WARNING!

READ
CAREFULLY!

The following document has not been checked for mistakes, and although every effort possible has been made to ensure that the information in this document is correct, it might still contain some mistakes. The following document is given “as is”, without any warranty whatsoever.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Logik und Grundlagen

Im laufenden Semester werden wir viele mathematische Beweise einführen. Heute werden wir uns mit der mathematischen Logik beschäftigen.

In der Mathematik stützen wir uns auf gewisse Grundannahmen, "Axiome", die wir als gegeben ansehen. Eine dieser Annahmen ist der

Satz vom ausgeschlossenen Dritten

Eine zulässige mathematische Aussage ist entweder wahr oder falsch, jedoch nie beides zugleich.

Beispiel

1. $5 < 7$ Wahr
2. $4 < 2$ Falsch

In der wirklichen Welt ist es anders. Ist z.B. "Mathematik ist schön" wahr oder falsch?

Mit Aussagen kann man "rechnen". Wir führen nun ein paar geläufige Notationen der Logik ein:

Seien A, B Aussagen

- A und B wird mit $A \wedge B$ bezeichnet
- A oder B wird mit $A \vee B$ bezeichnet

Folgerung (eine wahre Implikation)

- Aus A folgt B wird mit $\Rightarrow$ bezeichnet
- Wenn A, dann auch B
- Die Negation der Aussage A wird mit $\neg A$ bezeichnet
- A ist äquivalent zu B wird mit $A \Leftrightarrow B$ bezeichnet
- $(A \to B) \wedge (B \to A)$ A wahr genau dann, wenn B wahr ist.

Bemerkung

Die Folgerung ist transitiv. Wenn wir wissen, dass $A \to B$ und $B \to C$, dann wissen wir dass $A \to C$.

Prinzip des Mathematischen Beweises

Wir können aus einer Kette von Folgerungen

$$A \to B \to C \to \cdots \to S$$

einen mathematischen "Satz" S aus einen Annahme A herleiten. (Ein Beweis ist eine Folge von Implikationen von Aussagen).

Kontraposition (Umkehrschluss)

$A \to B$ ist gleichbedeutend mit $\neg B \to \neg A$.
Falls $A \to B$, so kann A nicht wahr sein wenn B falsch ist (weil wenn A wahr ist, würde B auch wahr sein).

1.1 Prinzip des Indirekten Beweises

Zum Beweis der Aussage $A \to B$ genügt es die Aussage $\neg B \to \neg A$ zu zeigen, oder die Annahme $A \wedge \neg B$ zum Wiederspruch zu führen.

Indirekter Beweis

Man fügt $\neg B$ als Annahme hinzu und kommt nach einer Kette von erlaubten Schlüssen zu einer falschen Aussage.

Daraus schliesst man, dass die Zusatzannahme $\neg B$ nicht wahr ist.

Beispiel 1.1

- $A =$ "jede natürliche Zahl n hat einen Nachfolger $n + 1$"
- $B =$ "es gibt keine grösste natürliche Zahl"

Wir beweisen dass B aus A folgt . Nehmen wir an, dass A wahr und B falsch ist.

$\neg B =$ es gibt eine grösste natürliche zahl N_0'', d.h $N_0 > l$ für jedes $l \in \mathbb{N}$.

Mittels der Aussage A wissen wir, dass N_0 einen Nachfolger $N_0 + 1$ hat. Für diesen gilt $N_0 + 1 > N_0$. Dies ist aber ein Wiederspruch.

Definition 1.1
Eine Menge ist eine Zusammenfassung verschiedener Objekte zu einem Ganzen.
Die Objekte werden Elemente der Menge genannt.

Sei A eine Menge, dann wird "a ist element von A" mit "$a \in A$" bezeichnet. Seien A, B Mengen, dann wird "jedes Element von A ist ein Element von B" mit "$A \subset B$" bezeichnet, und man sagt "A ist in B enthalten" (oder A ist eine Teilmenge von B).

Falls zugleich $A \subset B$ und $B \subset A$ gilt, so sind A und B gleich und man schreibt $A = B$.

Beispiel 1.2

1. Die Menge $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ der natürlichen Zahlen.
2. Die leere Menge mit "$\varnothing$" bezeichnet. Sie ist in jeder Menge enthalten.
3. Die Menge $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ aller ganze Zahlen.
4. Meistens werden Mengen nicht durch die Liste ihre Elemente gegeben, sondern durch bestimmte Eigenschaften ihrer Elemente definiert

$$\mathbb{P} = \{2, 3, 4, 5, 7, 11, 13, \dots\}$$

   die Menge aller Primzahlen $\mathbb{P} : \{p \in \mathbb{N} \mid \ p \text{ primzahl}\}$

1.2 Zwei Prinzipen

Wir werden die folgenden zwei Beweismethoden häufig benutzen.

1. Prinzip des Indirekten Beweises

Zum Beweis der Aussage $A \to B$ genügt es, die Aussage $\neg B \to \neg A$ zu zeigen oder die Annahme $A \wedge \neg B$ zum Wiederspruch zu führen.

2. Prinzip der Vollständigen Induktion

Sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Behauptung $A(n)$ gegeben. Soll die Behauptung für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ bewiesen werden, so genügen dazu zwei Beweisschritte:

i) Der Beweis von $A(0)$

ii) Für jedes $n \in \mathbb{N}$, der Beweis von $A(n+1)$ unter der Voraussetzung, dass $A(n)$ gilt.

Oft gelten aber Behauptungen nicht von $n = 0$.
Soll die Gültigkeit von $A(n)$ für alle $n \geq m$ bewiesen werden so genügen wieder zwei Schritte:

i) Beweis von $A(m)$

ii) Für jedes $n \geq m$ impliziert $A(n)$ die Behauptung $A(n+1)$

Das Prinzip der vollständigen Induktion ist genau wie ein Dominoeffekt.

Sie stellen alle Dominosteine auf, einen nach dem anderen. Falls der erste Dominostein fällt ($A(1)$ wahr) und falls wir die Dominosteine genug nah nebeneinander gestellt haben, so dass ein fallender Dominostein den nächsten trifft ($A(k) \to A(k+1)$), dann wissen wir, dass alle Dominosteine fallen.

Beispiel 1.3 (Induktion)

1. Für alle $n \geq 1$ gilt:

$$A(n): \quad 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

Beweis mittels vollständiger Induktion

i) $A(1)$ lautet $1 = 1^2$ und gilt.

ii) Sei $n \geq 1$. Annahme: $A(n)$ gilt. Die linke Seite der Identität $A(n+1)$ ist

$$1 + 3 + \cdots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

womit $A(n + 1)$ bewiesen ist.

2. Als zweites Beispiel der vollständigen Induktion beweisen wir den Fundamentalsatz von Euklid:

Satz 1.4

Jede natürliche Zahl $n \geq 2$ ist ein Produkt von Primzahlen, welches bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig ist. Wir werden uns hier aber nicht mit der Eindeutigkeit befassen.

Beweis

Sei $A(n)$ die Aussage: Jede natürliche Zahl m mit $2 \leq m \leq n$ ist ein Produkt von Primzahlen

i) $A(2)$ gilt, denn 2 ist eine Primzahl.

ii) Sei $n \geq 2$. Wir nehmen an, dass $A(n)$ gilt. Für $n + 1$ gibt es zwei Möglichkeiten

a) $n + 1$ ist eine Primzahl und somit gilt $A(n + 1)$

b) $n+1$ ist keine Primzahl d.h. es gibt ein $2 \leq a \leq n$ welches $n+1$ teilt. Dann ist $b := \frac{n+1}{a}$ auch ganzzahlig und zudem ist $2 \leq b \leq n$ erfüllt. Aus $A(n)$ folgt, dass sowohl a wie b ein Produkt von Primzahlen sind. Somit ist auch $n + 1 = ab$ ein Produkt von Primzahlen.

Satz 1.5

Die Menge $\mathbb{P}$ der Primzahlen ist unendlich.

Beweis

Nehmen wir das Gegenteil "$\mathbb{P}$ ist endlich" an, d.h. $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$ in aufsteigender Folge; also $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, \ldots$. Wir betrachten die Zahl $k = p_1 p_2 \ldots p_i \ldots p_m + 1$. Aus Satz 1.4 folgt, dass eine Primzahl p_i (aus der Liste $\{p_1, \ldots, p_m\}$) existiert, mit p_i teilt k. Da p_i offensichtlich $p_1 p_2 \ldots p_i \ldots p_m$ teilt, folgt dass p_i die Restzahl $k - p_1 \ldots p_m = 1$ teilt. Das ist ein Widerspruch.

Teilbarkeit

Formale Definition

Eine ganze Zahl a teilt eine ganze Zahl b genau dann, wenn es eine ganze Zahl n gibt, für die $an = b$ ist.

Man sagt dann (Synonyme)	Man schreibt
a teilt b	$a \mid b$
a ist Teiler von b	
b ist teilbar durch a	
b ist Vielfaches von a	

Eigenschaften der Teilbarkeit

- Gilt $a \mid b$ und $b \mid c$, so folgt $a \mid c$
- Für $k \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ gilt: $a \mid b \Longleftrightarrow ka \mid kc$
- $a \mid b$ und $c \mid d \to ac \mid bd$
- $a \mid b$ und $a \mid c \to a \mid kb + lc,$ für alle $l, k \in \mathbb{Z}$

Formaler Beweis von Satz 1.5

1. $k = (p_1 p_2 \dots p_i \dots p_m) + 1$
   Es gibt eine Primzahl p_i die k teilt. $p_i \mid k$ mittels Satz 1.4.
2. Sei $b = p_1 p_2 \dots p_i \dots p_m =$ Produkt aller Primzahlen. Sei $a = p_i$, $n = p_1 p_2 p_{i-1} p_{i+1} \dots p_m$. Dann $b = an$. Das bedeuted, dass a ein Teiler von b ist, d.h. $p_i \mid (p_1 \dots p_m)$
3. $p_i \mid k$ und $p_i \mid (p_1 \dots p_m) \to p_i \mid k - (p_1 \dots p_m) = 1$.
   So erhalten wir einen Widerspruch.

Bemerkung

Letztes mal haben wir gesagt, dass "jedes Element von A ist auch Element von B" ($\forall x, x \in A \to x \in B$) mit $A \subset B$ bezeichnet wird. Wir sagen auch "A ist in B enthalten" oder "A ist Teilmenge von B". Falls $A \subset B$ und eine Element $b \in B$ existiert mit $b \notin A$, so sagen wir "A ist eine "eigentliche Teilmenge" von B". Manchmal schreiben wir $A \underset{\neq}{\subset} B$ in diesem Fall.

Es gibt viele Bücher mit der folgenden Notation: "jedes Element von A ist ein Element von B" wird mit $A \subseteq B$ bezeichnet. Und wenn $A \subseteq B$ und $A \neq B$ dann wird $A \subset B$ statt $A \underset{\neq}{\subset} B$ benutzt. $A = B$ falls $x \in A \Leftrightarrow x \in B$.

Satz

$A = B \Leftrightarrow A \subset B$ und $B \subset A$

Beweis

Annahme: $A = B$. Falls $x \in A$, dann gilt, mittels $A = B$, $x \in B$ und damit gilt auch $A \subset B$. Falls $x \in B$, dann gilt $x \in A$ (mittels $A = B$), und damit gilt $B \subset A$.

Wir haben bewiesen, dass $A = B \to A \subset B$ und $B \subset A$.
Nun nehmen wir $A \subset B$ und $B \subset A$ an. Damit möchten wir $A = B$ zeigen.

Sei $x \in A$. Mittels $A \subset B$ erhalten wir $x \in B$ und somit $x \in A \to x \in B$. $(*)$

Sei $x \in B$. Mittels $B \subset A$ erhalten wir $x \in A$ und somit $x \in B \to x \in A$. $(**)$

$(*)$ und $(**)$ $\to A = B$ per Definition.

1.3 Mengenoperationen

Zunächst erinnern wir kurz an die Definitionen der elementaren Operationen auf Mengen.

Seien A und B Mengen. Wir können dann daraus folgende Mengen bilden:

- Die Vereinigung: $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
- Der Durchschnitt: $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
- Die Differenz: $A \backslash B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
- Symmetrische Differenz: $A \triangle B = (A \backslash B) \cap (B \backslash A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Wir haben dann folgende Eigenschaften

Satz 1.6

Seien A, B, C Mengen.

1. $A \cap B = B \cap A$; $A \cup B = B \cup A$
   $A \cap \varnothing = \varnothing$; $A \cup \varnothing = A$

   Bemerkung

   - $\cup$ verhält sich wie $+$
   - $\cap$ verhält sich wie die Multiplikation
   - $\varnothing$ verhält sich wie das Nullelement

2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
   $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

3. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

Beweis

Einerseits gilt

$$(A \cup B) \cap C = \{x \in X : x \in A \cup B\} \wedge \{x \in X : x \in C\}$$

Andererseits $(A \cap C) \cup (B \cap C) = \{x \in X : x \in A \cap C\} \vee \{x \in X : x \in B \cap C\}$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap C &\subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C) \\ (A \cap C) \cup (B \cap C) &\subseteq (A \cup B) \cap C \end{aligned}$$

und somit sind die zwei Mengen gleich.

Definition 1.7
Das Kartesische Produkt $A \times B$ der Mengen A, B ist die Menge der geordneten Paare (a, b) wobei $a \in A, b \in B$

Beispiel

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(a, b) : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$. Falls $\mathbb{Z}$ als "eindimensionales" Gebilde dargestellt wird

		-3	-2	-1	0	1	2	3		
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•

So wird $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ als "zweidimensionales" Gebilde dargestellt

•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•
$(1,0)$	$(1,1)$	•	•	•	•	•
$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	•	•	•	•

Um die Operationen auf mehrere Mengen zu verallgemeinern, sind die folgenden Quantoren nützlich $(*)$

1. $\forall$ "Für alle" (Allquantor)
2. $\exists$ "Es gibt" (Existenzquantor)
3. $\exists!$ "Es gibt genau ein"

Sei nun I eine beliebige Menge (I=Indexmenge) und sei für alle $i \in I$ eine Menge A_i gegeben. Dann:

- $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I, x \in A_i\}$. Vereinigung besteht aus den Elementen x, für welche es ein $i \in I$ gibt, so dass x zu A_i gehört.
- $\bigcap\limits_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I, x \in A_i\}$. Durchschnitt.

Wir definieren das Kartesische Produkt endlich vieler Mengen $A_1 \dots A_n$:

$$A_1 \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in A_i\}$$

Satz 1.8

Seien $A_1 \dots A_k \subset X,\ k \in \mathbb{N}$. Es gilt

1. $$\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{k} {A_i}^c$$

2. $$\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{k} {A_i}^c$$

Beweis

$$\begin{aligned}\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right)^c &= \left\{x \mid x \in X \wedge x \notin \bigcap_{i=1}^{k} A_i\right\} = \{x \mid x \in X, \exists i \in \{1, \dots, k\} : x \notin A_i\} \\ &= \bigcup_{i=1}^{k} \{x \mid x \in X \wedge x \notin A_i\} = \bigcup_{i=1}^{k} A_i^c\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)^c &= \left\{x \mid x \in X \wedge x \notin \bigcup_{i=1}^{k} A_i\right\} = \{x \mid x \in X, \forall i \in \{1, \dots, k\} : x \notin A_i\} \\ &= \bigcap_{i=1}^{k} \{x \mid x \in X \wedge x \notin A_i\} = \bigcap_{i=1}^{k} A_i^c\end{aligned}$$

(Siehe Analysis Serie 1, 1. Semester, Aufgabe 2.e)

($*$) Wir haben gesehen, dass wir manchmal eine Aussage verneinen müssen. Deshalb müssen wir lernen wie man Aussagen mit Quantoren verneinen kann.

$$\begin{aligned}\neg\,(\forall n : A(n)) &\Leftrightarrow (\exists n : \neg A(n)) \\ \neg\,(\exists n : A(n)) &\Leftrightarrow (\forall n : \neg A(n)) \\ \neg\left(\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0\right) &\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} : x^2 < 0\end{aligned}$$

1.4 Abbildungen

Seien X, Y Mengen.

Definition 1.9

Eine Funktion oder Abbildung $f : X \to Y$ der Menge X in die Menge Y ist eine Vorschrift (ein Gesetz) die (das) jedem Element $x \in A$ genau ein Element $y = f(x) \in Y$ zuordnet.

Es gibt verschiedene wichtige Objekte die in Zusammenhang mit einer Abbildung auftreten

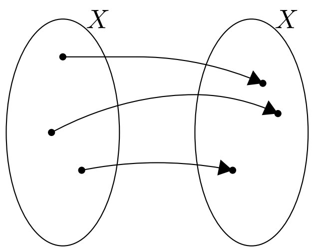
$$\begin{aligned} X =& \ \textit{Definitionsbereich} \text{ oder } \textit{Definitionsmenge} \text{ (domain)} \\ Y =& \ \textit{Wertebereich} \text{ oder } \textit{Zielmenge} \text{ (range)} \\ f(X) =& \ \{f(x) \mid x \in X\} \text{ ist das sog. } \textit{Bild} \text{ oder die } \textit{Bildmenge} \\ f^{-1}(y) =& \ x \text{ heisst } \textit{Urbild} \text{ von } y. \end{aligned}$$

Der *Graph* einer Funktion f ist die Menge aller Paare $(x, f(x))$ wobei x alle Elemente der Menge X durchläuft. Er ist eine Teilmenge von $X \times Y$.

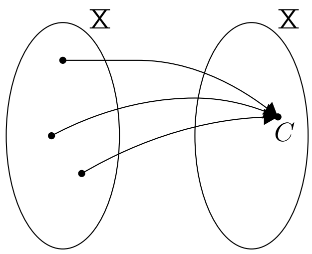
$$Gr(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$$

Beispiel 1.10

1. (Identität) Für jede Menge $\mathbb{X}$, ist $id_X : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ definiert durch $id_{\mathbb{X}}(x) = x, \forall x \in X$



2. (Konstante) Sei X Menge und $c \in \mathbb{X}$. Die konstante Abbildung mit Wert c ist $f(x) = c, \forall x \in \mathbb{X}$



3. Seien X, Y Mengen. Dann sind
$$pr_x : \begin{array}{l} X \times Y \to X \\ (x,y) \mapsto x \end{array} \qquad pr_y : \begin{array}{l} X \times Y \to Y \\ (x,y) \mapsto y \end{array}$$
die Projektionen auf den ersten bzw. zweiten Faktor.

4. Sinus

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to [-1,1] \\ x &\mapsto \sin x \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 + x \end{aligned}$$

Definition 1.11

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung

1. f heisst injektiv falls aus $f(x_1) = f(x_2)$ stets $x_1 = x_2$ folgt, also falls jedes $y \in Y$ höchstens ein Urbild hat.
2. f heisst surjektiv falls es für jedes $y \in Y$ ein $x \in X$ gibt mit $f(x) = y$
$$\forall y \in Y, \exists x \in X : f(x) = y$$
Also wenn jedes Element $y \in Y$ mindestens ein Urbild hat.
3. f heisst bijektiv falls f injektiv und surjektiv ist, d.h. falls jedes $y \in Y$ genau ein Urbild hat.

Beispiel 1.12

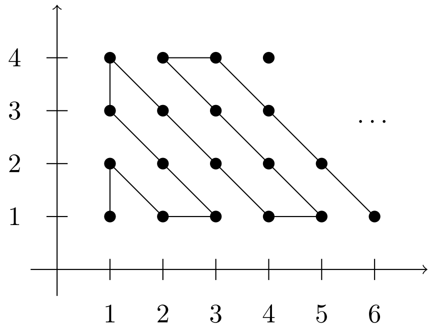
1. $id_X : X \to X$ bijektiv.
2. Eine konstante Abbildung
$f : \mathbb{X} \to X, x \mapsto c$ ist
   - injektiv $\Leftrightarrow \mathbb{X} = \{c\}$
   - surjektiv $\Leftrightarrow X = \{c\}$
3. Die Projektionen
   - $pr_x : X \times Y \to X$
   - $pr_y : X \times Y \to Y$

   sind stets surjektiv.
4. $f : \mathbb{R} \to [-1,1]$
$x \mapsto \sin x$
Surjektiv, nicht injektiv
5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$
Nicht surjektiv
Nicht injektiv
6. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$n \mapsto 2n$
ist injektiv. $f(\mathbb{N})$ ist die Menge aller geraden Zahlen
7. Eine Menge A hat n Elemente falls es eine bijektive $f : \{1, \ldots, n\} \to A$ gibt. Die Zahl n wird dann die Kardinalität von A genannt und mit $|A|$, gelegentlich auch mit $\#A$ bezeichnet.

Definition Kardinalität

Wir sagen zwei Mengen X und Y sind gleichmächtig falls eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$ existiert.

Mit dem ersten Cantorschen Diagonalverfahren kann man die rationalen Zahlen abzählen, d.h.$\mathbb{Q}$ und $\mathbb{N}$ sind gleichmächtig

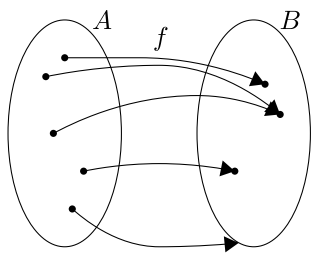


1.5 Dedekind Schubladen Prinzip

Sei $f : A \to B$ eine beliebige Abbildung zwischen endlichen Mengen. Falls $|B| < |A|$ dann ist f nicht injektiv, d.h. es gibt $b \in B$ und $a_1, a_2 \in A$ mit

i) $a_1 \neq a_2$

ii) $f(a_1) = f(a_2) = b$



$$3 = |B| < 5 = |A|$$

Mit Abbildungen kann man "operieren". Die wichstige Operation ist die Verkettung (oder Komposition) zweier Abbildungen.

Definition

Abbildungen $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ kann man miteinander ausführen. Dies ergibt eine neue Abbildung

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

$$F := g \circ f : X \to Z, x \mapsto g\left(f(x)\right)$$

$$\text{Man sagt} \begin{cases} g \text{ nach } f \\ g \text{ komponiert mit } f \\ g \circ f \end{cases}$$

Zwei Funktionen f und g können verkettet werden wenn der Wertebereich der ersten Funktion mit dem Definitionsbereich der zweiten Funktion übereinstimmt.
Zu Beachten: In dieser Notation steht die zuerst angewandte Abbildung rechts. Das bedeutet bei $g \circ f$ wird zuerst die Funktion f angewandt und dann die Funktion g.

- Die Identische Abbildung verhält sich bei der Komposition neutral, für eine Funktion

  $$f : X \to Y \text{ gilt also}$$
  $$f \circ id_X = f = id_Y \circ f$$

  wobei

  $$\begin{aligned} id_X : \mathbb{X} &\to \mathbb{X} \\ x &\mapsto x \\ id_Y : Y &\to Y \\ y &\mapsto y \end{aligned}$$

- Die Komposition von Funktionen ist assoziativ, d.h. für Funktionen f, g, h gilt

  $$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

- Aber die Komposition von Funktionen ist im Allgemeinen nicht kommutativ!

  $$f \circ g \neq g \circ f$$

  Zum Beispiel:

  $$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \\ g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x + 1 \end{aligned}$$

  $$\begin{aligned} f \circ g = f\left(g(x)\right) = f(x+1) = (x+1)^2 &= x^2 + 2x + 1 \\ g \circ f = g\left(f(x)\right) = g(x^2) &= x^2 + 1 \end{aligned}$$

1.6 Die inverse Abbildung (Umkehrfunktion)

Sei $f : X \to Y$ eine bijektive Funktion.

Die inverse Funktion $g : Y \to X$ einer bijektiven Funktion $f : X \to Y$ ist die Funktion, die jedem Element y der Zielmenge dessen eindeutig bestimmtes Urbildelement zuweist. (bei bijektiven Funktionen hat die Urbildmenge jedes Elements y genau ein Element).

$g(y) := x$, eindeutig definiertes $x \in \mathbb{X}$, mit $f(x) = y$. Dann ist definitionsgemäss $(g \circ f)(x) = x$, d.h. $g \circ f : id_{\mathbb{X}}$. Die eindeutig definierte Abbildung g wird (auch) mit f^{-1} bezeichnet und Umkehrfunktion von f genannt.

Für $f \circ f^{-1}$: Sei $y \in Y$ und x erfülle $f(x) = y$. Dann ist $\left(f \circ f^{-1}\right)(y) = f\left(f^{-1}(y)\right) = f(x) = y$

$$f \circ f^{-1} = id_Y$$

Beispiel

1.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2x + 3 \end{aligned}$$

   Die Funktion is bijektiv.
   Die Umkehrfunktion ist gegeben durch

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x-3}{2} \end{aligned}$$

2. Sei $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen und

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

   Dann ist f bijektiv und die Umkehrfunktion ist gegeben durch

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

Verallgemeinerungen Falls $f : X \to Y$ *injektiv* ist, kann man die Umkehrabbildung $f^{-1} : f(\mathbb{X}) \to \mathbb{X}$ definieren. Das heisst, die Funktion f^{-1} erfüllt: wenn $f(x) = y$, dann $f^{-1}(y) = x$.

Vorsicht: $f^{-1} \circ f = id_{\mathbb{X}}$ aber $f \circ f^{-1} = id_{f(\mathbb{X})}$ und $f \circ f^{-1} = id_Y$ nur genau dann wenn $f(X) = Y$, d.h. f bijektiv ist.

Kapitel 2

Reelle Zahlen, Euklidische Räume und Komplexe Zahlen

2.1 Elementare Zahlen

$$
\begin{array}{rcccc}
\text{Natürliche Zahlen} & \mathbb{N} & = & \{0,1,2,\dots\} & \text{addieren und multiplizieren} \\
 & \cap & & & \\
\text{Ganze Zahlen} & \mathbb{Z} & = & \{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\} & \text{subtrahieren} \\
 & \cap & & & \\
\text{Rationale Zahlen} & \mathbb{Q} & = & \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p,q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\} & \text{dividieren}
\end{array}
$$

Viele Gleichungen haben keine Lösung in $\mathbb{Q}$.

Satz 2.1

Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Dann hat $x^2 = p$ keine Lösung in $\mathbb{Q}$.

Beweis

Zur Erinnerung: Zwei Natürlichen Zahlen a und b sind teilerfremd (oder relativ prim) wenn es keine natürliche Zahl ausser der Eins gibt, die beide Zahlen teilt.

$$ggT(a,b) = 1 \quad \text{(grösster gemeinsamer Teiler = 1)}$$

Indirekter Beweis

Wir nehmen an, dass es $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ gibt mit $x^2 = p$, wobei a, b teilerfremd und ≥ 1 sind. Dann gilt

$$a^2 = pb^2$$

woraus folgt, dass p a teilt, also ist $a = pk$, $k \in \mathbb{N}$ und somit

$$a^2 = p^2k^2 = pb^2 \Rightarrow pk^2 = b^2$$

woraus folgt, dass p b teilt.

■

2.2 Die Reellen Zahlen

Wir werden jetzt das System von Axiomen beschreiben, das die Menge der reellen Zahlen "eindeutig" charakterisiert.

Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist mit zwei Verknüpfungen "+" (Addition) und "·" (Multiplikation) versehen, sowie mit einer Ordnungsrelation $\leq$. Die Axiome werden wie folgt gruppiert:

1. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ **ist ein Körper**
   Es gibt zwei Operationen (zweistellige Verknüpfungen)

   - $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
     $(a, b) \mapsto a + b$
   - $\times : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
     $(a, b) \mapsto a \cdot b$

   und zwei ausgezeichnete Elemente 0 und 1 in $\mathbb{R}$, die folgende Eigenschaften haben:

Kommutativität	A1)	$x + y = y + x$
Assoziativität	A2)	$(x + y) + z = x + (y + z)$
Neutrales Element	A3)	$x + 0 = x = 0 + x$
Inverses Element	A4)	$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$ mit $x + y = 0 = y + x$
Komutativität	M1)	$x \cdot y = y \cdot x$
Assoziativität	M2)	$(xy)z = x(yz)$
Neutrales Element	M3)	$x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$
Inverse Element	M4)	$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0\ \exists y \in \mathbb{R}$ mit $xy = 1 = yx$

   und die Multiplikation ist verträglich mit der Addition im Sinne des Distributivitätsgesetzes (D)

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x(y + z) = xy + xz$$

   - $(\mathbb{R}, +)$ mit A1→A4 ist eine Abelsche Gruppe bezüglich der Addition.
   - $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ mit A1→A4, M1→M4 und D ist ein Zahlkörper.

Bemerkung 2.2

Eine Menge G, versetzt mit Verknüpfung $+$ und dem neutralen Element 0, die den obigen Eigenschaften A2→A4 genügt, heisst Gruppe.

Eine Menge K versetzt mit Verknüpfung $+, \cdot$ und Elementen $0 \neq 1$, die den obigen Eigenschaften A1→A4, M1→M4, D genügt, heisst Körper.

Folgerung 2.3

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

i) $a+b=a+c \Rightarrow b=c$ und 0 ist eindeutig, d.h. falls $z \in \mathbb{R}$ der Eigenschaft $a+z=a\ \forall a \in \mathbb{R}$ genügt, so folgt $z=0$.

ii) $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $\exists!$ (eindeutig bestimmtes) $x \in \mathbb{R} : a+x=b$. Wir schreiben $x=b-a$ und $0-a=-a$ ist das additive Inverse zu a.

iii) $b-a=b+(-a)$

iv) $-(-a)=a$

A

v) Aus $ab=ac$ und $a \neq 0$ folgt $b=c$. Das bzgl. der Multiplikation neutrale Element 1 ist eindeutig, d.h. falls $x \in \mathbb{R}$ der Eigenschaft $ax=a\ \forall a \in \mathbb{R}$ genügt, so folgt $x=1$

vi) $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $\exists! x \in \mathbb{R} : ax=b$. Wir schreiben $x=\frac{b}{a}$ und $\frac{1}{a}=a^{-1}$ ist das multiplikative Inverse zu a.

vii) Falls $a \neq 0 \Rightarrow \left(a^{-1}\right)^{-1}=a$

M

viii) $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \cdot 0 = 0$

ix) Falls $ab=0$, dann folgt $a=0$ oder $b=0$

Beweis 2.3

i) Sei $a+b=a+c$
$A4 \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R} : a+y=0$
$a+b=a+c \Rightarrow y+(a+b)=y+(a+c)$
$\overset{A2}{\Rightarrow}(y+a)+b=(y+a)+c$
$\Rightarrow 0+b=0+c \overset{A3}{\Rightarrow} b=c$
Nehmen wir an, dass es $0' \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $x+0'=x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, d.h. es gibt ein zweites neutrales Element für $+$.

Dann $0+0'=0$ aber auch $A3 \Rightarrow 0+0=0 \Rightarrow 0+0'=0+0 \Rightarrow 0=0'$

ii) Seien $a,b \in \mathbb{R}$, und sei $y \in \mathbb{R}$ mit $a+y=0$. Definieren wir $x := y+b \Rightarrow a+x=a+(y+b)=(a+y)+b=0+b=b$
$\Rightarrow$ es gibt mindestens eine Lösung der Gleichung $a+x=b$. Von i) folgt, dass x eindeutig bestimmt ist $a+x=b=a+x' \Rightarrow x=x'$

iii) Seien $x=b-a$, $y=b+(-a)$. Wir wollen beweisen, dass $x=y$.

Aus i) wissen wir, dass $b-a$ eine Lösung von $a+x=b$

$$y+a=(b+(-a))+a=b+((-a)+a)=b+0=b$$

$\Rightarrow y$ ist auch eine Lösung.
Weil die Lösung von $a+x=b$ eindeutig bestimmt ist, folgt $y=x$.

iv)

v)

vi)

vii)

ASK FOR BEWEIS PAGE 27 TOP

viii) $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \cdot 0 = 0$
$a \cdot 0 = a(0+0) = a \cdot 0 + a \cdot 0 \Rightarrow a \cdot 0 = 0$

ix) $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ oder $b = 0$
Wir nehmen an: $a \neq 0$ mit multiplikativem Inversem a^{-1}, (a^{-1} existiert mittels M4). So folgt $b = 1 \cdot b = \left(a^{-1} \cdot a\right) b = a^{-1}(a \cdot b) = a^{-1} \cdot 0 = 0$

■

2. **Ordnungsaxiome** $\leq$
Auf $\mathbb{R}$ gibt es eine Relation $\leq$, genante Ordnung, die folgenden Eigenschaften genügt

   (a) Reflexivität: $\forall x \in \mathbb{R}$: $x \leq x$
   (b) Transitivität: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$: $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$
   (c) Identität: $\forall x, y \in \mathbb{R}$: $(x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow x = y$
   (d) Die Ordnung ist total: $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y$ gilt entweder $x \leq y$ oder $y \leq x$

   Die Ordnung ist konsistent mit $+$, und $\cdot$

   (a) $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z \qquad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$
   (b) $x, y \geq 0 \Rightarrow xy \geq 0$

   Mit $\leq$ hat man auch$\geq, <, >$. Wir verzichten auf eine Auflistung aller Folgerungen und beschränken uns auf einige wichtigen Folgerungen.

Folgerungen 2.4

i) $x \leq 0$ und $y \leq 0 \Rightarrow xy \geq 0$
ii) $x \leq 0$ und $y \geq 0 \Rightarrow xy \leq 0$
iii) $x \leq y$ und $z \geq 0 \Rightarrow xz \leq yz$
iv) $1 > 0$
v) $\forall x \in \mathbb{R} \qquad x^2 \geq 0$
vi) $0 < 1 < 2 < 3 < \ldots$
vii) $\forall x > 0 : x^{-1} > 0$

$\{$Annahme: $x^{-1} \leq 0$. Nach Multiplikation mit $x > 0$ folgt (mittels ii) $1 = x^{-1} \cdot x \leq 0 \cdot x = 0\}$

Bemerkung 2.5

$\leq$ auf $\mathbb{Q}$ genügt den obigen Eigenschaften. Die entscheidende weitere Eigenschaft von $\mathbb{R}$ ist die *Ordnungsvollständigkeit*.

3. **Ordnungsvollständigkeit - Vollständigkeitsaxiome**

   Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ nicht leere Teilmengen von $\mathbb{R}$, so dass $a \leq b$ für alle $a \in A, b \in B$. Dann gibt es $c \in \mathbb{R}$ mit $a \leq c \leq b \quad \forall a \in A, b \in B$

Bemerkung 2.6

Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ erfüllen diese Eigenschaften nicht!

Seien

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0, x^2 \leq 2\}$$

$$B = \{y \in \mathbb{Q} \mid y \geq 0, y^2 \geq 2\}$$

Dann gilt $a \leq b \; \forall a \in A \; b \in B$. Aber ein $c \in \mathbb{Q}$, mit $a \leq c \leq b$ würde dann $c^2 = 2$ erfüllen! In Satz 2.1 haben wir gesehen dass $x^2 = p$ keine Lösung in $\mathbb{Q}$ hat.

Wir definieren jetzt für $x, y \in \mathbb{R}$

$$\max\{x, y\} = \begin{cases} x \text{ falls } y \leq x \\ y \text{ falls } x \leq y \end{cases}$$

Insbesondere ist der Absolutbetrag einer Zahl $x \in \mathbb{R}, |x|$

$$|x| : \max\{x, -x\}$$

Für diesen gilt folgender wichtiger Satz

Satz 2.7

i) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Dreiecksungleichung)

ii) $|xy| = |x||y|$

Beweis 2.7

i) $x \leq |x|, -x \leq |x|$
   $y \leq |y|, -y \leq |y|$
   und $x + y \leq |x| + |y|, -(x + y) \leq |x| + |y|$
   woraus $|x + y| \leq |x| + |y|$ folgt

ii) ASK FOR BEWEIS ASK FOR BEWEIS

$\blacksquare$

Satz (Youngsche Ungleichung)

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ gilt $2|ab| \leq \delta a^2 + \frac{b^2}{\delta}$

2.3 Infimum und Supremum

Im Zusammenhang mit der Ordnung führen wir einige wichtige Definitionen ein:

Definition 2.8

Sei $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge

a) $\mathbb{X}$ ist nach oben beschränkt, falls es $c \in \mathbb{R}$ gibt, mit $x \leq c, \forall x \in X$. Jedes derartige c heisst eine obere Schranke für $\mathbb{X}$.

b) $\mathbb{X}$ ist nach unten beschränkt, falls es $c \in \mathbb{R}$ gibt, mit $x \geq c$, $\forall x \in X$. Jedes derartige c heisst untere Schranke für $\mathbb{X}$.

c) X ist beschränkt, falls sie nach oben und unten beschränkt ist.

d) Ein Element $a \in \mathbb{X}$ ist ein maximales Element (oder Maximum) von $\mathbb{X}$ falls $x \leq a$, $\forall x \in \mathbb{X}$. Falls ein Maximum (bzw. Minimum) existiert, wird es mit $\max \mathbb{X}$ ($\min \mathbb{X}$) bezeichnet. Falls $\mathbb{X}$ keine obere Schranke hat, ist $\mathbb{X}$ nach oben unbeschränkt (analog für untere Schranke).

Beispiel 2.9

1. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ ist nach oben unbeschränkt. A ist nach unten beschränkt. Jedes $a \in \mathbb{R}, a \leq 0$ ist eine untere Schranke.

2. $B = [0, 1]$ ist nach oben und nach unten beschränkt.
   - 0 ist ein Minimum von B
   - 1 ist ein Maximum von B

3. $C = [0, 1)$ ist nach oben und nach unten beschränkt, $0 = \min(A)$. C hat kein Maximum.

Folgender Satz ist von zentraler Bedeutung und eine Folgerung des Ordnungsvollständigkeitsaxioms.

Satz 2.10

i) Jede nicht leere, nach oben beschränkte Teilmenge $A \subset B$ besitzt eine kleinste obere Schranke c. Die kleinste obere Schranke c ist eindeutig bestimmt, heisst Supremum von A und wird mit $\sup A$ bezeichnet.

ii) Jede nicht leere, nach unten beschränkt Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ besitzt eine grösste untere Schranke d, heisst Infimum von A und wird mit $\inf A$ bezeichnet.

Beweis

i) Sei $\varnothing \neq A \subset B$ nach oben beschränkt. Sei $B := \{b \in \mathbb{R} \mid b \text{ ist eine obere Schranke für } A\}$. Es folgt $B \neq \varnothing$ und $a \leq b$, $\forall a \in A\ b \in B$

Mit dem Ordnungsvollständigkeitsaxiom folgt die Existenz einer Zahl $c \in \mathbb{R}$ mit $a \leq c \leq b$ $\forall a \in A$, $b \in B$.

Es ist klar, dass c eine obere Schranke für A ist. Also $c \in B$. Da $c \leq b$ $\forall b \in B$, ist c die kleinste obere Schranke für A. Hiermit ist c eindeutig bestimmt.

(Seien c und c' zwei Suprema von A, c ist die kleinste obere Schranke und c' ist eine obere Schranke $\Rightarrow c \leq c'$. Das gleiche Argument mit c,c' vertauscht liefert $c' \leq c$)

ii) Sei A eine nach unten beschränkte, nicht leere Menge. Sei $-A := \{-x \mid x \in A\}$ die Menge der additiven Inversen von A. Dann $-A \neq \varnothing$ und nach oben beschränkt. i) $\Rightarrow \exists s = \sup(-A) \Rightarrow -s$ ist das Infimum von A

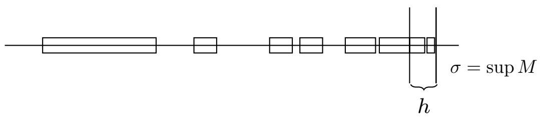
Korollar 2.11

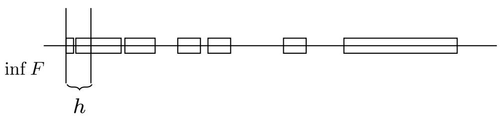
1. Falls $E \subset F$ und F nach oben beschränkt ist, gilt $\sup E \leq \sup F$
2. Falls $E \subset F$ und F nach unten beschränkt ist, gilt $\inf F \leq \inf E$
3. Falls $\forall x \in E$, $\forall y \in F$ gilt $x \leq y$, dann folgt $\sup E \leq \inf F$
4. Seien $E, F \neq \varnothing$, $\quad E, F \subset \mathbb{R}$, $\quad h \in \mathbb{R}$, $\quad h > 0$

   (i) Falls E ein Supremum besitzt $\Rightarrow \exists x \in E$ mit $x > \sup E - h$

   (ii) Falls E ein Infimum besitzt $\Rightarrow \exists y \in$: $y < \inf E + h$.

   Das Supremum, $\sup \mathbb{X} = \sigma$ der Menge $\mathbb{X}$ ist folgendermassen charakterisiert: Es gibt in $\mathbb{X}$ keine Zahlen $> \sigma$; aber für jede Toleranz $h > 0$ gibt es in $\mathbb{X}$ Zahlen $> \sigma - h$





   Es gibt in $\mathbb{X}$ keine Zahlen $< \inf \mathbb{X}$; aber für jede Toleranz $h > 0$ gibt es in $\mathbb{X}$ Zahlen $< \inf \mathbb{X} + h$

   (iii) Sei $E + F = \{e + f : e \in E, f \in F\}$. Falls E und F ein Supremum besitzen $\Rightarrow E+F$ besitzt ein Supremum und $\sup(E+F) = \sup(E) + \sup(F)$. (Analog mit Infimum)

Beweis

Ask for full Beweis!!

Beispiel

1. $E = (-\infty, 2) \subset F(-\infty, 4]$
   $\sup E = 2, \sup F = 4 = \max F$
   E hat kein Maximum
   $\sup E \leq \sup F$

2. $G : [4, 5) \subset H = (3, 6)$
   $\min G = \inf G = 4 \geq \inf H = 3$

3. $K = (3, \infty)$, $E = (-\infty, 2)$
   $\forall x \in E$, $y \in K$ gilt $x \leq y$
   $2 = \sup E \leq 3 = \inf K$

4. $A\{\sin x \mid x \in \mathbb{R}\}$
   $\inf A = -1 = \min A$
   $\sup A = 1 = \max A$

5. $A = \{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Wir werden sehen, dass A nach unten und nach oben beschränkt ist.
   $\inf A = \min A = 2$
   $\sup A = 2.718 \dots =: e$ (die Eulersche Zahl per Vereinbarung)

Für nach oben unbeschränkte Mengen $A \neq \varnothing$ setzen wir $\sup A = \infty$. Analog für nach unten unbeschränkte Menge $\varnothing \neq A$ setzen wir $\inf A = -\infty$.
Der folgende Satz zeigt, wie die Ordnungsvollständigkeit von $\mathbb{R}$ die Lösbarkeit gewisser Gleichungen in $\mathbb{R}$ garantiert.

Satz 2.12

Für jedes $x > 0$ gibt es genau ein $y > 0$ mit $y^2 = x$. Diese Lösung wird mit $\sqrt{x}$ bezeichnet.

(Im Allgemeinen: Für jedes $x > 0$ und $n \geq 1$, $n \in \mathbb{R}$ gibt es genau ein $y > 0$ mit $y^n = 0$. Diese Lösung wird mit $\sqrt[n]{x}$ bezeichnet)

Beweis

Sei $x > 1$, und $A := \{z \in \mathbb{R} \mid z > 0 \text{ mit } z^2 \leq x\}$. Dann ist A nach oben beschränkt und $A \neq \varnothing$ (da mindestens $1 \in A$).
$\Rightarrow A$ besitzt ein Supremum.
Sei $y := \sup A$. Wir zeigen, dass $y^2 = x$

- Schritt 1: Annahme $y^2 < x$.
  Sei $0 \leq h \leq 1$. Wir nehmen an:

$$\begin{aligned}(y+h)^2 &= y^2 + 2hy + h^2 \\ &= y^2 + h(2y+h) \\ &\leq y^2 + h(2y+1) \\ &= y^2 + h\left((y+1)^2 - y^2\right)\end{aligned}$$

Weil $y^2 < x$ ist, $\frac{x-y^2}{(y+1)^2-y^2} > 0$ und daher gibt es $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$, $h \leq \frac{x-y^2}{(y+1)^2-y^2}$ (sei $h = \min\{1, \frac{x-y^2}{2x+1}\}$)

Für solche h gilt

$$(y+h)^2 \leq y^2 + \left(\frac{x-y^2}{(y+1)^2-y^2}\right)\left((y+1)^2-y^2\right) = x$$

Also $y+h \in A$ und $y+h > y$. Ein Widerspruch: y ist eine obere Schranke für A, d.h., $z < y \; \forall z$
$\Rightarrow y^2 \geq x$ Analog beweist man $y^2 \leq x$

- Schritt 2: Annahme $y^2 > x$
  Sei $h = \frac{y^2-x}{2y} \neq 0$

$$(y-h)^2 = y^2 - 2hy + h^2 > y^2 - 2hy = y^2 - (y^2 - x) = x$$

$\Rightarrow y - h$ ist eine obere Schranke für A

$\big(\forall z \in A, z^2 \leq x$. Da $(y-h)^2 > x$ ist, $(y-h)^2 > x \geq z^2$. Damit $y - h > z, \forall z \in A\big)$

Aber $y - h < y$, Widerspruch zur Minimalität von y.

Falls $0 < x < 1$, dann $\frac{1}{x} > 1$
$\Rightarrow \exists u \in \mathbb{R}$, mit $u^2 = \frac{1}{x}$
Somit $\frac{1}{u^2} = \left(\frac{1}{u}\right)^2 = x$ und $y = \frac{1}{u}$ ist eine Lösung von $y^2 = x$.

Zum Abschluss dieses Themas erwähnen wir noch eine wichtige Eigenschaft der reellen Zahlen

Satz 2.13 (Archimedische Eigenschaft)

Zu jeder Zahl $0 < b \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b < n$.

Beweis (Indirekt)

Andernfalls gibt es $b \in \mathbb{R}$ mit $n \leq b$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$(\neg \exists n \in \mathbb{N} : b < n) \;=\; (\forall n \in \mathbb{N} : b \geq n)$$

Dann ist b eine obere Schranke für $\mathbb{N}$ und es existiert $c = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$. Mit $n \in \mathbb{N}$ ist jedoch auch $n + 1 \in \mathbb{N}$.
Also: $n + 1 \leq c$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Somit folgt $n \leq c - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ein Widerspruch zur Minimalität von c.

Korollar 2.14

1. Seien $x > 0$ und $y \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann gibt es $n \in \mathbb{Z}$ mit $y < nx$
2. Falls $x, y, a \in \mathbb{R}$ die Ungleichheiten $a \leq x \leq a + \frac{y}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ erfüllen, ist $x = a$.

Beweis

1. ASK FOR BEWEIS

Ask for beweis

2. $a < x \Rightarrow x - a > 0$
   $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n(x-a) > y$
   $\Rightarrow x > a + \frac{y}{n}$ Widerspruch

Wir wissen, dass gewisse Gleichungen in $\mathbb{R}$ lösbar sind: z.B. $y^2 = a$, $\forall a > 0$. Aber man kann nicht alle Gleichugen in $\mathbb{R}$ lösen, z.B. $x^2 + 1 = 0$. Da für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, dass $x^2 > 0$, ist $x^2 = -1$ nicht lösbar. Um eine Lösung für diese Gleichung zu finden, müssen wir die komplexen Zahlen betrachten.

Zuerst werden wir die Euklidischen Räume $\mathbb{R}^n$ einführen

2.4 Euklidische Räume

Mit der Mengentheorie können wir das kartesische Produkt zweier Mengen bilden; es lässt sich ohne Schwierigkeiten zu endlichen Familien $A_1, \dots, A_n$ verallgemeinern, nämlich

$$A_1 \times \cdots \times A_n := \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in A_i\}$$

ist die Menge der geordneten $n-$Tupel von Elementen aus $A_1, \dots, A_n$.

Für beliebige $n \geq 1$ betrachten wir $\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n-\text{mal}}$ und untersuchen dessen Struktur. Auf $\mathbb{R}^n$ haben wir zwei Verknüpfungen

1. $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Addition.
   $\left(\underbrace{(x_1, \dots, x_n)}_{x}, \underbrace{(y_1, \dots, y_n)}_{y}\right) \to \underbrace{(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)}_{\text{Komponentenweise Addition}}$. Dann ist $(\mathbb{R}^n, +)$ eine Abelsche Gruppe, mit $0 := (0, \dots, 0)$ aln neutrales Element

2. $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Skalarmultiplikation.
   $(\lambda, x) \to \lambda \cdot x := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$. Dann gelten die folgende Eigenschaften: $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
   (a) Distributivität: $(\alpha + \beta)\, x = \alpha x + \beta x$
   (b) Distributivität: $\alpha\,(x + y) = \alpha x + \alpha y$
   (c) Assoziativität: $(\alpha\beta)\, x = \alpha\,(\beta x)$
   (d) Neutralelement: $1 \cdot x = x$

Definition 2.15
Eine Menge $\mathbb{V}$ mit $+, \cdot$ und $0 \in \mathbb{V}$, so dass $(\mathbb{V}, +)$ eine Abelsche Gruppe mit neutralem Element 0 ist und zudem (a)-(d) gelten, nennt sich einen Vektorraum über dem Körper $\mathbb{R}$ und seine Elemente heissen Vektoren.

Also ist $\mathbb{R}^n$ ein Vektorraum. In der linearen Algebra führt man dann Begriffe wie Basis usw. ein. Die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ ist die Menge $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ wobei $e_i := \{0, \ldots, 0, 1, \ldots, 0\}$.

Jeder Vektor $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$ besitzt eine eindeutige Darstellung $x = \sum x_i e_i$ bezüglich der Standardbasis.

Definition 2.16

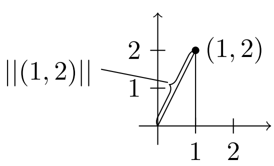
1. Das Skalarprodukt zweier Vektoren $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$ ist die durch
$$< x, y > := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$
definierte reelle Zahl
$< \cdot, \cdot > = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
2. Falls $< x, y > = 0$ heissen x und y senkrecht (orthogonal) aufeinander. $< \cdot, \cdot >$ besitzt folgende Eigenschaften
   (a) Symmetrie: $< x, y > = < y, x >$
   (b) Linearität: $< x, \alpha y + \beta z > = \alpha < x, y > + \beta < x, z >$
   (c) Positivität: $< x, x > \geq 0$ mit Gleicheit genau dann, wenn $x = 0$

Definition 2.17

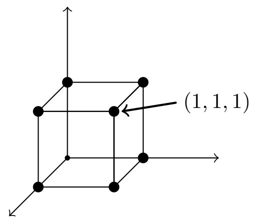
Die Norm $\|x\|$ eines Vektors ist:
$$\|x\| := \sqrt{< x, x >} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$
und wird oft als Länge interpretiert.

Beispiel 2.18

- $\|(1, 2)\| = \sqrt{1 + 4}$



- $\|(1, 1, 1)\| = \sqrt{3}$



- $\|e_i\| = 1$, $< e_i, e_j >= 0$. $e_i \perp e_j$
  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ist eine orthonormale Basis. Die Vektoren einer orthogonalen Basis sind orthogonal zueinander und normiert (die Länge ist gleich 1).

Die erste wichtige Eigenschaft des Skalaprodukts ist

Satz 2.19 (Cauchy-Schwarz)

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt $|< x, y >| \leq \|x\|\|y\|$ und

$|< x, y >| = \|x\|\|y\| \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : x = \lambda y \Leftrightarrow$ die Vektoren sind parallel zueinander

Die Euklidische Norm hat die Eigenschaften

Satz 2.20

- $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ (Homogenität)
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung)

Beweis

ASK FOR BEWEIS

- ASK FOR BEWEIS
-

$$\|x + y\|^2 =< x + y, x + y >$$

$$=< x, x + y > + < y, x + y >$$

$$< x, x > + < x, y > + < y, x > + < y, y >$$

$$< x, x > +2 < x, y > + < y, y >$$

$$\leq \|x\|^2 + 2| < x, y > | + \|y\|^2$$

$$\leq \|x\|^2 + 2\|y\|\|x\| + \|x\|^2 = (||x||\ ||y||)^2$$

2.5 Die Komplexen Zahlen

Da für alle $x \in \mathbb{R}$ $x^2 \geq 0$ gilt, gibt es $\sqrt{-1}$ nicht als reelle Zahl. Seit dem 18. Jahrhundert haben Mathematiker mit Ausdrücken wie $a + b\sqrt{-1}$, $a, b \in \mathbb{R}$ gerechnet und auf sie die in $\mathbb{R}$ geltenden Rechnenregeln angewandt, z.B.

$$\left(1 + 2\sqrt{-1}\right)\left(1 - 2\sqrt{-1}\right) = 1^2 - 2^2\left(\sqrt{-1}\right)^2 = 5$$

Allgemein:

$$\begin{aligned}\left(a + b\sqrt{-1}\right)\left(c + d\sqrt{-1}\right) &= ac + ad\sqrt{-1} + bc\sqrt{-1} + bd\sqrt{-1} \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)\sqrt{-1}\end{aligned}$$

Das Problem hier ist, dass $\sqrt{-1}$ keinen präzisen mathematisches Sinn hat und dass deshalb auch nicht klar ist, was "+" in "$a + b\sqrt{-1}$" bedeuten soll.

Das Problem wird wie folgt gelöst:

Als Modell von "$a + b\sqrt{-1}$", $\mathbb{C}$, nehmen wir $\mathbb{R}^2$. Wir kennen bereits die Addition von Vektoren und das neutrale Element $0 = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$. Wir definieren dann die Multiplikation

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\to x \cdot y\end{aligned}$$

wobei $x \cdot y = (ac - bd, ad + bc)$, $x = (a, b)$, $y = (c, d)$. Dann erfüllen "+" und "$\cdot$" folgende Eigenschaften:

- Assoziativität: $((a, b)(c, d))\,(e, f) = (a, b)\,((c, d)(e, f))$
- Neutrales Element: $(1, 0)(a, b) = (a, b)$
- Kommutativ: $(a, b)(c, d) = (c, d)(a, b)$
- Inverses Element $\forall (a, b) \neq (0, 0)$ in $\mathbb{R}^2$ $\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $(a, b)(x, y) = (1, 0)$
- Distributivität: $((a, b) + (c, d)) \cdot (e, f) = (a, b)(e, f) + (c, d)(e, f)$

Definition 2.21
Der Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist $\mathbb{R}^2$ versehen mit "+","$\cdot$", $0 = (0, 0)$ und $(1, 0) = 1$

Bemerkung 2.22

$z^2 + 1 = 0$ hat in $\mathbb{C}$ eine Lösung. Nämlich ist $(0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -(1, 0) = -1$. Wir führen für $(0, 1)$ die Bezeichnung "i" ein, welches imaginäre Einheit heisst.

Also ist $i^2 = -1$. Jede komplexe Zahl $z = (x, y)$ lässt sich dann wie folgt darstellen:

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x \cdot 1 + y \cdot i$$

In den Rechnungen lässt man oft das 1 in $x \cdot 1$ fallen und schreibt $z = x + yi$

Definition 2.22

1. Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$
   - $\operatorname{Re} z := x$ heisst der Realteil
   - $\operatorname{Im} z := y$ heisst der Imaginärteil
2. Die zu: $z = x + iy$ konjugierte Zahl ist $\overline{z} = x - iy$
3. Wir definieren die Norm von z als $\|z\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Satz 2.23

(i) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

(ii) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

(iii) $z \cdot \overline{z} = \|z\|^2 \cdot 1$

(iv) $\|z_1 \cdot z_2\| = \|z_1\| \cdot \|z_2\|$

Beweis

ASK FOR BEWEIS

ASK FOR BEWEIS

Abkürzung

$|z| := \|z\|$

Bemerkung 2.24

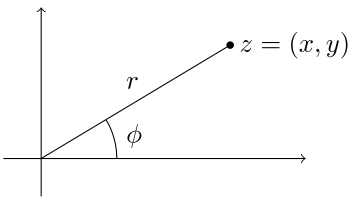
Wir können $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ "einbetten" mittels $\mathbb{R} \ni x \to (x, 0) \in \mathbb{C}$. Sei $\mathbb{C}_0 = \{(x, y) \in \mathbb{C} \mid y = 0\} = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}_0$, $x \to (x, 0)$ist eine Bijektion.

Diese Identifikation von $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}_0$ ist verträglich mit den Operationen in $\mathbb{R}$ und in $\mathbb{C}$, d.h.

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$
$$f(xy) = f(x)f(y)$$

Polarform

Als Polarkoordinaten in der Ebene führen wir (r, ϕ) ein



$$x = r\cos\phi \qquad y = r\sin\phi$$
$$z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$$
$$r = |z|$$

Definition

Wir definieren (nach Euler)

$$e^{i\phi} := \cos\phi + i\sin\phi$$

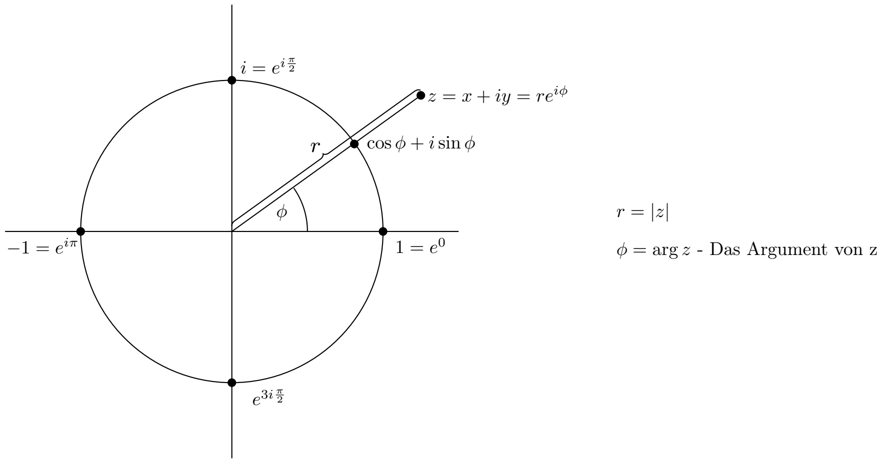
$$z = re^{i\phi} = |z|e^{i\phi}$$

Where does the definition end??

In der Ebene $\mathbb{R}^2$ stehen uns neben den kartesischen Koordinaten x, y noch die Polarkoordinaten r, ϕ zur Verfügung. Es gelten die folgenden Additionstheoreme:

- $\cos(\phi + \psi) = \cos\phi\cos\psi - \sin\psi\sin\phi$
- $\sin(\phi + \psi) = \sin\phi\cos\psi + \cos\phi\sin\psi$

Für beliebiges $z = x + iy \neq 0$ gilt also:



$$e^{i\phi} = 1 \Leftrightarrow \phi = 2k\pi$$

$$\cos\phi + i\sin\phi = 1 \Leftrightarrow \cos\phi = 1 \text{ und } \sin\phi = 0$$

$$\Leftrightarrow \phi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$e^{i\theta} \cdot e^{i\phi} = (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\phi + i\sin\phi)$$

$$= \underbrace{\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi}_{\cos(\theta+\phi)} + i\underbrace{(\cos\theta\sin\phi + \sin\theta\cos\phi)}_{\sin(\theta+\phi)}$$

$$= e^{i(\theta+\phi)}$$

Es folgt somit $e^{i\phi}e^{i\psi} = e^{i(\phi+\psi)}$.

Somit folgt für $z = re^{i\theta}$, $\omega = se^{i\phi} \in \mathbb{C}$ die einfache Darstellung $z\omega = rse^{i(\theta+\phi)}$,

$$\frac{z}{\omega} = \left(\frac{r}{s}\right) e^{i(\theta-\phi)}$$

Die polare Darstellung ist in Berechnungen sehr nützlich, insbesondere um das Produkt und den Quotienten zu berechnen

Beispiel

$$z = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$
$$\omega = \sqrt{3} - i = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$$
$$\frac{\left(\sqrt{3} - i\right)^3}{(1+i)^2} = \frac{\omega^3}{z^4} = \frac{8e^{-i\frac{\pi}{2}}}{4e^{i\pi}} = 2e^{-\frac{3\pi}{2}i} = 2e^{\frac{\pi}{2}i} = 2i$$

Die Polarform ist auch sehr nützlich um die Wurzel einer komplexen Zahl zu berechnen. Sei $\omega \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Wir möchten die Gleichung $z^n = \omega$ lösen.

$$\omega = |\omega|e^{i\phi}$$
$$z^n = \omega = |\omega|e^{i\theta} = |\omega|e^{i(\theta+2k\pi}$$
$$\Rightarrow z = |\omega|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{(\theta+2k\pi)}{n}}$$

Beispiel

$$z^3 = 1 \Rightarrow z = \left(e^{2\pi i k}\right)^{\frac{1}{3}} \in \{e^{i\pi\frac{2k}{3}} : k = 0, 1, 2\} = \{1, e^{2i\frac{\pi}{3}}, e^{4i\frac{\pi}{3}}\}$$

Allgemeine Formel der n-ten Einheitswurzel $z = \{e^{i\frac{2\pi k}{n}} : k = 0, 1, \ldots, n-1\}$

Bemerkung

1. Es gibt keine mit den Körperoperationen verträgliche Ordnung in $\mathbb{C}$.
2. Hingegen ist $\mathbb{C}$ im Untershied zu $\mathbb{R}$ algebraisch vollständig. Nicht nur die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hat in $\mathbb{C}$ eine Lösung, sondern es gilt der Fundamentalsatz der Algebra. Er sagt, dass jedes Polynom $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$ vom Grad $n \geq 1$ in $\mathbb{C}$ genau n Nullstellen hat.

Kapitel 3

Folgen und Reihen (Der Begriff des Limes)

3.1 Allgemeines zu Folgen

Definition 3.1
Eine Folge reeller Zahlen ist eine Abbildung $a : \mathbb{N}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ wobei wir das Bild von $n \geq 1$ mit a_n (statt $a(n)$) bezeichnen.

Eine Folge wird dann meistens mit $(a_n)_{n\geq 1}$, also mit der geordneten Bildmenge bezeichnet.

Folgen können auf verschiedene Arten gegeben sein.

Beispiel 3.2

1. $a_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$
2. $a_1 = 0.9$, $a_2 = 0.99$, $\ldots$, $a_n = 0.\underbrace{99\ldots 9}_{n-\text{mal}}$
3. $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \geq 1$
4. (Rekursiv) Sei $d > 0$ eine reelle Zahl.
   $a_1, \ldots, a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{d}{a_n}\right), n \geq 1$
   z.B. $d = 2, a_1 = 1, a_2 = \frac{3}{2}, a_3 = \frac{17}{12}, a_4 = \ldots$
5. Fibonacci Zahlen. $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \forall n \geq 2$

Definition 3.3
Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ heisst beschränkt, falls die Teilmenge $\{a_n : n \geq 1\} \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt ist. d.h. es gibt $c \in \mathbb{R}(c \geq 0)$, so dass $|a_n| \leq c, \forall n \geq 1$

3.2 Grenzwert oder Limes eine Folge. Ein zentraler Begriff

Definition 3.4
Eine Folge $(a_n) \geq 1$ konvergiert gegen a wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ einen Index $N(\varepsilon) \geq 1$ gibt, so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon, \forall n > N(\varepsilon)$$

Definition 3.4 (Version 2)
Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$, falls für jedes $\varepsilon > 0$ die Menge der Indizes $n \geq 1$ für welcher $a_n \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ endlich ist.

$$(\forall \varepsilon > 0, \#\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\} < \infty)$$

Beweis der Äquivalenz beider Definitionen

(2) $\Rightarrow$ (1)
Sei für $\varepsilon > 0$

$$M(\varepsilon) := \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\} = \{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - a| \geq \varepsilon\}$$

Da $M(\varepsilon)$ endlich ist, ist es nach oben beschränkt. Es gibt also $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass $\forall n \in M(\varepsilon)$, $n \leq N(\varepsilon) - 1$. Insbesondere gilt $\forall n \geq N(\varepsilon)$, $n \notin M(\varepsilon)$ und daher $|a_n - a| < \varepsilon$.

