

# Kapitel 8

## Differentialrechnung in $\mathbb{R}^n$

### 8.1 Partielle Ableitungen und Differential

Wie kann man die Begriffe der Differentialrechnung auf Funktionen  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  erweitern?

Missing content?? pag  
113 top

Funktionen in mehreren Variablen sind ein bisschen komplizierter als Funktionen in einer Variable.

#### Beispiel

1.  $f(x) = x^2 + 5$  ist im Ursprung stetig, da  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ . Aber  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ist im Ursprung nicht stetig.

Where is number 2 of  
the beispiel??

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = 0}} \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2} = 0 = f(0, 0)$$

$$\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ x = 0}} \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2} = 0 = f(0, 0)$$

is this continuation of  
the Beispiel, or is it  
outside??

Aber der Limes entlang der Gerade  $y = mx$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ y = mx}} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2}{(1 + m^2)x^2} = \frac{m}{1 + m^2}$$

$\downarrow$   
Hängt von  $m$  ab

und  $\frac{m}{1+m^2} \neq 0$ , falls  $m \neq 0$ . Eine Funktion  $f(x, y)$  an der Stelle  $(x_0, y_0)$  ist stetig wenn der Limes  $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$  in jeder Richtung den gleichen Wert hat.

**Definition 8.1**

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \Omega$

1.  $f$  hat den Grenzwert  $c \in \mathbb{R}$ , d.h.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$$

wenn es zu jeder (beliebig kleinen) Schranke  $\varepsilon > 0$ , eine  $\delta$ -umgebung

$$B_\delta(a) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - a| < \delta\}$$

gibt, so dass  $|f(x) - c| < \varepsilon$  für alle  $x \in \Omega \cap B_\delta(a)$ ,  $x \neq a$  gilt.

2.  $f$  heisst in  $a \in \Omega$  stetig, wenn  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  gilt.

3.  $f$  heisst in  $\Omega$  stetig, wenn  $f$  in allen  $a \in \Omega$  stetig ist.

Die Summe, das Produkt, der Quotient (Nenner ungleich Null) stetiger Funktion sind stetig.

$f$  besitzt keinen Grenzwert in  $x_0$  wenn sich bei Annäherungen an  $x_0$  auf verschiedenen Kurven (z.b. Geraden) verschiedene Grenzwerte bzw. keinen Grenzwert ergeben bzw. ergibt.

**Sandwichlemma**

Seien  $f, g, h$  Funktionen, wobei  $g < f < h$ . Wenn  $\lim_{x \rightarrow a} g = L = \lim_{x \rightarrow a} h$  gilt, dann ergibt  $\lim_{x \rightarrow a} f = L$ .

Da  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |y| = 0$  gilt,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 \Rightarrow f$  ist in  $(0,0)$  stetig.

**Oder**

Für Grenzwertbestimmungen (also auch für Stetigkeitsuntersuchungen) ist es oft nützlich, die Funktionen mittels Polarkoordinaten umzuschreiben. Vor allem bei rationalen Funktionen.

Hierbei gilt  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , wobei  $r$  = Länge des Vektors  $(x, y)$  und  $\varphi$  der Winkel. Nun lassen wir die Länge  $r$  gegen 0 gehen.

**Beispiel**

1. Die Funktionen

- $f(x, y) = x^2 + y^2$
- $f(x, y, z) = x^3 + \frac{x^2}{y^2+1} + z$
- $f(x, y) = 4x^2y^3 + 3xy$
- $f(x, y) = \cos xy$

sind stetig, da sie aus stetigen Funktionen zusammengesetzt sind.

2.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Für  $(x, y) \neq (0, 0)$  ist  $f$  als Quotient von stetigen Funktionen stetig. Es verbleibt  $f$  im Punkt  $(0, 0)$  zu untersuchen. Da

$$\left| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right| \leq 1$$

$$0 < |f(x, y)| < |y|$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \frac{(r^2 \cos^2 \theta) (r \sin \theta)}{r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = r \cos^2 \theta \sin \theta$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(r, \theta) = \lim_{r \rightarrow 0} r \cos^2 \theta \sin \theta = 0$$

3. Wir können nochmals die Stetigkeit der Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

mittels Polarkoordinaten untersuchen

$$f(x, y) = \frac{r^2 \cos \theta \sin \theta}{r^2} = \cos \theta \sin \theta$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(x, y) = \cos \theta \sin \theta$$

hängt von  $\theta$  ab.

