

## Kapitel 9

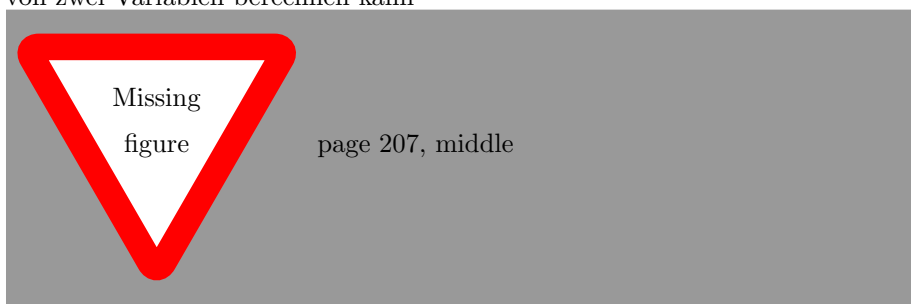
# Integration in $\mathbb{R}^n$

Im Eindimensionalen hatten wir mit dem Integral

$$\int_a^b f(x) dx$$

den Flächeninhalt unter dem Graphen von  $f$  berechnet. Wir suchen nach eine Verallgemeinerung mit der z.B. Volumen unter dem Graphen einer Funktion von zwei Variablen berechnen kann

can't understand word,  
page 207 middle



Erinnerung: Bestimmtes Riemann-Integral einer Funktion  $f(x)$  über einem Intervall  $[a, b]$ :

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Das Integral  $I$  war als Grenzwert von Riemannscher Ober und Untersumme definiert (falls diese Grenzwert jeweils existieren und übereinstimmen).

Konstruktionsprinzip für Bereichsintegrale ist Analog. Aber der Definitionsbereich  $D$  ist komplizierter. Wir betrachten zunächst den Fall zweier Variabler,  $n = 2$ , und einen Definitionsbereich  $D \subset \mathbb{R}^2$  der Form

$$D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$$

d.h.  $D$  ist ein kompakter Quader (Rechteck). Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Funktion.

**Definition 9.1**

Mann nennt  $Z = \{(x_0, x_1, \dots, x_n), (y_0, y_1, \dots, y_m)\}$  eine Zerlegung des Quaders  $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$  falls gilt

$$a_1 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b_1$$

$$a_2 = y_0 < y_1 < \dots < y_m = b_2$$

1. WHERE IS NUMBER 1??

2. Die Feinheit einer Zerlegung  $Z \in \mathcal{Z}(D)$  ist

$$\|Z\| := \max_{i,j} \{|x_{i+1} - x_i|, |y_{j+1} - y_j|\}$$

3. Für eine vorgegebene Zerlegung  $Z$ , nennt man die Mengen

$$Q_{ij} := [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$$

die Teilquader der Zerlegung  $Z$ . Das Volumen des Teilquaders  $Q_{ij}$  ist

$$\text{vol}(Q_{ij}) := (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$$

4. Für beliebige Punkte  $\xi_{ij} \in Q_{ij}$  der Jeweiligen Teilquader nennt man

$$R_f(Z) := \sum_{i,j} f(\xi_{ij}) \text{vol}(Q_{ij})$$

eine Riemannsche Summe zur Zerlegung  $Z$

5. Analog zum Integral einer Variablen heissen für eine Zerlegung  $Z$

$$U_f(Z) := \sum_{i,j} \inf_{\mathbf{X} \in Q_{ij}} f(\mathbf{X}) \text{vol}(Q_{ij})$$

$$O_f(Z) := \sum_{i,j} \sup_{\mathbf{X} \in Q_{ij}} f(\mathbf{X}) \text{vol}(Q_{ij})$$

die Riemannsche Untersumme bzw. Riemannsche Obersumme von  $f(x)$

**Bemerkung 9.2**

1. Es gilt

$$U_f(Z) \leq R_f(Z) \leq O_f(Z)$$

d.h. eine Riemannsche Summe zur Zerlegung  $Z$  liegt stets zwischen der Unter und Obersumme dieser Zerlegung.

