

Kapitel 8

Differentialrechnung in \mathbb{R}^n

8.1 Partielle Ableitungen und Differential

Wie kann man die Begriffe der Differentialrechnung auf Funktionen $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ erweitern?

Missing content?? page 113 top

Funktion in mehreren Variablen sind ein bisschen komplizierter als Funktionen in einer Variable.

Beispiel

1. $f(x) = x^2 + 5$ ist in Ursprung stetig da $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$. Aber $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ist im Ursprung nicht stetig.

Where is number 2 of the Beispiel??

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = 0}} \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2} = 0 = f(0, 0)$$

$$\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ x = 0}} \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2} = 0 = f(0, 0)$$

is this continuation of the Beispiel, or is it outside??

Aber der Limes entlang der Gerade $y = mx$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ y = mx}} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2}{(1 + m^2)x^2} = \frac{m}{1 + m^2}$$

↓
Hängt von m ab

und $\frac{m}{1+m^2} \neq 0$, falls $m \neq 0$. Eine Funktion $f(x, y)$ an der Stelle (x_0, y_0) ist stetig wenn der Limes $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$ in jeder Richtung den gleichen Wert haben.

Definition 8.1

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \Omega$

1. f hat den Grenzwert $c \in \mathbb{R}$, d.h

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$$

weenn es zu jeder (Beliebig kleinen) Schranke $\varepsilon > 0$, eine δ -umgebung

$$B_\delta(a) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - a| < \delta\}$$

gibt, so dass $|f(x) - c| < \varepsilon$ für alle $x \in \Omega \cap B_\delta(a)$, $x \neq a$ gilt

2. f heisst in $a \in \Omega$ stetig, wenn $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ gilt.
3. f heisst in Ω stetig, wenn f in allen $a \in \Omega$ stetig ist.

Die Summe, das Produkt, der Quotient (Nenner ungleich Null) stetiger Funktion sind stetig.

f besitzt keinen Grenzwert in x_0 wenn sich bei Annäherungen an x_0 auf verschiedenen Kurven (z.b. Geraden) verschiedene oder keine Grenzwert ergeben.

Sandwichlemma

Sei f, g, h funktionen wobei $g < f < h$. Wenn $\lim_{x \rightarrow a} g = L = \lim_{x \rightarrow a} h$ gilt, dann ergibt $\lim_{x \rightarrow a} f = L$.

Da $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |y| = 0$ gilt, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 \Rightarrow f$ ist in $(0,0)$ stetig.

Oder

Für Grenzwertbestimmungen (also auch für Stetigkeitsuntersuchungen) ist es oft nützlich, die Funktionen mittels Polarkoordinaten umzuschreiben. Vor allem bei Rationalen Funktionen.

Hierbei gilt $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, wobei r = länge des Vektors (x, y) und φ der Winkel. Nun lass wir die Länge r gegen 0 gehen.

Beispiel

1. Die Funktionen

- $f(x, y) = x^2 + y^2$
- $f(x, y, z) = x^3 + \frac{x^2}{y^2+1} + z$
- $f(x, y) = 4x^2y^3 + 3xy$
- $f(x, y) = \cos xy$

KAPITEL 8. DIFFERENTIALRECHNUNG IN \mathbb{R}^n

sind stetig, da sie aus Steigen Funktionen zusammengesetzt.

2.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Für $(x, y) \neq (0, 0)$ ist f als Quotient von stetigen Funktionen stetig. Es verbleibt f im Punkt $(0, 0)$ zu untersuchen. Da

$$\left| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right| \leq 1$$

$$0 < |f(x, y)| < |y|$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \frac{(r^2 \cos^2 \theta) (r \sin \theta)}{r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = r \cos^2 \theta \sin \theta$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(r, \theta) = \lim_{r \rightarrow 0} r \cos^2 \theta \sin \theta = 0$$

3. Wir können nochmals die Stetigkeit der Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

mittels Polarkoordinaten untersuchen

$$f(x, y) = \frac{r^2 \cos^2 \theta \sin \theta}{r^2} = \cos^2 \theta \sin \theta$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(x, y) = \cos^2 \theta \sin \theta$$

hängt von θ ab.

$\Rightarrow f$ in $(0, 0)$ nicht stetig

Bemerkung

Eine trickreiche Variante Grenzwerte zu berechnen, ergibt sich durch substitution, d.h. man berechnet den Grenzwert

is this supposed to be inside the list or out??

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(g(x, y))$$

indem man zunächst $t = g(x, y)$ setzt und den Grenzwert

$$t_0 = \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} g(x, y)$$

bestimmt. Dann ist

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(g(x, y)) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t)$$

Beispiel

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (4,0)} \frac{\sin xy}{xy}$$

Hier ist $g(x, y) = xy$, $\lim_{(x,y) \rightarrow (4,0)} g(x, y) = 0$. Somit

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (4,0)} \frac{\sin xy}{xy} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

Wir werden auch sehen das die Existenz der Ableitungen in einigen Richtungen ungenügend für die Differenzierbarkeit der Funktion ist.

Was bedeutet die Ableitung in einiger Richtung?

Beispiel

Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto (x^2 + xy) \cos(xy)$$

Man kann für jedes y , die Funktion

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (x^2 + xy) (\cos xy)$$

als Funktion einer Variablen x auffassen und die Ableitung davon berechnen. Das Resultat mit $\frac{\partial f}{\partial x}$ bezeichnet, ist die erste partielle Ableitung von f nach x . In diesem fall ist es durch

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (2x + y)(\cos xy) - (x^2 + xy)y \sin(xy)$$

gegeben.

Analog definiert man $\frac{\partial f}{\partial y}$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x(\cos xy) - (x^2 + xy)x \sin(xy)$$

Die allgemeine Definition nimmt folgende Gestalt ein. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. In zukunft bezeichnen wir die i -te Koordinate eines Vektors $x \in \mathbb{R}^n$ mit x^i ; also ist $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$.

Sei $e_i := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ der i -te Basisvektor von \mathbb{R}^n

Definition 8.2

Die Funktion $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heisst an der stelle $x_0 \in \Omega$ in Richtung e_i (oder nach x^i) partielle differenzierbar falls der limes

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) = f_{x^i}(x_0) := - \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_0 + he_i) - f(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^i + h, x_0^{i+1}, \dots, x_0^n) - f(x_0^1, \dots, x_0^n)}{h}$$

existiert

Bemerkung 8.3



Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_0^1, x_0^2) \in \mathbb{R}^2$. Wir betrachten die scharen von f

$$f(\cdot, x_0^2) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

und

$$f(x_0^1, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}$ sind die Anstieg der Tangente zur entsprechende schrittkurven

Beispiel

1. $f(x, y, z) = \cos yz + \sin xy$

- $\frac{\partial f}{\partial x} = y \cos xy$
- $\frac{\partial f}{\partial y} = -\sin(yz) \cdot z + \cos(xy) \cdot x$
- $\frac{\partial f}{\partial z} = -\sin(yz) \cdot y$

2.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^3 \cdot 0}{h^2 + 0} - 0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0 \cdot h^3}{0 + h^2} - 0}{h} = 0$$

Bemerkung

Für Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ einer variable impliziert die differenzierbarkeit in x_0 , die Stetigkeit in x_0 und zudem eine gute Approximation von f durch eine affine Funktion in einer Umgebung von x_0 . Folgendes Beispiel zeigt, dass in \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) Partielle Differenzierbarkeit keine analoges Approximationseigenschaften oder stetigkeit impliziert:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Für alle $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ist f in beiden Richtungen partiell differenzierbar:

- Für $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \left. \frac{y(x^2 + y^2) - 2x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} \right|_{(x,y)=(x_0,y_0)} = \frac{y_0^3 - x_0^2 y_0}{(x_0^2 + y_0^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \left. \frac{x(x^2 + y^2) - 2xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \right|_{(x,y)=(x_0,y_0)} = \frac{x^2 - xy^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

- Für $(x_0, y_0) = (0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overbrace{f(0+h, 0) - f(0, 0)}^{f(x_0+he_1) - f(x_0)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overbrace{f(0, 0+h) - f(0, 0)}^{f(x_0+he_2) - f(x_0)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

Im Ursprung besitzt f beide partielle Ableitungen, sie ist aber nicht stetig. Der Grund ist, dass die partielle Ableitungen nur partielle Informationen geben. Wir müssen die Differenzierbarkeit irgend eine andere weise verallgemeinern.

