

Kapitel 2

Reelle Zahlen, Euklidische Räume und Komplexe Zahlen

2.1 Elementare Zahlen

Natürliche Zahlen	\mathbb{N}	$=$	$\{0, 1, 2, \dots\}$	addieren und multiplizieren
	\cap			
Ganze Zahlen	\mathbb{Z}	$=$	$\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$	subtrahieren
	\cap			
Rationale Zahlen	\mathbb{Q}	$=$	$\left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$	dividieren

Viele Gleichungen haben keine Lösung in \mathbb{Q} .

Satz 2.1

Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Dann hat $x^2 = p$ keine Lösung in \mathbb{Q} .

Beweis

Zur Erinnerung: Zwei Natürlichen Zahlen a und b sind teilerfremd (oder relativ prim) wenn es keine natürliche Zahl ausser der Eins gibt, die beide Zahlen teilt.

$$\text{ggT}(a, b) = 1 \quad (\text{grösster gemeinsamer Teiler} = 1)$$

Indirekter Beweis

Wir nehmen an, dass es $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ gibt mit $x^2 = p$, wobei a, b teilerfremd und ≥ 1 sind. Dann gilt

$$a^2 = pb^2$$

woraus folgt, dass p a teilt, also ist $a = pk$, $k \in \mathbb{N}$ und somit

$$a^2 = p^2 k^2 = pb^2 \Rightarrow pk^2 = b^2$$

woraus folgt, dass p b teilt.

2.2 Die Reellen Zahlen

Wir werden jetzt das System von Axiomen beschreiben, das die Menge der reellen Zahlen “eindeutig” charakterisiert.

Die Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen ist mit zwei Verknüpfungen “+” (Addition) und “ \cdot ” (Multiplikation) versehen, sowie mit einer Ordnungsrelation \leq . Die Axiome werden wie folgt gruppiert:

1. **$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein Körper**

Es gibt zwei Operationen (zweistellige Verknüpfungen)

- $+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $(a, b) \mapsto a + b$
- $\times: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $(a, b) \mapsto a \cdot b$

und zwei ausgezeichnete Elemente 0 und 1 in \mathbb{R} , die folgende Eigenschaften haben:

Kommutativität	A1)	$x + y = y + x$
Assoziativität	A2)	$(x + y) + z = x + (y + z)$
Neutrales Element	A3)	$x + 0 = x = 0 + x$
Inverses Element	A4)	$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \text{ mit } x + y = 0 = y + x$
Kommutativität	M1)	$x \cdot y = y \cdot x$
Assoziativität	M2)	$(xy)z = x(yz)$
Neutrales Element	M3)	$x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$
Inverse Element	M4)	$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0 \exists y \in \mathbb{R} \text{ mit } xy = 1 = yx$

und die Multiplikation ist verträglich mit der Addition im Sinne des Distributivitätsgesetzes (D)

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x(y + z) = xy + xz$$

- $(\mathbb{R}, +)$ mit A1→A4 ist eine Abelsche Gruppe bezüglich der Addition.
- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ mit A1→A4, M1→M4 und D ist ein Zahlkörper.

Bemerkung 2.2

Eine Menge G , versetzt mit Verknüpfung $+$ und dem neutralen Element 0, die den obigen Eigenschaften A2→A4 genügt, heisst Gruppe.

Eine Menge K versetzt mit Verknüpfung $+, \cdot$ und Elementen $0 \neq 1$, die den obigen Eigenschaften A1→A4, M1→M4, D genügt, heisst Körper.

Folgerung 2.3

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

KAPITEL 2. REELLE ZAHLEN, EUKLIDISCHE RÄUME UND
KOMPLEXE ZAHLEN

- | | | |
|---|---|---|
| i) $a + b = a + c \Rightarrow b = c$ und 0 ist eindeutig, d.h. falls $z \in \mathbb{R}$ der
Eigenschaft $a + z = a \ \forall a \in \mathbb{R}$ genügt, so folgt $z = 0$.

ii) $\forall a, b \in \mathbb{R}, \exists!$ (eindeutig bestimmtes) $x \in \mathbb{R} : a + x = b$. Wir
schreiben $x = b - a$ und $0 - a = -a$ ist das additive Inverse zu
a .

iii) $b - a = b + (-a)$

iv) $-(-a) = a$ | } | A |
| v) Aus $ab = ac$ und $a \neq 0$ folgt $b = c$. Das bzgl. der Multiplikation
neutrale Element 1 ist eindeutig, d.h. falls $x \in \mathbb{R}$ der Eigenschaft
$ax = a \ \forall a \in \mathbb{R}$ genügt, so folgt $x = 1$

vi) $\forall a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, \exists! x \in \mathbb{R} : ax = b$. Wir schreiben $x = \frac{b}{a}$ und
$\frac{1}{a} = a^{-1}$ ist das multiplikative Inverse zu a .

