

## Kapitel 2

# Reelle Zahlen, Euklidische Räume und Komplexe Zahlen

### 2.1 Elementare Zahlen

|                |              |     |   |                             |
|----------------|--------------|-----|---|-----------------------------|
| Naturzahl      | $\mathbb{N}$ | $=$ | $\{0, 1, 2, \dots\}$  | addieren und multiplizieren |
|                | $\cap$       |     |   |                             |
| LOOK TODO      | $\mathbb{Z}$ | $=$ | $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$                               | subtrahieren                |
|                | $\cap$       |     |   |                             |
| Rationalzahlen | $\mathbb{Q}$ | $=$ | $\left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$ | dividieren                  |

Viele Gleichungen haben keine Lösung in  $\mathbb{Q}$ .

Before set Z, can't read,  
page 22

#### Satz 2.1

Sei  $p \in \mathbb{N}$  eine Primzahl. Dann hat  $x^2 = p$  keine Lösung in  $\mathbb{Q}$

#### Beweis

Zur Erinnerung: zwei natürliche Zahlen  $a$  und  $b$  sind teilerfremd (oder relativ prim) wenn es keine natürliche Zahl außer der Eins gibt, die beide Zahlen teilt.

$$((a, b) = 1) \rightarrow \text{größter gemeinsamer Teiler}$$

#### Indirekter Beweis

Wir nehmen an: es gibt  $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$  mit  $x^2 = p$ , wobei  $a, b$  teilerfremd und  $\geq 1$  sind. Dann gilt

$$a^2 = pb^2$$

woraus folgt, dass  $p$   $a$  teilt also ist  $a = pk$ ,  $k \in \mathbb{N}$  und somit

$$a^2 = p^2 k^2 = pb^2 \Rightarrow pk^2 = b^2$$

woraus folgt, dass  $p$   $b$  teilt.

## 2.2 Die Reellen Zahlen

Wir werden jetzt das System von Axiomen beschreiben das die Menge der Reellen Zahlen "eindeutig" charakterisiert.

Die Menge  $\mathbb{R}$  der Reellen Zahlen ist mit zwei Verknüpfungen "+" (Addition) und "·" (Multiplikation) versehen sowie mit einer Ordnungsrelation  $\leq$ . Die axiome werden wie folgt gruppiert:

1.  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  **ist ein Körper**

Es gibt 2 Operationen (Zweistellige Verknüpfungen)

- $+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(a, b) \rightarrow a + b$
- $\times: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(a, b) \rightarrow a \cdot b$

und 2 ausgezeichnete Element 0 und 1 in  $\mathbb{R}$  die folgenden Eigenschaften haben:

|                   |     |  |
|-------------------|-----|--|
| Kommutivität      | A1) | $x + y = y + x$  |
| Assoziativität    | A2) | $(x + y) + z = x + (y + z)$  |
| Neutrales Element | A3) | $x + 0 = x = 0 + x$  |
| Inverse Element   | A4) | $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \text{ mit } x + y = 0 = y + x$    |
| Kommutivität      | M1) | $x \cdot y = y \cdot x$  |
| Assoziativität    | M2) | $(xy)z = x(yz)$  |
| Neutrales Element | M3) | $x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$  |
| Inverse Element   | M4) | $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0 \exists y \in \mathbb{R} \text{ mit } xy = 1 = yx$ |

und Die Multiplikation ist verträglich mit der Addition im Sinne des Distributivitäts-Gesetz (D)

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x(y + z) = xy + xz$$

- $(\mathbb{R}, +)$  mit A1→A4 ist eine Abelsche Gruppe bezüglich der Addition
- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  mit A1→A4, M1→M4 und D ist ein Zahlkörper.

### Bemerkung 2.2

Eine Menge  $G$  versehen mit Verknüpfung  $+$  und Neutrales Element  $0$  die den obigen Eigenschaften A2→A4 genügen heisst Gruppe.

Eine Menge  $K$  versehen mit Verknüpfung  $+, \cdot$  und Elementen  $0 \neq 1$  die den obigen Eigenschaften A1→A4, M1→M4, D genügen heisst Körper.