Die Lösung dieses Problem ist, dass man eine Approximations-Eigenschaft durch eine Lineare Abbildung postuliert.

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0 ; $f'(x_0)$ existiert. In diesem Fall kann f für alle x nahe x_0 durch die Funktion $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ gut approximiert werden. Das heisst dass

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x, x_0) \quad \text{mit} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x, x_0)}{x - x_0} = 0$$

Bemerkung

$f'(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}'$ sollt als lineare Abbildung interpretiert werden

Lineare Abbildungen

Eine Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist linear falls für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$$

Eine solche Abbildung ist durch ihre Werte

$$A(e_i) := A_1, A(e_2) := A_2, \dots, A(e_n) := A_n$$

auf der Standardbasis e_1, \dots, e_n eindeutig bestimmt. Aus $x = \sum_{i=1}^n x^i e_i$ und Linearität folgt nämlich

$$(*) \quad A(x) = \sum_{i=1}^n x^i A(e_i) = \sum_{i=1}^n A_i x^i$$

Umgekehrt bestimmt ein Vektor (A_1, \dots, A_n) vermöge der Formel $(*)$ eine Lineare Abbildung.

Schreiben wir $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$ für einen Vektor $x = (x^i)_{1 \leq i \leq n}$ und

$A = (A_1, \dots, A_n)$ für die Darstellung einer Lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bezüglich der Standard Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ so ist

$$A(x) = (A_1, \dots, A_n) \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \sum A_i x^i$$

Definition 8.4

Die Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heisst an der Stelle $x_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ differenzierbar falls eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gibt so dass

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + R(x, x_0)$$

wobei $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x, x_0)}{|x - x_0|} = 0$

In diesem Fall heisst A der Differential an der Stelle x_0 und wird mit $\frac{df}{dx_0}$ bezeichnet, d.h. f ist total differenzierbar in $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$ falls reelle Zahlen A_1, \dots, A_n existieren so dass gilt

$$f(x) = f(x_0) + A_1(x^1 - x_0^1) + A_2(x^2 - x_0^2) + \dots + A_n(x^n - x_0^n) + R(x, x_0)$$

mit $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x, x_0)}{|x - x_0|} = 0$

Bemerkung: Geometrische Interpretation

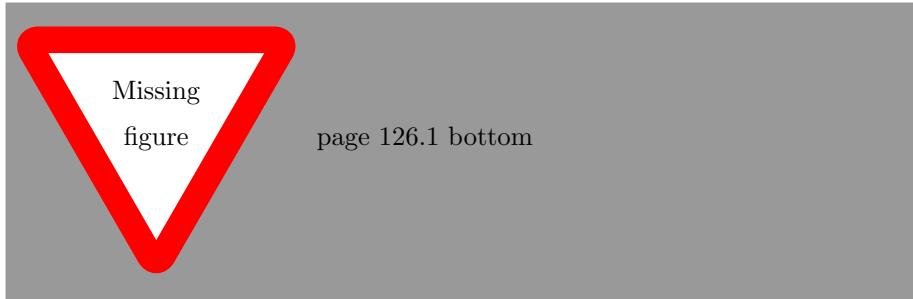
Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \in \mathbb{R}^2$. Wir können die differenzierbare Funktion nahe dem Punkt $x_0 = (x_0^1, x_0^2)$ mit Hilfe der Lineare Funktion

$$P(x) = P(x^1, x^2) = f(x_0^1, x_0^2) + \underbrace{A_1(x^1 - x_0^1) + A_2(x^2 - x_0^2)}_{d_{x_0} f(x - x_0)}$$

approximieren.

can't understand what comes after the formula, page 126.1 middle

Die Differenz $\underbrace{f(x) - P(x)}_{d_{x_0} f(x - x_0)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$ ist eine Ebene. Die ist die Tangenteebene zur f an der Stelle x_0 und spielt die Rolle des Tangente für Funktionen in einer Variable.

**Beispiel 8.5**

- a) Jede affin Lineare Funktion $f(x) = Ax + b$, $x \in \mathbb{R}^n$, wobei $a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ linear, $b \in \mathbb{R}$ ist an jeder Stelle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar, mit $\frac{df}{dx}_{x_0} = A$ unabhängig von x_0 da

$$f(x) - f(x_0) - A(x - x_0) = 0 \quad \forall x, x_0 \in \mathbb{R}^n$$

- b) Koordinatenfunktionen $x^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $(x^1, x^2, \dots, x^n) \rightarrow x^i$, $x^i(x) = x^i$. Dann ist x^i differenzierbar an jeder Stelle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit

$$dx^i|_{x=x_0} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

die Differenziale dx^1, dx^2, \dots, dx^n bilden also an jeder Stelle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ eine Basis des Raumes $L(\mathbb{R}^n : \mathbb{R}) := \{A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; A \text{ linear}\}$, wobei wir $A \in L(\mathbb{R}^n : \mathbb{R})$ mit der Darstellung $A = (A_1, \dots, A_n)$ bzgl. der Standardbasis $\{e_1, \dots, e_n\}$ der \mathbb{R}^n identifizieren, und mit $A_i = A(e_i)$

$$dx^i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

$$(dx^i(e_1), dx^i(e_2), \dots, dx^i(e_n))$$

Da gilt $dx^i(e_j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ ist $(dx^i)_{1 \leq i \leq n}$ die duale Basis von $L(\mathbb{R}^n : \mathbb{R})$ zur Standardbasis $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ des \mathbb{R}^n .

