h.  $u' = be^{-A(x)}$  d.h.  $u$  ist eine Stammfunktion von  $be^{-A(x)}$

### Satz 7.13

Seien  $A(x)$  eine Stammfunktion von  $a(x)$  und  $U(x)$  eine Stammfunktion von  $be^{-A(x)}$ . Dann ist  $y(x) = e^{A(x)} \cdot U$  Lösung von  $y' = a(x)y + b(x)$

### Korollar 7.14

Die Allgemeine Lösung von LDGL  $y' = ay + b$  ist durch  $y(x) = e^{A(x)} \int b(x)e^{-A(x)} dx + Ke^{A(x)}$  gegeben wobei  $K \in \mathbb{R}$ ,  $A(x)$  eine Stammfunktion von  $a(x)$

**Beispiel 7.15**

1.

$$xy' - 2y = 2x^4$$

$$\Rightarrow y' = \underbrace{\frac{2}{x}}_{a(x)} y + \underbrace{2x^3}_{b(x)}$$

$$A(x) = 2 \ln |x| = \ln x^2$$

$Ke^{A(x)} = Kx^2$  ist die Lösung von homogene DGL  $y' = ay$

Wir bestimmen jetzt die Stammfunktion von

$$b(x) = e^{-A(x)} = 2x^3 e^{-\ln|x|}$$

$$2 \frac{x^3}{x^2} = 2x$$

Also ein Stammfunktion:  $\int 2x dx = x^2$  und  $x^2 e^{A(x)} = x^4$ . Somit ist die Allgemeine Lösung

$$y(x) = x^4 + Kx^2$$

2.

$$y' = 4x + 5y - 3$$

$$y' - \underbrace{5}_a y = \underbrace{4x - 3}_b$$

LDGL mit konstanten Koeffizienten. Störfunktion  $4x - 3$ . Homog:

$$y' - 5y = 0$$

$$\frac{y'}{y} = 5$$

$$\ln y(x) = 5x + c$$

$$y_h(x) = Ke^{5x} \text{ Hom. Lösung}$$

$$A(x) = 5x$$

Spez. Lösung: Sei  $U(x)$  Stammfunktion von  $(4x - 3)e^{-5x}$ . Dann ist die spezielle Lösung

$$e^{5x}U(x) = e^{5x} \int (4x - 3)e^{-5x} dx$$

$$\int \underbrace{(4x - 3)}_u \underbrace{e^{-5x}}_{v'} dx$$

$$\stackrel{P.I.}{=} (4x - 3) \frac{e^{-5x}}{-5} + \frac{4}{5} \int e^{-5x} dx$$

$$= \left[ \left( \frac{4x - 3}{-5} \right) - \frac{4}{25} \right] e^{-5x}$$

$$= \left( \frac{-4x}{-5} + \frac{11}{25} \right) e^{-5x}$$

$$\Rightarrow \text{Spezielle Lösung: } y_s(x) = e^{5x} \cdot U(x) = \frac{-4x}{5} + \frac{11}{25}$$

Allgemeine Lösung:

$$y(x) = K e^{5x} - \frac{4x}{5} + \frac{11}{25}$$

## 7.4 Separierbare DGL

### Definition 7.16

Eine separierbare DGL ist eine der Form

$$y' = f(x)g(y)$$

Ein einfaches Verfahren, so genannte “separation der Variablen” lässt sich anwenden, wenn die DGL separierbar ist. Der “trick”: Wir trennen die Terme voneinander und dann integrieren. Dabei ist es hilfreich  $y' = \frac{dy}{dx}$  zu schreiben und formel  $dy$  bzw.  $dx$  als Zähler bzw. Nenner des Bruches aufzufassen

### Beispiel 7.17

1.

$$y' = 2xy$$

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2x dx$$

↓

trennen formel  $x$  bzw  $y$  - Terme

Jetzt Integrieren wir auf beiden Seiten

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x dx$$

$$\ln |y| = x^2 + c$$

Da wir an der Lösung  $y$  interessiert sind und nicht am Logarithmus davon, wenden wir die Exponentialfunktion an

$$|y| = e^{x^2+c} = e^c e^{x^2}$$

Links und rechts stehen nur Grösse. Wenn wir aber auf der Rechten Seite nicht nur positive konstante  $e^c > 0$  zulassen, sondern irgendwelche Konstanten  $K \in \mathbb{R}$  so erhalten wir

$$y(x) = K e^{x^2}$$

can't understand, page 110 middle

2.

$y' = 1 + y^2$  ist separierbar

$$\int \frac{dy}{1 + y^2} = \int dx$$

$$\Rightarrow \arctan y = x + c \Leftrightarrow y = \tan(x + c)$$

**Bemerkung 7.18**

$y' = f(x)g(x)$  hat die Konstante Lösungen  $y = y_0$  für alle  $y_0$  mit  $g(y_0) = 0$ . Der fall  $g(y) = 0$  muss gesondert betrachten werden.

