Kapitel 3

Folgen und Reihen (Der Limes Begriff)

3.1 Folgen, allgemeines

Definition 3.1
Eine Folge reeler zahlen ist eine Abbildung $a : \mathbb{N}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ wobei wir das Bild con $n \geq 1$ mit a_n (statt $a(n)$) bezeichen.

Eine Folge wird dann meistens mit $(a_n)_{n\geq 1}$, daher mit der geordneten Bildmenge bezeichnet.

Folgen können auf verschiedene Arten gegeben sein.

Beispiel 3.2

1. $a_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$
2. $a_1 = 0.9$, $a_2 = 0.99$, …, $a_n = 0.\underbrace{99\ldots9}_{n-\text{mal}}$
3. $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \geq 1$
4. (Rekursiv) Sei $d > 0$ eine reelle Zahl $a_1, \ldots, a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{d}{a_n}\right), n \geq 1$
   z.B. $d = 2, a_1 = 1, a_2 = \frac{3}{2}, a_3 = \frac{17}{12}, a_4 = \ldots$
5. Fibonacci Zahlen. $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \forall n \geq 2$

Definition 3.3
Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ heisst beschränkt falls die Teilmenge $\{a_n : n \geq 1\} \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt ist. d.h. Es gibt $c \in \mathbb{R}(c \geq 0)$ so dass $|a_n| \leq c, \forall n \geq 1$

3.2 Grenzwert oder Limes eine Folge. Ein zentraler Begriff

Definition 3.4
Eine Folge $(a_n) \geq 1$ konvergiert gegen a wann für jedes $\varepsilon > 0$ ein Index $N(\varepsilon) \geq 1$ gilt so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon, \forall n > N(\varepsilon)$$

Definition 3.4 (Version 2)
Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$ falls für jedes $\varepsilon > 0$ die Menge der Indizen $n \geq 1$ für welcher $a_n \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ endlich ist.

$$(\forall \varepsilon > 0, \#\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\} < \infty)$$

Equivalenz beider Definitionen

Is this supposed to be a title?

(2) $\Rightarrow$ (1)
Sei für $\varepsilon > 0$

$$M(\varepsilon) := \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\} = \{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - a| \geq \varepsilon\}$$

Da $M(\varepsilon)$ endlich ist, ist es nach oben beschränkt. Es gibt also $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ so dass $\forall n \in M(\varepsilon)$, $n \leq N(\varepsilon) - 1$. Insbesondere gilt $\forall n \geq N(\varepsilon)$, $n \notin M(\varepsilon)$ und daher $|a_n - a| < \varepsilon$.

(1) $\Rightarrow$ (2)

$$M(\varepsilon) = \{n : |a_n - a| \geq \varepsilon\} \subset [0, N(\varepsilon) - 1]$$

Also endlich.

Falls die Eigenschaften in Definition 3.4 zutrifft, dann schreibt man

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \text{ oder } a_n \underset{n\to\infty}{\to} a$$

Die Zahl a nennt sich Grenzwert oder Limes der Folge $(a_n)_{n\geq 1}$. Eine Folge heisst konvergent falls sie einen Limes besitzt, andernfalls heisst sie divergent.

Bemerkung 3.5

1. Falls $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergent ist der Limes eindeutig bestimmt

   Beweis

   Seien a und b Grenzwerte von $(a_n)_{n\geq 1}$. Sei $\varepsilon = \left|\frac{b-a}{3}\right| > 0$, dann gibt es N_1, N_2 so dass

   $$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \forall n > N_1$$

$$|a_n - b| < \varepsilon \qquad \forall n > N_2$$

Also$\forall n \geq \max\{N_1, N_2\}$

$$(a-b) \cong |(a-a_n) + (a_n - b)| < 2\varepsilon = \frac{2}{3}|b-a|$$

Binomischen Lehrsatz

Für beliebige Zahlen a, b und $n \in \mathbb{N}$ ist

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

2. Falls $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergent ist, $\{a_n : n \geq 1\}$ beschränkt: Sei $\varepsilon = 1$, $\lim a_n = a$ und N_0 mit
$$|a_n - a| \leq 1 \qquad \forall n > N_0$$
Dann ist $\forall n\ |a_n| \geq \max\{|a| + 1, |a_j|, 1 \leq j \leq N_0\}$

