Kapitel 4

Stetigkeit

4.1 Grenzwerte von Funktionen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine Teilmenge und $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung.

Definition 4.1
f hat an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}^d$ den *Grenzwert* a, falls für jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in Ω mit $x_k \to x_0\,(k \to \infty)$ gilt $f(x_k) \to a$.

Wir schreiben: $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$

Bemerkung: x_0 muss nicht im Definitionsbereich von f sein.

Definition 4.2
$f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ heisst *stetig* an der Stelle $x_0 \in \Omega$ falls:

1. f an der Stelle x_0 definiert ist,
2. $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert, und
3. $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Definition 4.2'
Die Abbildung $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ist im Punkt $x_0 \in \Omega$ *stetig*, falls für jede gegen x_0 konvergierende Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ in Ω, die Folge $(f(x_n))_{n\geq 1}$ zum Grenzwert $f(x_0)$ konvergiert, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$$

Anders gesagt:

- Grenzwerte von Folgen werden von stetigen Funktionen nicht verändert.

- Stetige Funktionen erhalten Grenzwerte von Folgen.

Definition 4.2"
Die Abbildung $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ist auf Ω *stetig* (oder *einfach stetig*, wenn der Kontex klar ist), falls f in jedem Punkt $x \in \Omega$ stetig ist.

Beispiele

Mittels Resultate aus dem dritten Kapitel haben wir wichtige Beispiele von stetigen Funktionen.

- Diese Funktion ist auf ganz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ stetig:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (a, b) &\mapsto (a + b) \end{aligned}$$

  (Seien $(a_n), (b_n)$ Folgen mit $a = \lim a_n, b = \lim b_n$. Dann ist die Folge $(a_n + b_n)$ konvergent, und $\lim a_n + b_n = a + b$, nach Satz 3.8)

- Diese Funktion ist auf ganz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ stetig:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (a, b) &\mapsto ab \end{aligned}$$

- Diese Funktion is auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^x$ stetig:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^x &\to \mathbb{R} \\ (a, b) &\mapsto a/b \end{aligned}$$

heisst die wirklich so?

- Aus wiederholter Anwendung von 1. und 2. ergibt sich die *Polynomiale Funktion*:

$$\text{Sei } n \geq 0,\ a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R} : p(x) := a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

  Die Polynomiale Funktion ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$.

- Die beiden folgenden Abbildungen sind stetig auf ihrem Definitionsbereich.

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d &\to \mathbb{R}^d \\ (a, b) &\mapsto (a + b) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d &\to \mathbb{R}^d \\ (\lambda, a) &\mapsto \lambda a \end{aligned}$$

- Die folgenden Abbildungen sind stetig.

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \bar{z} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ (z, w) &\mapsto z * w \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathbb{C} \times \mathbb{C}^x &\to \mathbb{C} \\ (z, w) &\mapsto z/w \end{aligned}$$

what goes there? p130 (week8sem1)

- Die folgenden Funktionen sind auf [...] stetig:

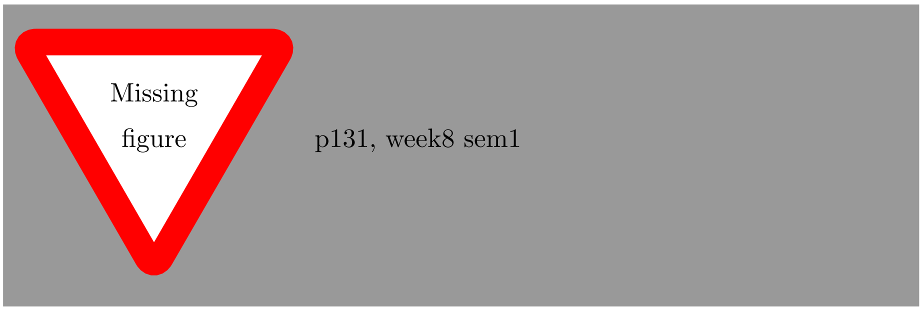
$$\begin{aligned} \mathbb{R}^d &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|x\| \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \mathbb{C} &\to \mathbb{R} \\ z &\mapsto |z| \end{aligned}$$

- Die charakteristische Funktion von $\mathbb{Q}$:

  Sei $f(x) = \mathcal{X}_{\mathbb{Q}} = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$

  Sei $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ fest mit $(x_k) \in \mathbb{Q}, x_k \to x$. Dann ist $f(x_k) = \mathcal{X}(x_k) = 1 \nrightarrow 0 = \mathcal{X}(x)$. (Zu $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, sei x_k die an der k-ten Nachkommastelle abgebrochene Dezimaldarstellung von x. Dann gilt $x_k \in \mathbb{Q}\ \forall k \in \mathbb{N}$ und $x_k \to x_1$.)