KAPITEL 2. REELE ZAHLEN, EUKLIDISCHE RÄUME UND  
KOMPLEXE ZAHLEN

**Folgerung 2.3**

Seien  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

- |  |   |
|--|---|
| i) $a + b = a + c \Rightarrow b = c$ und $0$ ist eindeutig, d.h. Falls $z \in \mathbb{R}$ der Eigenschaften $a + z = a \ \forall a \in \mathbb{R}$ genügt, so folgt $z = 0$            | A |
| ii) $\forall a, b \in \mathbb{R}, \exists!$ (eindeutig bestimmtes) $x \in \mathbb{R} : a + x = b$ . Wir schreiben $x = b - a$ und $0 - a = -a$ ist das additive Inverse zu $a$         |   |
| iii) $b - a = b + (-a)$  |   |
| iv) $-(-a) = a$  |   |
| v) Falls $ab = ac$ und $a \neq 0 \Rightarrow b = c$ und $1$ ist eindeutig, d.h. falls $x \in \mathbb{R}$ der Eigenschaften $ax = a \ \forall a \in \mathbb{R}$ genügt so folgt $x = 1$ | M |
| vi) $\forall a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, \exists! x \in \mathbb{R} : ax = b$ . Wir schreiben $x = \frac{b}{a}$ und $\frac{1}{a} = a^{-1}$ ist das Multiplikativ Inverse zu $a$ .    |   |
| vii) Falls $a \neq 0 \Rightarrow (a^{-1})^{-1} = a$  |   |
| viii) $\forall a \in \mathbb{R}, a \cdot 0 = 0$  |   |
| ix) Falls $ab = 0$ dann folgt $a = 0$ oder $b = 0$   |   |

**Beweis 2.3**

- (a) Sei  $a + b = a + c$   
 $A4 \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R} : a + y = 0$   
 $a + b = a + c \Rightarrow y + (a + b) = y + (a + c)$   
 $\stackrel{A2}{\Rightarrow} (y + a) + b = (y + a) + c$   
 $\Rightarrow 0 + b = 0 + c \stackrel{A3}{\Rightarrow} b = c$   
 Nehmen wir an, dass es  $0' \in \mathbb{R}$  gibt so dass  $x + 0' = x, \forall x \in \mathbb{R}$ , d.h. es gibt eine zweite neutrale Element für  $+$ .

Dann  $0 + 0' = 0$  aber auch  $A3 \Rightarrow 0 + 0 = 0 \Rightarrow 0 + 0' = 0 + 0 \Rightarrow 0 = 0'$

- (b) Seien  $a, b \in \mathbb{R}$ , und sei  $y \in \mathbb{R}$  mit  $a + y = 0$ . Definieren wir  $x := y + b \Rightarrow a + x = a + (y + b) = (a + y) + b = 0 + b = b$   
 $\Rightarrow \exists$  mindestens eine Lösung der Gleichung  $a + x = b$ . Von i) folgt dass  $x$  eindeutig bestimmt ist  $a + x = b = a + x' \Rightarrow x = x'$
- (c) Seien  $x = b - a, y = b + (-a)$ . Wir Wollen beweisen dass  $x = y$ .

Aus i) wissen wir dass  $b - a$  eine Lösung von  $a + x = b$

$$y + a = (b + (-a)) + a = b + ((-a) + a) = b + 0 = 0$$

$\Rightarrow y$  ist auch eine Lösung.

Weil die Lösung von  $a + x = b$  ist eindeutig bestimmt, ist  $y = x$

- (d)

ASK FOR BEWEISE;  
PAGE 27 TOP

?multipli? page 27  
middle to top

(e)

(f)

(g)

(h)  $\forall a \in \mathbb{R}, a \cdot 0 = 0$   
 $a \cdot 0 = a(0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0 \Rightarrow a \cdot 0 = 0$

(i)  $ab = 0 \Rightarrow a = 0$  oder  $b = 0$   
 Wir nehmen an:  $a \neq 0$  mit Inversen  $a^{-1}$ , ( $a^{-1}$  existiert mittels M4).  
 So folgt  $b = 1 \cdot b = (a^{-1} \cdot a) b = a^{-1}(a \cdot b) = a^{-1} \cdot 0 = 0$

## 2. Ordnungsaxiome $\leq$

Auf  $\mathbb{R}$  gibt es eine Relation,  $\leq$ , genannten Ordnung, die folgenden Eigenschaften genügt

(a) Reflexivität:  $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x$

(b) Transitivität:  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$

(c) Identivität:  $\forall x, y \in \mathbb{R}, (x \leq y) \text{ und } (y \leq x) \Rightarrow x = y$

(d) Die Ordnung ist total:  $\forall x, y \in \mathbb{R}$  gilt entweder  $x \leq y$  oder  $y \leq x$

Die Ordnung ist konsistent mit  $+$ , und  $\cdot$

(a)  $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$

(b)  $x, y \geq 0 \Rightarrow xy \geq 0$

Mit  $\leq$  hat man auch  $\geq, <, >$ . Wir verzichten auf eine Auflistung aller Folgerungen und beschränken uns auf einige wichtige Folgerungen.