Beispiel 3.6

1. Sei $a_n = \frac{1}{n}, n \geq 1$. Dann gilt $\lim a_n = 0$
   - Sei $\varepsilon > 0$. Dann $\frac{1}{\varepsilon} > 0$. Sei $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \geq 1$ mit $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ (Archimedische Eigenschaft, Satz 2.13)

   Dann gilt für alle $n \geq n_0$, $\frac{1}{\varepsilon} < n_0 \leq n \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon, \forall n \geq n_0$

2. Sei $0 < q < 1$ und $a_n := q^n$, $n1$. Dann gilt $\lim a_n = 0$ (a_n konvergiert gegen 0) Cannot read, page 54 top

   Beweis

   Zu beweisen
   $$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 = N_0(\varepsilon) \in N$$
   Should it be $\in \mathbb{R}$??
   $$\forall n \geq N_0 : q^n < \varepsilon$$
   Die Idee ist zu zeigen dass $\frac{1}{q^n}$ sehr Gross wird und deswegen q^n sehr klein wird. Setzen wir $\frac{1}{q} = 1 + \delta$ mit $\delta > 0$ $\left(1 < 1 \Rightarrow \frac{1}{q} > 1\right)$
   $$\frac{1}{q^n} = \left(\frac{1}{q}\right)^n = (1+\delta)^n = 1 + n\delta + \binom{n}{2}\delta^2 + \cdots + \delta^n \geq 1 + n\delta > n\delta, \forall n \in \mathbb{N}$$
   also
   $$0 < q^n < \frac{1}{n\delta}, \forall n \in \mathbb{N}$$
   Sei jetzt $\varepsilon > 0$, wähle $N_0 = N_0(\varepsilon)$ mit $\frac{1}{\varepsilon\delta} < N_0 \Rightarrow \frac{1}{N_0\delta} < \varepsilon$
   $$\forall n > N_0 \qquad 0 < q^n \leq \frac{1}{n\delta} < \frac{1}{N_0\delta} < \varepsilon$$

3. $\sqrt[n]{n}$, $\lim a_n = 1$. Klar: $n \geq 1$ also $\sqrt[n]{n} \geq 1$
Gegeben ein $\varepsilon > 0$, wollen wir n so gross wählen, dass

$$\sqrt[n]{n} - 1 < \varepsilon$$

das heisst, $n < (1+\varepsilon)^n$. Wir entwickeln

$$(1+\varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} \varepsilon^2 + \cdots + \varepsilon^n$$

can't read last element of the expansion

ε ist klein aber fixiert.

Für n sehr gross wird $1 + n\varepsilon$ nie grösser als n sein. Wir versuchen unsere Glück mit

$$\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} \varepsilon^2 \text{ term}$$

$$\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} \varepsilon^2 = \frac{n(n-1)}{2} \varepsilon$$

Wir benutzen also $(1+\varepsilon)^n \geq \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2$. Wir wollen n so wählen dass

$$\frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 > n$$

d.h. $n - 1 > \frac{2}{\varepsilon^2}$ oder $n > 1 + \frac{2}{\varepsilon^2}$

Setzen wir $N_0 := \left(1 + \frac{2}{\varepsilon^2}\right) + 1$. Dann gilt für $\forall n > N_0$

$$(1+\varepsilon)^n > n \geq 1$$

$$\Rightarrow 1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + \varepsilon$$

$$\Rightarrow -\varepsilon < 0 \leq \sqrt[n]{n} - 1 \leq \varepsilon \Rightarrow \left|\sqrt[n]{n} - 1\right| < \varepsilon, \forall n > N_0$$

4. Nicht alle Folgen sind konvergent. Es gibt zwei verschiedene Verhältnissen einer divergenten Folge

$$a_n = (-1)^n \Rightarrow \{1, -1, \ldots\} \text{ beschränkt aber nicht konvergent}$$

5. $a_n = n$ unbeschränkt, divergent.