$\Rightarrow f$  in  $(0, 0)$  nicht stetig

### Bemerkung

Eine trickreiche Variante Grenzwerte zu berechnen, ergibt sich durch Substitution, d.h. man berechnet den Grenzwert

is this supposed to be inside the list or out??

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(g(x, y))$$

indem man zunächst  $t = g(x, y)$  setzt und den Grenzwert

$$t_0 = \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} g(x, y)$$

bestimmt. Dann ist

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(g(x, y)) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t)$$

**Beispiel**

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (4,0)} \frac{\sin xy}{xy}$$

Hier ist  $g(x, y) = xy$ ,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (4,0)} g(x, y) = 0$ . Somit

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (4,0)} \frac{\sin xy}{xy} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

Wir werden auch sehen, dass die Existenz der Ableitungen in einigen Richtungen ungenügend für die Differenzierbarkeit der Funktion ist.

**Was bedeutet die Ableitung in einigen Richtungen?****Beispiel**

Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto (x^2 + xy) \cos(xy)$$

Man kann für jedes  $y$ , die Funktion

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (x^2 + xy) (\cos xy)$$

als Funktion einer Variablen  $x$  auffassen und die Ableitung davon berechnen. Das Resultat wird mit  $\frac{\partial f}{\partial x}$  bezeichnet und ist die erste partielle Ableitung von  $f$  nach  $x$ . In diesem Fall ist es durch

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (2x + y)(\cos xy) - (x^2 + xy)y \sin(xy)$$

gegeben.

Analog definiert man  $\frac{\partial f}{\partial y}$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x(\cos xy) - (x^2 + xy)x \sin(xy)$$

Die allgemeine Definition nimmt folgende Gestalt an. Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . In Zukunft bezeichnen wir die  $i$ -te Koordinate eines Vektors  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $x^i$ ; also ist  $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ .

Sei  $e_i := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  der  $i$ -te Basisvektor von  $\mathbb{R}^n$

**Definition 8.2**

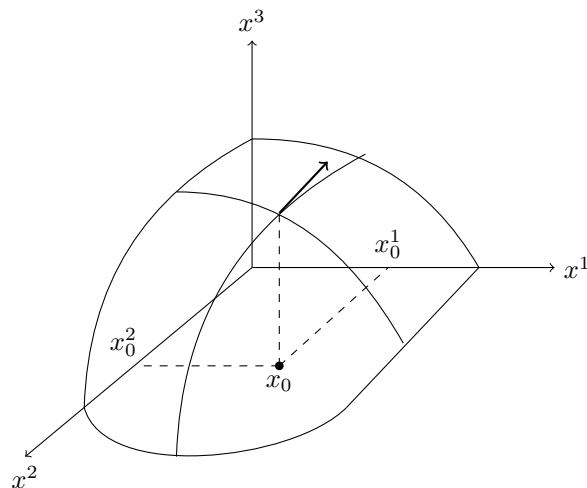
Die Funktion  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  heißt an der Stelle  $x_0 \in \Omega$  in Richtung  $e_i$  (oder nach  $x^i$ ) partiell differenzierbar, falls der Limes

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) = f_{x^i}(x_0) := - \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_0 + he_i) - f(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^i + h, x_0^{i+1}, \dots, x_0^n) - f(x_0^1, \dots, x_0^n)}{h}$$

existiert

### Bemerkung 8.3



Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x_0^1, x_0^2) \in \mathbb{R}^2$ . Wir betrachten die Scharen von  $f$

$$f(\cdot, x_0^2) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

und

$$f(x_0^1, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$\frac{\partial f}{\partial x^1}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x^2}$  sind die zu dem Anstieg der Tangente entsprechenden Schnittkurven.