KAPITEL 8. DIFFERENTIALRECHNUNG IN \mathbb{R}^n

c) Jedes $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \in C^1(\mathbb{R})$ besitzt das Differential

$$df(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) dx = f'(x_0) dx$$

d.h. $f'(x_0)$ ist die Darstellung von $df(x_0)$ bezüglich der Basis dx von $L(\mathbb{R} : \mathbb{R})$

d) $f(x, y) = xe^y, \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ist an jeder Stelle $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned} df(x_0, y_0) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) = (e^{y_0}, xe^{y_0}) \\ f(x, y) - f(x_0, y_0) &= \underbrace{f(x, y) - f(x_0, y)}_{\checkmark} + f(x_0, y) - f(x_0, y_0) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \eta)(y - y_0) \end{aligned}$$

Nach der MWS der DR, mit geeigneten Zwischenstellen $\xi = \xi(y)$ und η

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + R(x, y)$$

mit

$$\begin{aligned} R(x, y) &= \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right] (x - x_0) \\ &\quad + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \eta) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right] (y - y_0) \end{aligned}$$

Wegen die Stetigkeit der Funktionen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^y \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xe^y$$

können wir den "Fehler" $R(x, y)$ leicht abschätzen

$$\frac{|R(x, y)|}{|(x, y) - (x_0, y_0)|} \leq \sup_{\substack{|\xi - x_0| < |x - x_0| \\ |\eta - y_0| < |y - y_0|}} (|e^y - e^{y_0}| + |x_0| |e^\eta - e^{y_0}|)$$

Für $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0), (x, y) \neq (x_0, y_0)$: d.h. es gilt

$$\frac{R(x, y)}{|(x, y) - (x_0, y_0)|} \rightarrow 0$$

d.h. es gilt

$$\frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)}{|(x, y) - (x_0, y_0)|} \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} 0$$

d.h. $f(x, y)$ ist differenzierbar und

$$df(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

can't read, page 130
bottom

e) Die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ist in $(0, 0)$ differenzierbar.

Wir haben schon gesehen dass $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{|R|}{|(x, y)|} &= \frac{\left| f(x, y) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)(x - 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)(y - 0) \right|}{|(x - 0, y - 0)|} \\ &= \frac{|f(x, y) - 0 - 0 - 0|}{|(x, y)|} = \frac{|f(x, y)|}{|(x, y)|} \end{aligned}$$

Zum untersuchen ist

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{|R((x, y), (0, 0))|}{|(x, y) - (0, 0)|} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{|f(x, y)|}{|(x, y)|}$$

Mittels Polarkoordinaten ist dies noch einsichtiger

$$\begin{aligned} \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{|f(x, y)|}{x^2 + y^2} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^4 \cos^3 \theta \sin \theta}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} r^2 \cos^3 \theta \sin \theta = 0 \\ &\Rightarrow f \text{ in } (0, 0) \text{ differenzierbar} \end{aligned}$$

Gibt es eine Beziehung zwischen des Differential und der partielle Ableitungen?

Bemerkung 8.6

Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ differenzierbar an der Stelle $x_0 \in \Omega$. Dann existieren die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)$, $i = 1, \dots, n$ und dass Differential kann

$$d_{y_0} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0) \right)$$

dargestellt werden.

Beweis

f an der Stelle x_0 differenzierbar

$$\Rightarrow f(x_0 + he_i) = f(x_0) + (d_{x_0} f)(he_i) + R(x_0 + he_i, x_0)$$

wobei

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(x_0 + he_i, x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + he_i) - f(x_0) - (d_{x_0} f)(he_i)}{h} = 0 \\ \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + he_i) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{hd_{x_0} f(e_i)}{h} = d_{x_0} f(e_i) \end{aligned}$$

d.h. $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)$ existiert und $= d_{x_0} f(e_i)$.

Da $(dx^i)_{i=1, \dots, n}$ die zur $(e_j)_{1 \leq j \leq n}$ duale Basis ist

$$d_{x_0} f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) dx^i = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0) \right)$$

Beispiel

Die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ist in $(0, 0)$ nicht differenzierbar (f ist in $(0, 0)$ nicht stetig)

Satz 8.7

Falls $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}$ differenzierbar, ist sie in x_0 auch stetig.

Beweis

Folgt aus der Definition

Definition 8.8

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heisst von der Klasse C' , ($f \in C'(\Omega)$) falls f an jeder Stelle $x_0 \in \Omega$ und in jede Richtung e_i partielle differenzierbar ist und die Funktionen $x \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x^i}(x)$ für jedes $1 \leq i \leq n$ auf Ω stetig sind

Satz 8.9

Sei $f \in C'(\Omega)$. Dann ist f an jeder Stelle $x_0 \in \Omega$ differenzierbar.

Beweis

Für $n = 3$ seien $x = (x^1, x^2, x^3)$, $x_0 = (x_0^1, x_0^2, x_0^3)$. Dann ist

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \{f(x^1, x^2, x^3) - f(x^1, x^2, x_0^3)\} \\ &\quad + \{f(x^1, x^2, x_0^3) - f(x^1, x_0^2, x_0^3)\} \\ &\quad + \{f(x^1, x_0^2, x_0^3) - f(x_0^1, x_0^2, x_0^3)\} \end{aligned}$$

Nach dem MWS der DR gilt:

$$f(x^1, x^2, x_0^3) - f(x_0^1, x_0^2, x_0^3) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(\xi^1, x_0^2, x_0^3)(x^1 - x_0^1)$$

wobei ξ^1 zwischen x_0^1 und x^1 . Analog:

$$f(x^1, x^2, x_0^3) - f(x^1, x_0^2, x_0^3) = \frac{\partial f}{\partial x^2}(x^1, \xi^2, x_0^3)(x^2 - x_0^2)$$

wobei $\xi^2 \in (x_0^2, x^2)$ und

$$f(x^1, x^2, x^3) - f(x^1, x^2, x_0^3) = \frac{\partial f}{\partial x^3}(x^1, x^2, \xi^3)(x^3 - x_0^3)$$

Eingesetzt in dem Ausdrucke für $f(x) - f(x_0)$ ergibt:

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \frac{\partial f}{\partial x^1}(\xi^1, x_0^2, x_0^3)(x^1 - x_0^1) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial x^2}(x^1, \xi^2, x_0^3)(x^2 - x_0^2) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial x^3}(x^1, x^2, \xi^3)(x^3 - x_0^3) \end{aligned}$$

Also

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) (x^i - x_0^i) + R(x_0, x)$$

Wobei

$$\begin{aligned} R(x_0, x) = & \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(\xi^1, x_0^2, x_0^3) - \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \right) (x^1 - x_0^1) \\ & + \left(\frac{\partial f}{\partial x^2}(x^1, \xi^2, x_0^3) - \frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \right) (x^2 - x_0^2) \\ & + \left(\frac{\partial f}{\partial x^3}(x^1, x^2, \xi^3) - \frac{\partial f}{\partial x^3}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \right) (x^3 - x_0^3) \end{aligned}$$

Also

$$|R(x, x_0)| < |x - x_0| \underbrace{\{ |(\dots)| + |(\dots)| + |(\dots)| \}}_{\substack{\rightarrow 0 \text{ mit } x \rightarrow x_0 \\ \text{weil } \frac{\partial f}{\partial x^i} \text{ stetig sind}}}$$

Also $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x, x_0)}{|x - x_0|} = 0$ und $f(x)$ ist differenzierbar.

