§7 Gewöhnliche Differenzialgleichungen
DGL

Eine Gleichung, in der Ableitungen einer gesuchte Funktionen auftreten, nennt man Differentialgleichung.

$$y'(t) = y + y^2$$

$$(y'(t))^2 = y(t) + 2$$

○ Hängt die gesuchte Funktion in der DGL nur von einer einzigen variablen ab, so spricht man von einer "gewöhnliche DGL".

Hängt hingegen die gesuchte Funktion von mehreren Variablen ab, d.h kommen partielle Ableitungen in der Differentialgleichu

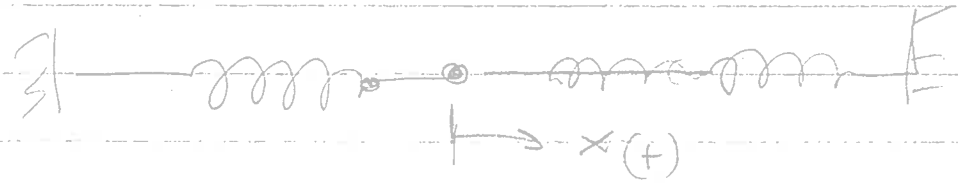
○ vor, so liegt eine "Partielle DGL" vor.

Viele physikalische Prozesse lassen sich oft durch Differenzialgleichungen beschreiben

z.B. (1) Ein lineares Federpendel wird durch folgende DGL beschrieben

Federkonstante

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -Kx$$



Unbekannt ist hier die Auslenkung x in Abhängigkeit von der Zeit t.

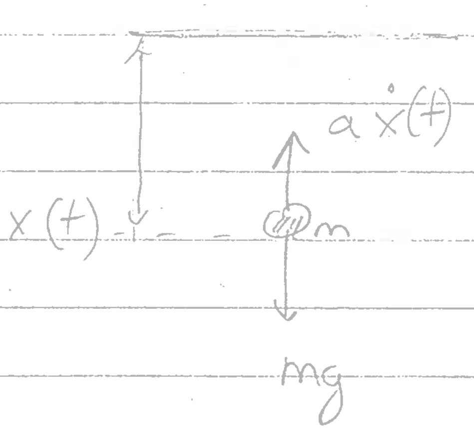
(2) Beim radioaktiven Zerfall, haben wir

$$\frac{d f(t)}{dt} = -\alpha f \qquad f(0) = f_0$$

wobei $f(t)$ = die noch vorhandeden Masse eines Stoffes.

Pro Zeiteinheit zerfallende Masse ist proportional zur noch vorhanderen Masse

(3) Freier Fall mit Reibung:



Sei m eine Massepunkt der Unter Einfluss der Schwerkraft fällt. Es kann auch 'ein' Reibungskraft geben.

Die Grösse der Reibungskraft ist proportional zur Geschwindigkeit.

Dann ist, nach der zweiten Newtonische Gesetzt

$$m\ddot{x} = mg - a\dot{x} \qquad v = \frac{dx}{dt}$$

Beim Bsp ②, haben wir schon letzte Semester gesehen dass

DGL $\frac{df(t)}{dt} = -\alpha f$

als eine Lösung $Ke^{-\alpha t}$ hat, $K \in \mathbb{R}$.

$$f' = -\alpha f$$

$$\Rightarrow \frac{f'}{f} = -\alpha$$

$$\int \frac{f'(t)}{f(t)} dt = -\int \alpha \, dt$$

$$\ln|f(t)| = -\alpha t + C$$

$$\Rightarrow f(t) = Ke^{-\alpha t} \quad \text{mit} \quad K = e^{+C}$$

Alle 3 Bsp sind Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten.

§ 7.1 Lineare DGL mit konstante Koeff.

Defn 7.1

Eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung hat die Gestalt

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = b(x)$$

mit $a_i(x)$, $i = 0, \dots, n-1$, $b(x)$ Funktionen.

Ist das so genannte Störfunktion $b(x)$ konstant gleich 0, so heisst die DG homogen, anderfalls inhomogen.