## Folgerungen 2.4

i)  $x \leq 0$  und  $y \leq 0 \Rightarrow xy \geq 0$

ii)  $x \leq 0$  und  $y \geq 0 \Rightarrow xy \leq 0$

iii)  $x \leq y$  und  $z \geq 0 \Rightarrow xz \leq yz$

iv)  $1 > 0$

v)  $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0$

vi)  $0 < 1 < 2 < 3 < \dots$

vii)  $\forall x > 0 : x^{-1} > 0$

{Annahme:  $x^{-1} \leq 0$ . Nach Multiplikation mit  $x > 0$  folgt (mittels ii)  
 $1 = x^{-1} \cdot x \leq 0 \cdot x = 0$ }

## Bemerkung 2.5

What? page 28 bottom

$\leq$  auf  $\mathbb{R}$  genügt den obigen Eigenschaften. Die entscheidende weitere Eigenschaft von  $\mathbb{R}$  ist das.

## 3. Ordnungsvollständigkeit

Check for layout issues  
with title

Vollständigkeitsaxiom:

Seien  $A, B \subset \mathbb{R}$  nicht leere Teilmenge von  $\mathbb{R}$ , so dass  $a \leq b$  für alle  $a \in A, b \in B$ . Dann gibt es  $c \in \mathbb{R}$  mit  $a \leq c \leq b \quad \forall a \in A, b \in B$

## KAPITEL 2. REELE ZAHLEN, EUKLIDISCHE RÄUME UND KOMPLEXE ZAHLEN

### Bemerkung 2.6

erfüllt diese Eigenschaft nicht!

What? page 29 bottom

Seien

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0, x^2 \leq 2\}$$

$$B = \{y \in \mathbb{Q} \mid y \geq 0, y^2 \geq 2\}$$

Dann gilt  $a \leq b \forall a \in A, b \in B$ . Aber ein  $c \in \mathbb{Q}$ , mit  $a \leq c \leq b$  würde dann  $c^2 = 2$  erfüllen! In Satz 2.1 haben wir gesehen dass  $x^2 = p$  keine Lösung in  $\mathbb{Q}$  hat.

Wir definieren jetzt für  $x, y \in \mathbb{R}$

$$\max\{x, y\} = \begin{cases} x & \text{falls } y \leq x \\ y & \text{falls } x \leq y \end{cases}$$

Insbesondere ist der Absolutbetrag einer Zahl  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|x|$

$$|x| := \max\{x, -x\}$$

Für diesen gilt folgender wichtiger Satz

### Satz 2.7

- i)  $|x + y| \leq |x| + |y|$  (Dreiecks Ungleichung)
- ii)  $|xy| = |x| |y|$

### Beweis 2.7

- i)  $x \leq |x|, -x \leq |x|$   
 $y \leq |y|, -y \leq |y|$   
und  $x + y \leq |x| + |y|, -(x + y) \leq |x| + |y|$   
woraus  $|x + y| \leq |x| + |y|$  folgt

- ii) ASK FOR BEWEIS

ASK FOR BEWEIS

### Satz (Young)

Für alle  $a, b \in \mathbb{R}$ .  $\delta > 0$  gilt  $2|ab| \leq \delta a^2 + \frac{b^2}{\delta}$

## 2.3 Infimum und Supremum

In Zusammenhang mit der Ordnung führen wir einige wichtige Definitionen ein:

### Definition 2.8

Sei  $X \subset \mathbb{R}$  eine Teilmenge

- a)  $X$  ist nach oben beschränkt falls es  $c \in \mathbb{R}$  gibt  $x \leq c, \forall x \in X$ . Jeder derartige  $c$  heisst eine Obere Schranke für  $X$ .
- b)  $X$  ist nach unten beschränkt, falls es  $c \in \mathbb{R}$  gibt, mit  $x \geq c, \forall x \in X$ . Jeder derartige  $c$  heisst untere Schranke für  $X$ .
- c)  $X$  ist beschränkt falls es nach oben und unten beschränkt ist.
- d) Ein element  $a \in X$  ist ein maximales Element (oder Maximum) von  $X$  falls  $x \leq a, \forall x \in X$ . Falls ein Maximum (resp. minimum) existiert, wird es mit  $\max X$  ( $\min X$ ) bezeichnet. Falls  $X$  keine obere schranke hat, ist  $X$  nach oben unbeschränkt (analog für obere sch.).

### Beispiel 2.9

WHAT? Page 32 top

1.  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$  ist nach oben unbeschränkt.  $A$  ist nach unten beschränkt. Jedes  $\leq 0$  ist eine untere Schranke.
2.  $B = [0, 1]$  ist nach oben und nach unten beschränkt.
  - 0 ist ein minimum von  $B$
  - 1 ist ein maximum von  $B$
3.  $C = [0, 1)$  ist nach oben und nach unten beschränkt,  $0 = \min(A)$ .  $C$  hat kein Maximum.

Folgender Satz ist von Zentraler Bedeutung und eine Folgerung der Ordnungsvollständigkeitsaxiom.

