

## Kapitel 3

# Folgen und Reihen (Der Limes Begriff)

### 3.1 Folgen, allgemeines

**Definition 3.1**

Eine Folge reeller Zahlen ist eine Abbildung  $a : \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  wobei wir das Bild von  $n \geq 1$  mit  $a_n$  (statt  $a(n)$ ) bezeichnen.

Eine Folge wird dann meistens mit  $(a_n)_{n \geq 1}$ , daher mit der geordneten Bildmenge bezeichnet.

Folgen können auf verschiedene Arten gegeben sein.

**Beispiel 3.2**

1.  $a_n = \frac{1}{n}, n \geq 1$
2.  $a_1 = 0.9, a_2 = 0.99, \dots, a_n = \underbrace{0.99 \dots 9}_{n\text{-mal}}$
3.  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, n \geq 1$
4. (Rekursiv) Sei  $d > 0$  eine reelle Zahl  $a_1, \dots, a_{n+1} := \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{d}{a_n}\right), n \geq 1$   
z.B.  $d = 2, a_1 = 1, a_2 = \frac{3}{2}, a_3 = \frac{17}{12}, a_4 = \dots$
5. Fibonacci Zahlen.  $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \forall n \geq 2$

**Definition 3.3**

Eine Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  heißt beschränkt falls die Teilmenge  $\{a_n : n \geq 1\} \subseteq \mathbb{R}$  beschränkt ist. d.h. Es gibt  $c \in \mathbb{R} (c \geq 0)$  so dass  $|a_n| \leq c, \forall n \geq 1$

## 3.2 Grenzwert oder Limes eine Folge. Ein zentraler Begriff

### Definition 3.4

Eine Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  konvergiert gegen  $a$  wann für jedes  $\varepsilon > 0$  ein Index  $N(\varepsilon) \geq 1$  gilt so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon, \forall n > N(\varepsilon)$$

### Definition 3.4 (Version 2)

Eine Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  konvergiert gegen  $a \in \mathbb{R}$  falls für jedes  $\varepsilon > 0$  die Menge der Indizes  $n \geq 1$  für welcher  $a_n \notin (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  endlich ist.

$$(\forall \varepsilon > 0, \#\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \notin (a - \varepsilon, a + \varepsilon)\} < \infty)$$

### Äquivalenz beider Definitionen

Is this supposed to be a title?

(2)  $\Rightarrow$  (1)

Sei für  $\varepsilon > 0$

$$M(\varepsilon) := \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \notin (a - \varepsilon, a + \varepsilon)\} = \{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - a| \geq \varepsilon\}$$

Da  $M(\varepsilon)$  endlich ist, ist es nach oben beschränkt. Es gibt also  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  so dass  $\forall n \in M(\varepsilon), n \leq N(\varepsilon) - 1$ . Insbesondere gilt  $\forall n \geq N(\varepsilon), n \notin M(\varepsilon)$  und daher  $|a_n - a| < \varepsilon$ .

(1)  $\Rightarrow$  (2)

$$M(\varepsilon) = \{n : |a_n - a| \geq \varepsilon\} \subset [0, N(\varepsilon) - 1]$$

Also endlich.

Falls die Eigenschaften in Definition 3.4 zutrifft, dann schreibt man

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ oder } a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a$$

Die Zahl  $a$  nennt sich Grenzwert oder Limes der Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$ . Eine Folge heisst konvergent falls sie einen Limes besitzt, andernfalls heisst sie divergent.

### Bemerkung 3.5

1. Falls  $(a_n)_{n \geq 1}$  konvergent ist der Limes eindeutig bestimmt

### Beweis

Seien  $a$  und  $b$  Grenzwerte von  $(a_n)_{n \geq 1}$ . Sei  $\varepsilon = \left| \frac{b-a}{3} \right| > 0$ , dann gibt es  $N_1, N_2$  so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N_1$$

### KAPITEL 3. FOLGEN UND REIHEN (DER LIMES BEGRIFF)

$$|a_n - b| < \varepsilon \quad \forall n > N_2$$

Also  $\forall n \geq \max\{N_1, N_2\}$

$$(a - b) \cong |(a - a_n) + (a_n - b)| < 2\varepsilon = \frac{2}{3} |b - a|$$

### Binomischen Lehrsatz

Für beliebige Zahlen  $a, b$  und  $n \in \mathbb{N}$  ist

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

2. Falls  $(a_n)_{n \geq 1}$  konvergent ist,  $\{a_n : n \geq 1\}$  beschränkt: Sei  $\varepsilon = 1$ ,  $\lim a_n = a$  und  $N_0$  mit

$$|a_n - a| \leq 1 \quad \forall n > N_0$$

Dann ist  $\forall n \quad |a_n| \geq \max\{|a| + 1, |a_j|, 1 \leq j \leq N_0\}$

### Beispiel 3.6

1. Sei  $a_n = \frac{1}{n}, n \geq 1$ . Dann gilt  $\lim a_n = 0$
- Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann  $\frac{1}{\varepsilon} > 0$ . Sei  $n_0 \in \mathbb{N}$ ,  $n_0 \geq 1$  mit  $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$  (Archimedische Eigenschaft, Satz 2.13)

Dann gilt für alle  $n \geq n_0$ ,  $\frac{1}{\varepsilon} < n_0 \leq n \Rightarrow \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon, \forall n \geq n_0$

