Kapitel 9

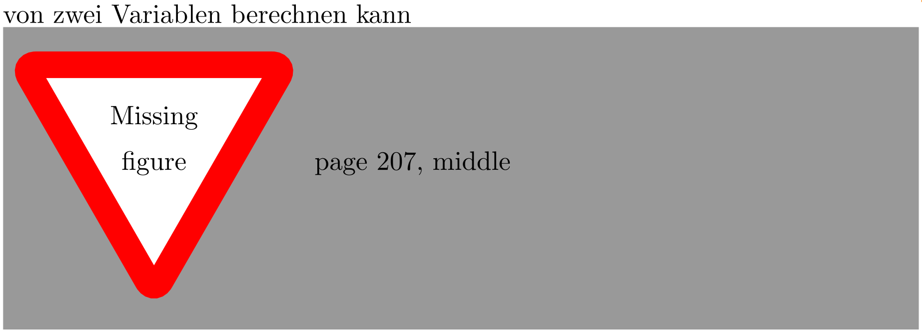
Integration in $\mathbb{R}^n$

Im Eindimensionalen hatten wir mit dem Integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

den Flächeninhalt unter dem Graphen von f berechnet. Wir suchen nach eine Verallgemeinerung mit der z.B. Volumen unter dem Graphen einer Funktion von zwei Variablen berechnen kann

can't understand word, page 207 middle



Erinnerung: Bestimmtes Riemann-Integral einen Funktion $f(x)$ über einem Interval $[a, b]$:

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

Das Integral I war als Grenzwert von Riemannscher Ober und Untersumme definiert (falls diese Grenzwert jeweils existieren und übereinstimmten).

Konstruktionsprinzip für Bereichsintegrale ist Analog. Aber die Definitionsbereich D ist komplizierter. Wir betrachten zunächst den Fall zweier Variabler, $n = 2$, und einen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}^2$ der Form

$$D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$$

d.h. D ist ein kompakter Quader (Rechteck). Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.

Definition 9.1

Mann nennt $Z = \{(x_0, x_1, \dots, x_n), (y_0, y_1, \dots, y_m)\}$ eine Zerlegung des Quaders $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ falls gilt

$$a_1 = x_0 < x_1 \cdots < x_n = b_1$$
$$a_2 = y_0 < y_1 \cdots < y_m = b_2$$

1. WHERE IS NUMBER 1??

2. Die Feinheit einer Zerlegung $Z \in Z(D)$ ist

$$\|Z\| := \max_{i,j} \{|x_{i+1} - x_i|, |y_{j+1} - y_j|\}$$

3. Für eine vorgegebene Zerlegung Z, nennt man die Mengen

$$Q_{ij} := [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$$

die Teilquader der Zerlegung Z. Das Volumen des Teilquaders Q_{ij} ist

$$\mathrm{vol}(Q_{ij}) := (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$$

4. Für beliebige Punkte $\xi_{ij} \in Q_{ij}$ der Jeweiligen Teilquader nennt man

$$R_f(Z) := \sum_{i,j} f(\xi_{ij}) \, \mathrm{vol}(Q_i j)$$

eine Riemannsche Summe zur Zerlegung Z

5. Analog zum Integral einer Variablen heissen für eine Zerlegung Z

$$U_f(Z) := \sum_{i,j} \inf_{\mathbb{X} \in Q_{ij}} f(\mathbb{X}) \, \mathrm{vol}(Q_i j)$$
$$O_f(Z) := \sum_{i,j} \sup_{\mathbb{X} \in Q_{ij}} f(\mathbb{X}) \, \mathrm{vol}(Q_i j)$$

die Riemannsche Untersumme bzw. Riemannsche Obersumme con $f(x)$

Bemerkung 9.2

1. Es gilt

$$U_f(Z) \leq R_f(Z) \leq O_f(Z)$$

d.h. eine Riemannsche Summe zur Zerlegung Z liegt stets zwischen der Unter und Obersumme dieser Zerlegung.