2. Entsteht eine Zerlegung  $Z_2$  aus der Zerlegung  $Z_1$  durch Hinzunahme wei-

## KAPITEL 9. INTEGRATION IN $\mathbb{R}^n$

terer Zwischenpunkte  $x_i$  oder/und  $y_j$  so gilt

$$U_f(Z_2) \geq U_f(Z_1) \quad \text{und} \\ O_f(Z_2) \leq O_f(Z_1)$$

Für zwei beliebige Zerlegungen  $Z_1, Z_2$  gilt stets

$$U_f(Z_1) \leq O_f(Z_2)$$



### Definition 9.3

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt

1. Riemannsche Unterintegral bzw. Riemannsche Oberintegral der Funktion  $f(x)$  über  $D$  ist

$$U_f := \sup \{U_f(z) : z \in Z(D)\} := \int_{\underline{D}} f(x) d\mu$$

$$O_f := \inf \{O_f(z) : z \in Z(D)\} := \int_{\bar{D}} f(x) d\mu$$

2. Die Funktion  $f(x)$  nennt man Riemann - integrierbar über  $D$ , falls Unter und Oberintegral übereinstimmen. Das Riemann Integral von  $f(x)$  über  $D$  ist

$$\int_D f(x) d\mu = \int_{\bar{D}} f(x) d\mu = \int_{\underline{D}} f(x) d\mu$$

### Bemerkung

In höheren Dimensionen,  $n > 2$ , ist die Vorgehensweise analog. Schreibweise:  
Für  $n = 2, n = 3$

$$\int_D f(x, y) d\mu \quad \text{bzw.} \quad \int_D f(x, y, z) d\mu$$

oder auch

$$\int_D f(x, y) dx dy \text{ bzw. } \int_D f(x, y, z) dx dy dz$$

oder

$$\int_D f dx dy \text{ bzw. } \int_D f dx dy dz$$

**Satz 9.4 (Elementare Eigenschaften des Integrals)**

1. Linearität: Seien  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und  $R$  integrabel,  $\beta, \alpha \in \mathbb{R}$ . Dann sind  $\alpha f, f + g$   $R$  - Integrabel

$$\int_D (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_D f d\mu + \beta \int_D g d\mu$$

2. Monotonie: Gilt  $f(x) \leq g(x), \forall x \in D$ , so folgt

$$\int_D f d\mu \leq \int_D g d\mu$$

3. Positivität: Gilt für alle  $x \in D, f(x) \geq 0$  (d.h.  $f(x)$  ist nichtnegativ), so folgt

$$\int_D f d\mu \geq 0$$

4. Abschätzung

$$\left| \int_D f(x) d\mu \right| \leq \sup_{x \in D} |f(x)| \text{vol}(D)$$

5. Sind  $D_1, D_2, D$  Quader,  $D = D_1 \cup D_2$  und  $\text{vol}(D_1 \cap D_2) = 0$ , so ist  $f$  genau dann über  $D$  integrierbar, falls  $f$  über  $D_1$  und über  $D_2$  integrierbar ist und es gilt

$$\int_D f d\mu = \int_{D_1} f d\mu + \int_{D_2} f d\mu$$

(Gebietsadditivität)

## 9.1 Der Satz von Fubini

According to the notes it should be 9.2, which one is right??

Wie kann man das  $R$  - Integral konkret berechnen? Der Satz von Fubini hilft uns.

**Satz 9.5 (Satz von Fubini)**

Sei  $Q = [a, b] \times [c, d] \in \mathbb{R}^2$  und sei  $f \in C^0(Q)$ . Dann gilt

$$\int_Q f d\mu = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

d.h. das Integral von  $f$  über  $Q$  kann iterativ durch 1-Dimensionale Integration bestimmt werden

**Beispiel 9.6**

1. Sei  $f(x, y) = 2x + 2yx$ ,  $Q = [0, 1] \times [-2, 2]$

$$\begin{aligned} \int_Q f d\mu &= \int_{-2}^2 \left( \int_0^1 (2x + 2yx) dx \right) dy \\ &= \int_{-2}^2 \left( x^2 + yx^2 \Big|_0^1 \right) dy \\ &= \int_{-2}^2 (1 + y) dy = y + \frac{y^2}{2} \Big|_{-2}^2 = 4 \end{aligned}$$

Oder:

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \left( \int_{-2}^2 (2x + 2yx) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left( 2xy + y^2x \Big|_{-2}^2 \right) dx \\ &= \int_0^1 [(4x + 4x) - (-4x + 4x)] dx \\ &= \int_0^1 8x dx = 4x^2 \Big|_0^1 = 4 \end{aligned}$$

- 2.

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \int_0^{2\pi} (e^x \sin y) dy dx \\ &= \int_0^1 \left( -e^x \cos y \Big|_0^{2\pi} \right) dx \\ &= \int_0^1 0 dx = 0 \end{aligned}$$

Oder:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 e^x \sin y dx \right) dy \\
 &= \int_0^{2\pi} \left( \sin y e^x \Big|_0^1 \right) dy \\
 &= \int_0^{2\pi} (e - 1) \sin y dy \\
 &= - (e - 1) \cos y \Big|_0^{2\pi} = 0
 \end{aligned}$$

### Geometrische Dehnung

Not sure about the text size...