(1) $\Rightarrow$ (2)

$$M(\varepsilon) = \{n : |a_n - a| \geq \varepsilon\} \subset [0, N(\varepsilon) - 1]$$

Also endlich.

Falls die Eigenschaften in Definition 3.4 zutrifft, schreibt man

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \text{ oder } a_n \underset{n\to\infty}{\to} a$$

Die Zahl a nennt sich Grenzwert oder Limes der Folge $(a_n)_{n\geq 1}$. Eine Folge heisst konvergent falls sie einen Limes besitzt, andernfalls heisst sie divergent.

Bemerkung 3.5

1. Falls $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert, ist der Limes eindeutig bestimmt

   Beweis

   Seien a und b Grenzwerte von $(a_n)_{n\geq 1}$. Sei $\varepsilon = \left|\frac{b-a}{3}\right| > 0$, dann gibt es N_1, N_2, so dass

   $$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \forall n > N_1$$

$$|a_n - b| < \varepsilon \qquad \forall n > N_2$$

Also $\forall n \geq \max\{N_1, N_2\}$

$$(a-b) \cong |(a-a_n) + (a_n - b)| < 2\varepsilon = \frac{2}{3}|b-a|$$

2. Falls $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergent ist, $\{a_n : n \geq 1\}$ beschränkt: Sei $\varepsilon = 1, \lim a_n = a$ und N_0 mit
$$|a_n - a| \leq 1 \qquad \forall n > N_0$$
Dann ist $\forall n\ |a_n| \geq \max\{|a|+1, |a_j|, 1 \leq j \leq N_0\}$

Binomischer Lehrsatz

Für beliebige Zahlen a, b und $n \in \mathbb{N}$ ist

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Beispiel 3.6

1. Sei $a_n = \frac{1}{n}, n \geq 1$. Dann gilt $\lim a_n = 0$
   - Sei $\varepsilon > 0$. Dann $\frac{1}{\varepsilon} > 0$. Sei $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \geq 1$ mit $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ (Archimedische Eigenschaft, Satz 2.13)

   Dann gilt für alle $n \geq n_0$, $\frac{1}{\varepsilon} < n_0 \leq n \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon, \forall n \geq n_0$

2. Sei $0 < q < 1$ und $a_n := q^n$, $n > 1$. Dann gilt $\lim a_n = 0$ (a_n konvergiert gegen 0)

   Beweis

   Zu beweisen
   $$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$$
   $$\forall n \geq N_0 : q^n < \varepsilon$$
   Die Idee ist, zu zeigen, dass $\frac{1}{q^n}$ sehr gross wird und deswegen q^n sehr klein wird. Setzen wir $\frac{1}{q} = 1 + \delta$ mit $\delta > 0$ $\left(q < 1 \Rightarrow \frac{1}{q} > 1\right)$
   $$\frac{1}{q^n} = \left(\frac{1}{q}\right)^n = (1+\delta)^n = 1 + n\delta + \binom{n}{2}\delta^2 + \cdots + \delta^n \geq 1 + n\delta > n\delta, \forall n \in \mathbb{N}$$
   also
   $$0 < q^n < \frac{1}{n\delta}, \forall n \in \mathbb{N}$$
   Sei jetzt $\varepsilon > 0$, wähle $N_0 = N_0(\varepsilon)$ mit $\frac{1}{\varepsilon\delta} < N_0 \Rightarrow \frac{1}{N_0\delta} < \varepsilon$
   $$\forall n > N_0 \quad 0 < q^n \leq \frac{1}{n\delta} < \frac{1}{N_0\delta} < \varepsilon$$

3. $a_n = \sqrt[n]{n}$, $\lim a_n = 1$. Klar: $n \geq 1$ also $\sqrt[n]{n} \geq 1$
   Gegeben ein $\varepsilon > 0$, wollen wir n so gross wählen, dass

   $$\sqrt[n]{n} - 1 < \varepsilon$$

   das heisst, $n < (1+\varepsilon)^n$. Wir entwickeln

   $$(1+\varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \binom{n}{2}\varepsilon^2 + \cdots + \varepsilon^n$$

   ε ist klein aber fixiert.

   Für sehr grosse n wird $1 + n\varepsilon$ nie grösser als n sein. Wir versuchen unser Glück mit dem Term $\binom{n}{2}\varepsilon^2$.

   $$\binom{n}{2}\varepsilon^2 = \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2$$

   Wir benutzen also $(1+\varepsilon)^n \geq \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2$. Wir wollen n so wählen, dass

   $$\frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 > n$$

   d.h. $n - 1 > \frac{2}{\varepsilon^2}$ oder $n > 1 + \frac{2}{\varepsilon^2}$

   Setzen wir $N_0 := \left(1 + \frac{2}{\varepsilon^2}\right) + 1$. Dann gilt für $\forall n > N_0$

   $$(1+\varepsilon)^n > n \geq 1$$

   $$\Rightarrow 1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + \varepsilon$$

   $$\Rightarrow -\varepsilon < 0 \leq \sqrt[n]{n} - 1 \leq \varepsilon \Rightarrow \left|\sqrt[n]{n} - 1\right| < \varepsilon, \forall n > N_0$$

4. Nicht alle Folgen sind konvergent. Es gibt zwei verschiedene Verhältnisse einer divergenten Folge

   $$a_n = (-1)^n \Rightarrow \{1, -1, \dots\} \text{ beschränkt aber nicht konvergent}$$

5. $a_n = n$ unbeschränkt, divergent.

Beispiel 3.7

Seien $p \in \mathbb{N}$, $0 < q < 1$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} n^p q^n = 0$. Das heisst, Exponentialfunktionen wachsen schneller als jede Potenz (wenn x genügend gross ist, $a^x > x^b$)

Beweis

Der Trick ist folgender

$$n^p q^n = \left(n^{\frac{p}{n}} \cdot q\right)^n = \left(\left(\sqrt[n]{n}\right)^p \left(q^{\frac{1}{p}}\right)^p\right)^n$$

Wir werden Beispiel 3.6 (2.),(3.) benutzen.
(d.h. $\lim \sqrt[n]{n} = 1 \qquad \lim r^n = 0, 0 < r < 1$)

Da $\lim \sqrt[n]{n} = 1$, $\forall \eta > 0$, $\exists N_0(\eta)$

$$\sqrt[n]{n} < 1 + \eta, n > N_0(\eta)$$

Wir wählen $\eta > 0$, so dass $q^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{(1+\eta)^2}$. Dann

$$\sqrt[n]{n} \cdot q^{\frac{1}{p}} \leq \frac{(1+\eta)}{(1+\eta)^2} = \frac{1}{1+\eta} \qquad \forall n > N_0\left(\eta\right)$$

Wobei

$$\forall n > N_0\left(\eta\right)$$

$$a_n = \left(\sqrt[n]{n} q^{\frac{1}{p}}\right)^{pn} < r^n$$

mit

$$r := \left(\frac{1}{1+\eta}\right)^p, r < 1$$

Sei jetzt $\varepsilon > 0$. Da $\lim r^n = 0$, $\exists N_1 = N_1(\varepsilon)$, $\forall n > N_1(\varepsilon)$, $r^n < \varepsilon$

Für $n > \max\{N_0\left(\eta\right), N_1(\varepsilon)\}$, $a_n < r^n < \varepsilon \Rightarrow \lim a_n = \lim n^p q^n = 0$

3.3 Konvergenzkriterien

Mit konvergenten Folgen kann man "rechnen" wie folgender Satz zeigt.

Satz 3.8

Seien $(a_n)_{n\geq 1}$ und $(b_n)_{n\geq 1}$ konvergente Folgen mit

$$\lim a_n = a, \ \lim b_n = b$$

i) Die Folge $(a_n + b_n)_{n\geq 1}$ konvergiert und $\lim\left(a_n + b_n\right) = a + b$

ii) Die Folge $(a_n \cdot b_n)_{n\geq 1}$ konvergiert und $\lim\left(a_n \cdot b_n\right) = a \cdot b$

iii) Falls $b \neq 0$ und $b_n \neq 0$ $\forall n \geq 1$, gilt $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

iv) Falls $a_n \leq b_n$ folgt $a \leq b$

Beweis

Sei $\varepsilon > 0$, es gibt $N_1(\varepsilon)$, $N_2(\varepsilon)$, so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon, \forall n > N_1(\varepsilon)$$
$$|b_n - b| < \varepsilon, \forall n > N_2(\varepsilon)$$

i) Für $n \geq \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$ gilt

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$$

Da dies für alle $\varepsilon > 0 < 2\varepsilon$ gilt, folgt auch, dass

$$\forall n > \max\left\{N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), N_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right\} := N(\varepsilon)$$

gilt

$$|a_n + b_n - (a + b)| < \varepsilon$$

ii) Sei C eine Schranke für $\{|b_n| : n \geq 1\}$ (Bemerkung 3.5: Falls $(b_n)_{n\geq 1}$ konvergent ist, ist $\{b_n : n \geq 1\}$ beschränkt). Für $N_1(\varepsilon)$, $N_2(\varepsilon)$ wie oben folgt $\forall n \geq \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a b_n + a b_n - ab| \\ &= |b_n (a_n - a) + a (b_n - b)| \\ &\leq |b_n|\varepsilon + |a|\varepsilon \leq \varepsilon (C + |a|) \end{aligned}$$

Aus

$$\forall n \geq N(\varepsilon) := \max\left(N_1\left(\frac{\varepsilon}{C + |a|}\right), N_2\left(\frac{\varepsilon}{|C| + a}\right)\right)$$

folgt, dass $|a_n b_n - ab| < \varepsilon$

iii) Wegen (ii) genügt es, den Fall $a = a_n = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ zu betrachten

$$|b_n| = |b_n - b + b| \geq |b| - |b_n - b| \geq |b| - \varepsilon$$

Sei $0 < \varepsilon < \frac{|b|}{2}$, dann gilt $|b_n| > \frac{|b|}{2}$. Es folgt

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b_n - b}{b_n b}\right| < \frac{2}{|b|^2}|b_n - b| \leq \frac{2}{|b|^2}\varepsilon \qquad \forall n > n_0(\varepsilon)$$

Also folgt $\forall n > N(\varepsilon) := n_0\left(\frac{\varepsilon|b|^2}{2}\right)$ dass $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| < \varepsilon$

iv) (Indirekter Beweis) Falls $a > b$, $a - b > 0$. Sei

$$\begin{aligned} \varepsilon &:= \frac{a - b}{2} > 0 \\ 2\varepsilon &= b - a \\ \Rightarrow b - \varepsilon &= a + \varepsilon \\ b_n \to b \Rightarrow & b_n < b + \varepsilon \qquad \forall n > n_0(\varepsilon) \\ a_n \to a \Rightarrow & -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < a_n \qquad \forall n > n_0(\varepsilon) \end{aligned}$$

Jedoch steht dann die Ungleichung

$$b_n < b + \varepsilon = a - \varepsilon < a_n \qquad \forall n \geq n_0$$

im Widerspruch zur Annahme $a_n \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

■

Es ist nicht unbedingt nötig, den ganzen Beweis zu führen, um zu wissen, dass eine Folge konvergent ist. Es gibt Folgen, deren Konvergenz durch eine Strukturelle Eigenschaft gesichert ist, ohne dass man den Limes a priori kennen muss.

Folgender Satz illustriert dies unter Verwendung des Vollständigkeitsaxioms.

Satz 3.9 (Monotone Konvergenz)

1. Sei $(a_n)_{n>1}$ eine monoton wachsende beschränkte Folge. Dann ist sie konvergent und es gilt zudem
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \geq 1\}$$
2. Sei $(b_n)_{n\geq 1}$ eine monoton fallende beschränkte Folge. Dann ist sie konvergent und es gilt zudem
$$\lim_{n\to\infty} b_n = \inf\{b_n : n \geq 1\}$$

Definition 3.10

- **Monoton wachsend**:
$$a_n \leq a_{n+1} \qquad \forall n \geq 1$$
- **Monoton fallend**:
$$b_{n+1} \leq b_n \qquad \forall n \geq 1$$

Number might be wrong, page 63 middle

Beweis 3.9

i) $a_1 \leq a_2 \leq \dots$ und $\{a_n : n \geq 1\}$ nach oben beschränkt $\Rightarrow \exists c$ mit $a_n \leq c$ $\forall n \geq 1$. Sei nach Satz 2.9 (Jede nach oben beschränkte Teilmenge $A \subset R$ besitzt eine kleinste obere Schranke) $a := \sup\{a_n : n \geq 1\}$ die kleinste obere Schranke.

Wir behaupten, dass: $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Sei $\varepsilon > 0$, dann ist $a - \varepsilon$ keine obere Schranke und deswegen gibt es $n(\varepsilon) \geq 1$ mit $a_{n(\varepsilon)} > a - c$. Aus der Monotonität folgt
$$a_n > a_{n(\varepsilon)} > a - c \qquad \forall n > n(\varepsilon)$$
und damit folgt
$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \forall n > n(\varepsilon)$$

ii) Ähnlich.

■

Sätze 3.8, 3.9 haben vielfähige Anwendungen die wir durch einige Beispiele illustrieren.

Beispiel 3.10

1. Sei
$$a_n = \frac{3n^6 + 11n^4 - 1}{2n^6 - 7n^3 + n} = \frac{3 + \frac{11}{n^2} - \frac{1}{n^6}}{2 - \frac{7}{n^3} + \frac{1}{n^5}} \to \frac{3}{2}$$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ existiert.

   Wir werden beweisen, dass a_n monoton wachsend und beschränkt ist. Dieser Limes wird mit "e" beteichnet, wobei $e = 2.71828\ldots$ (Eulersche Konstante)

   Beweis

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

   Wir möchten den binomischen Lehrsatz anwenden

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &= 1 + n\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{n}\right)^n \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \\ &+ \ldots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \ldots \end{aligned}$$

   Nun ist aber

$$\frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$
$$\frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) < \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)$$
$$\text{usw}$$

   deswegen folgt
$$2 < a_n < a_{n+1} \qquad \forall n \geq 1$$

   d.h. a_n ist monoton wachsend.

Die Produkte der Form

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)<1$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow a_n &< 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots\\ &< 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}\dots=3\end{aligned}$$

d.h. a_n ist beschränkt. Monotone Konvergenz $\Rightarrow (a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert

■

3. Rekursive Definitionen
Sei $c \in \mathbb{R}$, $c > 1$, $a_1 = c$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right)$, $n \geq 1$. Dann ist $\lim a_n = \sqrt{c}$.

Beweis

Dies ist ein wichtiges Beispiel. Hier wird vorgeführt wie man aus der a priori Existenz des Limes dessen Wert schliessen kann.

<u>1. Schritt:</u>

$$a_{n+1}^2 \geq c \qquad \forall n \geq 1$$

a_n ist (nach unten) beschränkt.

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= \frac{c+a_n^2}{2a_n} = a_n + \frac{c-a_n^2}{2a_n}\\ \Rightarrow a_{n+1}^2 &= a_n^2 + \left(c-a_n^2\right) + \left(\frac{c-a_n^2}{2a_n}\right)^2\\ &= c + \left(\frac{c-a_n^2}{2a_n}\right)^2 \geq c \quad (*)\end{aligned}$$

<u>2. Schritt:</u>

$$a_{n+1} \leq a_n$$

d.h. a_n ist monoton fallend.

$$\begin{aligned}(*) : a_{n+1}^2 &\geq c\\ \Rightarrow \frac{c}{a_{n+1}} &\leq a_{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ insbesondere}\\ \frac{c}{a_n} &\leq a_n\\ \Rightarrow a_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(a_n+\frac{c}{a_n}\right) \leq \frac{1}{2}\left(a_n+a_n\right) = a_n\end{aligned}$$

Mit dem Satz der monotonen Konvergenz folgt, dass (a_n) konvergiert.

Sei $a = \lim a_n$. Da $a_n^2 \geq c$, $\forall n \geq 2$ folgt $a^2 \geq c$. Aus $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right)$ und Satz 3.8 folgt $a = \frac{1}{2}\left(a+\frac{c}{a}\right) \Rightarrow \frac{c}{a} = a \Rightarrow c = a^2 \Rightarrow a = \sqrt{c}$. Schliesslich $\lim a_n = \sqrt{c}$

■

3.4 Teilfolgen, Häufungspunkte

Definition 3.11
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Folge und sei $l(n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine strikt monoton wachsende Folge von positiven natürlichen Zahlen. Die Verkettung von $l(n)$ und (a_n) heisst eine Teilfolge $\left(a_{l(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$n \to l(n) \to a_{l(n)}$$

Die Idee ist sehr einfach: Wir haben die Folge

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \ldots, a_j, \ldots, a_{j+1}, \ldots$$

und wir definieren eine neue Folge mit einigen Elementen von (a_n)

$$a_1, a_3, a_6, a_{j+1}, \ldots$$

Beispiele

1.
$$\begin{aligned} a_n &= \{1, 0, -1, 1, 0, -1, 1, 0, -1, \ldots\} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad n = 3k+2 \\ 1 & \text{falls} \quad n = 3k+1 \\ -1 & \text{falls} \quad n = 3k+3 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &n \to 3n+2 \to a_{3n+2} = (0, 0, \ldots) \\ &n \to 3n+1 \to a_{3n+1} = (1, 1, \ldots) \\ &n \to 3n \to a_{3n} = (-1, -1, \ldots) \end{aligned}$$

2. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n = n \Rightarrow (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Teilfolge $n \to 2^n \to a_{2^n}$
3. $a_n = (-1)^n$, $(a_{2n})_{n\geq 1}$ (a_{2n+1}) sind Teilfolgen

Bemerkung 3.12

In Definition 3.11 ist $l\,(\mathbb{N} \setminus \{0\})$ eine unendliche Teilmenge von $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. Umgekehrt, falls $\Lambda \subset \mathbb{N} \setminus \{0\}$ eine unendliche Teilmenge ist, erhält man eine Teilfolge von $(a_n)_{n\geq 1}$ mittels einer monotonen Abzählung

$$l : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \Lambda \text{ von } \Lambda \qquad (l(n) := \min\left(\Lambda \setminus \{l(1), l(2), \ldots, l(n-1)\}\right))$$

Definition 3.13
$a \in \mathbb{R}$ ist Häufungspunkt von $(a_n)_{n\geq 1}$ falls es eine gegen a konvergierende Teilfolge $\left(a_{l(n)}\right)_{n\geq 1}$ gibt.

Beispiel 3.14

Looks like there is no number 2, removed list in its entirety, page 71 middle to top

$a_n = (-1)^n$ hat $+1$ und -1 als Häufungspunkte. Wir werden jetzt die Menge der Häufungspunkte einer Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ näher studieren und insbesondere zeigen, dass sie für beschränkte Folgen nicht leer ist.

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ beschränkt und C eine obere Schranke für $\{|a_n| : n \geq 1\}$. Für jedes $k \geq 1$ ist die Menge

$$A_k := \{a_n : n \geq k\} = \{a_k, a_{k+1}, \dots\}$$

beschränkt und zudem gilt

$$A_{k+1} \subset A_k, \forall k \geq 1$$

Sei also

- $m_k := \inf A_k \nearrow (\inf A_k < \inf A_{k+1})$
- $M_k := \sup A_k \searrow (\sup A_{k+1} < \sup A_k)$

Dann folgt aus Korollar 2.11

i) $(m_k)_{k\geq 1}$ monoton wachsend

ii) $(M_k)_{k\geq 1}$ monoton fallend

Nach dem Satz der monotonen Konvergenz (Satz 3.9, s. 37) konvergieren beide Folgen

Definition 3.15

Wir definieren

- $\lim_{n\to\infty} \inf a_n := \lim_{k\to\infty} m_k$, limes inferior
- $\lim_{n\to\infty} \sup a_n := \lim_{k\to\infty} M_k$, limes superior

Offensichtlich gilt $\liminf a_n \geq \limsup a_n$

Interessant ist nun:

Lemma 3.16

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ beschränkt. Dann sind $\limsup a_n$ und $\liminf a_n$ Häufungspunkte von $(a_n)_{n\geq 1}$

Beweis

Sei $\lim\limits_{n\to\infty} \sup a_n = a$. Wir möchten zeigen, dass eine Teilfolge $a_{l(n)}$ mit $\lim a_{l(n)} = a$ existiert. Wir definieren $l : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ induktiv wie folgt:

$l(1) \geq 1$ sei so gewählt, dass $M_1 - 1 \leq a_{l(1)} \leq M_1 = \sup A_1 = \sup\{a_1, a_2, \dots\}$

> **Korollar 2.11**
> Sei $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$
>
> 4. Falls E ein sup besitzt $\implies \exists x \in E$ mit $x > \sup E - h$
>
> Sei $E = \{a_1, \dots\} = A_1$, $h = 1$

Sei $l(2) \in \{k \in \mathbb{N} \mid k > l(1) + 1\}$, so dass

$$M_{l(1)+1} - \frac{1}{2} \leq a_{l(2)} \leq M_{l(1)+1}$$

(Sei $E = \{a_{l(1)+1}, a_{l(1)+2}, \dots\}$, $h = \frac{1}{2}$). Falls $l(1), l(2), \dots, l(n-1)$ definiert sind, wählen wir $l(n)$, so dass:

$$l(n) \in \{k \in \mathbb{N} : k > l(n-1) + 1\}$$

und

$$(*) \qquad M_{l(n-1)+1} - \frac{1}{n} \leq a_{l(n)} \leq M_{l(n-1)+1}$$

Es gilt zu bemerken, dass $l(n) \geq n$.

$$\left|M_{l(n-1)+1} - a_{l(n)}\right| < \frac{1}{n}$$

Dann ist $l(n)$ strikt monoton steigend und

$$\left|a_{l(n)} - M_{l(n-1)+1}\right| \leq \frac{1}{n}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ und $n(\varepsilon)$ so gewählt, dass $\frac{1}{n(\varepsilon)} < \frac{\varepsilon}{2}$ und

$$a - \frac{\varepsilon}{2} \leq M_{l(n(\varepsilon)-1)+1} \leq a + \frac{\varepsilon}{2}$$

($a = \lim M_k$: d.h. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon)$, so dass $|M_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n > N(\varepsilon)$). Dann gilt $\forall n > n(\varepsilon) : \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$

$$(**) \qquad \left|M_{l(n-1)+1} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

und

$$(*) \qquad \left|M_{l(n-1)+1} - a_{l(n)}\right| < \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$(*)$ und $(**)$ $\Rightarrow \left|a_{l(n)} - a\right| < \varepsilon$ d.h. $\lim a_{l(n)} = a$.

■

Wir schliessen aus Lemma 3.16 den folgenden wichtigen Satz

Satz 3.18 (Bolzano-Weierstrass)

Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.
Von Lemma 3.16 wissen wir, dass $\limsup a_n$ und $\liminf a_n$ Häufungspunkte sind. Das heisst, es existieren Teilfolgen $a_{l(n)}$ und $a_{m(n)}$ für die gilt $\lim a_{l(n)} = \limsup a_n$ und $\lim a_{m(n)} = \liminf a_n$. $a_{l(n)}$ und $a_{m(n)}$ sind konvergente Teilfolgen von a_n.
Folgende Aussagen sind direkte Konsequenzen von Bolzano-Weierstrass:

Satz 3.19

Sei $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ beschränkt. $a_- := \liminf a_n$, $a_+ := \limsup a_n$

1. $\forall \varepsilon > 0$ gibt es nur endlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n \notin (a_- - \varepsilon, a_+ + \varepsilon)$
2. a_+ ist der grösste, a_- der kleinste Häufungspunkt
3. Folgende Aussagen sind äquivalent
   (i) $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert
   (ii) Jede Teilfolge von $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert
   (iii) $a_- = a_+$

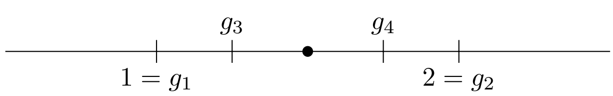
Bemerkung

(a_n) konvergiert gegen $a \Rightarrow$ jede Teilfolge konvergiert gegen a. Das ist ein sehr nutzliches Kriterium für Konvergenz

Beispiel 3.20

Wir definieren rekursiv

$$g_1 = 1, g_{n+1} = 1 + \frac{1}{g_n}, n \geq 1$$
$$g_1 = 1, g_2 = 2, g_3 = \frac{3}{2}, g_4 = \frac{5}{3}$$



Die Folge ist nicht monoton. Offensichtlich gilt $g_n \geq 1$ und damit auch $g_n \leq 2$ d.h. g_n ist beschränkt.

Aber wir werden werden zwei monotone Teilfolgen finden

$$\begin{aligned} g_{n+2} &= 1 + \frac{1}{g_{n+1}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{g_n}} \\ &= \frac{2+\frac{1}{g_n}}{1+\frac{1}{g_n}} = \frac{2g_n+1}{g_n+1} = 2 - \frac{1}{g_n+1} \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$g_{n+2} - g_n = \frac{1}{g_{n-2}+1} - \frac{1}{g_n+1} = \frac{g_n - g_{n-2}}{(g_{n-2}+1)(g_n+1)}$$

Nun ist: $g_3 - g_1 = \frac{3}{2} - 1 > 0$ und somit ist $g_{2k+3} - g_{2k+1} > 0$, $\forall k$ d.h. die Teilfolge $(g_{2k+1})_{k\geq 0}$ ist monoton wachsend.

$g_4 - g_2 = \frac{5}{3} - 2 < 0$ woraus folgt, dass $(g_{2k})_{k\geq 1}$ monoton fallend ist. Seien also

$$\begin{aligned} a &:= \lim_k g_{2k+1} \\ b &:= \lim_k g_{2k} \end{aligned}$$

Dann

$$\begin{aligned} a := \lim_k g_{2k+1} &= \lim \left(1 + \frac{1}{g_{2k}}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{b} \Rightarrow ab = b + 1 \end{aligned}$$

und analog $b = 1 + \frac{1}{a} \Rightarrow ab = 1 + a$ woraus $ab = 1 + a = b + 1$ und somit $a = b$. Folgt mit $g := a = b$ $g = 1 + \frac{1}{g} \Rightarrow g = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$g_+ := \limsup g_n$ und $g_- := \liminf g_n$ sind Häufungspunkte, d.h. es gibt Teilfolgen a_n und b_n mit $\lim a_n = g_+$, $\lim b_n = g_-$. Da jede Teilfolge von (g_n) entweder unendlich viele gerade oder ungerade Indizes enthält, folgt

$$g = g_+ = g_-$$

(Jede Teilfolge hat entweder unendliche viele Elemente von (g_{2n}) oder (g_{2n+1}).

$$\left.\begin{aligned} g_+ &= \lim a_n = \lim g_{2n} = g \\ g_+ &= \lim b_n = \lim g_{2n} = g \end{aligned}\right\} g_+ = g_- \Rightarrow \lim g_n = g = g_- = g_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

)

3.5 Cauchy-Kriterium

Chapter numbering is, according to the handwritten notes, wrong. WHich one is the correct one??

Frage

Wie sieht man allgemein, ob eine Folge konvergiert? Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergent mit $\lim a_n = a$. Also gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$, $n(\varepsilon)$ mit $|a_n - a| < \varepsilon \ \forall n \geq n(\varepsilon)$.
Daraus folgt, dass $\forall n, m \geq n(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= |a_n - a + a - a_m| \\ &\leq |a_n - a| + |a_m - a| < 2\varepsilon \end{aligned}$$

Definition 3.21
$(a_n)_{n\geq 1}$ ist eine Cauchy-Folge falls für $\varepsilon > 0$ ein $n(\varepsilon) \geq 1$ gibt, so dass $|a_n - a_m| < \varepsilon$, $\forall n, m \geq n(\varepsilon)$

Wir haben gesehen, dass

$$(a_n) \text{ konvergiert } \Rightarrow (a_n) \text{ Cauchy}$$

Wir haben auch

limenet: what??

Satz 3.22 (Cauchy-Kriterium)

Sei $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ eine Folge. Die folgenden Aussagen sind äquivalent

1. (a_n) ist eine Cauchy-Folge
2. (a_n) ist konvergent

Beweis

(2) $\Rightarrow$ (1) ✓

(1) $\Rightarrow$ (2) Wegen des Satzes von Bolzano-Weierstrass besitzt jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge

Strategie:

I) (a_n) beschränkt

II) $\exists \left(a_{l(n)}\right) \subset (a_n)$ konvergente Teilfolge

Sei $\lim a_{l(n)} = a$, (a_n) Cauchy.

$$\begin{aligned} |a_n - a| &= \left|a_n - a_{l(n)} + a_{l(n)} - a\right| \\ &\leq \left|a_n - a_{l(n)}\right| + \left|a_{l(n)} - a\right| < 2\varepsilon \end{aligned}$$

I) (a_n) ist beschränkt: Sei $\varepsilon = 1$. Sei $n(1)$, so dass $|a_n - a_m| < 1$, $\forall n, m \geq n(1)$, insbesondere $\left|a_n - a_{n(1)}\right| < 1$. Woraus $|a_n| < a_{n(1)} + 1$, $\forall n \geq n(1)$ folgt und somit $\forall n \geq 1$

$$|a_n| \leq \max\left\{|a_1|, \ldots, \left|a_{n(1)}\right|, \left|a_{n(1)}\right| + 1\right\}$$

d.h. (a_n) ist beschränkt

II) Sei a ein Häufungspunkt von (a_n) (Bolzano-Weierstrass) und $l : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strikt monoton mit

$$\lim_{n\to\infty} a_{l(n)} = a \qquad (\text{Bem.: } l(n) \geq n)$$

Sei $\varepsilon > 0$ und $n_0(\varepsilon)$, so dass

$$\left|a_{l(n)} - a\right| < \varepsilon \qquad \forall n > n_0(\varepsilon)$$

Sowie $n_1(\varepsilon)$ mit $|a_n - a_r| < \varepsilon \quad \forall n, r \geq n_1(\varepsilon) \quad ((a_n)$ Cauchy)
$\forall n \geq \max\{n_0(\varepsilon), n_1(\varepsilon)\}$ gilt:

$$\begin{aligned}|a_n - a| &\leq \left|a_n - a_{l(n)}\right| + \left|a_{l(n)} - a\right| \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim a_n = a \Rightarrow (a_n) \text{ konvergiert}$$

■

Beispiel 3.23

1. Sei
$$a_n := 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$
Dann ist also $1 \leq a_n \leq a_{n+1} \ldots$ monoton wachsend, aber divergent. Dann:
$$a_{2n} - a_n = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \qquad \forall n \geq 1$$
Es erfüllt also das Cauchy-Kriterium nicht.

2. Sei $b_n := 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ die alternierende harmonische Reihe. Insbesondere:
$$\begin{aligned}b_{2k-2} &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2k-3} - \frac{1}{2k-2}\right) \\ b_{2k} &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right)\end{aligned}$$
also folgt
$$0 < b_{2k-2} < b_{2k} \qquad \forall k \geq 1$$
und
$$\begin{aligned}b_{2k+1} &= b_{2k-1} - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} \\ &= b_{2k-1} + \underbrace{\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k}\right)}_{<0}\end{aligned}$$
Woraus: $b_{2k+1} < b_{2k-1}$. Zudem
$$\begin{aligned}b_{2k} &= b_{2k-1} - \frac{1}{2k} \\ b_{2k} &< b_{2k-1}\end{aligned}$$
$\forall k \in \mathbb{N}$
$$\frac{1}{2} = b_2 < b_4 \ldots < b_{2k-2} < b_{2k} < b_{2k-1} <?? < b_1 = 1$$

Check question marks right above, page 85 bottom

Die Teilfolgen $(b_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert nach Satz 3.9 (Satz der monotonen Konvergenz). Da

$$\forall n \in \mathbb{N} : |b_n - b_{n+1}| = \frac{1}{n+1}$$

haben sie zudem denselben Limes und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nach Satz 3.19 (analog wie in Beispiel 3.20)

3.6 Folgen in $\mathbb{R}^d$ oder $\mathbb{C}$

Die Theorie der Folgen in $\mathbb{R}$, der Konvergenzbegriff usw. lassen sich leicht auf Folgen in $\mathbb{R}^d$ oder $\mathbb{C}$ übertragen $\|\cdot\|$ bezeichnet die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^d$ und $\mathbb{C}$

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_d^2}$$

Von diesem Standpunkt identifiziert sich $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$, so dass wir von jetzt an Folgen in $\mathbb{R}^d$ betrachten. Die in 3.1 eingeführten Begriffe lassen sich leicht auf $\mathbb{R}^d$ übertragen

Definition

Eine Folge in $\mathbb{R}^d$ ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} a : \mathbb{N} \setminus \{0\} &\to \mathbb{R}^d \\ n &\mapsto a_n \end{aligned}$$

Definition 3.24

Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ in $\mathbb{R}^d$ heisst beschränkt, falls es $c > 0$ gibt mit $\|a_n\| \leq c$, $\forall n \geq 1$

Bemerkung

Für $d \geq 2$ haben wir keine vollständige Ordnung, deswegen lassen sich Begriffe wie "nach oben beschränkt" nicht übertragen.

Definition 3.25

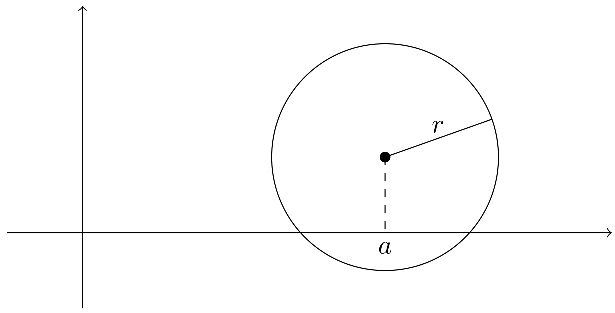
Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ in $\mathbb{R}^d$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}^d$, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ einen Index $N(\varepsilon) \geq 1$ gibt, so dass

$$\|a_n - a\| < \varepsilon \qquad \forall n \geq N(\varepsilon)$$

Not sure where the definition ends

Die andere Version lässt sich auch übertragen. Wir definieren dafür den (offenen) r-Ball (Ball mit Radius r) mit Zentrum $a \in \mathbb{R}^d$

$$B_{<r}(a) := \left\{x \in \mathbb{R}^d : \|x - a\| < r\right\}$$



$B_{<r}(a)$ ist die Verallgemeinerung von $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Nützlich ist auch der (geschlossene) r-Ball

$$\overline{B}_r(a) : B_{\leq r}(a) := \left\{x \in \mathbb{R}^d : \|x - a\| \leq r\right\}$$

der das Intervall $[a - r, a + r]$ verallgemeinert.

Definition 3.25
Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}^d$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}^d$ falls für jedes $\varepsilon > 0$ die Menge der Indizes $n \geq 1$, für welche $a_n \notin B_{<\varepsilon}(a)$, endlich ist. Falls das zutrifft, schreibt man

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ oder } a_n \underset{n\to\infty}{\to} a$$

Bemerkung

Die Konvergenz von $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}^d$ ist gleichbedeutend mit der Existenz eines Vektors $a \in \mathbb{R}^d$, so dass die Folge in $\mathbb{R}$, $(\|a_n - a\|)_{n\geq 1}$ gegen 0 konvergiert.

Es gilt dann wieder:

Lemma 3.26

Sei $(a_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}^d$ konvergent

1. Der Limes ist eindeutig bestimmt
2. Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ ist beschränkt

Der Konvergenzbegriff verträgt sich auch sehr gut mit der Struktur eines Vektorraums, wie das folgende Analogon von Satz 3.8 zeigt.

Satz 3.27

Seien $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ konvergente Folgen in $\mathbb{R}^d$, sowie $\lambda \in \mathbb{R}$. Sei $a = \lim a_n$, $b = \lim b_n$. Dann sind $(a_n \pm b_n)_{n\geq 1}$ und $(\lambda a_n)_{n\geq 1}$ konvergent und es gilt

$$\lim (a_n \pm b_n) = a \pm b, \ \lim \lambda a_n = \lambda a$$

Folgender Satz ist dann grundlegend um Bolzano-Weierstrass sowie das Cauchy-Kriterium auf $\mathbb{R}^d$ zu verallgemeinern.

Für eine Folge (a_n) von Vektoren in $\mathbb{R}^d$ ist es zweckmässig, folgende Notation für die Koordinaten von a_n zu benutzen:

$$a_n = \left(a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, a_n^{(3)}\right)$$

Satz 3.28

Folgende Aussagen sind äquivalent

(i) $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert in $\mathbb{R}^d$

(ii) Jede der Folgen $\left(a_n^i\right)$ konvergiert in $\mathbb{R}$

Falls diese zutreffen sei $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ sowie $a^i = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^{(i)}$. Dann gilt

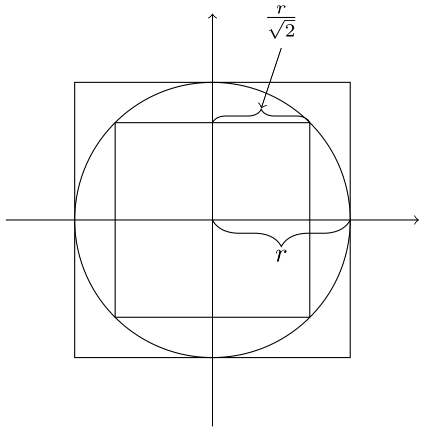
$$a = \left(a^1, a^2, \ldots, a^d\right)$$

Für den nachfolgenden Beweis brauchen wir das folgende geometrische Lemma.

Lemma 3.29

$\forall x = \left(x^1, x^2, \ldots, x^d\right) \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$\max_{1\leq i\leq d}\left|x^i\right| \leq \underset{\sqrt{\sum \left|x^i\right|^2}}{\underset{\Downarrow}{\|x\|}} \leq \sqrt{d}\max_{1\leq i\leq d}\left|x^i\right|$$



$$\left(-\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2 \subset B_{\leq r}(0) \subset (-r, r)^2$$

Beweis von Satz 3.28

(i)⇒(ii) Folgt aus der Ungleichung $\left|a_n^{(i)} - a^{(i)}\right| \leq \|a_n - a\|$

(ii)⇒(i) Sei $a^i = \lim a_n^i$ und $a = \left(a^i\right)_i$. Aus

$$\|a_n - a\| \leq \sqrt{d} \max_{1 \leq i \leq d} \left|a_n^{(i)} - a^{(i)}\right|$$

folgt (i)

∎

Satz 3.29 (Bolzano-Weierstrass für $\mathbb{R}^d$)

Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ in $\mathbb{R}^d$ besitzt eine konvergente Teilfolge

Beispiel

1.

$$(a_n) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 2/n \end{pmatrix}$$
$$\lim a_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.

$$(a_n) = \begin{pmatrix} \frac{n^2+n+1}{2n^2+n+1} \\ n \end{pmatrix}$$

(a_n) ist divergent

$$\lim \frac{n^2+n+1}{2n^2+n+1} \to \frac{1}{2}$$

aber $\lim n = \infty$

Definition 3.30

$(a_n)_{n\geq 1}$ ist eine Cauchy-Folge falls es $\forall \varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \geq 1$ gibt, so dass

$$\|a_n - a_m\| < \varepsilon \qquad \forall n, m \geq N(\varepsilon)$$

Aus den Sätzen 3.28 und 3.22 (Cauchy-Kriterium) folgt

Satz 3.31

Es sind äquivalent

1. $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert
2. (a_n) ist eine Cauchy-Folge

Für $\mathbb{C}$ haben wir zusätzlich, dass sich die Körperstruktur mit der Konvergenz gut verträgt.

Satz 3.32

Seien (z_n), (w_n) zwei konvergente Folgen in $\mathbb{C}$ mit $z = \lim z_n$, $w = \lim w_n$. Dann

(i) $\overline{z_n} \to z_n$ und $(\|z_n\|)_{n\geq 1}$ konvergiert gegen $\|z\|$

(ii) Die Folge $(z_n w_n)_{n\geq 1}$konvergiert gegen zw

(iii) Falls $w \neq 0$ und $w_n \neq 0$, $\forall n \geq 1$, so konvergiert $\left(\frac{z_n}{w_n}\right)_{n\geq 1}$ gegen $\frac{z}{w}$

3.7 Reihen

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Sei

$$S_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

die Folge der partiellen Summen. Eine Reihe ist eine unendliche Summe

$$a_1 + a_2 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

einer Folge $(a_n)_{n\geq 1}$

Definition 3.33

Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent, falls die Folge $(S_n)_{n\geq 1}$ konvergiert. In diesem Fall wird deren Limes mit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ bezeichnet

$$\lim S_n = \lim \sum_{k=1}^{n} a_k := \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Beispiel 3.34

1. Für $|q| < 1$ gilt

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$
$$\lim S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} \text{ (da } \lim q^n = 0)$$

   Somit konvergiert $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ und deren Wert ist $\frac{1}{1-q}$

2. Die Harmonische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist nach Beispiel 3.23 (i) divergent.

Für Reihen gibt es verschiedene praktische Konvergenz-Kriterien. Das erste ergibt sich direkt aus dem Cauchy-Kriterium (Satz 3.22, s. 45)

Satz 3.35 (Cauchy-Kriterium)

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ einen Index $N(\varepsilon) \geq 1$ gibt,, so dass

$$\forall n \geq m \geq N(\varepsilon) \qquad \left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon$$

Beweis

It says Übung, maybe incomplete? page 97 top

Die Reihe $\sum_{1}^{\infty} a_j$ konvergiert genau dann, wenn

$$\left|\sum_{m}^{n} a_j\right| \to 0 \qquad \forall n \geq m$$

$\sum_{1}^{\infty} a_j$ konv. $\Leftrightarrow S_n = \sum_{1}^{n} a_k$ konv. $\Leftrightarrow S_n$ Cauchy $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon)$ s.d.

$$\forall n > m > N(\varepsilon) \qquad \underbrace{|S_n - S_m|}_{\sum_{m}^{n} a_k} < \varepsilon$$

■

Korollar

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent $\Rightarrow |a_k| \to 0$

Beweis

Add Reference. UPDATE: CAN'T FIND SATZ 3.5!!

Nehmen wir $m = n$ an in Satz 3.5 (s.). Das ist ein notwendiges Kriterium aber nicht ein hinreichendes Kriterium.

■

Content between brackets looks like personal notes, should these be copied? page 97 bottom

Beispiel

$\sum_{1}^{\infty} k$ ist nicht konvergent, weil $\lim_{k\to\infty} k \neq 0$ (notwendig).
$\sum \frac{1}{k}$ ist nicht konvergent obwohl $\lim \frac{1}{k} = 0$ (nicht genügend)

Im folgenden leiten wir aus dem Vergleich mit der geometrischen Reihe verschiedene Konvergenz-Kriterien ab (Quotienten- und Wurzelkriterium). Dies stützt sich auf

Satz 3.36

Seien $\sum\limits_{1}^{\infty} a_k$, $\sum\limits_{1}^{\infty} b_k$ Reihen wobei

1. Es gibt k_0, so dass $|a_k| \leq b_k$, $\forall k > k_0$
2. $\sum b_k$ konvergiert

Dann konvergiert $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$

Beweis

Sei $\varepsilon > 0$ und $N(\varepsilon) > k_0$, so dass

$$\sum_{k=m}^{n} b_k = \left|\sum_{k=m}^{n} b_k\right| \leq \varepsilon \qquad \forall n, m > N(\varepsilon) > k_0$$

Dann folgt aus 1.

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=m}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=m}^{n} b_k \leq \varepsilon$$

Der Satz folgt aus dem Cauchy-Kriterium

■

Beispiel

1.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} =?$$

$$\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}} \qquad \forall k \geq 1 \Rightarrow \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = 2$$

2.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} =?$$

   Zuerst zeigen wir, dass $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ konvergiert. Da

$$\frac{1}{k\,(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \qquad \forall k \geq 1$$

$$S_n = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{k\,(k+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{n}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1,$ d.h. $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$.
$\forall k > 1$ Da

$$(k+1)^2 > k(k+1)$$
$$\frac{1}{(k+1)^2} < \frac{1}{k(k+1)}$$

Daraus folgt

$$\sum \frac{1}{(k+1)^2} \leq \sum \frac{1}{k(k+1)} = 1$$

$\sum \frac{1}{(k+1)^2}$ konvergiert.

Satz 3.37 (Quotientenkriterium)

Sei $a_k \neq 0$, $\forall k \geq 1$

(i) Falls
$$\lim_{k\to\infty} \sup \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1$$
so ist $\sum a_k$ konvergent

(ii) Falls
$$\lim_{k\to\infty} \inf \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| > 1$$
so ist $\sum a_k$ divergent

Beweis

(i) Sei $q_0 := \lim\sup \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$
$$\lim_{k\to\infty} \left(\sup \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{k\geq n} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \right)$$
Wähle $q \in \mathbb{R}$ mit $q_0 < q < 1$. Dann gilt für genügend grosse $n_0 \in \mathbb{N}$
$$\forall n \geq n_0 : \left| \sup_{k\geq n} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| - q_0 \right| \leq \underbrace{(q - q_0)}_{\varepsilon}$$
$$\text{d.h.} \quad \sup_{k\geq n} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q \qquad \forall n \geq n_0$$
Insbesondere bei der Wahl von $n = n_0$
$$\forall k \geq n_0 \qquad \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q$$
Es folgt für $k \geq n_0$ die Abschätzung
$$\begin{aligned} |a_k| &= \left| \frac{a_k}{a_{k-1}} \cdot \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \cdot a_{n_0} \right| \\ &\leq q^{k-n_0} |a_{n_0}| = \underbrace{q^n |a_{n_0}|}_{C} q^k = Cq^k \end{aligned}$$

Wir können nun $b_k = Cq^k$ setzen und Satz 3.36 (s. 53) anwenden. Da $\sum b_k$ konvergiert (da $|q| < 1$), konvergiert $\sum a_k$.

(ii) Sei

$$q_0 := \lim_{k\to\infty} \inf\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$$

(falls es existiert). Wähle $q \in \mathbb{R}$ mit $q_0 > q > 1$. Dann existiert n_0 mit

$$\forall k > n_0 : \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > \inf_{k>n_0}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq q$$

$$\begin{pmatrix} \left|\inf\limits_{k\geq n}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| - q_0\right| < \underbrace{q - q_0}_{\varepsilon} & \forall k > n_0 \\ \Rightarrow -q_0 + q < \inf\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| - q_0 & \forall k > n_0 \end{pmatrix}$$

Dann folgt analog wie in (i), dass

$$\begin{aligned} |a_k| &= \left|\frac{a_k}{a_{k-1}} \cdot \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \cdot a_{n_0}\right| \\ &> q^{k-n_0}|a_{n_0}| > Cq^k, \forall k > k_0 \end{aligned}$$

Insbesondere ist $\{|a_k| : k \geq 1\}$ nicht beschränkt $\Rightarrow \lim a_k \not\to 0 \Rightarrow \sum a_k$ divergent.

Falls $\lim\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$ existiert, dann

$$\liminf\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \limsup\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = L$$

■

Satz 3.36'

Sei $a_k \neq 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$ und sei $L = \lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$

(i) Falls $L < 1$, so ist $\sum a_k$ konvergent

(ii) Falls $L > 1$, so ist $\sum a_k$ divergent

(iii) Falls $L = 1$, kann man daraus nichts ableiten

Beispiel

1. $\sum\limits_1^\infty \frac{n!}{n^n}$ konvergiert. Da

$$\begin{aligned} \left|\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!}\right| &= (n+1) \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\ &= \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n \to \frac{1}{e} < 1 \end{aligned}$$

Insbesondere $\frac{n!}{n^n} \to 0$ falls $n \to \infty$, d.h. n^n wächst schneller als $n!$ (schon gesehen).

Maybe add where?? page 104 top

2. Wir haben schon gesehen, dass $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergiert. Aber Quotientenkriterium gibt keine Information, dass

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)^2}{n^2}\right| \to 1$$

3. Wir haben auch schon gesehen dass $\sum \frac{1}{n}$ divergiert. In diesem fall auch

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{k+1}{k} \to 1$$

d.h. das Quotientenkriterium ist nicht anwendbar.

4. Exponentialreihen

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

konvergiert für jedes $z \in \mathbb{C}$. Sei $a_k := \frac{z^k}{k!}$.

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{z^k} = \frac{z}{k+1}$$

Also

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{z}{k+1}\right| = 0 < 1 \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

Nach Satz 3.37 (i) (s. 54) ist $\sum \frac{z^k}{k!}$ konvergent. Wir werden darauf züruckkommen.

5. Bestimme, für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k k!}{k^k}$$

Sei $a_n = \frac{z^k k!}{k^k}$

$$\begin{aligned}\frac{a_{k+1}}{a_k} &= \frac{z^{k+1}\,(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{k^k}{k! z^k} \\ &= z\frac{(k+1)}{(k+1)}\left(\frac{k}{k+1}\right)^k = z\frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}\end{aligned}$$

Dann ist $\lim\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{|z|}{e}$. Somit folgt die Konvergenz für $|z| < e$ und die Divergenz für $|z| > e$. $|z| < e$ ist der "Konvergenzkreis" für $\sum \frac{z^k k!}{k^k}$

Beispiele 4., 5. sind die erste Einführung des Begriffs des Konvergenzkreises. Das Quotientenkriterium versagt, wenn unendlich viele a_k verschwinden oder falls $\lim\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = 1$

Satz 3.39 (Wurzelkriterium)

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

(i) Falls $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} < 1$, so konvergiert $\sum\limits_1^\infty a_k$

(ii) Falls $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} > 1$, so divergiert $\sum\limits_1^\infty a_k$

Beweis

Ask for full beweis

■

Beispiel

$$\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

konvergiert, da

$$\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} < 1$$

Der letzte Satz ist sehr fundamental im Studium der Potenzreihen. Potenzreihen sind wichtig, weil sie analytische Funktionen darstellen.

Definition

Sei $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Betrachte die Potenzreihe in $z \in \mathbb{C}$

$$p(z) := \sum_{k=0}^\infty c_k z^k$$

Mit Satz 3.39 (Wurzelkriterium, s. 57) erhalten wir die folgende Charakterisierung des Konvergenzbereichs von $p(z)$

Satz 3.40

Die Potenzreihe

$$p(z) := \sum_{k=0}^\infty c_k z^k$$

ist konvergent $\forall z \in \mathbb{C}$, mit

$$|z| < \rho := \frac{1}{\limsup \sqrt[k]{|c_k|}} \in [0, \infty)$$

Sie ist divergent für alle $|z| > \rho$

Konvention: Falls $\left\{\sqrt[k]{|c_k|}, k > 1\right\}$ nicht beschränkt ist, setzen wir

$$\limsup \sqrt[k]{|c_k|} = +\infty \text{ und } \rho = 0$$

Falls $\left\{\sqrt[k]{|c_k|}, k \geq 1\right\}$ beschränkt ist und zudem $\limsup \sqrt[k]{|c_k|} = 0$, setzen wir $\rho = +\infty$ d.h. die Reihe $\rho(z)$ konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$.

Bemerkung

Insbesondere ist der Konvergenzbereich von $p(z)$ ein Kreis

Beispiel 3.41

Sei

$$c_k = \begin{cases} 1 & k \text{ gerade} \\ \frac{1}{k} & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

Dann gilt

$$\frac{c_{k+1} z^{k+1}}{c_k z^k} = \begin{cases} \frac{z}{(k+1)} & k \text{ gerade} \\ zk & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \liminf \left| \frac{c_{k+1} z^{k+1}}{c_k z^k} \right| &= |z| \left(\liminf a_k\right) \text{ mit } a_k = \begin{cases} \frac{1}{(k+1)} \\ k \end{cases} \\ &= |z| \lim_k \inf_{n \geq k} a_n = 0 < 1 \end{aligned}$$

und

$$|z| \limsup \left| \frac{c_{k+1}}{c_k} \right| = |z| \limsup a_k = |z| k$$

unbeschränkt für $|z| \neq 0$. Das Quotientenkriterium gibt also keine Information. Das Wurzelkriterium dagegen gibt

$$|z| \sqrt[k]{|c_k|} = |k| \begin{cases} 1 & k \text{ gerade} \\ \frac{1}{\sqrt[k]{k}} & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

Also

$$\rho = \lim \sqrt[k]{|c_k|} = 1 \ \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1\right)$$

Somit konvergiert $\sum c_k z^k$ für $|z| < 1$ und divergiert für $|z| > 1$.

Bemerkung

Das Wurzelkriterium ist "stärker" als das Quotientenkriterium.

Quotientenkriterium vs. Wurzelkriterium

Lemma

Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ eine Folge. Dann

$$\liminf \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \underset{3}{\leq} \liminf |a_n|^{\frac{1}{n}} \underset{1}{\leq} \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} \underset{2}{\leq} \limsup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

Beweis

1. $\liminf |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}$ gilt immer

2. Sei $\sigma = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$, $q_0 = \limsup\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Wir möchten zeigen, dass $\sigma \leq q_0$. Sei $q > q_0$. $\exists n_0$ genügend gross, so dass

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q \qquad \forall n > n_0 \qquad \text{(wie im Beweis des Quot. krit)}$$

Dann

$$\begin{aligned} |a_{n+k}| &\leq \left|\frac{a_{n+k}}{a_{n+k-1}}\right|\left|\frac{a_{n+k-1}}{a_{n+k-2}}\right|\cdots\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||a_n| \\ &\leq q^k|a_n| = q^{n+k}\frac{|a_n|}{q^n} \\ \Rightarrow |a_{n+k}| &\leq q^{n+k}\left|\frac{a_n}{q^n}\right| \\ \Rightarrow a_{n+k}^{\frac{1}{n+k}} &\leq q\left|\frac{a_n}{q^n}\right|^{\frac{1}{n+k}} \qquad \forall n \geq n_0 \end{aligned}$$

Für beliebige n (n ist fix), gilt

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_n}{q^n}\right|^{\frac{1}{n+k}} = 1 \Rightarrow \limsup a_k^{\frac{1}{k}} \leq q\cdot 1 \Rightarrow \sigma \leq q \leq q_0$$

3. ASK FOR BEWEIS

Ask for beweis, page 110.2 middle

■

Korollar

1. Wurzelkriterium ist stärker als das Quotientenkriterium, d.h. liefert bei einer Reihe das Quotientenkriterium eine Enstcheidung (d.h. $\limsup\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ im Falle der Konvergenz, $\liminf\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ im Falle der Divergenz), so liefert auch das Wurzelkriterium eine Entscheidung (d.h. $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$ im Fall der Konvergenz, $\liminf \sqrt[n]{a_n} > 1$ im Fall der Divergenz)

2. Gibt das Wurzelkriterium keine Information $\Rightarrow$ Gibt das Quotientenkriterium keine Information

$$\left(\limsup \sqrt[n]{a_n} = 1 \Rightarrow \liminf\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq 1\right)$$

Frage: Warum benutzen wir Quotientenkriterium?
Antwort: Manchmal ist es einfacher anzuwenden!

Bemerkung

Das Wurzelkriterium liefert eine Entscheidung über die Divergenz auch wenn $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, d.h.

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ divergent}$$

da

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow \lim a_n \neq 0$$

Beweis

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow \forall k_0 \in \mathbb{N} \sup_{k \geq k_0} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$$

$\Rightarrow \forall k_0 \in \mathbb{N}$ gibt es dann ein $k \geq k_0$ mit $\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1 \Rightarrow |a_k| \geq 1 \Rightarrow \lim a_k \neq 0 \Rightarrow \sum a_k$ divergent.

D.h., dass das Wurzelkriterium eine Entscheidung über die Divergenz liefert, ist es hinreichend, dass $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1$.

■

Beispiel 3.42 (Riemann Zeta Funktion)

Für $s > 0$ betrachten wir die Reihe

$$\xi(s) := 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \ldots + + \frac{1}{n^s} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

und Fragen nach Konvergenz

(i) Für $0 < s \leq 1$ gilt $\frac{1}{k^s} \geq \frac{1}{k}$ also

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \to \infty$$

Also für $0 < s \leq 1$, ist $\xi(s)$ divergent.

(ii) Für $s > 1$, sei $a_k = \frac{1}{k^s}$. Dann haben wir

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^s \to 1$$

und

$$\sqrt[k]{a_k} = \frac{1}{\left(k^{\frac{1}{k}}\right)^s} \to 1$$

Also funktionieren weder Quotientenkriterium nach Wurzelkriterium.

Can't read character, page 112 top

Wir wenden die Idee an, die zur Divergenz von $\sum \frac{1}{k}$ führt, jedoch ein wenig modifiziert. Wir hatten (für die Harmonische Reihe)

$$\begin{aligned}
1 + &\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}_{\substack{> \\ \frac{1}{4}+\frac{1}{4}}} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}}_{\substack{> \\ \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}} + \dots \\
\geq & 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots
\end{aligned}$$

Nun sei $s > 1$: Wir segmentieren die Reihe auf die selbe Art

$$\begin{aligned}
1 + &\underbrace{\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s}}_{\substack{> \\ \frac{1}{2^s}+\frac{1}{2^s}}} + \underbrace{\frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s}}_{\substack{> \\ \frac{1}{4^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{4^s}}} + \dots \\
= & 1 + \frac{1}{2^{s-1}} + \frac{2^2}{2^2 s} + \frac{2^3}{2^3 s} + \dots \\
= & 1 + \frac{1}{2^{s-1}} + \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^3 + \dots \\
= & \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{s-1}}}
\end{aligned}$$

Also konvergent, da $\frac{1}{2^{s-1}} < 1$

3.8 Absolute Konvergenz von Reihen

Wir haben schon gesehen, dass

- $\sum \frac{1}{n}$ nicht konvergent ist
- $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ konvergent ist

Wir können deshalb herleiten, dass

$$\sum a_n \text{ konvergiert } \not\Rightarrow \sum |a_n| \text{ konvergiert}$$

Definition 3.43

Die Reihe $\sum_{1}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut, falls die Reihe $\sum |a_k|$ konvergiert

$$\text{Konv. } \not\Rightarrow \text{ abs. konv.}$$

Is this sentence really needed? “Warum sind absolut konvergent Reihen gut?”, page 113 middle

Frage

Wenn wir eine Reihe haben, können wir in sehr unterschiedlichen Weisen summieren? Kommt es auf die Reihenfolge an?

Antwort

Ja! Es kommt auf die Reihenfolge an!

Beispiel 3.44

Die Reihe $\sum \frac{(-1)^k}{k}$ konvergiert, hingegen ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}$ divergent.

Wählt man zu $l \in \mathbb{N}$ den index k_l, so dass

$$\sum_{k=1}^{k_l} \frac{1}{2k} > l + \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{2k-1}$$

und ordnet man die Folge $\sum \frac{(-1)^k}{k}$ nun so um, dass auf die ersten k_j positiven Folgengleider jeweils das $j-$te negative Glied folgt, $j \in \mathbb{N}$, dann erhält man für die so umgeordnete harmonische Reihe

$$\begin{aligned}
\sum \frac{(-1)^k}{k} &= \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2k_1} - 1 \\
&\vdots \\
&+ \frac{1}{2\left(k_1+1\right)} + \ldots + \frac{1}{2k_1} - \frac{1}{3} \\
&\vdots \\
&+ \frac{1}{2\left(k_{l-1}+1\right)} + \ldots + \frac{1}{2k_l} - \frac{1}{2l-1} \\
&\vdots \\
&= \sum_{l=1}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{k_l} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{2k-1} \right)}_{>l} \\
&> \sum_{l=1}^{\infty} l
\end{aligned}$$

d.h. die umgeordnete alternierende harmonische Reihe ist divergent! Der stärkere Konvergenzbegriff, die absolute Konvergenz, schliesst solche pathologische Verhältnisse aus. Falls die Reihe absolut konvergent ist, ist die Konvergenz sehr stabil und sehr robust.

Bemerkung 3.45

1. Konv. $\not\Rightarrow$ Abs. Konv. Aber Abs. Konv. $\Rightarrow$ konv.

   Beweis

   $\sum |a_n|$ konv. Sei $b_n = a_n + |a_n|$

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } a_n \leq 0 \\ 2a_n = 2|a_n| & \text{falls } a_n \geq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow 0 \leq b_n \leq 2|a_n| \Rightarrow \sum b_n$ konv.
$a_n = b_n - |a_n|$ und beide Reihen konv. $\Rightarrow \sum a_n = \sum b_n - \sum |a_n|$ konv.

■

2. Wurzel- und Quotientenkriterium sind Kriterien für absolute Konvergenz.

3. Da
$$S_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k| < S_{n+1} = S_n + |a_n|$$
ist, ist die Folge $(S_n)_{n\geq 1}$ monoton wachsend; Absolute Konvergenz ist somit äquivalent zur Beschänkheit von $(S_n)_{n\geq 1}$

4. Falls $\sum a_k$ absolut konvergiert, dann konvergiert natürlich auch $\sum\limits_{k=j}^{\infty} |a_n|$ für jedes j und $\forall \varepsilon > 0$, $\exists j(\varepsilon)$, so dass
$$\sum_{k=j}^{\infty} |a_n| < \varepsilon \qquad \forall j > j(\varepsilon)$$

Notation: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_n| < \infty = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert

Satz 3.46

Sei $\sum\limits_{1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent und $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion. Dann ist auch die "umgeordnete Reihe" $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ absolut konvergent mit gleicher Summe.