2. Sei  $0 < q < 1$  und  $a_n := q^n$ ,  $n \geq 1$ . Dann gilt  $\lim a_n = 0$  ( $a_n$  konvergiert gegen 0)

Cannot read, page 54 top

### Beweis

Zu beweisen

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$$

Should it be  $\in \mathbb{R}??$

$$\forall n \geq N_0 : q^n < \varepsilon$$

Die Idee ist zu zeigen dass  $\frac{1}{q^n}$  sehr Gross wird und deswegen  $q^n$  sehr klein wird. Setzen wir  $\frac{1}{q} = 1 + \delta$  mit  $\delta > 0$  ( $1 < 1 \Rightarrow \frac{1}{q} > 1$ )

$$\frac{1}{q^n} = \left( \frac{1}{q} \right)^n = (1 + \delta)^n = 1 + n\delta + \binom{n}{2} \delta^2 + \dots + \delta^n \geq 1 + n\delta > n\delta, \forall n \in \mathbb{N}$$

also

$$0 < q^n < \frac{1}{n\delta}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Sei jetzt  $\varepsilon > 0$ , wähle  $N_0 = N_0(\varepsilon)$  mit  $\frac{1}{\varepsilon\delta} < N_0 \Rightarrow \frac{1}{N_0\delta} < \varepsilon$

$$\forall n > N_0 \quad 0 < q^n \leq \frac{1}{n\delta} < \frac{1}{N_0\delta} < \varepsilon$$

### KAPITEL 3. FOLGEN UND REIHEN (DER LIMES BEGRIFF)

3.  $\sqrt[n]{n}$ ,  $\lim a_n = 1$ . Klar:  $n \geq 1$  also  $\sqrt[n]{n} \geq 1$   
Gegeben ein  $\varepsilon > 0$ , wollen wir  $n$  so gross wählen, dass

$$\sqrt[n]{n} - 1 < \varepsilon$$

das heisst,  $n < (1 + \varepsilon)^n$ . Wir entwickeln

$$(1 + \varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \binom{n}{2} \varepsilon^2 + \dots + \varepsilon^n$$

can't read last element  
of the expansion

$\varepsilon$  ist klein aber fixiert.

Für  $n$  sehr gross wird  $1 + n\varepsilon$  nie grösser als  $n$  sein. Wir versuchen unsere Glück mit

$$\binom{n}{2} \varepsilon^2 \text{ term}$$

$$\binom{n}{2} \varepsilon^2 = \frac{n(n-1)}{2} \varepsilon$$

Wir benutzen also  $(1 + \varepsilon)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} \varepsilon^2$ . Wir wollen  $n$  so wählen dass

$$\frac{n(n-1)}{2} \varepsilon^2 > n$$

d.h.  $n - 1 > \frac{2}{\varepsilon^2}$  oder  $n > 1 + \frac{2}{\varepsilon^2}$

Setzen wir  $N_0 := \left(1 + \frac{2}{\varepsilon^2}\right) + 1$ . Dann gilt für  $\forall n > N_0$

$$(1 + \varepsilon)^n > n \geq 1$$

$$\Rightarrow 1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + \varepsilon$$

$$\Rightarrow -\varepsilon < 0 \leq \sqrt[n]{n} - 1 \leq \varepsilon \Rightarrow |\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon, \forall n > N_0$$

4. Nicht alle Folgen sind konvergent. Es gibt zwei verschiedene Verhältnissen einer divergenten Folge

$$a_n = (-1)^n \Rightarrow \{1, -1, \dots\} \text{ beschränkt aber nicht konvergent}$$

5.  $a_n = n$  unbeschränkt, divergent.

#### Beispiel 3.7

Seien  $p \in \mathbb{N}$ ,  $0 < q < 1$ . Dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p q^n = 0$ . Dass heisst Exponentialfunktion wächst schneller als jede Potenz (Wann  $x$  genügend Gross ist,  $a^x > x^b$ )

**Beweis**

Der Trick ist folgender

$$n^p q^n = \left( n^{\frac{p}{n}} \cdot q \right)^n = \left( (\sqrt[n]{n})^p \left( q^{\frac{1}{p}} \right)^p \right)^n$$

Wir werden Beispiel 3.6 (2.), (3.) benutzen.

(d.h.  $\lim \sqrt[n]{n} = 1$        $\lim r^n = 0, 0 < r < 1$ )

Da  $\lim \sqrt[n]{n} = 1, \forall \eta > 0, \exists N_0(\eta)$

$$\sqrt[n]{n} < 1 + \eta, n > N_0(\eta)$$

Wir wählen  $\eta > 0$  so dass  $q^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{(1+\eta)^2}$ . Dann

$$\sqrt[n]{n} \cdot q^{\frac{1}{p}} \leq \frac{(1+\eta)}{(1+\eta)^2} = \frac{1}{1+\eta} \quad \forall n > N_0(\eta)$$

Wobei

$$\forall n > N_0(\eta)$$

$$a_n = \left( \sqrt[n]{n} q^{\frac{1}{p}} \right)^{pn} < r^n$$

mit

$$r := \left( \frac{1}{1+\eta} \right)^p, r < 1$$

Sei jetzt  $\varepsilon > 0$ . Da  $\lim r^n = 0, \exists N_1 = N_1(\varepsilon), \forall n > N_1(\varepsilon), r^n < \varepsilon$

Für  $n > \max\{N_0(\eta), N_1(\varepsilon)\}, a_n < r^n < \varepsilon \Rightarrow \lim a_n = \lim n^p q^n = 0$

### 3.3 Konvergenzkriterien

Mit konvergenten Folgen kann man wie folgender Satz zeigt.

Can't read, page 59 top

**Satz 3.8**

Seien