Im Falle $a_i(x) = a_i$ Konstanten, heisst die LDG, LDG mit Konstanten Koeffizienten.

In diesem Abschnitt betrachten wir DGL mit konstante Koeffizienten

Eine DGL ist genau dann linear wenn alle Potenzen der gesuchten Funktion und deren Ableitung(en) nur mit Potenz 1 vorkommen.

z.B $(y')^2 + y^2 = 1$ ist nicht linear

$y' = 2xy$ ist linear

$y' = \sqrt{y} + 1$ ist nicht linear

$y'' + 2y' + x = 0$ ist linear.

Zunächst betrachten wir Homogene LDG mit konstanten Koeffizienten

Sei $y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 = 0$. (H)

wobei $a_i \in \mathbb{R}$. $i = 0, \ldots, n-1$.

Defn 7.2 Das charakteristische Polynom der Gleichung (H) ist gegeben durch

$$p(t) := t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_0$$

Lemma 7.3 Die Funktion $y(x) = e^{\lambda x}$

Ist genau dann Lösung von (H.) Falls

$p(\lambda) = 0$.

Beweis: $y(x) = e^{\lambda x}$

$y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$

$y^{j}(x) = \lambda^{j} e^{\lambda x}$

Also mit

$0 = y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_0 =$

$\left(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0\right) e^{\lambda x}$

$\Leftrightarrow \quad \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0 = p(\lambda) = 0$.

Satz 7.4 Sei $p(\lambda) = \prod_{i=1}^{\ell} (\lambda - \lambda_i)^{m_i}$ mit, $\lambda_j \in \mathbb{C}$

$\lambda_i \neq \lambda_j \ (i \neq j)$. Dann ist jede Lösung

der zugehörigen HDGL darstellbar als

Linearkombination der n linear unabhängigen

Funktionen $y_{ik}(x) = x^k e^{\lambda_i x}$ $1 \leq i \leq \ell$ $0 \leq k \leq m_i$

Bmk 7.5 ① Falls die characterischen Polynom n verschiedene reelle Nullstelle $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ besizt, so bilden

$$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$$

eine Basis des Vektorraums der Lösungen.

d.h für jede Lösung $y(x)$ gibt es

$c_1, c_2, \dots c_n$ s.d

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x}$$

② sei λ eine k-fache reelle Nullstelle ~~des~~ char. polys. Dann sind

$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda x}$ k linear

unabhängige Lösungen.

③ Sind $\lambda = \alpha + i\beta$, $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$, $b \neq 0$

ein Paar konjugiert komplexer k-fache nullstellen, so sind die Funktionen

$e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ $\qquad$ $e^{\alpha x}\sin(\beta x)$

$x e^{\alpha x}\cos(\beta x)$

$x^{k-1} e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ $\qquad$ $x^{k-1} e^{\alpha x}\sin\beta x$

$2k$ linear unabhängige Lösungen der DGL.

$$\left(e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x}\cos\beta x + i e^{\alpha x}\sin\beta x \right)$$

<u>Bsp. 7.6</u> ① $y'' - y = 0$.

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 1 = 0 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

$$y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$$

② $y'' + y = 0$

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 1 = (\lambda + i)(\lambda - i) \qquad \alpha = 0,\ \beta = 1$$

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

③ $y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0$

$p(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0 = (\lambda^2+1)^2 = (\lambda - i)^2(\lambda + i)^2$

Also $\cos x$ $\sin x$

$x\cos x$ $x\sin x$ sind Lösungen

$y(x)_1 = c_1 \cos x + c_2 x\cos x + c_3 \sin x + c_4 x \sin x$

④ $y^{(4)} - y = 0$ $p(\lambda) = t^4 - 1$

$(t^2-1)(t^2+1)$

$(t+1)(t-1)(t+i)(t-i)$

$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \sin x + c_4 \cos x$

⑤ $2y'' + 20y' + 48y = 0$

$p(\lambda) = 2\lambda^2 + 20\lambda + 48 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -4, -6$

Die Lösung ist

$y(x) = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{-6x}$

§7.2 Inhomogene DGL

Bisher haben wir nur homogene lineare DGL mit kostanten Koeff. betrachtet.