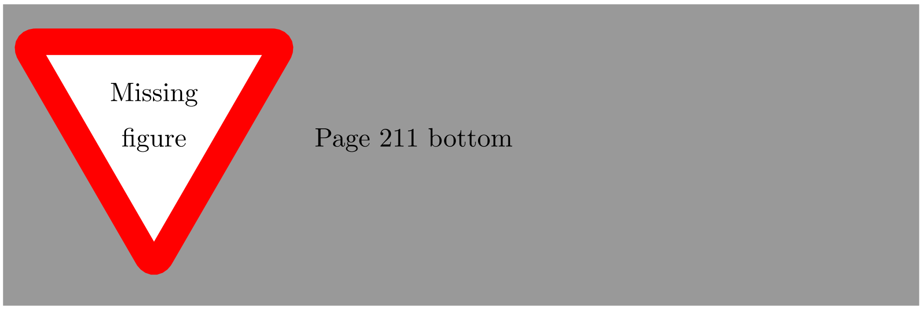
2. Entsteht eine Zerlegung Z_2 aus der Zerlegung Z_1 durch Hinzunahme wei-

terer zwischenpunkte x_i oder/und y_j so gilt

$$U_f(Z_2) \geq U_f(Z_1) \text{ und}$$
$$O_f(Z_2) \leq O_f(Z_1)$$

Für zwei beliebige Zerlegungen Z_1, Z_2 gilt stets

$$U_f(Z_1) \leq O_f(Z_2)$$



Definition 9.3

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ beschränkt

1. Riemannsche Unterintegral bsz. Riemannsche Oberintegral der Funktion $f(x)$ über D ist

$$U_f := \sup\{U_f(z) : z \in Z(D)\} := \underline{\int}_D f(x) d\mu$$

$$O_f := \inf\{O_f(z) : z \in Z(D)\} := \overline{\int}_D f(x) d\mu$$

2. Die Funktion $f(x)$ nennt man Riemann - integrierbar über D, falls Unter und Oberintegral übereinstimmen. Das Riemann Integral von $f(x)$ über D ist

$$\int_D f(x) d\mu = \overline{\int}_D f(x) d\mu = \underline{\int}_D f(x) d\mu$$

Bemerkung

In höheren Dimensionen, $n > 2$, ist die Vorgehensweise analog. Schreibweise: Für $n = 2$, $n = 3$

$$\int_D f(x, y)\, d\mu \text{ bzw. } \int_D f(x, y, z)\, d\mu$$

oder auch

$$\int_D f(x,y)\,dxdy \text{ bzw. } \int_D f(x,y,z)\,dxdydz$$

oder

$$\int_D f dxdy \text{ bzw. } \int_D f dxdydz$$

Satz 9.4 (Elementare Eigenschaften des Integrals)

1. Linearität: Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ beschränkt und R integrabel, $\beta, \alpha \in \mathbb{R}$. Dann sind αf, $f+g$ R - Integrabel

$$\int_D (\alpha f + \beta g)\,d\mu = \alpha \int_D f d\mu + \beta \int_D g d\mu$$

2. Monotonie: Gilt $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in D$, so folgt

$$\int_D f d\mu \leq \int_D g d\mu$$

3. Positivität: Gilt für alle $x \in D$, $f(x) \geq 0$ (d.h. $f(x)$ ist nichtnegativ), so folgt

$$\int_D f d\mu \geq 0$$

4. Abschätzung

$$\left| \int_D f(x) d\mu \right| \leq \sup_{x \in D} |f(x)| \operatorname{vol}(D)$$

5. Sind D_1, d_2, D Quader, $D = D_1 \cup D_2$ und $\operatorname{vol}(D_1 \cap D_2) = 0$, so ist f genau dann über D integrierbar, falls f über D_1 und über D_2 integrierbar ist und es gilt

$$\int_D f d\mu = \int_{D_1} f d\mu + \int_{D_2} f d\mu$$

(Gebietsadditivität)

9.1 Der Satz von Fubini

According to the notes it should be 9.2, which one is right??

