Kapitel 1

Reele Zahlen, Euklidische Räume und Komplexe Zahlen

1.1 Elementare Zahlen

$$\begin{array}{rccc c}
\text{Naturzahl} & \mathbb{N} & = & \{0,1,2,\dots\} & \text{addieren und multiplizieren} \\
& \cap & & & \\
\text{LOOK TODO} & \mathbb{Z} & = & \{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\} & \text{subtrairen} \\
& \cap & & & \\
\text{Rationalzahlen} & \mathbb{Q} & = & \left\{ \frac{p}{q} \middle| p,q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\} & \text{dividieren}
\end{array}$$

Before set Z, can't read, page 22

Viele gleichungen haben keine Lösung in $\mathbb{Q}$.

Satz 2.1

Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Dann hat $x^2 = p$ keine Lösung in $\mathbb{Q}$

Beweis

Zum Erinnerung zwei Natürlichen Zahlen a und b sind teilfrmd (oder relativ prim) wenn es keine Natürliche Zahl ausser der Eins gibt, die beiden Zahlen teilt.

$$((a,b) = 1) \rightarrow \text{ grösste Gemeinsame Teiler}$$

Indirekter Beweis

Wir nehmen an: es gibt $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = p$, wobei a, b teilfremd und ≥ 1 sind. Dann gilt

$$a^2 = pb^2$$

woraus folgt, dass p a teilt also ist $a = pk$, $k \in \mathbb{N}$ und somit

$$a^2 = p^2k^2 = pb^2 \Rightarrow pk^2 = b^2$$

woraus folgt, dass p b teilt.

1.1.1 Die Reelen Zahlen

Wir werden jetzt das System von Axiomen beschreiben das die Menge der Reelen Zahlen "eindeutig" characterisiert.

Die Menge $\mathbb{R}$ der Reelen Zahlen ist mit zwei Verknüpfungen "+" (Addition) und "$\cdot$" (Multiplikation) versehen sowie mit einer Ordnungsrelation $\leq$. Die axiome werden wie folgt gruppiert:

1. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ **ist ein Koerper**
   Es gibt 2 Operationen (Zweistellige Verknüpfungen)

   - $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
     $(a, b) \to a + b$
   - $\times : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
     $(a, b) \to a \cdot b$

   und 2 ausgezeichnete Element 0 und 1 in $\mathbb{R}$ die folgenden Eigenschaften haben:

Komutivität	A1)	$x + y = y + x$	M1)	$x \cdot y = y \cdot x$
Assoziativität	A2)	$(x + y) + z = x + (y + z)$	M2)	$(xy)z = x(yz)$
Neutrales Element	A3)	$x + 0 = x = 0 + x$	M3)	$x \cdot 1 = 1 \cdot x$
Inverse Element	A4)	$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$ mit $x + y = 0 = y + x$	M4)	$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ $\exists y \in \mathbb{R}$ mit $xy = 1 = yx$

resize table

und Die Multiplikation ist verträglich it der Addition im Sinne des Distributivitäts-Gesetz (D)

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x(y + z) = xy + xz$$

- $(\mathbb{R}, +)$ mit A1$\to$A4 ist eine Abelische Gruppe bezüglich der Addition
- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ mit A1$\to$A4, M1$\to$M4 und D ist ein Zahlkörper.

Bemerkung 2.2

Eine Menge G versetzen mit Verknüpfung $+$ und Neutrales Element O die den obigen Eigenschaften A2$\to$A4 genügen heisst Gruppe.

Eine enge K versetzen mit Verknüpfung $+, \cdot$ und Elementen $0 \neq 1$ die den obigen Eigenschaften A1$\to$A4, M1$\to$M4, D genügen heisst Körper.