Beispiel 8.10

Polynome auf \mathbb{R}^n sind von Klasse C^1 . Für jedes Multindex $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ definieren wir die Monomialfunktion

$$x^\alpha := (x^0)^{\alpha_0} (x^1)^{\alpha_1} \dots (x^n)^{\alpha_n}$$

Ein Polynom von Grad $\leq N$ ist dann gegeben durch

$$p(x) = \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha x^\alpha$$

wobei $|\alpha| = \alpha_0 + \dots + \alpha_n$

Pages 135.1 - 135.2 are a zusammenfassung, not sure if needed to be included

8.2 Differentiationsregeln

Ganz analog zum eindimensionalen Fall gelten folgende Differentiationsregeln

Satz 8.11

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, sowie $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in \Omega$ differenzierbar. Dann gilt

1. $d(f + g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0)$
2. $d(fg)(x_0) = g(x_0) df(x_0) + f(x_0) dg(x_0)$
3. Falls $g(x_0) \neq 0$

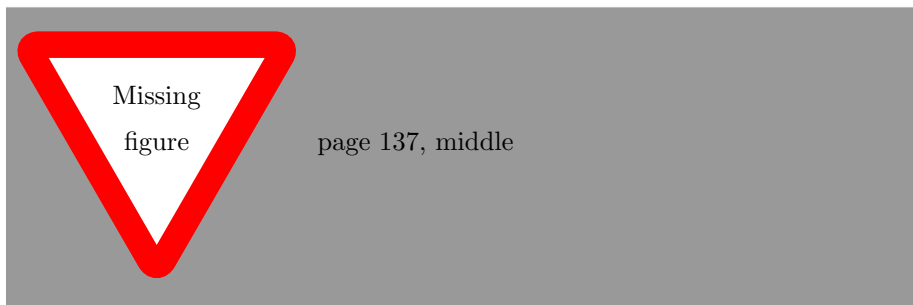
$$d\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \frac{g(x_0) df(x_0) - f(x_0) dg(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

Beweis ist der selbe wie in Dim=1. Für die Kettenregel gibt es mehrere Variationen

Satz 8.12 (Kettenregel, 1. Version)

Sei $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ differenzierbar, sowie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle $g(x_0) \in \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt

$$d(f \circ g)(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot dg(x_0)$$



Beweis

g an der Stelle x_0 differenzierbar

$$\Rightarrow g(x) - g(x_0) \stackrel{A}{=} dg(x_0)(x - x_0) + R_g(x - x_0)$$

mit

$$\frac{R_g(x - x_0)}{(x - x_0)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \Rightarrow \frac{g(x) - g(x_0)}{|x - x_0|} \stackrel{B}{\leq} C = \max \left[\frac{\partial g}{\partial x^i}(x_0) \right]$$

f in $g(x_0)$ differenzierbar

$$f(g(x)) - f(g(x_0)) \stackrel{C}{=} f'(g(x_0)) [g(x) - g(x_0)] + R_f(g(x), g(x_0))$$

Woraus folgt:

$$f(g(x)) - f(g(x_0)) = f'(g(x_0)) [dg(x_0)(x - x_0) + R_g(x, x_0)] + R_f(g(x_0), g(x))$$

Aus B folgt:

$$\frac{R_f(g(x_0), g(x))}{x - x_0} = \underbrace{\frac{R_f(g(x_0) - g(x))}{|g(x) - g(x_0)|}}_{\downarrow 0} \cdot \underbrace{\frac{|g(x) - g(x_0)|}{|x - x_0|}}_{\stackrel{B}{\leq} C}$$

\downarrow
0

d.h.

$$f(g(x)) - f(g(x_0)) = (f'(g(x_0)) \cdot dg(x_0))(x - x_0) + R_{f \circ g}(x, x_0)$$

wobei

$$R_{f \circ g}(x, x_0) = f'(g(x_0)) R_g(x, x_0) + R_f(g(x_0), g(x))$$

und

$$\frac{R_{f \circ g}(x, x_0)}{x - x_0} = \underbrace{f'(g(x_0)) \frac{R_g(x, x_0)}{(x - x_0)}}_{\downarrow 0} + \underbrace{\frac{R_f(g(x_0), g(x))}{x - x_0}}_{\downarrow 0}$$

Beispiel 8.13

Sei $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$h(x, y) = e^{xy}$$

$h = f \circ g$ wobei $g(x, y) = xy$, $f(t) = e^t$. Dann ist einerseits

$$dh(x, y) = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} \right) = (ye^{xy}, xe^{xy})$$

andererseits nach Kettenregel

$$dh(x, y) = d(f \circ g)' = f'(g(x, y)) \cdot dg(x, y) = e^{xy} \cdot (y, x) = (ye^{xy}, xe^{xy})$$

Für die nächste Kettenregel führen wir folgende Definition ein:

Definition 8.14

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ und $f = (f_1, \dots, f_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Abbildung. Dann ist f an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar, falls jede Komponentenfunktion f_i an der Stelle x_0 differenzierbar ist. Wir definieren in diesem Fall

$$f'(x_0) := (f_1'(x_0), f_2'(x_0), \dots, f_n'(x_0))$$

Bemerkung 8.15

$f'(x_0)$ kann als Geschwindigkeitsvektor im Punkt $f(x_0)$ aufgefasst werden.

Satz 8.16 (Kettenregel 2. Version)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n, I \subset \mathbb{R}$. Sei $g : I \rightarrow \Omega$, $t \mapsto (g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t))$, an der Stelle $t_0 \in I$ differenzierbar sowie $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle $g(t_0)$ differenzierbar. Dann gilt:

$$\frac{d}{dt}(f \circ g)(t_0) = df(g(t_0)) \cdot g'(t_0)$$

$$\begin{aligned} d(f \circ g)(t_0) &= df(g(t_0)) \cdot dg(t_0) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^1}(g(t_0)) \cdot \frac{dg_1}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial x^2}(g(t_0)) \cdot \frac{dg_2}{dt}(t_0) \\ &\quad + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(g(t_0)) \cdot \frac{dg_n}{dt}(t_0) \end{aligned}$$



Beispiel 8.17

Die vier Grundrechenarten sind differenzierbare Funktionen von zwei Variablen. Insbesondere gilt:

- $a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x + y$

$$da(x, y) = \left(\frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial a}{\partial y} \right) = (1, 1)$$

- $m : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x \cdot y$

$$dm(x, y) = (y, x)$$

Setzt man diese beiden Funktionen in die obige Kettenregel ein, so erhält man die aus der Analysis I bekannte Summen und Produktregel:

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \rightarrow (g_1(t), g_2(t))$$

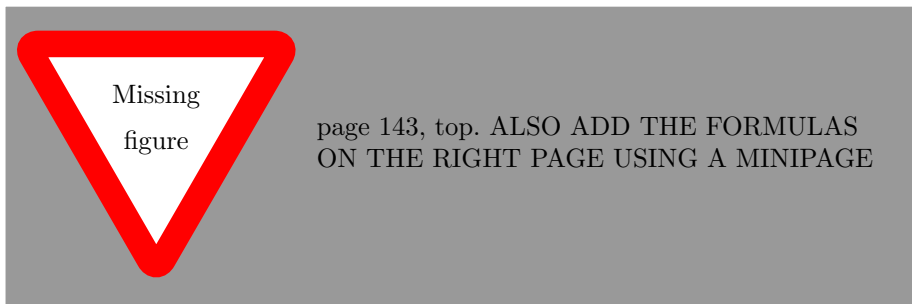
$$\frac{d}{dt}(g_1 + g_2) = \frac{d}{dt}(a \circ g) = (1, 1) \cdot \left(\frac{dg_1}{dt}, \frac{dg_2}{dt} \right) = 1 \cdot \frac{dg_1}{dt} + 1 \cdot \frac{dg_2}{dt}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(g_1 \cdot g_2) &= \frac{d}{dt}(m \circ g) = ((dm)(g(t))) \cdot \left(\frac{dg}{dt} \right) \\ &= (g_2(t), g_1(t)) \cdot \left(\frac{dg_1}{dt}, \frac{dg_2}{dt} \right) \\ &= \frac{dg_1}{dt} \cdot g_2(t) + \frac{dg_2}{dt} \cdot g_1(t) \end{aligned}$$