Wie kann man das R - Integral konkret berechnen? Der Satz von Fubini hilft uns.

Satz 9.5 (Satz von Fubini)

Sei $Q = [a,b] \times [c,d] \in \mathbb{R}^2$ und sei $f \in C^\circ(Q)$. Dann gilt

$$\int\limits_Q f d\mu = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\, dy \right) dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)\, dx \right) dy$$

d.h. das Integral von f über Q kann iterativ durch 1−Dimensionale Integration bestimmt werden

Beispiel 9.6

1. Sei $f(x,y) = 2x + 2yx$, $Q = [0,1] \times [-2,2]$

$$\begin{aligned}\int\limits_Q f d\mu &= \int\limits_{-2}^{2} \left(\int\limits_0^1 (2x + 2yx)\, dx \right) dy \\ &= \int\limits_{-2}^{2} \left(x^2 + yx^2 \Big|_0^1 \right) dy \\ &= \int\limits_{-2}^{2} (1+y)\, dy = y + \frac{y^2}{2}\Bigg|_{-2}^{2} = 4\end{aligned}$$

<u>Oder:</u>

$$\begin{aligned}&\int\limits_0^1 \left(\int\limits_{-2}^{2} (2x + 2yx)\, dy \right) dx \\ &= \int\limits_0^1 \left(2xy + y^2x \Big|_{-2}^{2} \right) dx \\ &= \int\limits_0^1 [(4x+4x) - (-4x+4x)]\, dx \\ &= \int\limits_0^1 8x dx = 4x^2\Big|_0^1 = 4\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}&\int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} (e^x \sin y)\, dy dx \\ &= \int\limits_0^1 \left(-e^x \cos y \Big|_0^{2\pi} \right) dx \\ &= \int\limits_0^1 0 dx = 0\end{aligned}$$

Oder:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 e^x \sin y dx\right) dy \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\sin y e^x|_0^1\right) dy \\
&= \int_0^{2\pi}(e-1)\sin y dy \\
&= -(e-1)\cos y|_0^{2\pi} = 0
\end{aligned}$$

Geometrische Dehnung

Not sure about the text size...

In der Skizze ergibt sch als Volumen der markierten Schicht bei festem x und sehr kleinen Dicke dx näherungswege das Volumen

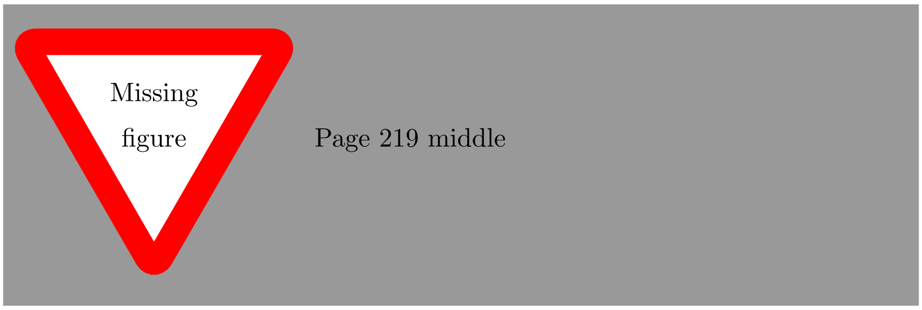
$$\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx$$

Das Aufaddieren sämtlicher Schichtvolumen entspricht gerader der Integration über die Variable x, d.h. für das gesuchte Volumen gilt

$$V = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx$$

Bis jetzt können wir nur Integrale über achsenparallel rechteckige bzw. quaderförmige Bereiche berechnen.