vii) Falls $a \neq 0 \Rightarrow (a^{-1})^{-1} = a$ | } | M |
- viii) $\forall a \in \mathbb{R}, a \cdot 0 = 0$
 ix) Falls $ab = 0$, dann folgt $a = 0$ oder $b = 0$

Beweis 2.3

- (a) Sei $a + b = a + c$
 $A4 \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R} : a + y = 0$
 $a + b = a + c \Rightarrow y + (a + b) = y + (a + c)$
 $\xRightarrow{A2} (y + a) + b = (y + a) + c$
 $\Rightarrow 0 + b = 0 + c \xRightarrow{A3} b = c$
 Nehmen wir an, dass es $0' \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $x + 0' = x, \forall x \in \mathbb{R}$, d.h.
 es gibt ein zweites neutrales Element für +.

Dann $0 + 0' = 0$ aber auch $A3 \Rightarrow 0 + 0 = 0 \Rightarrow 0 + 0' = 0 + 0 \Rightarrow 0 = 0'$

- (b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, und sei $y \in \mathbb{R}$ mit $a + y = 0$. Definieren wir $x :=$
 $y + b \Rightarrow a + x = a + (y + b) = (a + y) + b = 0 + b = b$
 \Rightarrow es gibt mindestens eine Lösung der Gleichung $a + x = b$. Von i)
 folgt, dass x eindeutig bestimmt ist $a + x = b = a + x' \Rightarrow x = x'$
- (c) Seien $x = b - a, y = b + (-a)$. Wir wollen beweisen, dass $x = y$.

Aus i) wissen wir, dass $b - a$ eine Lösung von $a + x = b$

$$y + a = (b + (-a)) + a = b + ((-a) + a) = b + 0 = b$$

$\Rightarrow y$ ist auch eine Lösung.

Weil die Lösung von $a + x = b$ eindeutig bestimmt ist, folgt $y = x$.

- (d)
(e)
(f)

(g)

(h) $\forall a \in \mathbb{R}, a \cdot 0 = 0$

$$a \cdot 0 = a(0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0 \Rightarrow a \cdot 0 = 0$$

(i) $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ oder $b = 0$

Wir nehmen an: $a \neq 0$ mit multiplikativem Inversem a^{-1} , (a^{-1} existiert mittels M4). So folgt $b = 1 \cdot b = (a^{-1} \cdot a) b = a^{-1}(a \cdot b) = a^{-1} \cdot 0 = 0$

2. Ordnungssaxiome \leq

Auf \mathbb{R} gibt es eine Relation \leq , genannte Ordnung, die folgenden Eigenschaften genügt

(a) Reflexivität: $\forall x \in \mathbb{R}: x \leq x$

(b) Transitivität: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$

(c) Identität: $\forall x, y \in \mathbb{R}: (x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow x = y$

(d) Die Ordnung ist total: $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y$ gilt entweder $x \leq y$ oder $y \leq x$

Die Ordnung ist konsistent mit $+$, und \cdot .

(a) $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$

(b) $x, y \geq 0 \Rightarrow xy \geq 0$

Mit \leq hat man auch $\geq, <, >$. Wir verzichten auf eine Auflistung aller Folgerungen und beschränken uns auf einige wichtigen Folgerungen.

Folgerungen 2.4

i) $x \leq 0$ und $y \leq 0 \Rightarrow xy \geq 0$

ii) $x \leq 0$ und $y \geq 0 \Rightarrow xy \leq 0$

iii) $x \leq y$ und $z \geq 0 \Rightarrow xz \leq yz$

iv) $1 > 0$

v) $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0$

vi) $0 < 1 < 2 < 3 < \dots$

vii) $\forall x > 0: x^{-1} > 0$

{Annahme: $x^{-1} \leq 0$. Nach Multiplikation mit $x > 0$ folgt (mittels ii) $1 = x^{-1} \cdot x \leq 0 \cdot x = 0$ }

Bemerkung 2.5

\leq auf \mathbb{Q} genügt den obigen Eigenschaften. Die entscheidende weitere Eigenschaft von \mathbb{R} ist die *Ordnungsvollständigkeit*.

KAPITEL 2. REELLE ZAHLEN, EUKLIDISCHE RÄUME UND KOMPLEXE ZAHLEN

3. Ordnungsvollständigkeit - Vollständigkeitsaxiome

Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ nicht leere Teilmengen von \mathbb{R} , so dass $a \leq b$ für alle $a \in A, b \in B$. Dann gibt es $c \in \mathbb{R}$ mit $a \leq c \leq b \quad \forall a \in A, b \in B$

Bemerkung 2.6

Die rationalen Zahlen \mathbb{Q} erfüllen diese Eigenschaften nicht!