3.

$$|x|, |y| < 1, y' = \sqrt{\frac{1 - y^2}{1 - x^2}}$$

hat keine Konstante Lösungen

$$\frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\Rightarrow \arcsin y = \arcsin x + c$$

$$y = \sin[\arcsin x + c]$$

$$= x \cos c \pm \sqrt{1 - x^2} \sin c$$

$$= ax + b\sqrt{1 - x^2}$$

wobei  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a^2 + b^2 = 1$ . Rückeinsetzen in die DGL liefert die Zusatzbedingung

$$y' = a - \frac{bx}{\sqrt{1 - x^2}} > 0, \quad (1 + y^2 > 0)$$

# Kapitel 8

## Differentialrechnung in $\mathbb{R}^n$

### 8.1 Partielle Ableitungen und Differential

Wie kann man die Begriffe der Differentialrechnung auf Funktionen  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  erweitern?

Missing content?? page 113 top

Funktion in mehreren Variablen sind ein bisschen komplizierter als Funktionen in einer Variable.

#### Beispiel

1.  $f(x) = x^2 + 5$  ist in Ursprung stetig da  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ . Aber  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ist im Ursprung nicht stetig.

Where is number 2 of the Beispiel??

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = 0}} \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2} = 0 = f(0, 0)$$

$$\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ x = 0}} \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2} = 0 = f(0, 0)$$

is this continuation of the Beispiel, or is it outside??

Aber der Limes entlang der Gerade  $y = mx$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = mx}} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2}{(1 + m^2)x^2} = \frac{m}{1 + m^2}$$

$\downarrow$   
Hängt von  $m$  ab

und  $\frac{m}{1+m^2} \neq 0$ , falls  $m \neq 0$ . Eine Funktion  $f(x, y)$  an der Stelle  $(x_0, y_0)$  ist stetig wenn der Limes  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$  in jeder Richtung den gleichen Wert haben.

### Definition 8.1

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \Omega$

1.  $f$  hat den Grenzwert  $c \in \mathbb{R}$ , d.h.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$$

weil es zu jeder (beliebig kleinen) Schranke  $\varepsilon > 0$ , eine  $\delta$ -Umgebung

$$B_\delta(a) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - a| < \delta\}$$

gibt, so dass  $|f(x) - c| < \varepsilon$  für alle  $x \in \Omega \cap B_\delta(a)$ ,  $x \neq a$  gilt

2.  $f$  heißt in  $a \in \Omega$  stetig, wenn  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  gilt.
3.  $f$  heißt in  $\Omega$  stetig, wenn  $f$  in allen  $a \in \Omega$  stetig ist.

Die Summe, das Produkt, der Quotient (Nenner ungleich Null) stetiger Funktionen sind stetig.

$f$  besitzt keinen Grenzwert in  $x_0$  wenn sich bei Annäherungen an  $x_0$  auf verschiedenen Kurven (z.B. Geraden) verschiedene oder keine Grenzwerte ergeben.

### Sandwichlemma

Sei  $f, g, h$  Funktionen wobei  $g < f < h$ . Wenn  $\lim_{x \rightarrow a} g = L = \lim_{x \rightarrow a} h$  gilt, dann ergibt  $\lim_{x \rightarrow a} f = L$ .

Da  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |y| = 0$  gilt,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 \Rightarrow f$  ist in  $(0,0)$  stetig.

### Oder

Für Grenzwertbestimmungen (also auch für Stetigkeitsuntersuchungen) ist es oft nützlich, die Funktionen mittels Polarkoordinaten umzuschreiben. Vor allem bei rationalen Funktionen.

Hierbei gilt  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , wobei  $r$  = Länge des Vektors  $(x, y)$  und  $\varphi$  der Winkel. Nun lassen wir die Länge  $r$  gegen 0 gehen.

### Beispiel

1. Die Funktionen

- $f(x, y) = x^2 + y^2$
- $f(x, y, z) = x^3 + \frac{x^2}{y^2 + 1} + z$



## KAPITEL 8. DIFFERENTIALRECHNUNG IN $\mathbb{R}^N$

- $f(x, y) = 4x^2y^3 + 3xy$
- $f(x, y) = \cos xy$

sind stetig, da sie aus Steigen Funktionen zusammengesetzt.

2.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Für  $(x, y) \neq (0, 0)$  ist  $f$  als Quotient von stetigen Funktionen stetig. Es verbleibt  $f$  im Punkt  $(0, 0)$  zu untersuchen. Da

$$\left| \frac{x^2}{x^2+y^2} \right| \leq 1$$

$$0 < |f(x, y)| < |y|$$

$$f(x, y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \frac{(r^2 \cos^2 \theta)(r \sin \theta)}{r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = r \cos^2 \theta \sin \theta$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(r, \theta) = \lim_{r \rightarrow 0} r \cos^2 \theta \sin \theta = 0$$

3. Wir können nochmals die Stetigkeit der Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

mittels Polarkoordinaten untersuchen

$$f(x, y) = \frac{r^2 \cos \theta \sin \theta}{r^2} = \cos \theta \sin \theta$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(x, y) = \cos \theta \sin \theta$$

hängt von  $\theta$  ab.