Beispiel 8.18

Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar an der Stelle $x_0 \in \Omega$ und sei $e \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$; mit $|e| = 1$. Betrachte die Gerade $g(t) = x_0 + te$, $t \in \mathbb{R}$ durch x_0 mit Richtungsvektor



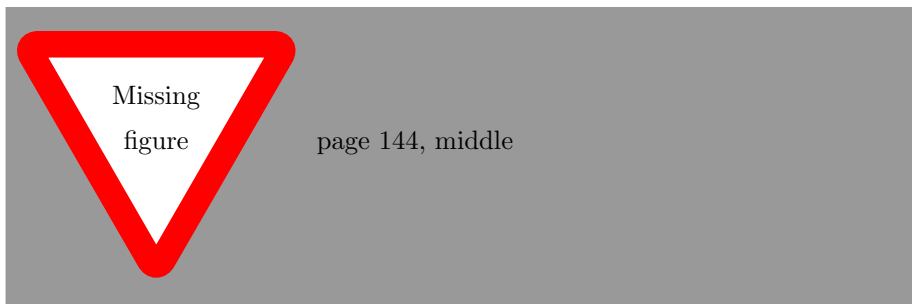
Dann ist die Funktion $f \circ g$ in einer Umgebung von $t_0 = 0$ definiert und nach Kettenregel $f \circ g$ an der Stelle $t_0 = 0$ differenzierbar mit

$$\frac{d}{dt} (f \circ g) (0) = df (g(0)) \frac{dg}{dt} (0) = df (x_0) (e) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} (x_0) \cdot e^i$$

$e = (e^1, \dots, e^n)$ und wird Richtungsableitung von f in Richtung e genannt; $\partial_e f (x_0)$ bezeichnet. Insbesondere gilt für $e = e_i$

$$\partial_{e_i} f (x_0) = \frac{\partial f}{\partial x^i} (x_0) = df (x_0) (e_i)$$

Geometrisch die Richtungsableitung von f in Richtung e ist genau die Steigung der Tangente zur Schnittkurve falls wir den Graph von f mit einer zur Ebene xy senkrecht Ebene durch $x_0 + te$ scheiden.



Für den Mittelwertsatz der DR - zu verallgemeinern benützen wir folgenden Begriffen:

Definition 8.19

Eine Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann Konvex falls für jede Paar von Punkten $x, y \in K$ die Menge K auch das segment

$$(1 - t) x + ty \quad t \in [0, y]$$

mit endpunkt x, y enthält



Satz 8.20

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ konvex $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, $x_0, x_1 \in \Omega$ sowie $x_t := (1-t)x_0 + tx_1$. Dann gibt es $\vartheta \in [0, 1]$ mit

$$f(x_1) - f(x_0) = df(x_{i\vartheta})(x_1 - x_0)$$

is it tx_1 or tx , ?? page 145 middle

Beweis

Sei $g(t) = (1-t)x_0 + tx_1 = x_t$. Dann ist $t \rightarrow (f \circ g)(t)$ auf $[0, 1]$ stetig und in $(0, 1)$ differenzierbar. Also gibt es $\vartheta \in (0, 1)$ mit (nach MWS der DS einer variable)

$$f(x_1) - f(x_0) = (f \circ g)(1) - (f \circ g)(0) = (f \circ g)'(\vartheta)(1 - 0)$$

Nur ist

$$(f \circ g)'(\vartheta) = df\left(g(\vartheta) \cdot \frac{dg}{dt}(\vartheta)\right)$$

Die Kettenregel wird auch angewandt um Integrale mit Parametern zu studieren. Ein Beispiel davon ist:

Is the formula done or does it continue on a new line, page 146 top

Beispiel

Sei $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(s, t) \rightarrow h(s, t)$. Wir nehmen an, h ist stetig, $\frac{\partial h}{\partial t}$ existiert und ist uf ganz \mathbb{R}^2 stetig. Sei

$$u(t) = \int_a^{b(t)} h(s, t) ds, \quad b(t) \in C'(\mathbb{R}), \quad a \in \mathbb{R}$$

Is it C' or $C'??$ page 146 middle

Satz 8.21

Sei $h(s, t)$ eine stetige differenzierbare Funktion von zwei variablen und $b(t)$ differenzierbare Funktion eine variable. Dann ist die Funktion

$$u(t) := \int_a^{b(t)} h(s, t) ds$$

wo definiert, differenzierbar mit der Ableitung

$$u'(t) := h(b(t), t) \cdot b'(t) + \int_a^{b(t)} \frac{\partial h}{\partial t}(s, t) ds$$

Korollar 8.22

Sei $h = h(s, t) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, und $\frac{\partial h}{\partial t}$ existiert und auf ganz \mathbb{R}^2 stetig. Sei

$$u(t) = \int_0^t h(s, t) ds$$

Dann

$$u(t) \in C^1(\mathbb{R}) \text{ und } u'(t) = h(t, t) + \int_0^t \frac{\partial h}{\partial t}(s, t) ds$$

Beweis

Setze $b(t) = t$, $a = 0$ in Satz 8.21.

Korollar 8.23

Sei $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit Stetiger partieller Ableitung $\frac{\partial h}{\partial t}$. Dann ist die Funktion

$$u(t) := \int_a^b h(s, t) ds$$

differenzierbar mit Ableitung

$$u'(t) := \int_a^b \frac{\partial h}{\partial t}(s, t) ds$$

Beweis

Setze $b(t) = b$, in Satz 8.20

Bemerkung 8.24

Mit Korollar 8.23 kann man bestimmte Integrale berechnen, auch wenn die zugehörige unbestimmten Integrale nicht elementar darstellbar sind

Beispiel 8.25

Berechne das integral

$$\int_0^1 \frac{x^5 - 1}{\log x} dx$$

KAPITEL 8. DIFFERENTIALRECHNUNG IN \mathbb{R}^n

Sei

$$u(\alpha) := \int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\log x} dx$$

Für $\alpha \geq 0$ erfüllt $u(\alpha)$ die Voraussetzungen des Satzes. Wir berechnen

$$u'(\alpha) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{x^\alpha - 1}{\log x} \right) dx = \int_0^1 \frac{x^\alpha \log x}{\log x} dx = \int_0^1 x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}$$

Daraus folgt aus Fundamentales Satz der Integral Rechnung

$$u(\alpha) = \int u'(\alpha) d\alpha = \int \frac{d\alpha}{\alpha+1} = \log(\alpha+1) + C$$

Für eine noch zu bestimmende Konstante C . Aber

$$u(0) = \int_0^1 0 dx = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\log x} dx = \log(\alpha+1)$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{x^5 - 1}{\log x} dx = \log 6$$

Beweis Satz 8.21 (Idee)

Sei

$$f(x, y) = \int_a^x h(s, y) ds : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(t) = \begin{pmatrix} b(t) \\ t \end{pmatrix} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, g'(t) = \begin{pmatrix} b'(t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dann

$$u(t) = (f \circ g)(t) = f(b(t), t) = \int_a^{b(t)} h(s, t) ds$$

Nach Hauptsatz der Integral Rechnung f ist nach x partielle differenzierbar und $\frac{\partial f}{\partial x} = h(x, y)$. Man muss zeigen das f ist nach y partielle differenzierbar mit