### Satz 2.10

- i) Jede nicht leere nach oben beschränkte Teilmenge  $A \subset \mathbb{R}$  besitzt eine kleinste obere Schranke  $c$ . Die kleinste obere schranke  $c$  ist eindeutig bestimmt und heisst Supremum von  $A$ , mit  $\sup A$  bezeichnet.
- ii) Jede nicht leere nach unten beschränkt Teilmenge  $A \subset \mathbb{R}$  besitzt eine grösste untere Schranke  $d$  und heisst Infimum von  $A$ , mit  $\inf A$  bezeichnet.

### Beweis

- i) Sei  $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$  nach oben beschränkt. Sei  $B := \{b \in \mathbb{R} \mid b \text{ ist obere Schranke für } A\}$ . Dann  $B \neq \emptyset$  und  $a \leq b, \forall a \in A, b \in B$

Mit Ordnungsvollständigkeit Axiom folgt die Existenz einer Zahl  $c \in \mathbb{R}$  mit  $a \leq c \leq b, \forall a \in A, b \in B$ .

Es ist klar dass  $c$  ist eine obere Schranke für  $A$ . Also  $c \in B$ . Da  $c \leq b, \forall b \in B$ , ist  $c$  die kleinste obere Schranke für  $A$ . Hierdurch  $c$  ist eindeutig bestimmt.

## KAPITEL 2. REELE ZAHLEN, EUKLIDISCHE RÄUME UND KOMPLEXE ZAHLEN

(Seien  $c$  und  $c'$  zwei Supremum von  $A$ ,  $c$  ist die kleinste obere Schranke und  $c'$  ist eine obere Schranke  $\Rightarrow c \leq c'$ . Das gleiche Argument mit  $c, c'$  ausgetauscht liefert  $c' \leq c$ )

- ii) Sei  $A$  nach unten beschränkte, nicht leere Menge. Sei  $-A := \{-x \mid x \in A\}$  die Menge der additiven Inversen von  $A$ . Dann  $-A \neq \emptyset$  und nach oben beschränkt. i)  $\Rightarrow \exists s = \sup(-A) \Rightarrow -s$  ist das Infimum von  $A$

### Korollar 2.11

1. Falls  $E \subset F$  und  $F$  nach oben beschränkt ist, gilt  $\sup E \leq \sup F$
2. Falls  $E \subset F$  und  $F$  nach unten beschränkt ist, gilt  $\inf F \leq \inf E$
3. Falls  $\forall x \in E, \forall y \in F$  gilt  $x \leq y$  dann folgt  $\sup E \leq \inf F$
4. Seien  $E, F \neq \emptyset, E, F \subset \mathbb{R}, h \in \mathbb{R}, h > 0$

(i) Falls  $E$  ein sup. besitzt  $\Rightarrow \exists x \in E$  mit  $x > \sup E$

(ii) Falls  $E$  ein Inf besitzt  $\Rightarrow \exists y \in E: y < \inf E + h$ . Das Supremum,  $\sup X = \sigma$  der Menge  $X$  ist folgendermassen charakterisiert: Es gibt in  $X$  keine Zahlen  $> \sigma$ ; aber für jede Toleranz  $h > 0$  gibt es in  $X$  Zahlen  $> \sigma - h$



Es gibt in  $X$  keine Zahlen  $< \inf X$  = aber für jede Toleranz  $h > 0$  gibt es in  $X$  Zahlen  $< \inf X + h$

- (iii) Sei  $E + F = \{e + f : e \in E, f \in F\}$ . Falls  $E$  und  $F$  ein Sup. besitzen  $\Rightarrow E + F$  besitzt ein Sup und  $\sup(E + F) = \sup(E) + \sup(F)$ . (Analog mit Inf.)

### Beweis

### Beispiel

1.  $E = (+\infty, 2) \subset F(-\infty, 4]$   
 $\sup E = 2, \sup F = 4 = \max F$   
 $E$  hat kein Max:  $\sup E \leq \sup F$
2.  $G : [4, 5) \subset H = (3, 6)$   
 $\min E = \inf G = 4 \geq \inf H = 3$

## KAPITEL 2. REELE ZAHLEN, EUKLIDISCHE RÄUME UND KOMPLEXE ZAHLEN

3.  $K = (3, \infty)$ ,  $E = (-\infty, 2)$   
 $\forall x \in E, y \in K$  gilt  $x \leq y$   
 $2 = \sup E \leq 3 = \inf K$
4.  $A = \{\sin x \mid x \in \mathbb{R}\}$   
 $\inf A = -1 = \min A$   
 $\sup A = 1 = \max A$
5.  $A = \{(1 + \frac{1}{n})^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Wir werden sehen dass  $A$  ist nach unten und nach unten beschränkt.  
 $\inf A = \min A = 2$ ,  $\sup A = e = 2.718\dots$  Vereinbarung  
Für nach oben unbeschränkte Mengen  $A \neq \emptyset$  setzen wir  $\sup A = \infty$  unendlich. Analog für nach unten unbeschränkte Menge  $\emptyset \neq A$  setzen wir  $\inf A = -\infty$

Check for better layout

Die folgende Satz zeigt wie die Ordnungsvollständigkeit von  $\mathbb{R}$  die Lösbarkeit gewisser Gleichungen in  $\mathbb{R}$  garantiert.

