Kapitel 3

Folgen und Reihen (Der Limes Begriff)

3.1 Folgen, allgemeines

Definition 3.1
Eine Folge reeler zahlen ist eine Abbildung $a : \mathbb{N}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ wobei wir das Bild con $n \geq 1$ mit a_n (statt $a(n)$) bezeichen.

Eine Folge wird dann meistens mit $(a_n)_{n\geq 1}$, daher mit der geordneten Bildmenge bezeichnet.

Folgen können auf verschiedene Arten gegeben sein.

Beispiel 3.2

1. $a_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$
2. $a_1 = 0.9$, $a_2 = 0.99$, $\ldots$, $a_n = 0.\underbrace{99\ldots9}_{n-\text{mal}}$
3. $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \geq 1$
4. (Rekursiv) Sei $d > 0$ eine reelle Zahl $a_1, \ldots, a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{d}{a_n}\right), n \geq 1$
   z.B. $d = 2, a_1 = 1, a_2 = \frac{3}{2}, a_3 = \frac{17}{12}, a_4 = \ldots$
5. Fibonacci Zahlen. $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \forall n \geq 2$

Definition 3.3
Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ heisst beschränkt falls die Teilmenge $\{a_n : n \geq 1\} \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt ist. d.h. Es gibt $c \in \mathbb{R}(c \geq 0)$ so dass $|a_n| \leq c, \forall n \geq 1$

3.2 Grenzwert oder Limes eine Folge. Ein zentraler Begriff

Definition 3.4
Eine Folge $(a_n) \geq 1$ konvergiert gegen a wann für jedes $\varepsilon > 0$ ein Index $N(\varepsilon) \geq 1$ gilt so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon, \forall n > N(\varepsilon)$$

Definition 3.4 (Version 2)
Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$ falls für jedes $\varepsilon > 0$ die Menge der Indizen $n \geq 1$ für welcher $a_n \notin (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ endlich ist.

$$(\forall \varepsilon > 0, \#\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \notin (a - \varepsilon, a + \varepsilon)\} < \infty)$$

Equivalenz beider Definitionen

Is this supposed to be a title?

(2) $\Rightarrow$ (1)
Sei für $\varepsilon > 0$

$$M(\varepsilon) := \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \notin (a - \varepsilon, a + \varepsilon)\} = \{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - a| \geq \varepsilon\}$$

Da $M(\varepsilon)$ endlich ist, ist es nach oben beschränkt. Es gibt also $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ so dass $\forall n \in M(\varepsilon)$, $n \leq N(\varepsilon) - 1$. Insbesondere gilt $\forall n \geq N(\varepsilon)$, $n \notin M(\varepsilon)$ und daher $|a_n - a| < \varepsilon$.

(1) $\Rightarrow$ (2)

$$M(\varepsilon) = \{n : |a_n - a| \geq \varepsilon\} \subset [0, N(\varepsilon) - 1]$$

Also endlich.

Falls die Eigenschaften in Definition 3.4 zutrifft, dann schreibt man

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \text{ oder } a_n \underset{n\to\infty}{\to} a$$

Die Zahl a nennt sich Grenzwert oder Limes der Folge $(a_n)_{n\geq 1}$. Eine Folge heisst konvergent falls sie einen Limes besitzt, andernfalls heisst sie divergent.

Bemerkung 3.5

1. Falls $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergent ist der Limes eindeutig bestimmt

   Beweis

   Seien a und b Grenzwerte von $(a_n)_{n\geq 1}$. Sei $\varepsilon = \left|\frac{b-a}{3}\right| > 0$, dann gibt es N_1, N_2 so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \forall n > N_1$$

$$|a_n - b| < \varepsilon \qquad \forall n > N_2$$

Also$\forall n \geq \max\{N_1, N_2\}$

$$(a-b) \cong |(a-a_n) + (a_n - b)| < 2\varepsilon = \frac{2}{3}|b-a|$$

Binomischen Lehrsatz

Für beliebige Zahlen a, b und $n \in \mathbb{N}$ ist

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

2. Falls $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergent ist, $\{a_n : n \geq 1\}$ beschränkt: Sei $\varepsilon = 1$, $\lim a_n = a$ und N_0 mit
$$|a_n - a| \leq 1 \qquad \forall n > N_0$$
Dann ist $\forall n\ |a_n| \geq \max\{|a| + 1, |a_j|, 1 \leq j \leq N_0\}$

Beispiel 3.6

1. Sei $a_n = \frac{1}{n}, n \geq 1$. Dann gilt $\lim a_n = 0$
   - Sei $\varepsilon > 0$. Dann $\frac{1}{\varepsilon} > 0$. Sei $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \geq 1$ mit $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ (Archimedische Eigenschaft, Satz 2.13)

   Dann gilt für alle $n \geq n_0$, $\frac{1}{\varepsilon} < n_0 \leq n \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon, \forall n \geq n_0$
2. Sei $0 < q < 1$ und $a_n := q^n$, $n1$. Dann gilt $\lim a_n = 0$ (a_n konvergiert gegen 0) Cannot read, page 54 top