$\Rightarrow f$  in  $(0, 0)$  nicht stetig

### Bemerkung

Eine trickreiche Variante Grenzwerte zu berechnen, ergibt sich durch substitution, d.h. man berechnet den Grenzwert

is this supposed to be inside the list or out??

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(g(x, y))$$

indem man zunächst  $t = g(x, y)$  setzt und den Grenzwert

$$t_0 = \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} g(x, y)$$

bestimmt. Dann ist

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(g(x, y)) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t)$$

**Beispiel**

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (4,0)} \frac{\sin xy}{xy}$$

Hier ist  $g(x, y) = xy$ ,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (4,0)} g(x, y) = 0$ . Somit

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (4,0)} \frac{\sin xy}{xy} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

Wir werden auch sehen dass die Existenz der Ableitungen in einigen Richtungen ungenügend für die Differenzierbarkeit der Funktion ist.

**Was bedeutet die Ableitung in einiger Richtung?**

**Beispiel**

Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto (x^2 + xy) \cos(xy)$$

Man kann für jedes  $y$ , die Funktion

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (x^2 + xy) (\cos xy)$$

als Funktion einer Variablen  $x$  auffassen und die Ableitung davon berechnen. Das Resultat mit  $\frac{\partial f}{\partial x}$  bezeichnet, ist die erste partielle Ableitung von  $f$  nach  $x$ . In diesem Fall ist es durch

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (2x + y)(\cos xy) - (x^2 + xy)y \sin(xy)$$

gegeben.

Analog definiert man  $\frac{\partial f}{\partial y}$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x(\cos xy) - (x^2 + xy)x \sin(xy)$$

Die allgemeine Definition nimmt folgende Gestalt an. Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . In Zukunft bezeichnen wir die  $i$ -te Koordinate eines Vektors  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $x^i$ ; also ist  $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ .

Sei  $e_i := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  der  $i$ -te Basisvektor von  $\mathbb{R}^n$

**Definition 8.2**

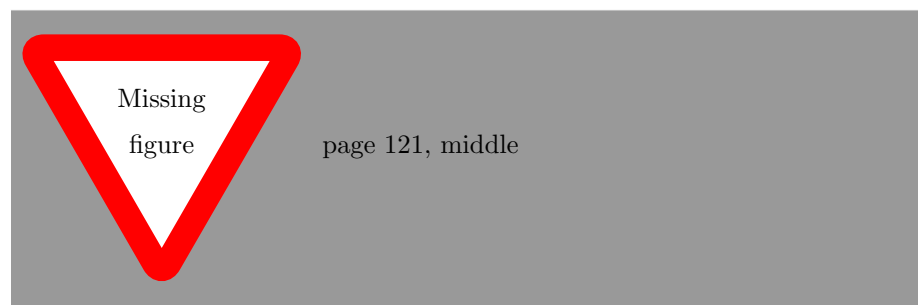
Die Funktion  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  heißt an der Stelle  $x_0 \in \Omega$  in Richtung  $e_i$  (oder nach  $x^i$ ) partiell differenzierbar falls der Limes

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) = f_{x^i}(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + he_i) - f(x_0)}{h} \\ h \neq 0$$

$$= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^i + h, x_0^{i+1}, \dots, x_0^n) - f(x_0^1, \dots, x_0^n)}{h}$$

existiert

**Bemerkung 8.3**



Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x_0^1, x_0^2) \in \mathbb{R}^2$ . Wir betrachten die scharen von  $f$

$$f(\cdot, x_0^2) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

und

$$f(x_0^1, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}$  sind die Ansteig der Tangente zur entsprechende schrittkurven

**Beispiel**

1.  $f(x, y, z) = \cos yz + \sin xy$

- $\frac{\partial f}{\partial x} = y \cos xy$
- $\frac{\partial f}{\partial y} = -\sin(yz) \cdot z + \cos(xy) \cdot x$
- $\frac{\partial f}{\partial z} = -\sin(yz) \cdot y$

2.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^3 \cdot 0}{h^2 + 0} - 0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h \cdot 0^3}{0 + h^2} - 0}{h} = 0$$

**Bemerkung**

Für Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  einer variable impliziert die differenzierbarkeit in  $x_0$ , die Stetigkeit in  $x_0$  und zudem eine gute Approximation von  $f$  durch eine affine Funktion in einer Umgebung von  $x_0$ . Folgendes Beispiel zeigt, dass in  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ) Partielle Differenzierbarkeit keine analoges Approximationseigenschaften oder stetigkeit impliziert:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Für alle  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  ist  $f$  in beiden Richtungen partiel differenzierbar:

- Für  $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{y(x^2 + y^2) - 2x^2y}{(x^2 + y^2)^2} \Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} = \frac{y_0^3 - x_0^2y_0}{(x_0^2 + y_0^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{x(x^2 + y^2) - 2xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} = \frac{x^2 - xy^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

- Für  $(x_0, y_0) = (0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overbrace{f(0+h, 0) - f(0, 0)}^{f(x_0+he_1) - f(x_0)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overbrace{f(0, 0+h) - f(0, 0)}^{f(x_0+he_2) - f(x_0)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

Im Ursprung besitzt  $f$  beide partielle Ableitungen, sie ist aber nicht stetig. Der Grund ist, dass die partielle Ableitungen nur partielle Informationen geben. Wir müssen die Differenzierbarkeit irgend eine andere weise verallgemeinern.