Beispiel 3.7

Seien $p \in \mathbb{N}$, $0 < q < 1$. Dann gilt $\lim\limits_{n \to \infty} n^p q^n = 0$. Dass heisst Exponentialfunktionen wächst schneller als jede Potenz (Wann x genügend Gross ist, $a^x > x^b$)

Beweis

Der Trick ist folgender

$$n^p q^n = \left(n^{\frac{p}{n}} \cdot q\right)^n = \left(\left(\sqrt[n]{n}\right)^p \left(q^{\frac{1}{p}}\right)^p\right)^n$$

Wir werden Beispiel 3.6 (2.),(3.) benutzen.
(d.h. $\lim \sqrt[n]{n} = 1 \qquad \lim r^n = 0, 0 < r < 1$)

Da $\lim \sqrt[n]{n} = 1$, $\forall \eta > 0$, $\exists N_0(\eta)$

$$\sqrt[n]{n} < 1 + \eta, n > N_0(\eta)$$

Wir wählen $\eta > 0$ so dass $q^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{(1+\eta)^2}$. Dann

$$\sqrt[n]{n} \cdot q^{\frac{1}{p}} \leq \frac{(1+\eta)}{(1+\eta)^2} = \frac{1}{1+\eta} \qquad \forall n > N_0(\eta)$$

Wobei

$$\forall n > N_0(\eta)$$

$$a_n = \left(\sqrt[n]{n} q^{\frac{1}{p}}\right)^{pn} < r^n$$

mit

$$r := \left(\frac{1}{1+\eta}\right)^p, r < 1$$

Sei jetzt $\varepsilon > 0$. Da $\lim r^n = 0$, $\exists N_1 = N_1(\varepsilon)$, $\forall n > N_1(\varepsilon)$, $r^n < \varepsilon$

Für $n > \max\{N_0(\eta), N_1(\varepsilon)\}$, $a_n < r^n < \varepsilon \Rightarrow \lim a_n = \lim n^p q^n = 0$

3.3 Konvergenzkriterien

Mit konvergenten Folgen kann man wie folgender Satz zeigt. Can't read, page 59 top

Satz 3.8

Seien $(a_n)_{n\geq 1}$ und $(b_n)_{n\geq 1}$ konvergente Folgen mit

$$\lim a_n = a, \ \lim b_n = b$$

i) Die folge $(a_n + b_n)_{n\geq 1}$ konvergiert und $\lim (a_n + b_n) = a + b$

ii) Die folge $(a_n \cdot b_n)_{n\geq 1}$ konvergiert und $\lim (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

iii) Falls $b \neq 0$ und $b_n \neq 0$ $\forall n \geq 1$ gilt $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

iv) Falls $a_n \leq b_n$ folgt $a \leq b$

Beweis

Sei $\varepsilon > 0$, es gibt $N_1(\varepsilon)$, $N_2(\varepsilon)$ so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon, \forall n > N_1(\varepsilon)$$
$$|b_n - b| < \varepsilon, \forall n > N_2(\varepsilon)$$

i) Für $n \geq \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$ gilt

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$$

Da dies für alle $\varepsilon > 0 < 2\varepsilon$ gilt, folgt auch

$$\forall n > \max\left\{N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), N_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right\} := N(\varepsilon)$$

gilt

$$|a_n + b_n - (a + b)| < \varepsilon$$

ii) Sei C eine Schränke für $\{|b_n| : n \geq 1\}$ (Bemerkung 3.5: Falls $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergent ist, $\{b_n : n \geq 1\}$ beschränkt). Für $N_1(\varepsilon)$, $N_2(\varepsilon)$ wie oben folgt $\forall n \geq \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \\ &= |b_n (a_n - a) + a (b_n - b)| \\ &\leq \varepsilon |b_n| + |a| \varepsilon \leq \varepsilon (C + |a|) \end{aligned}$$

Also folgt

$$\forall n \geq N(\varepsilon) := \max\left(N_1\left(\frac{\varepsilon}{C + |a|}\right), N_2\left(\frac{\varepsilon}{|C| + a}\right)\right)$$

dass $|a_n b_n - ab| < \varepsilon$

iii) Wegen (ii) genügt es, dem Fall $a = a_n = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ zu betrachten

$$|b_n| = |b_n - b + b| \geq |b| - |b_n - b| \geq |b| - \varepsilon$$

Sei $0 < \varepsilon < \frac{|b|}{2}$, dann gilt $|b_n| > \frac{|b|}{2}$. Es folgt

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b_n - b}{b_n b}\right| < \frac{2}{|b|^2} |b_n - b| \leq \frac{2}{|b|^2}\varepsilon \qquad \forall n > n_0(\varepsilon)$$