Beweis

It says Übung, maybe want to add something?? page 117 bottom

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da $\sum\limits_{1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert, gibt es $n_0(\varepsilon)$ mit $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} |a_k| < \varepsilon$. Sei
$$n_1(\varepsilon) := \max\left\{\varphi^{-1}(1), \varphi^{-1}(2), \ldots, \varphi^{-1}(n_0)\right\}$$
Falls $k > n_1(\varepsilon)$, dann folgt $\varphi(k) > n_0$ (φ injektiv). Also $\forall n, m \geq n_1(\varepsilon)$
$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_{\varphi(k)}\right| \leq \sum_{k=m}^{n} \left|a_{\varphi(k)}\right| \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k| < \varepsilon$$

Insbesondere konvergiert $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ absolut und

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}\right| &\leq \left|\sum_{k=1}^{n_0} a_k - \sum_{k=1}^{n_1} a_{\varphi(k)}\right| + \left|\sum_{n_1+1}^{\infty} a_{\varphi(k)}\right| + \left|\sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_k\right| \\ &\leq 3 \sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k| \leq 3\varepsilon\end{aligned}$$

■

Beispiel 3.47

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} kq^k$ ist für $|q| < 1$ absolut konvergent (z.B. Quotientenkriterium)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} kq^k = q + q^2 + q^3 + q^4 \ldots \\ +q^2 + q^3 + q^4 \ldots \\ +q^3 + q^4 \ldots \\ +q^4 \ldots \\ \vdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} kq^k &= q\left\{1 + q + \ldots\right\} + q^2\left\{1 + q + \ldots\right\} \\ &= \underbrace{\left\{1 + q + \ldots\right\}}_{\frac{1}{1-q}}\underbrace{\left\{q + q^2 + \ldots\right\}}_{\frac{q}{(1-q)}} = \frac{q}{(1-q)^2} \\ &= \sum_{l=1}^{\infty}\left(q^l \sum_{k=0}^{\infty} q^k\right) = \sum_{l=1}^{\infty} q^l \left(\frac{1}{1-q}\right) = \left(\frac{1}{1-q}\right) \underbrace{\sum_{l=1}^{\infty} q^l}_{\frac{q}{1-q}} \\ &= \frac{q}{(1-q)^2}\end{aligned}$$

Umordnung der Summation: Statt ↓ wird → summiert

Satz 3.47

Seien $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ Folgen in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Wir betrachten $(a_n b_k)_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ als Folge, wobei wir eine beliebige Abzählung von $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ durch $\mathbb{N}$ zulassen. Falls $\sum a_k$, $\sum b_k$ absolut konvergiert, ist $\sum a_k b_k$ absolut konvergent und

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{l=1}^{\infty} b_l$$

unabhängig von der Summationsreihenfolge. Als Korollar:

Korollar 3.48

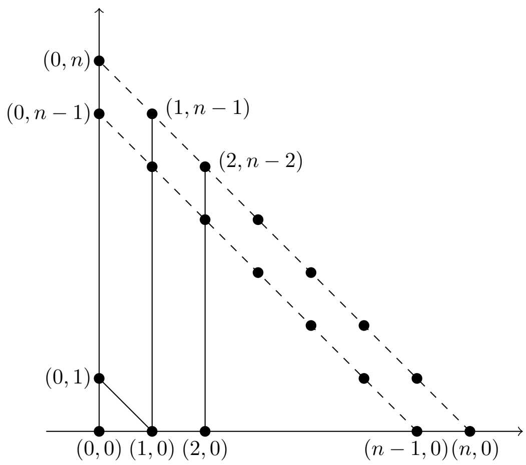
Für alle x, y in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ gilt

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$$

$\left(\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right)$

Beweis

$$\exp(x)\exp(y) \overset{\text{Satz 3.47}}{=} \sum_{k \neq l=0}^{\infty} \frac{x^k y^l}{k!l!}$$



Wir zählen jetzt $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ wie folgt ab

Can't understand the formula, page 121 bottom

$$\exp(x)\exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \exp(x+y)$$

■

Zum Abschluss behandeln wir noch den Zusammenhang von "e" und "e^x".

Satz 3.49

$$\exp(1) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Beweis

1. $$\exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon), \text{mit} \left| \exp(1) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} < \varepsilon \right|$$
$$\Leftrightarrow -\varepsilon < \sum_{0}^{n_0} \frac{1}{k!} - \exp(1) < \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow -\varepsilon + \exp(1) < \sum_{0}^{n_0} \frac{1}{k!} < \varepsilon + \exp(1)$$

Insbesondere

$$\exp(1) < \sum_{k=0}^{n_0} \frac{1}{k!} + \varepsilon$$

2.

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \underbrace{\left(\frac{n\,(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k}\right)}_{a_k^{(n)}} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} a_k^{(n)}\end{aligned}$$

Da

$$a_k^{(n)} := \frac{n}{n} \cdot \frac{(n-1)}{n} \ldots \frac{n-k+1}{n} < 1$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \exp(1) \Rightarrow 0 < \exp(1) - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

3. $0 < a_k^{(n)} < 1$ und für jedes k fest ist $a_k^{(n)} \to 1$, $n \to \infty$.

$$\frac{n\,(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} = \frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k}{n}+\frac{1}{n}\right)}{\frac{n^k}{n^k}} \underset{n\to\infty}{\to} 1$$

somit

$$1 - a_k^{(n)} \underset{n\to\infty}{\to} 0,\ (k \text{ fest})$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \left(1 - a_k^{(n)}\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

$\Rightarrow$ Für $\varepsilon > 0$, $\exists n_1 = n_1(\varepsilon, n_0)$,, so dass

$$\forall n \geq n_1 \qquad \sum_{k=0}^{n_0} \left(1 - a_k^{(n)}\right) < \varepsilon$$

Dann haben wir $\forall n \geq \max\{n_0, n_1\}$

$$
\begin{aligned}
0 &\overset{2}{<} \exp(1) - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \overset{()}{<} \sum_{k=0}^{n_0} \frac{1}{k!} + \varepsilon - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\
&\overset{2(*)}{<} \sum_{k=0}^{n_0} \frac{1}{k!} + \varepsilon - \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} \frac{1}{k!} \\
&< \sum_{k=0}^{n_0} \frac{1}{k!} + \varepsilon - \sum_{k=0}^{n_0} a_k^{(n)} \frac{1}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{n_0} \frac{1}{k!} \left(1 - a_k^{(n)}\right) + \varepsilon \\
&< \sum_{k=0}^{n_0} \left(1 - a_k^{(n)}\right) + \varepsilon < 2\varepsilon
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \exp(1) = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n
$$

■

Analog kann man auch beweisen, dass

Satz 3.50

$\forall x \in \mathbb{R}$

$$
\exp(x) = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n
$$

Start of additional content, page 125. This has to be reviewed for layout issues (it's pretty much a mess)

Satz

$$
\exp(x) = \sum \frac{x}{k!} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon)
$$

$$
\forall n > n_0 \qquad \left| \exp(x) - \sum_0^{n_0} \frac{x}{k!} \right| < \varepsilon
$$

$$
\Leftrightarrow -\varepsilon < \sum \frac{x}{k!} - \exp(x) < \varepsilon
$$

$$
1 \Leftrightarrow \exp(x) - \varepsilon < \sum_0^{n_0} \frac{x}{k!} < \varepsilon + \exp(x)
$$

$$
\begin{aligned}
② \left(1+\frac{x}{n}\right)^n &= \sum_0^n \binom{n}{k}\frac{x^n}{n^k} \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\cdot\frac{x^k}{n^k} \\
&= \sum_0^n \frac{1}{k!}\cdot\frac{n!}{(n-k)!}\cdot\frac{x^k}{n^k} \\
&\overset{②}{=} \sum \frac{1}{k!}\cdot\underbrace{\frac{n\,(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k}}_{a_k^{(n)}}\cdot x^k \\
&\le \sum_0^n \frac{x^k}{n^k} < \exp(x) \\
\Rightarrow \exp(x) - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n &> 0 \quad ②
\end{aligned}
$$

$0 < a_k^n < 1$ für jedes k fest ist $a_k^{(n)} \to 1$, $n \to \infty$

$$
\frac{n\,(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} = \frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k}{n}+\frac{1}{n}\right)}{\frac{n^k}{n^k}} \to 1
$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow 1-a_k^{(n)} \to 0, n\to\infty \qquad (k \text{ fest}) \\
&\Rightarrow \sum_{k=0}^{n_0}\left(1-a_k^{(n)}\right)x^k \to 0, n\to\infty \qquad (x, k \text{ fest}) \\
&\Rightarrow \forall\varepsilon>0 \quad \exists n_1 = n_1(\varepsilon, n_0) \quad \forall n > n_1
\end{aligned}
$$

$$
\sum_{k=0}^{n_0}\left(1-a_k^{(n)}\right)x^k < \varepsilon
$$

Dann $\forall n > \max\{n_0, n_1\}$

$$
\begin{aligned}
0 \overset{②}{<} \exp(x) - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n &\overset{①}{<} \sum_0^{n_0}\frac{x^k}{k!} + \varepsilon - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \\
&< \sum_0^{n_0}\frac{x^k}{k!} + \varepsilon - \sum_0^{n_0} a_k^n\frac{x^k}{k!} \\
&= \sum_0^{n_0}\frac{(1-a_k^n)}{k!}x^k + \varepsilon < \sum_0^{n_0}(1-a_k^n)x^k + \varepsilon < 2\varepsilon
\end{aligned}
$$

End of additional content

Satz 3.49 $\Rightarrow \exp(1) = e^1$

$$
\exp(x+y) = (\exp(x))(\exp(y))
$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \exp(n) &= \exp(1)\exp(n-1)\\ &= \exp(1)\exp(1)\exp(n-2)\\ &\vdots\\ &= e\cdot e\cdot\ldots\cdot e = e^n, \forall n\in\mathbb{N}\end{aligned}$$

$$1 = \exp(0) = \exp(n)\exp(-n)$$

$$\Rightarrow \exp(-n) = \frac{1}{\exp(n)} = \frac{1}{e^n} = e^{-n}$$

$$\Rightarrow \exp(n) = e^n, \forall n\in\mathbb{Z}$$

$$\forall q\in\mathbb{N}, \exp\left(\frac{1}{q}\right) = e^{\frac{1}{q}}$$

Da

$$e = \exp(1) = \exp\left(q\cdot\frac{1}{q}\right) = \underbrace{\exp\left(\frac{1}{q}\right)\ldots\exp\left(\frac{1}{q}\right)}_{q\text{ mal}}$$

Somit haben wir

Satz 3.51

$\forall x\in\mathbb{Q}$, $\exp(x) = e^x$. Für rein imaginäre Argumente $z = iy$, $y\in\mathbb{R}$ können wir $\exp(iy)$ durch Umordnung gemäs Satz 3.46 (s. 63) in Real- und Imaginärteil zerlegen

$$\begin{aligned}\exp(iy) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(iy)^k}{k!}\\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l y^{2l}}{(2l)!} + i\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l y^{2l+1}}{(2l+1)!}\\ &:= \cos(y) + i\sin(y)\end{aligned}$$

Für $z = x + iy \in\mathbb{C}$

$$\exp(z) = \exp(x)\exp(iy) = \exp(x)(\cos(y) + i\sin(y))$$

Kapitel 4

Stetigkeit

4.1 Grenzwerte von Funktionen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine Teilmenge und $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung.

Definition 4.1
f hat an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}^d$ den *Grenzwert* a, falls für jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in Ω mit $x_k \to x_0\,(k \to \infty)$ gilt $f(x_k) \to a$.

Wir schreiben: $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$

Bemerkung: x_0 muss nicht im Definitionsbereich von f sein.

Definition 4.2
$f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ heisst *stetig* an der Stelle $x_0 \in \Omega$, falls:

1. f an der Stelle x_0 definiert ist,
2. $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert, und
3. $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Definition 4.2'
Die Abbildung $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ist im Punkt $x_0 \in \Omega$ *stetig*, falls für jede gegen x_0 konvergierende Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ in Ω, die Folge $(f(x_n))_{n\geq 1}$ zum Grenzwert $f(x_0)$ konvergiert, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$$

Anders gesagt:

- Grenzwerte von Folgen werden von stetigen Funktionen nicht verändert.

- Stetige Funktionen erhalten Grenzwerte von Folgen.

Definition 4.2"
Die Abbildung $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ist auf Ω *stetig* (oder *einfach stetig*, wenn der Kontext klar ist), falls f in jedem Punkt $x \in \Omega$ stetig ist.

Beispiele

Mittels den Resultaten aus dem dritten Kapitel haben wir wichtige Beispiele von stetigen Funktionen.

- Diese Funktion ist auf ganz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ stetig:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (a, b) &\mapsto (a + b) \end{aligned}$$

  (Seien $(a_n), (b_n)$ Folgen mit $a = \lim a_n, b = \lim b_n$. Dann ist die Folge $(a_n + b_n)$ konvergent, und $\lim a_n + b_n = a + b$, nach Satz 3.8)

- Diese Funktion ist auf ganz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ stetig:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (a, b) &\mapsto ab \end{aligned}$$

- Diese Funktion ist auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^x$ stetig:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^x &\to \mathbb{R} \\ (a, b) &\mapsto a/b \end{aligned}$$

- Aus wiederholter Anwendung von 1. und 2. ergibt sich die Polynomfunktion:

$$\text{Sei } n \geq 0,\ a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R} : p(x) := a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

  Die polynomielle Funktion ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$.

- Die folgenden beiden Abbildungen sind stetig auf ihrem Definitionsbereich.

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d &\to \mathbb{R}^d \\ (a, b) &\mapsto (a + b) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d &\to \mathbb{R}^d \\ (\lambda, a) &\mapsto \lambda a \end{aligned}$$

- Die folgenden Abbildungen sind stetig.

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \bar{z} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ (z, w) &\mapsto z * w \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathbb{C} \times \mathbb{C}^x &\to \mathbb{C} \\ (z, w) &\mapsto z/w \end{aligned}$$

- Die folgenden Funktionen sind auf ihrem Definitionsbereich stetig:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^d &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|x\| \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \mathbb{C} &\to \mathbb{R} \\ z &\mapsto |z| \end{aligned}$$

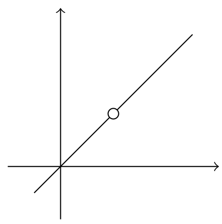
- Die charakteristische Funktion von $\mathbb{Q}$:

  $$\text{Sei } f(x) = \mathcal{X}_{\mathbb{Q}} = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$$

  Sei $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ fest mit $(x_k) \in \mathbb{Q}, x_k \to x$. Dann ist $f(x_k) = \mathcal{X}(x_k) = 1 \not\to 0 = \mathcal{X}(x)$. (Zu $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sei x_k die an der k-ten Nachkommastelle abgebrochene Dezimaldarstellung von x. Dann gilt $x_k \in \mathbb{Q}\ \forall k \in \mathbb{N}$ und $x_k \to x_1$.)

- Sei

  $$f : \begin{cases} x & x < 1 \\ x & x > 1 \end{cases}$$

  f ist in $x = 1$ nicht stetig, weil f an der Stelle $x = 1$ nicht definiert ist. In diesem Beispiel ist die Funktion f nicht stetig, aber sie ist eigentlich eine "gute" Funktion.

Does that really say gute?

no ozlem number...

Definition (Struwe 4.1.3 (ii))
$\Omega \subset \mathbb{R}^d, f : \Omega \to \mathbb{R}^n, x_0 \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega$ so dass $\exists (x_k) \in \Omega$ mit $\lim x_k = x_0$.

Dann ist f an der Stelle x_0 *stetig ergänzbar*, falls $a = \lim f(x_k)$ existiert. In diesem Fall setzen wir

$$f(x_0) = a$$

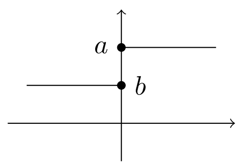
Die durch $f(x_0) = a$ ergänzte Funktion f ist offenbar stetig an der Stelle x_0.

offenbar $\to$ offensichtlich?

- Diese stückweise konstante Funktion ist stetig an jeder Stelle $x_0 \neq 0$. Sie ist jedoch für $a \neq b$ an der Stelle $x_0 = 0$ nicht stetig ergänzbar. (Struwe Beispiel 4.1.3 (vii))

  $$f : \mathbb{R}^x \to \mathbb{R}$$

  $$f(x) = \begin{cases} a & \text{falls } x < 0 \\ b & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

- Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ monoton wachsend, d.h. $\forall x, y \in (a,b)$ mit $x \leq y$ folgt $f(x) \leq f(y)$. Sei ausserdem $x_0 \in (a,b)$. Dann existieren die *links- und rechtsseitigen Grenzwerte*

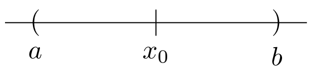
$$f(x_0^+) := \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0 \\ x \downarrow x_0}} f(x), \qquad f(x_0^-) := \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0 \\ x \uparrow x_0}} f(x)$$

und f ist stetig an der Stelle x_0 genau dann, wenn $f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0)$.

Beweis

Wir behaupten, dass für jede Folge $(y_n)_{n \geq 1}$ mit $\{y_n : n \geq 1\} \subset (a, x_0)$ und $\lim y_n = x_0$ die Folge $(f(y_n))_{n \geq 1}$ kovergent und der linksseitige Limes $l_-(x_0)$ unabhängig von der Wahl der Folge ist.

$$l\_(x_0) := \text{linkseitiges Limes} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$$



Wir betrachten zuächst die "spezielle" Folge $x_n = (x_0 - \frac{1}{n})_{n \geq r}$. Hier ist r so gewählt, dass $x_0 - \frac{1}{r} \geq a$.
Dann ist $(f(x_0 - \frac{1}{n}))_{n \geq r}$ monoton wachsend ($x_0 - \frac{1}{n+1} > x_0 - \frac{1}{n}$ und f monoton wachsend) und $(f(x_0 - \frac{1}{n}))_{n > r}$ beschränkt ($f(a) < [...] < f(b)$).

missing in source material p134week8sem1

$$\text{Sei } l_- := \lim_{n \to \infty} f(x_0 - \frac{1}{n})$$

Wir möchten zeigen, dass für jede $(y_n) \subset (a, x_0)$ mit $\lim y_n = x_0$ $\lim f(y_n)$ existiert und $\lim f(y_n) = l_-$.

$= l_-$ oder $= l.$?

Da es für jedes $x < x_0$ ein n gibt, mit $x \leq x_0 - \frac{1}{n}$, folgt

$$f(x) \leq f(x_0 - \frac{1}{n} \leq l_-$$

Sei nun $(y_n)_{n \geq 1}$ beliebig in (a, x_0) mit $\lim y_n = x_0$. Sei $\varepsilon > 0$, $(y_n < x_0)$ und $n_0(\varepsilon)$ mit

$$l_- - \varepsilon < f(x_0 - \frac{1}{n}) \leq l_- \quad \forall n > n_0(\varepsilon)$$

Insbesondere

$$l_- - \varepsilon < f(x_0 - \frac{1}{n_0(\varepsilon)}) \leq l_-$$

Sei jetzt $n_1(\varepsilon) = n_1(n_0(\varepsilon)) > 0$, so dass

$$x_{n_0(\varepsilon)} = x_0 - \frac{1}{n_0(\varepsilon)} < y_n < x_0 = \lim_{n \to \infty} x_n \quad \forall n \geq n_1(\varepsilon)$$

$$((y_n) < (a, x_0), \lim y_n = x_0)$$

Da f monoton ist, folgt

$$l_- - \varepsilon < f(x_0 - \frac{1}{n_0(\varepsilon)}) \leq f(y_n) \leq l_- = \lim f(x_n)$$

Insbesondere $\lim f(y_n) = l_-$.

Der Beweis für L_+ verläuft ganz analog.

Nun zur Stetigkeit: Es gilt immer

$$l_-(x_0) \leq f(x_0) \leq l_+(x_0)$$

Falls $l_-(x_0) < l_+(x_0)$, sei $(t_n)_{n\geq 1}$ wie folgt definiert:

$$t_n = \begin{cases} x_0 - \frac{1}{n} & n \text{ gerade} \\ x_0 + \frac{1}{n} & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Dann gilt $\lim t_n = x_0$. Aber $f(t_{2n+1}) - f(t_n) \geq l_+(x_0) - l_-(x_0) > 0$, woraus folgt dest $(f(t_n))_{n\geq 1}$ nicht konvergent. dest? p 135 bottom
Falls $l_-(x_0) = l_+(x_0)$ folgt die Stetigkeit sofort.

Satz 4.3

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Dann ist die Menge der Unstetigkeitspunkte von f entweder endlich oder abzählbar.

Beweis

Sei $U(f) = \{x \in (a, b) : f$ ist nicht stetig an x$\}$. Dann ist $\forall x \in U(f), \quad l_-(x) < l_+(x)$ und wir wählen ein $g(x) \in ??n(l_-(x), l_+(x))$. Falls $x_1 < x_2$ in $U(f)$, folgt unreadable.. p136 mid
$l_+(x_1) < l_-(x_2)$ und somit $g(x_1) < g(x_2)$. Damit ist $g : U(f) \to ??$ injektiv. same unreadable character
Stetigkeit verträgt sich gut mit den üblichen Operationen auf Funktionen.

Satz 4.4

Seien $f, g : \Omega \to \mathbb{R}^n$ und $x_0 \in \Omega$. Falls f und g in x_0 stetig sind, so sind es auch $f + g$ und $\alpha f,\ \alpha \in \mathbb{R}$.

Korollar 4.5

Falls f, g auf Ω stetig sind, so sind es auch $f + g$ und αf.

Definition 4.6

$$C(\Omega, \mathbb{R})$$

bezeichnet die Menge der stetigen Abbildungen $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Nach Korollar 4.5 ist es ein Vektorraum.

Satz 4.7

Seien $f : \Omega \to \mathbb{R}^n, \Omega \subset \mathbb{R}^d$ und $g : \Gamma \to \mathbb{R}^n$ mit $f(\Omega) \subset \Gamma$ und $x_0 \in \Omega, y_0 = f(x_0) \subset \Gamma$. Falls f in x_0 und g in y_0 stetig sind, folgt, dass $g \circ f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ in x_0 stetig ist.

Beweis

Sei $(t_n)_{n\geq 1}$ in Ω mit $\lim t_n = x_0$. Da f stetig ist, $\lim f(t_n) = f(x_0) = y_0$, und aus der Stetigkeit von g folgt, dass

$$\lim_{n\to\infty} g(f(t_n)) = g(y_0) = (g \circ f)(x_0)$$

Korollar 4.8

Falls $f : \Omega \to \mathbb{R}^d, f(\Omega) \subset \Gamma$ und $g : \Gamma \to \mathbb{R}^m$, auf Ω bzw auf Γ stetig sind, so folgt, dass $g \circ f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ auf Ω stetig ist.

4.2 Stetige Funktionen

In diesem Abschnitt behandeln wir die erste der fundamentalen Eigenschaften von stetigen Funktionen, nämlich, dass eine auf einem endlichen Intervall $[a, b]$ (Endpunkte eingeschlossen) stetige Funktion immer ein Maximum und Minimum besitzt. Dies verallgemeinern wir dann auf Abbildungen von $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ nach $\mathbb{R}^n$, wobei Ω eine spezielle Eigenschaft haben muss (Kompaktheit).

Satz 4.9

Seien $-\infty < a \leq b < \infty$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig.
Dann ist $f([a, b])$ in $\mathbb{R}$ beschränkt und es gibt $c_-, c_+ \in [a, b]$ mit

$$\begin{aligned} f(c_+) &= \sup \{f(x) : x \in [a, b]\} \\ f(c_-) &= \inf \{f(x) : x \in [a, b]\} \end{aligned}$$

d.h. Supremum und Infimum werden angenommen.

Beweis

1. $f([a, b])$ ist nach oben beschränkt (Indirekter Beweis)

   Falls nicht, so gibt es $\forall n \in \mathbb{N}$ ein $t_n \in [a, b]$ mit $f(t_n) \geq n$.
   $(t_n)_{n\geq 1}$ ist beschränkt, nach Bolzano-Weierstrass. Sei $(t_{l(n)})$ eine konvergente Teilfolge mit $\lim t_{l(n)} = x$.
   Dann ist $x \in [a, b]$, da $a \leq t_n \leq b$
   (Satz: $(a_n), (b_n)$ konvergente Folgen mit $\lim a_n = a, \lim b_n = b$. Falls $a_n \leq b_n$, folgt $a \leq b$.)
   Aus der Stetigkeit von f folgt: $\lim_{n\to\infty} f(t_n) = f(x)$. Insbesondere ist $f(t_{l(n)})$ beschränkt, was im Widerspruch zu $f(t_{l(n)}) \geq l(n)$ steht.

   $\Longrightarrow$ f ist nach oben beschränkt.

2. f ist nach unten beschränkt (analog)

   Sei $M := \text{Sup}\ \{f(x) : x \in [a,b]\}$, welches als Folge von 1. existiert.
   Sei für jedes $n \geq 1$ $x_n \in [a,b]$ mit

   $$M - \frac{1}{n} < f(x) \leq M \qquad (*)$$

   ($M - \frac{1}{n}$ ist kein Supremum $\implies \exists x_n$ mit $M - \frac{1}{n} < f(x_n)$)

3. $(x_n) \subset [a,b]$ beschränkt.
   Sei nach Bolzano-Weierstrass $(x_{l(n)})_{n\geq 1}$ eine konvergente Teilfolge mit Limes c_+. Aus der Stetigkeit von f folgt:

   $$f(c_+) = \lim_{n\to\infty} f(x_{l(n)})$$

   Aus $(*)$ folgt

   $$\lim_{n\to\infty} f(x_{l(n)}) = M$$

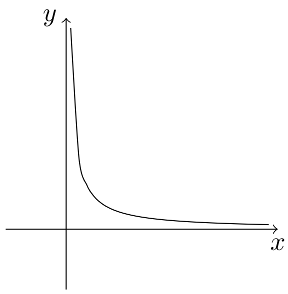
   d.h. $\exists c_+ \in [a,b]$ mit

   $$f(c_+) = \lim f(x_{l(n)}) = M$$

4. Infimum ist ähnlich.

Bemerkung

Satz 4.9 kann man als eine Eigenschaft des Intervalls $[a,b]$ auffassen. Sie gilt zum Beispiel nicht für $(0,1]$ wie das Beispiel der auf $(0,1]$ stetigen Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ zeigt.



Die grundlegende Eigenschaft ist Kompaktheit.

Definition 4.10
Eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^d$ heisst *kompakt*, falls jede Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ von Punkten aus K einen Häufungspunkt *in* K besitzt, d.h. falls jede Folge in K eine *in* K konvergierende Teilfolge hat.

Beispiel

1. $(0, 1]$ ist nicht kompakt:
   $(\frac{1}{n})_{n\geq 1} \subset (0, 1]$ konvergiert gegen $0 \notin (0, 1]$.
2. $[a, b]$ ist kompakt.
   Sei $(t_n)_{n\geq 1}$ eine Folge mit $a \leq t_n \leq b$. (t_n) ist beschränkt, nach Bolzano-Weierstrass sei $(t_{l(n)})$ eine konvergente Teilfolge mit Limes l. Dann folgt aus $a \leq t_n \leq b$. $(t_{l(n)}) \quad \forall n \geq 1$, dass
   $$a \leq \lim t_{l(n)} \leq b$$
   D.h. $l \in [a, b]$.

Lemma 4.11

Falls $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt ist, ist es beschränkt und besitzt zudem ein Minimum und Maximum.

Beweis

Sonst gibt es zu jedem $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in K$ mit $\|x_n\| \geq n$. Dann kann aber $(x_n)_{n\geq 1}$ keine konvergente Teilfolge besitzen: $(\left|x_{l(n)}\right| > l(n))$.
$\implies$ K ist beschränkt.
Sei $s :=$ Sup K. Dann gibt es $\forall n \geq 1, k_n \in K$ mit
$$s - \frac{1}{n} < k_n \leq s$$
Insbesondere gilt $\lim k_n = s$. Da K kompakt ist, hat k_n eine *in* K konvergierende Teilfolge. Daraus folgt, dass $s \in K$.

Beispiel

$S^d := \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : \|x\| = 1\}$, die d-dimensionale Sphäre, ist kompakt.

Beweis

Sei $(x_n)_{n\geq 1} \subset S^d$, dann ist diese Folge offensichtlich beschränkt, besitzt sie (nach Bolzano-Weierstrass) eine konvergente Teilfolge $(x_{l(n)})_{n\geq 1}$. Sei $p \in \mathbb{R}^{d+1}$ deren Limes. Da die Funktion $f(x) := \|x\|$ stetig ist, folgt
$$\|p\| = f(p) \overset{\text{defn}}{=} f(\lim x_{l(n)}) \overset{f \text{ stetig}}{=} \lim f(x_{l(n)}) = 1$$
$\implies p \in S^d$

Die Verallgemeinerung von Satz 4.9 ist

Satz 4.12

1. Sei $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung. Dann ist $f(K) \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge.
2. f nimmt ihr Supremum und Infimum an, d.h. es gibt $c_-, c_+ \in K$ mit
   $$f(x_-) \leq f(x) \leq f(x_+) \quad \forall x \in K$$

Beweis

1. Sei $(y_n)_{n\geq 1}$ eine beliebige Folge in $f(K)$. Wir müssen zeigen, dass es eine konvergente Teilfolge mit Limes in $f(K)$ gibt. Sei $(x_n) \in K$ mit

   $$f(x_n) = y_n,\, n \geq 1$$

   Dann ist $(x_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in K. Da K kompakt ist, gibt es $p \in K$ und $(x_{l(n)})$, eine konvergente Teilfolge mit $\lim x_{l(n)} = p$.
   Aus der Stetigkeit von f folgt

   $$f(p) = f(\lim x_n) \overset{f \text{ stetig}}{=} \lim f(x_{l(n)}) = \lim y_{l(n)}$$

   D.h. $y_{l(n)}$ ist eine Teilfolge von y_n mit Limes $f(p) \in K$.
   $\Longrightarrow$ $f(K)$ ist kompakt.

2. Da $f(K)$ kompakt ist, (nach 1.), ist $f(K)$ beschränkt, und besitzt zudem ein Minimum und Maximum (nach Lemma 4.11).

   $$\begin{aligned} \Longrightarrow \qquad \exists y_+, y_- \in f(K), \text{ mit } y_+ &= \text{Sup } f(K) \\ y_- &= \text{Inf } f(K) \\ \exists c_+, c_- \in K, \text{ mit } y_+ &= f(c_+) \\ y_- &= f(c_-) \end{aligned}$$

4.3 Norm auf $\mathbb{R}^d$

Der Distanzbegriff auf $\mathbb{R}^d$ kommt vom Skalarprodukt. Es gibt interessante, andere Arten einen Distanzbegriff einzuführen, nämlich mit dem Begriff der Norm.

In the source notes, this is 4.4, but there is no 4.3 that I can find...

Definition 4.13
Eine *Norm* auf $\mathbb{R}^d$ ist eine Abbildung

$$\|.\| : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$$

mit den folgenden Eigenschaften:

1. *Definitheit*: $\|x\| \geq 0$ mit Gleichheit genau dann wenn $x = 0$.
2. *Positive Homogenität*: $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^d$
3. *Dreiecks-Ungleichung*: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d$

Beispiel 4.14

1. $$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i^2|\right)^{\frac{1}{2}} \qquad x = (x_1, \ldots, x_d)$$

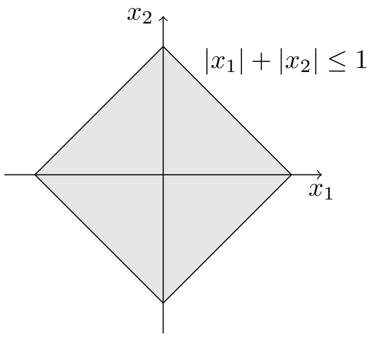
   kommt vom Skalarprodukt.

2. Für $1 \leq p < \infty$ sei
$$\|x\|_p := \Big(\sum_{i=1}^{d} |x_i^p|\Big)^{\frac{1}{p}}$$
und $\|x\|_\infty = \max\{|x_i| : 1 \leq i \leq d\}$, dann sind $\|.\|_p, 1 \leq p \leq \infty$ Normen auf $\mathbb{R}^d$.

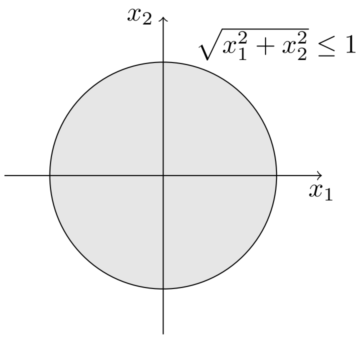
Zwischen diesen verschiedenen Normen haben wir die folgenden Verhältnisse:

$$\|x\|_\infty = \max|x_i| \leq \|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{d}|x_i|^p} \leq d\|x\|_\infty \qquad (*)$$

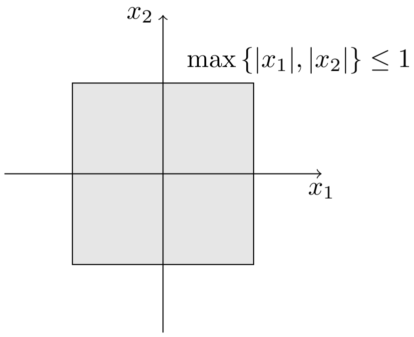
Bild von $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{d}|x_i| \leq 1$



$\|x\|_2 = \sqrt{\sum x_i^2} \leq 1$



$\max\limits_i \{|x_i|\} = \|x\|_\infty \leq 1$



Definition 4.15
Zwei Normen $\|.\|^{(1)}, \|.\|^{(2)}$ auf $\mathbb{R}^d$ heissen *äquivalent*, falls es $c_1, c_2 > 0$ gibt, mit

$$c_1\|x\|^{(1)} \leq \|x\|^{(2)} \leq c_2\|x\|^{(1)} \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

Bemerkung: Sei $C = \max\{C_2, \frac{1}{C_1}\}$, dann gilt $(\frac{1}{C})\|x\|^{(1)} \leq \|x\|^{(2)} \leq C\|x\|^{(1)}$

Beispiel

Die Normen $\|.\|_p \quad 1 \leq p \leq \infty$ sind wegen $(*)$ äquivalent.

Bemerkung 4.16

Äquivalente Normen definieren dieselben "offenen Mengen" via Distanzfunktion.

Beweis

Für die Normkugeln

marked as skip? p152 week 9 sem1

$$B_r^{(1)}(x_0) := \{x : \|x - x_0\|^{(1)} < r\}$$

gilt mit $c_1\|x\|^1 \leq \|x\|^2 \leq c_2\|x\|^1$

$$B_{rc_1}^{(1)}(x_0) \subset B_r^{(2)}(x_0) \subset B_{c_2r}(x_0)$$

$\implies x_0 \in \Omega$ innerer Punkt von Ω bezüglich $\|.\|^2 \iff x_0 \in \Omega$ innerer Punkt von Ω bezüglich $\|.\|^1$

Auf $\mathbb{R}^d$ haben wir

Satz 4.17

Je zwei Normen auf $\mathbb{R}^d$ sind äquivalent.

Beweis

Es genügt zu zeigen, dass eine beliebige Norm $\|.\|$ zu $\|.\|_2$ äquivalent ist.
Seien $x = \sum x_i e_i$, $y = \sum y_i e_i$. Dann ist

$$\|x - y\| = \left\|\sum_{i=1}^d (x_i - y_i)e_i\right\| \leq \sum_{i=1}^d |x_i - y_i|\|e_i\| \leq \|x - y\| \underbrace{\sum_{i=1}^d \|e_i\|}_{:=C}$$

$$\underset{(*)}{\leq} C'\|x - y\|_2$$

Layout imperfect, but hard to make better.. p153 week9 sem1

Also folgt, dass $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \|x\|$ stetig ist.

Da $S^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_2 = 1\}$ kompakt ist, folgt, dass es $c_+, c_- \in S^{d-1}$ gibt, mit $k_- := \|c_-\| \leq \|x\| \leq \|c_+\| := k_+ \; \forall x \in S^{d-1}$. Da $c_0 \neq 0$ folgt $k_- > 0$.
Sei $x \neq 0$ allgemein ($C_- \in S^{d-1}$), dann ist $y := \frac{x}{\|x\|_2} \in S^{d-1}$ also $k_- \leq \left\|\frac{x}{\|x\|_2}\right\| < k_+$, woraus

$$k_- \|x\|_2 \leq \|x\| \leq k_+ \|x\|_2$$

folgt.

4.4 $\varepsilon - \delta$ Kriterium für Stetigkeit

4.5 in source notes. what to do?

Wir haben das folgende Kriterium für Stetigkeit an der Stelle x_0:

Satz 4.18

Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine Abbildung, $x_0 \in \Omega$. Folgende Eigenschaften sind äquivalent:

1. f ist stetig an der Stelle x_0.
   D.h. für jede gegen x_0 konvergierende Folge $(x_n) \subset \Omega$ konvergiert die Folge $f(x_n)$ gegen $f(x_0)$.
2. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$, so dass für alle $x \in \Omega$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt:
   $$|\delta(x) - \delta(x_0)| < \varepsilon$$
   $$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \forall x \in \Omega, \|x - x_0\| < \delta \implies \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

Beweis 4.18

(1) $\Rightarrow$ (2) (Indirekt)
Wir nehmen also an, dass (2) nicht gilt, d.h. es gibt $\varepsilon > 0$, so dass für jedes $\delta > 0$ einem Punkt x_δ gibt mit

$$\|x_\delta - x_0\| < \delta \text{ und } \|f(x_\delta) - f(x_0)\| > \varepsilon$$

$$\left(\begin{array}{c} \neg\left(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \Omega : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\right) \\ = \left(\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in \Omega : |x - x_0| < \delta \;\not\Rightarrow\; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\right) \\ \text{d.h.} \\ \exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x_\delta \in \Omega : |x_\delta - x_0| < \delta \text{ und } |f(x) - f(x_0)| > \varepsilon \end{array}\right)$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen jetzt $\delta_n = \frac{1}{n}$, dann gibt es $x_n := (x_{\delta_n})_{n \in \mathbb{N}}$, eine Folge in Ω, mit $\lim x_n = x_0$. Aber die Folge $(f(x_n))$ kann offensichtlich nicht gegen $f(x_0)$ konvergieren (Da $|f(x_n) - f(x_0)| > \varepsilon$), d.h. f ist nicht stetig in x_0.

(2) $\Rightarrow$ (1) Sei $(x_n)_{n \geq 1}$ eine Folge in Ω mit Grenzwert x_0. Wir möchten zeigen, dass $f(x_n) \to f(x_0)$. Sei $\varepsilon > 0$, nach (2) sei $\delta_\varepsilon > 0$, so dass $\forall x \in \Omega$ mit

$$|x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Da $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, gibt es $N \geq 1$, so dass

$$\|x_n - x_0\| < \delta \qquad \forall n \geq N_\delta$$

(Hier hängt N von δ und also im Endeffekt von ε ab). Aus (2) folgt

$$\|f(x_n) - f(x_0)\| < \varepsilon \qquad \forall n \geq N_\delta$$

Dies zeigt $\lim f(x_n) = f(x_0)$

■

Beispiel

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 8$. Dann f ist stetig auf $\mathbb{R}$. Sei $\varepsilon > 0$, sei $x_0 \in \mathbb{R}$

$$|f(x) - f(x_0)| = |(3x + 8) - (3x_0 + 8)| = 3|(x - x_0)| \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wenn wir $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ wählen, dann

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

In diesem Beispiel hängt δ nur von ε ab. Das nächste Beispiel zeigt, dass δ nicht nur von ε, sondern auch von x_0 abhängen kann.

2.

$$f : (0, \infty) \to (0, \infty)$$
$$x \to \frac{1}{x}$$

ist stetig auf $(0, \infty)$. Sei $x_0 \in (0, \infty)$

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \left|\frac{x_0 - x}{x \cdot x_0}\right|$$

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow -\delta < x - x_0 < \delta \Rightarrow x > x_0 - \delta$$

$$|f(x) - f(x_0)| = \frac{|x_0 - x|}{|x||x_0|} < \frac{|x - x_0|}{|x_0||x_0 - \delta|}$$

Sei $\delta < \frac{x_0}{2}$, dann folgt

$$\delta < \frac{x_0}{2} \Rightarrow x_0 - \delta > x_0 - \frac{x_0}{2} > \frac{x_0}{2}$$

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{|x_0 - x|}{|x||x_0 - \delta|} \leq \frac{|x - x_0| \cdot 2}{|x_0|^2} \leq \frac{2\delta}{|x_0|}$$

Sei

$$\delta_{\varepsilon;x_0} = \min\left\{\frac{x_0}{2}, \frac{\varepsilon|x_0|^2}{2}\right\}$$

Dann

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon|x_0|^2}{2} \cdot \frac{2}{|x_0|^2} = \varepsilon$$

4.5 Zwischenwertsatz

Satz 4.19

Seien $a < b$ in $\mathbb{R}$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, mit $f(a) \leq f(b)$ (oder $f(a) \geq f(b)$). Dann gibt es zu jedem $y \in [f(a), f(b)]$ ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$.

Beweis

Die Idee ist einfach. Wir benutzen ein Approximationsverfahren (In diesem Fall ein Bisektionsverfahren). Wir definieren zwei monotone Folgen

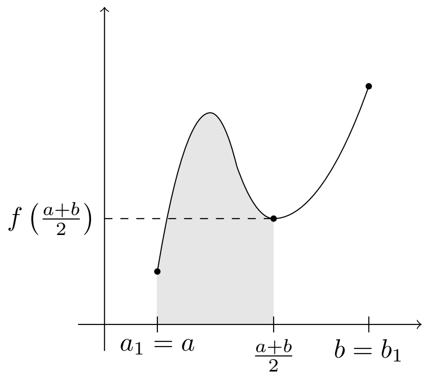
$$a = a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1 = b$$

mit $a_n \nearrow$, $b_n \searrow$, $\lim a_n = \lim b_n = c$ und

$$f(a_n) < y \leq f(b_n)$$

Dann folgt aus der Stetigkeit von ff, dass

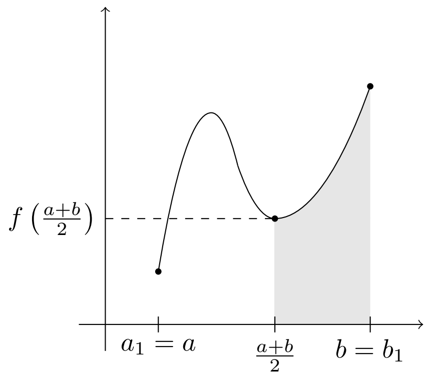
$$\lim f(a_n) = \lim f(b_n) = f(c) = y$$



Fall 1:

Falls $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq y$, setzen wir:

$$a_2 = a$$
$$b_2 = \frac{a+b}{2}$$



Fall 2:

Falls $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < y$, setzen wir:

$$a_2 = \frac{a+b}{2}$$
$$b_2 = b_1$$

Auf jeden Fall gibt es

1. $a_1 \leq a_2 < b_2 \leq b_1$
2. $(b_2 - a_2) = \frac{1}{2}(b_1 - a_1)$
3. $f(a_2) < y \leq f(b_2)$

Wir iterieren jetzt dieses Verfahren. Wir nehmen an, dass wir Folgen nach $(k-1)-$Schnitten definiert haben

1. $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \cdots \leq a_k < b_k \leq b_{k-1} \cdots \leq b_1$
2. $(b_k - a_k) = \frac{1}{2^{k-1}} (b_1 - a_1)$
3. $f(a_k) < y \leq f(b_k)$

Nun unterscheiden wir wieder zwei Fälle

Fall 1:

$$f\left(\frac{a_k + b_k}{2}\right) \geq y$$

dann definieren wir $a_{k+1} = a_k$ und $b_{k+1} = \frac{a_k+b_k}{2}$

Fall 2:

$$f\left(\frac{a_k + b_k}{2}\right) < y$$

dann definieren wir $a_{k+1} = \frac{a_k+b_k}{2}$ und $b_{k+1} = b_k$. Dann ist immer

1. $a_k \leq a_{k+1} < b_{k+1} \leq b_k$
2. $b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{1}{2} (b_k - a_k) = \frac{1}{2^k} |b_1 - a_1|$
3. $f(a_{k+1}) < y \leq f(b_{k+1})$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion erhalten wir zwei Folgen $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$, die die Eigenschaften 1., 2. und 3. erfüllen. (a_n), (b_n) sind monoton und beschränkt $\Rightarrow$ gibt es

$$\overline{a} = \lim a_k \leq \overline{b} = \lim b_k$$

Wegen 2.

$$\lim|a_k - b_k| = \lim\left|\frac{b_1 - a_1}{2^k}\right| = 0$$

d.h. $\lim a_k = \lim b_k$. Sei $c \in [a, b]$ dieser Wert. Aus stetigkeit von f folgt

$$f(c) = \lim f(a_n) = \lim f(b_n)$$

Aus 3. folgt

$$\begin{aligned} f(a_n) < y &\Rightarrow f(c) \leq y \\ g \leq f(b_n) &\Rightarrow y \leq f(c) \end{aligned}$$

also $f(c) = y$.

■

Korollar 4.20

1. Sei
   $$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$$
   ein Polynom mit reellen Koeffizienten, so dass $a_n \neq 0$ und n ungerade ist. Dann besitzt p mindestens eine reelle Nullstelle.

Beweis

Sei

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{p(x)}{a_n} \\ &= x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot x^{n-1} + \ldots + \frac{a_0}{a_n} \\ &= x^n \left[1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{x} + \ldots + \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{x^n} \right] \end{aligned}$$

Dann

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^5} = 0$$

Folgt insbesondere, dass es $c > 0$ gibt so dass für $|x| \geq c$

$$1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{x} + \ldots + \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{x^n} \geq \frac{1}{2}$$

Folglich ist:

$$q(c) \geq c^n \frac{1}{2} > 0$$

$(n = \text{ungerade})$ $$q(-c) \leq -c^n \frac{1}{2} < 0$$

Also gibt $x_0 \in [-c, c]$ mit $q(x_0) = 0$

■

2. Eine reelle 3×3 Matrix besitzt immer einen reellen Eigenwert.

Satz 4.21

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, streng monoton wachsend (d.h. $x < y = f(x) < f(y)$). Dann ist

$$\text{Bild}(f) = [c, d] = [f(a), f(b)]$$

$f : [a, b] \to [c, d]$ ist bijektiv und $f^{-1} : [c, d] \to [a, b]$ ist stetig.

Beweis

1. f streng monoton wachsend, d.h. falls $x \neq y$, dann ist $f(x) \neq f(y) \Rightarrow f$ Injektive.

   Zwischenwertsatz $\Rightarrow f$ surjektiv. $c = f(a) < f(b) = d$, Sei $y \in [c, d]$, ZWS $\Rightarrow \exists x \in (a, b)$ mit $f(x) = y \Rightarrow$ ist bijektiv.

2. f^{-1} ist stetig: Sei $y \in [c, d]$ und sei $(y_0) \in [c, d]$ eine Folge mit $\lim y_n = y_0$. f bijektiv, $\exists x_n$, $x_0 = f^{-1}(y_0)$, (x_n) beschränkt. Sei $f^{-1}\left(y_{l(n)}\right)$ eine beliebige konvergente Teilfolge und x deren Grenzwert

$$\lim f^{-1}\left(y_{l(n)}\right) = x$$

$$f \text{ stetig } \Rightarrow \lim f\left(f^{-1}\left(y_{l(n)}\right)\right) = f\left(f^{-1}\left(y_{l(n)}\right)\right) = f(x)$$

aber

$$\lim f\left(f^{-1}\left(y_{l(n)}\right)\right) = \lim y_{l(n)}$$

$\Rightarrow$ $\lim y_{l(n)} = f(x)$, y_n ist aber auch konvergent

$\Rightarrow$ $\lim y_{(n)} = f(x)$, aber $\lim y_n = y_0$

$\Rightarrow$ $y_0 = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y_0) = x_0$

$\Rightarrow$ Jede Teilfolge von (x_0) hat denselben Häufungspunkt x_0.

$\Rightarrow$ $\limsup x_n = x_0 = \liminf x_n$, also $\lim f^{-1}(y_n) = \lim x_n = x_0 = f^{-1}(y_0) \Rightarrow f$ stetig

■

Korollar 4.22

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend mit monotonem Limes

$$-\infty < c := \lim_{x \downarrow a} f(x) < \lim_{x \uparrow b} f(x) =: d < \infty$$

dann ist $f : (a, b) \to (c, d)$ bijektiv und f^{-1} ist stetig.

Korollar 4.22

Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Potenzfunktion $f(x) = x^n$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. Sie ist auf $(0, \infty)$ streng monoton wachsend mit Bild $(0, \infty)$. Die Umkehrfunktion

$$\begin{aligned}(0, \infty) &\to (0, \infty)\\ x &\to \sqrt[n]{x}\end{aligned}$$

ist stetig.

Beweis

$$y^n - x^n = (y - x)\underbrace{\left(y^{n-1} + y^{n-2}x + \ldots x^{n-1}\right)}_{>0}$$

Für $0 < x, y < \infty$, $y^{n-1} + y^{n-2}x + \ldots x^{n-1} > 0$. Also folgt $x < y \Rightarrow x^n < y^n$, d.h. f streng monoton wachsend

■

Satz 4.23

Die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig, streng monoton wachsend mit

$$\text{Bild}(\exp) = \exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$$

Definition 4.24
Die Umkehrfunktion von $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ wird mit $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ bezeichnet

Dann

Korollar 4.25

$\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ hat folgende Eigenschaften

1. ist strikt monoton wachsend und stetig
2. $\log(1) = 0$
3. $\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$

Beweis Satz 4.23

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots$$

ist absolut konvergent auf ganz $\mathbb{R}$

1. $$\exp(x) = \exp\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left(\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \geq 0$$

2. Falls $x \geq 0$, ist
$$\exp(x) > 1 > 0 \qquad (\exp(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0)$$

3. Wegen
$$\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} \neq 0$$
$$\exp(x) > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$
d.h.
$$\exp(\mathbb{R}) \subset (0, \infty)$$

4. $$\exp(y) - \exp(x) = \exp(x)\left[\exp(y - x) - 1\right]$$
Falls $x < y$, so ist $\exp(y - x) > 1$ und somit $\exp(y) > \exp(x)$ (da $\exp(x) > 0$), d.h. exp ist streng monoton wachsend.

5. Zur Stetigkeit: Sei $x = x_0 + h$, $0 < h < 1$
$$\exp(x) - \exp(x_0) = \exp(x_0)(\exp(h) - 1)$$
da
$$|\exp(h) - 1| = \overset{\to 0}{\left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^k}{k!}\right|} \leq \overset{h \to 0}{\left|\sum_{k=1}^{\infty} \left|h^k\right|\right|} = \frac{|h|}{1 - |h|} \to 0$$
Also für $x = x_0 + h \to x_0$, $\exp(x) - (x_0) \to 0$ und die Funktion exp ist stetig
$$\exp(x) \to \infty \,(x \to \infty) \text{ und } \exp(x) \to 0 \,(x \to -\infty)$$

do 3 and 4 belong together?? in your notes you gave number 3 to two different ones, page 166 bottom

■

$$\begin{aligned}
\exp(\log(x)) &= x \\
\exp(\log(x)+\log(y)) &= \exp(\log(x))\cdot\exp(\log(x)) \\
&= xy
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\log(x)+\log(y)=\log(xy)}$$

4.6 Gleichmässige Stetigkeit

Sei $f:\Omega\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf Ω, d.h.

$$\forall x_0\in\Omega, \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall x\in\mathbb{R}: |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

Die logische Negation, f ist *nicht* stetig auf Ω:

$$\exists x_0\in\Omega, \exists\varepsilon>0, \forall\delta>0, \exists x\in\Omega: |x-x_0|<\delta \text{ und } |f(x)-f(x_0)|\geq\varepsilon$$

Definition 4.24

Gleichmässig stetig:

$f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ heisst gleichmässig stetig, falls für jedes $\varepsilon>0$ es ein $\delta>0$ gibt, so dass $\forall x, x_0\in\Omega$

$$\|x-x_0\|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

Stetig:

$\forall x_0\in\omega$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta_{x_0,\varepsilon}>0$, $\forall x\in\Omega$:

$$|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

Gleichmässig stetig:

$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta_\varepsilon>0$, $\forall x, x_0\in\Omega$:

$$|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

Stetig: δ ist abhängig von ε und x_0.
Gleichmässig stetig: δ ist abhängig von ε, aber *unabhängig* von x_0.

Beispiel 4.25

I) $\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ist nicht gleichmässig stetig

$$|\exp(x)-\exp(x_0)| = |\exp(x-x_0)-1|\exp(x_0)$$

Falls $x-x_0=\pm\delta$, $\delta\neq 0$ und $x_0\to\infty$ dann gilt

$$|\exp(x)-\exp(x_0)|\to\infty$$

II)

$$\begin{aligned} f(x) : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2x+5 \end{aligned}$$

Dann ist f gleichmässig stetig.

Beweis

Sei $\varepsilon > 0$, $x_0, x \in \mathbb{R}$. Dann

$$|f(x) - f(x_0)| = |2x + 5 - 2x_0 + 5| = 2|x - x_0|$$

$\Rightarrow$ Wenn wir $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ wählen, dann

$$|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

■

III)

$$\begin{aligned} f : \Omega &\to \Omega \qquad \Omega = (0, \infty) \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

f ist stetig, aber nicht gleichmässig stetig.

i) f stetig: Sei $x_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|x^2 - x_0^2\right| = |(x - x_0)(x + x_0)|$$

Sei $|x - x_0| < \delta < 1$. Dann, $x < x_0 + 1 := a$. Dann $x, x_0 + 1 < a$

$$\left|x^2 - x_0^2\right| = |x - x_0||x + x_0| < 2a|x - x_0|$$

Wenn wir $\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2a}\right)$ wählen, dann

$$\left|x - x_0^2\right| < 2a|x - x_a| \leq \varepsilon$$

Bemerkung δ ist abhängig von ε, und a ist $x_0 + 1$, abhängig von x_0.

ii) f ist nicht gleichmässig stetig, d.h.

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x_0 \in \Omega, \exists x \in \Omega : |x - x_0| < \delta \text{ und } \left|x^2 - x_0^2\right| \geq \varepsilon$$

Sei $\varepsilon = 1$, $\delta > 0$, $x_0 = \frac{1}{\delta}$ und $x = x_0 + \frac{\delta}{2}$. Dann $|x - x_0| < \frac{\delta}{2} < \delta$ aber

$$\left|x^2 - x_0^2\right| = \left|\left(\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right)^2 - \frac{1}{\delta^2}\right| = 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1 = \varepsilon$$

IV)

$$\begin{aligned} f : \Omega &\to \Omega \qquad \Omega = [0, 4] \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

Dann ist f gleichmässig stetig.

Beweis

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Sei $x_0, x \in \Omega = [0,4]$, $0 \leq x, x_0 \leq 4 \Rightarrow 0 \leq x + x_0 \leq 8$

$$\begin{aligned} |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| &= \left|x^2 - x_0^2\right| \\ &= |x - x_0||x + x_0| \leq (4+4)\,\delta \end{aligned}$$

Sei $\delta = \frac{\varepsilon}{8}$, dann

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

■

V)

$$\begin{aligned} f : (0,\infty) &\to (0,\infty) \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

ist gleichmässig stetig auf $(0,\infty)$

Beweis

Ask for beweis! page 172 bottom

This thread has a pretty decent one: Matheplanet Thread

■

Wir haben gesehen, dass

$$\begin{aligned} f : (0,\infty) &\to (0,\infty) \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

nicht gleichmässig stetig ist, aber auch, dass

$$\begin{aligned} f : [0,4] &\to [0,4] \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

gleichmässig stetig ist. Was ist der Unterschied? $[0,4]$ ist kompakt, $(0,\infty)$ nicht.

Satz 4.26

Sei $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann ist f gleichmässig stetig.

Beweis (Indirekt)

Sonst gibt es $\varepsilon > 0$, so dass für jedes $\delta > 0$ Punkte $x, y \in k$ gibt mit

$$\|x - y\| < \delta \qquad |f(x) - f(y)| > \varepsilon$$

Sei $\forall k \geq 1$, mit $\delta = \frac{1}{k}$, ein Paar (x_k, y_k) gewählt, so dass

$$|x_k - y_k| < \frac{1}{k} \text{ und } |f(x_k) - f(y_k)| > \varepsilon$$

Da k kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge $x_{l(k)} \to z$. Aus $|x_k - y_k| < \frac{1}{k}$ folgt dass $y_{l(k)} \to z$. Sei nun k_0 so dass

$$\underbrace{\left\|f\left(x_{l(k_0)}\right) - f(z)\right\|}_{f \text{ stetig}} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall k > k_0$$

Dann folgt $\forall k > k_0$:

$$\left\|f\left(y_{l(k_0)}\right) - f(z)\right\| \geq \left|\underbrace{f\left(y_{l(k)}\right) - f\left(x_{l(k)}\right)}_{>\varepsilon}\right| - \left|\underbrace{f\left(x_{l(k)}\right) - f(z)}_{<\varepsilon/2}\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

■

4.7 Punktweise und Gleichmässige Konvergenz

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $f, f_k : \Omega \to \mathbb{R}^n$

Definition 4.28

$(f_k)_{k\geq 1}$ konvergiert punktweise gegen f, falls $\forall x \in \Omega$

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$$

$\forall x \in \Omega$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists k_{\varepsilon,x}$ s.d. $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$, $\forall k > k_{\varepsilon,x}$. Es stellt sich die Frage, ob f stetig ist, falls alle $(f_k)_{k\geq 1}$ stetig sind.

Beispiel 4.30

Sei $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_k(x) = x^k$, $k \geq 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 \leq x < 1 &: \lim_{k\to\infty} x^k = 0 \\ x = 1 &: \lim_{x\to\infty} x^k = 1 \end{aligned}$$

Also konvergiert (f_k) punktweise gegen

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

Insbesondere ist $f(x)$ nicht stetig.

Beispiel

$$f_n(x) = \frac{nx^2+1}{nx+1}, \Omega = [0,1]$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nx^2+1}{nx+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2+\frac{1}{n}}{x+\frac{1}{n}} = \frac{x^2}{x} = x$$

$f_n(x) \to f(x) = x$ und $f(x) = x$ ist stetig

$$|f_n(x) - x| = \left|\frac{nx^2+1}{nx+1} - x\right| = \left|\frac{1-x}{nx+1}\right| \le \frac{1+|x|}{|nx+1|} \le \frac{3}{1+n}$$

Da $x \in [1,2]$, $|nx+1| \ge n+1$ und $1+|x| \le 3$

$$\frac{3}{1+n} \le \varepsilon \Rightarrow \frac{3}{\varepsilon} - 1 \le n$$

d.h. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon$ s.d. für $n > N_\varepsilon = \frac{3}{\varepsilon} - 1$

$$|f_n(x) - x| < \varepsilon \qquad \forall x \in [1,2]$$

N_ε hängt nur von ε ab und nicht von $x \in [1,2]$.

Definition 4.29

(f_k) konvergiert gleichmässig gegen f, falls

$$\sup_{x\in\Omega} \|f_k(x) - f(x)\| \to 0, k \to \infty$$

d.h. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists k_\varepsilon$, so dass $\forall k > k_\varepsilon$

$$\forall x \in \Omega : \|f_k(x) - f(x)\| < \varepsilon$$

Beispiel 4.30

Seien $(a_k)_{k\ge 1} \in \mathbb{C}$

$$p(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

mit Konvergenzradius

$$\rho := \frac{1}{\limsup \sqrt[k]{a_k}} \le \infty$$

Sei $\rho > 0$, und $0 \le r < \rho$. Dann konvergiert die Folge

$$p_n(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

gleichmässig auf $\overline{B_r(0)}$ gegen $p(z)$

Beweis

Sei $z \in \overline{B_r(0)}$ und $r < s < \rho$

$$
\begin{aligned}
|p(z) - p_n(z)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k \right| \\
&\underset{z \in \overline{B_r(0)}}{\leq} \sum_{n+1}^{\infty} |a_n| r^k \\
&= \sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k) \left| \frac{r}{s} \right|^k s^k \\
&\overset{(*)}{\leq} \left(\frac{r}{s} \right)^{n+1} \sum_{n+1}^{\infty} |a_k| s^k \\
&\leq \left(\frac{r}{s} \right)^{n+1} C_s
\end{aligned}
$$

wobei

$$
C_s := \sum_{0}^{\infty} |a_k| s^k < \infty
$$

$$
\Rightarrow |p(z) - p_n(z)| \underset{n \to \infty}{\to} 0
$$

mit

$$
(*) \qquad \left| \frac{r}{s} \right| < 1, k > n+1 \Rightarrow \left(\frac{r}{s} \right)^k < \left(\frac{r}{s} \right)^{n+1}
$$

■

Die Bedeutung dieses Konvergenzbegriffs ist

Satz 4.31

Seien $f_k : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig und $f : \Omega \to \mathbb{R}$, so dass f_k gleichmässig gegen f konvergiert. Dann ist f stetig.

Korollar 4.32

Potenzreihen sind stetig im Inneren ihres Konvergenzkreises.

Beweis

Folgt aus Satz 4.31 und Beispiel 4.30

■

Beweis 4.31

Sei $x_0 \in \Omega$, und $(x_n)_{n>1}$ eine Folge in Ω mit Grenzwert x_0. Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen ein k, so dass

$$
\sup_{x \in \Omega} |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon
$$

Da f_k stetig ist, sei nun $N \geq 1$ mit

$$|f_k(x_n) - f_k(x)| \leq \varepsilon \qquad \forall n > N$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\|f(x_n) - f(x_0)\| &= |f(x_n) - f_k(x_n) + f_k(x_n) + f_k(x_0) - f_k(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x_n) - f_k(x_n)| + |f_k(x_n) - f_k(x_0)| + |f_k(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq 3\varepsilon\end{aligned}$$

■

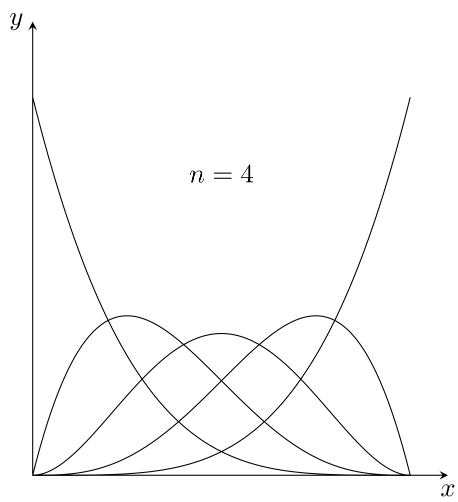
Eine natürliche Frage ist, was sind die “einfachsten” Funktionen, mit denen man alle stetigen Funktionen gleichmässig approximieren kann?
Es gibt einen sehr allgemeines Satz von Stone - Weierstrass, der insbesondere ein Kriterium für Funktionen auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^d$ gibt.

Satz von Weierstrass

Mann kann jede stetige Funktion auf einem kompakten Intervall durch Polynome approximieren.

Ein explizites Approximationsverfahren für auf $[0,1]$ stetige Funktionen mittels Polynomen wurde von S.Bernstein gefunden (1911). Sei

$$B_{i,n}(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}, 0 \leq i \leq n$$



Dieses Polynom bildet ein Basis für den Vektorraum der Polynomen von Grad $= n$. Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, dann ist

$$B_n(f)(x) := \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(x) f\left(\frac{i}{n}\right)$$

Satz (Bernstein)

Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann konvergiert die Folge $B_n(f)(x)_{n\geq 1}$ gleichmässig gegen f.

Can't read word, page 182 middle

Mit den Bernstein-Polynomen kann man eine Bezierkurve $n-$ten Gerades zu gegebenen $n+1$ Bezierpunkten $P_0, \ldots, P_n$ definieren. Die Bezierkurve stellt ein wichtiges Werkzeug in der Vektorgrafik dar..

Seien z.B. $P_0, \ldots, P_n$ $n-$Kontrollpunkte in der Ebene. Dann ist die parametrische Kurve

$$t \to \sum_{i=1}^{n} B_{i,n}(t)\, P_i$$

die Bezierkurve. Diese Kurve liegt immer in der konvexen Hülle des Kontrollpolygons.