Seien

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0, x^2 \leq 2\}$$

$$B = \{y \in \mathbb{Q} \mid y \geq 0, y^2 \geq 2\}$$

Dann gilt $a \leq b \quad \forall a \in A, b \in B$. Aber ein $c \in \mathbb{Q}$, mit $a \leq c \leq b$ würde dann $c^2 = 2$ erfüllen! In Satz 2.1 haben wir gesehen dass $x^2 = p$ keine Lösung in \mathbb{Q} hat.

Wir definieren jetzt für $x, y \in \mathbb{R}$

$$\max\{x, y\} = \begin{cases} x & \text{falls } y \leq x \\ y & \text{falls } x \leq y \end{cases}$$

Insbesondere ist der Absolutbetrag einer Zahl $x \in \mathbb{R}$, $|x|$

$$|x| := \max\{x, -x\}$$

Für diesen gilt folgender wichtiger Satz

Satz 2.7

- i) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Dreiecksungleichung)
- ii) $|xy| = |x||y|$

Beweis 2.7

- i) $x \leq |x|, -x \leq |x|$
 $y \leq |y|, -y \leq |y|$
und $x + y \leq |x| + |y|, -(x + y) \leq |x| + |y|$
woraus $|x + y| \leq |x| + |y|$ folgt

- ii) ASK FOR BEWEIS

ASK FOR BEWEIS

Satz (Youngsche Ungleichung)

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ gilt $2|ab| \leq \delta a^2 + \frac{b^2}{\delta}$

2.3 Infimum und Supremum

Im Zusammenhang mit der Ordnung führen wir einige wichtige Definitionen ein:

Definition 2.8

Sei $X \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge

- a) X ist nach oben beschränkt, falls es $c \in \mathbb{R}$ gibt, mit $x \leq c, \forall x \in X$. Jedes derartige c heisst eine obere Schranke für X .
- b) X ist nach unten beschränkt, falls es $c \in \mathbb{R}$ gibt, mit $x \geq c, \forall x \in X$. Jedes derartige c heisst untere Schranke für X .
- c) X ist beschränkt, falls sie nach oben und unten beschränkt ist.
- d) Ein Element $a \in X$ ist ein maximales Element (oder Maximum) von X falls $x \leq a, \forall x \in X$. Falls ein Maximum (bzw. Minimum) existiert, wird es mit $\max X$ ($\min X$) bezeichnet. Falls X keine obere Schranke hat, ist X nach oben unbeschränkt (analog für untere Schranke).

Beispiel 2.9

1. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ ist nach oben unbeschränkt. A ist nach unten beschränkt. Jedes $a \in \mathbb{R}, a \leq 0$ ist eine untere Schranke.
2. $B = [0, 1]$ ist nach oben und nach unten beschränkt.
 - 0 ist ein Minimum von B
 - 1 ist ein Maximum von B
3. $C = [0, 1)$ ist nach oben und nach unten beschränkt, $0 = \min(A)$. C hat kein Maximum.

Folgender Satz ist von zentraler Bedeutung und eine Folgerung des Ordnungsvollständigkeitsaxioms.

Satz 2.10

- i) Jede nicht leere, nach oben beschränkte Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ besitzt eine kleinste obere Schranke c . Die kleinste obere Schranke c ist eindeutig bestimmt, heisst Supremum von A und wird mit $\sup A$ bezeichnet.
- ii) Jede nicht leere, nach unten beschränkte Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ besitzt eine grösste untere Schranke d , heisst Infimum von A und wird mit $\inf A$ bezeichnet.

Beweis

- i) Sei $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt. Sei $B := \{b \in \mathbb{R} \mid b \text{ ist eine obere Schranke für } A\}$. Es folgt $B \neq \emptyset$ und $a \leq b, \forall a \in A, b \in B$

KAPITEL 2. REELLE ZAHLEN, EUKLIDISCHE RÄUME UND KOMPLEXE ZAHLEN

Mit dem Ordnungsvollständigkeitsaxiom folgt die Existenz einer Zahl $c \in \mathbb{R}$ mit $a \leq c \leq b \forall a \in A, b \in B$.

Es ist klar, dass c eine obere Schranke für A ist. Also $c \in B$. Da $c \leq b \forall b \in B$, ist c die kleinste obere Schranke für A . Hiermit ist c eindeutig bestimmt.