Sehr oft treten auch Zusatzterme in den Gleichungen auf.

Wir haben der Folgende Allgemeine Satz für die Lösungsstruktur linearer DGL.

Satz 7.7 Die allgemeine Lösung einer inhomogenen DGL

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b(x)$$

ist die Summe einer "speziellen Lösung der inhomogenen DGL und der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen DGL.

$$y_A(x) = y_S(x) + y_{AH}(x)$$

$y_{AH}(x)$ → allgem. Lösung der Hom. DGL.

$y_S(x)$ → speziel Lösung der inhom DGL

$y_A(x)$ → allgem Lösung der inhom. DGL

Bsp $y'' + y = \sin x$.

Um diese inhomogene DGL zu lösen, benötigen wir die allgemeine Lösung der zugehörigen hom. DGL $y'' + y = 0$

$p(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow y_{AH}(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x$

Nun wird noch eine spezielle Lösung der Inhom. DGL $y'' + y = \sin x$ benötigt

Wir verifizieren dass $y(x) = -\frac{1}{2} x \cos x$ eine derartige Lösung ist.

$$y'(x) = -\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2} x \sin x$$

$$y''(x) = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2} x \cos x$$

$$= \sin x + \frac{1}{2} x \cos x$$

$$y''(x) + y(x) = \sin x + \frac{1}{2} x \cos x - \frac{1}{2} x \cos x = \sin x \quad \checkmark$$

Die allgemeine Lösung der inh. DGL ist damit

$$y(x) = \underbrace{-\frac{1}{2}x\cos x}_{\text{spez. Lösung inhom DGL}} + \underbrace{c_1 \sin x + c_2 \cos x}_{\text{Allg. Lösung hom DGL}}$$

Bmk Man kann als speziel Lösung der inhom DGL auch

$y(x) = -\frac{1}{2}x\cos x + 5\sin x$ wählen

Denn gilt auch hier $y'' + y = \sin x$.

Die allg Lösung der inhom DGL:

$$y(x) = \underbrace{-\frac{1}{2}x\cos x + 5\sin x}_{\text{spez Lösung inhom DGL}} + \underbrace{k_1 \sin x + k_2 \cos x}_{\text{all. Lösung hom. DGL}}$$

Sie unterscheidet sich nicht von der Lösung

$$y(x) = -\frac{1}{2}x\cos x + C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

$$C_1 = 5 + k\,!$$

F- Wie kann man eine spezielle Lösung finden?

A: Zur Lösung der inhomog DGL kann man in vielen Fällen einen so genannten "Ansatz vom Typ der rechten Seite" wählen.

Hier geht man davon auss, dass die Lösung die gleiche Gestalt wie die Störfunktion haben wird.

z.B: Ist die Störfunktion ein Polynom, so nimmt man an, dass die spezielle Lösung auch ein Poly. sein wird

Ist die Störfunk ein expontialfunk so nimmt man an, dass die Lösung auch ein exponentialfunk sein wird

...

Bsp 7.8: Wir betrachten die DGL

$$y'' + y' - 6y = 3e^{-4x}$$

Die zugehörige Hom DGL

$$y'' + y' - 6y = 0$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = 2, -3$$

Die Allg Lösung der Hom DGL ist

$$y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x}.$$

Zur Lösung der inhom DGL verwenden wir einen "Ansatz vom Typ der Rechten seite", gehen also davon aus, dass die spezielle Lösung der inhom DGL die ähnliche Gestalt hat (als die Störfnkt)

$$y_s(x) = Ke^{-4x}$$

Für die Ableitungen des Ansatzes haben wir

$$y_s'(x) = -4Ke^{-4x}$$

$$y_s''(x) = 16Ke^{-4x}$$

Eingesetzt in die inhom. DGL ergibt sich

$$y'' + y' - 6y = 16Ke^{-4x} - 4Ke^{-4x} - 6Ke^{-4x}$$

$$= 6Ke^{-4x} = 3e^{-4x}$$

Also $6K = 3 \Rightarrow K = 1/2$. Damit ist

$$y_s(x) = \frac{1}{2} e^{-4x}$$

und die allg Lösung der DGL

$$y(x) = \frac{1}{2}e^{-4x} + c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(2) $y'' + y' - 6y = 50\sin x$