Kapitel 5

Differentialrechnung auf $\mathbb{R}$

5.1 Differential (Ableitung), Elementare Eigenschaften

Definition 5.1

Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}$, und $x_0 \in \Omega$

1. f heisst differenzierbar an der Stelle x_0, falls

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Dieser Grenzwert wird dann mit $f'(x_0)$ oder $\frac{df}{dx}(x_0)$ bezeichnet. Die Zahl $f'(x_0)$ heisst die Ableitung oder das Differential von f an der Stelle x_0.

2. f heisst in Ω differenzierbar, falls sie an jeder Stelle $x_0 \in \Omega$ differenzierbar ist. In diesem Fall, nennt sich die Funktion $x \to f'(x)$ Ableitung von f.

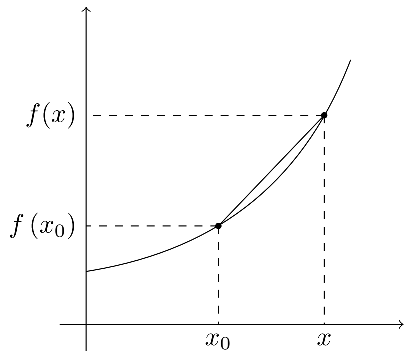
Bemerkung 5.2

In der Definition 5.1 verlangen wir also, dass für jede in $\Omega \backslash \{x_0\}$ enthaltene Folge $(x_n)_{n \geq 1}$ mit Grenzwert x_0, der Limes

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = 0$$

Bemerkung 5.3

Sei f differenzierbar in x_0



Dann ist

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

die Steigung der Geraden durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$.

Geometrisch ist also $f'(x_0)$ die Steigung der Tangenten am Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$. Diese Tangente hat die Gleichung

$$T(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Sei

$$f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) + R_{x_0}(x) = T(x) + R_{x_0}(x)$$
$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} + \frac{R(x)}{x - x_0}$$

Dann folgt

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0$$

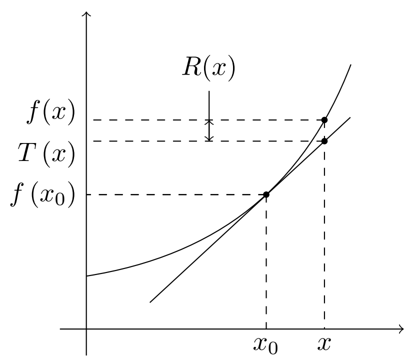
Die lineare Funktion $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ stellt eine gute Approximation der Funktion $f(x)$ dar:

Es gilt

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R_{x_0}(x)$$

mit

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0$$



$$T(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x)$$

Beispiel 5.4

1. $$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to mx + b \end{aligned}$$

   ist überall differenzierbar mit $f'(x) = m$, $\forall x \in \mathbb{R}$

   $$f(x) - f(x_0) = m(x - x_0)$$
   $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} = m$$

2. $f(x) = |x|$ ist für alle $x_0 \neq 0$ differenzierbar, aber nicht für $x_0 = 0$

   $$f(x) - f(0) = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

   Also ist

   $$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} 1 & \text{fur } x > 0 \\ -1 & \text{fur } x < 0 \end{cases}$$

   und besitzt also keinen Grenzwert für $x \to 0$, $x \neq 0$

3. $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist überall auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und $\exp'(x) = \exp(x)$. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq x = x_0 + h \in \mathbb{R}$

   $$\exp(x_0 + h) - \exp(x_0) = \exp(x_0)(\exp(h) - 1)$$
   $$\exp(h) - 1 = h + \frac{h^2}{2!} + \dots$$
   $$\Rightarrow \frac{\exp(h) - 1}{h} = 1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \dots$$

   Also

   $$\begin{aligned} \left| \frac{\exp(h) - 1}{h} - 1 \right| &\leq |h| \left[\frac{1}{2!} + \frac{|h|}{3!} + \frac{|h|^2}{4!} + \dots \right] \\ &\leq |h| \left[1 + |h| + \frac{|h|^2}{2!} + \dots \right] \\ &\leq |h| \exp(h) \end{aligned}$$

   Woraus

   $$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{\exp(h) - 1}{h} = 1$$

   und somit

   $$\begin{aligned} \exp'(x_0) &= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{\exp(x_0 + h) - \exp(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \exp(x_0) \left(\frac{\exp(h) - 1}{h} \right) \\ &= \exp(x_0) \end{aligned}$$

   folgt

4. $\sin(x)$ und $\cos(x)$ sind überall differenzierbar und

$$\begin{aligned}\sin' &= \cos\\ \cos' &= -\sin\end{aligned}$$

Mit den Additionsgesetzen:

$$\begin{aligned}\sin(x+h)-\sin(x) &= \sin(x)\cos(h)+\cos(x)\sin(h)-\sin(x)\\ &= \sin(x)(\cos(h)-1)+\cos(x)\sin(h)\end{aligned}$$

Nun ist

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}=1$$

und

$$\begin{aligned}\frac{\cos(h)-1}{h} &= \frac{\cos^2(h)-1}{h(\cos(h)+1)}=\frac{\sin^2(h)}{h(\cos(h)+1)}\\ &= \underset{\frac{1}{2}}{\underset{\downarrow}{\frac{1}{\cos(h)+1}}}\cdot\underset{0}{\underset{\downarrow}{\frac{\sin^2(h)}{h}}}\end{aligned}$$

There is a sin h/h which doesn't seem to belong anywhere, page 188 bottom right corner

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} &= \sin(x)\left(\frac{\cos(h)-1}{h}\right)+\cos(x)\frac{\sin(h)}{h}\\ \Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} &= \lim\left(\sin(x)\lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos(h)-1}{h}\right)\right.\\ &\quad\left.+\cos(x)\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin(h)}{h}\right)\right)\\ &= \sin(x)\lim\left(\frac{\cos(h)-1}{h}\right)\\ &\quad+\cos(x)\lim\left(\frac{\sin(h)}{h}\right)\\ &= (\sin(x))\cdot 0+(\cos(x))\cdot 1=\cos(x)\end{aligned}$$

Analog

$$\begin{aligned}\cos(x+h)-\cos(x) &= \cos(x)\cos(h)-\sin(x)\sin(h)-\cos(x)\\ &= \cos(x)(\cos(h)-1)+\sin(x)\sin(h)\end{aligned}$$

Da wie oben $\frac{\cos(h)-1}{h}\to 0$, $\frac{\sin(h)}{(h)}\to 1$, folgt $\cos'=-\sin$

Der Zusammenhang zwischen Differenzierbarkeit und Sstetigkeit ist:

Satz 5.5

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \Omega$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar. Dann ist f in x_0 stetig. (Also ist "Differenzierbarkeit" ist mehr als "Stetigkeit")

Beweis

f differenzierbar in x_0. Sei

$$\begin{aligned} T : \Omega \setminus \{x_0\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

Da f differenzierbar in x_0 ist, hat T ein Grenzwert in x_0, und

$$\lim_{x \to x_0} T(x) = f'(x)$$

Für $x \neq x_0$

$$f(x) = T(x)(x - x_0) + f(x_0)$$

$f(x)$ ist die Summe von zwei Funktionen $T(x)(x - x_0)$ und $f(x_0) =$ konstant.

Da beide Funktionen einen Grenzwert an der Stelle x_0 besitzen, hat auch f einen Grenzwert in x_0 und

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} f(x) &= \lim_{x \to x_0} (T(x)) \lim_{x \to x_0} (x - x_0) + \lim_{x \to x_0} f(x_0) \\ &= f'(x) \cdot 0 + f(x_0) = f(x_0) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ ist stetig in x_0.

$\blacksquare$

Bemerkung

Die Umkehrung von Satz 5.5 (s. 101) gilt nicht, z.B. $f(x) = |x|$ ist stetig in $x = 0$ aber nicht differenzierbar.

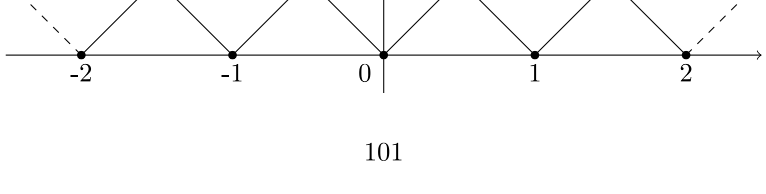
Beispiel 5.6

Das folgende Beispiel zeigt, dass es stetige Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, die an keiner Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar sind. (Von der Waerden (1930))

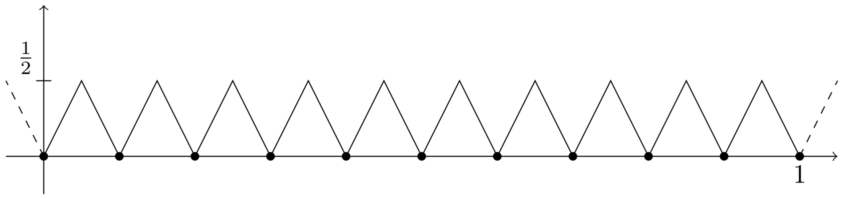
Sei für $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} < x > &= \text{Distanz von } x \text{ zur nächsten ganzen Zahl} \\ &= \min \{|x - m| : m \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

Der Graph von $< x >$ sieht so aus



Graph von $\frac{10x}{10}$



Sei

$$f(x) := < x > + \frac{< 10x >}{10} + \frac{< 10^2 x >}{100} + \dots$$

Da

$$0 \leq < 10^n x > \leq \frac{1}{2}$$

folgt absolute Konvergenz. Ausserdem sei

$$f_k(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{< 10^n x >}{10^n}$$

Dann ist

$$|f(x) - f_k(x)| = \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{< 10^n x >}{10^n} \right| \leq \frac{1}{2} \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{10^n} \right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{10^{-k}}{9}$$

$\forall k \geq 1$ ist $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig.

Da die Folge $(f_k)_{k \geq 1}$ gleichmässig gegen f konvergiert, ist f stetig. Man kann zeigen, dass f in keinem Punkt von $\mathbb{R}$ differenzierbar ist.

End of beweis is put here, I think it is better if it stays up when the bsp begins. Page 192 middle

Satz 5.7

Seien $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ Funktionen, $x_0 \in \mathbb{R}$. Wir nehmen an, dass f und g in x_0 differenzierbar sind. Dann sind $f + g$, $f \cdot g$ und falls $g(x_0) \neq 0$ auch f/gan der Stelle x_0 differenzierbar. Es gelten dann folgende Formeln:

Is this supposed to be a fraction?? page 192 bottom; limenet: yes, function f over function g

1. $(af + bg)'(x_0) = af'(x_0) + bf'(x_0) \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}$
2. $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
3. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

Beweis

1. Für $x \neq x_0$

   $$\frac{(af + bg)(x) - (af + bg)(x_0)}{x - x_0} = a\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right) + b\left(\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right)$$

   Da f und g in x_0 differenzierbar sind, folgt, dass $af + bg$ in x_0 differenzierbar ist und

   $$(af + bg)(x_0) = af'(x_0) + bf'(x_0)$$

2.
$$f(x)\,g(x) - f(x_0)\,g(x_0) = g(x)\,[f(x) - f(x_0)] + f(x_0)\,[g(x) - g(x_0)]$$

Durch $(x - x_0)$ dividiert

$$\begin{aligned}\frac{f(x)\,g(x) - f(x_0)\,g(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} \cdot g(x_0) \\ &+ \frac{g(x) - g(x_0)}{(x - x_0)} \cdot f(x_0)\end{aligned}$$

Da g in x_0 differenzierbar ist, ist g in x_0 stetig und (Satz 5.5, s. 101)

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$$

Die Formel folgt dann aus der Differenzierbarkeit von f und g in x_0

3.
$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} &= \frac{f(x)\,g(x_0) - f(x_0)\,g(x)}{g(x)\,g(x_0)} \\ &= \frac{[f(x) - f(x_0)]\,g(x_0) - f(x_0)\,[g(x) - g(x_0)]}{g(x)\,g(x_0)}\end{aligned}$$

Man dividiere duch $x - x_0$ und benutze die Stetigkeit von g in x_0

■

Beispiel 5.8

1. $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = x^n$ ist überall differenzierbar und $f_n'(x) = nx^{n-1}$

Beweis

Induktion: $f_0(x) = 1\ \forall x$

$$f_0'(x) = 0 \left(= 0 \cdot x^{-1}\right)$$

- $f_1(x) = x$, $\forall x$
- $f_1'(x) = 1 = 1 \cdot x^{1-1}$ ✓

Sei $n \geq 2$. Wir nehmen an, dass die Formel für $n-1$ gilt, i.e.

$$\begin{aligned}f_{n-1}'(x) &= \left(x^{n-1}\right)' = (n-1)\,x^{n-2} \\ f_n(x) &= x^n = x \cdot x^{n-1} = x \cdot f_{n-1}(x)\end{aligned}$$

Nach 2., Satz 5.7 (s. 102)

$$\begin{aligned}f_n'(x) &= (x)'\,f_{n-1}(x) + x f_{n-1}'(x) \\ &= f_{n-1}(x) + x\,(n-1)\,x^{n-2} \\ &= x^{n-1} + (n-1)\,x^{n-1} = nx^{n-1}\end{aligned}$$

■

2.
$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$$
$$p'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1)\, a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_1$$

Insbesondere ist die Ableitung eines Polynoms von Grad n ein Polynom von Grad $(n-1)$, $n \geq 1$.

3. Sei $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, wobei p, q Polynome bezeichnen. $R(x)$ ist eine sogenannte rationale Funktion mit Definitionsbereich
$$\Omega = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$$
$$R'(x) = \frac{p'(x)q(x) - p(x)q'(x)}{q^2(x)}$$
z.B.
$$R(x) = \frac{x^3+1}{x-1}$$
$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{\left(3x^2\right)(x-1) - \left(x^3+1\right)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{3x^3 - 3x^2 - x^3 - 1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{2x^3 - 3x^2 - 1}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

Die nächste Rechenregel wird uns erlauben, Funktionen wie z.B. $\exp\left(x^3+1\right)$ und $\sin\left(x^2\right)$ abzuleiten

Satz 5.9 (Kettenregel)

Seien $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $g : T \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(\Omega) \subset T$, und $x_0 \in \Omega$. Wir nehmen an, dass f an der Stelle x_0 und g an der Stelle $f(x_0)$, differenzierbar sind. Dann ist $g \circ f : \Omega \to \mathbb{R}$ an der Stelle x_0 differenzierbar und
$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0)$$

Bemerkung

f ist differenzierbar in x_0, falls
$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
existiert, d.h. für jede in $\Omega \backslash \{x_0\}$ enthaltene Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ mit Grenzwert x_0, existiert der Limes
$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$$

Beweis

Sei $(x_n)_{n\geq 1}$ mit $\lim x_n = x_0$, $x_n \neq x_0$. Dann gilt

$$\lim f(x_n) = f(x_0)$$

(Nach Satz 5.5, s. 101, f differenzierbar $\Rightarrow$ f stetig (in x_0)).

Sei $y_n := f(x_n)$ $(y_0 := f(x_0))$. Wir nehmen an, dass $y_n \neq f(x_0)$, $\forall n$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\frac{(g\circ f)(x_n) - (g\circ f)(x_0)}{x_n - x_0} &= \frac{g(f(x_n)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \\
&= \left(\frac{g(f(x_n)) - g(f(x_0))}{f(x_n) - f(x_0)}\right) \cdot \left(\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x - x_0}\right) \\
&= \underbrace{\left(\frac{g(y_n) - g(x_0)}{y_n - y_0}\right)}_{\downarrow \lim_{n\to\infty} \; g'(y_0)} \cdot \underbrace{\left(\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x - x_0}\right)}_{\downarrow \lim_{n\to\infty} \; f'(x_0)} \\
&\overset{n\to\infty}{=} g'(f(x_0))\, f'(x_0)
\end{aligned}$$

■

Beispiel 5.10

1. Berechne die Ableitung von $\exp\left(x^3+1\right)$

$$\begin{array}{ll} g(x) = \exp(x) & f(x) = x^3 + 1 \\ g'(x) = \exp(x) & f'(x) = 3x^2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} (g\circ f)(x) &= \exp\left(x^3+1\right) \\ (g\circ f)'(x) &= g'(f(x)) \cdot f'(x) = \left[\exp\left(x^3+1\right)\right] \cdot 3x^2 \end{aligned}$$

2. $$\left(\sin\left(x^2\right)\right)' = (g\circ f)'(x)$$

   mit

$$\begin{array}{ll} g(x) = \sin(x) & f(x) = x^2 \\ g'(x) = \cos(x) & f'(x) = 2x \end{array}$$

$$\left(\sin\left(x^2\right)\right)' = \cos\left(x^2\right) \cdot 2x$$

3. $$\left(\left(3x^7 + 11x^6 + 5\right)^2\right)' = 2\left(3x^7 + 11x^6 + 5\right) \cdot \left(21x^6 + 66x^5\right)$$

4. Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $n \in \mathbb{N}$

$$f(x) = g(x)^n$$

   Dann ist

$$f'(x) = ng(x)^{n-1} \cdot g'(x)$$

5.

$$\exp(\exp(x)) = e^{e^x}$$
$$\left(e^{e^x}\right)' = e^{(e^x)} \cdot e^x$$

5.2 Der Mittelwertsatz und Folgerungen

Wichtige Informationen über eine Funktion f lassen sich leicht aus der Ableitung schliessen. Dies geschieht mittels dem Mittelwertsatz . Ein Spezialfalls der Mittelwertsatz ist

Satz 5.12

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Sei $z_+ \in [a, b]$ mit $f(z_+) = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Wir nehmen an, dass $z_+ \in (a, b)$. Dann gilt $f'(z_+) = 0$ Eine analoge Aussage gilt für z_-.

Bemerkung 5.13

1. z_+, z_- existieren nach Satz 4.9
2. Die Voraussetzung $z_+ \in (a, b)$ ist wichtig, z.B. Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Dann ist $z_+ = 1$ und $f'(x) = 1 \neq 0$ $(\forall x \in (a, b))$

Beweis

Sei $z_+ \in (a, b)$. Da $(a, z_+) \neq \varnothing$ und $(z_+, b) \neq \varnothing$, gibt es

$$(x_n)_{n\geq 1} \subset (a, z_+)$$

sowie

$$(y_n)_{n\geq 1} \subset (z_+, b)$$

mit

$$\lim_{n\to\infty} x_n = z_+ = \lim_{n\to\infty} y_n$$

$\left(\text{z.B. } x_n = z_+ - \frac{1}{n}, y_n = z_+ + \frac{1}{n}\right)$

Für $n \geq 1$ folgt

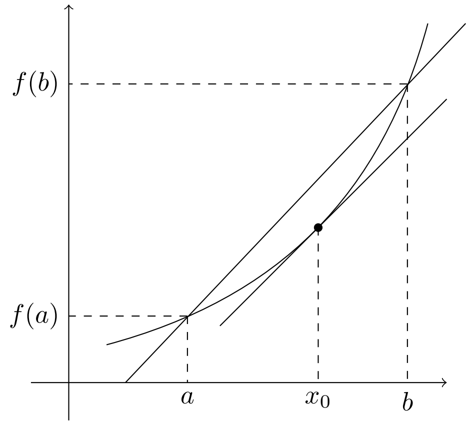
$$f'(z_+) = \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{f(x_n) - f(z_+)}^{<0}}{\underbrace{x_n - z_+}_{<0}} \geq 0$$
$$f(z_+) = \max\{f(x)\}$$
$$f'(z_+) = \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{f(y_n) - f(z_+)}^{<0}}{\underbrace{y_n - z_+}_{>0}} \leq 0$$

Woraus
$$f'(z_+) = 0$$
folgt.

■

Satz 5.14 (Mittelwertsatz)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar, $a \neq b$. Dann gibt es $x_0 \in (a,b)$ mit
$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Beweis

Die Idee lässt sich auf den Fall $f(a) = f(b) = 0$ züruckführen und dann den Satz 5.12 (s. 106) anwenden. Die Gleichung für die Sekante durch die Punkte $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ ist

$$S(x) = (x - a)\left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right) + f(a)$$

Sei nun $g(x) = f(x) - S(x)$. Dann ist $g(a) = 0 = g(b)$

<u>Fall 1:</u> g ist identisch $= 0$. Also ist $f(x) = S(x)$ eine Gerade und die Aussage stimmt $\forall x_0 \in (a,b)$

<u>Fall 2:</u> $g \neq 0$. Also ist entweder

$$\max_x g(x) > 0 \ \left(\text{oder } \min_x g(x) < 0\right)$$

Im "max"-Fall sei z_+ mit

$$g(z_+) = \max\{g(x) : x \in [a,b]\}$$

Dann ist $z_+ \in (a,b)$ (Da $g(a) = g(b) = 0$, und $g(z_+) > 0$) und nach Satz 5.12 (s. 106) $g'(z_+) = 0$, d.h.

$$\begin{aligned} g(z_+) &= f'(z_+) - S'(z_+) = 0 \\ \Rightarrow f'(z_+) &= S'(z_+) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \end{aligned}$$

Der "min"-Fall ist analog.

■

Als erste Anwendung haben wir

Korollar 5.15

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ wie im Satz 5.14 (s. 107)

1. Falls $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a,b)$ folgt, dass f konstant ist.
2. Falls $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in (a,b)$ so ist f monoton wachsend.
3. Falls $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a,b)$ so ist f streng monoton wachsend.
4. Falls $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in (a,b)$ so ist f monoton fallend.
5. Falls $f'(x) < 0$, $\forall x \in (a,b)$ so ist f streng monoton fallend.

Beweis

1. Seien $a \leq x < y \leq b$ beliebig und sei (nach Mittelwertsatz) $x_0 \in (x,y)$ mit

   $$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(x_0)$$

   da $f'(x_0)$ folgt $f(y) = f(x) \Rightarrow f$ ist konstant
2. Seien $a \leq x < y \leq b$ beliebig und $x_0 \in (x,y)$ mit

   $$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(x_0 > 0)$$

   woraus folgt $f(y) \geq f(x)$ folgt $\Rightarrow f$ monoton wachsend.
3. Analog
4. Analog

■

Beispiel 5.16

1. Bestimme alle differenzierbare Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f' = \lambda f$. Offensichtlich erfüllt $t \to e^{\lambda t}$ diese Gleichung

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{\lambda t} \\ f'(t) &= \lambda e^{\lambda t} = \lambda f(t) \end{aligned}$$

   Betrachten wir

$$\begin{aligned} g(t) &= e^{-\lambda t} f(t) \\ g'(t) &= -\lambda e^{-\lambda t} f(t) + e^{-\lambda t} f'(t) \\ &= e^{-\lambda t} \left(-\lambda f(t) + f'(t)\right) \\ &= e^{-\lambda t} (0) \, \forall t \\ &= 0 \end{aligned}$$

   Also folgt, dass g konstant ist, d.h.

$$g(t) = C \Rightarrow f(t) = Ce^{\lambda t}$$

   <u>Anders gesagt:</u> Die Menge der Lösungen von $f' = \lambda f$ ist ein $1-$dimensionaler Vektorraum

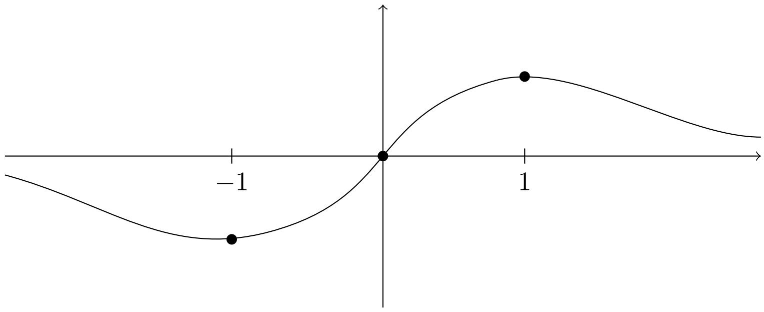
$$V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f' = \lambda f\} = \left\{Ce^{\lambda t} \mid c \in \mathbb{R}\right\}$$

2.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x}{1+x^2} \\ f'(x) &= \frac{2\left(1+x^2\right) - (2x)(2x)}{\left(1+x^2\right)^2} \\ &= \frac{2-2x^2}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &f'(x) < 0 \text{ für } |x| > 1 \\ &f'(\pm 1) = 0 \\ &f'(x) > 0 \text{ für } |x| < 1 \end{aligned}$$

x	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$



Korollar 5.17 (Bernoulli, L'Hôpital)

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar in (a, b) mit $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, b)$. Wir nehmen an, dass

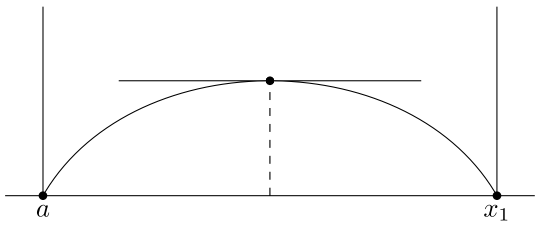
(i) $f(a) = 0 = g(a)$

(ii) $\lim\limits_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$

Dann ist $g(x) \neq 0$, $\forall x > a$ und $\lim\limits_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

Beweis

Falls es $x_1 > a$ gibt mit $g(x_1) = 0$, dann folgt die Existenz von $x_0 \in (a, x_1)$ mit $g'(x_0) = 0$ (MWS.)



Wiederspruch zur Annahme $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, b)$. Also $g(x) \neq 0$, $\forall x > a$. Nun sei $a < s < b$ beliebig, und

$$h(x) := \frac{f(s)}{g(s)} \cdot g(x) - f(x) \qquad x \in [a, s]$$

Dann gilt, $h(a) = 0$ und $h(s) = 0$, es gibt also $x_s \in (a, s)$ mit $h'(x_s) = 0$, d.h.

$$0 = h'(x_s) = \frac{f(s)}{g(s)} \cdot g'(x_s) - f'(x_s)$$

$$(*) \qquad \Rightarrow \frac{f'(x_s)}{g'(x_s)} = \frac{f(s)}{g(s)}$$

Sei nun $s_n \in (a, b)$ beliebig mit $\lim s_n = a$. Da $a < x_{s_n} < s_n$ folgt, $\lim x_{s_n} = a$, und aus $(*)$

$$\lim \frac{f(s_n)}{g(s_n)} = \lim \frac{f'(x_{s_n})}{g'(x_{s_n})} = A$$

$\blacksquare$

Bemerkung 5.18

1. Es gibt die selbe Version für $\lim\limits_{x \nearrow b}$

2. (Limes von links und rechts zusammen). Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Sei $a < c < b$, wir nehmen an, f, g sind in $(a, c) \cup (c, b)$ differenzierbar, $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, c) \cup (c, b)$ und

   (i) $f(c) = g(c) = 0$

   (ii) $\lim\limits_{\substack{x \to c \\ x \neq c}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$

   Dann ist $g(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, c) \cup (c, b)$ und $\lim\limits_{\substack{x \to c \\ x \neq c}} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

Beispiel 5.19

1. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1} = \lim \frac{3x^2}{2x} = \frac{3}{2}$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim \frac{\cos(x)}{1} = 1$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin\left(x^2\right)}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2x \cos\left(x^2\right)}{2x} = \lim\limits_{x \to 0} \cos\left(x^2\right) = 1$

4. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2} = \lim \frac{-\sin(x)}{2x} = -\frac{1}{2}$

5. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\left(e^x-1-x-\frac{x^2}{2!}\right)}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{e^x-1-x}{3x^2}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x-1}{6x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x}{6} = \frac{1}{6}$

Die nächste Anwendung des Mittelwertsatzes ist der sogenannte “Umkehrsatz”

Fundamentale Frage

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und bijektiv und sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die inverse Funktion. Ist dann g auch differenzierbar?

Beispiel

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to x^3 \end{aligned}$$

ist überall differenzierbar und bijektiv. Die “Umkehrfunktion”

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to x^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

ist aber in 0 nicht differenzierbar

$$\frac{g(h) - g(0)}{h} = \frac{h^{\frac{1}{3}}}{h} = h^{-\frac{2}{3}} \to \infty$$

Man kann folgendes bemerken: Falls $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv und die Umkehrfunktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auch differenzierbar ist, dann folgt aus $(f \circ g)(x) = x$, $\forall x$ und der Kettenregel, dass:

$$f'(g(x))\, g'(x) = 1 \qquad \forall x$$

Insbesondere $f'(x) \neq 0$ ($g'(x) \neq 0$), $\forall x$. Dies ist also eine notwendige Bedingung zur Existenz der Ableitung von f^{-1}

Satz 5.20 (Umkehrsatz)

Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a,b)$. Seien $c = \inf_x f(x)$, $d = \sup_x f(x)$. Dann ist $f : (a,b) \to (c,d)$ bijektiv und die Umkehrfunktion $f^{-1} : (c,d) \to (a,b)$ ist differenzierbar mit

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \qquad \forall x \in (a,b)$$

d.h.

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \qquad \forall y \in (c,d)$$

Beweis

Sei $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ streng monoton Wachsend. Da f streng monoton wachsend ist, folgt die erste Behauptung aus dem Zwischenwertsatz für monotone Funktionen (d.h. $f : (a,b) \to (c,d)$ bijektive).

Nun zeigen wir: f^{-1} ist differenzierbar. Sei $y_0 \in (c,d)$, und $(y_k)_{k \geq 1}$ eine Folge in (c,d) lim

$$\lim x_k = y_0 \qquad y_k \neq y_0 \qquad \forall k \geq 1$$

Dann gibt es eindeutig bestimmte $(x_k)_{k \geq 1}$ in (a,b) mit $f(x_k) = y_k$ (f bijektiv) und $x_0 \in (a,b)$ mit $f(x_0) = y_0$. Also ist

$$\frac{f^{-1}(y_k) - f^{-1}(y_0)}{y_k - y_0} = \frac{x_k - x_0}{f(x_k) - f(x_0)}$$

Beachte, dass $x_k \neq x_0$, $\forall k \geq 1$ und dass die Stetigkeit (Satz 4.21) von f^{-1}, $\lim x_k = x_0$ impliziert

$$\begin{pmatrix} f(x_k) = y_k & \Rightarrow & x_k & = & f^{-1}(y_k) \\ & & \lim x_k & = & f^{-1}(\lim y_k) \\ & & & = & f^{-1}(y_0) \\ & & & = & x_0 \end{pmatrix}$$

Nun ist

$$\frac{x_k - x_0}{f(x_k) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x_k) - f(x_0)}{x_k - x_0}} \to \frac{1}{f'(x_0)}$$

da $f'(x_0) \neq 0$

∎

Korollar 5.21

Die Funktion $\log : (0, \infty) \to \mathbb{K}$ ist differenzierbar und $\log'(x) = \frac{1}{x}$, $\forall x \in (0, \infty)$

Beweis

$\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ erfüllt alle Bedingungen von Satz 5.20 (s. 112)($\exp' = \exp > 0$). Wir haben also

$$\begin{aligned} \log\left(\exp\left(x\right)\right) &= x \\ \log' \underbrace{\left(\exp\left(x\right)\right)}_{y} \underbrace{\left(\exp\left(x\right)\right)}_{y} &= 1 \\ \log'\left(y\right) &= \frac{1}{y} \end{aligned}$$

■

Wir definieren mittels "exp" die verallgemeinerte Potenzfunktion $x \to x^\alpha$. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$: zunächst bemerken wir für $n \in \mathbb{N}$ und $x > 0$: $x^n = e^{n \log x}$. Wir definieren also für $x > 0$

$$x^\alpha := e^{\alpha \log x}$$

Dann gilt

Korollar 5.22

$\alpha \in \mathbb{R}$, $x \to x^\alpha$ ist differenzierbar und $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$

Exkurs

Die Exponentialfunktion wächst schneller als jedes Polynom

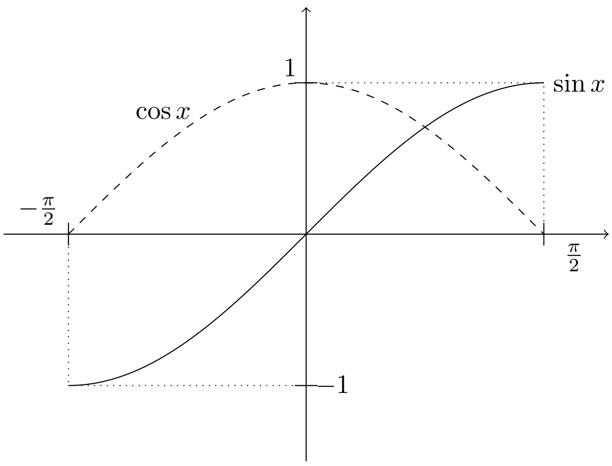
$$e^x > \frac{x^n}{n!} \qquad x \geq 0$$

Insbesondere $e^x > x$, $\forall x \geq 0$. Die log Funktion ist strikt monoton wachsend, Also $e^x > x \Rightarrow x \geq \log(x)$, $\forall x > 0$.

Für $a > 0$, $x^a > \log(x^a) = a \log(x)$. Also $\log(x) < \frac{x^a}{a}$. Die log −Funktion wächst also langsamer als jede positive Potenz.

5.3 Die Trigonometrischen und Hyperbolischen Funktionen

1. $\sin(x)$



$\sin'(x) = \cos(x)$; d.h. $\sin'(x) > 0$, $\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ und besitzt daher eine differenzierbare Umkehrfunktion

$$\arcsin : (-1, 1) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

deren Ableitung wie folgt berechnet wird

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

Falls $\alpha = \arcsin(x)$, $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. So ist

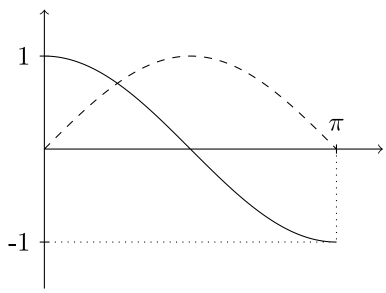
$$\begin{aligned} \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) &= 1 \\ \cos^2(\alpha) + x^2 &= 1 \end{aligned}$$

d.h. $\cos^2(\alpha) = 1 - x^2$. Da nun $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ folgt aus $\cos(\alpha) > 0 \Rightarrow \cos(\alpha) = \sqrt{1 - x^2}$. Daraus ergibt sich

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Analog haben wir

2. cos, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$



$$\cos : (0, \pi) \to (-1, 1)$$

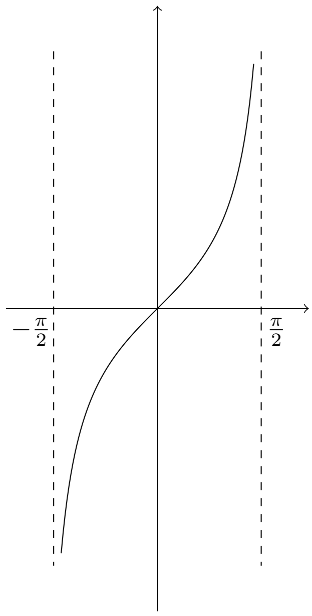
bijektiv und

$$\arccos : (-1, 1) \to (0, \pi)$$

ist die inverse Funktion und

$$\arccos' (x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

3. $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$



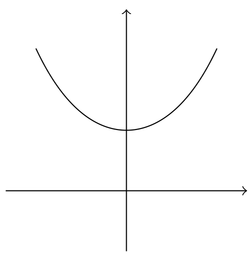
$$\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

und

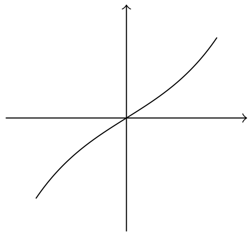
$$\arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

4. Hyperbelfunktionen

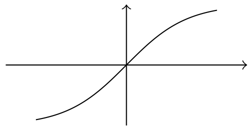
$$\cosh (x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



$$\tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$



Dann ist $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv und differenzierbar mit $\sinh'(x) = \cosh(x)$ und somit monotone steigend und $\operatorname{arcsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Inverse

- $\cosh : [0, \infty) \to [1, \infty)$ bijektiv.
  Inverse: $\operatorname{arccosh} : (1, \infty) \to (0, \infty)$
- $\tanh : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ ist bijektiv.
  Inverse: $\operatorname{arctanh} : (-1, 1) \to \mathbb{R}$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \sinh'(x) &= \cosh(x) \\ \cosh'(x) &= \sinh(x) \\ \tanh'(x) &= \frac{1}{\cosh^2(x)} \end{aligned}$$

mit der Beziehung $\cosh^2 + \sinh^2 + 1$ folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{arcsinh}'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ \operatorname{arccosh}'(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \\ \operatorname{arctanh}'(x) &= \frac{1}{1-x^2} \end{aligned}$$

5.4 Funktionen der Klasse C^m

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ differenzierbar

Definition 5.23
$f : \Omega \to \mathbb{R}$ heisst C^1 (von der Klasse C^1), falls f auf Ω differenzierbar ist und $x \to f'(x)$ auf Ω stetig ist.

Notation: $C^1(\Omega)$ = Vektorraum der auf Ω C^1-Funktionen

Beispiel 5.24

1. $\exp, \cos, \sin, \text{Polynom} \in C^1(\mathbb{R})$

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

In 0:

Is this “In 0” or “ln 0”(Nat. Log), page 223 bottom

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h} = h \sin\left(\frac{1}{h}\right)$$

$$\lim_{h \to 0} h \sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0$$

Also $f'(0) = 0$, f ist differenzierbar in $x_0 = 0$. Aber f' ist in 0 nicht stetig. Für $x_n = \frac{1}{n\pi}$ ist

$$f'(x_n) = \frac{2 \sin(n\pi)}{n\pi} + (-1)^{n+1} = (-1)^{n+1}$$

$\lim x_n = 0$, $\lim f'(x_n)$ (insbesondere $\neq f'(0)$) nicht existiert.

Wir haben einen Konvergenzbegriff auf $C^0(\Omega)$ gesehen: Gleichmässige Konvergenz

$$f_n \overset{\text{glm.}}{\to} f \text{ falls } \sup_{x \in \Omega} \|f_n - f\| \to 0$$

Falls alle f_n stetig sind, folgt, dass f stetig ist. Für $C^1(\Omega)$ haben wir

Satz 5.26

Sei $(f_n)_{n \geq 1}$ eine Folge in $C^1(\Omega)$. Wir nehmen an, dass $f_n \overset{\text{glm.}}{\to} f$ und $f_n' \overset{\text{glm.}}{\to} g$. Dann gilt $f \in C^1(\Omega)$ und $g = f'$

Beweis

Da $f_n \overset{\text{glm.}}{\to} f$ und $f_n' \overset{\text{glm.}}{\to} g$, sind f und g stetig
Zu Zeigen: f ist differenzierbar und $f' = g$.

Seien $x \neq x_0$ in Ω. Aus $f_n \overset{\text{glm.}}{\to} f$ folgt, $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ und $\lim_{n \to \infty} f_n(x_0) = f(x_0)$

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - g(x_0) \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} - g(x_0) \right|$$

Mittelwertsatz: $\exists \xi_n$ zwischen x und x_0, so dass

$$\frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} = f_n'(\xi_n)$$

Nun

$$\begin{aligned}\left|f_n'(\xi_n) - g(x_0)\right| &\le \left|f_n'(\xi_n) - g(\xi_n)\right| + \left|g(\xi_n) - g(x_0)\right| \\ &\le \underbrace{\sup_{\xi\in\Omega} \left|f_n'(\xi) - g(\xi)\right|}_{\downarrow \text{ Da } f_n' \to g \atop 0} + \underbrace{\left|g(\xi_n) - g(x_0)\right|}_{\downarrow \ \text{falls } x\to x_0 \ (\xi_n\to x_0) \atop 0 \ (\text{Stet. von } g)}\end{aligned}$$

Folglich

$$\lim_{x\to x_0}\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - g(x_0)\right| = 0 \Rightarrow f' = g$$

■

Beispiel 5.28

Die gleichmässige Konvergenz von $f_n' \to g$ ist notwendig: Sei

$$f_n(x) = \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + x^2}, x \in (-1,1)$$

Behauptung

$f_n(x) \overset{\text{glm.}}{\to} f = |x|$ für $|x| < 1$

Beweis

$$\begin{aligned}\left|f_n(x) - |x|\right| &= \left|\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + x^2} - |x|\right| \\ &= \left|\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + x^2} - |x|\right| \cdot \frac{\left|\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + x^2} + |x|\right|}{\left|\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + x^2} + |x|\right|} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + x^2 - (|x|)^2}{\left|\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + x^2} + |x|\right|} = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left|\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + x^2} + |x|\right|} \le \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left(\frac{1}{n}\right)} \overset{n\to\infty}{\to} 0\end{aligned}$$

d.h. $f_n(x) \overset{\text{glm.}}{\to} |x|$
<u>Nun:</u>$|x|$ ist stetig aber nicht differenzierbar

$$f_n'(x) = \frac{x}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + |x|^2}} \underset{n\to\infty}{\to} \begin{cases} \frac{x}{|x|} & x \ne 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x > 1 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 1 \end{cases}$$

$f_n'(x) \to g(x)$ konvergiert nicht gleichmässig (g nicht stetig in $x = 0$)

■

Eine sehr wichtige Anwendung von Satz 5.26 (s. 117) ist auf die Eigenschaften von Funktionen, die Summe von Potenzreihen sind. Sei $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}$. Wir nehmen an

$$\rho := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} > 0$$

Satz 5.29

Sei $x \in (-\rho, \rho) = \Omega$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

die Summe der absolut konvergenten Potenzreihe. Dann ist $f \in C^1(\Omega)$ und

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

mit dem selben Konvergenzradius

Beweis

Sei

$$f_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Sei $0 < r < \rho$. Dann gilt, $\forall x \in (-r, r)$:

$$|f_k(x) - f(x)| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} |a_n| r^n \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

Also $f_k \to f$ gleichmässig auf $(-r, r)$. Da

$$\begin{aligned} \limsup \sqrt[n]{|n a_n|} &= \limsup \left(\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{|a_n|} \right) \\ \left(\text{Da } \lim \sqrt[n]{n} = 1\right) &= \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \rho \end{aligned}$$

konvergiert

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} =: g(x)$$

absolut $\forall x \in (-\rho, \rho)$. Nun ist

$$f'_k(x) = \sum_{n=0}^{k} n a_n x^{n-1}$$

und es folgt wie oben $f'_n(x) \overset{\text{glm.}}{\to} g$. Nach Satz 5.26 (s. 117) folgt, dass f, g stetig und $g = f'$, auf $(-\rho, \rho)$.

■

Beispiel 5.30

1.

$$
\begin{aligned}
\exp(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \\
\exp'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x)
\end{aligned}
$$

2.

$$
f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \qquad |x| < 1
$$

Daraus folgt

$$
\sum_{k=0}^{\infty} k x^{k-1} \quad \underset{\substack{\downarrow \\ \text{eine} \\ \text{nicht} \\ \text{WHAT} \\ \text{Identität}}}{=} \quad \frac{1}{(1-x)^2}
$$

Can't understand word, page 230 very bottom

3.

$$
\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \cdot x^{n-2}, \qquad |x| < 1
$$

Definition 5.31

1. $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ist $m-$mal differenzierbar, falls $\underbrace{\left((f')' \dots\right)'}_{m-\text{mal}}$ existiert. Die $m-$te iterierte Ableitung wird mit

$$
f^{(m)} = \frac{\partial^m f}{\partial x^m} : \Omega \to \mathbb{R}
$$

bezeichnet. Es gilt: $\forall k, l \geq 0,\ f^{(k+l)} = \left(f^{(k)}\right)^{(l)}$

2. f ist in $C^m(\Omega)$, falls f $m-$mal differenzierbar ist, und alle Funktionen $f = f^{(0)}, f', f^{(2)}, \dots, f^{(m)}$ sind stetig

3. f ist in $C^\infty(\Omega)$, falls $f \in C^m(\Omega)$, $\forall m \geq 0$

Korollar 5.32

Unter den Voraussetzungen von Satz 5.29 ist $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ in $C^\infty(-\rho, \rho)$ Add reference
und die Ableitungen von f erhält man durch gliedweises differenzieren.

Formel

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, x \in (-\rho, \rho) \\
f'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n \\
&\vdots \\
f^{(k)}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n) \cdot (n-1) \dots (n-k+1) \cdot x^{n-k} \\
&\boxed{f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}}
\end{aligned}
$$

5.5 Taylorformel

Wir beginnen, als Motivation, mit Polynomen. Sei

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

ein Polynom, grad $P \leq n$. Durch $x = (x-a) + a$ und Umordnen nach Potenzen von $(x-a)$ erhalten wir

$$p(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \dots + b_n(x-a)^n$$

Beispiel

$p(x) = x^3 + x + 1$. Sei $a = 1$:

$$
\begin{aligned}
p(x) &= ((x-1)+1)^3 + (x-1) + 1 + 1 \\
&= (x-1)^3 + 3(x-1)^2 + (x-1) + 1 + (x-1) + 2 \\
&= (x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 4(x-1) + 3
\end{aligned}
$$

Wir bestimmen jetzt die Koeffizienten b:

$$
\begin{aligned}
p(a) &= b_0 \\
p'(x) &= b_1 + 2b_2(x-a) + \dots + nb_n(x-a) \Rightarrow p'(a) = b_1 \\
p''(x) &= 2b_2 + 6b_3(x-a) + \dots + n(n-1)(x-a)^{n-2} \Rightarrow p''(a) = 2b_2
\end{aligned}
$$

Rekursiv: $p^{(j)}(a) = j! b_j$ mit der Konvention $b_j = 0$ für $j \geq n+1$ da $p^{(n+1)} = 0$.
Es folgt:

$$p(x) = p(a) + p'(a)(x-a) + \frac{p''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Beispiel

$$\begin{aligned} p(x) &= x^3 + x + 1 & p(1) &= 3 \\ p'(x) &= 3x^2 + 1 & p'(1) &= 4 \\ p''(x) &= 6x & p''(1) &= 6, \frac{p''(1)}{2!} = 3 \\ p'''(x) &= 6 & p'''(1) &= 6, \frac{p'''(1)}{3!} = 1 \end{aligned}$$

$$p(x) = 3 + 4(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3$$

Folgendes ist dann naheliegend

Satz 5.33

Sei $[a,b] \subset \Omega \subset \mathbb{R}$ und $f \in C^{m-1}(\Omega)$, $m-$mal differenzierbar auf Ω. Dann gibt es $c \in (a,b)$:

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \dots + f^{m-1}(a)\frac{(b-a)^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{f^m(c)}{m!}(b-a)^m$$

Beweis

Wir betrachten die Funktion

$$g(x) = f(x) + f'(x)(b-x) + \dots + \frac{f^{m-1}(x)(b-x)^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{K(b-x)^m}{m!} - f(b)$$

die auf Ω differenzierbar ist. Dann ist $g(b) = 0$. Wähle K so dass $g(a) = 0$. Dann gibt es $c \in (a,b)$ mit $g'(c) = 0$. Wir berechnen jetzt $g'(x)$:

$$g'(x) = f'(x) + \dots \left(\frac{f^{(j)}(x)(b-x)^j}{j!}\right)' + \dots + K\frac{m(b-x)^{m-1}}{m!}$$

Nun ist

$$\left(\frac{f^{(j)}(x)(b-x)^j}{j!}\right)' = \frac{f^{(j)}(b-x)^{j-1}}{(j-1)!}(-1) + \frac{f^{(j+1)}(x)(b-x)^j}{j!}$$

Woraus folgt:

$$\begin{aligned} g'(x) =& f'(x) \\ &+ \left\{-f'(x) + \frac{f^{(2)}(x)(b-x)}{1!}\right\} \\ &+ \left\{-\frac{f^{(2)}(x)(b-x)}{1!} + \frac{f^{(3)}(x)(b-x)^2}{2!}\right\} \\ &\vdots \\ &+ \left\{-\frac{f^{(m-1)}(x)(b-x)^{(m-2)}}{(m-2)!} + \frac{f^{(m)}(x)(b-x)^{m-1}}{(m-1)!}\right\} \\ &- K\frac{(b-x)^{m-1}}{(m-1)!} \end{aligned}$$

Also:

$$g'(x) = \left[f^{(m)}(x) - K\right] \frac{(b-x)^{m-1}}{(m-1)!}$$

Aus $g'(c) = 0$ folgt $\boxed{f^m(c) = K}$ und $g(a) = 0$ nimmt folgende Form an:

$$g(a) = 0 = f(a) + f'(a)(b-a) + \cdots + \frac{f^{m-1}(c)(b-a)^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{f^m(c)}{m!}(b-a)^m - f(b)$$

■

Korollar 5.34

Sei $f : (c,d) \to \mathbb{R}$ $m-$mal differenzierbar, seien $x_0, x \in (c,d)$. Dann gibt es $\xi \in (x_0, x)$ mit

$$\begin{aligned} f(x) =& f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \\ &\vdots \\ &+ f^{m-1}(x_0)\frac{(x-x_0)^{m-1}}{(m-1)!} \\ &+ \frac{f^m(\xi)(x-x_0)^m}{m!} \end{aligned}$$

Wir führen folgende Terminologie ein:

$$T_m f(x; x_0) = f(x_0) + \cdots + f^{(m)}(x_0)\frac{(x-x_0)^m}{m!}$$

ist das Taylor Polynom $n-$ter Ordnung. ($f \in C^m$) und

$$R_m f(x; x_0) := f(x) - T_m f(x; x_0)$$

ist der Restterm.

Falls $f(m+1)-$mal differenzierbar in Ω ist, so ist

$$R_m f(x; x_0) = f^{(m+1)}(\xi)\frac{(x-x_0)^{m+1}}{(m+1)!}, \xi \in (x_0, x_0)$$

Bemerkung

Bei der Differenzierbarkeit haben wir gesehen, dass die lineare Funktion $f'(a) + f'(a)(x-a)$ im folgenden Sinne eine gute Approximation der Funktion $f(x)$ darstellt: Es gilt

$$f(x) = f(c) + f'(a)(x-a) + R_1 f(x; a) = T_1 f(x; a) + R_1 f(x; a)$$

und

$$\lim_{x \to a} \frac{R_1 f(x; a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a) \right) = 0$$

Die Taylorformel gibt nun an, wie mann diese Approximation noch verbessern kann.

$$f(x) = \underbrace{T_m f(x;a)}_{\text{Approximation}} + \underbrace{R_m f(x;a)}_{\text{fehler}}$$

Für diesen Fehler gilt:

$$(*) \qquad \lim_{x \to a} \frac{R_m f(x;a)}{(x-a)^m} = 0$$

Das bedeutet, dass wenn x nahe bei a ist, $R_m f(x;a)$ klein ist im Vergleich zu der schon sehr kleinen Grösse $(x-a)^m$.

$$f(x) = f(a) + \cdots + \frac{f^{m-1}(a)(x-a)^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{f^m(\xi)(x-a)^m}{(m)!}$$

$$f(x) + \frac{f^m(a)(x-a)^m}{(m)!} = T_m f(x;a) + \frac{f^m(\xi)(x-a)^m}{(m)!}$$
$$\Rightarrow f(x) - T_m f(x;a) = \frac{f^m(\xi) - f^m(a)}{m!}(x-a)^m$$

Für den Restterm $R_m f(x;a)$, haben wir somit die Abschätzung

$$R_m f(x;a) = f(x) - T_m f(x;a) = [f^m(\xi) - f^m(a)] \frac{(x-a)^m}{m!}$$

$$|R_m f(x;a)| < \sup_{a<\xi<x} \left| f^{(m)}(\xi) - f^m(a) \right| \frac{(x-a)^m}{m!}$$

Falls $f \in C^{m+1}$, können wir denn Mittelwertsatz anwenden. Dann folgt:

$$|R_m f(x;a)| \leq \left(\sup_{a<\xi<x} \left| f^{(m+1}(\xi) \right| \right) |x-a| \frac{(x-a)^m}{m!}$$
$$\leq M \frac{(x-a)^{m+1}}{m!}$$
$$\Rightarrow \left| \frac{R_m f(x-a)}{(x-a)^m} \right| \to 0, x \to a$$

Beispiel 5.35

$$\begin{array}{rr}
f(x) = \sin(x) & x_0 = 0 \\
f'(x) = \cos(x) & f'(0) = 1 \\
f''(x) = -\sin(x) & f''(0) = 0 \\
f'''(x) = -\cos(x) & f'''(0) = -1 \\
f^4(x) = \sin(x) & f^4(0) = 0 \\
f^5(x) = \cos(x) & {}^5(0) = 1
\end{array}$$

Also

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{\cos(\xi)}{5!}x^5 \\
T_1(x) &= x = T_2(x) \\
T_3(x) &= x - \frac{x^3}{3} = T_4(x)
\end{aligned}$$

Insbesondere

$$\left|\sin(x) - x + \frac{x^3}{3}\right| \leq \frac{x^5}{5!}$$

liefert für ein kleines $|x|$ eine sehr gute Approximation von, zum Beispiel, $x = \frac{1}{10}$

$$\left|\sin\left(\frac{1}{10}\right) - \frac{1}{10} + \frac{1}{1000}\right| < \frac{1}{10^5 \cdot 5!}$$

$$\sin\left(\frac{1}{10}\right) \approx \frac{1}{10} - \frac{1}{1000} = 0.1 - 0.001 = 0.099$$

Lokale Extrema

Wir haben den folgenden Satz schon gesehen:

Satz 5.12

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Sei $z_+ \in (a, b)$ mit $f(z_+) = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Dann gilt $f'(z_+) = 0$

Mittels Taylorformel können wir lokale Extrema (Maxima und Minima) diskutieren.

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, $f : \Omega \to \mathbb{R}, x_0 \in \Omega$

Definition 5.38

1. $x_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}$ heisst lokale Maximalstelle (bzw. Minimalstelle) von f, falls es $r > 0$ gibt s.d. $\forall x \in B_r(x_0)$, $f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$, $\forall x \in B_r(x_0)$).
2. Die lokale Minimalstelle (bzw. Maximalstelle) heisst *strikt*, falls $f(x) > f(x_0)$ (bzw. $f(x) < f(x_0)$)
3. Eine lokale Extremalstelle ist entweder lokale Minimalstelle oder Maximalstelle.

Falls f an einer lokalen Minimalstelle x_0 differenzierbar ist, so folgt wie im Beweis von Satz 5.12 Maybe add a reference?

$$0 \leq \lim_{x \downarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Also $f'(x_0) = 0$. Allgemein gilt:

Satz 5.39

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $f \in C^\infty(\Omega)$, $x_0 \in \Omega$. Dann tritt einer der folgenden Fälle ein

1. $f^j(x_0) = 0, \forall j \geq 1$
2. $m := 1 + \max\left\{j : f^i(x_0) = 0, 1 \leq i \leq j\right\} < +\infty$, d.h. $f^m(x_0) \neq 0$, und $f^{(1)}(x_0) = 0 = f^{(2)}(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) =$

Chopped content, page 244 top

(2.1) m ist ungerade, dann ist x_0 kein Extremalstelle.

(2.2) m ist gerade und $f^m(x_0) > 0$, dann ist x_0 eine strikte lokale Minimalstelle

(2.3) m ist gerade und $f^m(x_0) < 0$, dann ist x_0 eine strikte lokale Maximalstelle

Beweis

Falls (1.) nicht eintritt, so tritt (2.) ein. Also sei

$$f^{(1)}(x_0) = f^{(2)}(x_0) = \cdots = f^{(m-1)}(x_0) = 0 \text{ und } f^{(m)}(x_0) \neq 0$$

Jetzt wenden wir Taylorformel an

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{m-1}(x_0)}{m!}(x - x_0)^m + \frac{f^m(\xi)}{m!}(x - x_0)^m$$

für ein $\xi \in (x, x_0)$. Aus $f'(_0) = \cdots = f^{m-1}(x_0) = 0$ folgt

$$f(x) = f(x_0) + f^m(\xi)\frac{(x - x_0)^m}{m!}, \xi \in (x, x_0)$$

(2.1) m ist ungerade: Falls f an yx_0 ein lokales Minimum hat, so folgt

$$f^m(x_0) \overset{f^m \text{ stetig}}{=} \lim_{\xi \to x_0} f^m(\xi) = \lim_{\xi \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^m} \cdot m!$$

Da m ungerade ist

$$\begin{array}{l} (x - x_0)^m > 0, x > x_0 \\ (x - x_0)^m < 0, x < x_0 \end{array} = \begin{cases} \lim\limits_{x \downarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^m} \cdot m! & \geq 0 \\ \lim\limits_{x \uparrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^m} \cdot m! & \leq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f^m(x_0) = 0$. Widerspruch zur $f^m(x_0) \neq 0$. Analog für x_0 lokale Maximalstelle

(2.2) Falls m gerade ist, und $f^m(x_0) > 0$ dann folgt aus

$$0 < f^m(x_0) = \lim_{\xi \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^m} \cdot m!$$

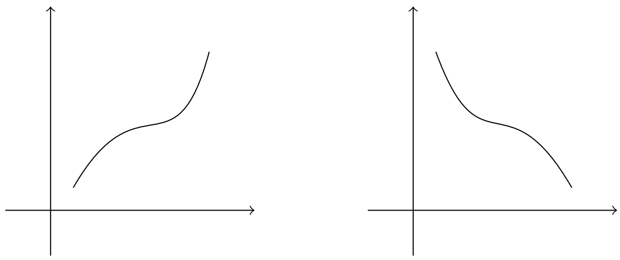
dass für $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$, $x \neq x_0$, $f(x) - f(x_0) > 0 \Rightarrow f(x) > f(x_0)$, x_0 ein lokales Minimum.

(2.3) m ist gerade, $f^m(x_0) < 0$, analog.

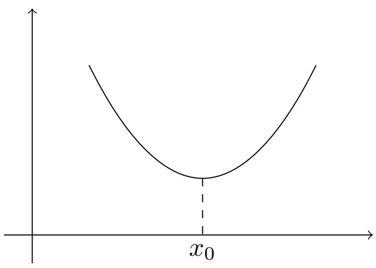
∎

Graphen

(2.1) $m = 3$



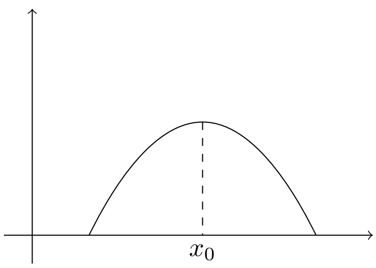
(2.2) $m = 2$



$$f(x) = (x - x_0)^2 + c$$
$$f'(x) = 2(x - x_0)$$
$$f''(x) = 2 > 0$$

$f''(x_0) > 0$

(2.3) $m = 2$



$$f(x) = 1 - (x - x_0)^2$$
$$f'(x) = 2(x_0 - x)$$
$$f''(x) = -2 < 0$$

$f''(x_0) < 0$

Für m ungerade ≥ 3 spricht man von einem Wendepunkt.

Beispiel 5.40

1. Der Fall (1.) tritt man ein z.B. $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, $x \in \mathbb{R}$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ C^∞ und $f^{(j)}(0) = 0$, $\forall j \geq 1$

2.

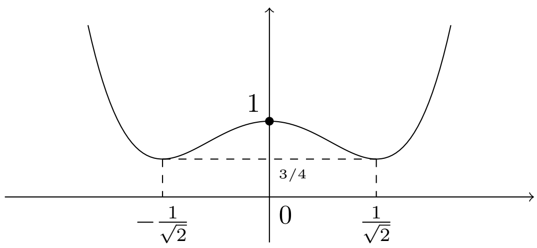
$$f(x) = x^4 - x^2 + 1 \qquad f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4}$$

$$f'(x) = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right\}$$

$$f''(x) = 12x^2 - 2$$

$$f'''(0) = -2 < 0 \Rightarrow x_0 = 0 \text{ Lokale Maximalstelle}$$

$$f''''\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4 > 0 \Rightarrow x_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ Lokale Minimalstelle}$$



3. Minimierungseigenschaft des arithmetischen Mittels:
Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Wir suchen $x_0 \in \mathbb{R}$, so dass

$$f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} (x_0 - a_i)^2$$

minimal ist. Sei

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (x - a_i)^2 = nx^2 - 2Ax + B$$

wobei

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad B = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

$f(x) \to \infty$ für $|x| \to \infty$. Also gibt es $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0) = \min f$. Sei x_0 eine solche. Dann folgt $f'(x_0) = 0$ d.h.

$$\sum_{i=1}^{n} 2(x_0 - a_i) = 0 = 2\sum_{i=1}^{n} x_j - \sum_{i=1}^{n} a_i$$

d.h.

$$nx_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i \Rightarrow x_0 = \frac{1}{n}\sum a_i$$

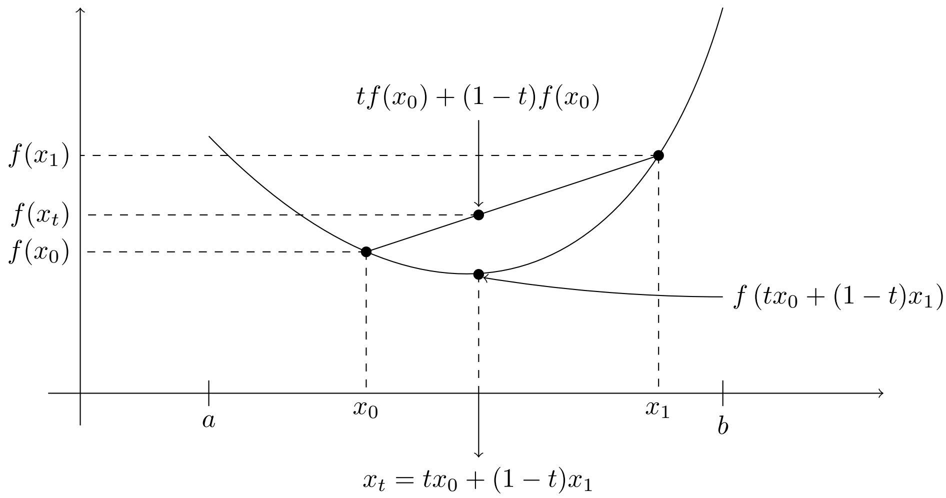
Nun ist $f''(x) = 2n > 0$, folglich ist $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = x_0$ die gesuchte Minimalstelle.

Konvexe Funtionen

Eine einfache und geometrische Eigenschaften einer Funktion ist Konvexität: Für C^2 Funktionen kann Konvexität mittels der zweiten Ableitung getestet werden

Definition 5.41
$f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ist konvex, falls $\forall x_0 \leq x_1$ und $t \in [0, 1]$

$$f\left(tx_0 + (1-t)x_1\right) \leq tf(x_0) + (1-t)f(x_1)$$



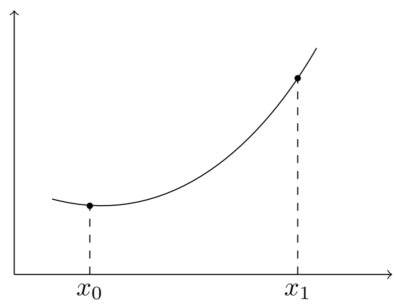
Der Graph der Funktion f liegt unterhalb jeder Verbindungsstrecke zweier seiner Punkte.