Also folgt $\forall n > N(\varepsilon) := n_0\left(\frac{\varepsilon |b|^2}{2}\right)$ dass $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| < \varepsilon$

iv) (Indirekter Beweis) Falls $a > b$, $a - b > 0$. Sei

$$\begin{aligned} \varepsilon &:= \frac{a - b}{2} > 0 \\ 2\varepsilon &= b - a \\ \Rightarrow b - \varepsilon &= a + \varepsilon \\ b_n \to b \Rightarrow & b_n < b + \varepsilon \qquad \forall n > n_0(\varepsilon) \\ a_n \to a \Rightarrow & -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < a_n \qquad \forall n > TODO \end{aligned}$$

Aber denn die Ungleichung

$$b_n < b + \varepsilon = a - \varepsilon < a_n \qquad \forall n \geq n_0$$

im Widerspruch zur Annahme $a_n \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

■

Es ist nicht unbedingt nötig, den ganzen Beweis zu führen um zu wissen dass eine Folge konvergent ist. Es gibt Folgen deren Konvergenz, durch eine Strukturelle Eigenschaft gesichert ist ohne dass man den Limes apriori kennen muss.

Folgender Satz illustriert dieses, es benützt die Vollständigkeitsaxiom

Satz 3.9 (Monotone Konvergenz)

1. Sei $(a_n)_{n>1}$ eine monoton Wachsende beschränkte Folge. Dann ist sie konvergent und es gilt zudem

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \geq 1\}$$

2. Sei $(b_n)_{n\geq 1}$ eine Monotone fallende beschränkte Folge. Dann ist es konvergent und es gilt zudem

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \inf\{b_n \mid n \geq 1\}$$

Definition 3.10

- **Monotone wachsend**:

$$a_n \leq a_{n+1} \qquad \forall n \geq 1$$

- **Monotone fallend**:

$$b_{n+1} \leq b_n \qquad \forall n \geq 1$$

Number might be wrong, page 63 middle

Beweis 3.9

i) $a_1 \leq a_2 \leq \ldots$ und $\{a_n : n \geq 1\}$ nach oben beschränkt $\Rightarrow \exists C$ mit $a_n \leq C$ $\forall n \geq 1$. Sei nach Satz 2.9 (Jede nach oben beschränkte Teilmenge $A \subset R$ besitzt ein kleinste obere Schränke) $a := \sup\{a_n : n \geq 1\}$ die Kleinste Obere Schranke.

Wir behaupten dass: $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Sei $\varepsilon > 0$, dann ist $a - \varepsilon$ keine Obere Schranke und deswegen gibt es $n(\varepsilon) \geq 1$ mit $a_{n(\varepsilon)} > a - c$. Aus monotonität folgt

$$a_n > a_{n(\varepsilon)} > a - c \qquad \forall n > n(\varepsilon)$$

und folgt somit

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \forall n > n(\varepsilon)$$

ii) Ähnlich.

■

Sätze 3.8, 3.9 haben vielfähige Anwendungen die wir durch einige Beispiele illustrieren.

Beispiel 3.10

1. Sei

$$a_n = \frac{3n^6 + 11n^4 - 1}{2n^6 - 7n^3 + n} = \frac{3 + \frac{11}{n^2} - \frac{1}{n^6}}{2 - \frac{7}{n^3} + \frac{1}{n^5}} \to \frac{3}{2}$$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ existiert.

   Wir werden beweisen dass a_n monotone wachsend und beschränkt ist. Der limes wird mit "e" beteichnet, wobei $e = 2.71828\ldots$ (Eulerische Konstant)

   Beweis

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

   Wir möchten den Binomischen Lehrsatz anwenden

$$\begin{aligned} a_n =& \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ =& 1 + n\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{n}\right)^n \\ =& 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \\ & + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \ldots \end{aligned}$$

   Nun ist aber

$$\frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) < \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)$$

usw

   deswegen folgt

$$2 < a_n < a_{n+1} \qquad \forall n \geq 1$$

   d.h. a_n ist monoton wachsend.