In der Skizze ergibt sich als Volumen der markierten Schicht bei festem  $x$  und sehr kleinen Dicke  $dx$  näherungsweise das Volumen

$$\left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

Das Aufaddieren sämtlicher Schichtvolumen entspricht gerade der Integration über die Variable  $x$ , d.h. für das gesuchte Volumen gilt

$$V = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

Bis jetzt können wir nur Integrale über achsenparallel rechteckige bzw. quaderförmige Bereiche berechnen.

Das reicht für viele praktische Aufgaben nicht aus. Meist ist der Integrationsbereich  $D$  krummlinig oder zumindest anders begrenzt



Die meisten praktischen Aufgaben lassen sich auf die Integration über sogenannte Normalbereiche zurückführen.

**Definition 9.10**

1. Eine Teilmenge  $D \subset \mathbb{R}^2$  heisst ein Normalbereich bezüglich der  $x$ -achse bzw. bezüglich der  $y$ -Achse falls es stetige Funktionen  $g, h$  bzw.  $\bar{g}, \bar{h}$  gibt mit

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \text{ und } g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

bzw.

$$D = \{(x, y) \mid \bar{a} \leq x \leq \bar{b}, \text{ und } \bar{g}(x) \leq y \leq \bar{h}(x)\}$$

**Beispiel**

Kreise und Rechtecke sind Normalbereiche bzgl. beider Achsen



Über Normalbereiche lässt sich sehr bequem integrieren



Die markierte Scheibe bei  $y = \text{const.}$  mit kleiner Dicke  $dx$  besitzt näherungsweise das Volumen

$$V(x) = \left( \int_{g(x)}^{f(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

Nun braucht man  $V(x)$  nur noch über  $[a, b]$  zu integrieren

$$V = \int_a^b \left( \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

### Satz 9.11

1. Ist  $f(x)$  stetig auf einem Normalbereich

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \text{ und } g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

so gilt

$$\int_D f(x) d\mu = \int_a^b \left( \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

2. bzw. Falls

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{a} \leq x \leq \bar{b}, \text{ und } \bar{g}(x) \leq y \leq \bar{h}(x)\}$$

so gilt

$$\int_D f(x) d\mu = \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \left( \int_{\bar{g}(x)}^{\bar{h}(x)} f(x, y) dx \right) dy$$

### Beispiel 9.12

1. Sei  $f(x, y) = x - y$



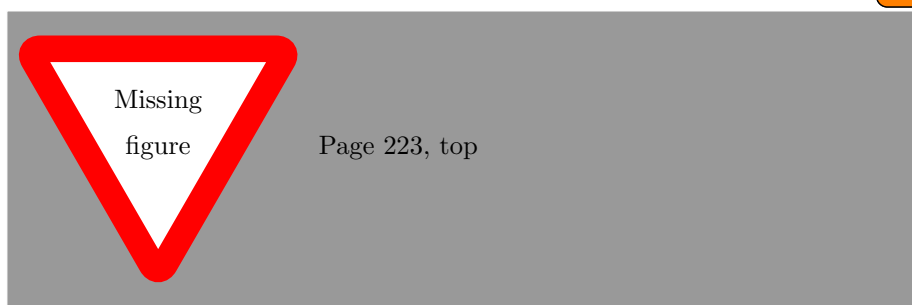


$$\begin{aligned}
\int_D f d\mu &= \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} (x-y) dy dx \\
&= \int_0^1 \left( xy - \frac{y^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} \right) dx \\
&= \int_0^1 \left( x\sqrt{1-x^2} - \frac{1-x^2}{2} \right) dx \\
&= \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx - \frac{1}{2} \int_0^1 1-x^2 dx \\
&= \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx \quad \begin{array}{l} u = 1-x^2 \\ du = -2x dx \end{array} \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{u} du = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \\
&\int_D f d\mu = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0
\end{aligned}$$

2. Sei  $D$  die durch die Gerade  $g(x) = x + 2$  und die Parabel  $b(x) = 4 - x^2$  begrenzte Gebiet

missing content?? page 223 top



Schnittpunkte:

$$\begin{aligned}
x + 2 &= 4 - x^2 \\
x^2 + x - 2 &= 0 \\
(x - y)(x + 2) &= 0
\end{aligned}$$

Zu Berechnung des Doppelintegrals zerlegen wir das Gebiet in Streifen parallel zur  $y$ -Achse. Für festes  $x$  variiert  $y$  von  $g(x) = x + 2$  bis  $h(x) =$

$$4 - x^2$$

$$\begin{aligned} \int_D x d\mu &= \int_{-2}^1 \left( \int_{x+2}^{4-x^2} x dy \right) dx \\ &= \int_{-1}^2 x (4 - x^2 - x + 2) dx \\ &= \int_{-1}^2 (2x - x^3 - x^2) dx \\ &= x^2 - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^2 \\ &= \left( 4 - 4 - \frac{8}{3} \right) - \left( 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \right) = -\frac{127}{36} \end{aligned}$$