### Satz 2.12

Für jedes  $x > 0$  gibt es genau ein  $y > 0$  mit  $y^2 = x$ . Diese Lösung wird mit  $\sqrt{x}$  bezeichnet.

(Im Allgemeinen: Für jedes  $x > 0$  und  $n \geq 1$ ,  $n \in \mathbb{R}$  gibt es genau ein  $y > 0$  mit  $y^n = x$ . Diese Lösung wird mit  $\sqrt[n]{x}$  bezeichnet)

### Beweis

Sei  $x > 1$ , und  $A := \{z \in \mathbb{R} \mid z > 0 \text{ mit } z^2 \leq x\}$ . Dann ist  $A$  nach oben beschränkt und  $A \neq \emptyset$  ( $1 \in A$ ).  $\Rightarrow A$  besitzt ein Supremum.

Sei  $y := \sup A$ . Wir zeigen dass  $y^2 = x$

- Schnitt 1: Annahme  $y^2 < x$ .

Sei  $0 \leq h \leq 1$ . Wir nehmen

$$\begin{aligned} (y+h)^2 &= y^2 + 2hy + h^2 \\ &= y^2 + h(2y+h) \\ &\leq y^2 + h(2y+1) \\ &= y^2 + h((y+1)^2 - y^2) \end{aligned}$$

Weil  $y^2 < x$  ist,  $\frac{x-y^2}{(y+1)^2-y^2} > 0$  und daher gibt es  $h \in \mathbb{R}$ ,  $h > 0$ ,  
 $h \leq \frac{x-y^2}{(y+1)^2-y^2}$  (sei  $h = \min\{1, \frac{x-y^2}{(y+1)^2-y^2}\}$ )

Für solche  $h$  gilt

$$(y+h)^2 \leq y^2 + \left( \frac{x-y^2}{(y+1)^2-y^2} \right) ((y+1)^2 - y^2) =$$

chopped result, page 35.1

Also  $y+h \in A$  und  $y+h > y$ . Ein Widerspruch:  $y$  ist eine obere Schranke für  $A$ , d.h.,  $z < y$   
 $\Rightarrow y^2 \geq x$  Analog beweist man  $y^2 \leq x$



## KAPITEL 2. REELE ZAHLEN, EUKLIDISCHE RÄUME UND KOMPLEXE ZAHLEN

- Schnitt 2: Annahme  $y^2 > x$   
Sei  $h = \frac{y^2 - x}{2y} \neq 0$

$$(y - h)^2 = y^2 - 2hy + h^2 > y^2 - 2hy = y^2 - (y^2 - x) = x$$

$\Rightarrow y - h$  ist eine Obere Schranke für  $A$

Chopped, page 35.2 top

( $\forall z \in A, z^2 \leq x$ . Da  $(y - h)^2 > x$  ist,  $(y - h)^2 > x \geq z^2$ . Damit  $y - h > z, \forall z \in A$ )

Aber  $y - h < y$ , widerspruch zur Minimalität von  $y$ .

Falls  $0 < x < 1$ , dann  $\frac{1}{x} > 1$

$\Rightarrow \exists u \in \mathbb{R}$ , mit  $u^2 = \frac{1}{x}$

Somit  $(\frac{1}{u})^2 = x$  und  $y = \frac{1}{u}$  ist eine Lösung von  $y^2 = x$ .

Zum Abschluss dieses Themas erwähnen wir noch eine Wichtige Eigenschaft der Reellen Zahlen

### Satz 2.13 (Archimedische Eigenschaft)

Zu jeder Zahl  $0 < b \in \mathbb{R}$  gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $b < n$ .

### Beweis (Indirekt)

Andernfalls gibt es  $b \in \mathbb{R}$  mit  $n \leq b, \forall n \in \mathbb{N}$

$$(\neg (\exists n \in \mathbb{N} : b < n)) = (\forall n \in \mathbb{N} : b \geq n)$$

Dann ist  $b$  eine obere Schranke für  $\mathbb{N}$  und es existiert  $c = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$ . Mit  $n \in \mathbb{R}$  ist jedoch auch  $n + 1 \in \mathbb{N}$ .

Also:  $n + 1 \leq c, \forall n \in \mathbb{N}$ . Somit folgt  $n \leq c - 1, \forall n \in \mathbb{N}$  ein widerspruch zur minimalität von  $c$ .