Die Lösung dieses Problem ist, dass man eine Approximations-Eigenschaft durch eine Lineare Abbildung postuliert.

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $x_0$ ;  $f'(x_0)$  existiert. In diesem Fall kann  $f$  für alle  $x$  nahe  $x_0$  durch die Funktion  $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  gut approximiert werden. Dass heisst dass

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x, x_0) \quad \text{mit} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x, x_0)}{x - x_0} = 0$$

**Bemerkung**

$f'(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}'$  sollt als lineare Abbildung interpretiert werden

## Lineare Abbildungen

Eine Abbildung  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ist linear falls für alle  $x, y \in \mathbb{R}^n$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$$

Eine solche Abbildung ist durch ihre Werte

$$A(e_i) := A_1, A(e_2) := A_2, \dots, A(e_n) := A_n$$

auf der Standardbasis  $e_1, \dots, e_n$  eindeutig bestimmt. Aus  $x = \sum_{i=1}^n x^i e_i$  und Linearität folgt nämlich

$$(*) \quad A(x) = \sum_{i=1}^n x^i A(e_i) = \sum_{i=1}^n A_i x^i$$

Umgekehrt bestimmt ein Vektor  $(A_1, \dots, A_n)$  vermöge der Formel  $(*)$  eine Lineare Abbildung.

Schreiben wir  $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$  für einen Vektor  $x = (x^1)_{1 \leq i \leq n}$  und

$A = (A_1, \dots, A_n)$  für die Darstellung einer Lineare Abbildung  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  bezüglich der Standard Basis  $\{e_1, \dots, e_n\}$  so ist

$$A(x) = (A_1, \dots, A_n) \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \sum A_i x^i$$

### Definition 8.4

Die Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heisst an der Stelle  $x_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$  differenzierbar falls eine lineare Abbildung  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  gibt so dass

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + R(x_0, x)$$

wobei  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x, x_0)}{|x - x_0|} = 0$

In diesem Fall heisst  $A$  der Differential an der Stelle  $x_0$  und wird mit  $df_{x_0}$  bezeichnet, d.h.  $f$  ist total differenzierbar in  $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$  falls reelle Zahlen  $A_1, \dots, A_n$  existieren so dass gilt

$$f(x) = f(x_0) + A_1(x^1 - x_0^1) + A_2(x^2 - x_0^2) + \dots + A_n(x^n - x_0^n) + R(x, x_0)$$

mit  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x, x_0)}{|x - x_0|} = 0$

**Bemerkung: Geometrische Interpretation**

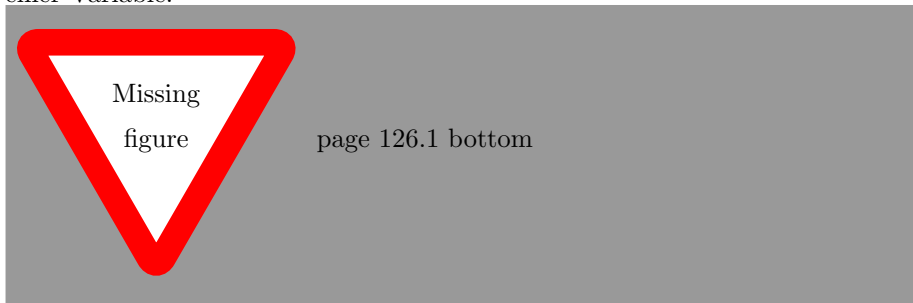
Sei  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega \in \mathbb{R}^2$ . Wir können die differenzierbare Funktion nahe dem Punkt  $x_0 = (x_0^1, x_0^2)$  mit Hilfe der Lineare Funktion

$$P(x) = P(x^1, x^2) = f(x_0^1, x_0^2) + \underbrace{A_1(x^1 - x_0^1) + A_2(x^2 - x_0^2)}_{d_{x_0} f(x - x_0)}$$

approximieren.

can't understand what comes after the formula, page 126.1 middle

Die Differenz  $\underbrace{f(x) - P(x)}_{d_{x_0} f(x - x_0)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$  ist eine Ebene. Die ist die Tangenteebene zur  $f$  an der Stelle  $x_0$  und spielt die Rolle des Tangente für Funktionen in einer Variable.