Folgerung 2.3

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

i) $a + b = a + c \Rightarrow b = c$ und O is eindeutig, d.h. Falls $z \in \mathbb{R}$ der Eigenschaften $a + z = a$ $\forall a \in \mathbb{R}$ genügt, so folgt $z = 0$

ii) $\forall a, b\mathbb{R}$, $\exists!$ (eindeutig bestimmtes) $x \in \mathbb{R} : a + x = b$. Wir schreiben $x = b - a$ und $0 - a = -a$ ist das additive Inverse zu a

iii) $b - a = b + (-a)$

iv) $-(-a) = a$

v) Falls $ab = ac$ und $a \neq 0 \Rightarrow b = c$ und 1 ist eindeutig, d.h. falls $x \in \mathbb{R}$ der Eigenschaften $ax = a \; \forall a \in \mathbb{R}$ genügt so folgt $x = 1$

vi) $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $\exists! x \in \mathbb{R} : ax = b$. Wir schreiben $x = \frac{b}{a}$ und $\frac{1}{/}a = a^{-1}$ ist das Multiplikativ Inverse zu a.

vii) Falls $a \neq 0 \Rightarrow \left(a^{-1}\right)^{-1} = a$

viii) $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \cdot 0 = 0$

ix) Falls $ab = 0$ dann folgt $a = 0$ oder $b = 0$

Beweis 2.3

i) Sei $a + b = a + c$
$A4 \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R} : a + y = 0$
$a + b = a + c \Rightarrow y + (a + b) = y + (a + c)$
$\Rightarrow (y + a) + b = (y + a) + c$
$\Rightarrow 0 + b = 0 + c \Rightarrow b = c$
Nehmen wir an, dass es $0' \in \mathbb{R}$ gibt so dass $x + 0' = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, d.h. es gibt eine zweite neutrale Element für $+$.

add rules to top of arrows, page 26 top

Dann $0 + 0' = 0$ aber auch $A3 \Rightarrow 0 + 0 = 0 \Rightarrow 0 + 0' = 0 + 0 \Rightarrow 0 = 0'$

ii) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, und sei $y \in \mathbb{R}$ mit $a + y = 0$. Definieren wir $x := y + b \Rightarrow a + x = a + (y + b) = (a + y) + b = 0 + b = b$
$\Rightarrow \exists$ mindestens eine Lösung der Gleichung $a + x = b$. Von i) folgt dass x eindeutig bestimmt ist $a + x = b = a + x' \Rightarrow x = x'$

iii) Seien $x = b - a$, $y = b + (-a)$. Wir Wollen beweisen dass $x = y$.

Aus i) wissen wir dass $b - a$ eine Lösung von $a + x = b$

$$y + a = (b + (-a)) + a = b + ((-a) + a) = b + 0 = 0$$

$\Rightarrow y$ ist auch eine Lösung.
Weil die Lösung von $a + x = b$ ist eindeutig bestimmt, ist $y = x$

iv)

v)

vi)

vii)

ASK FOR BEWEISE; PAGE 27 TOP

viii) $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \cdot 0 = 0$
$a \cdot 0 = a(0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0 \Rightarrow a \cdot 0 = 0$

ix) $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ oder $b = 0$
Wir nehmen an: $a \neq 0$ mit Inversen a^{-1}, (a^{-1} existiert mittels M4).
So folgt $b = 1 \cdot b = \left(a^{-1} \cdot a\right) b = a^{-1}(a \cdot b) = a^{-1} \cdot 0 = 0$

?multipli? page 27 middle to top

2. Ordnungsaxiome $\leq$
   Auf $\mathbb{R}$ gibt es eine Relation, $\leq$, genanten Ordnung, die folgenden Eigenschaften genügt

   (a) Reflexität: $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \leq x$
   (b) Transitivität: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$: $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$
   (c) Identivität: $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $(x \leq y)$ und $(y \leq x) \Rightarrow x = y$
   (d) Die Ordnung ist total: $\forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt entweder $x \leq y$ oder $y \leq x$

   Die Ordnung ist konsistent mit $+$, und $\cdot$

   (a) $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z \qquad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$
   (b) $x, y \geq 0 \Rightarrow xy \geq 0$

   Mit