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \int_a^x \frac{\partial h(s, y)}{\partial y} ds$$

Dann ergibt die Kettenregel

$$\begin{aligned}
 u'(t) &= \frac{d}{dt} (f \circ g)(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(g(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(g(t)) \right) \cdot \frac{dg}{dt} \\
 &= \left(h(b(t), t), \left(\int_a^x \frac{\partial h(s, y)}{\partial y} ds \right) h(b(t), t) \right) \begin{pmatrix} b'(t) \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \left(h(b(t), t), \int_a^{b(t)} \frac{\partial h}{\partial y}(s, t) ds \right) \begin{pmatrix} b'(t) \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= h(b(t), t) \cdot b'(t) + \int_a^{b(t)} \frac{\partial h}{\partial t}(s, t) ds
 \end{aligned}$$

8.3 Differentialformen und Vektorfelder

Sei $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ der Raum der linearen Abbildungen von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R} . Falls $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion ist, die in jedem Punkt differenzierbar ist, dann ist $df(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und man erhält eine Abbildung

$$\begin{aligned}
 \Omega &\rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \\
 x_0 &\rightarrow df(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0) \right) \\
 &= \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0) dx^1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0) dx^n
 \end{aligned}$$

Dies ist ein Beispiel von 1-Form

Definition 8.26

Eine Differentialform vom Grad 1 (auch "1-Form") auf Ω ist eine Abbildung

$$\lambda : \Omega \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

Beispiel 8.27

1. Seien $x^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ die Koordinatenfunktionen $1 \leq i \leq n$. Für jedes $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ist $dx^i(x_0) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$; dies führt zur 1-Form

$$\begin{aligned}
 dx^i &: \mathbb{R}^n \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \\
 x_0 &\rightarrow dx^i(x_0)
 \end{aligned}$$

Für jedes $x_0 \in \mathbb{R}^n$, gilt $dx^i(e_j) = \delta_{ij}$ also bilden $dx^1(x_0), \dots, dx^n(x_0)$ eine Basis für $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Eine beliebig 1-Form $\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ lässt sich dann eindeutig wie folgt darstellen

$$\lambda(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(x_0) dx^i(x_0)$$

KAPITEL 8. DIFFERENTIALRECHNUNG IN \mathbb{R}^n

wobei $\lambda_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen sind.

2. Für jedes $f \in C^1(\Omega)$ ist das Differential df eine 1-Form

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} dx^2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n$$

Is it C' or $C'^{??}$ page 152.1 top

3. Der Ausdruck $\lambda(x, y, z) = 3dx + 5zdy + xdz$ definiert ein 1-Form auf \mathbb{R}^3 mit

$$\lambda_1(x, y, z) = 3$$

$$\lambda_2(x, y, z) = 5z$$

$$\lambda_3(x, y, z) = x$$

Definition 8.28

Ein Vektorfeld auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$

Does the definition include the examples? page 153 top

Beispiel

- 1.

$$v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (2xy, x^2)$$



page 153, middle

2. $v(x, y) = (-y, x)$



Page 153, bottom

Bemerkung 8.29

Sei \langle, \rangle das übliche Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n , d.h.

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x^i y^i$$

Mittels \langle, \rangle kann man von 1-Formen zu Vektorfeldern und umgekehrt übergehen. Dies geht wie folgt:

1. Sei $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld. Dann definieren wir $\forall x \in \Omega, \omega \in \mathbb{R}^n$

$$\lambda(x)(\omega) := \langle v(x), \omega \rangle$$

Offensichtlich $\lambda(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und somit ist

$$\begin{aligned} \lambda : \Omega &\rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \\ x &\rightarrow \lambda(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\rightarrow \langle v(x), \omega \rangle \end{aligned}$$

eine 1-Form auf Ω

Umgekehrt

2. Sei $\lambda : \Omega \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ 1-Form und $\lambda(x) := \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) dx^i$ wie oben.

Wir definieren

$$\begin{aligned} v : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\rightarrow (\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_n(x)) \end{aligned}$$

dann ist v ein Vektorfeld und

$$\lambda(x)(\omega) = \langle v(x), \omega \rangle$$

Sei $\omega = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 + \dots + \omega^n e_n$. Dann

$$\begin{aligned} \lambda(x)(\omega) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) dx^i(\omega) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) dx^i(\omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 + \dots + \omega^n e_n) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) (\omega^1 dx^i(e_1) + \omega^2 dx^i(e_2) + \dots + \omega^n dx^i(e_n)) \\ dx^i(e_j)_{ij} &\leftarrow = \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) \omega^i = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_n(x)) \cdot (\omega^1, \dots, \omega^n) \\ &= \langle v(x), \omega \rangle \end{aligned}$$

Diese Diskussion können wir auf das Differential einer Funktion anwenden

Definition 8.30

Sei $f \in C^1(\Omega)$, das durch

$$\langle v(x), \omega \rangle := df(x)(\omega), \omega \in \mathbb{R}^n$$

definierte Vektorfeld heisst Gradientenfeld von f und wird mit $v(x) = \nabla f(x)$ oder $\text{grad} f$ bezeichnet.

Bezüglich der Standardbasis e_1, \dots, e_n der \mathbb{R}^n folgt die Darstellung

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x^1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x^n}(x) \end{pmatrix}, \forall x \in \Omega$$

(Oben nehmen wir $\lambda(x) := df(x) = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} r^i x^i$, Bemerkung 8.29, 2.)

Satz 8.31

Sei $f \in C^1(\Omega)$ und $x_0 \in \Omega$. Dann gibt $\nabla f(x_0)$ die Richtung und $|\nabla f(x_0)|$ den Betrag des Steilsten Anstieges von f an der Stelle x_0

Beweis

Aus der Definition des Gradientenfeld folgt $\forall e \in \mathbb{R}^n$, unit Vektor $\|e\| = 1$

$$df(x_0)(e) = \langle \nabla f(x_0), e \rangle$$

Mit Cauchy-Schwarz folgt

$$\langle \nabla f(x_0), e \rangle \leq \|\nabla f(x_0)\| \|e\| = \|\nabla f(x_0)\|$$

mit Gleichheit genau dann wenn e ein positives vielfachen von $\nabla f(x_0)$ ist, nämlich

$$e = \frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}$$

$$\Rightarrow df(x_0)e \leq \|\nabla f(x_0)\|$$

mit Gleichheit für $e = \frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}$ $\nabla f(x_0) \neq 0 \Rightarrow \nabla f(x_0)$ zeigt die Richtung an, in der f am schnellsten wächst.

Geometrische Interpretation Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, C^1$. Für jedes $s \in \mathbb{R}$ wird $f^{-1}(s) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = s\}$ Niveaufäche genannt.

Beispiel

1.