Satz 5.42

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ der Klasse C^2, mit $f''(x_0) \geq 0, \forall x \in (a, b)$. Dann ist f konvex.

Beweis

Seien $x_0 < x_1$ in (a, b)



Wir betrachten

$$\begin{aligned} g &: [0,1] \to \mathbb{R} \\ &t \mapsto f\left(tx_0 + (1-t)x_1\right) = tf(x_0) - (1-t)f(x_1) \end{aligned}$$

Dann gilt $g(0) = g(1) = 0$ und

$$g''(t) = f\left(tx_0 + (1-t)x_1\right)(x_0 - x_1)^2 \geq 0$$

(Wir möchten beweisen, dass $g \leq 0$). Falls es t gibt mit $g(t) > 0$, dann ist $\max\limits_{t\in[0,1]} g(t) > 0$

Sei t_0 so dass

$$g(t_0) = \max_{t\in[0,1]} g(t) > 0$$

Offensichtlich ist $g'(t_0) = 0$. Nun betrachten wir die lineare Taylor entwicklung von g im Punkte t_0, es gibt $\xi \in (t_0, 1)$ mit

$$0 = g(1) = g(t_0) + g'(t_0)(1-t_0) + \frac{\overbrace{g''(\xi)}^{>0}\overbrace{(1-t_0)}^{>0}}{2!} \geq g(t_0) > 0$$

Ein Wiederspruch. Also ist $g(t) < 0$, $\forall t \in [0,1]$ und f ist konvex

■

Beispiel 5.43

1. exp ist konvex in $\mathbb{R}$, $f''(x) = \exp x > 0$
2. $f(x) = -\ln x$, $x > 0$. $f'(x) = -\frac{1}{x}$, $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$
3. $f(x) = x\ln x$, $x > 0$. $f'(x) = \ln x + 1$, $f''(x) = \frac{1}{x}$
4. $f(x) = x^\alpha$, $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ $x > 0$. $f''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} > 0 \Leftrightarrow \alpha > 1$

Satz 5.44

Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ konvex. Für alle $x_1, \dots, x_n \in (a,b)$ und $t_1, \dots, t_n \in [0,1]$ mit $\sum\limits_{i=1}^n t_i = 1$ gilt

$$f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(x_i)$$

Korollar 5.45

Seien $x_1, \dots, x_n \in (0,\infty)$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0,1]$ mit $\sum \alpha_i = 1$. Dann gilt

$$\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$$

Insbesondere $\left(\alpha_i = \frac{1}{n}, i \leq r \leq n\right)$

$$\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$$

Add as an appendix or something page 253.1

Beweis

Die Funktion exp ist konvex. Nun schreiben wir

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} &= \prod_{i=1}^{n} \exp(\alpha_i \ln x_i) \\ &= \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ln x_i\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \exp\left(\ln x_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\end{aligned}$$

■

Beweis 5.44

Induktion über $n \geq 1$.

- Für $n = 1$ steht $f(1 \cdot x_1) \leq 1 \cdot f(x_1)$ ✓
- Für $n = 2$ ist es die Definition der Konvexität.
- Sei nun $n \geq 3$. Wir können annehmen dass $t_1 \neq 1$. (Ansonsten sind alle $t_1 = 0$, $\forall i \geq 2$ und die Ungleichung ist trivial). Nun schreiben wir

$$\sum_{k=1}^{n} t_k x_k = t_1 x_1 + (1 - t_1) \cdot \left(\frac{\sum\limits_{k=2}^{n} t_k x_k}{1 - t_1} \right)$$

Aus Konvexität folgt dann

$$f\left(\sum t_k x_k\right) \leq t_1 f(x_1) + (1 - t_1) \cdot f\left(\sum_{k=2}^{n} \frac{t_k x_k}{1 - t_1}\right)$$

Nun sind $x_2, x_3, \ldots, x_n$, $(n-1)$ Punkte. Die Koeffizienten $\frac{t_2}{1-t_1}, \frac{t_3}{1-t_1}, \ldots, \frac{t_n}{1-t_1}$ sind alle ≥ 0, und deren Summe

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{t_k}{1 - t_1} = \frac{1}{1 - t_1} \sum_{k=2}^{n} t_k = \frac{1 - t_1}{1 - t_1} = 1$$

Jetzt kann man die Induktionsannahme anwenden

$$
\begin{aligned}
f\left(\sum_{k=1}^{n} t_k x_k\right) &\leq t_1 f(x_1) + (1-t_1)\cdot f\left(\sum_{k=2}^{n} \frac{t_k}{1-t_1} x_k\right) \\
&\leq t_1 f(x_1) + (1-t_1)\cdot \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{t_k}{1-t_1}\right)\cdot f(x_k) \\
&= t_1 f(x_1) + \sum_{k=2}^{n} t_k f(x_k)
\end{aligned}
$$

■

Appendix A: Vergleich von arithmetischen und geometrischen Mittel

Arithmetic Geometric Mean (AGM)
$n = 2:$

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 \cdot x_2}$$
$$\Rightarrow 2(x_1 + x_2) \geq 4\sqrt{x_1 \cdot x_2}$$

Ein Rechteck mit dem Seiten x_1 und x_2 hat den Gesamtumfang $2x_1 + 2x_2$. Ein Quadrat mit dem gleichen Flächeninhalt hat den Umfang $4\sqrt{x_1 \cdot x_2}$

AGM sagt, dass unter allen Rechtecken mit gleichem Inhalt $A = x_1 \cdot x_2$, das Quadrat den kleinsten Umfang hat.

Kapitel 6

Integration

I) a) Gegeben sei eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Gesucht ist eine differenzierbare Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit

$$F'(t) = f(t), \forall t \in [a, b]$$

b) Für Naturwissenschaft und Technik ist die folgende Verallgemeinerung von a) wichtig:
Sei $f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben. Gesucht ist eine differenzierbare Funktion $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)), t \in [a, b]$$

Man nennt ein solches φ eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = f(x, y)$$

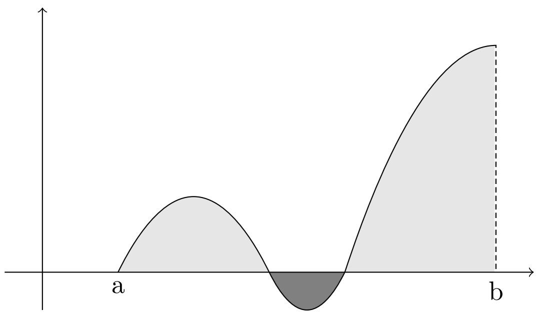
II) Viele in den Natur- und Ingenieurwissenschaften auftretenden Grössen benötigen zu ihrer exakten Definition einen Grenzprozess der folgenden Art:
Wirkt eine konstante Kraft f längs eines Weges der Länge s, und zwar längs der x-Achse vom Punkt a bis zum Punkt $b := a + s$, so versteht man unter der von der konstanten Kraft f geleisteten Arbeit das Produkt f$\times s$ =f$(b - a)$.
Ist die Kraft f jedoch örtlich variabel, d.h. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist eine Funktion des Ortes $x \in [a, b]$, so wird man folgendermassen vorgehen:

Zerlege das Intervall $[a, b]$ in kleine Teilintervalle $I_1, \ldots, I_n$. Wähle in jedem Intervall $I_k := [x_{k-1}, x_k]$ einen Punkt ξ aus. Man wird dann die "Riemannsche Summe"

$$A \sim \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

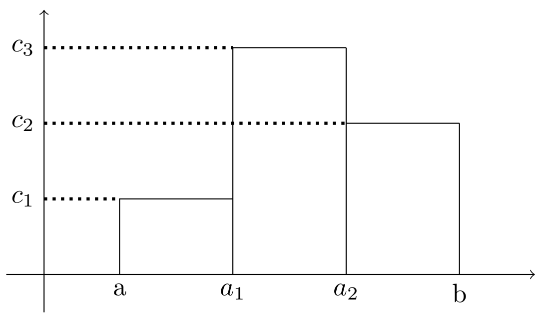
als Näherung für die gesuchte Arbeit A ansehen. Hierzu wird man insbesondere dann berechtigt sein, wenn man mit jeder genügend feinen Zerlegung des Intervalls I, einem festen Wert A beliebig nahe kommt.

III) Sei $f : [a, b] \to [0, \infty)$ eine (stetige) Funktion. Gesucht ist eine vernünftige Definition des Flächeninhalts A des Gebietes zwischen der x-Achse und dem Graphen von f

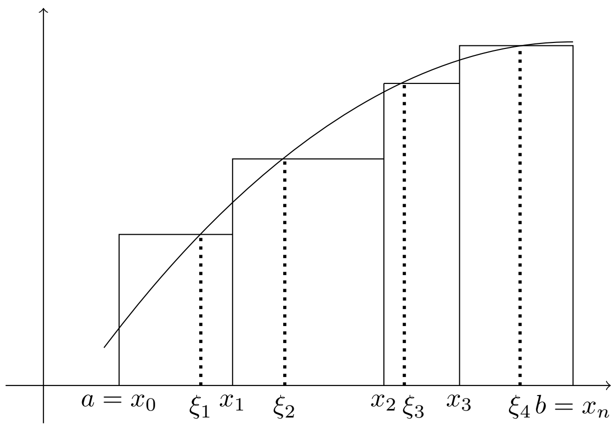


Dies ist sehr einfach, wenn die Funktion f überall den konstanten Wert $f(x) = c$ hat für eine feste reelle Zahl $c \in \mathbb{R}$. In diesem Fall ist die Fläche unter dem Graphen von f ein Rechteck und wir definieren dessen Flächeninhalt einfach als Breite mal Höhe, also das Produkt $A = (b - a)c$. Man beachte, dass die Zahl c auch negativ sein darf und dann ist auch A negativ.

Eine einfache Formel ergibt sich auch für eine Funktion, die sich aus konstanten Funktionen auf endlich vielen Teilintervalle von $[a, b]$ zusammensetzen lässt.



Für allgemeine beschränkte Funktionen kann man nun wie in II) vorgehen.



Wir wählen eine Aufteilung (Zerlegung, Einteilung, Partition) des Intervalls $I = [a, b]$ in endlich viele Teilintervalle.

Aus jedem dieser Teilintervalle I_k ersetzen wir f durch eine Funktion die auf diesem Teilintervall konstant ist und in einem noch zu klärenden Sinn nicht allzu stark von f abweicht. Dann bilden wir die Summe der Flächeninhalte der auf diese Weise erhaltenen Rechtecke. Diese Summe ist als Näherungswert für die gewünschte Fläche zu verstehen.

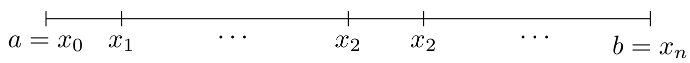
Um den genauen Wert der Fläche festzulegen, bilden wir immer feinere Zerlegungen des Intervalls. Es ist dann das Grenzwertverhalten dieser Summen zu untersuchen.

6.1 Riemann Integral: Definition, elementare Eigenschaften

1. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.

Definition 6.1

Eine Partition (oder Zerlegung, Einteilung, Unterteilung) eines Intervalls $[a, b]$ ist eine endliche Menge $P = \{a = x_0, x_1 \ldots, x_n = b\}$
$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$
$P(I) := \{P \subset I \mid a, b \in P, P \text{ ist endlich}\}$ die Menge alle Partitionen



Die Feinheit der Zerlegung P ist dabei definiert durch

$$\delta(P) := max(x_i - x_{i-1}), 1 \leq i \leq n$$

d.h. $\delta(P)$ ist die Länge des grössten Teilintervalls $I_i := [x_i, x_{i-1}], k = i, \ldots, n$

2. Wahl ξ_i von Zwischenpunkten $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i, 1 \leq i \leq n$.
   Jede Summe der Form

$$S(f, P, \xi) := \sum_{T=i}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

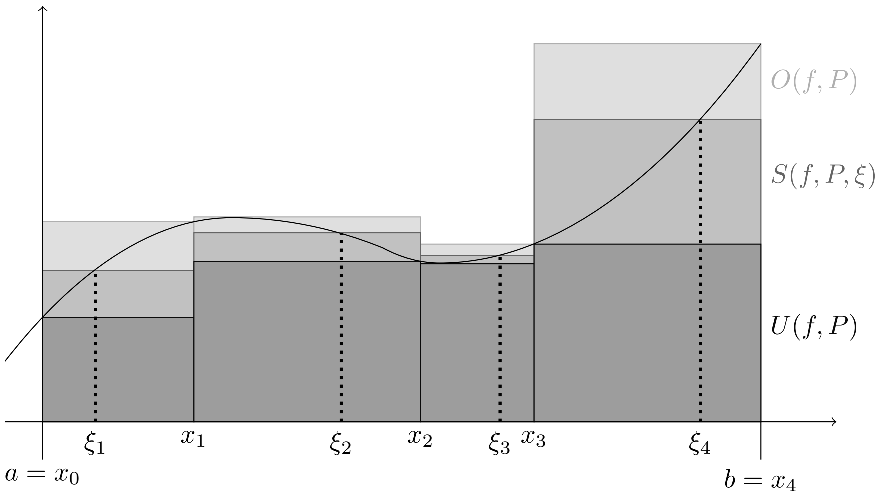
   nennt man eine **Riemannsche Summe** der Zerlegung P und ξ.
   Die Summe

$$U(f, P) := \sum_{i=1}^{n} (\inf_{[x_i, x_{i-1}]} f)(x_i - x_{i-1})$$

   nennt man die **Untersumme** von $f(x)$ zur Zerlegung P, und

$$O(f, P) := \sum_{i=1}^{n} f(\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f)(x_i - x_{i-1})$$

   nennt man die **Obersumme** von $f(x)$ zur Zerlegung P.



Bemerkung 6.2

Aus den Definitionen folgt direkt

a) Für eine feste Zerlegung P gilt stets $U(f, P) \leq S(f, P, \xi) \leq O(f, P)$

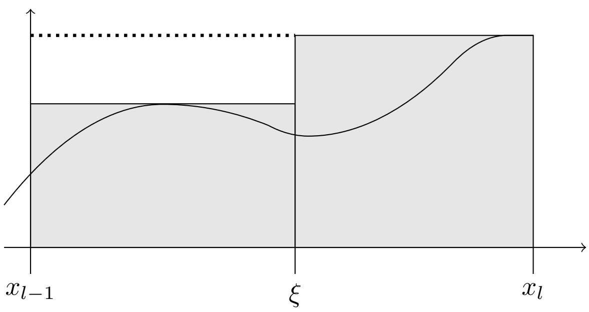
b) Für zwei Partitionen $P, Q \in P(I)$ gilt die Ungleichung $P \subset Q \Rightarrow U(f, P) \leq U(f, Q) \leq O(f, Q) \leq O(f, P)$.

Beweis

Um dies zu verstehen, ist es nützlich, den Fall zu betrachten, dass die Zerlegung Q genau einen Punkt mehr enthält als P.

Sei $P = \{x_0, \ldots, x_N\}$ und $Q = P \cup \{\xi\}$, wobei ξ ein neuer Unterteilungspunkt, also nicht gleich einem der Elemente von P ist. Dann gibt es genau ein $l \in \{1, \ldots, N\}$, so dass $x_{l-1} < \xi < x_l$ ist. Damit erhält man

$$(\sup_{[x_{l-1},\xi]} f)(\xi - x_{l-1}) + (\sup_{[\xi,x_l]} f)(x_l - \xi) \leq (\sup_{[x_{l-1},x_l]} f)(x_l - x_{l-1})$$



Addiert man dazu alle Summanden in

$$O(f,P) = \sum_i (\sup_{[x_{i-1},x_i]} f)(x_i - x_{i-1})$$

mit $i \neq l$ so ergibt sich die Ungleichung

$$O(f,Q) \leq O(f,P)$$

Ebenso beweist man $U(f,Q) \geq U(f,P)$. Damit ist b) für den Fall bewiesen, dass Q genau ein Element mehr als P enthält. Der allgemeine Fall lässt sich hierauf leicht durch vollständige Induktion zurückführen.

Lemma 6.3

Sei $f : I := [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann gilt

$$\sup_{P \in P(I)} U(f,P) \leq \inf_{P \in P(I)} O(f,P)$$

Beweis

Aus

$$P \subset Q \Rightarrow U(f,P) \leq U(f,Q) \leq O(f,Q) \leq O(f,P)$$

folgt, dass die Zahl $O(f,Q)$ für jede Partition $Q \in P(I)$ eine obere Schranke für die Menge $\{U(f,P) \mid P \in P(I)\}$ ist. Also folgt aus der Definition des Supremums als kleinste obere Schranke, dass $\sup_{P \in P(I)} U(f,P) \leq O(f,Q)$ ist.

Diese Ungleichung gilt für jede Partition $Q \in P(I)$. Das heisst wiederum, dass die Zahl $\sup\limits_{P \in P(I)} U(f,P)$ eine untere Schranke für die Menge $\{O(f,Q) \mid Q \in P(I)\}$ ist.

Also folgt aus der Definition der Infimums als grösste untere Schranke, dass die Gleichung $\sup\limits_{P \in P(I)} U(f,P) \leq \inf\limits_{Q \in P(I)} O(f,Q)$ ist. Damit ist Lemma 6.3 bewiesen.

Definition 6.4

1) Für beschränktes $f = [a,b] \to \mathbb{R}$ bezeichnen

$$\int_{\underline{a}}^{b} f dx = \sup\{U(f,P) : P \in P(I)\}$$

$$\int_{a}^{\bar{b}} f dx = \inf\{O(f,P) : P \in P(I)\}$$

das untere und obere Integral von f.

2) Ein solches f heisst über $[a,b]$ Riemann-integrierbar falls

$$\int_{\underline{a}}^{b} f dx = \int_{a}^{\bar{b}} f dx$$

In diesem Fall heisst $A = \int_a^b f dx$ das Riemann-Integral von f über das Intervall $[a,b]$

Beispiel 6.5

1) Sei $c \in \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ die konstante Funktion mit dem Wert c, das heisst $f(x) = c, \forall x \in I$. Dann gilt

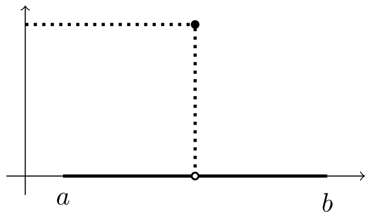
$$U(f,P) = O(f,P) = (b-a)c, \forall P \in P(I)$$

$\Rightarrow$ f ist Riemann integrierbar und

$$\int_a^b f dx = \int_a^b c dx = c(b-a)$$

In diesem einfachen Fall stimmt unsere Definition mit der Interpretation des Flächeninhalts als Breite mal Höhe überein. Man beachte, dass die Konstante c auch negativ sein darf.

2) $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ für } x \neq x_0 \\ 1 \text{ für } x = x_0 \end{cases} \quad x_0 \in [a, b]$



Dann ist f integrierbar mit

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

denn es gilt $U(f, P) = 0$ und $0 < O(f, P) \leq 2\delta(P), \forall P$.

$O(f, P)$ kann durch geeignete Wahl der Partition beliebig klein gewählt werden. z.B. $P_n = \{a, a + \frac{(b-a)}{n}, \ldots, b\} \Rightarrow \delta(P) = \frac{b-a}{n}, \inf_{P \in P(I)} O(f, P) = 0$

3) $f(x) := \begin{cases} 1 \text{ für } x \in [a, b] \setminus Q \\ 0 \text{ für } x \in [a, b] \cap Q \end{cases}$

Dann gilt $U(f, P) = 0$ und $O(f, P) = 1, \forall P \in P(I)$
$\Rightarrow f$ ist nicht integrierbar. (f ist beschränkt aber nicht integrierbar)

Satz 6.6 (Riemannsches Kriterium für Integrierbarkeit)

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent

(a) $f(x)$ ist Riemann-integrierbar über $[a, b]$

(b) Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine Partition $Q \in P(I)$ mit

$$O(f, Q) - U(f, Q) \leq \varepsilon$$

Beweis

(a)$\Rightarrow$(b) Sei f Riemann integrierbar, $A := \int_a^b f(x)dx = \sup U(f, P) = \inf O(f, P)$
Nach Definition von sup und inf folgt, dass zwei Partitionen $P_1, P_2 \in P(I)$ existieren, so dass

(i) $A - \frac{\varepsilon}{2} < U(f, P_1)$
(ii) $O(f, P_2) < A + \frac{\varepsilon}{2}$
(iii) $U(f, P_1) \leq U(f, Q) < O(f, Q) \leq O(f, P_2)$

Definiere $Q := P_1 \cup P_2$. Dann ist $P_1 \subset Q$ und $P_2 \subset Q$.
Nach Bemerkung 6.2b) folgt

$$\begin{aligned}(i),(ii),(iii) &\Rightarrow A - \frac{\varepsilon}{2} < U(f,Q) \leq O(f,Q) < A + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\Rightarrow O(f,Q) - U(f,Q) < \varepsilon\end{aligned}$$

(b)⇒(a) Für alle $P \in P(I)$

$$0 \leq \underbrace{\int_a^{\bar{b}} f(x)dx}_{\inf O(f,P)} - \underbrace{\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx}_{\sup U(f,P)} \leq O(f,P) - U(f,P)$$

Aus (b) folgt das $\forall \varepsilon > 0$

$$0 < \int_a^{\bar{b}} f(x)dx - \int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx < \varepsilon \Rightarrow \int_a^{\bar{b}} f(x)dx = \int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx$$

$\Rightarrow f$ ist integrierbar.

Satz 6.7

1. Jede stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist R. integrierbar.
2. Jede monotone Funktion ist R. integrierbar.

Beweis

1. $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, $I = [a,b]$ kompakt, $\Rightarrow f$ gleichmässig stetig.
   d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ mit

   $$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

   Für ein $P \in P(I)$ mit Feinheit $\delta(P) < \delta$ gilt dann

   $$\begin{aligned}O(f,P) - U(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} (\sup_{[x_{i-1},x_i]} f - \inf_{[x_{i-1},x_i]} f)(x_{i-1} - x_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a}(x_i - x_{i-1}) \\ &= \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = \varepsilon\end{aligned}$$

   Somit ist f nach dem Riemannschen Kriterium integrierbar.
2. Sei f monoton wachsend, $P \in P(I)$ eine uniforme Partition mit

   $$x_i = a + \left(\frac{b-a}{n}\right) i, 0 \leq i \leq n$$

$$\begin{aligned} O(f,P) - U(f,P) &= \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i))(x_{i+1} - x_i) \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i)) \\ &= \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) < \varepsilon \end{aligned}$$

Für jedes $\varepsilon > 0$, haben wir $\frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{n} < \varepsilon$. Nach dem Riemannschen Kriterium ist f integrierbar. (monoton fallend ist analog)

Satz 6.8 (Riemannsche Summe)

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Folgende Aussagen sind äquivalent.

I) f ist Riemann integrierbar und $A := \int_a^b f(x)dx$

II) Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine Zahl $\delta > 0$, so dass für jede Partition $P_i = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ von I und alle $\xi_i, \dots, \xi_N \in \mathbb{R}$ gilt

$$\underset{x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k, \forall k}{\delta(P) < \delta} \Rightarrow \left| A - \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| < \varepsilon$$

Dieser Satz lässt sich auch so formulieren: Eine beschränkte Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann integrierbar wenn der Grenzwert

$$\lim_{\substack{\delta(P) \to 0 \\ \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]}} \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

und dann haben wir

$$A = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta(P) \to 0} S(f, P, \delta)$$

Beweis

Siehe D. Salomon: Das Riemannsche Integral (Satz 3.1).

Korollar 6.8

Seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte und integrierbare Funktion, $\{P^{(n)}\}$ eine Folge von Partitionen der Intervalls $[a,b]$ mit $\delta(P^{(n)}) \to 0$ für $n \to \infty$ und $\{\xi^{(n)}\}$ eine Feste Wahl von Zwischenpunkten zur Partition $P^{(n)}$. Dann ist

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} S(f, P^{(n)}, \xi^{(n)})$$

Beweis

Wegen Satz 6.8 existiert zu jedem $\varepsilon > 0$, ein $\delta > 0$ derart, das für alle Partitionen $\delta(P) < \delta$ die Ungleichung

$$\left| S(f, P, \xi) - \int_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon$$

gilt und zwar bei beliebiger Wahl der Zwischenpunkte.
Wegen $\delta(P^{(n)}) \to 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\delta(P^{(n)}) < \delta$ für alle $n \geq N$. Für jedes $n \geq N$ ist daher

$$\left| S(f, P^{(n)}, \xi) - \int_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon$$

woraus sich die Behauptung unmittelbar ergibt.

Beispiel

$$\int_0^1 (x^2 - x)dx = ?$$

$$f(x) = x^2 - x \text{ stetig } \Rightarrow f \text{ integrierbar}$$

Wir wenden Korollar 6.8 an. Wir betrachten die Folge $\{P^{(n)}\}$ von äquidistanten Partitionen des Intervalls $[0, 1]$ mit

$$x_k^{(n)} := \frac{k}{n}, \qquad \forall k = 0, 1, \ldots, n$$

Dann $\delta(P^{(n)}) = \frac{1}{n} \to 0$ für $n \to \infty$. Wir wählen die Zwischenpunkte

$$\xi_k^{(n)} := \frac{k}{n}, \qquad \forall k = 1, \ldots, n$$

Die $\xi_k^{(n)}$ sind die rechten Endpunkte der Teilintervalle $I_{k-1} := [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$. Hiermit folgt

$$\begin{aligned}
S(f, P^{(n)}, \xi^{(n)}) &= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k^{(n)})(x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k^2}{n^2} - \frac{k}{n}\right)\left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k^2}{n^2} - \frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k \\
&= \frac{1}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) - \frac{1}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) \\
&\to \frac{2}{6} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} \\
&\Rightarrow \int_0^1 (x^2 - x)dx = -\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Eigenschaften des Integrals

Satz 6.9

Seien $a < c < b$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $f, g : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei Riemann integrierbare Funktionen. Dann gilt folgendes:

1. Die Funktion $\alpha f + \beta g$ ist integrierbar mit
$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$
2. Wenn f, g die Ungleichung $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b]$ erfüllen, dann gilt
$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$
3. $|f|$ ist R. integrierbar und
$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$
4. Das Produkt fg ist integrierbar.

Bemerkung 6.10

Wir bezeichnen die Menge aller Riemann integrierbaren Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ mit $R(I) := \{f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ R. integrierbar }\}$. Nach Satz 6.9 i), ist dies ein reeller Vektorraum. $R(I)$ ist ein Unterraum des Vektorraumes aller reellwertigen Funktionen
$$F(I) := \{f : I \to \mathbb{R}\}$$

$$C(I) := \{f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$$

ist ein Unterraum von $R(I)$

$$C(I) \subset R(I) \subset F(I)$$

Beweis 6.9

1. Setze $h := \alpha f + \beta g$ und sei $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Da f und g integrierbar sind, existieren wegen Riem. Kriterium (Satz 6.6).
   Partitionen P_1 und $P_2 \in P(I)$ mit

   $$O(f, P_1) - U(f, P_1) < \frac{\varepsilon}{(|\alpha| + |\beta|)}$$

   und

   $$O(g, P_2) - U(g, P_2) < \frac{\varepsilon}{(|\alpha| + |\beta|)}$$

   Aus der Definition von h folgt zunächst

   $$|h(x) - h(y)| \leq |\alpha||f(x) - f(y)| + |\beta||g(x) - g(y)|$$

   Mit der verfeinerten Partition $P := P_1 \cup P_2$ ergibt sich unter Verwendung von $(*)$, wobei

   $$(*) \qquad \sup_{x \in I} h(x) - \inf_{x \in I} h(x) = \sup\{h(x) - h(y) \mid x, y \in I\}$$

   Für beschränkte Funktion h auf einen Intervall I gilt

   $$\begin{aligned} O(h,P) - U(h,P) &= \sum_{k=1}^{n} (\sup_{[x_{k-1},x_k]} h - \inf_{[x_{k+1},x_k]} h)(x_k - x_{k-1}) \\ &\stackrel{*}{=} \sum_{x,y \in I_k} \sup |h(x) - h(y)|(x_k - x_{k-1}) \\ &\leq |\alpha| \sum \sup_{x,y \in I_k} |f(x) - f(y)|(x_k - x_{k-1}) \\ &+ |\beta| \sum \sup_{x,y \in I_k} |g(x) - g(y)|(x_k - x_{k-1}) \\ &= |\alpha| \sum_{k=1}^{n} (\sup f - \inf f)(x_k - x_{k-1}) \\ &+ |\beta| \sum_{k=1}^{n} (\sup g - \inf g)(x_k - x_{k-1}) \\ &= |\alpha|[O(f,P) - U(f,P)] + |\beta|[O(g,P) - U(g,P)] \\ &< |\alpha| \frac{\varepsilon}{(|\alpha| + |\beta|)} + |\beta| \frac{\varepsilon}{(|\alpha| + |\beta|)} = \varepsilon \end{aligned}$$

   Nach Bmk. 6.2 $P_1 \subset P$

   $$\Rightarrow U(f, P_1) < U(f, P)$$

und
$$O(f,P) < O(f,P_1)$$
dann
$$-U(f,P) < -U(f,P_1)$$
und
$$O(f,P) - U(f,P) < O(f,P_1) - U(f,P_1) < \frac{\varepsilon}{(|\alpha| + |\beta|)}$$

2. Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ integrierbar mit $f(x) \leq g(x), \forall x \in I$.
   Die Funktion $h := g - f$ ist wegen (1.) integrierbar. Sei nur $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ eine beliebige Partition von $[a,b]$. Dann folgt $\inf h(x) \geq 0, \forall k = 0, 1, \ldots, n$ und daher
   $$U(h,P) = \sum_P (\inf h)(x_k - x_{k-1}) \geq 0$$
   Was wiederum $\underline{\int_a^b} h(x)dx = \sup U(h,P) \geq 0$ impliziert.
   Da h aber integrierbar ist, folgt hieraus
   $$0 \leq \underline{\int_a^b} h(x)dx = \int_a^b h(x)dx$$
   $$= \int_a^b (g(x) - f(x))dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \geq 0$$
   Dies liefert die Behauptung

3. Nun gilt $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, $\forall x \in I$
   Nach (2) folgt daraus die Ungleichung
   $$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)dx|$$
   Diese Ungleichung ist äquivalent zu
   $$\left|\int_a^b f(x)dx\right| < \int_a^b |f(x)|dx$$

4. Als integrierbare Funktionen sind f und g beschränkt. Also existieren die Konstanten
   $$\alpha := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \text{ und } \beta := \sup_{x\in[a,b]} |g(x)|$$
   Wegen dem Riem. Kriterium (Satz 6.6) gibt es Partitionen P_1, P_2 mit
   $$O(f,P_1) - U(f,P_1) < \frac{\varepsilon}{(\alpha + \beta)}$$
   $$O(g,P_2) - U(g,P_2) < \frac{\varepsilon}{(\alpha + \beta)}$$

Setzen wir $h := fg$ so gilt

$$\begin{aligned}|h(x)-h(y)| &\leq |f(x)||g(x)-g(y)| + |g(y)||f(x)-f(y)| \\ &\leq \alpha|g(x)-g(y)| + \beta|f(x)-f(y)|, \forall x,y \in [a,b]\end{aligned}$$

Sei $P = P_1 \cup P_2$.
Wie im Beweis von (1.) ergibt sich unter Verwendung von

$$\sup_{x\in I} h - \inf_{x \in I} h = \sup\{|h(x)-h(y)| x,y \in I\}$$

dann

$$\begin{aligned}O(h,P)-U(h,P) &= \sum_{k=1}^{n} (\sup h - \inf h)(x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sup_{x,y\in I_k} |h(x)-h(y)|(x_k - x_{k-1}) \\ &\leq |\beta| \sum \sup_{I_k} |f(x)-f(y)|(x_k - x_{k-1}) \\ &+ |\alpha| \sum \sup_{I_k} |g(x)-g(y)|(x_k - x_{k-1}) \\ &= |\beta| \sum (\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f)(x_k - x_{k-1}) \\ &+ |\alpha| \sum (\sup_{I_k} g - \inf_{I_k} g)(x_k - x_{k-1}) \\ &= |\beta|[O(f,P)-U(f,P)] + |\alpha|[O(g,P)-U(g,P)] < \varepsilon\end{aligned}$$

Satz 6.10 (Standardabschätzungen)

Sei f integrierbar über $[a,b]$. Dann gelten die Abschätzungen

$$(b-a)\inf_{[a,b]} f \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a)\sup_{[a,b]} f$$

Beweis

Für die Partition $P = \{a,b\}$ von $[a,b]$ folgt sofort

$$(b-a)\inf_{[a,b]} f = U(f,P) \leq \int_a^b f(x)dx < O(f,P) = (b-a)\sup_{[a,b]} f$$

Satz 6.11

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann ist f auch auf jedem Teilintervall $[c,d] \subseteq [a,b]$ integrierbar.

Beweis

f ist auf $[a,b]$ integrierbar wegen Satz 6.6.
Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Partition P' von $[a,b]$ mit

$$O(f,P') - U(f,P') < \varepsilon$$

Wir betrachten dann die Verfeinerung

$$P'' := P' \cup \{c,d\}$$

Wegen Bmk. 6.2 haben wir

$$O(f,P'') - U(f,P'') < \varepsilon$$

Sei nun $P := P'' \cap [c,d]$ die Restriktion der Partition P'' auf $[c,d]$. Dann gilt mit $g := f|_{[c,d]}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} O(g,P) - U(g,P) &= \sum_P (M_k(g) - m_k(g))(x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_P (M_k(f) - m_k(f))(x_k - x_{k-1}) \\ &\leq \sum_{P''} ({M''}_k(f) - {m''}_k(f))(x_k - x_{k-1}) \\ O(f,P'') - U(f,P'') &< \varepsilon \end{aligned}$$

wobei

$$M_k(f) := \sup_{I_k \subset P} f \qquad m_k(f) := \inf_{I_k \subset P} f$$

und analog

$$M_k^{''}(f) = \sup_{I_k \in P''} f$$

Satz 6.12

Seien $a \leq b \leq c$. Die Funktion $f : [a,c] \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, falls beide Einschrankungen $f|_{[a,b]}$ und $f|_{[b,c]}$ integrierbar sind. In diesem Fall gilt

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Konvention 6.13

1) Sei f integrierbar auf einem Intervall I. Für $a \leq b$ in I definiert man

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

Mit dieser Konvention gelten alle bisherigen Eigenschaften. z.B.

$$\forall a,b,c \in I : \int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$$

2)

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

6.2 Differentiation und Integration

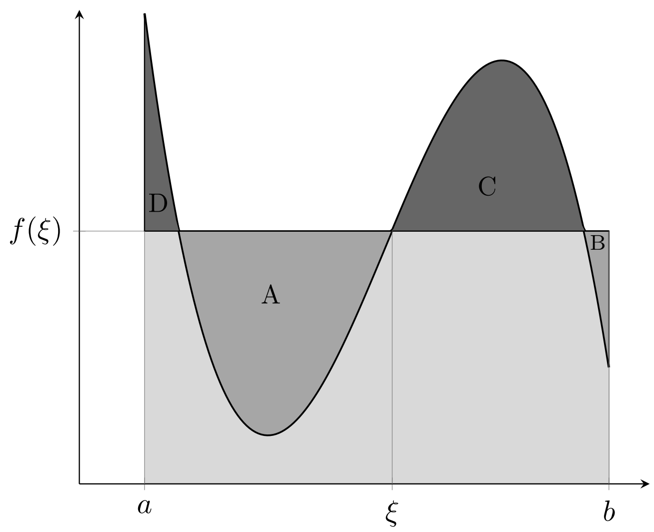
In diesem Kapitel wird der Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration hergestellt. Zu diesem Zweck beginnen wir mit dem folgenden Satz, dem Mittelwertsatz der Integralrechnung.

Satz 6.14 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a)$$

Geometrisch:



Beweis

Wir setzen

$$m := \min\{f(x) \mid x \in [a, b]\} = f(x_-)$$
$$M := \max\{f(x) \mid x \in [a, b]\} = f(x_+)$$

Wegen Satz 6.10

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$$

$$f(x_-) = m \leq \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)dx \leq M = f(x_+)$$

Also $\frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)dx \leq M$ für ein $M \in [m, M]$. Da f stetig ist, gibt es wegen des Zwischenwertsatzes $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)dx$. Nun kommt der erste Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Satz 6.15 (Hauptsatz A)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Definiere für jedes $x \in [a, b]$

$$F(x) := \int\limits_x^b f(t)dt$$

Dann ist $F : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a, b]$.

Beweis

Für jedes $h \neq 0$ ist

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \left[\int\limits_a^{x+h} f(t)dt - \int\limits_a^x f(t)dt \right] \overset{6.12}{=} \frac{1}{h} \int\limits_a^{x+h} f(t)dt$$

Nach dem MWS der Integralrechnung existiert zu jedem solchen $h \neq 0$ ein Zwischenpunkt $\xi_h \in [x, x+h]$ (bzw. $\xi_h \in [x+h, x]$ falls $h < 0$) mit

$$\int\limits_x^{x+h} f(t)dt = (h)f(\xi_h)$$

Nun ist $\xi_h \to x$ für $h \to 0$. Da f stetig ist

$$f(\xi_h) \to f(x) \text{ für } h \to 0$$

Damit erhalten wir

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int\limits_x^{x+h} f(t)dt = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(hf(\xi_h)) = f(x)$$

Folgender Begriff ist dann naheliegend:

Definition 6.16

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine Stammfunktion von f (auf $[a, b]$) ist eine differenzierbare Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $F'(x) = f(x)$.

Wegen Satz 6.15 hat jede stetige Funktion mindestens eine Stammfunktion. Mit Ausnahme einer additiven Konstante, die beim Differenzieren ja wegfällt, ist die Stammfunktion auch eindeutig bestimmt. Dies ist der Inhalt des folgenden Satzes.

Satz 6.17

Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall und $F : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f : I \to \mathbb{R}$. Dann gelten:

(a) Die Funktion $F + c$ ist für jede Konstante $c \in \mathbb{R}$ ebenfalls eine Stammfunktion von f.

(b) Ist $G : I \to \mathbb{R}$ eine weitere Stammfunktion von f, so gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit $G = F + c$

Beweis

(a) Offenbar ist mit F auch $F+c$ differenzierbar und es gilt $(F+c)' = F' = f$

(b) Da F und G Stammfunktionen von f sind, gilt $F' = f, G' = f$. Also $(F - G)' = 0$ und $F - G =$ konstante Funktion.

Definition 6.18

Eine Stammfunktion von f heisst auch unbestimmtes Integral von f und wird mit $\int f(x)dx$ bezeichnet. Mittels einer Stammfunktion lässt sich das Integral einer gegebenen Abbildung sehr leicht berechnen. Dies ist der Inhalt des Hauptsatzes B.

Satz 6.19 (Hauptsatz der Diff- und Integralberechnung, Version B)

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und F eine beliebige Stammfunktion von f. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) := F(x)\big|_a^b, \qquad \forall a, b \in I$$

Beweis

Für $x \in I$ definieren wir

$$F_0(x) := \int_a^x f(t)dt$$

Dann ist $F_0 : I \to \mathbb{R}$ wegen Satz 6.15 eine (spezielle) Stammfunktion von f mit

$$F_0(a) = 0 \qquad F_0(b) = \int_c^b f(t)dt$$

Für die beliebige Stammfunktion F gilt somit $F - F_0 = c$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Deshalb ist

$$F(b) - F(a) = F_0(b) - F_0(a) = F_0(b) = \int_a^b f(t)dt$$

womit alles bewiesen ist. Der Satz 6.19 ist das zentrale Ergebnis und zur Berechnung konkreter Integrale. Man Benötigt nur eine Stammfunktion und hat von dieser lediglich die Differenz der Funktionswerte zwischen den beiden Endpunkten des Intervalls $[a, b]$ zu bilden. Insbesondere spielt es keine Rolle, welche Werte die Stammfunktion im Inneren des Intervalls $[a, b]$ annimmt.

limenet: A verb is missing here. Ideas??

Beispiele von Stammfunktionen

Beispiel 6.20

Definitionsbereich	Funktion f	Stammfunktion F
$(0, \infty)$	$x^\alpha, \ \alpha \in \mathbb{R}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \neq -1$ $\log\lvert x\rvert + c, \alpha = -1$
$\mathbb{R}$	$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \in \mathbb{N}$
$\mathbb{R}$	e^x	$e^x + c$
$\mathbb{R}$	$\sin x$	$-\cos x + c$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x + c$
$(-1, 1)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + c$
$(-1, 1)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x + c$
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + c$
$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + c$
$(0, \pi)$	$\cot x$	$\ln\lvert\sin x\rvert + c$
$\mathbb{R}$	$\sinh x$	$\cosh x + c$
$\mathbb{R}$	$\cosh x$	$\sinh x + c$
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{arcsinh} x + c$
$(1, \infty)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arccosh} x + c$
$[-1, 1]$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{arctanh} x + c$

Beispiel

$$F(x) = -\ln|\cos x| = -\frac{1}{2}\ln(\cos x)^2$$

und die Ableitung ist (nach Kettenregel):

$$F'(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\cos(x)^2}(2\cos x)(-\sin x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

6.3 Partielle Integration

Da die Integration die Umkehrung von differenzieren ist, liefert jede Ableitungsregel eine für das Integrieren.

Partielle Integration ist eine Umkehrung der Leibnizschen Produktregel und besagt für das unbestimmte bzw. bestimmte Integral:

$$(uv)' = u'v + uv'$$
$$\Rightarrow \int uv' = uv - \int u'v + c$$

Satz 6.21 (Partielle Integration)

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

und

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Beispiel 6.22

1. $\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^x}_{v'}dx = xe^x - \int 1e^x dx = xe^x - e^x \quad \begin{cases} f(x) = x & g'(x) = e^x \\ f'(x) = 1 & g(x) = e^x \end{cases}$

2. $\int \underbrace{x^n}_{u}\underbrace{e^x}_{v'}dx = x^n e^x - \int nx^{n-1}e^x dx$
   Durch Induktion über $n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ folgert man daraus das Resultat
   $$\int x^n e^x dx = (-1)^n n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-x)^k}{k!} e^x + c$$

3. Partielle Integration eignet sich gut dazu, logarithmische Terme zu eliminieren.
   Manchmal muss man dazu den Integranden erst künstlich als Produkt schreiben
   $$\int \log x dx = \int \underbrace{(\log x)}_{u}\underbrace{(1)}_{v'}dx$$

$$= (\log x)x - \int \frac{1}{x} x dx = x \log x - x + c$$

4. Manchmal führt wiederholte partielle Integration auf den ursprünglichen Ausdruck zurück. Mit Glück kann man dann nach diesem auflösen

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x dx &= \int \underbrace{(\sin x)}_{u} \underbrace{(\sin x)}_{v'} dx \\
&= -\sin x \cos x + \int \cos^2 x dx \\
&= -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x) dx \\
&= -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x dx \\
\Rightarrow 2 \int \sin^2 x dx &= x - \sin x \cos x \\
\Rightarrow \int \sin^2 x dx &= \frac{1}{2} (x - \sin x \cos x)
\end{aligned}$$

Andere Möglichkeit:

$$\begin{aligned}
\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 \\
\sin^2 x &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)
\end{aligned}$$

mit

$$\cos 2x = \left(\frac{\sin 2x}{2} \right)'$$

Dann:

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x &= \frac{1}{2} \int 1 - \cos 2x dx \\
&= \frac{1}{2} \left[x - \int \cos 2x dx \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[x - \frac{\sin 2x}{2} \right] + c \\
\sin 2x &= 2 \sin x \cos x
\end{aligned}$$

Beispiel 6.23

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{k+1} dx &= \int_0^{\pi/2} \underbrace{(\sin x)^k}_{u} \underbrace{(\sin x)}_{v'} dx \\
&= \underbrace{(\sin x)^k}_{u} \underbrace{(-\cos x)}_{v} \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \underbrace{k(\sin x)^{k-1}(\cos x)}_{u'} \underbrace{(-\cos x)}_{v} dx \\
&= 0 + k \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{k-1} \left[1 - \sin^2 x\right] dx \\
&= k \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{k-1} - k \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{k+1} dx
\end{aligned}$$

Also:

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{k+1} dx = \frac{k}{(1+k)} \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{k-1} dx$$

Falls $k+1 = 2n$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2n} dx &= \frac{2n-1}{2n} \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2(n-1)} dx \\
&= \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} 1 dx \\
&= \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)\ldots 1}{\left[(2n)(2n-2)\ldots 2\right]^2} \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Analog:

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2n+1} dx = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$

Beachte: der π-Term kommt im zweiten Fall nicht vor!

Dies benutzen wir wie folgt um ein “Formel” für π aufzustellen.

Für $0 \le x \le \pi/2$:

$$\begin{aligned}
(\sin x)^k - (\sin x)^{k+1} &= (\sin x)^k \left[1 - \sin x\right] \ge 0 \\
\Rightarrow (\sin x)^k &\ge (\sin x)^{k+1} \qquad (k \ge 0, 0 \le x \le \pi/2)
\end{aligned}$$

Also:

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2n+1} dx \leq \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2n} dx \leq \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2n-1} dx$$

d.h.

$$\frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} \leq \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \leq \frac{\left(2^{n-1}(n-1)!\right)^2}{(2n-1)!}$$

Also:

$$\begin{aligned} \frac{(2^n n!)^4}{(2n+1)!} \cdot \frac{2}{(2n)!} &\leq \pi \leq \frac{(2^n n!)^4}{(2n!)^2} \cdot \frac{2}{2n} \\ \frac{(2^n !)^4}{(2n+1)} \cdot \frac{2}{((2n)!)^2} &\leq \pi \leq \frac{(2^n n!)^4}{(2n!)^2} \cdot \frac{2}{2n} \\ &\Rightarrow \pi = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \frac{(2^n n!)^4}{(2n!)^2} \qquad \text{Wallische Formel.} \end{aligned}$$

Beispiel 6.24 (Stirlingsche Formel)

Für $n \geq 2$ sei $\ln(n!) = \sum\limits_{k=2}^{n} \ln(k)$. Wir zeigen dass man $\ln|k|$ sehr gut durch $\int\limits_{k-1/2}^{k+1/2} \ln x dx$ approximieren kann.

Da

$$x \ln x - x$$

Stammfunktion von $\ln(x)$ ist, folgt

$$\int_{k-1/2}^{k+1/2} \ln x dx = x \ln x - x \Big|_{k-1/2}^{k+1/2}$$

Darin kommen also $\ln\left(k + \frac{1}{2}\right)$ sowie $\ln\left(k - \frac{1}{2}\right)$ vor. Wir benutzen nun Taylor:

Falls $g(x) = \ln(x)$ sei

$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + \frac{g''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{g^{(3)}(\xi)}{3!}(x - x_0)^3$$

mit ξ zwischen x und x_0.

Auf $\left.\begin{array}{r} x = k + \frac{1}{2} \\ x_0 = k \end{array}\right\}$ angewendet ergibt:

$$\ln\left(k + \frac{1}{2}\right) = \ln k + \frac{1}{2k} - \frac{1}{8k^2} + t_k$$

wobei

$$t_k = \frac{2}{\xi^3} \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{24\xi^3}$$

$$|t_k| \leq \frac{1}{24k^3} \qquad \xi \in \left[k, k+\frac{1}{2}\right]$$

Analog:

$$\ln\left(k-\frac{1}{2}\right) = \ln k - \frac{1}{2k} - \frac{1}{8k^2} + t'_k$$

$$|t'_k| \leq \frac{1}{24\left(k-\frac{1}{2}\right)^3}$$

Also:

$$\begin{aligned}\int\limits_{k-1/2}^{k+1/2} x\ln -x dx &= \left(k+\frac{1}{2}\right)\left(\ln k + \frac{1}{2k} - \frac{1}{8k^2} + t_k\right) - \left(k+\frac{1}{2}\right)\\ &- \left[\left(k-\frac{1}{2}\right)\left(\ln k - \frac{1}{2k} - \frac{1}{8k^2} + t'_k\right) - \left(k-\frac{1}{2}\right)\right]\\ &= \ln k - \frac{1}{8k^2} + \left(k+\frac{1}{2}\right)t_k - \left(k-\frac{1}{2}\right)t'_k\\ &= \ln k + r_k \qquad |r_k| \leq \frac{c}{k^2}\end{aligned}$$

Mit

$$(*) = \left(\int\limits_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln x dx = \ln k + r_k\right)$$

folgt, dass:

$$\begin{aligned}\ln n! = \sum_{k=2}^{n} \ln k &\overset{(*)}{=} \sum_{k=2}^{n} \int\limits_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln x dx - \sum_{k=2}^{n} r_k\\ &= \underbrace{\int\limits_{1}^{n+\frac{1}{2}} \ln x dx}_{(*)} - \int\limits_{1}^{\frac{3}{2}} \ln x dx - \sum_{k=2}^{n} r_k\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(*) = \int\limits_{1}^{n+\frac{1}{2}} \ln x dx &= x\ln x - x\Big|_1^{n+\frac{1}{2}}\\ &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(n+\frac{1}{2}\right) - \left(n+\frac{1}{2}\right) + 1\\ &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(n+\frac{1}{2}\right) - n + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Ersetzen wir $\ln\left(n+\frac{1}{2}\right) = \ln n + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + t_n$, so folgt:

$$\begin{aligned}
(*) &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n - n + \left(n+\frac{1}{2}\right)\left\{\frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + t_n\right\} + \frac{1}{2} \\
&= \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n - n + \frac{1}{2} - \frac{1}{8n^2} + nt_n + \frac{1}{4n} - \frac{1}{16n^2} + \frac{1}{2}t_n + \frac{1}{2} \\
&= \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n - n + 1 + \frac{1}{8n} + nt_n - \frac{1}{16n^2} + \frac{1}{2}t_n
\end{aligned}$$

Also:

$$\ln(n!) = n\ln n + \frac{1}{2}\ln n - n + a_n$$

wobei

$$a_n = \frac{1}{4n} + \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{8n^2} + t_n\right) + \sum_{k=2}^{n} r_k - \int_1^{\frac{3}{2}} \ln x dx$$

und $|r_k| \leq \frac{c}{k^2} \Rightarrow \sum\limits_{k=2}^{n} r_k$ konvergiert.

Sei $a := \lim a_n$, $b = e^a$ und $b_n = e^{a_n}$. Also:

$$\log n! = \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n - n + a_n = \log n^{n+\frac{1}{2}} - n + a_n$$

folgt

$$n! = n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}e^{a_n} = \sqrt{n}n^n e^{-n}e^{a_n} \Rightarrow b_n = \frac{n!}{\sqrt{n}n^n e^{-n}}$$

Wir möchten jetzt $b := e^a$ bestimmen:

$$\begin{aligned}
b = \lim b_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{{b_n}^2}{b_{2n}} = \lim\left(\frac{n!}{\sqrt{n}n^n e^{-n}}\right)^2 \left(\frac{\sqrt{2n}(2n)^{2n}e^{2n}}{(2n)!}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}\sqrt{\frac{2}{n}}\frac{(2n)^{2n}}{n^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}\sqrt{\frac{2}{n}}2^{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2^n n!)^n}{(2n)!} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \\
&= \sqrt{2\pi}
\end{aligned}$$

Also $b = \sqrt{2\pi}$ womit

$$\boxed{n! \approx \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n} \qquad \text{Stirlings Formel}}$$

Beispiel: Der Satz von Taylor

Die Taylorentwicklung einer Funktion $f \in C^{n+1}$ um x_0 erhält man durch $n-$fache partielle Integration:

$$
\begin{aligned}
f(x) - f(x_0) &= \int\limits_{x_0}^{x} f'(t)dt = \int\limits_{x_0}^{x} \underbrace{(x-t)^0}_{v'} \underbrace{f'(t)}_{u} dt \\
&= (x-x_0)f'(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} \underbrace{(x-t)'}_{v'} \underbrace{f''(t)}_{u} dt \\
&= (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2} f''(x_0) + \frac{1}{2} \int\limits_{x_0}^{x} (x-t)^2 f'''(t)dt \\
&\;\;\vdots \\
&= \sum_{k=1}^{n} (x-x_0)^k \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} + \frac{1}{n!} \int\limits_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt
\end{aligned}
$$

Aus dem Mittelwertsatz der Integralrechnung bekommt man die Lagrange Restgliedformel.

$$
\frac{1}{n!} \int\limits_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt = \frac{1}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi)(x-x_0)^{n+1} \text{ für ein } \xi \in [x_0, x]
$$

6.4 Methode der Substitution

Methode der Substitution ist eine Umkehrung der Kettenregel.

Satz 6.25 (Substitutionsregel)

Sei

- $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig
- $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ der Klasse C^1

Sowie $t_0 \leq t_1$ in $[\alpha, \beta]$, so dass $g\left([t_0, t_1]\right) \subset [a,b]$. Dann gilt

$$
\int\limits_{g(t_0)}^{g(t_1)} f(x)dx = \int\limits_{t_0}^{t_1} f\left(g\left(t\right)\right) g'\left(t\right) dt
$$

Beweis

Sei $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion für f. Dann gilt (nach Hauptsatz B)

$$
\int\limits_{g(t_0)}^{g(t_1)} f(x)dx = F\left(g(t_1)\right) - F\left(g(t_0)\right)
$$

Mit der Kettenregel haben wir

$$(F \circ g)'(t) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$$

d.h. $F \circ g$ ist eine Stammfunktion für $f(g(t))g'(t)$. Woraus mit dem Hauptsatz B folgt

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_1} f\left(g(t)\right)g'(t)dt &= \left(F \circ g\right)(t_1) - \left(F \circ g\right)(t_0) \\ &= F\left(g(t_1)\right) - F\left(g(t_0)\right) \\ &= \int_{g(t_0)}^{g(t_1)} f(x)dx\end{aligned}$$

Korollar 6.26

$$\int f(x)dx = \int f\left(g(t)\right)g'(t)dt + C$$

Dies Formel bedeutet folgendes: Die linke Seite als Funktion von x ist gleich der rechten Seite als Funktion von t vermöge der Relation

$$\begin{aligned} x &= g(t) \\ dx &= g'(t)dt \end{aligned}$$

Für die Substitutionsregel

$$\int_{t_0}^{t_1} f\left(g(t)\right)g'(t)dt = \int_{g(t_0)}^{g(t_1)} f(x)dx$$

gibt es im Prinzip zwei Lesarten. Mann kann sie entweder von links nach rechts oder von rechts nach links anwenden:

1. (links $\rightarrow$ rechts)
   Liegt ein Integral explizit in der Form

   $$\int_{t_0}^{t_1} f\left(g(t)\right)g'(t)dt$$

   vor, so können wir die Substitutionsregel von links nach rechts anwenden

   Beispiel

   (a)

   $$\int_0^1 \left(1+t^2\right)^4 (2t)dt$$

   Setzt man $f(x) := x^4$ und $g(t) := 1 + t^2$, so folgt:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 (1+t^2)^4 (2t)dt &= \int_0^1 f\left(g(t)\right) g'(t)dt \\
&= \int_{g(0)}^{g(1)} f(x)dx = \int_1^2 x^4 dx = \left[\frac{1}{5}x^5\right]_1^2 \\
&= \frac{32}{5} - \frac{1}{5} = \frac{31}{5}
\end{aligned}
$$

(b)

$$\int \sin^3 t \cos t dt$$

Die Substitution $x = \sin t$ mit $\frac{dx}{dt} = \cos t \Rightarrow dx = \cos t dt$ liefert

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C = \frac{\sin^4 t}{4} + C$$

(c)

$$\int \tan t dt = \int \frac{\sin t}{\cos t} dt$$

Die Substitution $x = \cos t$ $\frac{dx}{dt} = -\sin t, dx = -\sin t dt$

$$
\begin{aligned}
\int \tan t dt &= -\int \frac{1}{\cos t}(-\sin t)dt \\
&= -\int \frac{1}{x} dx = -\log|x| + C \\
&= -\log|\cos t| + C
\end{aligned}
$$

2. (rechts $\to$ links)

   Liegt ein Integral der Gestalt $\int\limits_\alpha^\beta f(x)dx$ mit gewissen Grenzen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vor, das schwer zu berechnen scheint, versucht man dann mittels geeigneter Substitution $x = g(t)$ dieses Integral umzuformulieren, so dass die Substitutionsregel anwendbar ist, wobei $g(t_0) = \alpha$ und $g(t_1) = \beta$ gelten muss.

Beispiel 6.26

(a)

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

Also $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Mit den Substitutionen $x = g(t) = \sin t, t \in [0, \pi/2], dx = \cos t dt$ ist dann $g(0) = 0, g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ und

$$
\begin{aligned}
\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}dx &= \int\limits_{g(0)}^{g(\pi/2)} f(x)dx = \int\limits_0^{\pi/2} f\left(g(t)\right) g'(t)dt \\
&= \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt \\
&\overset{(*)}{=} \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 dt = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\left(1+\cos 2t\right) dt \\
&= \frac{1}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\left(t+\sin t\cos t\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

mit

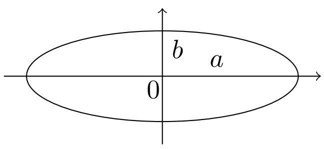
(*) $$\cos^2(t) = \frac{1+\cos 2t}{2}$$

(b)

$$
\int \frac{x}{\sqrt{2x-3}}dx \quad \left\{
\begin{array}{l}
u = \sqrt{2x-3} \\
du = \frac{1}{2}(2x-3)^{-1/2}2dx = \frac{dx}{\sqrt{2x-3}} \\
u^2 = 2x-3 \\
\frac{u^2+3}{2} = x
\end{array}
\right.
$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{2x-3}}dx &= \int \left(\frac{u^2+3}{2}\right)du = \frac{1}{2}\int (u^2+3)du \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{u^3}{3}+3u\right) = \frac{u}{2}\left(\frac{u^2}{3}+3\right) \\
&= \frac{\sqrt{2x-3}}{2}\left[\frac{2x-3}{3}+3\right]+C \\
&= \sqrt{2x-3}\left(\frac{x}{3}+1\right)+C
\end{aligned}
$$

Beispiel: Flächeninhalt einer Ellipse



$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}=1$$

$$y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \text{ mit } x, y > 0$$

$$F = 4\int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx$$

mit $x = au$, $dx = adu$

$$\begin{aligned} F &= 4\int_0^1 b\sqrt{1-u^2}adu \\ &= 4ab\int_0^1 \sqrt{1-u^2}du \end{aligned}$$

mit $u = \sin t$, $du = \cos t dt$

$$\begin{aligned} 4ab\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt &= 4ab\int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt \\ &= \frac{4ab}{2}\left(t+\sin t\cos t\right)\Big|_0^{\pi/2} \\ &= \pi ab \end{aligned}$$

6.5 Integration Rationaler Funktionen (Partialbruchzerlegung)

Sei $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ eine rationale Funktion, d.h. P, Q sind Polynome mit reellen Koeffizienten. Die Partialbruchzerlegung ist eine Darstellung von $R(x)$ als Summe von "elementaren" rationalen Funktionen. Sie basiert auf einem Korollar des fundamentalen Satzes der Algebra, das besagt, dass jedes reelle Polynom ein Produkt von linearen und quadratischen Polynomen mit $\mathbb{R}$ Koeffizienten ist.

Satz 6.27

Sei $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ eine rationale Funktion. Dann

$$R(x) = P_1(x) + \sum_{i=1}^{n} R_i(x) + \sum_{j=1}^{m} S_j(x)$$

wobei P_1 = Polynom

$$R_i(x) = \frac{a_{i1}}{(x-x_i)} + \frac{a_{i2}}{(x-x_i)^2} + \ldots + \frac{a_{ir_i}}{(x-x_i)^{r_i}}$$

$$S_j(x) = \frac{b_{j1}x + d_{j1}}{\left((x-\alpha_j)^2 + {\beta_j}^2\right)} + \frac{b_{j2}x + d_{j2}}{\left((x-\alpha_j)^2 + {\beta_j}^2\right)^2} + \ldots + \frac{b_{jm_j}x + d_{jm_j}}{\left((x-\alpha_j)^2 + {\beta_j}^2\right)^{m_j}}$$

Die Terme $\frac{1}{(x-a)}$, $\frac{bx+d}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^m}$ werden "elementare rationale Funktionen" genannt und wir wollen dafür Stammfunktionen bestimmen.

Bemerkung

1. Das Polynom $P_1(x)$ tritt nur auf, falls $\deg P > \deg Q$. In diesem Fall berechnet man $P_1(x)$ mit Polynomdivision und es gilt $p(x) = P_1(x) - Q(x) + P_2(x)$ mit $\deg P_2 < \deg Q$

2. Das Nennerpolynom $Q(x)$ besitze

- Die reellen Nullstellen x_i mit Vielfachheit r_i
- Die komplexen Nullstellen $z_j = \alpha_j + i\beta_j$ mit Vielfachheit m_j und damit komplex-konjugierte Nullstellen $\overline{z_j} = \alpha_j - i\beta_j$

3. Unbekannte Parameter, die bestimmt werden müssen

$$\begin{array}{lll} a_{ik} & k = 1, \ldots, r_i & i = 1, \ldots, n \\ \beta_{jl}, \alpha_{jl} & l = 1, \ldots, m_j & j = 1, \ldots, m \end{array}$$

Diese Parameter werden durch Koeffizientenvergleich berechnet, die rechte Seite wird dabei auf den Hauptnenner gebracht.