**Beispiel 8.5**

- a) Jede affin Lineare Funktion  $f(x) = Ax + b$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , wobei  $a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  linear,  $b \in \mathbb{R}$  ist an jeder Stelle  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  differenzierbar, mit  $\frac{df}{dx} = A$  unabhängig von  $x_0$  da

$$f(x) - f(x_0) - A(x - x_0) = 0 \quad \forall x, x_0 \in \mathbb{R}^n$$

- b) Koordinatenfunktionen  $x^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x^1, x^2, \dots, x^n) \rightarrow x^i$ ,  $x^i(x) = x^i$ . Dann ist  $x^i$  differenzierbar an jeder Stelle  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  mit

$$dx^i|_{x=x_0} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

die Differenziale  $dx^1, dx^2, \dots, dx^n$  bilden also an jeder Stelle  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  eine Basis des Raumes  $L(\mathbb{R}^n : \mathbb{R}) := \{A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; A \text{ linear}\}$ , wobei wir  $A \in L(\mathbb{R}^n : \mathbb{R})$  mit der Darstellung  $A = (A_1, \dots, A_n)$  bzgl. der Standardbasis  $\{e_1, \dots, e_n\}$  der  $\mathbb{R}^n$  identifizieren, und mit  $A_i = A(e_i)$

$$dx^i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

$$(dx^i(e_1), dx^i(e_2), \dots, dx^i(e_n))$$

Da gilt  $dx^i(e_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$  ist  $(dx^i)_{1 \leq i \leq n}$  die duale Basis von  $L(\mathbb{R}^n : \mathbb{R})$  zur Standardbasis  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  des  $\mathbb{R}^n$ .

# KAPITEL 8. DIFFERENTIALRECHNUNG IN $\mathbb{R}^N$

c) Jedes  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \in C'(\mathbb{R})$  besitzt das Differential

$$df(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) dx = f'(x_0) dx$$

d.h.  $f'(x_0)$  ist die Darstellung von  $df(x_0)$  bezüglich der Basis  $dx$  von  $L(\mathbb{R} : \mathbb{R})$

d)  $f(x, y) = xe^y, \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ist an jeder Stelle  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned} df(x_0, y_0) &= \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) = (e^{y_0}, xe^{y_0}) \\ f(x, y) - f(x_0, y_0) &= \underbrace{f(x, y) - f(x_0, y)}_{\swarrow} + f(x_0, y) - f(x_0, y_0) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \eta)(y - y_0) \end{aligned}$$

Nach der MWS der DR, mit geeigneten Zwischenstellen  $\xi = \xi(y)$  und  $\eta$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + R(x, y)$$

mit

$$\begin{aligned} R(x, y) &= \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right] (x - x_0) \\ &\quad + \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \eta) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right] (y - y_0) \end{aligned}$$

Wegen die Stetigkeit der Funktionen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^y \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xe^y$$

können wir den "Fehler"  $R(x, y)$  leicht abschätzen

$$\begin{aligned} \frac{|R(x, y)|}{|(x, y) - (x_0, y_0)|} &\leq \sup_{\substack{|\xi - x_0| < |x - x_0| \\ |\eta - y_0| < |y - y_0|}} (|e^y - e^{y_0}| + |x_0| |e^\eta - e^{y_0}|) \end{aligned}$$

Für  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0), (x, y) \neq (x_0, y_0)$ : d.h. es gilt

$$\frac{R(x, y)}{|(x, y) - (x_0, y_0)|} \rightarrow 0$$

d.h. es gilt

$$\frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)}{|(x, y) - (x_0, y_0)|} \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} 0$$

d.h.  $f(x, y)$  ist differenzierbar und

$$df(x_0, y_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

can't read, page 130  
bottom

e) Die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ist in  $(0, 0)$  differenzierbar.

Wir haben schon gesehen dass  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$  und  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{|R|}{|(x, y)|} &= \frac{\left| f(x, y) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)(x - 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)(y - 0) \right|}{|(x - 0, y - 0)|} \\ &= \frac{|f(x, y) - 0 - 0 - 0|}{|(x, y)|} = \frac{|f(x, y)|}{|(x, y)|} \end{aligned}$$

Zum untersuchen ist

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{|R((x, y), (0, 0))|}{|(x, y) - (0, 0)|} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{|f(x, y)|}{|(x, y)|}$$

Mittels Polarkoordinaten ist dies noch einsichtiger

$$\begin{aligned} \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{|f(x, y)|}{x^2 + y^2} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^4 \cos^3 \theta \sin \theta}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} r^2 \cos^3 \theta \sin \theta = 0 \\ &\Rightarrow f \text{ in } (0, 0) \text{ differenzierbar} \end{aligned}$$

Gibt es eine Beziehung zwischen des Differential und der partielle Ableitungen?

### Bemerkung 8.6

Sei  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  differenzierbar an der Stelle  $x_0 \in \Omega$ . Dann existieren die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)$ ,  $i = 1, \dots, n$  und dass Differential kann

$$d_{x_0} f = \left( \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0) \right)$$

dargestellt werden.

### Beweis

$f$  an der Stelle  $x_0$  differenzierbar

$$\Rightarrow f(x_0 + he_i) = f(x_0) + (d_{x_0} f)(he_i) + R(x_0 + he_i, x_0)$$

wobei

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(x_0 + he_i, x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + he_i) - f(x_0) - (d_{x_0} f)(he_i)}{h} = 0 \\ &\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + he_i) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h d_{x_0} f(e_i)}{h} = d_{x_0} f(e_i) \end{aligned}$$

d.h.  $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)$  existiert und  $= d_{x_0} f(e_i)$ .