Chopped content, page 36 bottom

### Korollar 2.14

1. Seien  $x > 0$  und  $y \in \mathbb{R}$  gegeben. Dann gibt es  $n \in \mathbb{Z}$  mit  $y < nx$
2. Falls  $x, y, a \in \mathbb{R}$  die ungleichkeiten  $a \leq x \leq a + \frac{y}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$  erfüllen, ist  $x = a$ .

### Beweis

1. ASK FOR BEWEIS

Ask for beweis

2.  $a < x \Rightarrow x - a > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$   
 $\Rightarrow x > a + \frac{y}{n}$  Widerspruch

Wir wissen dass gewisse Gleichungen in  $\mathbb{R}$  Lösbar ist: z.B.  $y^2 = a, \forall a > 0$ . Aber man kann nicht alle Gleichungen in  $\mathbb{R}$  lösen, z.B.  $x^2 + 1 = 0$ . Da für alle  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x^2 > 0$ , ist  $x^2 = -1$  nicht lösbar. Um eine Lösung für diese Gleichung zu finden, müssen wir die komplexen Zahlen betrachten.

Zuerst, werden wir die Euklidischen Räume  $\mathbb{R}^n$  einführen

## 2.4 Euklidische Räume

Von der Mengentheorie können wir die Kartesische Produkt zweier Mengen; es lässt sich ohne Schwierigkeiten zu endlichen Familien  $A_1, \dots, A_n$  verallgemeinern; nämlich

$$A_1 \times \dots \times A_n := \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in A_i\}$$

ist die Menge der geordneten  $n$ -Tupel von Elementen aus  $A_1, \dots, A_n$ .

Für beliebige  $n \geq 1$  betrachten wir  $\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n\text{-mal}}$  und untersuchen seine Struktur. Auf  $\mathbb{R}^n$  haben wir zwei Verknüpfungen

1.  $+: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  Addition.

$$\left( \underbrace{(x_1, \dots, x_n)}_x, \underbrace{(y_1, \dots, y_n)}_y \right) \rightarrow \underbrace{(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)}_{\text{Komponentenweise Addition}}. \text{ Dann ist } (\mathbb{R}^n, +)$$

eine Abelsche Gruppe, mit  $0 := (0, \dots, 0)$  als neutrales Element

2.  $\cdot: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  Skalarmultiplikation.

$$(\lambda, x) \rightarrow \lambda \cdot x := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n). \text{ Dann gelten die folgenden Eigenschaften:}$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

- (a) Distributivität:  $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
- (b) Distributivität:  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
- (c) Assoziativität:  $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$
- (d) Einzelelement:  $1 \cdot x = x$

### Definition 2.15

Eine Menge  $\mathbb{V}$ , mit  $+$ ,  $\cdot$  und  $0 \in \mathbb{V}$  so dass  $(\mathbb{V}, +)$  eine Abelsche Gruppe mit neutralem Element  $0$  ist und zudem (a)-(d) gelten nennt sich ein Vektorraum über dem Körper  $\mathbb{R}$  und seine Elemente heißen Vektoren

Also ist  $\mathbb{R}^n$  ein Vektorraum. In der Linearen Algebra führt man dann Begriffe wie Basis usw. ein. Die Standardbasis von  $\mathbb{R}^n$  ist die Menge  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  wobei  $e_i := \{0, \dots, 0, 1, \dots, 0\}$

Jeder Vektor  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  besitzt eine eindeutige Darstellung  $x = \sum x_i e_i$  bezüglich der Standardbasis.

### Definition 2.16

1. Das Skalarprodukt zweier Vektoren  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$  ist die durch

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

definierte reelle Zahl

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ (orthogonal)}$$

## KAPITEL 2. REELE ZAHLEN, EUKLIDISCHE RÄUME UND KOMPLEXE ZAHLEN

2. Falls  $\langle x, y \rangle = 0$  heissen  $x$  und  $y$  senkrecht aufeinander.  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  besitzt folgende Eigenschaften

- (a) Symmetrie:  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- (b) Linearität:  $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle$
- (c) Positivität:  $\langle x, x \rangle \geq 0$  mit Gleichheit genau dann wenn  $x = 0$

### Definition 2.17

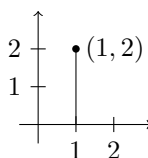
Die Norm  $\|x\|$  eines Vektors ist:

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

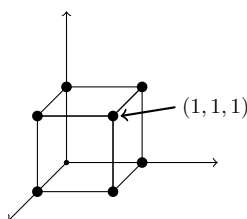
wird oft als Länge interpretiert.

### Beispiel 2.18

- $\|(1, 2)\| = \sqrt{1 + 4}$



- $\|(1, 1, 1)\| = \sqrt{3}$



- $\|e_i\| = 1, \langle e_i, e_j \rangle = 0. e_i \perp e_j$   
 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  ist eine orthonormale Basis. Sie sind orthogonal und auf Länge 1 normiert.