Beispiel

$R(x) = \frac{1-x}{x^2(x^2+1)}$ Ansatz:

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{b_1 x + d_1}{x^2+1} \\ \Rightarrow 1 - x &= x(x^2+1)a_1 + a_2(x^2+1) + x^2(b_1 x + d_1) \end{aligned}$$

Ausmultiplizieren:

$$1 - x = (a_1 + b_1)x^3 + (a_2 + d_1)x^2 + a_1 x + a_2$$

Koeffizientenvergleich:

$$a_1 + b_1 = 0 \qquad a_2 + d_1 = 0 \qquad a_1 = -1 \qquad a_2 = 1$$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1-x}{x^2(x^2+1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{x-1}{x^2+1}$$

Grundtypen der Integration rationaler Funktionen

- Typ O: Polynom:

$$\int \sum a_n x^n dx = \sum a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

- Typ I: Inverse Potenzen

$$\int \frac{dx}{(x-x_0)^r} = \begin{cases} \log|x - x_0| + c & \text{für} = 1 \\ \frac{1}{(1-r)} \frac{1}{(x-x_0)^{r-1}} & \text{für} \geq 2 \end{cases}$$

- Typ II:

$$\int \frac{bx + d}{\left[(x-\alpha)^2 + \beta^2\right]^m} dx$$

Substitution: $x-\alpha=\beta t$, $dx=\beta dt$ ergibt

$$\int \frac{b[\beta t+\alpha]+d}{(t^2+1)^m\beta^{2m}}\beta dt$$

Dies hat die allgemeine Form

$$\int \frac{ct+b}{(t^2+1)^m}dt = c\int \frac{t}{(t^2+1)^m}dt + \int \frac{b}{(t^2+1)^m}dt$$

$$\int \frac{t}{(t^2+1)^m}dt \qquad \text{mit } t^2+1=u, 2tdt=du$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^m} = \begin{cases} \frac{u^{-m+1}}{2(1-m)} & ,m\geq 2 \\ \frac{1}{2}\ln|u| & ,\ m=1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2(1-m)}\frac{1}{(t^2+1)}(1-m) & ,m\geq 2 \\ \frac{1}{2}\ln\left|1+t^2\right| & ,\ m=1 \end{cases}$$

Sei

$$I_m := \int \frac{dt}{(t^2+1)^m}$$

– Für $m=1$:

$$I_1 = \int \frac{dt}{(t^2+1)} = \arctan t + C$$

– Für $m\geq 1$:

$$I_m := \int \frac{dt}{(t^2+1)^m}$$

Partielle Integration ergibt:

$$\begin{aligned}
I_m :&= \int \underbrace{1}_{v'}\cdot\underbrace{\frac{1}{(t^2+1)^m}}_{u}dt = \frac{t}{(t^2+1)^m} + \int\frac{t\cdot 2m\cdot t}{(t^2+1)^{m+1}}dt \\
&= \frac{t}{(t^2+1)^m} + 2m\int\frac{t^2+1-1}{(t^2+1)^{m+1}}dt \\
&= \frac{t}{(t^2+1)^m} + 2m\int\frac{1}{(t^2+1)^m}dt - 2m\int\frac{1}{(t^2+1)^{m+1}}dt \\
\Rightarrow I_m &= \frac{t}{(t^2+1)^m} + 2m\{I_m - I_{m+1}\}
\end{aligned}$$

woraus

$$I_{m+1} = \frac{1}{2m}\left[\frac{t}{(t^2+1)^m} + \left(\frac{2m-1}{2m}\right)I_m\right]$$

z.B.

$$\begin{aligned}
I_2 = \int\frac{dt}{(t^2+1)^2} &= \frac{1}{2}\left[\frac{t}{(t^2+1)} + \frac{1}{2}I_1\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{t}{(t^2+1)^2} + \frac{1}{2}\arctan t\right] + C
\end{aligned}$$

Beispiel 6.28

1.
$$\frac{1}{x^2-3x-4} = \frac{1}{(x-4)(x+1)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+1}$$
$$\Rightarrow A(x+1) + B(x-4) = 1$$
$$x = 4 \Rightarrow A \cdot 5 = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{5}$$
$$x = -1 \Rightarrow B \cdot (-5) = 1 \Rightarrow B = -\frac{1}{5}$$
$$\int \frac{1}{x^2-3x-4} dx = \frac{1}{5} \int \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{1}{5} \ln\left|\frac{x-4}{x+1}\right| + c$$

2.
$$\frac{9}{x^3-3x-2} = \frac{9}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{(x+1)^2}$$
$$A(x+1)^2 + (Bx+C)(x-2) = 9$$

$$x = -1 \Rightarrow (-B+C)(-3) = 9$$
$$x = 2 \Rightarrow A(9) = 9 \Rightarrow A = 1$$
$$x = 0 \Rightarrow A + C(-2) = 9 \Rightarrow -2C = 8 \Rightarrow C = -4$$
$$(-B+C) = -3 \Rightarrow B = C + 3 = -1$$
$$\Rightarrow \frac{9}{x^3-3x-2} = \frac{1}{x-2} + \frac{-x-4}{(x+1)^2}$$

$$\int \frac{9}{x^3-3x-2} dx = \int \left(\frac{1}{x-2} + \frac{-x-1}{(x+1)^2} - \frac{3}{(x+1)^2} \right) dx$$
$$= \ln|x-2| - \ln|x+1| + \frac{3}{x+1} + c$$
$$= \ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + \frac{3}{x+1} + c$$

6.6 Das Uneigentliche Integral

Sei f eine unbeschränkte Funktion. Dann ist f nicht R. integrierbar, z.B. $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ hat keinen Sinn. Aber $\forall \varepsilon > 0$ ist $\frac{1}{\sqrt{x}} \in [\varepsilon, 1]$ stetig, also integrierbar. Der Wert des Integrals ist

$$\int\limits_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1 = 2 - 2\sqrt{\varepsilon}$$

also existiert

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int\limits_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2$$

Dies ist ein Beispiel eines uneigentlichen R. Integral.

Definition 6.29
Sei f eine Funktion auf einem offenen Intervall (a, b), deren Einschränkung auf jedes kompakte Teilintervall $[a', b']$ integrierbar ist. Dann ist das uneigentliche Integral von f von a bis b definiert als

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{a' \searrow a} \lim_{b' \nearrow b} \int_{a'}^{b'} f(x)dx$$

falls diese Grenzwerte existieren (a und b können $\pm\infty$ sein)

Bemerkung 6.30

1. Ist f schon auf $[a, b]$ definiert und integrierbar, so existiert das uneigentliche Integral und stimmt mit dem üblichen, bestimmten Integral überein.
2. Ist f schon auf $[a, b)$ definiert und auf jedem kompakten Teilintervall der Form $[a, b']$ integrierbar, so gilt schon

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{b' \nearrow b} \int_a^b f(x)dx$$

Beispiel

$$\int_0^\infty e^{-x} = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x}dx = \lim\left(-e^{-x}\Big|_0^b\right) = \lim_{b\to\infty}\left(-e^{-b}+1\right) = 1$$

3. Vorsicht: Die beiden Grenzwerte müssen im Allgemeinen unabhängig voneinander genommen werden.

Beispiel

$$\int_{-b}^b xdx = 0 \qquad \forall b > 0, \text{ und daher}$$

$$\lim_{b\to\infty} \int_{-b}^b xdx = \lim\left(\frac{b^2}{2} - \frac{b^2}{2}\right) = \lim_{b\to\infty} 0 = 0$$

Die einzelnen Grenzwerte von $\int_a^b xdx$ für $b \to \infty$ und $a \to -\infty$ existieren hingegen nicht

$$\left(\int_a^b xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right)$$

und somit auch nicht das uneigentliche Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x dx$

4. Alle Grundeigenschaften und Integrationstechniken für das bestimmte Integral gelten ebenso für das uneigentliche Integral.

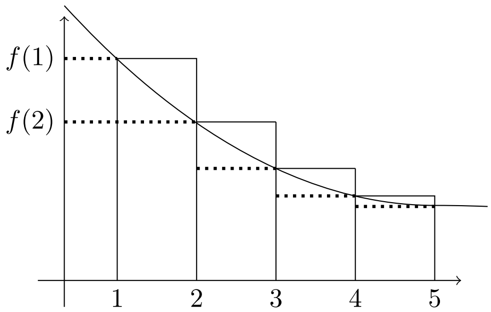
Als Beispiel beweisen wir folgendes nützliches Konvergenzkriterium für Reihen

Satz 6.30

Sei $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}_+$ monoton fallend. Dann konvergiert $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ genau dann wenn $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ existiert. In diesem Fall gilt:

$$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(k) - \int\limits_1^{\infty} f(x)dx \leq f(1)$$

Beweis



$$f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1) \geq \int\limits_1^n f(x)dx \geq f(2) + \ldots f(n)$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) - f(n) = \sum_{k=1}^{n-1} f(x) \geq \int\limits_1^n f(x)dx \geq \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) = \sum_{k=1}^{n} f(x) - f(1)$$

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{n} f(k) - f(n) \geq \int\limits_1^n f(x)dx \geq \sum_{k=1}^{n} f(k) - f(1)$$

$$\Rightarrow 0 < f(n) \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int\limits_1^n f(x)dx \leq f(1)$$

Aus

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) \geq \int\limits_1^n f(x)dx$$

folgt, dass
$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) < \infty \Rightarrow \int_1^{\infty} f(x)dx < \infty$$
und aus
$$\int_1^n f(x)dx \geq \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1)$$
folgt, dass
$$\int_1^{\infty} f(x)dx < \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f(k) < \infty$$
Aus $(*)$ folgt:
$$0 < f(n) \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(k) - \int_1^{\infty} f(x)dx \leq f(1)$$

Beispiel 6.31

1. $\sum(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ existiert für alle $s > 1$
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^s}dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-s}dx = \lim \begin{cases} \log|b| & s = 1 \\ \frac{x^{-s+1}}{1-s}\Big|_1^b & s > 1 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \text{divergent falls } s = 1 \\ \text{konvergent gegen } \frac{1}{s-1} \end{cases}$$
und
$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} - \int_1^{\infty} f(x)dx \leq f(1) = 1$$
$$\Rightarrow \frac{1}{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \leq 1 + \frac{1}{s-1} = \frac{s}{s-1}$$

2. $$\int_{-\infty}^{\infty} |x|e^{-x^2}dx = -\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}dx + \int_0^{\infty} xe^{-x^2}dx = 2\int_0^{\infty} xe^{-x^2}dx$$
$$\int_0^b xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^{b^2} e^{-u}du \qquad \text{mit } u = x^2, du = 2xdx$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 - e^{-b^2}\right) \to \frac{1}{2} \text{ für } b \to \infty$$
Somit gilt
$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|e^{-x^2}dx = 1$$

3. Wir haben die folgende einfachen aber wichtigen Beispiele

   (a)
   $$\int_a^\infty \frac{dx}{x^s} = \begin{cases} \frac{a^{1-s}}{s-1} & \text{für} \quad s > 1 \\ \infty & \text{für} \quad s \leq 1 \end{cases}$$

   (b) Für alle $a < b$ und $s \in \mathbb{R}$ gilt
   $$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^s} = \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-s}}{1-s} & \text{für} \quad s < 1 \\ \infty & \text{für} \quad s \geq 1 \end{cases}$$

Satz 6.32 (Majorantenkriterium)

a) Sei $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt
$$\forall x : |f(x)| < g(x)$$
und $\int_a^\infty g(x)$ konvergent $\Rightarrow \int f(x)dx$ (absolut) konvergent.

b) Weiterhin gilt folgende Umkehrung: $\forall x : 0 \leq g(x) \leq f(x)$ und $\int_a^\infty g(x)$ divergent $\Rightarrow \int_a^\infty f(x)$ divergent.

Beispiel 6.33

1.
$$\int_0^\infty \frac{t^2}{(1+6t^2)^{5/3}} dt < \int_0^\infty \frac{t^2}{(6t^2)^{5/3}} dt < \int \frac{c}{t^{4/3}} dt < \infty$$
$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{t^2}{(1+6t^2)^{5/2}} dt \text{ konvergiert}$$

2.
$$\int_0^\infty \frac{t^2}{(1+6t^2)^{3/2}} dt$$
$$\frac{t^2}{(1+6t^2)^{3/2}} > \frac{t^2}{(12t^2)^{3/2}} > \frac{c}{t} \qquad t \geq 1$$
$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{t^2}{(1+6t^2)^{5/2}} dt \text{ divergiert weil } \int_0^\infty \frac{c}{t} dt \text{ divergiert}$$

3. Exponentialintegral:

$$E_i(x) := \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t} dt \text{ für } x < 0$$

Da $\lim\limits_{t\to-\infty} te^t = 0$, gibt es $c > 0$ mit $|te^t| \leq c$, $\forall t \in [-\infty, x]$, und somit gilt

$$\left|\frac{e^t}{t}\right| = \left|\frac{te^t}{t^2}\right| \leq \frac{c}{t^2}$$

Mit der Konvergenz des Integrals $\int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{t^2} dt$ folgt die (absolute) Konvergenz von $E_i(x)$ für alle $x < 0$

Kapitel 7

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Eine Gleichung, in der Ableitungen einer gesuchten Funktionen auftreten, nennt man Differentialgleichung.

$$y'(t) = y + y^2$$
$$(y'(t))^2 = y(t) + 2$$

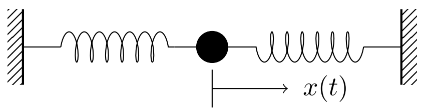
Hängt die gesuchte Funktion in der DGL nur von einer einzigen Variablen ab, so spricht man von einer "gewöhnlichen DGL".

Hängt hingegen die gesuchte Funktion von mehrere Variabeln ab, d.h. kommen partielle Ableitungen in der Differentialgleichung vor, so liegt eine "partielle DGL" vor. Viele physikalische Prozesse lassen sich oft durch Differenzialgleichungen beschreiben.

Beispiel

1. Ein lineares Federpendel wird durch folgende DGL beschrieben

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -Kx \text{ mit K = Federkonstante}$$



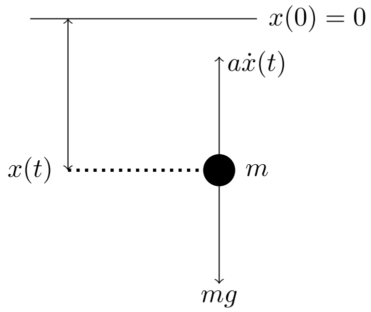
Unbekannt ist hier die Auslenkung x in Abhängigkeit von der Zeit t

2. Beim radioaktiven Zerfall haben wir

$$\frac{df(t)}{dt} = -\alpha f \qquad f(0) = f_0$$

wobei $f(t) =$ die noch vorhandeden Masse eines Stoffes. Die pro Zeiteinheit zerfallende Masse ist proportional zur noch vorhandenen Masse.

3. Freier Fall mit Reibung



Sei m ein Massepunkt der unter Einfluss der Schwerkraft fällt. Es kann auch eine Reibungskraft geben.

Die Grösse der Reibungskraft ist proportional zur Geschwindigkeit. Dann ist, nach dem zweiten Newtonschen Gesetz

$$m\ddot{x} = mg - a\dot{x} \qquad v = \frac{dx}{dt}$$

Beim Beispiel 2., haben wir schon letztes Semester gesehen dass

$$\frac{df(t)}{dt} = -\alpha f$$

als eine Lösung $Ke^{-\alpha t}$, $K \in \mathbb{R}$, hat

$$\begin{aligned} f' = -\alpha f \Rightarrow \frac{f'}{f} &= -\alpha \\ \int \frac{f'(t)}{f(t)} dt &= -\int \alpha dt \\ \ln|f(t)| &= -\alpha t + C \\ \Rightarrow f(t) &= Ke^{-\alpha t} \text{ mit } K = e^C \end{aligned}$$

Alle drei Beispiele sind lineare DGL mit konstanten Koeffizienten.

7.1 Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

Definition 7.1

Eine lineare Differentialgleichung $n-$ter Ordnung hat die Gestalt

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

mit $a_i(x), i = 0, \ldots, n-1, b(x)$ Funktionen.

Ist die sogenannte Störfunktion $b(x)$ konstant gleich 0, so heisst die DGL homogen, andernfalls inhomogen. Im Falle $a_i(x) = a_i$ Konstanten, heisst die LDG, LDG mit konstanten Koeffizienten.

In diesem Abschnitt betrachten wir DGL mit konstanten Koeffizienten. Eine DGL ist genau dann linear wenn alle Potenzen der gesuchten Funktion und deren Ableitung(en) nur mit Potenz 1 vorkommen. z.B.:

- $(y')^2 + y^2 = 1$ ist nicht linear
- $y' = 2xy$ ist linear
- $y' = \sqrt{y} + 1$ ist nicht linear
- $y'' + 2y' + x = 0$ ist linear

Zunächst betrachten wir homogene LDG mit konstanten Koeffizienten. Sei

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 = 0 \qquad \text{(H)}$$

wobei $a_i \in \mathbb{R}\ i = 0, \ldots, n-1$

Definition 7.2
Das charakteristische Polynom der Gleichung (H) ist gegeben durch

$$p(t) := t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0$$

Lemma 7.3

Die Funktion $y(x) = e^{\lambda x}$ ist genau dann Lösung von (H), falls $p(\lambda) = 0$

Beweis

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\lambda x} \\ y'(x) &= \lambda e^{\lambda x} \\ y^j(x) &= \lambda^j e^{\lambda x} \end{aligned}$$

Also mit

$$\begin{aligned} &= y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0 \\ &= (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0)e^x \\ &\Leftrightarrow \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0 = p(\lambda) = 0 \end{aligned}$$

Satz 7.4

Sei $p(\lambda) = \prod\limits_{i=1}^{l} (\lambda - \lambda_i)^{m_i}$ mit $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $\lambda_i \neq \lambda_j (i \neq j)$. Dann ist jede Lösung der zugehörigen HDGL darstellbar als Linearkombination der n linear unabhängigen Funktionen $y_{ik}(x) = x^k e^{\lambda_i x}$, $1 \leq i \leq l$, $0 \leq k \leq m_i$.

Bemerkung 7.5

1. Falls das charakteristische Polynom n verschiedene reelle Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ besitzt, so bilden $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$ eine Basis des Vektorraums der Lösungen, das heisst für jede Lösung $y(x)$ gibt es $c_1, c_2, \ldots, c_n$, so dass
$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + c_n e^{\lambda_n x}$$

2. Sei λ eine $k-$fache reelle Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Dann sind
$$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \ldots, x^{k-1} e^{\lambda x}$$
k linear unabhängige Lösungen.

3. Sind $\lambda = \alpha + i\beta$, $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$, ein Paar konjugiert komplexer $k-$ facher Nullstellen, so sind die Funktionen
$$\begin{array}{cc} e^{\alpha x} \cos(\beta x) & e^{\alpha x} \sin(\beta x) \\ \vdots & \vdots \\ x^{k-1} e^{\alpha x} \cos(\beta x) & x^{k-1} e^{\alpha x} \sin(\beta x) \end{array}$$
2 k linear unabhängige Lösungen der DGL
$$\left(e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x} \cos(\beta x) + i e^{\alpha x} \sin(\beta x)\right)$$

Beispiel 7.6

1.
$$\begin{aligned} y'' - y &= 0 \\ p(\lambda) &= \lambda^2 - 1 = 0 = (\lambda - 1)(\lambda + 1) \\ y(x) &= c_1 e^x + c_2 e^{-x} \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} y'' + y &= 0 \\ p(\lambda) &= \lambda^2 + 1 = (\lambda + i)(\lambda - i) \\ y(x) &= c_1 \cos x + c_2 \sin x \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} y^{(4)} + 2y^{(2)} + y &= 0 \\ p(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 &= 0 = (\lambda^2 + 1)^2 = (\lambda - i)^2 (\lambda + i)^2 \end{aligned}$$
Also sind $\cos x, \sin x, x\cos x, x \sin x$ Lösungen.
$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 x \cos x + c_3 \sin x + c_4 x \sin x$$

4.

$$
\begin{aligned}
y^{(4)} - y &= 0 \\
p(\lambda) &= t^4 - 1 = (t^2-1)(t^2+1) = (t+1)(t-1)(t+i)(t-i) \\
y(x) &= c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \sin x + c_4 \cos x
\end{aligned}
$$

5.

$$
\begin{aligned}
2y'' + 20y' + 48y &= 0 \\
p(\lambda) = 2\lambda^2 + 20\lambda + 48 &= 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -4, -6
\end{aligned}
$$

Die Lösung ist

$$y(x) = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{-6x}$$

7.2 Inhomogene DGL

Bisher haben wir nur homogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten betrachtet. Sehr oft treten auch Zusatzterme in der Gleichung auf. Wir haben den folgenden allgemeinen Satz für die Lösungsstruktur linearer DGL.

Satz 7.7

Die allgemeine Lösung einer inhomogenen DGL

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b(x)$$

ist die Summe einer "speziellen" Lösung der inhomogenen DGL und der allgemeinen Lösung der dazugehörigen homogenen DGL

$$\underbrace{y_A(x)}_{\substack{\text{Allgemeine Lösung}\\ \text{der inhomogenen DGL}}} = \underbrace{y_S(x)}_{\substack{\text{Spezielle Lösung}\\ \text{der inhomogenen DGL}}} + \underbrace{y_{AH}(x)}_{\substack{\text{Allgemeine Lösung}\\ \text{der homogenen DGL}}}$$

Beispiel

$$y'' + y = \sin x$$

Um diese inhomogene DGL zu lösen, benötigen wir die allgemeine Lösung der dazugehörigen homogenen DGL $y'' + y = 0$

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow y_{AH}(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

Nun wird noch eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL $y'' + y = \sin x$ benötigt. Wir verifizieren, dass $y(x) = -\frac{1}{2}x\cos x$ eine derartige Lösung ist

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= -\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}x \sin x \\
y''(x) &= \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}x\cos x = \sin x + \frac{1}{2}x\cos x \\
y''(x) + y(x) &= \sin x + \frac{1}{2}x\cos x - \frac{1}{2}x\cos x = \sin x
\end{aligned}
$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL ist damit

$$y(x) = \underbrace{-\frac{1}{2}x\cos x}_{\substack{\text{Spezielle Lösung}\\ \text{der inhomogene DGL}}} + \underbrace{c_1 \sin x + c_2 \cos x}_{\substack{\text{Allgemeine Lösung}\\ \text{der Homogene DGL}}}$$

Bemerkung

Man kann als spezielle Lösung der inhomogenen DGL auch

$$y(x) = -\frac{1}{2}x\cos x + 5\sin x$$

wählen. Dann gilt auch hier $y'' + y = \sin x$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL

$$y(x) = \underbrace{-\frac{1}{2}x\cos x + 5\sin x}_{\substack{\text{Spezielle Lösung}\\ \text{inhomogenen DGL}}} + \underbrace{k_1 \sin x + k_2 \cos x}_{\substack{\text{Allgemeine Lösung}\\ \text{homogenen DGL}}}$$

Sie unterscheidet sich nicht von der Lösung

$$y(x) = -\frac{1}{2}x\cos x + c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

$$c_1 = 5 + k$$

Frage:

Wie kann man eine spezielle Lösung finden?

Antwort:

Zur Lösung der inhomogenen DGL kann man in vielen Fällen einen so genannten "Ansatz vom Typ der rechten Seite" wählen. Hier geht man davon aus, dass die Lösung die gleiche Gestalt wie die Störfunktion haben wird.

z.B.: ist die Störfunktion ein Polynom, so nimmt man an, dass die spezielle Lösung auch ein Polynom sein wird. Ist die Störfunktion eine Exponentialfunktion so nimmt man an, dass die Lösung auch eine Exponentialfunktion sein wird.

Beispiel 7.8

1. Wir betrachten die DGL

$$y'' + y' - 6y = 3e^{-4x}$$

Die dazugehörige homogene DGL

$$y'' + y' - 6y = 0$$
$$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = 2, -3$$

Die Allgemeine Lösung der homogenen DGL ist

$$y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x}$$

Zur Lösung der inhomogenen DGL verwenden wir einen "Ansatz vom Typ der Rechten Seite", gehen also davon aus, dass die spezielle Lösung der inhomogenen DGL eine ähnliche Gestalt hat (wie die Störfunktion)

$$y_s(x) = Ke^{-4x}$$

Für die Ableitungen des Ansatzes haben wir

$$\begin{aligned} y_s'(x) &= -4Ke^{-4x} \\ y_s''(x) &= 16Ke^{-4x} \end{aligned}$$

Eingesetzt in die homogene DGL ergibt sich

$$y'' + y' - 6y = 16Ke^{-4x} - 4Ke^{-4x} - 6Ke^{-4x} = 6Ke^{-4x} = 3e^{-4x}$$

Also $6K = 3 \Rightarrow K = \frac{1}{2}$. Damit ist $y_s(x) = \frac{1}{2}e^{-4x}$ und die allgemeine Lösung der DGL

$$y(x) = \frac{1}{2}e^{-4x} + c_1e^{-3x} + c_2e^{2x} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

2.
$$y'' + y' - 6y = 50 \sin x$$

Wählen wir als "Ansatz vom Typ der rechten Seite"

$$\begin{aligned} y_s(x) &= K_1 \sin x + K_2 \cos x \\ y_s'(x) &= K_1 \cos x - K_2 \sin x \\ {y''}_s(x) &= -K_1 \sin x - K_2 \cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' + y' - 6y &= -K_1 \sin x - K_2 \cos x + K_1 \cos x \\ &\quad - K_2 \sin x + 6K_1 \sin x + 6K_2 \cos x \\ &= (-7K_1 - K_2) \sin x + (-7K_2 + K_1) \cos x = 50 \sin x \\ &\Rightarrow -7K_2 + K_1 = 0 \Rightarrow K_1 = 7K_2 \\ &- 7K_1 - K_2 = 50 \Rightarrow -49K_2 - K_2 = 50 \\ &\Rightarrow K_2 = -1, K_1 = -7 \\ y_s(x) &= -7 \sin x - \cos x \end{aligned}$$

Damit ist die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL

$$y(x) = -7 \sin x - \cos x + c_1e^{-3x} + c_2e^{2x}$$

Ein Problem ergibt sich, wenn als Störfunktion eine Lösung der homogenen DGL erscheint:

3.
$$y'' + y' - 6y = e^{2x}$$

"Der Ansatz vom Typ der rechten Seite"

$$y(x) = Ke^{2x}$$

führt nicht weiter, da dieser Ansatz eingesetzt in homogenen DGL 0 ergibt und nicht e^{2x}. Wir benutzen nun den Ansatz

$$\begin{aligned}
y(x) &= Kxe^{2x} \\
y'(x) &= Ke^{2x} + 2Kxe^{2x} \\
y''(x) &= 2Ke^{2x} + 2Ke^{2x} + 4Kxe^{2x} \\
y'' + y' - 6y &= 4Kxe^{2x} + 4Kxe^{2x} + Ke^{2x} + 2Kxe^{2x} - 6Kxe^{2x} \\
&= 5Ke^{2x} = 10e^{2x} \\
&\Rightarrow K = 2
\end{aligned}$$

Der Ansatz führt also zur Lösung

$$y_s(x) = 2xe^{2x}$$

Insgesamt:

$$y(x) = 2xe^{2x} + c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

3.

$$y'' + y = \sin x$$

$$y_H = c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

Um die spezielle Lösung zu finden, wählen wir einen "Ansatz vom Typ der rechten Seite"

$$\begin{aligned}
y_s(x) &= x\,(K_1 \sin x + K_2 \cos x) \\
y_s'(x) &= (K_1 \sin x + K_2 \cos x) + x\,(K_1 \cos x - K_2 \sin x) \\
y''_s(x) &= K_1 \cos x - K_2 \sin x + K_1 \cos x - K_2 \sin x \\
&\quad + x\,(-K_1 \sin x - K_2 \cos x)
\end{aligned}$$

Eingesetzt in die DGL ergibt sich

$$y''_s(x) + y(x) = 2K_1 \cos x - 2K_2 - x(K_1 \sin x + K_2 \cos x) + x(K_1 \sin x + K_2 \cos x)$$

$$= 2K_1 \cos x - 2K_2 \sin x = \sin x$$

$$\Rightarrow 2K_1 = 0, -2K_2 = 1 \Rightarrow K_1 = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y_s(x) = -\frac{1}{2} x \cos x$$

$$y_A = -\frac{1}{2} x \cos x + c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

Zur Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, kann man einen "Ansatz vom Typ der rechten Seite" wählen. Die Idee ist, dass die Lösungsfunktion und Störfunktion ähnlich sind.

Störfunktion	Ansatz für Lösung $y_s(x)$
$P_n(x)$	$Q_n(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$
Ke^{ax}	Ke^{ax}
$A \sin bx$ $A \cos bx$	$K_1 \sin bx + K_2 \cos bx$
$Ae^{\alpha x} \sin \beta x$ $Be^{\alpha x} \cos \beta x$	$K_1 e^{\alpha x} \sin \beta x + K_2 e^{\alpha x} \cos \beta x$
$P_n(x) e^{\alpha x} \sin \beta x$	$e^{\alpha x}[R_n(x) \sin \beta x + S_n(x) \cos \beta x]$

wobei P_n, Q_n, S_n, R_n Polynome von Grad n sind.

Bemerkung 7.9

1. Liegt eine Linearkombination der Störfunktion vor, so hat man auch als Ansatz eine entsprechende Linearkombination zu wählen. Dies ist das Superpositionsprinzip. end of this list?

   Superpositionsprinzip:

   Ist $y_1(c)$ eine spezielle Lösung der lineraren Differentialgleichung

   $$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0(x) y = b_1(x)$$

   und $y_2(x)$ eine spezielle Lösung der LDGL

   $$y^n(x) + \cdots + a_0(x) y = b_2(x)$$

   dann ist $y_1(x) + y_2(x)$ eine spezielle Lösung der DGL

   $$y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0(x) y = b_1(x) + b_2(x)$$

   Beispiel

   Die DGL $y'' + y' - 6y = 50 \sin x$ hat die spezielle Lösung

   $$y_s(x) = -7 \sin x - \cos x$$

   und die DGL $y'' + y' - 6y = 10e^{2x}$ hat die spezielle Lösung

   $$y_s(x) = 2xe^{2x}$$

   Die DGL $y'' + y' - 6y = 50 \sin x + 10e^{2x}$ hat die spezielle Lösung

   $$y_s(x) = -7 \sin x - \cos x + 2xe^{2x}$$

Die allgemeine Lösung ist

$$y(x) = -7\sin x - \cos x + 2xe^{2x} + c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x}$$

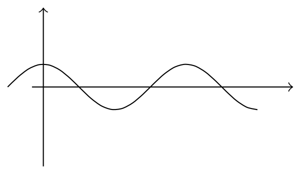
2. Falls $\lambda = \alpha + i\beta$ (β kann null sein) eine $m-$fache Nullstelle der charakteristischen Polynoms von

$$(H) \qquad y^n(x) + a_n y^{(n-1)} + \cdots + a_0 = 0$$

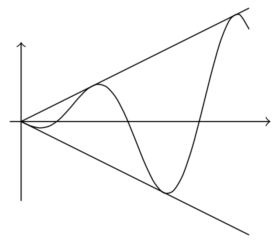
ist (Resonanzfall) , so muss man der Ansatz für $y_s(x)$ mit dem Faktor x^m multipliziert werden.

Beispiel

$y'' + y = \sin x$ hat die spezielle Lösung $y_s = -\frac{1}{2} x \cos x$



$\cos x$



$-\frac{1}{2} x \cos x$

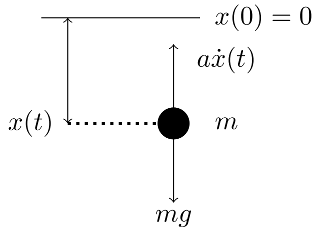
Zusatzbedingungen einer DGL. Anfangs und Randbedingungen

Die in der allgemeinen Lösung einer DGL $n-$ter Ordnung auftretenden Parameter lassen sich durch Zusatzbedingungen festlegen. Physikalisch sinnvolle Zusatzbedingungen werden meist in der Form von Anfangsbedingungen oder Randbedingungen vorgegeben.

Durch Vorgabe von derartigen Bedingungen eliminiert man die Parameter aus der allgemeinen Lösung der DGL und erhält damit eine partikuläre Lösung.

Beispiel 7.10

Freier Fall mit Reibung



$m\ddot{x} = mg - a\dot{x}$. Anfangsbedingungen: $x(0) = 0; v(0) = \dot{x}(0) = 0$

$$mx''(t) + ax'(t) = mg$$

$$(H) \qquad mx''(t) + ax'(t) = 0$$

$$p(\lambda) = m\lambda^2 + a\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0, \lambda = -\frac{a}{m}$$

$$x_h(t) = c_1 + c_2 e^{-\frac{a}{m}t}$$

Für die spezielle Lösung, wählen wir als Ansatz $x_s(t) = kt$

$$\begin{pmatrix} b(t) = mg = \text{ konstant, aber } e^{0\cdot t} = 1 = \text{ konstant} \\ \text{ist eine Lösung der } (H) \end{pmatrix}$$

$$x'(t) = k \qquad x''(t) = 0$$

$$mx''(t) + ax'(t) = ak = mg \Rightarrow k = \frac{mg}{a}$$

Allgemeine Lösung

$$x(t) = x_h(t) + x_s(t) = c_1 + c_2 e^{-\frac{a}{m}t} + \frac{mg}{a}t$$

Anfangsbedingungen

$$x(0) = 0 = c_1 + c_2 = 0$$

$$x'(t) = c_2\left(-\frac{a}{m}\right)e^{-\frac{a}{m}t} + \frac{mg}{a} = 0$$

$$x'(0) = 0 \Rightarrow c_2\left(-\frac{a}{m}\right) + \frac{mg}{a} = 0$$

$$c_2 = \frac{m^2 g}{a^2} \qquad c_1 = -\frac{m^2 g}{a^2}$$

$$\Rightarrow x(t) = -\frac{m^2 g}{a^2} + \frac{m^2 g}{a^2} e^{-\frac{a}{m}t} + \frac{mg}{a}t$$

$$x(t) = \frac{mg}{a}t - \frac{m^2 g}{a^2}\left[1 - e^{-\frac{a}{m}t}\right]$$

Eine partikuläre Lösung einer DGL $n-$ter Ordnung

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) + \cdots + a_0 y(x) = b(x)$$

kann man aus der allgemeinen Lösung

$$y(x) = y(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

der DGL erhalten

- Durch die Vorgabe von Anfangsbedingungen

  $$y(x_0) = A_0$$
  $$y'(x_0) = A_1$$
  $$y^{(n-1)}(x_0) = A_n$$

  Funktionswert und weitere Ableitungen bis zur $(n-1)-$ten an einer speziellen Stelle x_0.

- Durch die Vorgabe von Randbedingungen

  $$y(x_1) = B_1, y(x_2) = B_2, \ldots, y(x_n) = B_n$$

  Funktionswerte an n verschiedenen Stellen

Beispiel 7.11

Lineares Federpendel:

$$mx''(t) + K_1 x = 0, \omega^2 = \frac{K}{m}$$

$$x''(t) + \omega^2 x = 0 \qquad (H)$$

$$p(\lambda) : \lambda^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\omega i$$

Homogene Lösung: $x_h(t) = c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t$. Wenn wir die folgenden Zusatzbedingungen haben

(i) $x(0) = 1, x'(0) = 2\omega$

$$x'(t) = -c_1\omega \sin\omega t + c_2\omega \cos\omega t$$

$$x(0) = 1 \Rightarrow c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = c_1 = 1$$

$$x'(0) = 2\omega \Rightarrow -c_1\omega \sin 0 + c_2\omega \cos 0 = 2\omega$$

$$\Rightarrow \omega c_2 = 2\omega \Rightarrow c_2 = 2$$

$$\Rightarrow x_p(t) = \cos\omega t + 2\sin\omega t$$

(ii) Mit Randbedingungen: $x(0) = 1$, $x\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) = 1$

$$x(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = c_1 = 1$$

$$x\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) = c_1 \cos\frac{\pi}{2} + c_2 \sin\frac{\pi}{2} = c_2 = 1$$

Also $x_p(t) = \cos\omega t + \sin\omega t$

7.3 Lineare DGL erster Ordnung (mit allgemeinen Koeffizienten)

Die LDGL hat die allgemeine Form (mit $b(x)$ als inhomogener Term)

$$y'(x) = a(x)y + b(x)$$

Und $y'(x) = a(x)y$ ist die zugehörige homogene Gleichung.

Lösung von $y'(x) = a(x)y$:

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = a(x)$$

d.h. $(\ln y(x))' = a(x)$. Sei $A(x)$ eine Stammfunktion von $a(x)$, so ist

$$\ln y(x) = A(x) + c$$

Also $y(x) = e^{A(x)} \cdot e^c = Ke^{A(x)}$

Satz 7.12

Die allgemeine Lösung von $y' = ay$ ist $y(x) = Ke^{A(x)}$ wobei $K \in \mathbb{R}$ und $A'(x) = a(x)$

Beispiel

$$xy' - 2y = 0$$

$$y' = \frac{2}{x}y \Rightarrow a(x) = \frac{2}{x}, A(x) = 2\ln|x| = \ln x^2$$

$$e^{A(x)} = e^{\ln x^2} = x^2$$

$$\Rightarrow \text{ Lösung von } y'(x) = \frac{2}{x}y \Rightarrow y(x) = Kx^2$$

Jetzt suchen wir eine spezielle Lösung von $y' = a(x)y + b(x)$

Ansatz

$y = uv$ wobei u, v Funktionen sind. Dann ist

$$y' = u'v + uv'$$

und

$$a(x)y + b(x) = ay + b = u'v + uv'$$

$$a(uv) + b = u'v + uv'$$

$$\Rightarrow u'v + u[v' - av] = b$$

Jetzt wählen wir v, so dass

$$v' - av = 0$$

d.h.

$$v = e^{A(x)}$$

Dann ist $u'v = b$ d.h. $u' = be^{-A(x)}$ d.h. u ist eine Stammfunktion von $be^{-A(x)}$

Satz 7.13

Seien $A(x)$ eine Stammfunktion von $a(x)$ und $U(x)$ ein Stammfunktion von $be^{-A(x)}$. Dann ist $y(x) = e^{A(x)} * U$ Lösung von $y' = a(x)y + b(x)$

Korollar 7.14

Die Allgemeine Lösung der LDGL $y' = ay+b$ ist durch $y(x) = e^{A(x)} \int b(x)e^{-A(x)}dx + Ke^{A(x)}$ gegeben, wobei $K \in \mathbb{R}$, $A(x)$ eine Stammfunktion von $a(x)$ ist.

Beispiel 7.15

1. $$xy' - 2y = 2x^4$$

$$\Rightarrow y' = \underbrace{\frac{2}{x}}_{a(x)} y + \underbrace{2x^3}_{b(x)}$$

$$A(x) = 2\ln|x| = \ln x^2$$

$$Ke^{A(x)} = Kx^2 \text{ ist die Lösung der homogenen DGL } y' = ay$$

Wir bestimmen jetzt die Stammfunktion von

$$b(x) \cdot e^{-A(x)} = 2x^3 e^{-\ln(x)^2} = 2x^3 x^{-2} = 2x$$

$$2\frac{x^3}{x^2} = 2x$$

Also $b(x)e^{-Ax}$ ist eine Stammfunktion von $\int 2x dx = x^2$ und $x^2 e^{A(x)} = x^4$. Somit ist die allgemeine Lösung

$$y(x) = x^4 + Kx^2$$

2.

$$y' = 4x + 5y - 3$$

$$y' - \underbrace{5}_{a} y = \underbrace{4x - 3}_{b}$$

LDGL mit konstanten Koeffizienten. Störfunktion ist $4x - 3$.

HDGL:

$$y' - 5y = 0$$

$$\frac{y'}{y} = 5$$

$$\ln y(x) = 5x + c$$

$$y_h(x) = Ke^{5x} \text{ Hom. Lösung}$$

$$A(x) = 5x$$

Spez. Lösung: Sei $U(x)$ Stammfunktion von $(4x - 3)e^{-5x}$. Dann ist die spezielle Lösung

$$e^{5x}U(x) = e^{5x} \int (4x - 3)e^{-5x} dx$$

$$\int \underbrace{(4x-3)}_{u} \underbrace{e^{-5x}}_{v'} dx$$

$$\stackrel{P.I.}{=} (4x - 3)\frac{e^{-5x}}{-5} + \frac{4}{5} \int e^{-5x} dx$$

$$= \left[\left(\frac{4x - 3}{-5} \right) - \frac{4}{25} \right] e^{-5x}$$

$$= \left(\frac{-4x}{-5} + \frac{11}{25} \right) e^{-5x}$$

$$\Rightarrow \text{ Spezielle Lösung: } y_s(x) = e^{5x} \cdot U(x) = \frac{-4x}{5} + \frac{11}{25}$$

Allgemeine Lösung:

$$y(x) = Ke^{5x} - \frac{4x}{5} + \frac{11}{25}$$

7.4 Separierbare DGL

Definition 7.16
Eine separierbare DGL ist von der Form

$$y' = f(x)g(y)$$

Ein einfaches Verfahren, die so genannte "Separation der Variablen", lässt sich anwenden, wenn die DGL separierbar ist. Der "Trick": Wir trennen die Terme voneinander und integrieren dann. Dabei ist es hilfreich, $y' = \frac{dy}{dx}$ zu schreiben und die Formel dy bzw. dx als Zähler bzw. Nenner des Bruches aufzufassen.

Beispiel 7.17

1.
$$y' = 2xy$$

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = 2xdx$$

$$\downarrow$$

trennen formel x bzw y - Terme

Jetzt integrieren wir auf beiden Seiten

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2xdx$$

$$\ln|y| = x^2 + c$$

Da wir an der Lösung y interessiert sind und nicht am Logarithmus davon, wenden wir die Exponentialfunktion an

$$|y| = e^{x^2+c} = e^c e^{x^2}$$

Links und rechts stehen nur positive Grössen. Wenn wir aber auf der rechten Seite nicht nur positive konstante $e^c > 0$ zulassen, sondern irgendwelche Konstanten $K \in \mathbb{R}$ erhalten wir

$$y(x) = Ke^{x^2}$$

2.
$$y' = 1 + y^2 \text{ ist separierbar}$$

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int dx$$

$$\Rightarrow \arctan y = x + c \Leftrightarrow y = \tan(x+c)$$

Bemerkung 7.18

$y' = f(x)g(x)$ hat die konstanten Lösungen $y = y_0$ für alle y_0 mit $g(y_0) = 0$. Der Fall $g(y) = 0$ muss gesondert betrachtet werden.

3.
$$|x|, |y| < 1, y' = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$$

hat keine konstanten Lösungen

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \arcsin y = \arcsin x + c \\ &y = \sin[\arcsin x + c] \\ &= x \cos c \pm \sqrt{1-x^2} \sin c \\ &= ax + b\sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a^2 + b^2 = 1$. Rückeinsetzen in die DGL liefert die Zusatzbedingung

$$y' = a - \frac{bx}{\sqrt{1-x^2}} > 0, \qquad (1 + y^2 > 0)$$

Kapitel 8

Differentialrechnung in $\mathbb{R}^n$

8.1 Partielle Ableitungen und Differential

Wie kann man die Begriffe der Differentialrechnung auf Funktionen $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ erweitern?

Missing content?? page 113 top

Funktionen in mehreren Variablen sind ein *bisschen* komplizierter als Funktionen in einer Variable.

Beispiel

1. $f(x) = x^2+5$ ist im Ursprung stetig, da $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Aber $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ist im Ursprung nicht stetig.

Where is number 2 of the beispiel??

is this continuation of the Beispiel, or is it outside??

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \frac{x\cdot y}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0) \qquad \lim_{\substack{y\to 0\\ x=0}} \frac{x\cdot y}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0)$$

Aber der Limes entlang der Gerade $y = mx$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ y=mx}} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{(1+m^2)x^2} = \underset{\substack{\downarrow\\ \text{Hängt von } m \text{ ab}}}{\frac{m}{1+m^2}}$$

und $\frac{m}{1+m^2} \neq 0$, falls $m \neq 0$. Eine Funktion $f(x,y)$ an der Stelle (x_0,y_0) ist stetig wenn der Limes $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ in jeder Richtung den gleichen Wert hat.

Definition 8.1
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $a \in \Omega$

1. f hat den Grenzwert $c \in \mathbb{R}$, d.h
$$\lim_{x \to a} f(x) = c$$
wenn es zu jeder (beliebig kleinen) Schranke $\varepsilon > 0$, eine δ-umgebung
$$B_\delta(a) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - a| < \delta\}$$
gibt, so dass $|f(x) - a| < \varepsilon$ für alle $x \in \Omega \cap B_\delta(a), x \neq a$ gilt.
2. f heisst in $a \in \Omega$ stetig, wenn $\lim_{x \to a} f'(x) = f(a)$ gilt.
3. f heisst in Ω stetig, wenn f in allen $a \in \Omega$ stetig ist.

Die Summe, das Produkt, der Quotient (Nenner ungleich Null) stetiger Funktion sind stetig.

f besitzt keinen Grenzwert in x_0 wenn sich bei Annäherungen an x_0 auf verschiedenen Kurven (z.b. Geraden) verschiedene Grenzwerte bzw. keinen Grenzwert ergeben bzw. ergibt.

Sandwichlemma

Seien f, g, h Funktionen, wobei $g < f < h$. Wenn $\lim_{x \to a} g = L = \lim_{x \to a} h$ gilt, dann ergibt $\lim_{x \to a} f = L$.

Da $\lim_{(x,y) \to (0,0)} |y| = 0$ gilt, $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = 0 \Rightarrow f$ ist in (0,0) stetig.

Oder

Für Grenzwertbestimmungen (also auch für Stetigkeitsuntersuchungen) ist es oft nützlich, die Funktionen mittels Polarkoordinaten umzuschreiben. Vor allem bei rationalen Funktionen.

Hierbei gilt $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, wobei $r =$ Länge des Vektors (x, y) und φ der Winkel. Nun lassen wir die Länge r gegen 0 gehen.

Beispiel

1. Die Funktionen
   - $f(x, y) = x^2 + y^2$
   - $f(x, y, z) = x^3 + \frac{x^2}{y^2+1} + z$
   - $f(x, y) = 4x^2y^3 + 3xy$
   - $f(x, y) = \cos xy$

sind stetig, da sie aus steigen Funktionen zusammengesetzt sind.

2.
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{für} \quad \text{(x,y)} \neq (0,0) \\ 0 & \text{für} \quad \text{(x,y)} = (0,0) \end{cases}$$

Für $(x,y) \neq (0,0)$ ist f als Quotient von stetigen Funktionen stetig. Es verbleibt f im Punkt $(0,0)$ zu untersuchen. Da

$$\left| \frac{x^2}{x^2+y^2} \right| \leq 1$$

$$0 < |f(x,y)| < |y|$$

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \frac{\left(r^2\cos^2\theta\right)\left(r\sin\theta\right)}{r^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)} = r\cos^2\theta\sin\theta$$

$$\lim_{r\to 0} f(r,\theta) = \lim_{r\to 0} r\cos^2\theta\sin\theta = 0$$

3. Wir können nochmals die Stetigkeit der Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{für} \quad \text{(x,y)} \neq (0,0) \\ 0 & \text{für} \quad \text{(x,y)} = (0,0) \end{cases}$$

mittels Polarkoordinaten untersuchen

$$f(x,y) = \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2} = \cos\theta\sin\theta$$

$$\lim_{r\to 0} f(x,y) = \cos\theta\sin\theta$$

hängt von θ ab.

$$\Rightarrow f \text{ in (0,0) nicht stetig}$$

Bemerkung

Eine trickreiche Variante Grenzwerte zu berechnen, ergibt sich durch Substitution, d.h. man berechnet den Grenzwert is this supposed to be inside the list or out??

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f\left(g(x,y)\right)$$

indem man zunächst $t = g(x,y)$ setzt und den Grenzwert

$$t_0 = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)$$

bestimmt. Dann ist

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f\left(g(x,y)\right) = \lim_{t\to t_0} f(t)$$

Beispiel

$$\lim_{(x,y)\to(4,0)} \frac{\sin xy}{xy}$$

Hier ist $g(x,y) = xy$, $\lim\limits_{(x,y)\to(4,0)} g(x,y) = 0$. Somit

$$\lim_{(x,y)\to(4,0)} \frac{\sin xy}{xy} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

Wir werden auch sehen, dass die Existenz der Ableitungen in einigen Richtungen ungenügend für die Differenzierbarkeit der Funktion ist.

Was bedeutet die Ableitung in einzelne Richtungen?

Beispiel

Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \to \left(x^2 + xy\right)\cos(xy)$$

Man kann für jedes y, die Funktion

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to \left(x^2 + xy\right)(\cos xy)$$

als Funktion einer Variablen x auffassen und die Ableitung davon berechnen. Das Resultat wird mit $\frac{\partial f}{\partial x}$ bezeichnet und ist die erste partielle Ableitung von f nach x. In diesem Fall ist es durch

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (2x+y)(\cos xy) - (x^2+xy)y\sin(xy)$$

gegeben.

Analog definiert man $\frac{\partial f}{\partial y}$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x(\cos xy) - (x^2+xy)x\sin(xy)$$

Die allgemeine Definition nimmt folgende Gestalt an. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. In Zukunft bezeichnen wir die $i-$te Koordinate eines Vektors $x \in \mathbb{R}^n$ mit x^i; also ist $x = \left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right)$.

Sei $e_i := (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ der $i-$te Basisvektor von $\mathbb{R}^n$

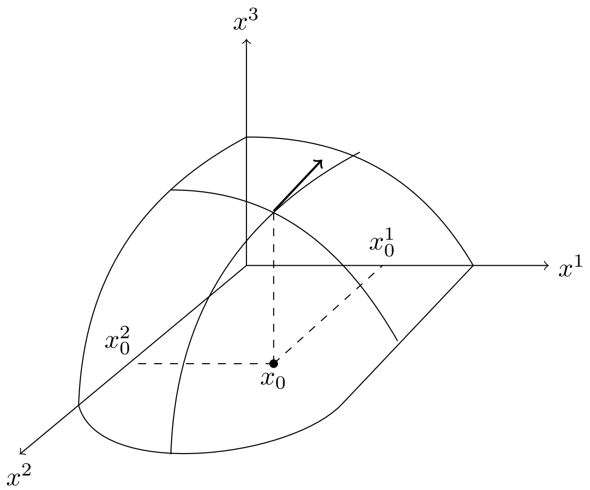
Definition 8.2
Die Funktion $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heisst an der Stelle $x_0 \in \Omega$ in Richtung e_i (oder nach x^i) partiell differenzierbar, falls der Limes

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) = f_{x^i}(x_0) := \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(x_0 + he_i) - f(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f\left({x_0}^1, {x_0}^2, \ldots, {x_0}^i + h, {x_0}^{i+1}, \ldots, {x_0}^n\right) - f\left({x_0}^1, \ldots, {x_0}^n\right)}{h}$$

existiert.

Bemerkung 8.3



Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\left(x_0^1, x_0^2\right) \in \mathbb{R}^2$. Wir betrachten die Scharen von f

$$f(\cdot, x_0^2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

und

$$f(x_0^1, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$\frac{\partial f}{\partial x^1}$, $\frac{\partial f}{\partial x^2}$ sind die zu dem Anstieg der Tangente entsprechenden Schnittkurven.

Der Graph von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist eine Fläche im Raum.

Beispiel

1. $f(x, y, z) = \cos yz + \sin xy$
   - $\frac{\partial f}{\partial x} = y \cos xy$
   - $\frac{\partial f}{\partial y} = -\sin(yz) \cdot z + \cos(xy) \cdot x$
   - $\frac{\partial f}{\partial z} = -\sin(yz) \cdot y$
2. $$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim \frac{\frac{h^3 \cdot 0}{h^2} - 0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim \frac{\frac{h \cdot 0^3}{0+h^2} - 0}{h} = 0$$

Bemerkung

Für Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ einer Variable impliziert die Differenzierbarkeit in x_0, die Stetigkeit in x_0 und zudem eine gute Approximation von f durch eine affine Funktion in einer Umgebung von x_0. Folgendes Beispiel zeigt, dass in $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ partielle Differenzierbarkeit keine analoge Approximationseigenschaften oder Stetigkeit impliziert:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

Für alle $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ist f in beiden Richtungen partiell differenzierbar:

- Für $(x_0, y_0) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \left.\frac{y\left(x^2+y^2\right) - 2x^2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right|_{(x,y)=(x_0,y_0)} = \frac{y_0^3 - x_0^2 y_0}{\left({x_0}^2+{y_0}^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \left.\frac{x\left(x^2+y^2\right) - 2xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right|_{(x,y)\neq(x_0,y_0)} = \frac{x^2 - xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

- Für $(x_0, y_0) = (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{\overbrace{f(0+h,0) - f(0,0)}^{f(x_0+he_1)-f(x_0)}}{h} = \lim \frac{0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{\overbrace{f(0,0+h) - f(0,0)}^{f(x_0+he_2)-f(x_0)}}{h} = \lim \frac{0}{h} = 0$$

Im Ursprung besitzt f beide partielle Ableitungen, sie ist aber nicht stetig. Der Grund ist, dass die partielle Ableitungen nur partielle Informationen geben. Wir müssen die Differenzierbarkeit in irgendeiner anderen Weise verallgemeinern.

Die Lösung dieses Problem ist, dass man eine Approximationseigenschaft durch eine lineare Abbildung postuliert.

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0; $f'(x_0)$ existiert. In diesem Fall kann f für alle x nahe x_0 durch die Funktion $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ gut approximiert werden. Das heisst, dass

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x, x_0) \quad \text{mit} \lim_{x \to x_0} \frac{R(x,x_0)}{x - x_0} = 0$$

Bemerkung

$f'(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}'$ sollte als lineare Abbildung interpretiert werden

Lineare Abbildungen

Eine Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist linear, falls für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$$

Eine solche Abbildung ist durch ihre Werte

$$A(e_i) := A_1, A(e_2) := A_2, \ldots, A(e_n) := A_n$$

auf der Standardbasis $e_1, \ldots, e_n$ eindeutig bestimmt. Aus $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i e_i$ und der Linearität folgt nämlich

$$A(x) = \sum_{i=1}^{n} x^i A(e_i) = \sum_{i=1}^{n} A_i x^i \qquad (*)$$

Umgekehrt bestimmt ein Vektor $(A_1, \ldots, A_n)$ mittels der Formel $(*)$ eine lineare Abbildung.

Schreiben wir $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$ für einen Vektor $x = (x^1)_{1 \leq i \leq n}$ und $A = (A_1, \ldots, A_n)$ für die Darstellung einer linearen Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bezüglich die Standard Basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ so ist

$$A(x) = (A_1, \ldots, A_n) \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \sum A_i x^i$$

Definition 8.4

Die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heisst an der Stelle $x_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ differenzierbar, falls es eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + R(x_0, x)$$

wobei $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{R(x, x_0)}{|x - x_0|} = 0$

In diesem Fall heisst A das Differential an der Stelle x_0 und wird mit $\underset{x_0}{df}$ bezeichnet, d.h. f ist total differenzierbar in $x_0 = \left(x_0^1, \ldots, x_0^n\right)$, falls reelle Zahlen $A_1, \ldots, A_n$ existieren, so dass gilt

$$f(x) = f(x_0) + A_1\left(x^1 - x_0^1\right) + A_2\left(x^2 - x_0^2\right) + \ldots + A_n\left(x^n - x_0^n\right) + R(x, x_0)$$

mit $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{R(x, x_0)}{|x - x_0|} = 0$

Bemerkung: Geometrische Interpretation

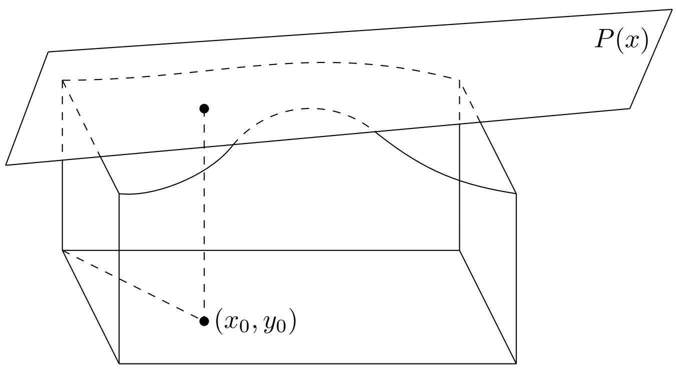
Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \in \mathbb{R}^2$. Wir können die differenzierbare Funktion nahe dem Punkt $x_0 = \left(x_0^1, x_0^2\right)$ mit Hilfe der linearen Funktion

$$P(x) = P\left(x^1, x^2\right) = f\left(x_0^1, x_0^2\right) + \underbrace{A_1\left(x^1 - x_0^1\right) + A_2\left(x^2 - x_0^2\right)}_{d_{x_0} f(x - x_0)}$$

approximieren.

Die Differenz $\underbrace{f(x) - P(x)}_{d_{x_0} f(x-x_0)} \underset{x \to x_0}{\to} 0$ schneller als $(x - a)$.

$P(x)$ ist eine Ebene. Es ist die Tangentialebene zu f an der Stelle x_0 und spielt die Rolle der Tangente für Funktionen in einer Variable.



Beispiel 8.5

a) Jede affin lineare Funktion $f(x) = Ax + b$, $x \in \mathbb{R}^n$, wobei $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ linear, $b \in \mathbb{R}$ ist an jeder Stelle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar, mit $\underset{x_0}{df} = A$ unabhängig von x_0, da

$$f(x) - f(x_0) - A(x - x_0) = 0 \qquad \forall x, x_0 \in \mathbb{R}^n$$

b) Koordinatenfunktionen $x^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\left(x^1, x^2, \dots, x^n\right) \mapsto x^i$, $x^i(x) = x^i$. Dann ist x^i differenzierbar an jeder Stelle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\left. dx^i \right|_{x=x_0} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

Die Differentiale $dx^1, dx^2, \dots, dx^n$ bilden also an jeder Stelle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ eine Basis des Raumes $L(\mathbb{R}^n : \mathbb{R}) := \{A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; A \text{ linear}\}$, wobei wir $A \in L(\mathbb{R}^n : \mathbb{R})$ mit der Darstellung $A = (A_1, \dots, A_n)$ bzgl. der Standardbasis $\{e_1, \dots, e_n\}$ der $\mathbb{R}^n$ identifizieren, und mit $A_i = A(e_i)$

$$dx^i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

$$\left(dx^i(e_1), dx^i(e_2), \dots, dx^i(e_n)\right)$$

Da $dx^i(e_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ gilt, ist $\left(dx^i\right)_{1\leq i\leq n}$ die duale Basis von $L(\mathbb{R}^n : \mathbb{R})$ zur Standardbasis $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ des $\mathbb{R}^n$.

c) Jedes $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \in C^1(\mathbb{R})$ besitzt das Differential

$$df(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)\,dx = f'(x_0)\,dx$$

d.h. $f'(x_0)$ ist die Darstellung von $df(x_0)$ bezüglich der Basis dx von $L(\mathbb{R} : \mathbb{R})$

d) $f(x,y) = xe^y$, $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist an jeder Stelle $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ differenzierbar und es gilt

$$df(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right) = \left(e^{y_0}, xe^{y_0}\right)$$

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = \underbrace{f(x,y) - f(x_0,y)}_{\swarrow} + f(x_0,y) - f(x_0,y_0)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\eta)(y-y_0)$$

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung, mit geeigneten Zwischenstellen $\xi = \xi(y)$ und η

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + R(x,y)$$

mit

$$\begin{aligned} R(x,y) = &\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right](x-x_0) \\ &+ \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\eta) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right](y-y_0) \end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit der Funktionen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^y \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^y$$

können wir den "Fehler" $R(x,y)$ leicht abschätzen

$$\frac{|R(x,y)|}{|(x,y)-(x_0,y_0)|} \leq \sup_{\substack{|\xi-x_0|<|x-x_0| \\ |\eta-y_0|<|y-y_0|}} \left(|e^y - e^{y_0}| + |x_0||e^\eta - e^{y_0}|\right)$$

Für $(x,y) \to (x_0,y_0)$, $(x,y) \neq (x_0,y_0)$: d.h. es gilt

$$\frac{R(x,y)}{|(x,y)-(x_0,y_0)|} \to 0$$

d.h. es gilt

$$\frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}{|(x,y)-(x_0,y_0)|} \underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{\longrightarrow} 0$$

d.h. $f(x,y)$ ist in (x_0,y_0) differenzierbar und

$$df(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$$

e) Die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ist in $(0,0)$ differenzierbar.

Wir haben schon gesehen, dass $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Dann gilt

$$\frac{|R|}{|(x,y)|} = \frac{\left|f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)\right|}{|(x-0,y-0)|}$$

$$= \frac{|f(x,y) - 0 - 0 - 0|}{|(x,y)|} = \frac{|f(x,y)|}{|(x,y)|}$$

Zu untersuchen ist

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|R((x,y),(0,0))|}{(x,y)-(0,0)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y)|}{|(x,y)|}$$

Mittels Polarkoordinaten ist dies noch offensichtlicher

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y)|}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^4 \cos^3\theta \sin\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0} r^2 \cos^3\theta \sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow f \text{ in } (0,0) \text{ differenzierbar}$$

Gibt es eine Beziehung zwischen dem Differential und den partiellen Ableitungen?

Bemerkung 8.6

Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ differenzierbar an der Stelle $x_0 \in \Omega$. Dann existieren die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)$, $i = 1, \ldots, n$ und dass Differential kann als

$$d_{y_0} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0)\right)$$

dargestellt werden.

Beweis

Sei f an der Stelle x_0 differenzierbar

$$\Rightarrow f(x_0 + he_i) = f(x_0) + (d_{x_0}f)(he_i) + R(x_0 + he_i, x_0)$$

wobei

$$\lim_{h \to 0} \frac{R(x_0 + he_i, x_0)}{h} = \lim \frac{f(x_0 + he_i) - f(x_0)(d_{x_0}f(he_i))}{h} = 0$$

$$\Rightarrow \lim \frac{f(x_0 + he_i) - f(x_0)}{h} = \lim \frac{hd_{x_0}f(e_i)}{h} = d_{x_0}f(e_i)$$

d.h. $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)$ existiert und $= d_{x_0}f(e_i)$.

Da $\left(dx^i\right)_{i=1,\ldots,n}$ die zur $(e_j)_{1\leq j\leq n}$ duale Basis ist

$$d_{x_0}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)\, dx^i = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0)\right)$$

Beispiel

Die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ist in $(0,0)$ nicht differenzierbar (f ist in $(0,0)$ nicht stetig)

Satz 8.7

Falls $f : \Omega \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}$ differenzierbar ist, ist sie in x_0 auch stetig.

Beweis

Folgt aus der Definition

Definition 8.8

$f : \Omega \to \mathbb{R}$ heisst von der Klasse C^1, $\left(f \in C^1(\Omega)\right)$, falls f an jeder Stelle $x_0 \in \Omega$ und in jede Richtung e_i partiell differenzierbar ist und die Funktionen $x \to \frac{\partial f}{\partial x^i}(x)$ für jedes $1 \leq i \leq n$ auf Ω stetig sind.

Satz 8.9

Sei $f \in C^1(\Omega)$. Dann ist f an jeder Stelle $x_0 \in \Omega$ differenzierbar.