Da  $(dx^i)_{i=1, \dots, n}$  die zur  $(e_j)_{1 \leq j \leq n}$  duale Basis ist

$$d_{x_0} f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) dx^i = \left( \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0) \right)$$



### Beispiel

Die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ist in  $(0, 0)$  nicht differenzierbar ( $f$  ist in  $(0, 0)$  nicht stetig)

### Satz 8.7

Falls  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}$  differenzierbar, ist sie in  $x_0$  auch stetig.

### Beweis

Folgt aus der Definition

#### Definition 8.8

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heisst von der Klasse  $C'$ , ( $f \in C'(\Omega)$ ) falls  $f$  an jeder Stelle  $x_0 \in \Omega$  und in jede Richtung  $e_i$  partielle differenzierbar ist und die Funktionen  $x \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x^i}(x)$  für jedes  $1 \leq i \leq n$  auf  $\Omega$  stetig sind

### Satz 8.9

Sei  $f \in C'(\Omega)$ . Dann ist  $f$  an jeder Stelle  $x_0 \in \Omega$  differenzierbar.

### Beweis

Für  $n = 3$  seien  $x = (x^1, x^2, x^3)$ ,  $x_0 = (x_0^1, x_0^2, x_0^3)$ . Dann ist

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \{f(x^1, x^2, x^3) - f(x^1, x^2, x_0^3)\} \\ &\quad + \{f(x^1, x^2, x_0^3) - f(x^1, x_0^2, x_0^3)\} \\ &\quad + \{f(x^1, x_0^2, x_0^3) - f(x_0^1, x_0^2, x_0^3)\} \end{aligned}$$

Nach dem MWS der DR gilt:

$$f(x^1, x^2, x_0^3) - f(x_0^1, x_0^2, x_0^3) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(\xi^1, x_0^2, x_0^3)(x^1 - x_0^1)$$

wobei  $\xi^1$  zwischen  $x_0^1$  und  $x^1$ . Analog:

$$f(x^1, x^2, x_0^3) - f(x^1, x_0^2, x_0^3) = \frac{\partial f}{\partial x^2}(x^1, \xi^2, x_0^3)(x^2 - x_0^2)$$

wobei  $\xi^2 \in (x_0^2, x^2)$  und

$$f(x^1, x^2, x^3) - f(x^1, x^2, x_0^3) = \frac{\partial f}{\partial x^3}(x^1, x^2, \xi^3)(x^3 - x_0^3)$$

Eingesetzt in dem Ausdrucke für  $f(x) - f(x_0)$  ergibt:

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \frac{\partial f}{\partial x^1}(\xi^1, x_0^2, x_0^3)(x^1 - x_0^1) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial x^2}(x^1, \xi^2, x_0^3)(x^2 - x_0^2) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial x^3}(x^1, x^2, \xi^3)(x^3 - x_0^3) \end{aligned}$$

Also

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1, x_0^2, x_0^3)(x^i - x_0^i) + R(x_0, x)$$

Wobei

$$\begin{aligned} R(x_0, x) &= \left( \frac{\partial f}{\partial x^1}(\xi^1, x_0^2, x_0^3) - \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \right)(x^1 - x_0^1) \\ &\quad + \left( \frac{\partial f}{\partial x^2}(x^1, \xi^2, x_0^3) - \frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \right)(x^2 - x_0^2) \\ &\quad + \left( \frac{\partial f}{\partial x^3}(x^1, x^2, \xi^3) - \frac{\partial f}{\partial x^3}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \right)(x^3 - x_0^3) \end{aligned}$$

Also

$$|R(x, x_0)| < |x - x_0| \underbrace{\{|\dots| + |\dots| + |\dots|\}}_{\substack{\rightarrow 0 \text{ mit } x \rightarrow x_0 \\ \text{weil } \frac{\partial f}{\partial x^i} \text{ stetig sind}}}$$

Also  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x, x_0)}{|x - x_0|} = 0$  und  $f(x)$  ist differenzierbar.

### Beispiel 8.10

Polynome auf  $\mathbb{R}^n$  sind von Klasse  $C^1$ . Für jedes Multindex  $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  definieren wir die Monomialfunktion

$$x^\alpha := (x^0)^{\alpha_0} (x^1)^{\alpha_1} \dots (x^n)^{\alpha_n}$$

Ein Polynom von Grad  $\leq N$  ist dann gegeben durch

$$p(x) = \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha x^\alpha$$

wobei  $|\alpha| = \alpha_0 + \dots + \alpha_n$

Pages 135.1 - 135.2 are a zusammenfassung, not sure if needed to be included

## 8.2 Differentiationsregeln

Ganz analog zum eindimensionalen Fall gelten folgende Differentiationsregeln

## KAPITEL 8. DIFFERENTIALRECHNUNG IN $\mathbb{R}^N$

### Satz 8.11

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , sowie  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  an der Stelle  $x_0 \in \Omega$  differenzierbar. Dann gilt