Wählen wir als "Ansatz vom Typ der rechten Seite"

$$y_s(x) = K_1 \sin x + K_2 \cos x$$

$$y_s'(x) = K_1 \cos x - K_2 \sin x$$

$$y_s''(x) = -K_1 \sin x - K_2 \cos x$$

$$\begin{aligned} y'' + y' - 6y &= -K_1 \sin x - K_2 \cos x \\ &\quad - K_2 \sin x + K_1 \cos x \\ &\quad - 6K_1 \sin x - 6K_2 \cos x \\ &= (-7K_1 - K_2)\sin x + (-7K_2 + K_1)\cos x \\ &= 50 \sin x \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad -7K_2 + K_1 = 0 \quad \Rightarrow K_1 = +7K_2$

$-7K_1 - K_2 = 50 \Rightarrow -49K_2 - K_2 = 50$

$\Rightarrow K_2 = -1, \quad K_1 = -7$

$y_s(x) = -7\sin x - \cos x$

Damit ist die allg Lösung der inhom DGL

$$y(x) = -7\sin x - \cos x + c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x}.$$

Ein problem ergibt sich, wenn als Störfunk. eine Lösung der homog DGL erscheint:

③ z.B

$$y'' + y' - 6y = e^{2x}$$

"Der Ansatz vom Typ der rechten Seite"

$y(x) = Ke^{2x}$ führt nicht weiter

da dieser Ansatz eingesetzt in hom. DGL 0 ergeben muss und nicht e^{2x}!.

Wir führen nun den Ansatz

$$y(x) = Kxe^{2x}.$$

$y'(x) = Ke^{2x} + 2Kxe^{2x}$
$y''(x) = 2Ke^{2x} + 2Ke^{2x} + 4Kxe^{2x}$

$$y'' + y' - 6y = 4Kxe^{2x} + 4K \cdot e^{2x}$$
$$2Kxe^{2x} + Ke^{2x}$$
$$- 6Kxe^{2x}$$
$$= 5Ke^{2x} = 10e^{2x}$$

$\Rightarrow K = 2$

Der Ansatz führte also auf die Lösung

$$y_S(x) = 2xe^{2x}$$

Insgesamt: $y(x) = 2xe^{2x} + c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x}$,

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Bsp.

(4) $y'' + y = \sin x$

$y_{OH} = c_1 \sin x + c_2 \cos x$

Für die spezielle Lösung zu finden, wählen wir den Ansatz vom Typ der R. seite

: $y_S(x) = x(K_1 \sin x + K_2 \cdot \cos x)$

$y_S'(x) = (K_1 \sin x + K_2 \cos x) + x\,(K_1 \cos x - K_2 \sin x)$

$$y_s''(x) = K_1 \cos x - K_2 \sin x$$
$$+ K_1 \cos x - K_2 \sin x + x(-K_1 \sin x - K_2 \cos x)$$

Eingesetzt in die DGL ergibt sich

$$y_s''(x) + y(x) = 2K_1 \cos x - 2K_2 \sin x - x(K_1 \sin x + K_2 \cos x)$$
$$+ x(K_1 \sin x + K_2 \cos x)$$

$$= 2K_1 \cos x - 2K_2 \sin x = \sin x$$

$$\Rightarrow 2K_1 = 0, \quad -2K_2 = 1 \Rightarrow K_1 = \frac{-1}{2}$$

$\Rightarrow$ $\underline{y_s(x) = \frac{-1}{2}x\cos x}$ wie wir schon verifiziert haben (s. 87)

$$y_A = \frac{-1}{2}x\cos x + c_1 \sin x + c_2 \cos x.$$