Beweis

Für $n = 3$ seien $x = \left(x^1, x^2, x^3\right)$, $x_0 = \left(x_0^1, x_0^2, x_0^3\right)$. Dann ist

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) = &\left\{ f\left(x^1, x^2, x^3\right) - f\left(x^1, x^2, x_0^3\right)\right\} \\ &+ \left\{ f\left(x^1, x^2, x_0^3\right) - f\left(x^1, x_0^2, x_0^3\right)\right\} \\ &+ \left\{ f\left(x^1, x_0^2, x_0^3\right) - f\left(x_0^1, x_0^2, x_0^3\right)\right\} \end{aligned}$$

Nach dem MWS der DR gilt:

$$f\left(x^1, x_0^2, x_0^3\right) - f\left(x_0^1, x_0^2, x_0^3\right) = \frac{\partial f}{\partial x^1}\left(\xi^1, x_0^2, x_0^3\right)\left(x^1 - x_0^1\right)$$

wobei ξ^1 zwischen x_0^1 und x^1. Analog:

$$f\left(x^1, x^2, x_0^3\right) - f\left(x^1, x_0^2, x_0^3\right) = \frac{\partial f}{\partial x^2}\left(x^1, \xi^2, x_0^3\right)\left(x^2 - x_0^2\right)$$

wobei $\xi^2 \in \left(x_0^2, x^2\right)$ und

$$f\left(x^1, x^2, x^3\right) - f\left(x^1, x^2, x_0^3\right) = \frac{\partial f}{\partial x^3}\left(x^1, x^2, \xi^3\right)\left(x^3 - x_0^3\right)$$

Eingesetzt in den Ausdruck für $f(x) - f(x_0)$ ergibt:

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) = &\frac{\partial f}{\partial x^1}\left(\xi^1, x_0^2, x_0^3\right)\left(x^1 - x_0^1\right) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x^2}\left(x^1, \xi^2, x_0^3\right)\left(x^2 - x_0^2\right) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x^3}\left(x^1, x^2, \xi^3\right)\left(x^3 - x_0^3\right) \end{aligned}$$

Also

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x^1}\left(x_0^1, x_0^2, x_0^3\right)\left(x^i - x_0^i\right) + R(x_0, x)$$

Wobei

$$\begin{aligned} R(x_0, x) = &\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}\left(\xi^1, x_0^2, x_0^3\right) - \frac{\partial f}{\partial x^1}\left(x_0^1, x_0^2, x_0^3\right)\right)\left(x^1 - x_0^1\right) \\ &+ \left(\frac{\partial f}{\partial x^2}\left(x^1, \xi^2, x_0^3\right) - \frac{\partial f}{\partial x^2}\left(x_0^1, x_0^2, x_0^3\right)\right)\left(x^2 - x_0^2\right) \\ &+ \left(\frac{\partial f}{\partial x^3}\left(x^1, x^2, \xi^3\right) - \frac{\partial f}{\partial x^3}\left(x_0^1, x_0^2, x_0^3\right)\right)\left(x^3 - x_0^3\right) \end{aligned}$$

Also

$$|R(x, x_0)| < |x - x_0| \underbrace{\{|(\ldots)| + |(\ldots)| + |(\ldots)|\}}_{\substack{\to 0 \text{ mit } x \to x_0 \\ \text{weil } \frac{\partial f}{\partial x^i} \text{ stetig sind}}}$$

Also ist $\lim \frac{R(x,x_0)}{(x-x_0)} = 0$ und $f(x)$ ist differenzierbar.

Beispiel 8.10

Polynome auf $\mathbb{R}^n$ sind von der Klasse C^1. Für jeden Multiindex $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ definieren wir die Monomialfunktion

$$x^\alpha := \left(x^0\right)^{\alpha_0} \left(x^1\right)^{\alpha_1} \ldots (x^n)^{\alpha_n}$$

Ein Polynom von Grad $\leq N$ ist dann gegeben durch

$$p(x) = \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha x^\alpha$$

wobei $|\alpha| = \alpha_0 + \ldots + \alpha_n$

Pages 135.1 - 135.2 are a Zusammenfassung, not sure if needed to be included

8.2 Differentiationsregeln

Ganz analog zum eindimensionalen Fall gelten folgende Differentiationsregeln

Satz 8.11

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, sowie $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in \Omega$ differenzierbar. Dann gilt

1. $d(f + g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0)$
2. $d(fg)(x_0) = g(x_0)\, df(x_0) + f(x_0)\, dg(x_0)$
3. Falls $g(x_0) \neq 0$

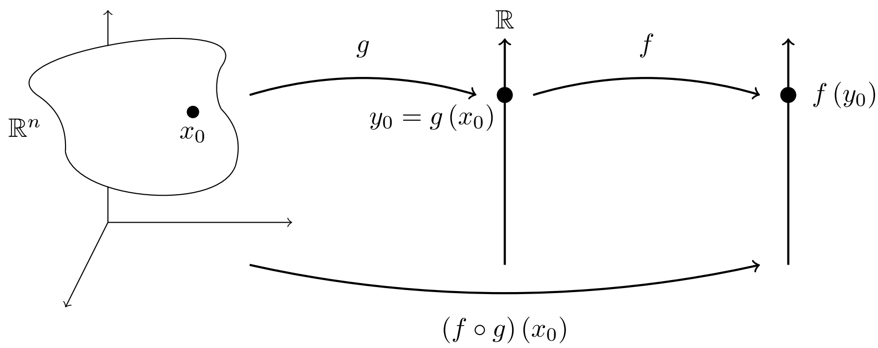
$$d\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \frac{g(x_0)\, df(x_0) - f(x_0)\, dg(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

Beweis ist der Selbe wie im eindimensionalen Fall. Für die Kettenregel gibt es mehrere Variationen

Satz 8.12 (Kettenregel, 1. Version)

Sei $g : \Omega \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ differenzierbar, sowie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Stelle $g(x_0) \in \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt

$$d(f \circ g)(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot dg(x_0)$$



Beweis

Sei g an der Stelle x_0 differenzierbar

$$\Rightarrow g(x) - g(x_0) \overset{A}{=} dg(x_0)(x - x_0) + R_g(x - x_0)$$

mit

$$\frac{R_g(x - x_0)}{(x - x_0)} \underset{x \to x_0}{\to} 0 \Rightarrow \frac{g(x) - g(x_0)}{|x - x_0|} \overset{B}{\leq} C = \max \left[\frac{\partial g}{\partial x^i}(x_0) \right]$$

f in $g(x_0)$ differenzierbar

$$f(g(x)) - f(g(x_0)) \overset{C}{=} f'(g(x_0))[g(x) - g(x_0)] + R_f(g(x), g(x_0))$$

Woraus folgt:

$$\begin{aligned} f(g(x)) - f(g(x_0)) = &f'(g(x_0))[dg(x_0)(x - x_0) + R_g(x, x_0)] \\ &+ R_f(g(x_0), g(x)) \end{aligned}$$

Aus B folgt:

$$\frac{R_f(g(x_0), g(x))}{x - x_0} = \underbrace{\underbrace{\frac{R_f(g(x_0) - g(x))}{|g(x) - g(x_0)|}}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \cdot \underbrace{\frac{|g(x) - g(x_0)|}{|x - x_0|}}_{\overset{B}{\leq} C}}_{\substack{\downarrow \\ 0}}$$

d.h.

$$f(g(x)) - f(g(x_0)) = (f'(g(x_0)) \cdot dg(x_0))(x - x_0) + R_{f \circ g}(x, x_0)$$

wobei

$$R_{f \circ g}(x, x_0) = f'(g(x_0)) R_g(x, x_0) + R_f(g(x_0), g(x))$$

und

$$\frac{R_{f \circ g}(x, x_0)}{x - x_0} = \underbrace{f'(g(x_0)) \frac{R_g(x, x_0)}{(x - x_0)}}_{\downarrow 0} + \underbrace{\frac{R_f(g(x_0), g(x))}{x - x_0}}_{\downarrow 0}$$

Beispiel 8.13

Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$h(x, y) = e^{xy}$$

$h = f \circ g$ wobei $g(x, y) = xy,\ f(t) = e^t$. Dann ist einerseits

$$dh(x, y) = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} \right) = (ye^{xy}, xe^{xy})$$

anderseits nach Kettenregel

$$dh(x,y) = d(f \circ g)' = f'(g(x,y)) \cdot dg(x,y) = e^{xy} \cdot (y,x) = (ye^{xy}, xe^{xy})$$

Für die nächste Kettenregel führen wir folgende Definition ein:

Definition 8.14
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ und $f = (f_1, \ldots, f_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung. Dann ist f an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar, falls jede Komponentenfunktion f_i an der Stelle x_0 differenzierbar ist. Wir definieren in diesem Fall

$$f'(x_0) := \left({f_1}'(x_0), {f_2}'(x_0), \ldots, {f_n}'(x_0)\right)$$

Bemerkung 8.15

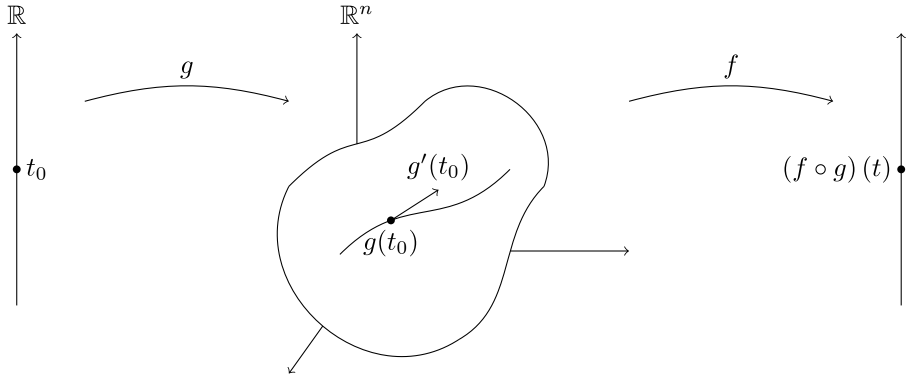
$f'(x_0)$ kann als Geschwindigkeitsvektor im Punkt $f(x_0)$ aufgefasst werden.

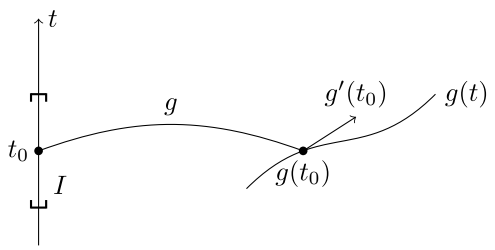
Satz 8.16 (Kettenregel, 2. Version)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n, I \subset \mathbb{R}$. Sei $g : I \to \Omega$, $t \to (g_1(t), g_2(t), \ldots, g_n(t))$, an der Stelle $t_0 \in I$ differenzierbar sowie $f : \Omega \to \mathbb{R}$ an der Stelle $g(t_0)$ differenzierbar. Dann gilt:

$$\frac{d}{dt}(f \circ g)(t_0) = df(g(t_0)) \cdot g'(t_0)$$

$$\begin{aligned} d(f \circ g)(t_0) =& df(g(t_0)) \cdot dg(t_0) \\ =& \frac{\partial f}{\partial x^1}(g(t_0)) \cdot \frac{dg_1}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial x^2}(g(t_0)) \cdot \frac{dg_2}{dt}(t_0) \\ & + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(g(t_0)) \cdot \frac{dg_n}{dt}(t_0) \end{aligned}$$





Beispiel 8.17

Die vier Grundrechenarten sind differenzierbare Funktionen von zwei Variablen. Insbesondere gilt:

- $a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to x + y$

$$da\,(x,y) = \left(\frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial a}{\partial y}\right) = (1,1)$$

- $m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to x \cdot y$

$$dm\,(x,y) = (y,x)$$

Setzt man diese beiden Funktionen in die obige Kettenregel ein, so erhält man die aus Analysis I bekannte Summen- und Produktregel:

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \to (g_1(t), g_2(t))$$

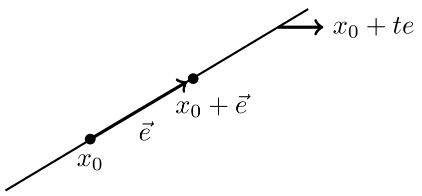
$$\frac{d}{dt}(g_1 + g_2) = \frac{d}{dt}(a \circ g) = (1,1) \cdot \left(\frac{dg_1}{dt}, \frac{dg_2}{dt}\right) = 1 \cdot \frac{dg_1}{dt} + 1 \cdot \frac{dg_2}{dt}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(g_1 \cdot g_2) = \frac{d}{dt}(m \circ g) &= ((dm)\,(g(t))) \cdot \left(\frac{dg}{dt}\right) \\ &= (g_2\,(t)\,, g_1\,(t)) \cdot \left(\frac{dg_1}{dt}, \frac{dg_2}{dt}\right) \\ &= \frac{dg_1}{dt} \cdot g_2\,(t) + \frac{dg_2}{dt} \cdot g_1\,(t)\end{aligned}$$

Beispiel 8.18

Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ differenzierbar an der Stelle $x_0 \in \Omega$ und sei $e \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$; mit $|e| = 1$. Betrachte die Gerade $g(t) = x_0 + te$, $t \in \mathbb{R}$ durch x_0 mit Richtungsvektor



$$\frac{dg}{dt}(t_0) = \mathbb{R} \qquad \forall t_0 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto x_0 + te \end{aligned}$$

Dann ist die Funktion $f \circ g$ in einer Umgebung von $t_0 = 0$ definiert und nach Kettenregel $f \circ g$ an der Stelle $t_0 = 0$ differenzierbar mit

$$\frac{d}{dt}(f \circ g)(0) = df(g(0))\frac{dg}{dt}(0) = df(x_0)(e) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) \cdot e^i$$

$e = \left(e^1, \ldots, e^n\right)$ und wird Richtungsableitung von f in Richtung e genannt; $\partial_e f(x_0)$ bezeichnet. Insbesondere gilt für $e = e_i$

$$\partial_{e_i} f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) = df(x_0)(e_i)$$

Geometrisch ist die Richtungsableitung von f in Richtung e genau die Steigung der Tangente zur Schnittkurve, falls wir den Graph von f mit einer zur xy-Ebene senkrechten Ebene durch $x_0 + te$ scheiden.

page 144, middle. STARTED; CAN'T FULLY UNDERSTAND THE DRAWING DUE TO LINES BEING FADED ON THE PDF

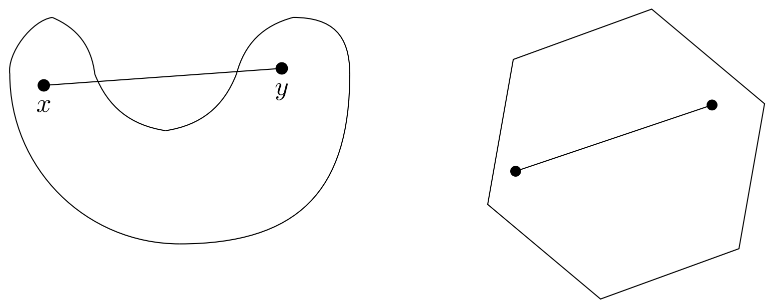
Um den Mittelwertsatz der DR zu verallgemeinern, benützen wir folgende Begriffe:

Definition 8.19

Eine Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann konvex, falls für jedes Paar von Punkten $x, y \in K$ die Menge K auch das Segment

$$(1-t)\,x + ty \qquad t \in [0,1]$$

mit Endpunkten x, y enthält



Nicht Konvex

Konvex

Satz 8.20

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ konvex $f : \Omega \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $x_0, x_1 \in \Omega$ sowie $x_t := (1-t)\, x_0 + tx_1$ mit $t \in [0,1]$. Dann gibt es $\vartheta \in [0,1]$ mit

$$f\left(x_1\right) - f\left(x_0\right) = df\left(x_{i\vartheta}\right)\left(x_1 - x_0\right)$$

Beweis

Sei $g\,(t) = (1-t)\, x_0 + tx_1 = x_t$. Dann ist $t \to (f \circ g)\,(t)$ auf $[0,1]$ stetig und in $(0,1)$ differenzierbar. Also gibt es $\vartheta \in (0,1)$ mit (nach MWS der DR einer Variable)

$$f\left(x_i\right) - f\left(x_0\right) = (f \circ g)\,(1) - (f \circ g)\,(0) = (f \circ g)'\,(\vartheta)\,(1-0)$$

Nun ist

$$(f \circ g)'\,(\vartheta) = df\left(g\,(\vartheta) \cdot \frac{dg}{dt}\,(\vartheta)\right)$$

Is the formula done or does it continue on a new line, page 146 top

Die Kettenregel wird auch abgewandelt um Integrale mit Parametern zu studieren. Ein Beispiel davon ist:

Beispiel

Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(s,t) \to h\,(s,t)$. Wir nehmen an, h ist stetig, $\frac{\partial h}{\partial t}$ existiert und ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig. Sei

$$u(t) = \int\limits_a^{b(t)} h(s,t)ds,\; b(t) \in C^1\left(\mathbb{R}\right),\; a \in \mathbb{R}$$

Satz 8.21

Sei $h(s,t)$ eine stetige differenzierbare Funktion von zwei Variablen und $b(t)$ differenzierbare Funktion einer Variable. Dann ist die Funktion

$$u(t) := \int\limits_a^{b(t)} h(s,t)ds$$

wo definiert, differenzierbar mit der Ableitung

$$u'(t) := h\left(b(t),t\right) \cdot b'(t) + \int\limits_a^{b(t)} \frac{\partial h}{\partial t}\,(s,t)\, ds$$

Korollar 8.22

Sei $h = h\,(s,t) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig, und $\frac{\partial h}{\partial t}$ existiert und auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig. Sei

$$u(t) = \int\limits_0^{t} h\,(s,t)\, ds$$

Dann

$$u(t) \in C^1(\mathbb{R}) \text{ und } u'(t) = h(t,t) + \int_0^t \frac{\partial h}{\partial t}(s,t)\,ds$$

Beweis

Setze $b(t) = t$, $a = 0$ in Satz 8.21.

Korollar 8.23

Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit stetiger partieller Ableitung $\frac{\partial h}{\partial t}$. Dann ist die Funktion

$$u(t) := \int_a^b h(s,t)ds$$

differenzierbar mit Ableitung

$$u'(t) := \int_a^b \frac{\partial h}{\partial t}(s,t)ds$$

Beweis

Setze $b(t) = b$, in Satz 8.20

Bemerkung 8.24

Mit Korollar 8.23 kann man bestimmte Integrale berechnen, auch wenn die dazugehörigen unbestimmten Integrale nicht elementar darstellbar sind

Beispiel 8.25

Berechne das Integral

$$\int_0^1 \frac{x^5 - 1}{\log x} dx$$

Sei

$$u(\alpha) := \int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\log x} dx$$

Für $\alpha \geq 0$ erfüllt $u(\alpha)$ die Voraussetzungen des Satzes. Wir berechnen

$$u'(\alpha) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{x^\alpha - 1}{\log x}\right) dx = \int_0^1 \frac{x^\alpha \log x}{\log x} dx = \int_0^1 x^\alpha dx = \left.\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_0^{x=1} = \frac{1}{\alpha+1}$$

Daraus folgt aus dem fundamentalen Satz der Integralrechnung

$$u(\alpha) = \int u'(\alpha)\,d\alpha = \int \frac{d\alpha}{\alpha+1} = \log(\alpha+1) + C$$

Für eine noch zu bestimmende Konstante C. Aber

$$u\left(0\right)=\int\limits_0^1 0dx=0\Rightarrow C=0$$

$$\Rightarrow\int\limits_0^1\frac{x^\alpha-1}{\log x}dx=\log\left(\alpha+1\right)$$

$$\Rightarrow\int\limits_0^1\frac{x^5-1}{\log x}dx=\log 6$$

Beweis Satz 8.21 (Idee)

Sei

$$f\left(x,y\right)=\int\limits_a^x h\left(s,y\right)ds:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$

$$g\left(t\right)=\begin{pmatrix}b\left(t\right)\\ t\end{pmatrix}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2,\ g'\left(t\right)=\begin{pmatrix}b'\left(t\right)\\ 1\end{pmatrix}$$

Dann

$$u(t)=\left(f\circ g\right)\left(t\right)=f\left(b(t),t\right)=\int\limits_a^{b(t)}h(s,t)ds$$

Nach dem Hauptsatz der Integralrechnung f ist nach x partiell differenzierbar und $\frac{\partial f}{\partial x}=h(x,y)$. Man muss zeigen, dass f ist nach y partiell differenzierbar mit

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\int\limits_a^x\frac{\partial h(s,y)}{\partial x}ds$$

Dann ergibt die Kettenregel

$$\begin{aligned}u'(t)=&\frac{d}{dt}\left(f\circ g\right)\left(t\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\left(g(t)\right),\frac{\partial f}{\partial y}\left(g(t)\right)\right)\cdot\frac{dg}{dt}\\=&\left(h\left(b(t),t\right),\left(\int\limits_a^x\frac{\partial h(s,y)}{\partial y}ds\right)h\left(b(t),t\right)\right)\begin{pmatrix}b'(t)\\ 1\end{pmatrix}\\=&\left(h\left(b(t),t\right),\int\limits_a^{b(t)}\frac{\partial h}{\partial y}(s,t)ds\right)\begin{pmatrix}b'(t)\\ 1\end{pmatrix}\\=&h\left(b(t),t\right)\cdot b'(t)+\int\limits_a^{b(t)}\frac{\partial h}{\partial t}(s,t)ds\end{aligned}$$

8.3 Differentialformen und Vektorfelder

Sei $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ der Raum der linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$. Falls $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion ist, die in jedem Punkt differenzierbar ist, dann ist $df(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und man erhält eine Abbildung

$$\begin{aligned}
&\Omega \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \\
&x_0 \mapsto df(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0)\right) \\
&\qquad\qquad = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0)\, dx^1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0)\, dx^n
\end{aligned}$$

Dies ist ein Beispiel der $1-$Form

Definition 8.26
Eine Differentialform von Grad 1 (auch "$1-$Form") auf Ω ist eine Abbildung

$$\lambda : \Omega \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

die jedem $x \in \Omega$ eine lineare Abbildung $\lambda(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zuordnet.

Beispiel 8.27

1. Seien $x^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Koordinatenfunktionen, $1 \leq i \leq n$. Für jedes $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ist $dx^i(x_0) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$; dies führt zur $1-$Form

$$\begin{aligned}
dx^i &: \mathbb{R}^n \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \\
x_0 &\mapsto dx^i(x_0)
\end{aligned}$$

   Für jedes $x_0 \in \mathbb{R}^n$ gilt $dx^i(e_j) = \delta_{ij}$, also bilden $dx^1(x_0), \dots, dx^n(x_0)$ eine Basis für $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

   Eine beliebige $1-$Form $\lambda : \mathbb{R}^n \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ lässt sich dann eindeutig wie folgt darstellen

$$\lambda(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x_0)\, dx^i(x_0)$$

   wobei $\lambda_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Funktionen sind.

2. Für jedes $f \in C^1(\Omega)$ ist das Differential df eine $1-$Form

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} dx^2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n$$

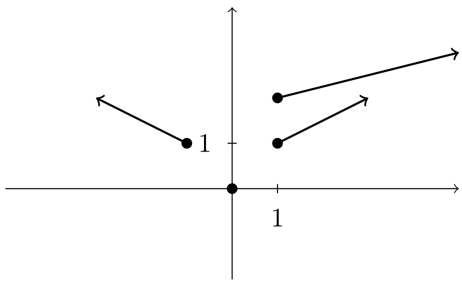
3. Der Ausdruck $\lambda(x, y, z) = 3dx + 5zdy + xdz$ definiert eine $1-$Form auf $\mathbb{R}^3$ mit

$$\begin{aligned}
\lambda_1(x, y, z) &= 3 \\
\lambda_2(x, y, z) &= 5z \\
\lambda_3(x, y, z) &= x
\end{aligned}$$

Definition 8.28
Ein Vektorfeld auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung $v : \Omega \to \mathbb{R}^n$

Beispiel

1.
$$\begin{aligned} v : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (2xy, x^2) \end{aligned}$$



2. $v(x, y) = (-y, x)$

Missing figure

Page 153, bottom
PLEASE SUGGEST SOME COORDINATES, AS I CANNOT REPLICATE YOUR DRAWING!

Bemerkung 8.29

Sei $<,>$ das übliche Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$, d.h.

$$< x, y > := \sum_{i=1}^{n} x^i y^i$$

Mittels $<,>$ kann man von $1-$Formen zu Vektorfeldern und umgekehrt übergehen. Dies geht wie folgt:

1. Sei $v : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld. Dann definieren wir $\forall x \in \Omega$, $\omega \in \mathbb{R}^n$

$$\lambda(x)(\omega) := < v(x), \omega >$$

Offensichtlich $\lambda(x) \in (\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und somit ist

$$\begin{aligned} \lambda : \Omega &\to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \\ x &\mapsto \lambda(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ &\qquad\qquad \omega \mapsto < v(x), \omega > \end{aligned}$$

eine $1-$Form auf Ω.

Umgekehrt

2. Sei $\lambda : \Omega \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ $1-$Form und $\lambda(x) := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) dx^i$ wie oben.

   Wir definieren

$$\begin{aligned} v : \Omega &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto (\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_n(x)) \end{aligned}$$

   dann ist v ein Vektorfeld und

$$\lambda(x)(\omega) = < v(x), \omega >$$

   Sei $\omega = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 + \cdots + \omega^n e_n$. Dann

$$\begin{aligned} \lambda(x)(\omega) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) dx^i(\omega) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) dx^i \left(\omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 + \ldots + \omega^n e_n\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) \left(\omega^1 dx^i(e_1) + \omega^i dx^i(e_i) + \ldots + \omega^n dx^i(e_n)\right) \\ dx^i(e_j)_{ij} \quad \leftarrow \quad &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) \omega^i = (\lambda_i(x), \dots, \lambda_n(x)) \cdot \left(\omega^1, \dots, \omega^n\right) \\ &= < v(x), \omega > \end{aligned}$$

   Diese Diskussion können wir auf das Differential einer Funktion anwenden

Definition 8.30

Sei $f \in C^1(\Omega)$. Das durch

$$< v(x), \omega > := df(x)(\omega), \ \omega \in \mathbb{R}^n$$

definierte Vektorfeld heisst Gradientenfeld von f und wird mit $v(x) = \nabla f(x)$ oder $\operatorname{grad} f$ bezeichnet.

Bezüglich der Standardbasis $e_1, \dots, e_n$ der $\mathbb{R}^n$ folgt die Darstellung

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x^1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x^n}(x) \end{pmatrix}, \forall x \in \Omega$$

(Oben nehmen wir $\lambda(x) := df(x) = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} r^i x^i$, Bemerkung 8.29, 2.)

Satz 8.31

Sei $f \in C^1(\Omega)$ und $x_0 \in \Omega$. Dann gibt $\nabla f(x_0)$ die Richtung und $|\nabla f(x_0)|$ den Betrag des steilsten Anstieges von f an der Stelle x_0 an.

Beweis

Aus der Definition des Gradientenfeld folgt $\forall e \in \mathbb{R}^n$, Einheitsvektor $\|e\| = 1$

$$df(x_0)(e) = < \nabla f(x_0), e >$$

Mit Cauchy-Schwarz folgt

$$< \nabla f(x_0) > \leq \|\nabla f(x_0)\| \|e\| = \|\nabla f(x_0)\|$$

mit Gleichheit genau dann, wenn e ein positives Vielfaches von $\nabla f(x_0)$ ist, nämlich

$$e = \frac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|}$$

$$\Rightarrow df(x_0)\, e \leq |\nabla f(x_0)|$$

mit Gleichheit für $e = \frac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|}$

■

$\nabla f(x_0) \neq 0 \Rightarrow \nabla f(x_0)$ zeigt die Richtung an, in der f am schnellsten wächst.

Geometrische Interpretation

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, C^1$. Für jedes $s \in \mathbb{R}$ wird $f^{-1}(s) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = s\}$ *Niveaufläche* genannt.

Beispiel

1.

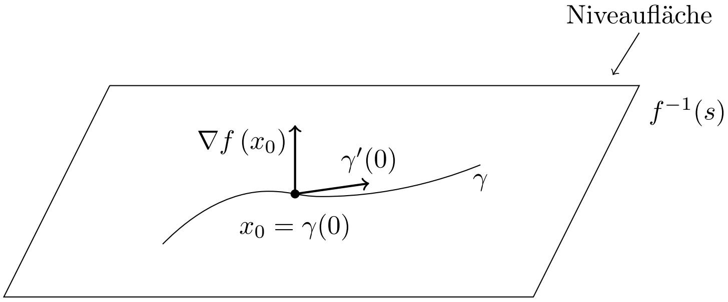
$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$$

dann ist $f^{-1}(s) =$ Sphäre mit Zentrum O und Radius $\sqrt{s}$

2. $f(x, y) = xy$ ist ein hyperbolischer Parabolid mit Niveaulinien

page 158, bottom, use minipage
ARE YOU SURE THIS IS NOT $x^2 - y^2$? I CAN'T REPLICATE YOUR DRAWING HERE

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Nun sei $x_0 \in \Omega$ mit $f(x_0) = s$, i.e. $x_0 \in f^{-1}(s)$. Sei $\gamma : [-1,1] \to \mathbb{R}^n$ ein differenzierbare Kurve durch x_0 mit $\gamma[-1,1] \subset f^{-1}(s)$, $\gamma(0) = x_0$



Dann gilt $f(\gamma(t)) = s$, $\forall t \in [-1,1]$ und es folgt aus der Kettenregel

$$\tfrac{d}{dt}\left(f(\gamma(t))\right) = \tfrac{d}{dt}(s) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0 =< \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) >$$

Insbesondere $0 = df(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) =< \nabla f(x_0), \gamma'(0) >$ d.h. $\nabla f(x_0)$ steht senkrecht zur Niveaufläche von f durch x_0

Beispiel

Sei $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{2}$, $x, y \in \mathbb{R}^2$

$$\nabla f(x,y) = (x, -y)$$

Sei $(x_0, y_0) = (1, -1)$

$$\nabla f(1,-1) = (1,1) \qquad (\nabla f(1,-1)) = \sqrt{2}$$
$$\frac{\nabla f}{|\nabla f|}(1,-1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$$

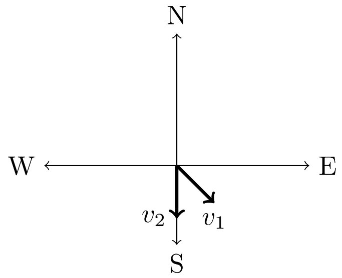
3. Im Punkt P biegt der Bergweg ab; nach Südosten geht er mit 25% Steigung bergauf, nach Süden mit 20% Gefälle bergab. Der Wanderer im Nebel möchte über die Wiese möglichst rasch zum Gipfel. In welche Richtung muss er gehen und wie steil ist es dorthin?

   Wir legen das Koordinatensystem so, dass die $x-$Achse nach Osten und die $y-$Achse nach Norden zeigt, und setzen voraus, dass die Höhenfunktion h differenzierbar ist. Wir wollen ihren Gradienten in P $\nabla h(P)$ bestimmen. Nach Voraussetzung hat h die beiden Richtungsableitungen

$$dh(P)(v_1) = 0.25 \qquad dh(P)(v_2) = -0.2$$

   wobei

$$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad v_2 = (0, -1)$$



$$\begin{aligned} dh\left(P\right)\left(v_1\right) &= \left(\frac{\partial h}{\partial x}\left(P\right), \frac{\partial h}{\partial y}\left(P\right)\right) \cdot v_1 \\ &= \frac{\partial h}{\partial x}\left(P\right)\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\partial h}{\partial y}\left(P\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4} \\ dh\left(P\right)\left(v_2\right) &= \left(\frac{\partial h}{\partial x}\left(P\right)\right)(0) - \frac{\partial h}{\partial y}\left(P\right)(-1) = -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

Durch Lösen des linearen Gleichungssystem folgen wir:

$$\frac{\partial h}{\partial x}\left(P\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{5}, \frac{\partial h}{\partial y}\left(P\right) = \frac{1}{5}$$

Die Richtung des Gradients ist somit

$$\arg \nabla h\left(P\right) = \arctan \frac{\frac{1}{5}}{\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{5}} \cong 19.86°$$

und die Steigung in diese Richtung ist

$$\left|\nabla h\left(P\right)\right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} \cong 0.59 = 59\%$$

8.4 Wegintegrale

Wir haben in Bemerkung 8.29 gesehen, dass man mittels dem üblichen Skalarprodukt $<,>$ von 1−Formen zu Vektorfeldern und umgekehrt übergehen kann.

In diesem Kapitel werden wir das "Wegintegral" von 1−Formen oder "Wegintegrale" von Vektorfeldern längs eine Kurve studieren. Dazu untersuchen wir zunächst Kurven in $\mathbb{R}^n$

Parameterdarstellung einer Kurve

Sei $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ eine Kurve. Eine Parameterdarstellung (PD) von γ ist eine Funktion

$$\begin{aligned} \gamma : I = [a, b] &\to \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto \gamma(t) \end{aligned}$$

wobei $\gamma\,(t)$ ein Punkt γ ist und jeder Punkt auf γ als $\gamma\,(t)$ dargestellt werden kann:

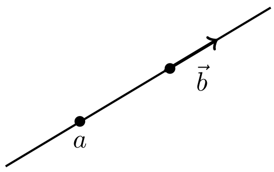
$$\gamma\,(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t)) \text{ mit } \gamma'(t) \neq 0,\ t \in [a, b]$$

Die positive Richtung von γ ist die Richtung mit der die Kurve durchgelaufen wird.

Beispiel 8.32

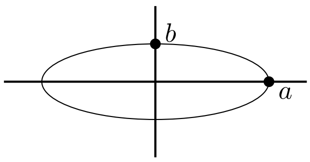
1. $$\gamma(t) = (a_1 + b_1 t, a_2 + b_2 t, a_3 + b_3 t)\,,\ t \in \mathbb{R}$$

   ist die Parameterdarstellung einer Gerade durch den Punkt $a = (a_1, a_2, a_3)$ und parallel zum Vektor (b_1, b_2, b_3)

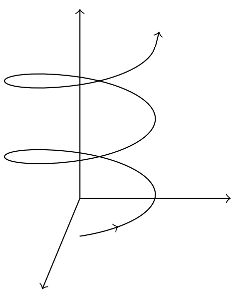


2. $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$ ist eine Parameterdarstellung einer Ellipse

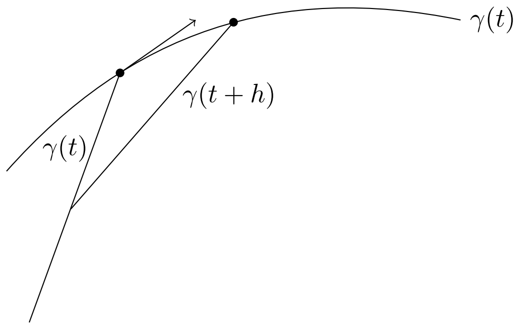
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
$$t \in [0, 2\pi]$$



3. $\gamma_1(t) = (a \cos t, b \sin t, ct)$, $t \in [0, 2\pi]$ ist eine Parameterdarstellung einer elliptischen Helix



   $\gamma_2(t) = (a \cos t, -b \sin t, c(2\pi - t))$, $t \in [0, 2\pi]$ ist die Parameterdarstellung der gleichen Kurve wobei die Richtung umgekehrt ist



Der Tangentialvektor zur Kurve an der Stelle $\gamma(t)$ ist $\gamma'(t)$

$$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), \dots, \gamma_n'(t))$$

Do I have to include the example?? page 164 bottom

Definition 8.33

Das Wegintegral von v längs γ

$$\int\limits_\gamma v d\vec{s} = \int\limits_\gamma v(\gamma) d\gamma := \int\limits_a^b < v\left(\gamma\left(t\right)\right), \gamma'(t) > dt$$

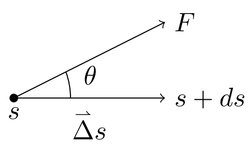
$vd\vec{s} = \gamma'(t)dt$ heisst gerichtetes Längenelement.

Beispiel 8.34

Ein einführendes Beispiel: Sei m ein Massenpunkt, der sich unter den Einfluss eines Kraftfeldes $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bewegt.

Der Massenpunkt wird durch eine konstante Kraft $\overrightarrow{F}$ längs einer Geraden um den Vektor $\vec{s}$ verschoben.

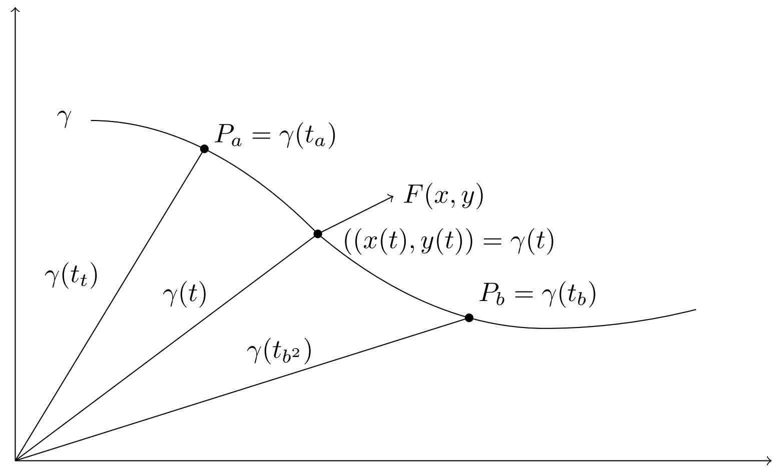
Die dabei verrichtete Arbeit ist definitionsgemäss das Skalarprodukt aus dem Kraftvektor $\overrightarrow{F}$ und dem Verschiebungsvektor $\vec{s}$.



$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos\theta$$

<u>Allgemeiner Fall</u>

Verschiebung längs einer Kurve γ in einem Kraftfeld $F = (P(x,y), Q(x,y))$



$\Delta W = F \cdot \Delta(\gamma) =$ Kraftkomponente entlang des Weges mal zurückgelegter Weg.

Da sich Betrag und Richtung der Kraft sowie der jeweilige Winkel zum Weg vom Punkt zu Punkt ändern, gilt das zur Berechnung notwendige Skalarprodukt näherungsweise jeweils nur für ein Wegelement $\overrightarrow{\Delta} r$. Die Berechnung der Arbeit erfolgt daher in folgender Weise:

a) Zerlegung des Weges in Teilabschnitte

$$\Delta\gamma_1 = \gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i) = \frac{\Delta\gamma}{\Delta t} \cdot \Delta t$$

b) Ermittlung der jeweils wirkenden Kraft:

$$F\left(\gamma\left(t_i\right)\right) = F\left(x\left(t_i\right), y\left(t_i\right)\right)$$

c) Berechnen der Arbeit je Teilabschnitt-Skalarprodukt

$$\Delta W_i = F\left(x\left(t_i\right), y\left(t_i\right)\right) \cdot \Delta\gamma_i$$

d) Aufsummieren der Teil-Arbeit

$$W \approx \sum \Delta W_i = \sum F\left(x\left(t_i\right), y\left(t_i\right)\right) \cdot \underbrace{\Delta\gamma}_{\frac{\Delta\gamma}{\Delta t} \cdot \Delta t}$$

e) Durch Verkleinerung des Wegelementes enthält man den exakten Wert der geleisteten Arbeit

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b F\left(\gamma\left(t\right)\right) \cdot \gamma'\left(t\right) dt \\ &= \int_a^b < F\left(\gamma\left(t\right)\right), \gamma'\left(t\right) > dt \end{aligned}$$

Bemerkung 8.35

Wir können das Wegintegral auch mit Differentialformen formulieren. Sei

$$\begin{aligned} v : \Omega &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto \left(v^i(x)\right)_{i=1}^n \end{aligned}$$

ein stetiges Vektorfeld ($v^i(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig) dann ist durch $\lambda(x)(\omega) := < v(x), \omega >$ eine $1-$Form $\lambda(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ definiert

$$\begin{aligned} \int_\gamma v d\vec{s} &= \int_a^b < v(\gamma(t)), \gamma'(t) > dt \\ &= \int_a^b \lambda(\gamma(t))(\gamma'(t))\, dt \end{aligned}$$

<u>Umgekehrt</u>

Sei $\lambda : \Omega \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ eine $1-$Form die im folgenden Sinn stetig ist:

Sei

$$\begin{aligned} \gamma : [a,b] &\to \Omega \\ t &\mapsto \left(\gamma^1(t), \gamma^2(t), \ldots, \gamma^n(t)\right) \end{aligned}$$

ein C^1-Weg. Dann ist

$$\begin{aligned} [a,b] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \lambda(\gamma(t))(\gamma'(t)) = \sum \lambda_i(\gamma(t)) \cdot \frac{d\gamma^i}{dt}(t) \end{aligned}$$

eine stetige Funktion. Somit ist das Integral $\int_a^b \lambda(\gamma(t))(\gamma'(t))\, dt$ wohldefiniert.

> **Definition 8.36**
> Das Wegintegral von $\lambda \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ längs γ ist
>
> $$\int_\gamma \lambda := \int_a^b \lambda(\gamma(t))(\gamma'(t))\, dt$$

Beispiel 8.37

1. Sei $\gamma \in C^1\left([0, 2\pi] = \mathbb{R}^2\right)$ mit

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

eine Parametrisierung des Einheitskreises und $\lambda = \lambda(x, y)$ die 1−Form mit

$$\lambda(x, y) = -ydx + xdy \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

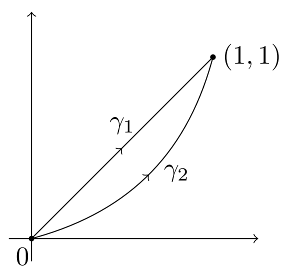
Dann gilt

$$\int_\gamma \lambda = \int_0^{2\pi} \underbrace{(-\sin t, \cos t)}_{\lambda(\gamma(t))} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}}_{\gamma'(t)} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\sin^2 t + \cos^2 t\right) dt = 2\pi$$

2. Sei $\lambda(x, y) = 3x^2ydx + \left(x^3 + 1\right) dy$. Wir betrachten das Kurvenintegral längs verschiedener Wege

$\gamma_1(t) = (t, t), 0 \leq t \leq 1$
$\gamma_1'(t) = (1, 1)$
$\gamma_2(t) = (t, t^2), 0 \leq t \leq 1$
$\gamma_2'(t) = (1, 2t)$



$$\int_{\gamma_1} \lambda = \int 3x^2ydx + \left(x^3 + 1\right) dy = \int_0^1 \left(3t^3 + \left(t^3 + 1\right)\right) dt = 2$$

$$\int_\gamma \lambda = \int_0^1 \left(3t^4 + \left(t^3 + 1\right) \cdot 2t\right) dt = 2$$

Bemerkung

Sei $f(x, y) = x^3y + y$. Dann ist

is this inside the enumerated list or out?? page 170 bottom

$$df(x + y) = 3x^2ydx + \left(x^3 + 1\right) dy$$

und

$$f(1, 1) - f(0, 0) = (1 + 1) - (0, 0) = 2$$

Wir können den Begriff des Wegintegrals auf Wege erweitern, die stückweise C^1 sind. Ein stückweiser C^1-Weg ist eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ mit einer Unterteilung des Intervalls

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b$$

so dass

$$\gamma|_{[a_i, a_{i+1}]} = [a_i, a_{i+1}] \to \mathbb{R}^n$$

C^1 ist.

d.h. $t \to \gamma'(t)$ ist auf (a_i, a_{i+1}) stetig und erweitert sich stetig auf $[a_i, a_{i+1}]$

Beispiel

is this inside the enumerated list or out?? page 171 middle

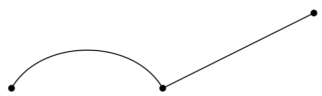


Bild eines stückweise C^1-Weges

Dann definiert man

$$\int_\gamma \lambda := \sum_{t=0}^{n-1} \int_{\gamma|_{[a_i, a_{i+1}]}} \lambda$$

Jetzt werden wir die einzige grundlegende Eigenschaften des Wegintegrals herleiten.

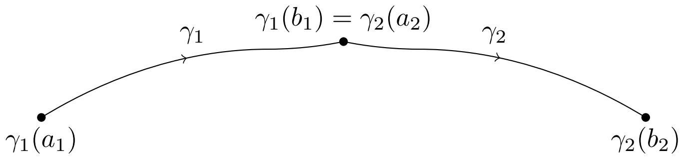
Satz 8.38 (Eigenschaften des Wegintegrals)

E1) Das Wegintegral $\int_\gamma \lambda$ ist unabhängig von einer orientierungserhaltenden Umparametrisierung.
D.h. Sei $\gamma : [a, b] \to \Omega$, C^1 und $\varphi : [a', b'] \to [a, b]$, C^1 mit $\varphi(a') = a$, $\varphi(b') = b$, $\varphi'(t) > 0$ $\forall t \in [a', b']$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma \circ \varphi} \lambda &= \int_{a'}^{b'} \lambda(\gamma(\varphi(t)))(\gamma \circ \varphi)'(t) dt \\
&= \int_{a'}^{b'} \lambda(\gamma(\varphi(t)))\gamma'(\varphi(t))\varphi'(t) dt \\
&= \int_a^b \lambda(\gamma(s))\gamma'(s) ds = \int_\gamma \lambda
\end{aligned}$$

Geometrisch heisst dies, dass $\int_\gamma \lambda$ nur vom Bild $\gamma([a, b])$ mit vorgegebenen Durchlaufsinn abhängt.

E2) Seien $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \Omega$ und $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \Omega$ zwei Wege mit $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$



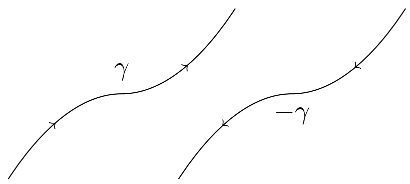
Wir definieren $\gamma_1 + \gamma_2$ als Weg, der durch aneinanderhängen von γ_1 und γ_2 entsteht, d.h.

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [a_1, b_1] \\ \gamma_2(t - b_1 + a_2) & t \in [b_1, b_1 + b_2 - a_2] \end{cases}$$

Dann gilt

$$\int\limits_{\gamma_1+\gamma_2} \lambda = \int\limits_{\gamma_1} \lambda + \int\limits_{\gamma_2} \lambda$$

E3) Sei $\gamma : [a, b] \to \Omega$ ein Weg. Dann sei $-\gamma : [a, b] \to \Omega$ der gleiche Weg aber im entgegengesetzten Durchlaufsinn, d.h. $(-\gamma)(t) = \gamma(-t + a + b)$



Dann gilt

$$\int\limits_{-\gamma} \lambda = -\int\limits_{\gamma} \lambda$$

E4) Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion, sowie $\gamma : [a, b] \to \Omega$ stückweise C^1. Dann gilt

$$\int\limits_{\gamma} df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

γ ist C^1, dann ist

$$\begin{aligned} \int\limits_{\gamma} df &= \int\limits_a^b df(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt \\ &= \int\limits_a^b \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)\, dt \\ &= (f \circ \gamma)(b) - (f \circ \gamma)(a) \\ &= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) \end{aligned}$$

Mittels des Wegintegrals können wir die C^1-Funktionen charakterisieren, deren Differentiale verschwinden.

Satz 8.39

Sei Ω "offen" und (C^1-)wegzusammenhängend. Sei $f \in C^1(\Omega)$. Falls $df(x) = 0$, $\forall x \in \Omega$, so ist f konstant.

Beweis

Wenn Ω wegzusammenhängend ist, heisst das, dass zu je zwei Punkten $x, y \in \Omega$ gibt es in C^1-Weg $\gamma : [0,1] \to \gamma$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$, $\gamma([0,1]) \subset \Omega$. Dann folgt

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) \\ &= \int_\gamma df = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f(y) = f(x)$, $\forall x, y \in \Omega \Rightarrow f$ ist konstant.

<u>Frage:</u> Wann ist eine $1-$Form λ, von der Form $\lambda = df$, d.h. das Differential einer Funktion? D.h. gegeben eine $1-$Form λ, gibt es eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ s.d. $df = \lambda$
?

Wenn es ein $f : \Omega \to \mathbb{R}$ gibt, so dass $df = \lambda$, heisst f ein Potential. (Potential ist wie eine Stammfunktion für eine $1-$Form). Mittels Wegintegral stellen wir jetzt ein Kriterium auf.

Satz 8.40

Sei $\lambda \in \Omega \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ eine stetige $1-$Form. Folgende Aussagen sind äquivalent

1. Es gibt $f \in C^1(\Omega)$ mit $df = \lambda$
2. Für je zwei stückweise C^1-Wege $\gamma_i = [a_i, b_i] \to \Omega$ mit den selben Anfangs- und Endpunkten (d.h. $\gamma_1(a_1) = \gamma_2(a_2)$, $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(b_2)$), gilt
$$\int_{\gamma_1} \lambda = \int_{\gamma_2} \lambda$$
3. Für jeden geschlossenen C^1Weg γ gilt
$$\int_\gamma \lambda = 0$$

Beweis

(1) $\Rightarrow$ (2): Folgt aus E4)

(2) $\Leftrightarrow$ (3): Klar

(2) $\Rightarrow$ (1): Sei $p_0 \in \Omega$; für jedes $x \in \Omega$. Sei $\gamma : [0,1] \to \Omega$ stückweise C^1 mit $\gamma(0) = p_0$, $\gamma(1) = x$. Definiere $f(x) := \int_\gamma \lambda$.

Dann ist f nach Annahme (2) wohl definiert (d.h. unabhängig vom Weg von p_0 nach x) (Wir können f auch mit $\int_{p_0}^{x} \lambda$ bezeichnen)

Behauptung

$f \in C^1(\Omega)$ und $df = \lambda$. Um zu zeigen, dass $df = \lambda$ müssen wir zeigen, dass für $x, x_0 \in \Omega$

$$f(x) - f(x_0) = \lambda(x_0)(x - x_0) + R(x, x_0)$$

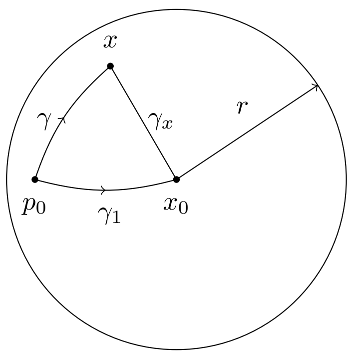
mit $\frac{R(x,x_0)}{|x-x_0|} \to 0$.

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Sei $\gamma_1 : [-1, 0] \to \Omega$ ein Weg von p_0 nach x_0. Dann gilt

$$\int_{\gamma_1} \lambda = f(x_0)$$

Sei

$$\begin{aligned} \gamma_x : [0,1] &\to \Omega \\ t &\mapsto (1-t)x_0 + tx \end{aligned}$$



Um $\gamma^x([0,1]) \subset \Omega$ zu garantieren, nehmen wir $r > 0$, so dass $B_r(x_0) \subset \Omega$ und nehmen an, dass $x \in B_r(x_0)$. Dann ist

$$f(x) = \int_{\gamma_1 + \gamma_x} \lambda = \int_{\gamma_1} \lambda + \int_{\gamma_x} \lambda = f(x_0) + \int_{\gamma^x} \lambda$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \int_{\gamma^x} \lambda =& \int_0^1 \lambda(\gamma_x(t))\, {\gamma_x}'(t) dt \\ =& \int_0^1 \lambda(\gamma_x(t))(x - x_0) dt \\ =& \lambda(x_0)(x - x_0) + \int_0^1 (\lambda(\gamma^x(t)) - \lambda(x_0))(x - x_0)\, dt \end{aligned}$$

Sei $\lambda = \sum \lambda^i dx^i$ dann ist obiges Integral gleich

$$\sum \int_0^1 \left[\lambda_i \left(\gamma^x (t)\right) - \lambda_i (x_0)\right] \left(x^i - x_0^i\right) dt$$

$$\leq \sum \left(\int_0^1 \left[\lambda_i \left(\gamma^x (t)\right) - \lambda_i (x_0)\right]^2 \right)^{\frac{1}{2}} |x - x_0|$$

Also $f(x) - f(x_0) = \lambda(x_0)(x - x_0) + R(x, x_0)$, wobei

$$\frac{R(x - x_0)}{|x - x_0|} \leq \left(\sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 \left(\lambda_i \left(\gamma^x (t)\right) - \lambda_i (x_0)\right) dt \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Can't read, page 179 bottom

Aus der Stetigkeit der folgt, dass

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x, x_0)}{|x - x_0|} \to 0$$

Beispiel 8.31

Sei $\lambda = 2xy^2 dx + 2x^2 y dy$.

Ansatz:

$$f(x, y) = \int_{\gamma_{(x,y)}} \lambda$$

wobei $\gamma_{(x,y)}(t) = (tx, ty)$, $t \in (0, 1)$. Dann ist

$$\int_\gamma \lambda = \int_0^1 \lambda(tx, ty)(x, y)\, dt$$

$$= \int_0^1 \left[2(tx)(ty)^2 \cdot x + 2(tx)^2 (ty) \cdot y\right] dt$$

$$= 4x^2 y^2 \int_0^1 t^3 dt = x^2 y^2$$

und $df(x, y) = 2xy^2 dx + 2x^2 y dy$.

Oder: Ansatz:

$$df : \lambda \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2, \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 y$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2 \Rightarrow f(x, y) = \int 2xy^2 dx = x^2 y^2 + C(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y + \frac{d}{dy}C(y) = 2x^2y \Rightarrow \frac{d}{dy}C(y) = 0 \Rightarrow C(y) = \text{ Konstant}$$

$$\Rightarrow f(x,y) = x^2y^2 + C$$

Analog wie für $1-$Formen kann man Satz 8.30 für Vektorfelder formulieren

Definition 8.32
Ein Vektorfeld $v : \Omega \to \mathbb{R}^n$ heisst konservativ, falls $\forall \gamma : [0,1] \to \Omega$ geschlossen ist

$$\int_\gamma v ds = 0$$

Aus Satz 8.30 folgt

Satz 8.33

Für ein stetiges Vektorfeld $v : \Omega \to \mathbb{R}^n$ sind folgende Aussagen äquivalent

1. v ist konservativ
2. Es gibt $f \in C^1(\Omega)$ mit $v = \nabla f$. In diesem Fall heisst v Potentialfeld mit dem Potential f.

Im nächsten Kapitel, mittels höheren partiellen Ableitungen, erhalten wir eine einfache zu handhabende notwendige Bedingung für ein konservatives Vektorfeld. Wir werden sehen, dass

$$v = \left(v^i\right)_{1\le i\le n} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \text{ konservative}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial v^i}{\partial x^j} = \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \qquad 1 \le i, j \le n$$

8.5 Höhere Ableitungen

Definition 8.44
$f : \Omega \to \mathbb{R}, \Omega \subset \mathbb{R}^n, f \in C^1(\Omega)$ heisst von Klasse C^2 falls $\frac{\partial f}{\partial x^i} \in C^1(\Omega)_{1\le i\le n}$

Für ein beliebiges m, heisst die Funktion $f \in C^1(\omega)$ von der Klasse C^m, $f \in C^m(\omega)$, falls $\frac{\partial f}{\partial x^i} \in C^{m-1}(\Omega)$, $1 \le i \le n$

Where does the definition end? page 183 top

Für ein $f \in C^2(\Omega)$, heissen die Funktionen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} := \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)$$

die zweiten partiellen Ableitungen von f.

Analog definiert man die $m-$ten partiellen Ableitungen von f oder partielle Ableitungen vom Grad m für jedes $m > 0$ (Für $f \in C^m(\Omega)$)

Satz 8.45

Sei $f \in C^2(\Omega)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} &= \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} f\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j x^i}\end{aligned}$$

Im allgemeinen Fall:

Satz 8.46

Für jede C^k-Funktion sind alle partiellen Ableitungen vom Grad $\leq k$ von der Reihenfolge der Ableitungen unabhängig. Von Satz 8.35 erhalten wir folgende notwendige Bedingung für die Konservativität

Korollar 8.47

Sei $v : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $v = \left(v^i\right)_{1 \leq i \leq n}$ ein C^1-Vektorfeld. Falls v konservativ ist, folgt

$$\frac{\partial v^i}{\partial x^j} = \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \qquad 1 \leq i, j \leq n$$

Beweis

Nach Voraussetzung gibt es $f \in C^1(\Omega)$ mit $v^i(x) = \frac{\partial f}{\partial x^i}$. Da nun $v^i \in C^1$, $1 \leq i \leq n$ folgt $f \in C^2(\Omega)$. Woraus

$$\frac{\partial v^i}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial}{\partial x^i} v^j$$

folgt.

Beispiel 8.48

1. $$v(x, y) = \begin{pmatrix} 4xy^2 \\ 2y \end{pmatrix}$$

   Es gilt $\frac{\partial v^1}{\partial y} = 8xy$, $\frac{\partial v^2}{\partial x} = 0$. Also ist v nicht konservativ.

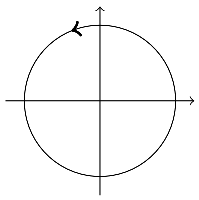
2. Sei $\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \neq (0, 0)\right\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$ und

   $$v(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right)$$

   Dann $v : \Omega \to \mathbb{R}^2$ mindestens C^1. Ausserdem

   $$\frac{\partial v^1}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{\partial v^2}{\partial x}$$

   Jetzt berechnen wir $\int\limits_C v ds$, wobei C:



$$C(t) = (\cos(t), \sin(t))$$
$$t \in (0, 2\pi]$$

$$\begin{aligned}
\int_C v ds &= \int_0^{2\pi} < v\left(C\left(t\right)\right), C^1\left(t\right) > dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\sin^2 t + \cos^2 t\right) dt = 2\pi \neq 0 \\
&\Rightarrow \; v \text{ auf } \Omega \text{ ist nicht konservativ!}
\end{aligned}$$

Jetzt betrachten wir $\Omega' = \{(x, y) \mid x > 0\}$ und führen Polarkoordinaten ein

can't understand image on page 187, top

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

Dann ist $\tan\theta = \frac{y}{x}$ und

$$\theta = \arctan\frac{y}{x}$$

Wir betrachten $\theta : \Omega' \to \mathbb{R}$ als ein Funktion der Variablen x, y und berechnen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\theta}{\partial x} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \\
\frac{\partial\theta}{\partial y} &= \frac{x}{x^2 + y^2}
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
\nabla\theta\left(x, y\right) &= v\left(x, y\right) \\
v\left(x, y\right) &\in \Omega' \\
\Rightarrow \; & v \text{ ist konservativ auf } \Omega
\end{aligned}$$

Das heisst die Konservativität ist eine Eigenschaft zugleich des Vektorfeldes v $\underline{\text{v}}$ und der Region Ω.

Definition

Sei v ein Vektorfeld $v : D \to \mathbb{R}^2$. Die skalare *Rotation* ist definiert als

$$\operatorname{rot} v(x, y) := \frac{\partial v_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial v_1}{\partial y}(x, y)$$

$\operatorname{rot} v(x,y) = 0$ ist eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Potentials. Die Bedingung $\operatorname{rot} v(x) = 0$ ist hinreichend, falls das Gebiet D einfach zusammenhängend ist, also keine "Löcher" enthält.

Definition 8.49

Eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heisst einfach zusammenhängend, falls

1. Ω stückweise C^1-wegzusammenhängend ist.
2. jeder stückweise C^1-Weg in Ω stetig innerhalb Ω auf einen Punkt zusammengezogen werden kann.

Die Region $\Omega = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist nicht einfach zusammenhängend.
$\Omega' = \{(x,y) \mid x > 0\}$ ist es aber.

Satz 8.50

Sei $\Omega \in \mathbb{R}^2$ beschränkt zusammenhängend sowie einfachzusammenhängend, sei $v \in C^1\left(\Omega : \mathbb{R}^2\right)$ Vektorfeld. Dann sind folgende Aussagen äquivalent

1. v ist konservativ
2. $\frac{\partial v^1}{\partial y} = \frac{\partial v^2}{\partial x}$

Taylorentwicklung und das lokale Verhalten von C^m-Funktionen

Not sure how big of a title...

Wir werden jetzt eine Verallgemeinerung der Taylorentwicklung in einer Variable herleiten.

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine C^m-Funktion sowie $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$. (Allgemein könnte man $\mathbb{R}^n$ durch eine offene konvexe Menge ersetzen)

Sei

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto (1-t)\, x_0 + x_1 \end{aligned}$$

Dann ist $g := f \circ \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $((g(0) = f = (x_0)\,, g(1) = f\,(x_1))$)eine C^m-Funktion und (nach Taylorentwicklung von Funktionen mit einer Variabel) gibt es $\xi \in (0,1)$, so dass

$$(*) \qquad g\,() = g\,(0) + g'\,(0) + \ldots + \frac{g^{(m-1)}\,(0)}{(m-1)!} + \frac{g^{(m)}\,(\xi)}{m!}$$

can't read between brackets before equal sign, page 190 very top

Jetzt berechnen wir $g^{(i)}(t)$ als Funktion von f und deren Ableitungen. Für $g'(t)$ benutzen wir die Kettenregel:

$$g'(t) = df\,(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

mit
$$\varphi'(t) = x_1 - x_0 = \left({x_1}^1 - {x_0}^1, {x_1}^2 - {x_0}^2, \ldots, {x_1}^n - {x_0}^n\right)$$
Erhalten wir:
$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} (\varphi(t)) \left(x_1^i - x_0^i\right) = \nabla f\left(\varphi(t)\right) \cdot (x_1 - x_0)$$
$$g'(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} (x_0) \left(x_1^i - x_0^i\right) = \nabla f\left(x_0\right) \cdot (x_1 - x_0)$$

Jetzt berechnen wir $g^{(2)}(t)$:
$$g^{(2)}(t) = \frac{d}{dt}\left(g'\left(t\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\left(\varphi\left(t\right)\right)\right)\left(x_1^i - x_0^i\right)$$

Analog gilt:
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\left(\varphi\left(t\right)\right)\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial \mathrm{x}^i}\left(\varphi\left(t\right)\right)\left(x_1^j - x_0^j\right)$$

Eingesetzt gilt:
$$g^{(2)}(t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}\left(\varphi(t)\right)\right)\left(x_1^i - x_0^i\right)\left(x_1^j - x_0^j\right)$$
$$g^{(2)}(0) = \sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}\left(x_0\right)\right)\left(x_1^i - x_0^i\right)\left(x_1^j - x_0^j\right)$$

Daraus schliesst man induktiv, dass
$$g^{(k)}(t) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1}^{n}\left(\frac{\partial^k f}{\partial x^{i_1}\ldots\partial x^{i_k}}\left(\varphi(t)\right)\right)\prod_{l=1}^{k}\left(x_1^{i_l} - x_0^{i_l}\right)$$

Eingesetzt in $(*)$ (s.228) ergibt

MISSING CONTENT?? page 191 bottom

Satz 8.51 (Taylorentwicklung)

$$\begin{aligned} f\left(x_1\right) = f\left(x_0\right) &+ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\left(x_0\right)\left(x_1^i - x_0^i\right) + \ldots \\ &+ \frac{1}{(m-1)!} \sum_{i_1,\ldots,i_{m-1}=1}^{n} \frac{\partial^{m-1} f}{\partial x^{i_1}\ldots\partial x^{i_{m-1}}}\left(x_0\right) \prod_{l=1}^{(m-1)}\left(x_1^{i_l} - x_0^{i_l}\right) \\ &+ \frac{1}{m!} \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n} \frac{\partial^m f}{\partial x^{i_1}\ldots\partial x^{i_m}}\left(x_\xi\right) \prod_{l=1}^{m}\left(x_1^{i_l} - x_0^{i_l}\right) \end{aligned}$$

mit einer Zahl $\xi \in (0,1)$, $x_\xi = (1-\xi)\,x_0 + \xi x_1$.