Die erste wichtige Eigenschaft eines Skalarprodukts ist

**Satz 2.19 (Cauchy-Schwarz)**

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$  gilt  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$  und

$$|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\| \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : x = \lambda y$$

Die Euklidische Norm hat die Eigenschaften

**Satz 2.20**

- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$  (Homogenität)
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (Dreiecks Ungleichung)

**Beweis**

ASK FOR BEWEIS

- ASK FOR BEWEIS

•

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \langle x, x + y \rangle + \langle y, x + y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + 2 \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &\leq \|x\|^2 + 2 \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2 \|y\| \|x\| + \|x\|^2 \end{aligned}$$

## 2.5 Die Komplexen Zahlen

Da für alle  $x \in \mathbb{R}$   $x^2 \geq 0$ , gibt es  $\sqrt{-1}$  nicht als reelle Zahl. Seit 18 Jahrhundert haben Mathematiker mit Ausdrücke  $a + b\sqrt{-1}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  gerechnet und auf sie die in  $\mathbb{R}$  geltenden Rechenregel angewandt, z.B.

$$(1 + 2\sqrt{-1})(1 - 2\sqrt{-1}) = 1^2 + 2^2 (\sqrt{-1})^2$$

Allgemein:

$$\begin{aligned} (a + b\sqrt{-1})(c + d\sqrt{-1}) &= ac + ad\sqrt{-1} + bc\sqrt{-1} + bd\sqrt{-1} \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)\sqrt{-1} \end{aligned}$$

Das Problem ist hier, dass  $\sqrt{-1}$  keinen präzisen Mathematisches Sinn hat und dass deshalb auch nicht klar ist, was “+” in “ $a + b\sqrt{-1}$ ” heissen soll.

Das Problem is wie folgt gelöst:

Chopped content, page  
42 middle

Als model von “ $a + b\sqrt{-1}$ ”,  $\mathbb{C}$ , nehmen wir  $\mathbb{R}^2$ . Wir haben schon eine Addition von vektoren und das neutral Element . Wir definieren dann die Multiplikation

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \rightarrow x \cdot y$$

wobei  $x \cdot y = (ac - bd, ad + bc)$ ,  $x = (a, b)$ ,  $y = (c, d)$ . Dann erfüllen “+” und “.” folgende Eigenschaften:

## KAPITEL 2. REELE ZAHLEN, EUKLIDISCHE RÄUME UND KOMPLEXE ZAHLEN

- Assos:  $((a, b)(c, d))(e, f) = (a, b)((c, d)(e, f))$
- Neutrales Element:  $(1, 0)(a, b) = (a, b)$
- Kommutativ:  $(a, b)(c, d) = (c, d)(a, b)$
- Inverses Element  $\forall (a, b) \neq (0, 0)$  in  $\mathbb{R}^2 \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2$  mit  $(a, b)(x, y) = (1, 0)$
- Distributivität:  $((a, b) + (c, d)) \cdot (e, f) = (a, b)(e, f) + (c, d)(e, f)$

### Definition 2.21

Der Körper der komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  ist  $\mathbb{R}^2$  versehen mit "+", "·",  $0 = (0, 0)$  und  $(1, 0) = 1$

### Bemerkung 2.22

$z^2 + 1 = 0$  hat in  $\mathbb{C}$  eine Lösung. Nämlich ist  $(0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -(1, 0) = 1$ . Wir führen für  $(0, 1)$  die Bezeichnung " $i$ " ein, das heisst Imaginäre Einheit.

Also ist  $i^2 = -1$ . Jede komplexe Zahl  $z = (x, y)$  lässt sich dann wie folgt darstellen:

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x \cdot 1 + y \cdot i$$

In der Rechnungen lässt man oft das 1 in  $x \cdot 1$  fallen und schreibt  $z = x + yi$

### Definition 2.22

1. Sei  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ 
  - $\operatorname{Re} z := x$  heisst der Realteil
  - $\operatorname{Im} z := y$  heisst der Imaginärteil
2. Die zu:  $z = x + iy$  konjugierte Zahl ist  $\bar{z} = x - iy$
3. Wir definieren die Norm von  $z$  als  $\|z\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

### Satz 2.23

- (i)  $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- (ii)  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
- (iii)  $z \cdot \bar{z} = \|z\|^2 \cdot 1$
- (iv)  $\|z_1 \cdot z_2\| = \|z_1\| \cdot \|z_2\|$

### Beweis

ASK FOR BEWEIS

ASK FOR BEWEIS

### Abkürzung

$$|z| := ||z||$$

### Bemerkung 2.24

Wir können  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{C}$  “einbetten” mittels  $\mathbb{R} \ni x \rightarrow (x, 0) \in \mathbb{C}$ . Sei  $\mathbb{C}_0 = \{(x, y) \in \mathbb{C} \mid y = 0\} = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ . Der Abbildung  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}_0, x \rightarrow (x, 0)$  ist eine Bijektion.