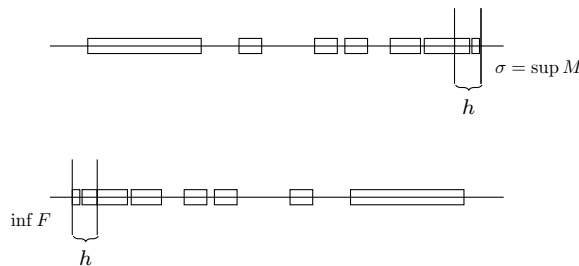
(Seien c und c' zwei Suprema von A , c ist die kleinste obere Schranke und c' ist eine obere Schranke $\Rightarrow c \leq c'$. Das gleiche Argument mit c, c' vertauscht liefert $c' \leq c$)

- ii) Sei A eine nach unten beschränkte, nicht leere Menge. Sei $-A := \{-x \mid x \in A\}$ die Menge der additiven Inversen von A . Dann $-A \neq \emptyset$ und nach oben beschränkt. i) $\Rightarrow \exists s = \sup(-A) \Rightarrow -s$ ist das Infimum von A

Korollar 2.11

1. Falls $E \subset F$ und F nach oben beschränkt ist, gilt $\sup E \leq \sup F$
2. Falls $E \subset F$ und F nach unten beschränkt ist, gilt $\inf F \leq \inf E$
3. Falls $\forall x \in E, \forall y \in F$ gilt $x \leq y$, dann folgt $\sup E \leq \inf F$
4. Seien $E, F \neq \emptyset, E, F \subset \mathbb{R}, h \in \mathbb{R}, h > 0$
 - (i) Falls E ein Supremum besitzt $\Rightarrow \exists x \in E$ mit $x > \sup E - h$
 - (ii) Falls E ein Infimum besitzt $\Rightarrow \exists y \in E: y < \inf E + h$.

Das Supremum, $\sup X = \sigma$ der Menge X ist folgendermassen charakterisiert: Es gibt in X keine Zahlen $> \sigma$; aber für jede Toleranz $h > 0$ gibt es in X Zahlen $> \sigma - h$



Es gibt in X keine Zahlen $< \inf X$; aber für jede Toleranz $h > 0$ gibt es in X Zahlen $< \inf X + h$

- (iii) Sei $E + F = \{e + f : e \in E, f \in F\}$. Falls E und F ein Supremum besitzen $\Rightarrow E + F$ besitzt ein Supremum und $\sup(E + F) = \sup(E) + \sup(F)$. (Analog mit Infimum)

Beweis

Ask for full Beweis!!

Beispiel

1. $E = (-\infty, 2) \subset F = (-\infty, 4]$
 $\sup E = 2, \sup F = 4 = \max F$
 E hat kein Maximum
 $\sup E \leq \sup F$
2. $G : [4, 5) \subset H = (3, 6)$
 $\min G = \inf G = 4 \geq \inf H = 3$
3. $K = (3, \infty), E = (-\infty, 2)$
 $\forall x \in E, y \in K$ gilt $x \leq y$
 $2 = \sup E \leq 3 = \inf K$
4. $A = \{\sin x \mid x \in \mathbb{R}\}$
 $\inf A = -1 = \min A$
 $\sup A = 1 = \max A$
5. $A = \{(1 + \frac{1}{n})^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Wir werden sehen, dass A nach unten und nach oben beschränkt ist.
 $\inf A = \min A = 2$
 $\sup A = 2.718 \dots =: e$ (die Eulersche Zahl per Vereinbarung)

Für nach oben unbeschränkte Mengen $A \neq \emptyset$ setzen wir $\sup A = \infty$. Analog für nach unten unbeschränkte Menge $\emptyset \neq A$ setzen wir $\inf A = -\infty$. Der folgende Satz zeigt, wie die Ordnungsvollständigkeit von \mathbb{R} die Lösbarkeit gewisser Gleichungen in \mathbb{R} garantiert.

Satz 2.12

Für jedes $x > 0$ gibt es genau ein $y > 0$ mit $y^2 = x$. Diese Lösung wird mit \sqrt{x} bezeichnet.

(Im Allgemeinen: Für jedes $x > 0$ und $n \geq 1, n \in \mathbb{R}$ gibt es genau ein $y > 0$ mit $y^n = x$. Diese Lösung wird mit $\sqrt[n]{x}$ bezeichnet)

Beweis

Sei $x > 1$, und $A := \{z \in \mathbb{R} \mid z > 0 \text{ mit } z^2 \leq x\}$. Dann ist A nach oben beschränkt und $A \neq \emptyset$ (da mindestens $1 \in A$).

$\Rightarrow A$ besitzt ein Supremum.