Bemerkung 8.52

Insbesondere für $m = 2$ erhalten wir für f die quadratische Näherung

$$\begin{aligned} f(x_1) = & f(x_0) + \nabla f(x_0)(x_1 - x_0) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_0)\left(x_1^i - x_0^i\right)\left(x_1^j - x_0^j\right) + r_2(f, x_1, x_0) \end{aligned}$$

mit Fehler

$$\frac{r_2(f, y_1, x_0)}{|x_1 - x_0|} \to 0, (x_1 \to x_0)$$

Definition 8.53

Die Matrix der zweiten partiellen Ableitungen heisst Hesse-Matrix von f und wird mit $\mathrm{Hess}(f)$ oder $\nabla^2 f$ bezeichnet

$$\begin{aligned} \mathrm{Hess}(f) = & \nabla^2 f := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \cdot \partial x^j}\right)_{i,j=1\ldots n} \\ = & \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^n \partial x^1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x^n \partial x^n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Seien $\nabla f, x_1 - x_0$ Zeilenvektoren und sei $(x - x_0)^t$ der zu $x_1 - x_0$ transponierte Spaltenvektor . Dann wird die Taylorentwicklung von Grad 2 äquivalent zu

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0)^t \\ & + \frac{1}{2}(x - x_0) \cdot \nabla^2 f(x_0)(x - x_0)^t \\ & + r_3(f, x, x_0) \end{aligned}$$

Bemerkung

Die Hesse - Matrix von f ist nach Satz von Schwarz eine symmetrische Matrix.

Beispiel

$f(x, y) = e^{x+y} \cos x$ im Punkt $(0, 0)$. Die Taylorentwicklung vom Grad 2:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} = & e^{x+y} \cos x - e^{x+y} \sin x, \ \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = & e^{x+y} \cos x, \ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 1 \end{aligned}$$

$$(\nabla f)(0,0) = (1,1) \qquad f(0,0) = 1$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) &= e^{x+y}\cos x - e^{x+y}\sin x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) &= e^{x+y}\cos x - e^{x+y}\sin x - e^{x+y}\sin x - e^{x+y}\cos x \\
&= -2e^{x+y}\sin x \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0 & \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= e^{x+y}\cos x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 1
\end{aligned}$$

$$\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
((x,y)-(0,0))\,\nabla^2 f\,(0,0)\,((x,y)-(0,0))^T &= (x,y)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= (x,y)\begin{pmatrix} y \\ x+y \end{pmatrix} \\
&= 2xy + y^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(x,y) = e^{x+y}\cos x &= 1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}(x,y) + \frac{1}{2}(x,y)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= 1 + (x,y) + \frac{1}{2}\left(2xy + y^2\right) + r_3(f,(x,y))
\end{aligned}$$

Taylorpolynom von Grad 2: $1 + (x+y) + \frac{1}{2}\left(2xy+y^2\right)$

Die Hesse-Matrix bestimmt, ob die Funktion f in der Nähe von x konvex oder konkav ist (oder nicht). Sie spielt die gleiche Rolle wie die zweite Ableitung von Funktionen in einer Variable.

Als nächstes benötigen wir eine mehrdimensionale Entsprechung zur Positivität in den eindimensionalen Beziehungen $f''(z) > 0$ bzw. $f''(z) < 0$.

Can't understand word between brackets, page 197 middle

> **Definition 8.54**
> Eine symmetrische Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heisst
>
> 1. **Positiv definit** wenn
>
> $$^t x A x = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x^i x^j > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

(oder wenn sämtliche Eigenwerte positiv sind)

2. **Negativ definit** wenn
$$^t xAx < 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$
(sämtliche Eigenwerte negativ)

3. Sonst **indefinit** (wenn sie sowohl positive als auch negative Eigenwerte besitzt)

Im symmetrischen 2×2 Fall ist die Gleichung auf Definitheit besonders leicht

Satz 8.55

Eine symmetrische Matrix
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$$
ist genau dann

1. Positiv definit, wenn $\det A > 0$ und $a_{11} > 0$
2. Negativ definit, wenn $\det A > 0$ und $a_{11} < 0$
3. Indefinit, wenn $\det A < 0$

Extrema von Funktionen mehrerer Variablen

Jetzt werden wir nach Punkten $x \in \mathbb{R}^n$ schauen, in denen eine Funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein lokales Extremum annimmt. Wir erinnern uns an das Vorgehen im $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

1. Finde alle Punkte $x \in \mathbb{R}$, für die $f'(x) = 0$ gilt (Notwendige Bedingung)
2. Falls in einem solchen Punkt zusätzlich $f''(x) > 0$ (bzw. $f''(z) < 0$) gilt, so handelt es sich um ein lokales Minimum (bzw. Maximum) (hinreichende Bedingung)

Jetzt verallgemeinern wir diese Strategie. Zunächst:

Definition 8.55
Ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $df(x_0) = 0$ heisst <u>kritischer Punkt</u> von f (oder <u>stationärer</u> Punkt von f)

Satz 8.56

Sei

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$f \in C^2(\Omega);x_0 \in \Omega$$

1. Falls $x_0 \in \Omega$ ein lokales Extremum (Minimum oder Maximum) von f ist, so gilt $df(x_0) = 0$

2. Falls $df(x_0) = 0$, und falls $\text{Hess}(f)(x_0)$ positiv definit ist, so ist x_0 eine lokale Minimalstelle

3. Falls $df(x_0)$, und falls $\text{Hess}_f(x_0) < 0$ negativ definit ist, so ist x_0 eine lokale Maximalstelle

4. Falls $df(x_0) = 0$, und $\text{Hess}_f(x_0)$ indefinit ist, so ist x_0 ein Sattelpunkt (d.h. jede Umgebung U von x_0 enthält Punkte $p, q \in U$ mit $f(P) > f(x_0) > f(q)$)

Beispiel

1.

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 \\ \nabla f &= (2(x-1), 2(y+2), 2(z+1)) \\ \nabla f(x_0) &= (0,0,0) \Rightarrow x_0 = (1,-2,-1) \end{aligned}$$

$$H_f(x_0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$H_f(x_0)$ ist positiv definit $\Rightarrow x_0(1,-2,-1)$ ist ein lokales Minimum.

2.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \cos(x+2y) + \cos(2x+3y) \\ \nabla f &= (-\sin(x+2y) - 2\sin(2x+3y)\ , \\ &\quad -2\sin(x+2y) - 3\sin(2x+3y)) = (0,0) \\ &\Rightarrow -\sin(x+2y) - 2\sin(2x+3y) = 0 \\ &\quad -2\sin(x+2y) - 3\sin(2x+3y) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sin(2x+3y) = 0,\ \ \sin(x+2y) = 0$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} 2x+3y &= k\pi \\ x+2y &= l\pi \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = k\pi \text{ und } x = l\pi$$

Kritische Punkte: $(\pi l, \pi k) \qquad k, l \in \mathbb{Z}$

$$\frac{\partial f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial f}{\partial x \partial y} = -2\cos(x+2y) - 6\cos(2x+3y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\cos(x+2y) - 4\cos(2x+3y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4\cos(x+2y) - 9\cos(2x+3y)$$

$$(0,0): \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -5 < 0$$

$$\left|\nabla^2 f(0,0)\right| = \begin{vmatrix} -5 & -8 \\ -8 & -13 \end{vmatrix} = 13 \cdot 5 - 64 = 1 < 0$$

$\Rightarrow \nabla^2 f(0,0)$ ist negativ definit und $(0,0)$ ist eine lokale Maximalstelle.

Auch alle Punkte $(-2\pi k, 2\pi l)$ sind lokale Maxima. Analog, bis auf Addition von Vielfachen von 2π, hat f eine lokale Minimalestelle in (π, π) und Sattelpunkte in $(0, \pi)$ und $(\pi, 0)$

8.6 Vektorwertige Funktionen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f = \left(f^i\right)_{1<i<l} \Omega \to \mathbb{R}^l$

Definition 8.57

1. Die Funktion $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ heisst an der Stelle $x_0 \in \Omega$ differenzierbar, falls jede Komponente f^i, $1 < i < l$ an der Stelle x_0 differenzierbar ist.

   Das Differential $df(x_0)$ hat die Gestalt

$$df(x_0) = \begin{pmatrix} df^1(x_0) \\ \vdots \\ df^n(x_0) \end{pmatrix}$$

2. f heisst auf Ω differenzierbar (bzw. von der Klasse C^m, $m \geq 1$) falls jedes f^i differenzierbar ist (bzw. $f^i \in C^m(\Omega)$) $1 \leq i \leq l$

Bemerkung 8.58

1. Bezüglich der Standardbasis dx^j, $1 \leq j \leq n$ erhalten wir

$$df^i(x_0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x_0)\, dx^j = \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^1}(x_0), \ldots, \frac{\partial f^i}{\partial x^n}(x_0)\right)$$

die Darstellung

$$df(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(x_0) & \frac{\partial f^1}{\partial x^2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n}(x_0) \\ \frac{\partial f^2}{\partial x^1}(x_0) & \frac{\partial f^2}{\partial x^2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f^2}{\partial x^n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^l}{\partial x^1}(x_0) & \frac{\partial f^l}{\partial x^2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f^l}{\partial x^n}(x_0) \end{pmatrix}$$

Die $l \times n$ Matrix $df(x_0) = \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x_0)\right)_{1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq n}$ heisst Jacobi- oder Funktionalmatrix von f an der Stelle x_0.

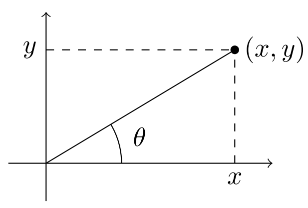
2. Auch im vektorwertigen Fall ist die Funktion f genau dann differenzierbar in x_0, wenn eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ existiert mit

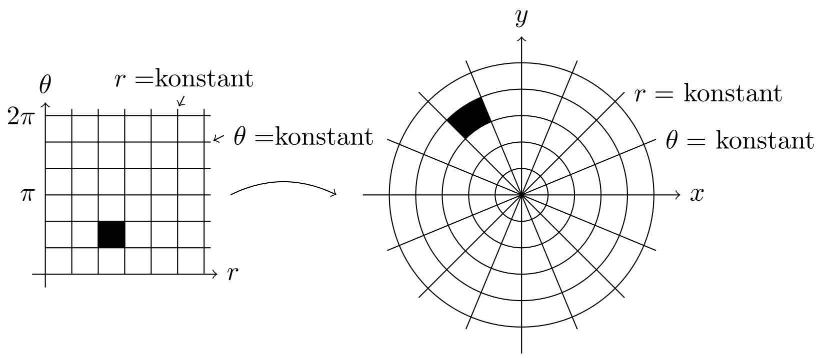
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0$$

Beispiel 8.59

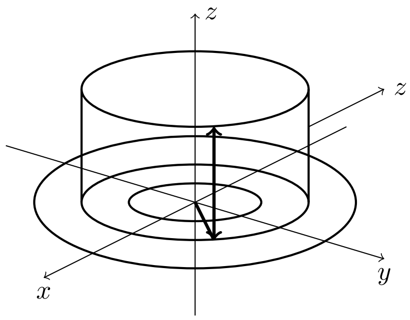
1.
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$
$$f \in C^\infty\left(\mathbb{R}^2 : \mathbb{R}^2\right) \text{ mit } df(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

2. Polarkoordinaten
$$f : [0, \infty) \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f' \\ f^2 \end{pmatrix}$$
$$df'(r, \theta) = (\cos\theta, -r\sin\theta)$$
$$df^2(r, \theta) = (\sin\theta, r\cos\theta)$$
$$df(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \leftarrow \text{Jacobi Matrix}$$
$$\det(df(r, \theta)) = r\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = r$$





3. Zylinderkoordinaten



Die x, y Anteile werde in Polarkoordinaten transformiert und die z-Koordinate beibehalten

$$f : [0,\infty) \to [0,2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

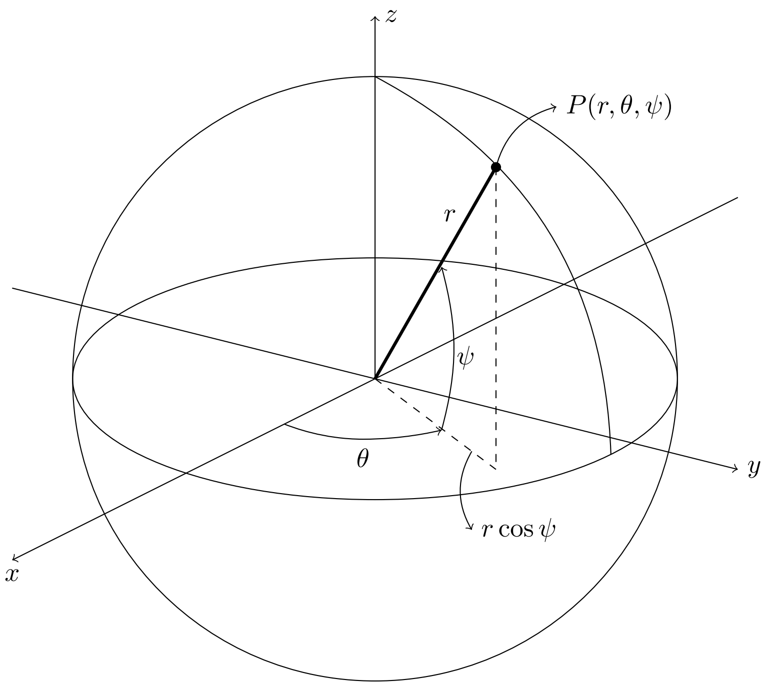
$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f' \\ f^2 \\ f^3 \end{pmatrix}$$

$$df(r,\theta,z) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \leftarrow \text{Jacobi Matrix}$$

$$\det\left(df(r,\theta,z)\right) = r\left(\cos^2\theta + sin^2\theta\right) = r$$

(Rotationssymmetrie bezüglich z Achse)

4. Kugelkoordinaten

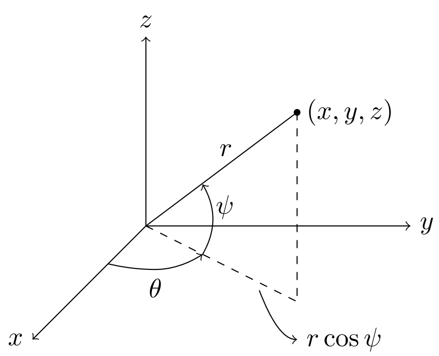


$$f : [0,\infty) \times [0,2\pi] \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}^3$$

$$f\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\psi \\ r\sin\theta\cos\psi \\ r\sin\psi \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\psi \\ \sin\theta\cos\psi \\ \sin\psi \end{pmatrix}$$

$$df\,(r,\theta,\psi) = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\psi & -r\sin\theta\cos\psi & -r\cos\theta\sin\psi \\ \sin\theta\cos\psi & r\cos\theta\cos\psi & -r\sin\theta\sin\psi \\ \sin\psi & 0 & r\cos\psi \end{pmatrix}$$

$$\det(df) = r^2 cos\psi$$



ψ : Breitengrad

θ : Längengrad

(Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung)

Es gelten die üblichen Differentiationsregeln

Satz 8.60

Seien $f, g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ an der Stelle $x_0 \in \Omega$ differenzierbar und $\alpha \in \mathbb{R}$. dann sind die Funktionen αf und $f + g$ sowie das Skalarprodukt von f und g an der Stelle x_0 differenzierbar und

1. $d(\alpha f)(x_0) = \alpha df(x_0)$
2. $d(f+g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0)$
3. $d(f \cdot g)(x_0) = f(x_0) \cdot dg(x_0) + g(x_0) \cdot df(x_0)$
   wobei $f(x_0) \cdot dg(x_0) = \sum\limits_{i=1}^{l} f^i(x_0)\, dg^i(x_0)$

Satz 8.61

Seien $g : \Omega \to \mathbb{R}^l$ an der Stelle $x_0 \in \Omega$ und $f : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$ an der Stelle $g(x_0)$ differenzierbar.

Dann ist die Funktion $f \circ g : \Omega \to \mathbb{R}^m$ an der Stelle x_0 differenzierbar, und

$$d(f \circ g)(x_0) = df(g(x_0)) \cdot dg(x_0)$$

Beispiel

Sei

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} \end{aligned} \qquad df = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) &\mapsto \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 \\ xyz \end{pmatrix} \end{aligned} \qquad dg = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (f \circ g) : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) &\mapsto \begin{pmatrix} \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 - (xyz)^2 \\ 2\left(x^2 + y^2 + z^2\right)(xyz) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\left(f\circ g\right)\left(x,y,z\right) &= df\left(g\left(x,y,z\right)\right)\cdot dg\left(x,y,z\right) \\ &= \begin{pmatrix} 2\left(x^2+y^2+z^2\right) & -2xyz \\ 2xyz & 2\left(x^2+y^2+z^2\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ yz & xz & xy \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4x\left(x^2+y^2+z^2\right)-2xy^2z^2 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \end{aligned}$$

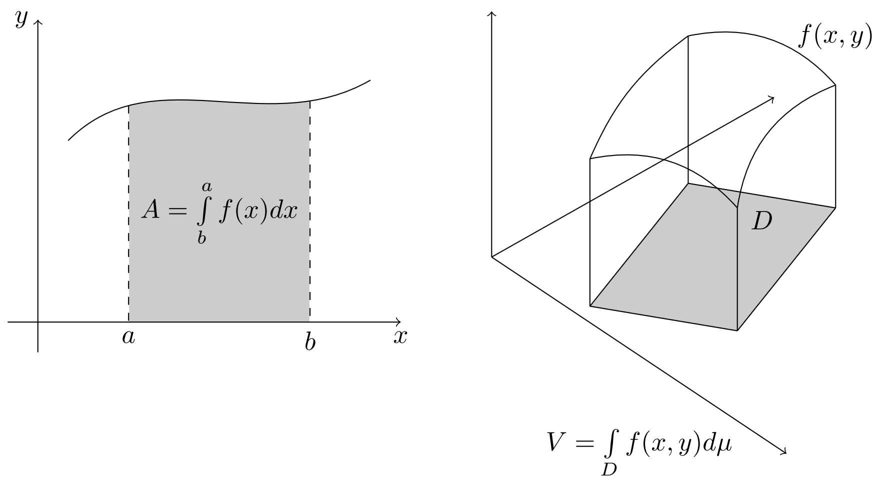
Kapitel 9

Integration in $\mathbb{R}^n$

Im Eindimensionalen hatten wir mit dem Integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

den Flächeninhalt unter dem Graphen von f berechnet. Wir suchen nach einer Verallgemeinerung mit der z.B. Volumen unter dem Graphen einer Funktion von zwei Variablen berechnet werden kann. can't understand word, page 207 middle



Erinnerung: Das bestimmte Riemann-Integral einer Funktion $f(x)$ über einem Intervall ist $[a, b]$:

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

Das Integral I war als Grenzwert der Riemannschen Ober- und Untersumme definiert (falls diese Grenzwerte jeweils existieren und übereinstimmten).

Das Konstruktionsprinzip für Bereichsintegrale ist analog. Aber der Definitionsbereich D ist komplizierter. Wir betrachten zunächst den Fall zweier Variablen, $n = 2$, und einen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}^2$ der Form

$$D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$$

d.h. D ist ein kompakter Quader (Rechteck). Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.

Definition 9.1

Mann nennt $Z = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n), (y_0, y_1, \ldots, y_m)\}$ eine Zerlegung des Quaders $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ falls gilt

$$a_1 = x_0 < x_1 \cdots < x_n = b_1$$
$$a_2 = y_0 < y_1 \cdots < y_m = b_2$$

1. WHERE IS NUMBER 1??

2. Die Feinheit einer Zerlegung $Z \in Z(D)$ ist

$$\|Z\| := \max_{i,j} \{|x_{i+1} - x_i|, |y_{j+1} - y_j|\}$$

3. Für eine vorgegebene Zerlegung Z, nennt man die Mengen

$$Q_{ij} := [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$$

die Teilquader der Zerlegung Z. Das Volumen des Teilquaders Q_{ij} ist

$$\mathrm{vol}(Q_{ij}) := (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$$

4. Für beliebige Punkte $\xi_{ij} \in Q_{ij}$ der jeweiligen Teilquader nennt man

$$R_f(Z) := \sum_{i,j} f(\xi_{ij}) \,\mathrm{vol}(Q_i j)$$

eine Riemannsche Summe zur Zerlegung Z

5. Analog zum Integral einer Variablen heissen für eine Zerlegung Z

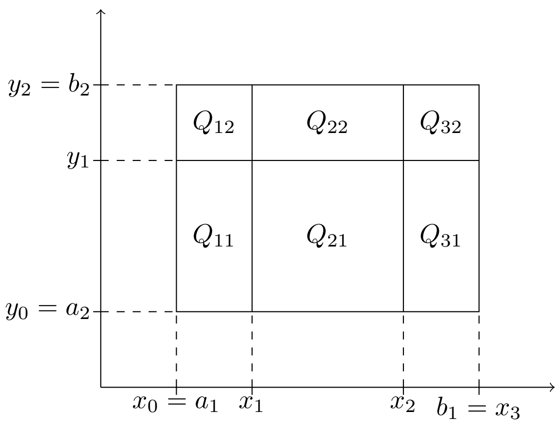
$$U_f(Z) := \sum_{i,j} \inf_{\mathbb{X} \in Q_{ij}} f(\mathbb{X}) \,\mathrm{vol}(Q_i j)$$
$$O_f(Z) := \sum_{i,j} \sup_{\mathbb{X} \in Q_{ij}} f(\mathbb{X}) \,\mathrm{vol}(Q_i j)$$

die Riemannsche Untersumme bzw. Riemannsche Obersumme von $f(x)$

Bemerkung 9.2

1. Es gilt
$$U_f(Z) \leq R_f(Z) \leq O_f(Z)$$
d.h. eine Riemannsche Summe zur Zerlegung Z liegt stets zwischen der Unter und Obersumme dieser Zerlegung.

2. Entsteht eine Zerlegung Z_2 aus der Zerlegung Z_1 durch Hinzunahme weiterer Zwischenpunkte x_i und/oder y_j, so gilt
$$\begin{aligned} U_f(Z_2) &\geq U_f(Z_1) \text{ und} \\ O_f(Z_2) &\leq O_f(Z_1) \end{aligned}$$
Für zwei beliebige Zerlegungen Z_1, Z_2 gilt stets
$$U_f(Z_1) \leq O_f(Z_2)$$



Definition 9.3

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ beschränkt

1. Das Riemannsche Unterintegral bzw. Riemannsche Oberintegral der Funktion $f(x)$ über D ist
$$U_f := \sup\{U_f(z) : z \in Z(D)\} := \underline{\int}_D f(x)d\mu$$
$$O_f := \inf\{O_f(z) : z \in Z(D)\} := \overline{\int}_D f(x)d\mu$$

2. Die Funktion $f(x)$ nennt man Riemann - integrierbar über D, falls Unter und Oberintegral übereinstimmen. Das Riemann Integral von $f(x)$ über D ist
$$\int_D f(x)d\mu = \overline{\int}_D f(x)d\mu = \underline{\int}_D f(x)d\mu$$

Bemerkung

In höheren Dimensionen, $n > 2$, ist die Vorgehensweise analog. Schreibweise: Für $n = 2$, $n = 3$

$$\int_D f(x, y)\, d\mu \text{ bzw. } \int_D f(x, y, z)\, d\mu$$

oder auch

$$\int_D f(x, y)\, dxdy \text{ bzw. } \int_D f(x, y, z)\, dxdydz$$

oder

$$\int_D f dxdy \text{ bzw. } \int_D f dxdydz$$

Satz 9.4 (Elementare Eigenschaften des Integrals)

1. Linearität: Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ beschränkt und R integrabel, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann sind αf, $f + g$ Riemann-Integrabel

$$\int_D (\alpha f + \beta g)\, d\mu = \alpha \int_D f d\mu + \beta \int_D g d\mu$$

2. Monotonie: Gilt $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in D$, so folgt

$$\int_D f d\mu \leq \int_D g d\mu$$

3. Positivität: Gilt für alle $x \in D$, $f(x) \geq 0$ (d.h. $f(x)$ ist nicht negativ), so folgt

$$\int_D f d\mu \geq 0$$

4. Abschätzung

$$\left| \int_D f(x) d\mu \right| \leq \sup_{x \in D} |f(x)| \operatorname{vol}(D)$$

5. Sind D_1, d_2, D Quader, $D = D_1 \cup D_2$ und $\operatorname{vol}(D_1 \cap D_2) = 0$, so ist f genau dann über D integrierbar, falls f über D_1 und über D_2 integrierbar ist und es gilt

$$\int_D f d\mu = \int_{D_1} f d\mu + \int_{D_2} f d\mu$$

(Gebietsadditivität)

9.1 Der Satz von Fubini

According to the notes it should be 9.2, which one is right??

Wie kann man das Riemann-Integral konkret berechnen? Der Satz von Fubini hilft uns.

Satz 9.5 (Satz von Fubini)

Sei $Q = [a, b] \times [c, d] \in \mathbb{R}^2$ und sei $f \in C^0(Q)$. Dann gilt

$$\int_Q f d\mu = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy$$

d.h. das Integral von f über Q kann iterativ durch $1-$dimensionale Integration bestimmt werden.

Beispiel 9.6

1. Sei $f(x, y) = 2x + 2yx$, $Q = [0, 1] \times [-2, 2]$

$$\begin{aligned}\int_Q f d\mu &= \int_{-2}^{2} \left(\int_0^1 (2x + 2yx)\, dx \right) dy \\ &= \int_{-2}^{2} \left(x^2 + yx^2 \Big|_0^1 \right) dy \\ &= \int_{-2}^{2} (1 + y)\, dy = y + \frac{y^2}{2} \Bigg|_{-2}^{2} = 4\end{aligned}$$

<u>Oder:</u>

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \left(\int_{-2}^{2} (2x + 2yx)\, dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(2xy + y^2 x \Big|_{-2}^{2} \right) dx \\ &= \int_0^1 [(4x + 4x) - (-4x + 4x)]\, dx \\ &= \int_0^1 8x dx = 4x^2 \Big|_0^1 = 4\end{aligned}$$

2.

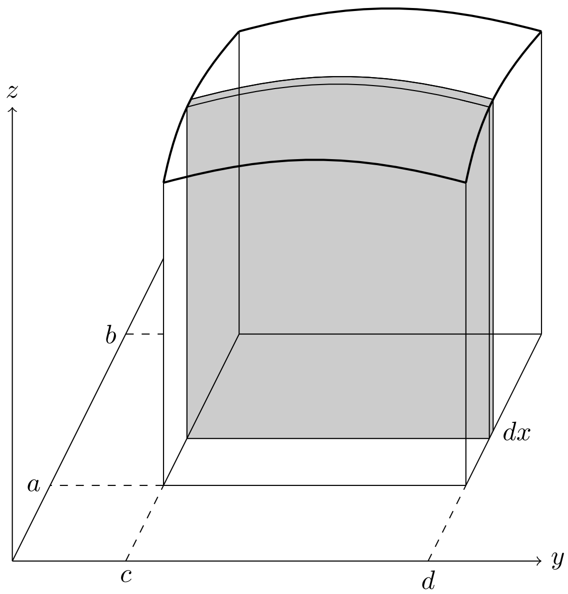
$$\begin{aligned}&\int_0^1 \int_0^{2\pi} (e^x \sin y)\, dy dx \\ &= \int_0^1 \left(-e^x \cos y \Big|_0^{2\pi} \right) dx \\ &= \int_0^1 0 dx = 0\end{aligned}$$

Oder:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 e^x \sin y dx\right) dy \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\sin y e^x\big|_0^1\right) dy \\
&= \int_0^{2\pi}(e-1)\sin y dy \\
&= -(e-1)\cos y\big|_0^{2\pi} = 0
\end{aligned}$$

Geometrische Deutung

Not sure about the text size...



In der Skizze ergibt sich als Volumen der markierten Schicht bei festem x und sehr kleinen Dicke dx näherungsweise das Volumen

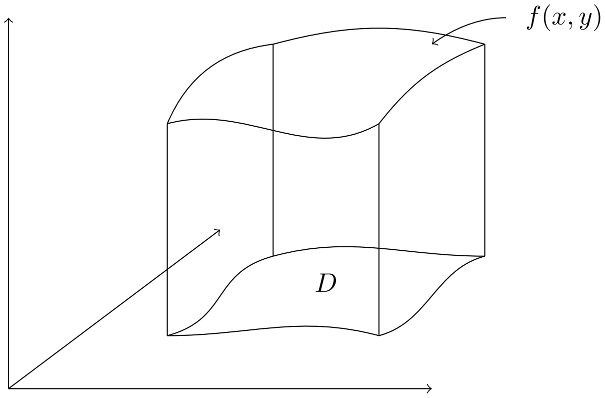
$$\left(\int_c^d f(x,y)\, dy\right) dx$$

Das Aufaddieren sämtlicher Schichtvolumen entspricht gerade der Integration über die Variable x, d.h. für das gesuchte Volumen gilt

$$V = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy\right) dx$$

Bis jetzt können wir nur Integrale über achsenparallel rechteckige bzw. quaderförmige Bereiche berechnen.

Das reicht für viele praktische Aufgaben nicht aus. Meist ist der Integrationsbereich D verbogen oder zumindest anders begrenzt.



shading for the D plane still to do

Die meisten praktischen Aufgaben lassen sich auf die Integration über sogenannte Normalbereiche zurückführen.

Definition 9.10

1. Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^2$ heisst ein Normalbereich bezüglich der $x-$Achse bzw. bezüglich der $y-$Achse falls es stetige Funktionen g, h bzw. $\overline{g}, \overline{h}$ gibt mit

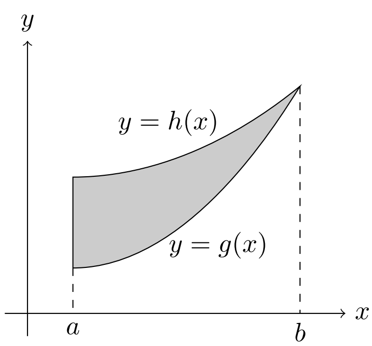
$$D = \{(x,y) \mid a \le x \le b, \text{ und } g(x) \le y \le h(x)\}$$

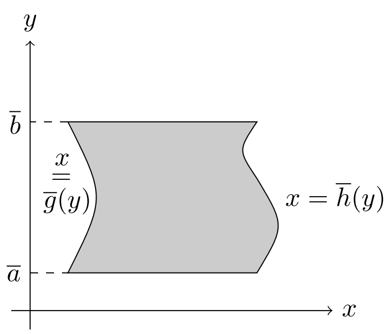
bzw.

$$D = \left\{(x,y) \mid \overline{a} \le x \le \overline{b}, \text{ und } \overline{g}(x) \le y \le \overline{h}(x)\right\}$$

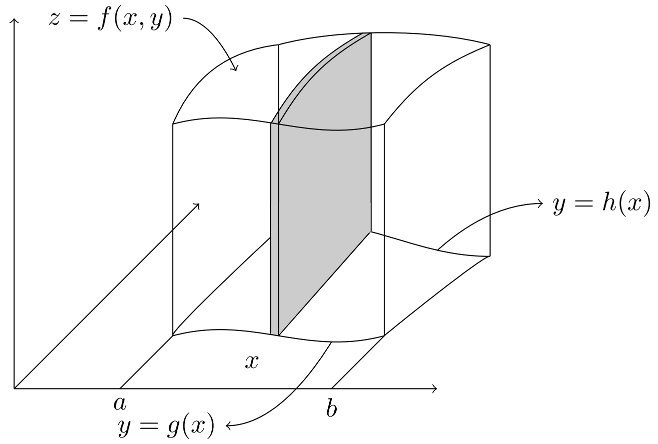
Beispiel

Kreise und Rechtecke sind Normalbereiche bzgl. beider Achsen





Über Normalbereiche lässt sich sehr bequem integrieren



Die markierte Scheibe bei y =const. mit kleiner Dicke dx besitzt näherungsweise das Volumen

$$V(x) = \left(\int\limits_{g(x)}^{f(x)} f(x,y)\, dy \right) dx$$

Nun braucht man $V(x)$ nur noch über $[a,b]$ zu integrieren

$$V = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\, dy \right) dx$$

Satz 9.11

1. Ist $f(x)$ stetig auf einem Normalbereich

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b, \text{ und } g(x) \le y \le h(x) \right\}$$

so gilt

$$\int\limits_D f(x) d\mu = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\, dy \right) dx$$

2. bzw. falls

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overline{a} \le x \le \overline{b}, \text{ und } \overline{g}(x) \le y \le \overline{h}(x) \right\}$$

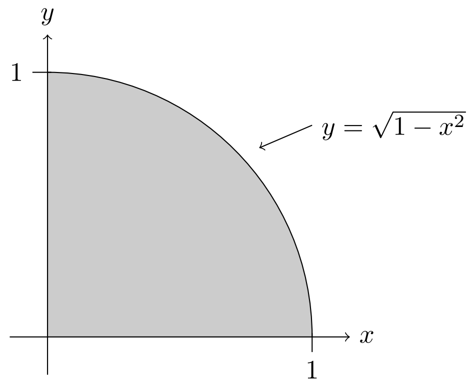
so gilt

$$\int\limits_D f(x) d\mu = \int\limits_{\overline{a}}^{\overline{b}} \left(\int\limits_{\overline{g}(x)}^{\overline{h}(x)} f(x,y)\, dx \right) dy$$

Beispiel 9.12

1. Sei $f(x,y) = x - y$

$D =$



$$\int_D f d\mu = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} (x-y)\, dy dx$$

$$= \int_0^1 \left(xy - \frac{y^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(x\sqrt{1-x^2} - \frac{1-x^2}{2} \right) dx$$

$$= \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx - \frac{1}{2} \int_0^1 1 - x^2 dx$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

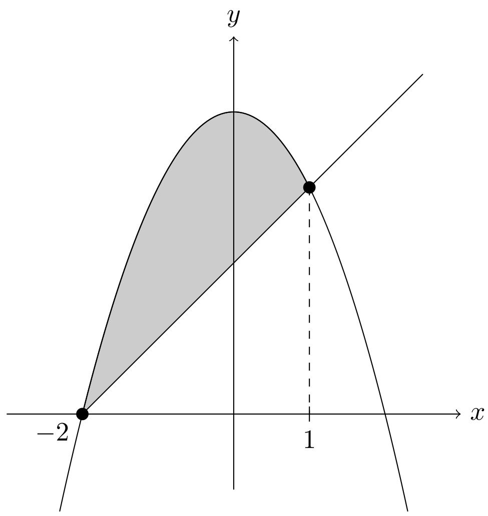
$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx \qquad \begin{aligned} u &= 1-x^2 \\ du &= -2x dx \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{u} du = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\int_D f d\mu = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

2. Sei D das durch die Gerade $g(x) = x + 2$ und die Parabel $b(x) = 4 - x^2$ begrenzte Gebiet

missing content?? page 223 top



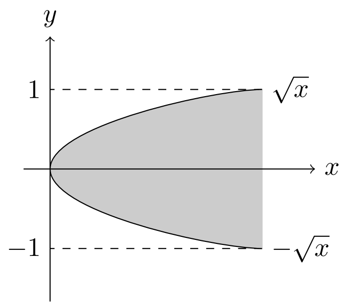
Schnittpunkte:

$$\begin{aligned} x+2 &= 4-x^2 \\ x^2+x-2 &= 0 \\ (x-y)\,&(x+2) \end{aligned}$$

Zu Berechnung des Doppelintegrals zerlegen wir das Gebiet in Streifen parallel zur $y-$Achse. Für festes x variiert y von $g(x)=x+2$ bis $h(x)=4-x^2$

$$\begin{aligned} \int\limits_D x d\mu &= \int\limits_{-2}^{1}\left(\int\limits_{x+2}^{4-x^2} x dy\right) dx \\ &= \int\limits_{-1}^{2} x\left(4-x^2-x+2\right) dx \\ &= \int\limits_{-1}^{2} \left(2x-x^3-x^2\right) dx \\ &= x^2-\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-1}^{2} \\ &= \left(4-4-\frac{8}{3}\right)-\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right) = -\frac{127}{36} \end{aligned}$$

3. Sei D :



$$\int\limits_D f d\mu \underset{\substack{\downarrow \\ *}}{=} \int\limits_{-1}^{1} \left(\int\limits_{x=y^2}^{1} f dx \right) dy$$

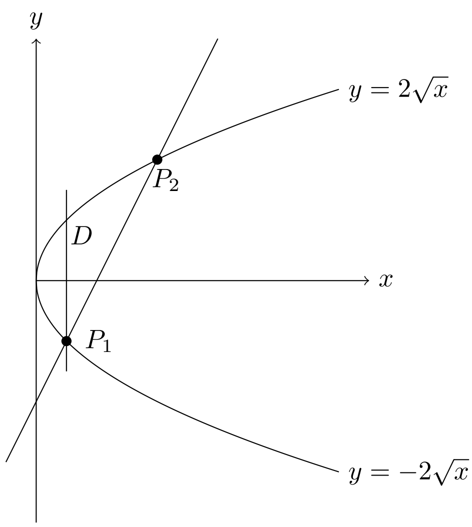
($*=$ Zerlegung des Gebietes in Streifen parallel zur $x-$Achse)

oder mit Zerlegung in Streifen parallel zur $y-$Achse

$$\int\limits_D f d\mu = \int\limits_{x=0}^{1} \left(\int\limits_{y=-\sqrt{x}}^{y=\sqrt{x}} f(x,y)\, dy \right) dx$$

Manchmal muss man D zerlegen.

4. Bestimme $\int\limits_D x dx dy$ wobei D von $y^2 = 4x$ und $y = 2x - 4$ begrenzt wird.



Schnittpunkte P_1, P_2:

$$\begin{aligned}4x = y^2 &= (2x-4)^2\\ &\Rightarrow (2x-4)^2 = 4x\dots\\ &\Rightarrow x = 1 \text{ und } x = 4\\ P_1 = (1,-2) &\qquad P_2 = (4,4)\end{aligned}$$

Zerlegung des Gebiets in Streifen parallel zur $y-$Achse

$$\int_D x d\mu = \int_0^1 \left(\int_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} x dy \right) dx + \int_1^4 \left(\int_{y=2x-4}^{2\sqrt{x}} x dy \right) dx = \ldots = 14.4$$

Wenn wir von aussen nach y integrieren, brauchen wir keine Unterteilung

$$\begin{aligned}\int_D x d\mu &= \int_{y=-2}^{y=4} \left(\int_{y=\frac{y^2}{4}}^{\frac{y}{2}+2} x dx \right) dy\\ &= \int_{-2}^{4} \left(\frac{x^2}{2} \Big|_{\frac{y^2}{4}}^{\frac{y}{2}+2} \right) dy\\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^{4} \left(\left(\frac{y}{2} + 2 \right)^2 - \frac{y^4}{16} \right) dy\end{aligned}$$

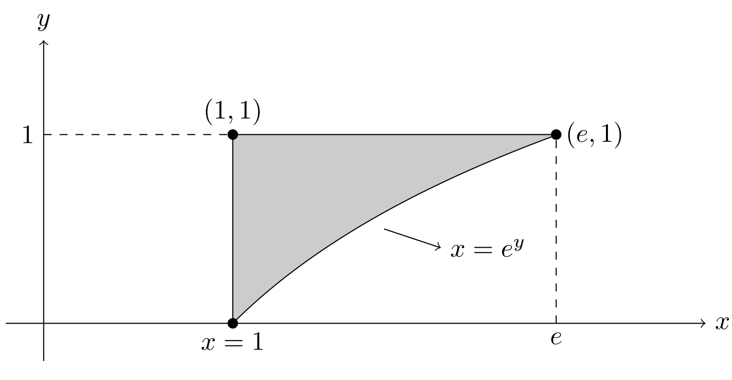
Beispiel für das Ändern der Integrationsreihenfolge

Beispiel

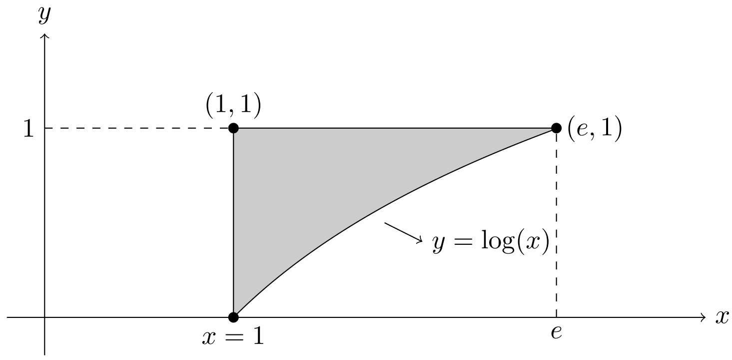
1.

$$\int_0^1 \int_1^{e^y} f(x,y) dx dy$$

$x = 1$ und $x = e^y \Rightarrow y = \ln x \Leftrightarrow 1 = \ln x \Leftrightarrow x = e$



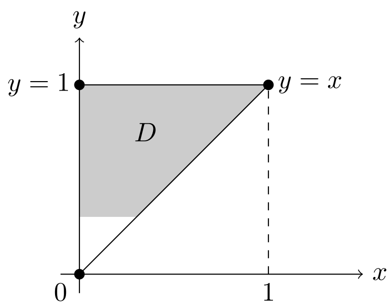
$$\int\limits_{1}^{e} \int\limits_{y=\log x}^{y=1} f(x,y)dydx$$



2. Berechne

$$\int\limits_{0}^{1} \int\limits_{x}^{1} e^{y^2} dydx$$

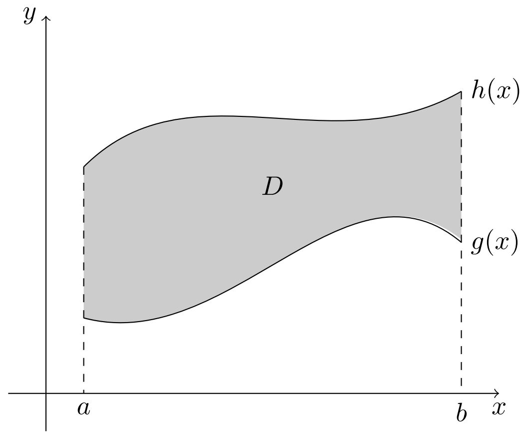
Man kann das Integral $\int\limits_{a}^{b} e^{y^2} dydx$ nicht direkt berechnen, weil man kein explizit Stammfunktion für e^{y^2} finden kann. Man kann sich die Reihenfolge der Zerlegung beliebig heraussuchen damit die Rechnung möglichst einfach wird.



$$\begin{aligned}
\int\limits_{x=0}^{x=1} \int\limits_{y=x}^{y=1} e^{y^2} dydx &= \int\limits_{y=0}^{y=1} \int\limits_{x=0}^{x=y} e^{y^2} dxdy \\
&= \int\limits_{0}^{1} \left[xe^{y^2} \Big|_{x=0}^{x=y} \right] dy \\
&= \int\limits_{0}^{1} ye^{y^2} dy = \frac{e^{y^2}}{2} \Bigg|_{0}^{1} = \frac{1}{2}(e-1)
\end{aligned}$$

Bemerkung 9.13

1. Das Integral
$$A = \int_D 1 d\mu$$
ergibt die Fläche von D. Für einen Normalbereich bzgl. der $x-$Achse erhalten wir daraus die bekannte Formel
$$A = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} 1 dy dx = \int_a^b (h(x) - g(x))\, dx$$



2. Interpretiert man $\rho(x,y)$ als ortabhängige Flächendichte, so erhält man mit
$$m = \int_D \rho\,(x,y)\, d\mu$$
die Masse von D

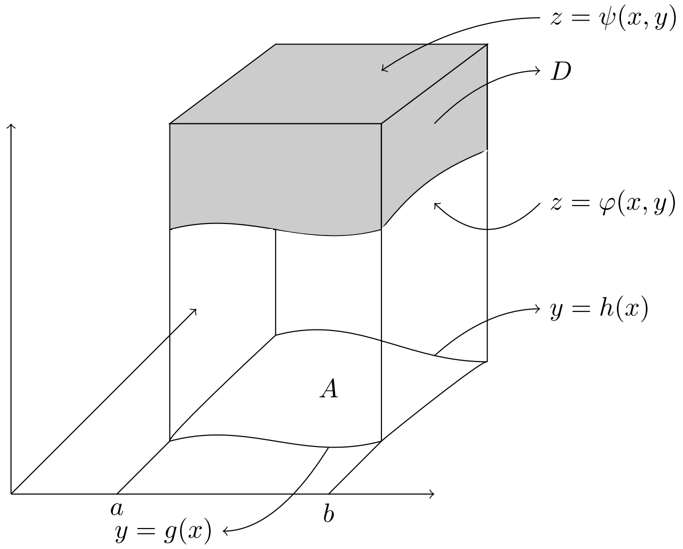
Definition 9.14
Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^3$ heisst Normalbereich, falls es eine Darstellung
$$D = \left\{ (x,y,z) \in R^3 \middle| \, a \leq x \leq b; g(x) < y < h(x); \varphi\,(x,y) \leq z \leq \psi\,(x,y) \right\}$$
gibt.

(Vertauscht man die Rollen von x, y und z so entstehen weitere Mengen, die auch Normalbereiche genannt werden.)

Satz 9.15

Sei $D \subset \mathbb{R}^3$ ein Normalbereich mit Darstellung wie oben, und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt

$$\int_D f d\mu = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\, dzdydx$$



$z = \varphi(x,y)$ und $z = \psi(x,y)$ stellen die “Grund-” und Deckelfläche von D dar.

Der Normalbereich A ist die senkrechte Projektion von D in die $x-y$ Ebene. Dessen “Grund-” und “Deckelkurve” sind durch $y = g(x)$ und $y = h(x)$ gegeben.

Bemerkung 9.16

Das Integral

$$V = \int_D 1 d\mu \text{ für } D \subset \mathbb{R}^3$$

ergibt das Volumen von D. Für einen Normalbereich

$$D = \{(x,y,z) \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x), \varphi(x,y) \leq z \leq \psi(x,y)\}$$

erhält man

$$V = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} 1 dzdydx = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} \psi(x,y) - \varphi(x,y)\, dydx$$

9.2 Substitutionsregel

Häufig sind kartesische Koordinaten für die Berechnung von Integralen eher ungeeignet. z.B. wenn man Symmetrien bezüglich gewisser Punkte oder Achsen ausnutzen will.

Wir behandeln als nächstes Variablentransformationen vom Typ $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und verallgemeinern die eindimensionale Substitutionsregel:

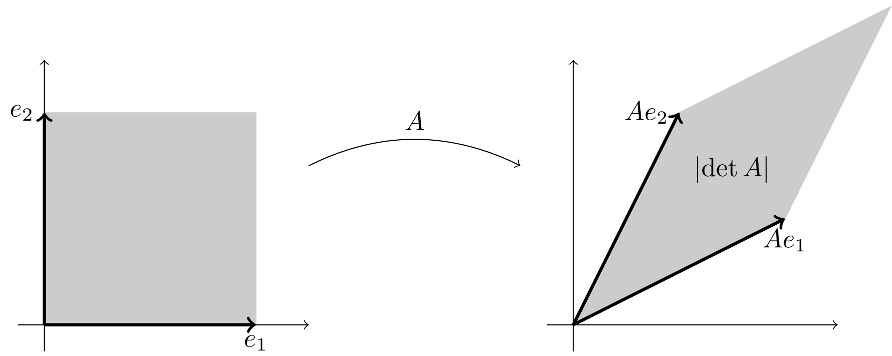
$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

mit f stetig, $x = \varphi(t)$ $\varphi : [a,b] \to I$ stetig differenzierbar, I = Intervall. Zunächst erinnern wir uns an die lineare Algebra:

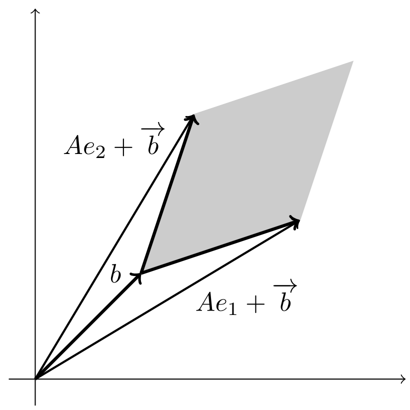
Das Bild des Einheitsquadrats/-würfels unter der linearen Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ \vec{x} &\to A\vec{x} \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n} \end{aligned}$$

ist ein Parallelogramm mit Fläche $|\det A|$



Dies bleibt wahr, wenn man zur affin-linearen Abbildung $\Phi(\vec{x}) = A\vec{a} + \vec{b}$ betrachtet, es kommt ja nur eine Verschiebung dazu



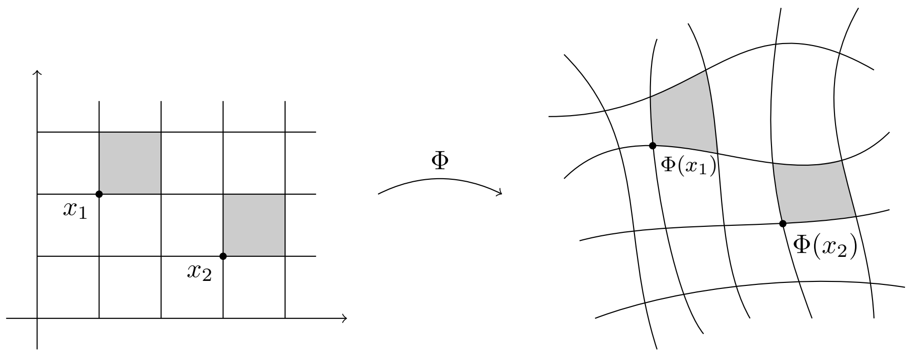
Nun betrachten wir eine differenzierbare nichtlineare Transformation $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Dann gilt, zumindest nahe eines festen Punktes $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$\Phi(x) \approx \Phi(x_0) + d\Phi(x_0)(\vec{x} - \vec{x_0})$$

Die rechte Seite stellt gerade eine Abbildung vom Typ $A\vec{x} + \vec{b}$ dar, wobei die Jacobi-Matrix $d\Phi(x_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ die Rolle von A (und $\Phi(x_0)$ von $\vec{b}$) übernimmt. Damit ist der lokale Flächenverzerrungsfaktor von Φ gegeben durch $|\det d\Phi(x_0)|$ d.h. den Betrag der Jacobi- oder Funktionaldeterminante. Die lokale Flächenverzerrung muss bei der Substitution in Integralen berücksichtigt werden und zwar in der Form

$$\text{“}d\vec{x} = |\det d\Phi(\vec{y})| d\vec{y}\text{”}, \text{ falls } \vec{x} = \Phi(y)$$

Geometrische Darstellung in $\mathbb{R}^2$



Die Flächen der einander entsprechenden markierten Vierecke unterscheiden sich gerade um den Faktor $|\det d\Phi(x_1)|$ bzw. $|\det d\Phi(x_2)|$

Substitutionsregel

Satz 9.17

Sei $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi : U \to V$ bijektiv, stetig diff., $\det d\Phi(\vec{y}) \neq 0 \ \forall \vec{y} \in U$, sowie $f : V \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt

$$\int\limits_V f(\vec{x})\, d\mu(\vec{x}) = \int\limits_{\Phi(U)=V} f(\Phi(\vec{y}))\, |\det d\Phi(y)| d\mu$$

Beispiel 9.18

1. Berechne $\iiint\limits_V d\mu$, wobei

$$\underset{\text{Kugeloktanten}}{\underset{\downarrow}{\text{V}}} = \left\{ (x, y, z)^t \middle| x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x, y, z \geq 0 \right\}$$

Es ist einfacher, in Kugelkoordinaten zu rechnen

chopped content, page 233 middle to bottom

$$\Phi(r,\theta,\psi) = \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\psi \\ r\sin\theta\cos\psi \\ r\sin\psi \end{pmatrix}$$

Die Transformation Φ ist auf ganz $\mathbb{R}^3$ definiert und mit

$$U = [0,1] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

gilt

$$\begin{aligned} \Phi(U) &= V \\ \det(d\Phi) &= r^2\cos\psi \\ \operatorname{vol}(V) &= \int_V d\mu(\vec{x}) = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos\psi d\psi d\theta dr = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

2. Berechne das Integral

$$\iint_D xdxdy \text{ wobei } D = \text{Viertelkreis}$$

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} xdydx &= \int_0^1 \left(xu\Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} \right) dx \\ &= \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx \\ &= \int_0^1 \frac{u^{1/2}}{2} du = -\frac{1}{2} \cdot \frac{u^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^1 \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

mit $1 - x^2 = u$, $-2xdx = du$

<u>Oder:</u>

$$\iint_D xdxdy \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}}_{dxdy = rdrd\theta}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^2 \cos\theta drd\theta &= \int_0^{\pi/2} \cos\theta \left(\frac{r^3}{3}\Bigg|_0^1 \right) d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \cos\theta d\theta = -\frac{1}{3} \sin\theta\Bigg|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

3. Die Substitutionsregel in mehreren Variablen ist manchmal auch nützlich zur Berechnung von Integralen in einer Variable. Zunächst möchten wir das Integral

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

berechnen. Wir berechnen I durch Berechnung eines Flächenintegrals wie folgt. Es gilt

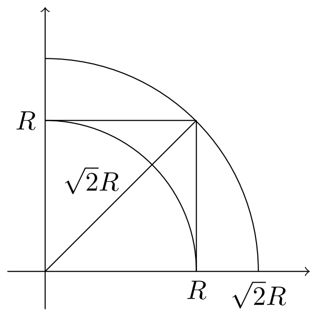
$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx \right)^2 \\ &= \lim_{R\to\infty} \left(\int_0^R e^{-x^2} dx \right) \left(\int_0^R e^{-y^2} dy \right) \\ &= \lim_{R\to\infty} I_R \end{aligned}$$

für

$$I_R = \int_{[0,R]\times[0,R]} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy$$

Bezeichnet K_ρ den Viertelkreis im 1. Quadrant mit Radius r, so gilt

$$\int_{K_R} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy \leq I_R \int_{K_{\sqrt{2}R}} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy$$



Die Integrale über K_ρ berechnet man nun über Polarkoordinaten

$$\int_{K_\rho} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy = \int_0^\rho \int_0^{\pi/2} e^{-r^2} r dr d\theta = \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{\rho^2}\right)$$

und somit gelten die Abschätzungen

$$\frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-R^2}\right) \leq I_R \leq \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-2R^2}\right)$$

und es gilt schliesslich

$$\lim_{R\to\infty} I_R = \frac{\pi}{4}$$

d.h.

$$I^2 = \lim_{R\to\infty} I_R = \frac{\pi}{4}$$

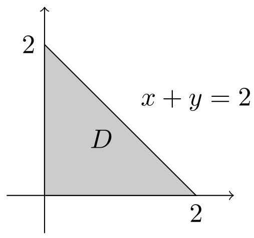
d.h.

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \int\limits_0^\infty e^{-x^2} dx$$

4.

$$\int\limits_D e^{\frac{(y-x)}{(y+x)}} d\mu(x,y)$$

wobei

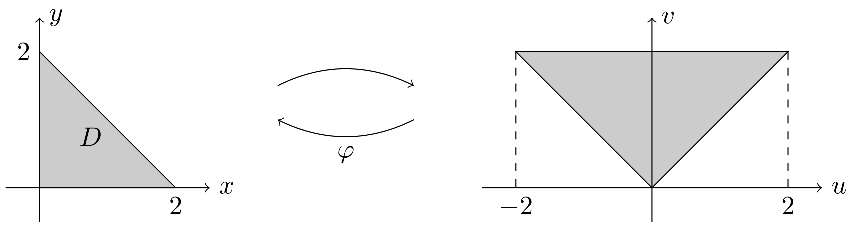


Wir setzen

$$\left.\begin{array}{lcl} u = y - x & \to & x = \frac{1}{2}(v-u) \\ v = y + x & \to & y = \frac{1}{2}(v+u) \end{array}\right\} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \varnothing \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\Phi(u,v)\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} x = 0 &\Rightarrow v = u \\ y = 0 &\Rightarrow v = -u \\ x + y = 2 &\Rightarrow v = 2 \end{aligned}$$



$$\int\limits_D e^{\frac{(y-x)}{(y+x)}} d\mu(x,y) = \iint\limits_T e^{\frac{u}{v}} \left|-\frac{1}{2}\right| d\mu(u,v)$$
$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^2 \left(\int\limits_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}} du \right) dv$$
$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^2 \left(v e^{\frac{u}{v}} \Big|_{-v}^{v} \right) dv$$
$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^2 v \left(e - \frac{1}{e} \right) dv$$
$$= \left(e - \frac{1}{e} \right) \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{2} \Big|_0^2 \right) = e - \frac{1}{e}$$

9.3 Der Satz von Green

Wir erinnern uns: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, ist $V : \Omega \to \mathbb{R}^2$ ein C^1-Vektorfeld mit Potential f, so folgt

$$\operatorname{rot}(v(x)) = \operatorname{rot}(\nabla f(x)) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

wobei

$$\operatorname{rot}(v(x,y)) = \frac{\partial v_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial v_1}{\partial y}(x,y)$$

so ist

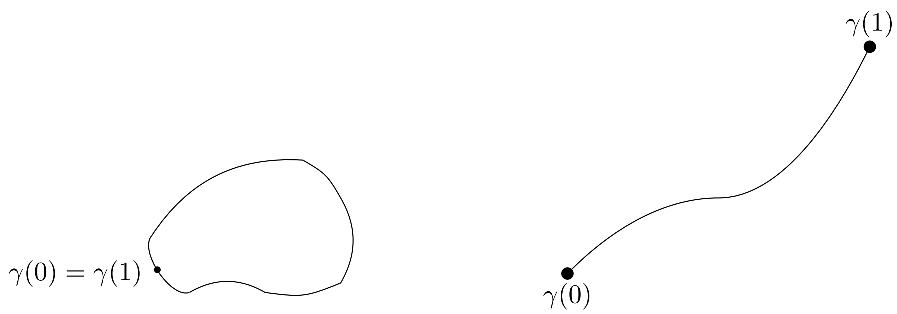
$$\operatorname{rot} v = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0$$

in zwei Dimensionen eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Potentials.

Die Bedingung $\operatorname{rot}(v) = 0$ ist sogar eine hinreichende Bedingung, falls das Gebiet Ω einfach zusammenhängend ist. In diesem Fall

$$\oint\limits_\gamma v = \int\limits_\gamma \nabla f ds = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = 0$$

für alle geschlossene Wege γ und für einen nichtgeschlossenen Weg γ



$$\int_\gamma v = \int_\gamma \nabla f ds = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))$$

d.h. falls das Vektorfeld ein Gradientenfeld ist, ist das Integral $\int_\gamma v$ eine Funktion der Endpunkte.

Anders gesagt, es gibt Fälle wo ein Wegintegral (d.h. ein Integral auf einem eindimensionalen Objekt mithilfe einer 0-dimensionalen Menge) berechnet werden kann.

Bemerkung

Auch für Funktionen einer Variable: Falls $F' = f$ ist, dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Hauptsatz der Integralrechnung einer Variable

Frage

Gibt es auch Fälle wo ein zweidimensionales Integral mithilfe einer eindimensionalen Menge berechnet werden kann?

Die Antwort ist genau der Inhalt des Satzes von Green

Satz 9.19 (Green)

Sei $\Omega \in \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, dessen Rand $\partial\Omega$ eine stückweise C^1 Parameterdarstellung hat. Sei U eine offene Menge mit $\Omega \subset U$ und sei

$$f = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$$

wobei $P, Q \in C^1(U)$. Dann gilt

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\mu = \int_{\partial\Omega} P dx + Q dy$$

wobei $\partial\Omega$ so parametrisiert wird, dass Ω zur Linken des Randes liegt.

<u>Anders gesagt:</u>

Sei $V = (P, Q)$ ein C^1 Vektorfeld auf dem Gebiet U. Sei $\Omega \subset U$ ein Gebiet, dessen rand $\partial\Omega$ ein Stückweise C^1 Parameterdarstellung hat. Die parametrisierung von Ω sei so gewählt dass Ω stets links zur Durchlaufrichtung liegt. Dann gilt

$$\int_{\partial\Omega} V ds = \int_{\partial\Omega} P dx + Q dy = \iint_\Omega \operatorname{rot}(V) d\mu$$

Bevor wir die Idee des Beweises geben, geben wir einige Beispiele und Anwendungen

Beispiel 9.20

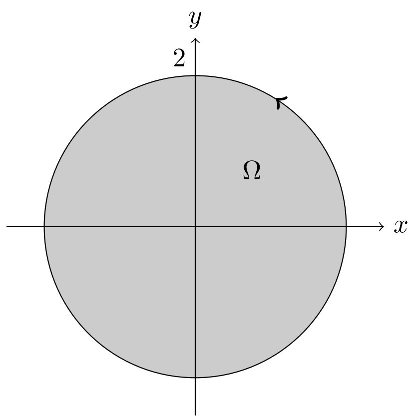
1. Wir betrachten das Vektorfeld

$$F(x,y) = (y+3x, y-2x)$$

und wir möchten dieses Kraftfeldes entlang der im Gegenuhrzeigersinn durchlaufenen Ellipse $\gamma : 4x^2 + y^2 = 4$ bestimmen. Die Arbeit ist

$$\begin{aligned} \int_\gamma F d\vec{s} &= \int_\gamma P dx + Q dy \\ &= \int_\gamma (y+3x)\, dx + (2y-x)\, dy \\ \text{Green } \rightarrow \quad &= \iint_\Omega \frac{\partial(2y-x)}{\partial x} - \frac{\partial(y+3x)}{\partial y} \\ &= \iint -1 - 1 d\mu = -2 \iint_\Omega d\mu \\ &= -2 \cdot (\text{Flächeninhalt von Ellipse } 4x^2 + y^2 = 4) \end{aligned}$$

Can't understand the result, page 242 top



2. Berechne das Wegintegral

$$\int_{\partial\Omega} \left(5 - xy - y^2\right) dx - \left(2xy - x^2\right) dy$$

wobei Ω das Quadrat mit Eckpunkten $(0,0), (0,1), (1,1), (1,0)$ im Gegenuhrzeigersinn ist

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\partial A} \left(5 - xy - y^2\right) dx - \left(2xy - x^2\right) dy \\
&= \iint\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(2xy - x^2\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(5 - xy - y^2\right)\right] d\mu \\
&= \iint\limits_{\Omega} (2y - 2x) - (-x - 2y)\, d\mu \\
&= 3 \iint\limits_{\Omega} d\mu = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 x dx dy = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

3. Mittels des Satzes von Green können wir den Flächeninhalt eines Gebiets mithilfe eines Wegintegrals berechnen. Und zwar

$$\text{Flächeninhalt}(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} d\mu = \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\mu$$

wobei P und Q Funktionen mit $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$ sind. Zum Beispiel können wir

$$\begin{aligned}
Q(x, y) &= \frac{1}{2} x \\
P(x, y) &= -\frac{1}{2} x
\end{aligned}$$

nehmen. Daraus folgt, dass

$$F(\Omega) = \frac{1}{2} \int\limits_{\partial\Omega} -y dx + x dy$$

Als ein Beispiel können wir verifizieren dass der Flächeninhalt des Kreises $x^2 + y^2 \leq 4$ gleich 4π ist.

Betrachte die Parameterdarstellung $\gamma(\theta) = (2\cos\theta, 2\sin\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$ des Randes $\partial\Omega$

$$\begin{aligned}
F(\Omega) &= \iint\limits_{\Omega} d\mu = \frac{1}{2} \int\limits_{\partial\Omega} -y dx + x dy \\
&= \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} (-2\sin\theta)(-2\sin\theta) + (2\cos\theta)(2\cos\theta)\, d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} 4\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right) d\theta = 2 \cdot 2\pi = 4\pi
\end{aligned}$$