1.  $d(f + g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0)$
2.  $d(fg)(x_0) = g(x_0)df(x_0) + f(x_0)dg(x_0)$
3. Falls  $g(x_0) \neq 0$

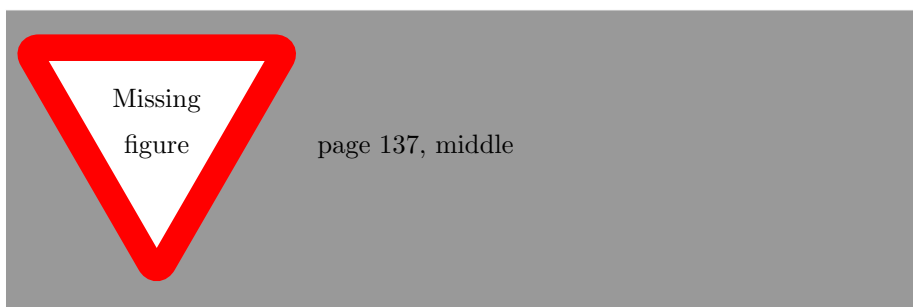
$$d\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \frac{g(x_0)df(x_0) - f(x_0)dg(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

Beweis ist der selbe wie in Dim=1. Für die Kettenregel gibt es mehrere Variationen

### Satz 8.12 (Kettenregel, 1. Version)

Sei  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$  differenzierbar, sowie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  an der Stelle  $g(x_0) \in \mathbb{R}$  differenzierbar. Dann gilt

$$d(f \circ g)(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot dg(x_0)$$



### Beweis

$g$  an der Stelle  $x_0$  differenzierbar

$$\Rightarrow g(x) - g(x_0) \stackrel{A}{=} dg(x_0)(x - x_0) + R_g(x - x_0)$$

mit

$$\frac{R_g(x - x_0)}{(x - x_0)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \Rightarrow \frac{g(x) - g(x_0)}{|x - x_0|} \stackrel{B}{\leq} C = \max \left[ \frac{\partial g}{\partial x^i}(x_0) \right]$$

$f$  in  $g(x_0)$  differenzierbar

$$f(g(x)) - f(g(x_0)) \stackrel{C}{=} f'(g(x_0)) [g(x) - g(x_0)] + R_f(g(x), g(x_0))$$

Woraus folgt:

$$f(g(x)) - f(g(x_0)) = f'(g(x_0)) [dg(x_0)(x - x_0) + R_g(x, x_0)] + R_f(g(x_0), g(x))$$

Aus B folgt:

$$\begin{aligned} \frac{R_f(g(x_0), g(x))}{x - x_0} &= \underbrace{\frac{R_f(g(x_0) - g(x))}{|g(x) - g(x_0)|}}_{\downarrow 0} \cdot \underbrace{\frac{|g(x) - g(x_0)|}{|x - x_0|}}_{\stackrel{B}{\leq} C} \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\downarrow 0} \end{aligned}$$

d.h.

$$f(g(x)) - f(g(x_0)) = (f'(g(x_0)) \cdot dg(x_0))(x - x_0) + R_{f \circ g}(x, x_0)$$

wobei

$$R_{f \circ g}(x, x_0) = f'(g(x_0)) R_g(x, x_0) + R_f(g(x_0), g(x))$$

und

$$\frac{R_{f \circ g}(x, x_0)}{x - x_0} = \underbrace{f'(g(x_0)) \frac{R_g(x, x_0)}{(x - x_0)}}_{\downarrow 0} + \underbrace{\frac{R_f(g(x_0), g(x))}{x - x_0}}_{\downarrow 0}$$

### Beispiel 8.13

Sei  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$h(x, y) = e^{xy}$$

$h = f \circ g$  wobei  $g(x, y) = xy$ ,  $f(t) = e^t$ . Dann ist einerseits

$$dh(x, y) = \left( \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} \right) = (ye^{xy}, xe^{xy})$$

andererseits nach Kettenregel

$$dh(x, y) = d(f \circ g)' = f'(g(x, y)) \cdot dg(x, y) = e^{xy} \cdot (y, x) = (ye^{xy}, xe^{xy})$$

Für die nächste Kettenregel führen wir folgende Definition ein:

#### Definition 8.14

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}$  und  $f = (f_1, \dots, f_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Abbildung. Dann ist  $f$  an der Stelle  $x_0 \in \mathbb{R}$  differenzierbar, falls jede Komponentenfunktion  $f_i$  an der Stelle  $x_0$  differenzierbar ist. Wir definieren in diesem Fall

$$f'(x_0) := (f_1'(x_0), f_2'(x_0), \dots, f_n'(x_0))$$

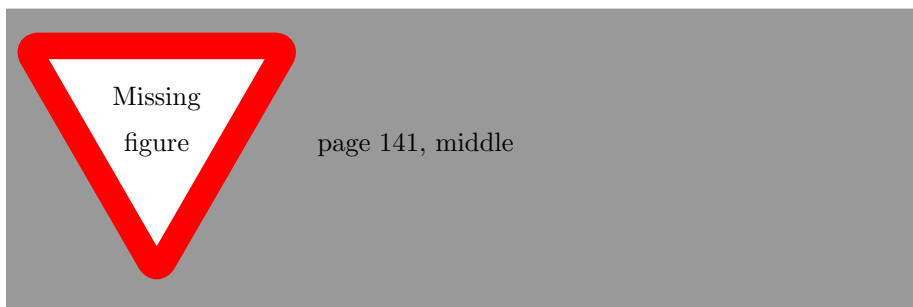
### Bemerkung 8.15

$f'(x_0)$  kann als Geschwindigkeitsvektor im Punkt  $f(x_0)$  aufgefasst werden.