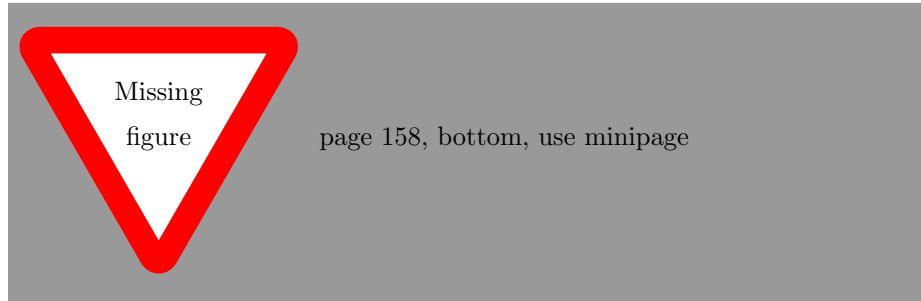
$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$$

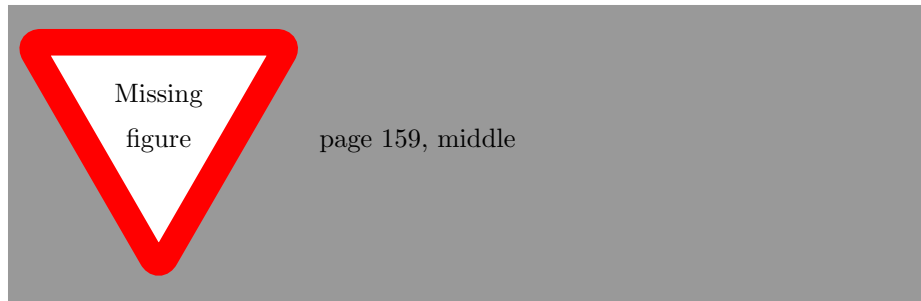
dann ist $f^{-1}(s) = \text{Sphäre mit Zenter } O \text{ und Radius } \sqrt{s}$

Add arrow pointing down for description of function, page 157 middle

2. $f(x, y) = xy$ ist ein Hyperbolischer Paraboloid mit Niveaulinien



$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Nun sei $x_0 \in \Omega$ mit $f(x_0) = s$, i.e. $x_0 \in f^{-1}(s)$. Sei $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein diff. kurve durch x_0 mit $\gamma[-1, 1] \subset f^{-1}(s)$, $\gamma(0) = x_0$



Dann gilt $f(\gamma(t)) = s, \forall t \in [-1, 1]$ und es folgt aus Kettenregel

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f(\gamma(t))) &= \frac{d}{dt}(s) = 0 \\ \Downarrow \\ df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) &= 0 = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \end{aligned}$$

Insbesondere $0 = df(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = \langle \nabla f(x_0), \gamma'(0) \rangle$ d.h. $\nabla f(x_0)$ steht senkrecht zur Niveaufache von f durch x_0

Beispiel

Sei $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{2}, x, y \in \mathbb{R}^2$

$$\nabla f(x, y) = (x, -y)$$

Sei $(x_0, y_0) = (1, -1)$

$$\nabla f(1, -1) = (1, 1) \quad (\|\nabla f(1, -1)\| = \sqrt{2})$$

$$\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}(1, -1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$$

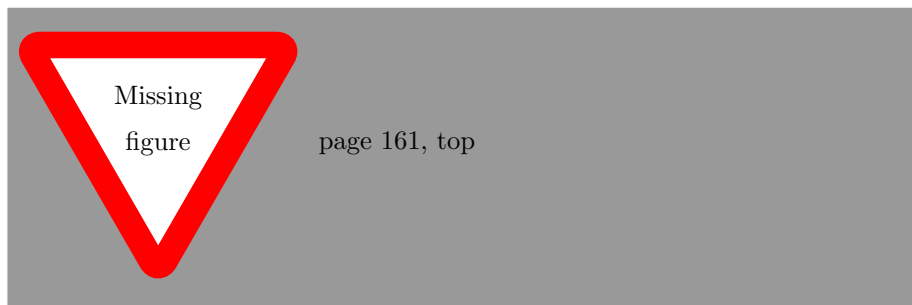
3. Im Punkt P biegt der Bergweg ab; nach Südosten geht er mit 25% steigung berg an, nach Süden mit 20% Gefälle berg ab. Der wanderer im Nebel möchte über die Wiese möglichst rascht zum Gipfel. In welche Richtung muss er gehen und wie steil ist es dorthin?

Wir legen die Koordinatensystem so, dass die x -Achse nach Osten und die y -Achse nach Norden zeigt, und setzen voraus, dass die Höhenfunktion h differenzierbar ist. Wir wollen ihren Gradienten in P $\nabla h(P)$ bestimmen. Noch Voraussetzung hat h die beiden Richtungsableitungen

$$dh(P)(v_1) = 0.25 \quad dh(P)(v_2) = -0.2$$

wobei

$$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad v_2 = (0, -1)$$



$$\begin{aligned} dh(P)(v_1) &= \left(\frac{\partial h}{\partial x}(P), \frac{\partial h}{\partial y}(P) \right) \cdot v_1 \\ &= \frac{\partial h}{\partial x}(P) \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\partial h}{\partial y}(P) \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{4} \\ dh(P)(v_2) &= \left(\frac{\partial h}{\partial x}(P) \right) (0) - \frac{\partial h}{\partial y}(P) (-1) = -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

Durch Lösen des linearen Gleichungssystem folgen wir:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(P) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{5}, \quad \frac{\partial h}{\partial y}(P) = \frac{1}{5}$$

Die Richtung des Gradienten ist somit

$$\nabla h(P) = \arctan \frac{\frac{1}{5}}{\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{5}} = 19.86 \text{degrees}$$

und die Steigung in diese Richtung ist

$$|\nabla h(P)| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{5} \right)^2 + \left(\frac{1}{5} \right)^2} = 0.59 = 59\%$$

add arg at the beginning of the equation using special command, as well as tilde on top of equal sign

add tilde on top of second to last equal sign

8.4 Wegintegrale

Wir haben gesehen in Bemerkung 8.29 dass Mittels das übliche Skalarprodukt \langle, \rangle kann man von 1-Formen zu Vektorfelder und umgekehrt übergehen.

In diesem Kapitel werden wir das “Wegintegral” von 1-Formen oder von Vektorfeldern längs einer Kurve studieren. Dazu untersuchen wir zunächst Kurven in \mathbb{R}^n

can't read, page 162
middle

Parameterdarstellung einer Kurve

Sei $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ eine Kurve. Eine Parameterdarstellung (PD) von γ ist eine Funktion

$$\begin{aligned} \gamma : I = [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\rightarrow \gamma(t) \end{aligned}$$

wobei $\gamma(t)$ ein Punkt γ ist und jeder Punkt auf γ kann als $\gamma(t)$ dargestellt werden

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$$

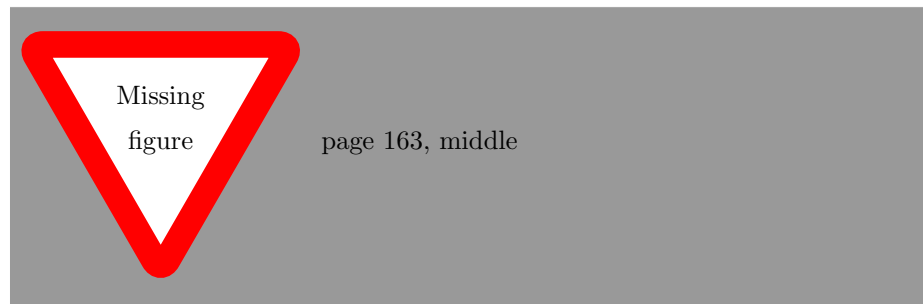
Die positive Orientierung von γ ist die Richtung mit der die Kurve durchgelaufen wird