Sei $y := \sup A$. Wir zeigen, dass $y^2 = x$

- Schritt 1: Annahme $y^2 < x$.
Sei $0 \leq h \leq 1$. Wir nehmen an:

$$\begin{aligned}(y+h)^2 &= y^2 + 2hy + h^2 \\ &= y^2 + h(2y+h) \\ &\leq y^2 + h(2y+1) \\ &= y^2 + h((y+1)^2 - y^2)\end{aligned}$$

KAPITEL 2. REELLE ZAHLEN, EUKLIDISCHE RÄUME UND KOMPLEXE ZAHLEN

Weil $y^2 < x$ ist, $\frac{x-y^2}{(y+1)^2-y^2} > 0$ und daher gibt es $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$,
 $h \leq \frac{x-y^2}{(y+1)^2-y^2}$ (sei $h = \min\{1, \frac{x-y^2}{2x+1}\}$)

Für solche h gilt

$$(y+h)^2 \leq y^2 + \left(\frac{x-y^2}{(y+1)^2-y^2} \right) ((y+1)^2 - y^2) = x$$

Also $y+h \in A$ und $y+h > y$. Ein Widerspruch: y ist eine obere Schranke für A , d.h., $z < y \forall z$
 $\Rightarrow y^2 \geq x$ Analog beweist man $y^2 \leq x$

- Schritt 2: Annahme $y^2 > x$
Sei $h = \frac{y^2-x}{2y} \neq 0$

$$(y-h)^2 = y^2 - 2hy + h^2 > y^2 - 2hy = y^2 - (y^2 - x) = x$$

$\Rightarrow y-h$ ist eine obere Schranke für A

($\forall z \in A, z^2 \leq x$. Da $(y-h)^2 > x$ ist, $(y-h)^2 > x \geq z^2$. Damit $y-h > z, \forall z \in A$)

Aber $y-h < y$, Widerspruch zur Minimalität von y .

Falls $0 < x < 1$, dann $\frac{1}{x} > 1$
 $\Rightarrow \exists u \in \mathbb{R}$, mit $u^2 = \frac{1}{x}$

Somit $\frac{1}{u^2} = \left(\frac{1}{u}\right)^2 = x$ und $y = \frac{1}{u}$ ist eine Lösung von $y^2 = x$.

Zum Abschluss dieses Themas erwähnen wir noch eine wichtige Eigenschaft der reellen Zahlen

Satz 2.13 (Archimedische Eigenschaft)

Zu jeder Zahl $0 < b \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b < n$.

Beweis (Indirekt)

Andernfalls gibt es $b \in \mathbb{R}$ mit $n \leq b, \forall n \in \mathbb{N}$

$$(\neg \exists n \in \mathbb{N} : b < n) = (\forall n \in \mathbb{N} : b \geq n)$$

Dann ist b eine obere Schranke für \mathbb{N} und es existiert $c = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$. Mit $n \in \mathbb{N}$ ist jedoch auch $n+1 \in \mathbb{N}$.

Also: $n+1 \leq c, \forall n \in \mathbb{N}$. Somit folgt $n \leq c-1, \forall n \in \mathbb{N}$ ein Widerspruch zur Minimalität von c .

Korollar 2.14

1. Seien $x > 0$ und $y \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann gibt es $n \in \mathbb{Z}$ mit $y < nx$
2. Falls $x, y, a \in \mathbb{R}$ die Ungleichheiten $a \leq x \leq a + \frac{y}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$ erfüllen, ist $x = a$.

Beweis

1. ASK FOR BEWEIS

Ask for beweis

2. $a < x \Rightarrow x - a > 0$
 $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n(x - a) > y$
 $\Rightarrow x > a + \frac{y}{n}$ Widerspruch

Wir wissen, dass gewisse Gleichungen in \mathbb{R} lösbar sind: z.B. $y^2 = a$, $\forall a > 0$. Aber man kann nicht alle Gleichungen in \mathbb{R} lösen, z.B. $x^2 + 1 = 0$. Da für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, dass $x^2 > 0$, ist $x^2 = -1$ nicht lösbar. Um eine Lösung für diese Gleichung zu finden, müssen wir die komplexen Zahlen betrachten.

Zuerst werden wir die Euklidischen Räume \mathbb{R}^n einführen

2.4 Euklidische Räume

Mit der Mengentheorie können wir das kartesische Produkt zweier Mengen bilden; es lässt sich ohne Schwierigkeiten zu endlichen Familien A_1, \dots, A_n verallgemeinern, nämlich

$$A_1 \times \dots \times A_n := \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in A_i\}$$

ist die Menge der geordneten n -Tupel von Elementen aus A_1, \dots, A_n .