**Satz 8.16 (Kettenregel 2. Version)**

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n, I \subset \mathbb{R}$ . Sei  $g : I \rightarrow \Omega, t \rightarrow (g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t))$ , an der Stelle  $t_0 \in I$  differenzierbar sowie  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  an der Stelle  $g(t_0)$  differenzierbar. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f \circ g)(t_0) &= df(g(t_0)) \cdot g'(t_0) \\ d(f \circ g)(t_0) &= df(g(t_0)) \cdot dg(t_0) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^1}(g(t_0)) \cdot \frac{dg_1}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial x^2}(g(t_0)) \cdot \frac{dg_2}{dt}(t_0) \\ &\quad + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(g(t_0)) \cdot \frac{dg_n}{dt}(t_0) \end{aligned}$$



**Beispiel 8.17**

Die vier Grundrechenarten sind differenzierbare Funktionen von zwei Variablen. Insbesondere gilt:

- $a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x + y$

$$da(x, y) = \left( \frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial a}{\partial y} \right) = (1, 1)$$

- $m : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x \cdot y$

$$dm(x, y) = (y, x)$$

Setzt man diese beiden Funktionen in die obige Kettenregel ein, so erhält man die aus der Analysis I bekannte Summen und Produktregel:

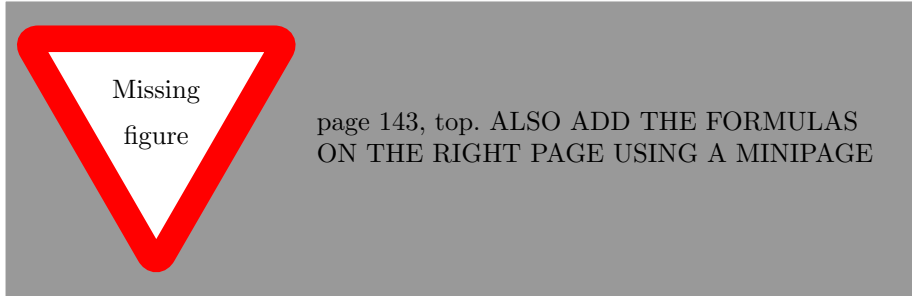
$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \rightarrow (g_1(t), g_2(t)) \\ \frac{d}{dt}(g_1 + g_2) = \frac{d}{dt}(a \circ g) = (1, 1) \cdot \left( \frac{dg_1}{dt}, \frac{dg_2}{dt} \right) = 1 \cdot \frac{dg_1}{dt} + 1 \cdot \frac{dg_2}{dt} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(g_1 \cdot g_2) &= \frac{d}{dt}(m \circ g) = ((dm)(g(t))) \cdot \left( \frac{dg}{dt} \right) \\ &= (g_2(t), g_1(t)) \cdot \left( \frac{dg_1}{dt}, \frac{dg_2}{dt} \right) \\ &= \frac{dg_1}{dt} \cdot g_2(t) + \frac{dg_2}{dt} \cdot g_1(t) \end{aligned}$$

**Beispiel 8.18**

Sei  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar an der Stelle  $x_0 \in \Omega$  und sei  $e \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ; mit  $|e| = 1$ . Betrachte die Gerade  $g(t) = x_0 + te$ ,  $t \in \mathbb{R}$  durch  $x_0$  mit Richtungsvektor



Dann ist die Funktion  $f \circ g$  in einer Umgebung von  $t_0 = 0$  definiert und nach Kettenregel  $f \circ g$  an der Stelle  $t_0 = 0$  differenzierbar mit

$$\frac{d}{dt} (f \circ g) (0) = df (g(0)) \frac{dg}{dt} (0) = df (x_0) (e) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} (x_0) \cdot e^i$$

$e = (e^1, \dots, e^n)$  und wird Richtungsableitung von  $f$  in Richtung  $e$  genannt;  $\partial_e f (x_0)$  bezeichnet. Insbesondere gilt für  $e = e_i$

$$\partial_{e_i} f (x_0) = \frac{\partial f}{\partial x^i} (x_0) = df (x_0) (e_i)$$

Geometrisch die Richtungsableitung von  $f$  in Richtung  $e$  ist genau die Steigung der Tangente zur Schnittkurve falls wir den Graph von  $f$  mit einer zur Ebene  $xy$  senkrecht Ebene durch  $x_0 + te$  scheiden.