- Sei $f : \begin{cases} x & x < 1 \\ x & x > 1 \end{cases}$

  f ist in $x = 1$ nicht stetig, weil f an der Stelle $x = 1$ nicht definiert ist. In diesem Beispiel ist die Funktion f nicht stetig, aber sie ist eigentlich eine "gute" Funktion.

Does that really say gute?

no ozlem number...

Definition (Struwe 4.1.3 (ii))
$\Omega \subset \mathbb{R}^d, f : \Omega \to \mathbb{R}^n, x_0 \in \mathbb{R}^d\backslash\mathbb{Q}$ so dass $\exists (x_k) \in \Omega$ mit $\lim x_k = x_0$.

Dann ist f an der Stelle x_0 *stetig ergänzbar* falls $a = \lim f(x_k)$ existiert. In diesem Fall setzen wir

$$f(x_0 = a$$

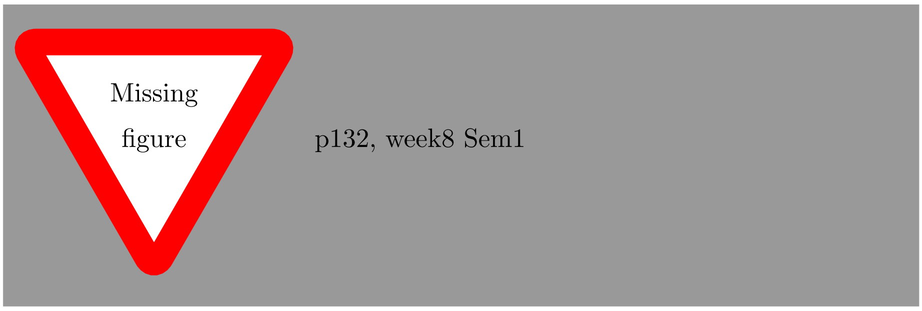
Die durch $f(x_0) = a$ ergänzte Funktion f ist offenbar stetig an der Stelle x_0.

offenbar $\to$ offensichtlich?

- Diese stückweise konstante Funktion ist stetig an jeder Stelle $x_0 \neq 0$. Sie ist jedoch für $a \neq b$ an der Stelle $x_0 = 0$ nicht stetig ergänzbar. (Struwe Beispiel 4.1.3 (vii))

$$f : \mathbb{R}^x \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{falls } x < 0 \\ b & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$



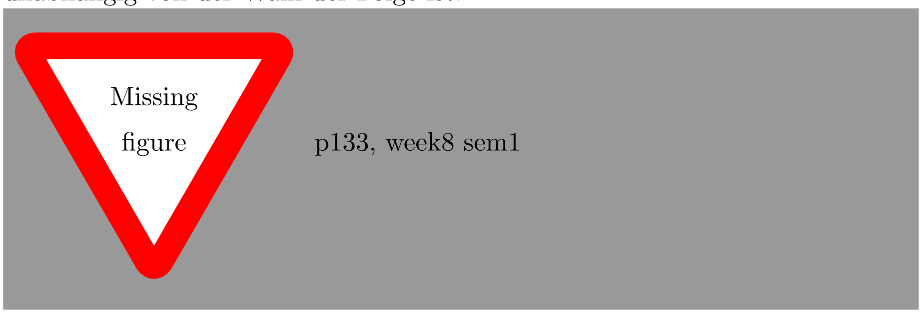
- Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ monoton wachsend, d.h. $\forall x, y \in (a, b)$ mit $x \leq y$ folgt $f(x) \leq f(y)$. Sei ausserdem $x_0 \in (a, b)$. Dann existieren die *links- und rechtsseitigen Grenzwerte*

$$f(x_0^+) := \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0 \\ x \downarrow x_0}} f(x), \qquad f(x_0^-) := \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0 \\ x \uparrow x_0}} f(x)$$

und f ist stetig an der Stelle x_0 genau dann, wenn $f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0)$.

Beweis

Wir behaupten, dass für jede Folge $(y_n)_{n \geq 1}$ mit $\{y_n : n \geq 1\} \subset (a, x_0)$ und $\lim y_n = x_0$ die Folge $(f(y_n))_{n \geq 1}$ kovergent und der linksseitige Limes $l_-(x_0)$ unabhängig von der Wahl der Folge ist.



Wir betrachten zuächst die "spezielle" Folge $x_n = (x_0 - \frac{1}{n})_{n \geq r}$. Hier ist r so gewählt, dass $x_0 - \frac{1}{r} \geq a$.
Dann ist $(f(x_0 - \frac{1}{n}))_{n \geq r}$ monoton wachsend ($x_0 - \frac{1}{n+1} > x_0 - \frac{1}{n}$ und f monoton wachsend) und $(f(x_0 - \frac{1}{n}))_{n > r}$ beschränkt ($f(a) < [...] < f(b)$).

missing in source material p134week8sem1

$$\text{Sei } l_- := \lim_{n \to \infty} f(x_0 - \frac{1}{n})$$

Wir möchten zeigen, dass für jede $(y_n) \subset (a, x_0)$ mit $\lim y_n = x_0$ $\lim f(y_n)$ existiert und $\lim f(y_n) = l_-$.