Das reicht für viele praktische Aufgaben nicht aus. Meist ist der Integrationsbereich D krummling oder zumindest anders begrenzt



Die meisten praktischen Aufgaben lassen sich auf die Integration über sogenannte Normalbereiche zurückführen.

Definition 9.10

1. Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^2$ heisst ein Normalbereich bezüglich der $x-$achse bzw. bezüglich der $y-$Achse falls es stetige Funktionen g, h bzw. $\overline{g}, \overline{h}$ gibt mit

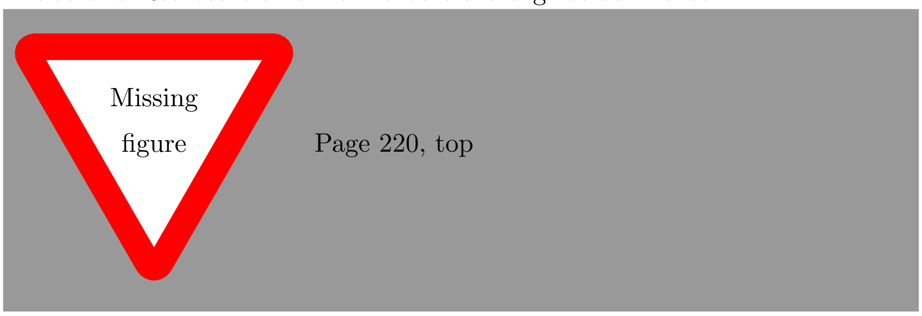
$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \text{ und } g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

bzw.

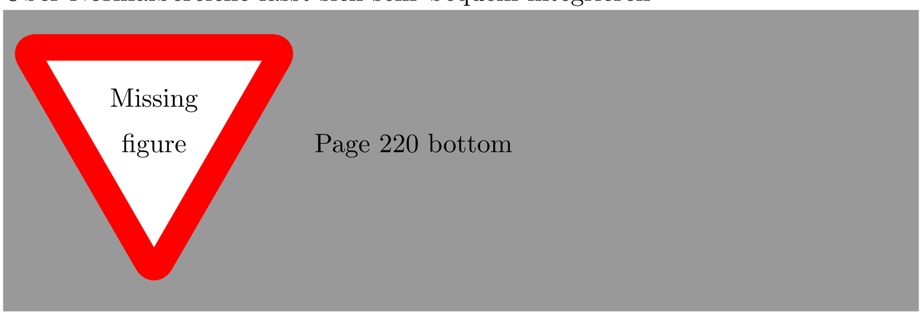
$$D = \left\{(x, y) \mid \overline{a} \leq x \leq \overline{b}, \text{ und } \overline{g}(x) \leq y \leq \overline{h}(x)\right\}$$

Beispiel

Kreise und Rechtecke sind Normalbereiche bzg. beider Achsen



Über Normalbereiche lässt sich sehr bequem integrieren



Die markierte Scheibe bei y =const. mit kleiner Dicke dx besitzt näherungsweise das Volumen

$$V(x) = \left(\int\limits_{g(x)}^{f(x)} f(x, y)\, dy \right) dx$$

Nun braucht man $V(x)$ nur noch über $[a, b]$ zu integrieren

$$V = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)\, dy \right) dx$$

Satz 9.11

1. Ist $f(x)$ stetig auf einem Normalbereich

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \text{ und } g(x) \leq y \leq h(x)\right\}$$

   so gilt

$$\int\limits_D f(x) d\mu = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)\, dy \right) dx$$

2. bzw. Falls

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{a} \leq x \leq \bar{b}, \text{ und } \bar{g}(x) \leq y \leq \bar{h}(x)\right\}$$

   so gilt

$$\int\limits_D f(x) d\mu = \int\limits_{\bar{a}}^{\bar{b}} \left(\int\limits_{\bar{g}(x)}^{\bar{h}(x)} f(x, y)\, dx \right) dy$$

Beispiel 9.12

1. Sei $f(x, y) = x - y$