3. Sei  $D$  :



$$\int_D f d\mu \underset{\substack{\downarrow \\ *}}{=} \int_{-1}^1 \left( \int_{x=y^2}^1 f dx \right) dy$$

(\* = Zerlegung des Gebietes in Streifen parallel zur  $x$ -Achse)

oder mit Zerlegung in streifen parallel zur  $y$ -Achse

$$\int_D f d\mu = \int_{x=0}^1 \left( \int_{y=-\sqrt{x}}^{y=\sqrt{x}} f(x, y) dy \right) dx$$

Manchmal muss man  $D$  zerlegen.

4. Bestimme  $\int_D x dx dy$  wobei  $D$  von  $y^2 = 4x$  und  $y = 2x - 4$  begrenzt wird.



Schnittpunkte  $P_1, P_2$ :

$$\begin{aligned} 4x &= y^2 = (2x - 4)^2 \\ \Rightarrow (2x - 4)^2 &= 4x \dots \\ \Rightarrow x &= 1 \text{ und } x = 4 \\ P_1 &= (1, -2) \quad P_2 = (4, 4) \end{aligned}$$

Zerlegung des Gebiets in Streifen parallel zur  $y$ -Achse

$$\int_D x d\mu = \int_0^1 \left( \int_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} x dy \right) dx + \int_1^4 \left( \int_{y=2x-4}^{2\sqrt{x}} x dy \right) dx = \dots = 14.4$$

Wenn wir Aussen nach  $y$  integrieren, brauchen wir keine Unterteilung

$$\begin{aligned} \int_D x d\mu &= \int_{y=-2}^{y=4} \left( \int_{x=\frac{y^2}{4}}^{\frac{y}{2}+2} x dx \right) dy \\ &= \int_{-2}^4 \left( \frac{x^2}{2} \Big|_{\frac{y^2}{4}}^{\frac{y}{2}+2} \right) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^4 \left( \left( \frac{y}{2} + 2 \right)^2 - \frac{y^2}{16} \right) dy \end{aligned}$$

### Bemerkung 9.13

1. Das Integral

$$A = \int_D 1 d\mu$$

ergibt die Fläche von  $D$ . Für einen Normal bereich bzg. der  $x$ -Achse erhalten wir daraus die bekannte Formel

$$A = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} 1 dy dx = \int_a^b (h(x) - g(x)) dx$$



2. Interpretiert man  $\rho(x, y)$  als ortabhängige Flächendichte, so erhält man mit

$$m = \int_D \rho(x, y) d\mu$$

die Masse von  $D$

**Definition 9.14**

Eine Teilmenge  $D \subset \mathbb{R}^3$  heisst Normalbereich, falls es eine Darstellung

$$D = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b; g(x) < y < h(x); \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y) \}$$

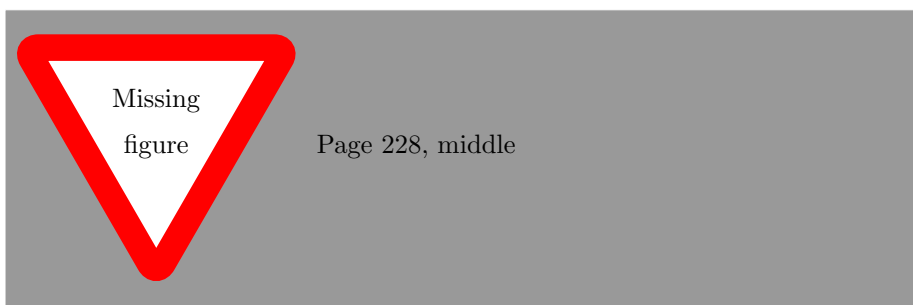
gibt.

(Vertauscht man die Rollen von  $x, y$  und  $z$  so entstehen weitere Mengen, die auch Normalbereiche genannt werden.)

**Satz 9.15**

Sei  $D \subset \mathbb{R}^3$  ein Normalbereich mit Darstellung wie oben, und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann gilt

$$\int_D f d\mu = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z) dz dy dx$$



$z = \varphi(x, y)$  und  $z = \psi(x, y)$  stellen die “Grund” und Deckelfläche von  $D$  dar.

Der Normalbereich  $A$  ist die Senkrechte Projektion von  $D$  in die  $x-y$  Ebene. Dessen “Grund” und “Deckelkurve” sind durch  $y = g(x)$  und  $y = h(x)$  gegeben.