Für beliebige $n \geq 1$ betrachten wir $\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n\text{-mal}}$ und untersuchen dessen Struktur. Auf \mathbb{R}^n haben wir zwei Verknüpfungen

1. $+: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ Addition.

$$\left(\underbrace{(x_1, \dots, x_n)}_x, \underbrace{(y_1, \dots, y_n)}_y \right) \rightarrow \underbrace{(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)}_{\text{Komponentenweise Addition}}$$
Dann ist $(\mathbb{R}^n, +)$ eine Abelsche Gruppe, mit $0 := (0, \dots, 0)$ als neutrales Element

2. $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ Skalarmultiplikation.
 $(\lambda, x) \rightarrow \lambda \cdot x := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$. Dann gelten die folgende Eigenschaften:
 $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(a) Distributivität: $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

(b) Distributivität: $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

(c) Assoziativität: $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

(d) Neutralelement: $1 \cdot x = x$

Definition 2.15

Eine Menge \mathbb{V} mit $+, \cdot$ und $0 \in \mathbb{V}$, so dass $(\mathbb{V}, +)$ eine Abelsche Gruppe mit neutralem Element 0 ist und zudem (a)-(d) gelten, nennt sich einen Vektorraum über dem Körper \mathbb{R} und seine Elemente heißen Vektoren.

KAPITEL 2. REELLE ZAHLEN, EUKLIDISCHE RÄUME UND KOMPLEXE ZAHLEN

Also ist \mathbb{R}^n ein Vektorraum. In der linearen Algebra führt man dann Begriffe wie Basis usw. ein. Die Standardbasis von \mathbb{R}^n ist die Menge $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ wobei $e_i := \{0, \dots, 0, 1, \dots, 0\}$.

Jeder Vektor $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ besitzt eine eindeutige Darstellung $x = \sum x_i e_i$ bezüglich der Standardbasis.

Definition 2.16

1. Das Skalarprodukt zweier Vektoren $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$ ist die durch

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

definierte reelle Zahl

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

2. Falls $\langle x, y \rangle = 0$ heißen x und y senkrecht (orthogonal) aufeinander. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ besitzt folgende Eigenschaften

- (a) Symmetrie: $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- (b) Linearität: $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle$
- (c) Positivität: $\langle x, x \rangle \geq 0$ mit Gleichheit genau dann, wenn $x = 0$

Definition 2.17

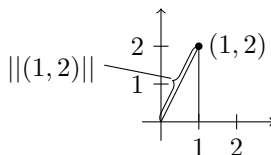
Die Norm $\|x\|$ eines Vektors ist:

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

und wird oft als Länge interpretiert.

Beispiel 2.18

- $\|(1, 2)\| = \sqrt{1 + 4}$



- $\|(1, 1, 1)\| = \sqrt{3}$



- $\|e_i\| = 1, \langle e_i, e_j \rangle = 0. e_i \perp e_j$
 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ist eine orthonormale Basis. Die Vektoren einer orthogonalen Basis sind orthogonal zueinander und normiert (die Länge ist gleich 1).

Die erste wichtige Eigenschaft des Skalarprodukts ist

Satz 2.19 (Cauchy-Schwarz)

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ und

$|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\| \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : x = \lambda y \Leftrightarrow$ die Vektoren sind parallel zueinander

Die Euklidische Norm hat die Eigenschaften

Satz 2.20

- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ (Homogenität)
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung)

Beweis

ASK FOR BEWEIS

- ASK FOR BEWEIS

•

$$\begin{aligned}
 \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\
 &= \langle x, x + y \rangle + \langle y, x + y \rangle \\
 &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\
 &= \langle x, x \rangle + 2 \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\
 &\leq \|x\|^2 + 2 |\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \\
 &\leq \|x\|^2 + 2 \|y\| \|x\| + \|x\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2
 \end{aligned}$$

2.5 Die Komplexen Zahlen

Da für alle $x \in \mathbb{R}$ $x^2 \geq 0$ gilt, gibt es $\sqrt{-1}$ nicht als reelle Zahl. Seit dem 18. Jahrhundert haben Mathematiker mit Ausdrücken wie $a + b\sqrt{-1}$, $a, b \in \mathbb{R}$ gerechnet und auf sie die in \mathbb{R} geltenden Rechenregeln angewandt, z.B.

$$(1 + 2\sqrt{-1})(1 - 2\sqrt{-1}) = 1^2 - 2^2(\sqrt{-1})^2 = 5$$

Allgemein:

$$\begin{aligned}(a + b\sqrt{-1})(c + d\sqrt{-1}) &= ac + ad\sqrt{-1} + bc\sqrt{-1} + bd\sqrt{-1} \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)\sqrt{-1}\end{aligned}$$

Das Problem hier ist, dass $\sqrt{-1}$ keinen präzisen mathematischen Sinn hat und dass deshalb auch nicht klar ist, was “+” in “ $a + b\sqrt{-1}$ ” bedeuten soll.