   Beweis

   Zu beweisen
   $$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 = N_0(\varepsilon) \in N$$
   Should it be $\in \mathbb{R}$??
   $$\forall n \geq N_0 : q^n < \varepsilon$$
   Die Idee ist zu zeigen dass $\frac{1}{q^n}$ sehr Gross wird und deswegen q^n sehr klein wird. Setzen wir $\frac{1}{q} = 1 + \delta$ mit $\delta > 0$ $\left(1 < 1 \Rightarrow \frac{1}{q} > 1\right)$
   $$\frac{1}{q^n} = \left(\frac{1}{q}\right)^n = (1+\delta)^n = 1 + n\delta + \binom{n}{2}\delta^2 + \cdots + \delta^n \geq 1 + n\delta > n\delta, \forall n \in \mathbb{N}$$
   also
   $$0 < q^n < \frac{1}{n\delta}, \forall n \in \mathbb{N}$$
   Sei jetzt $\varepsilon > 0$, wähle $N_0 = N_0(\varepsilon)$ mit $\frac{1}{\varepsilon\delta} < N_0 \Rightarrow \frac{1}{N_0\delta} < \varepsilon$
   $$\forall n > N_0 \qquad 0 < q^n \leq \frac{1}{n\delta} < \frac{1}{N_0\delta} < \varepsilon$$

3. $\sqrt[n]{n}$, $\lim a_n = 1$. Klar: $n \geq 1$ also $\sqrt[n]{n} \geq 1$
Gegeben ein $\varepsilon > 0$, wollen wir n so gross wählen, dass

$$\sqrt[n]{n} - 1 < \varepsilon$$

das heisst, $n < (1+\varepsilon)^n$. Wir entwickeln

$$(1+\varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \binom{n}{2}\varepsilon^2 + \cdots + \varepsilon^n$$

can't read last element of the expansion

ε ist klein aber fixiert.

Für n sehr gross wird $1 + n\varepsilon$ nie grösser als n sein. Wir versuchen unsere Glück mit

$$\binom{n}{2}\varepsilon^2 \text{ term}$$

$$\binom{n}{2}\varepsilon^2 = \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon$$

Wir benutzen also $(1+\varepsilon)^n \geq \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2$. Wir wollen n so wählen dass

$$\frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 > n$$

d.h. $n - 1 > \frac{2}{\varepsilon^2}$ oder $n > 1 + \frac{2}{\varepsilon^2}$

Setzen wir $N_0 := \left(1 + \frac{2}{\varepsilon^2}\right) + 1$. Dann gilt für $\forall n > N_0$

$$(1+\varepsilon)^n > n \geq 1$$

$$\Rightarrow 1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + \varepsilon$$

$$\Rightarrow -\varepsilon < 0 \leq \sqrt[n]{n} - 1 \leq \varepsilon \Rightarrow \left|\sqrt[n]{n} - 1\right| < \varepsilon, \forall n > N_0$$

4. Nicht alle Folgen sind konvergent. Es gibt zwei verschiedene Verhältnissen einer divergenten Folge

$$a_n = (-1)^n \Rightarrow \{1, -1, \dots\} \text{ beschränkt aber nicht konvergent}$$

5. $a_n = n$ unbeschränkt, divergent.

Beispiel 3.7

Seien $p \in \mathbb{N}$, $0 < q < 1$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} n^p q^n = 0$. Dass heisst Exponentialfunktionen wächst schneller als jede Potenz (Wann x genügend Gross ist, $a^x > x^b$)

Beweis

Der Trick ist folgender

$$n^p q^n = \left(n^{\frac{p}{n}} \cdot q\right)^n = \left(\left(\sqrt[n]{n}\right)^p \left(q^{\frac{1}{p}}\right)^p\right)^n$$

Wir werden Beispiel 3.6 (2.),(3.) benutzen.
(d.h. $\lim \sqrt[n]{n} = 1 \qquad \lim r^n = 0, 0 < r < 1$)

Da $\lim \sqrt[n]{n} = 1$, $\forall \eta > 0$, $\exists N_0(\eta)$

$$\sqrt[n]{n} < 1 + \eta, n > N_0(\eta)$$

Wir wählen $\eta > 0$ so dass $q^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{(1+\eta)^2}$. Dann

$$\sqrt[n]{n} \cdot q^{\frac{1}{p}} \leq \frac{(1+\eta)}{(1+\eta)^2} = \frac{1}{1+\eta} \qquad \forall n > N_0(\eta)$$

Wobei

$$\forall n > N_0(\eta)$$

$$a_n = \left(\sqrt[n]{n} q^{\frac{1}{p}}\right)^{pn} < r^n$$

mit

$$r := \left(\frac{1}{1+\eta}\right)^p, r < 1$$

Sei jetzt $\varepsilon > 0$. Da $\lim r^n = 0$, $\exists N_1 = N_1(\varepsilon)$, $\forall n > N_1(\varepsilon)$, $r^n < \varepsilon$

Für $n > \max\{N_0(\eta), N_1(\varepsilon)\}$, $a_n < r^n < \varepsilon \Rightarrow \lim a_n = \lim n^p q^n = 0$

3.3 Konvergenzkriterien

Mit konvergenten Folgen kann man wie folgender Satz zeigt. Can't read, page 59 top

Satz 3.8

Seien