$= l_-$ oder $= l.$?

Da es für jedes $x < x_0$ ein n gibt, mit $x \leq x_0 - \frac{1}{n}$ folgt

$$f(x) \leq f(x_0 - \frac{1}{n} \leq l_-$$

unreadable p134 mid

Sei nun $(y_n)_{n>1}$ beliebig in $(?a?, x_0)$ mit $\lim y_n = x_0$. Sei $\varepsilon > 0$, $(y_n < x_0)$ und $n_0(\varepsilon)$ mit

$$l_- - \varepsilon < f(x_0 - \frac{1}{n}) \leq l_- \quad \forall n > n_0(\varepsilon)$$

Insbesondere

$$l_- - \varepsilon < f(x_0 - \frac{1}{n_0(\varepsilon)}) \leq l_-$$

Sei jetzt $n_1(\varepsilon) = n_1(n_0(\varepsilon)) > 0$ so dass

$$x_{n_0(\varepsilon)} = x_0 - \frac{1}{n_0(\varepsilon)} < y_n < x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n \quad \forall n \geq n_1(\varepsilon)$$

$$((y_n) < (a, x_0), \lim y_n = x_0)$$

Da f monoton ist, folgt

$$l_- - \varepsilon < f(x_0 - \frac{1}{n_0(\varepsilon)}) \leq f(y_n) \leq l_- = \lim f(x_n)$$

Insbesondere $\lim f(y_n) = l_-$.

Der Beweis für L_+ verläuft ganz analog.

Nun zur Stetigkeit: Es gilt immer

$$l_-(x_0) \leq f(x_0) \leq l_+(x_0)$$

Falls $l_-(x_0) < l_+(x_0)$ sei $(t_n)_{n\geq 1}$ wie folgt definiert:

$$t_n = \begin{cases} x_0 - \frac{1}{n} & n \text{ gerade} \\ x_0 + \frac{1}{n} & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Dann gilt $\lim t_n = x_0$. Aber $f(t_{2n+1}) - f(t_n) \geq l_+(x_0) - l_+(x_0) > 0$, woraus folgt dest $(f(t_n))_{n>1}$ nicht konvergent.
Falls $l_-(x_0) = l_+(x_0)$ folgt die Stetigkeit sofort.

dest? p 135 bottom

Satz 4.3

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Dann ist die Menge der Unstetigkeitspunkte von f entweder endlich oder abzählbar.

Beweis

Sei $U(f) = \{x \in (a, b) : f$ ist nicht stetig an x$\}$. Dann ist $\forall x \in U(f), \quad l_-(x) < l_+(x)$ und wir wählen ein $g(x) \in ??n(l_-(x), l_+(x))$. Falls $x_1 < x_2$ in $U(f)$ folgt $l_+(x_1) < l_-(x_2)$ und somit $g(x_1) < g(x_2)$. Damit ist $g : U(f) \to ??$ injektiv.
Stetigkeit verhält sich gut mit den üblichen Operationen auf Funktionen.

unreadable.. p136 mid

same unreadable character

verträgt?

Satz 4.4

Seien $f, g : \Omega \to \mathbb{R}^n$ und $x_0 \in \Omega$. Falls f und g in x_0 stetig sind, so sind es auch $f + g$ und $\alpha f,\ \alpha \in \mathbb{R}$.

Korollar 4.5

Falls f, g auf Ω stetig sind, so sind es $f + g$ und αf.

Definition 4.6

$$C(\Omega, \mathbb{R})$$

bezeichnet die Menge der stetigen Abbildungen $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Nach Korollar 4.5 ist es ein Vektorraum.

Satz 4.7

Seien $f : \Omega \to \mathbb{R}^n, \Omega \subset \mathbb{R}^d$ und $g : \Gamma \to \mathbb{R}^m$ mit $f(\Omega) \subset \Gamma$ und $x_0 \in \Omega, y_0 = f(x_0) \subset \Gamma$. Falls f in x_0 und g in y_0 stetig sind, folgt, dass $g \circ f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ in x_0 stetig ist.

Beweis

Sei $(t_n)_{n\geq 1}$ in Ω mit $\lim t_n = x_0$. Da f stetig ist, $\lim f(t_n) = f(x_0) = y_0$, und aus der Stetigkeit von g folgt, dass

$$\lim_{n\to\infty} g(f(t_n)) = g(y_0) = (g \circ f)(x_0)$$

Korollar 4.8

Falls $f : \Omega \to \mathbb{R}^d, f(\Omega) \subset \Gamma$ und $g : \Gamma \to \mathbb{R}^m$, auf Ω bzw auf Γ stetig sind, so folgt, dass $g \circ f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ auf Ω stetig ist.

4.2 Stetige Funktionen