Das Problem wird wie folgt gelöst:

Als Modell von “ $a + b\sqrt{-1}$ ”, \mathbb{C} , nehmen wir \mathbb{R}^2 . Wir kennen bereits die Addition von Vektoren und das neutrale Element $0 = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$. Wir definieren dann die Multiplikation

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\rightarrow x \cdot y\end{aligned}$$

wobei $x \cdot y = (ac - bd, ad + bc)$, $x = (a, b)$, $y = (c, d)$. Dann erfüllen “+” und “.” folgende Eigenschaften:

- Assoziativität: $((a, b)(c, d))(e, f) = (a, b)((c, d)(e, f))$
- Neutrales Element: $(1, 0)(a, b) = (a, b)$
- Kommutativ: $(a, b)(c, d) = (c, d)(a, b)$
- Inverses Element $\forall (a, b) \neq (0, 0)$ in $\mathbb{R}^2 \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $(a, b)(x, y) = (1, 0)$
- Distributivität: $((a, b) + (c, d)) \cdot (e, f) = (a, b)(e, f) + (c, d)(e, f)$

Definition 2.21

Der Körper der komplexen Zahlen \mathbb{C} ist \mathbb{R}^2 versehen mit “+”, “.”, $0 = (0, 0)$ und $(1, 0) = 1$

Bemerkung 2.22

$z^2 + 1 = 0$ hat in \mathbb{C} eine Lösung. Nämlich ist $(0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -(1, 0) = -1$. Wir führen für $(0, 1)$ die Bezeichnung “ i ” ein, welches imaginäre Einheit heisst.

Also ist $i^2 = -1$. Jede komplexe Zahl $z = (x, y)$ lässt sich dann wie folgt darstellen:

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x \cdot 1 + y \cdot i$$

In den Rechnungen lässt man oft das 1 in $x \cdot 1$ fallen und schreibt $z = x + yi$

Definition 2.22

1. Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$
 - $\operatorname{Re} z := x$ heisst der Realteil
 - $\operatorname{Im} z := y$ heisst der Imaginärteil
2. Die zu: $z = x + iy$ konjugierte Zahl ist $\bar{z} = x - iy$
3. Wir definieren die Norm von z als $\|z\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Satz 2.23

- (i) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- (ii) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
- (iii) $z \cdot \bar{z} = \|z\|^2 \cdot 1$
- (iv) $\|z_1 \cdot z_2\| = \|z_1\| \cdot \|z_2\|$

Beweis

ASK FOR BEWEIS

ASK FOR BEWEIS

Abkürzung

$$|z| := \|z\|$$

Bemerkung 2.24

Wir können \mathbb{R} in \mathbb{C} “einbetten” mittels $\mathbb{R} \ni x \rightarrow (x, 0) \in \mathbb{C}$. Sei $\mathbb{C}_0 = \{(x, y) \in \mathbb{C} \mid y = 0\} = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Die Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}_0, x \rightarrow (x, 0)$ ist eine Bijektion.

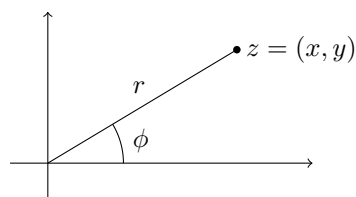
Diese Identifikation von \mathbb{R} und \mathbb{C}_0 ist verträglich mit den Operationen in \mathbb{R} und in \mathbb{C} , d.h.

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

Polarform

Als Polarkoordinaten in der Ebene führen wir (r, ϕ) ein



$$x = r \cos \phi \quad y = r \sin \phi$$

$$z = r (\cos \phi + i \sin \phi)$$

$$r = |z|$$

KAPITEL 2. REELLE ZAHLEN, EUKLIDISCHE RÄUME UND KOMPLEXE ZAHLEN

Definition

Wir definieren (nach Euler)