Diese Identifikation (von  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}_0$  ist verträglich mit den operationen in  $\mathbb{R}$  und in  $\mathbb{C}$ , d.h.

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

### Polarform

Not sure if this should be a title

Als Polarkoordinaten in die Ebene führen wir  $(r, \phi)$  ein



$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi & y &= r \sin \phi \\ z &= r (\cos \phi + i \sin \phi) \\ r &= |z| \end{aligned}$$

### Definition

Wir definieren (nach Euler)

$$e^{i\phi} := \cos \phi + i \sin \phi$$

$$z = r e^{i\phi} = |z| e^{i\phi}$$

Where does the definition end??

Aus die

??Additions?? page 45 bottom

- $\cos(\phi + \psi) = \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \sin \psi$
- $\sin(\phi + \psi) = \sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \psi$

In der Ebene  $\mathbb{R}^2$  stehen uns neben den kartesischen koordinaten  $x, y$  noch die Polarkoordinaten  $r, \phi$  zur Verfügung. Für beliebiges  $z = x + iy \neq 0$

## KAPITEL 2. REELE ZAHLEN, EUKLIDISCHE RÄUME UND KOMPLEXE ZAHLEN



$$e^{i\phi} = 1 \Leftrightarrow \phi = 2k\pi$$

$$\cos \phi + i \sin \phi = 1 \Leftrightarrow \cos \phi = 1 \text{ und } \sin \phi = 0$$

$$\Leftrightarrow \phi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} e^{i\theta} \cdot e^{i\phi} &= (\cos \theta + i \sin \theta) (\cos \phi + i \sin \phi) \\ &= \underbrace{\cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi}_{\cos(\theta+\phi)} + i \underbrace{(\cos \theta \sin \phi + \sin \theta \cos \phi)}_{\sin(\theta+\phi)} \\ &= e^{i(\theta+\phi)} \end{aligned}$$

folgt  $e^{i\phi} e^{i\psi} = e^{i(\phi+\psi)}$

Somit folgt für  $z = re^{i\theta}$ ,  $\omega = se^{i\phi} \in \mathbb{C}$  die einfache Darstellung  $z\omega = rse^{i(\theta+\phi)}$ ,

$$\frac{z}{\omega} = \left(\frac{r}{s}\right) e^{i(\theta-\phi)}$$

Die Polare Darstellung ist in Berechnungen sehr nützlich, insbesondere um das Produkt und die Division zu berechnen

### Beispiel

1.

$$z = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\omega = \sqrt{3} - i = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

$$\frac{(\sqrt{3} - i)^3}{(1 + i)^2} = \frac{\omega^3}{z^4} = \frac{8e^{-i\frac{\pi}{2}}}{4e^{i\pi}} = 2e^{-\frac{3\pi}{2}i} = 2e^{\frac{\pi}{2}i} = 2i$$

2. Die Polarform ist auch sehr nützlich um die wurzel einer Komplexen Zahl zu berechnen. Sei  $\omega \in \mathbb{C}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Wir möchten die Gleichung  $z^n = \omega$  lösen.

$$\omega = |\omega| e^{i\phi}$$

$$\begin{aligned} z^n = \omega &= |\omega| e^{i\theta} \Rightarrow z = |\omega|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{(\theta+2k\pi)}{n}} \\ &= |\omega| e^{i(\theta+2k\pi)} \end{aligned}$$

**Beispiel**

is this inside the other  
Beispiel or out??

$$z^3 = 1 \Rightarrow z^3 = (e^{2\pi i k})^{\frac{1}{3}} \in \{e^{i\pi \frac{2k}{3}} : k = 0, 1, 2\} = \{1, e^{2i\frac{\pi}{3}}, e^{4i\frac{\pi}{3}}\}$$

Allgemein Formel der Einheitswurzel  $z = \{e^{i\frac{2\pi k}{n}} : k = 0, 1, \dots, n-1\}$

**Bemerkung**

- (a) Es gibt keine mit der Körperoperationen verträgliche Ordnung von  $\mathbb{C}$
- (b) Hingegen ist  $\mathbb{C}$  im Unterschied zu  $\mathbb{R}$  algebraisch vollständig. Nicht nur die Gleichung  $x^2 + 1 = 0$  hat in  $\mathbb{C}$  eine Lösung, sondern es gilt der Fundamentalsatz der Algebra. Es sagt, dass jedes Polynom  $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$  vom Grad  $n \geq 1$  hat in  $\mathbb{C}$  genau  $n$  Nullstellen.