Die Produkte der Form

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) &< 1\\ \Rightarrow a_n &< 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots\\ &< 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}\dots = 3\end{aligned}$$

d.h. a_n ist beschränkt. Monotone Konvergenz $\Rightarrow (a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert

■

3. Rekursive Definitionen
Sei $\underset{c\in\mathbb{R}}{c>1}$, $a_1 = c$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right)$, $n \geq 1$. Dann ist $\lim a_n = \sqrt{c}$

Beweis

Dies ist ein wichtiges Beispiel. Hier wird vorgeführt wie man aus der apriori Existenz des Limes dessen Wert schliessen kann.

<u>1. Schnitt:</u>

$$a_{n+1}^2 \geq c \qquad \forall n \geq 1$$

a_n ist (nach unten) beschränkt.

$$\begin{aligned}a_{n+1} =& \frac{c+a_n^2}{2an} = a_n + \frac{c-a_n^2}{2a_n}\\ \Rightarrow a_{n+1}^2 =& a_n^2 + \left(c-a_n^2\right) + \left(\frac{c-a_n^2}{2a_n}\right)^2\\ =& c + \left(\frac{c-a_n^2}{2a_n}\right)^2 \geq c \ \ (*)\end{aligned}$$

<u>2. Schnitt:</u>

$$a_{n+1} \leq a_n$$

d.h. a_n ist monoton fallend.

$$\begin{aligned}&(*) : a_{n+1}^2 \geq c\\ &\Rightarrow \frac{c}{a_{n+1}} \leq a_{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ insbesondere}\\ &\quad \frac{c}{a_n} \leq a_n\\ &\Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) \leq \frac{1}{2}\left(a_n + a_n\right) = a_n\end{aligned}$$

Monotone Konvergenz Satz $\Rightarrow (a_n)$ konvergiert.

Sei $a = \lim a_n$. Da $a_n^2 \geq c$, $\forall n \geq 2$ folgt $a^2 \geq c$. Aus $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right)$ und Satz 3.8 folgt $a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{c}{a}\right) \Rightarrow \frac{c}{a} = a \Rightarrow c = a^2 \Rightarrow a = \sqrt{c}$. Schliesslich $\lim a_n = \sqrt{c}$

■

3.4 Teilfolgen, Häufungspunkte

Definition 3.11
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine folge und sei $l(n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine strict monotone wachsend Folge von positiven Natürliche Zahlen. Die Verkettung von $l(n)$ und (a_n) heisst eine Teilfolge $\left(a_{l(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$n \to l(n) \to a_{l(n)}$$

Die Idee ist sehr einfach: Wir haben die Folge

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \ldots, a_j, \ldots, a_{j+1}, \ldots$$

und wir definieren eine neue Folge mit einigen Elementen von (a_n)

$$a_1, a_3, a_6, a_{j+1}, \ldots$$

Beispiel

1.

$$\begin{aligned} a_n &= \{1, 0, -1, 1, 0, -1, 1, 0, -1, \ldots\} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad n = 3k+2 \\ 1 & \text{falls} \quad n = 3k+1 \\ -1 & \text{falls} \quad n = 3k+3 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n &\to 3n+2 \to a_{3n+2} = (0, 0, \ldots) \\ n &\to 3n+1 \to a_{3n+1} = (1, 1, \ldots) \\ n &\to 3n \to a_{3n} = (-1, -1, \ldots) \end{aligned}$$

2. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n = n \Rightarrow (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Teilfolge $n \to 2^n \to a_{2^n}$
3. $a_n = (-1)^n$, $(a_{2n})_{n\geq 1}$ (a_{2n+1}) sind Teilfolgen

Bemerkung 3.12

Im Definition 3.11 ist $l\,(\mathbb{N}\backslash\{0\})$ eine unendliche Teilmenge von $\mathbb{N}\backslash\{0\}$. Umgekehrt, falls $\wedge \subset \mathbb{N}\backslash\{0\}$ eine unendliche Teilmenge ist dann enthält man eine Teilfolge von $(a_n)_{n\geq 1}$ mittels einer Monoton Abzählung $l : \mathbb{N}\backslash\{0\} \to \wedge$ von $\wedge$ $(l(n) := \min\,(\wedge\backslash\{l(1), l(2), \ldots, l(n-1)\}))$

Definition 3.13
$a \in \mathbb{R}$ ist Häufungspunkt von $(a_n)_{n\geq 1}$ falls es eine gegen a konvergierende Teilfolge $\left(a_{l(n)}\right)_{n\geq 1}$ gibt.