Bespiel 8.32

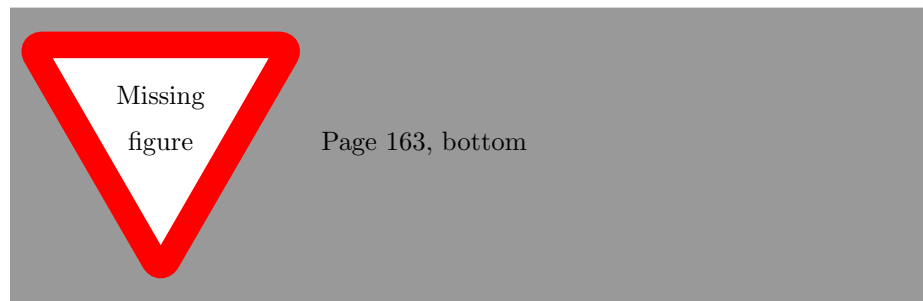
1.

$$\gamma(t) = (a_1 + b_1 t, a_2 + b_2 t, a_3 + b_3 t), \quad t \in \mathbb{R}$$

ist die Parameterdarstellung einer Geraden durch den Punkt $a = (a_1, a_2, a_3)$ und parallel zum Vektor (b_1, b_2, b_3)



2. $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$ ist eine Parameter Darstellung eine Ellipse



3. $\gamma_1(t) = (a \cos t, b \sin t, ct)$, $t \in [0, 2\pi]$ ist eine Parameterdarstellung einer elliptische Helix



$\gamma_2(t) = (a \cos t, -b \sin t, c(2\pi - t))$, $t \in [0, 2\pi]$ ist Parameterdarstellung der gleichen Kurve wobei die Orientierung umgekehrt ist



Der Tangentenvektor zur Kurve an der Stelle $\gamma(t)$ ist $\gamma'(t)$

$$\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t), \dots, \gamma'_n(t))$$

Do I have to include the example?? page 164 bottom

Definition 8.33

Das Wegintegral von ϑ langs γ

$$\int_{\gamma} v d\vec{s} = \int_{\gamma} v(\gamma) d\gamma := \int_a^b \langle v(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

$vd\vec{s} = \gamma'(t)dt$ heisst gerichtetes Längenelement

Beispiel 8.34

Ein einführendes Beispiel: Sei ein Massenpunkt, der sich unter den Einfluss eines Kraftfeldes $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ bewegt.

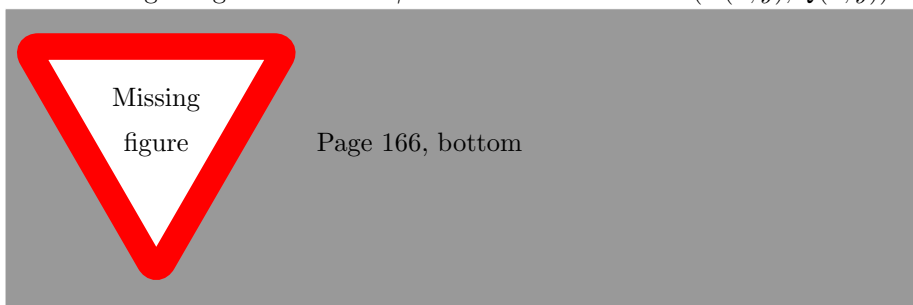
Wenn der Massenpunkt durch eine Konstante Kraft \vec{F} längs einer Geraden um den Vektor \vec{s} verschoben.

Die dabei verrichtete Arbeit ist definitionsgemäss das Skalar Produkt aus dem Kraftvektor \vec{F} und dem Verschiebungsvektor \vec{s} .



Allgemeinen Fall

Verschiebung längs einer Kurve γ in einem Kraftfeld $F = (P(x, y), Q(x, y))$



$\Delta W = F \cdot \Delta(\gamma) = \text{Kraftkomponente entlang des Weges mal zurückgelegter Weg.}$

Da sich Betrag und Richtung der Kraft sowie der jeweilige Winkel zum Weg vom Punkt zu Punkt ändern, gilt das zur Berechnung notwendige Skalarprodukt näherungsweise jeweils nur für ein Wegelement $\Delta \vec{r}$. Die Berechnung der Arbeit erfolgt daher in folgender Weise.

- a) Zerlegung des Weges in Teilabschnitte

$$\Delta \gamma_1 = \gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i) = \frac{\Delta \gamma}{\Delta t} \cdot \Delta t$$

can't read, page 167
middle

- b) Ermittlung der Arbeit Kraft:

$$F(\gamma(t_i)) = F(x(t_i), y(t_i))$$

- c) Berechnen der Arbeit je Teilabschnitt-Skalarprodukt

$$\Delta W_i = F(x(t_i), y(t_i)) \cdot \Delta \gamma_i$$

- d) Aufsummieren der Teil-Arbeit

$$W \approx \sum \Delta W_i = \sum F(x(t_i), y(t_i)) \cdot \underbrace{\frac{\Delta \gamma}{\Delta t} \cdot \Delta t}_{\Delta \gamma_i}$$

- e) Durch Verkleinerung des Wegelementes erhält man den exakten Wert

der geleisteten Arbeit

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \end{aligned}$$

Bemerkung 8.35

Wir können das Wegintegral auch mit Differentialformen formulieren. Sei

$$\begin{aligned} v : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\rightarrow (v^i(x))_{i=1}^n \end{aligned}$$

ein stetiges Vektorfeld ($v^i(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig) dann ist durch $\lambda(x)(\omega) := \langle v(x), \omega \rangle$ definierte $\lambda(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ eine 1-Form

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} v d\vec{s} &= \int_a^b \langle v(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\ &= \int_a^b \lambda(\gamma(t))(\gamma'(t)) dt \end{aligned}$$

Umgekehrt

Sei $\lambda : \Omega \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ eine 1-Form die in folgende Sinne stetig ist:

Sei

$$\begin{aligned} \gamma : [a, b] &\rightarrow \Omega \\ t &\rightarrow (\gamma^1(t), \gamma^2(t), \dots, \gamma^n(t)) \end{aligned}$$

ein C' -weg. Dann ist

$$\begin{aligned} [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\rightarrow \lambda(\gamma(t))(\gamma'(t)) \\ &= \sum \lambda_i(\gamma(t)) \cdot \frac{d\gamma^i}{dt}(t) \end{aligned}$$

eine Stetige Funktion somit ist das Integral $\int_a^b \lambda(\gamma(t))(\gamma'(t)) dt$ wohl definiert.

Definition 8.36

Das Wegintegral von $\gamma \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ längs γ ist

$$\int_{\gamma} \lambda := \int_a^b \lambda(\gamma(t))(\gamma'(t)) dt$$

Beispiel 8.37

1. Sei $\gamma \in C'([0, 2\pi] = \mathbb{R}^2)$ mit

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \\ \gamma'(t) &= \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}\end{aligned} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

eine Parametrisierung des Einheitskreises $\lambda = \lambda(x, y)$ die 1-Form mit

$$\lambda(x, y) = -ydx + xdy \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \lambda &= \int_0^{2\pi} \underbrace{(-\sin t, \cos t)}_{\lambda(\gamma(t))} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}}_{\gamma'(t)} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi\end{aligned}$$