$$e^{i\phi} := \cos \phi + i \sin \phi$$

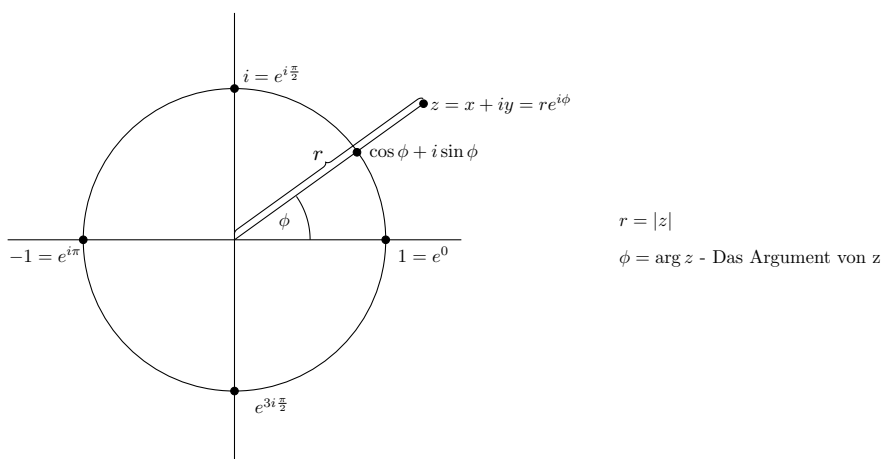
$$z = re^{i\phi} = |z|e^{i\phi}$$

Where does the definition end??

In der Ebene \mathbb{R}^2 stehen uns neben den kartesischen Koordinaten x, y noch die Polarkoordinaten r, ϕ zur Verfügung. Es gelten die folgenden Additionstheoreme:

- $\cos(\phi + \psi) = \cos \phi \cos \psi - \sin \psi \sin \phi$
- $\sin(\phi + \psi) = \sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \psi$

Für beliebiges $z = x + iy \neq 0$ gilt also:



$$e^{i\phi} = 1 \Leftrightarrow \phi = 2k\pi$$

$$\cos \phi + i \sin \phi = 1 \Leftrightarrow \cos \phi = 1 \text{ und } \sin \phi = 0$$

$$\Leftrightarrow \phi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} e^{i\theta} \cdot e^{i\phi} &= (\cos \theta + i \sin \theta) (\cos \phi + i \sin \phi) \\ &= \underbrace{\cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi}_{\cos(\theta+\phi)} + i \underbrace{(\cos \theta \sin \phi + \sin \theta \cos \phi)}_{\sin(\theta+\phi)} \\ &= e^{i(\theta+\phi)} \end{aligned}$$

Es folgt somit $e^{i\phi} e^{i\psi} = e^{i(\phi+\psi)}$.

Somit folgt für $z = re^{i\theta}$, $\omega = se^{i\phi} \in \mathbb{C}$ die einfache Darstellung $z\omega = rse^{i(\theta+\phi)}$,

$$\frac{z}{\omega} = \left(\frac{r}{s}\right) e^{i(\theta-\phi)}$$

KAPITEL 2. REELLE ZAHLEN, EUKLIDISCHE RÄUME UND KOMPLEXE ZAHLEN

Die polare Darstellung ist in Berechnungen sehr nützlich, insbesondere um das Produkt und den Quotienten zu berechnen

Beispiel

$$\begin{aligned}z &= 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \\ \omega &= \sqrt{3} - i = 2e^{-i\frac{\pi}{6}} \\ \frac{(\sqrt{3} - i)^3}{(1 + i)^2} &= \frac{\omega^3}{z^4} = \frac{8e^{-i\frac{\pi}{2}}}{4e^{i\pi}} = 2e^{-\frac{3\pi}{2}i} = 2e^{\frac{\pi}{2}i} = 2i\end{aligned}$$

Die Polarform ist auch sehr nützlich um die Wurzel einer komplexen Zahl zu berechnen. Sei $\omega \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Wir möchten die Gleichung $z^n = \omega$ lösen.

$$\begin{aligned}\omega &= |\omega|e^{i\phi} \\ z^n = \omega &= |\omega|e^{i\theta} = |\omega|e^{i(\theta+2k\pi)} \\ \Rightarrow z &= |\omega|^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{(\theta+2k\pi)}{n}}\end{aligned}$$

Beispiel

$$z^3 = 1 \Rightarrow z = (e^{2\pi ik})^{\frac{1}{3}} \in \{e^{i\pi \frac{2k}{3}} : k = 0, 1, 2\} = \{1, e^{2i\frac{\pi}{3}}, e^{4i\frac{\pi}{3}}\}$$

Allgemeine Formel der n -ten Einheitswurzel $z = \{e^{i\frac{2\pi k}{n}} : k = 0, 1, \dots, n-1\}$

Bemerkung

1. Es gibt keine mit den Körperoperationen verträgliche Ordnung in \mathbb{C} .
2. Hingegen ist \mathbb{C} im Unterschied zu \mathbb{R} algebraisch vollständig. Nicht nur die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hat in \mathbb{C} eine Lösung, sondern es gilt der Fundamentalsatz der Algebra. Er sagt, dass jedes Polynom $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$ vom Grad $n \geq 1$ in \mathbb{C} genau n Nullstellen hat.