### Beispiel

1.  $f(x, y, z) = \cos yz + \sin xy$

- $\frac{\partial f}{\partial x} = y \cos xy$
- $\frac{\partial f}{\partial y} = -\sin(yz) \cdot z + \cos(xy) \cdot x$
- $\frac{\partial f}{\partial z} = -\sin(yz) \cdot y$

2.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^3 \cdot 0}{h^2} - 0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h \cdot 0^3}{0+h^2} - 0}{h} = 0$$

**Bemerkung**

Für Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  einer Variable impliziert die Differenzierbarkeit in  $x_0$ , die Stetigkeit in  $x_0$  und zudem eine gute Approximation von  $f$  durch eine affine Funktion in einer Umgebung von  $x_0$ . Folgendes Beispiel zeigt, dass in  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ) partielle Differenzierbarkeit keine analoge Approximationseigenschaften oder Stetigkeit impliziert:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Für alle  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  ist  $f$  in beiden Richtungen partiell differenzierbar:

- Für  $(x_0, y_0) \neq (0,0)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &= \left. \frac{y(x^2 + y^2) - 2x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} \right|_{(x,y)=(x_0,y_0)} = \frac{y_0^3 - x_0^2 y_0}{(x_0^2 + y_0^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &= \left. \frac{x(x^2 + y^2) - 2xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \right|_{(x,y)=(x_0,y_0)} = \frac{x^2 - xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

- Für  $(x_0, y_0) = (0,0)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overbrace{f(0+h,0) - f(0,0)}^{f(x_0+he_1) - f(x_0)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overbrace{f(0,0+h) - f(0,0)}^{f(x_0+he_2) - f(x_0)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0 \end{aligned}$$

Im Ursprung besitzt  $f$  beide partielle Ableitungen, sie ist aber nicht stetig. Der Grund ist, dass die partielle Ableitungen nur partielle Informationen geben. Wir müssen die Differenzierbarkeit in irgendeiner anderen Weise verallgemeinern.

Die Lösung dieses Problem ist, dass man eine Approximationseigenschaft durch eine lineare Abbildung postuliert.

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $x_0$ ;  $f'(x_0)$  existiert. In diesem Fall kann  $f$  für alle  $x$  nahe  $x_0$  durch die Funktion  $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  gut approximiert werden. Das heisst, dass

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x, x_0) \quad \text{mit} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x, x_0)}{x - x_0} = 0$$

**Bemerkung**

$f'(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}'$  sollte als lineare Abbildung interpretiert werden

## Lineare Abbildungen

Eine Abbildung  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ist linear, falls für alle  $x, y \in \mathbb{R}^n$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$$

Eine solche Abbildung ist durch ihre Werte

$$A(e_i) := A_1, A(e_2) := A_2, \dots, A(e_n) := A_n$$

auf der Standardbasis  $e_1, \dots, e_n$  eindeutig bestimmt. Aus  $x = \sum_{i=1}^n x^i e_i$  und der Linearität folgt nämlich

$$(*) \quad A(x) = \sum_{i=1}^n x^i A(e_i) = \sum_{i=1}^n A_i x^i$$

Umgekehrt bestimmt ein Vektor  $(A_1, \dots, A_n)$  mittels der Formel  $(*)$  eine lineare Abbildung.

Schreiben wir  $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$  für einen Vektor  $x = (x^i)_{1 \leq i \leq n}$  und

$A = (A_1, \dots, A_n)$  für die Darstellung einer linearen Abbildung  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  bezüglich die Standard Basis  $\{e_1, \dots, e_n\}$  so ist

$$A(x) = (A_1, \dots, A_n) \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \sum A_i x^i$$

### Definition 8.4

Die Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heisst an der Stelle  $x_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$  differenzierbar, falls es eine lineare Abbildung  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, so dass

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + R(x_0, x)$$

wobei  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x, x_0)}{|x - x_0|} = 0$

In diesem Fall heisst  $A$  das Differential an der Stelle  $x_0$  und wird mit  $df_{x_0}$  bezeichnet, d.h.  $f$  ist total differenzierbar in  $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$ , falls reelle Zahlen  $A_1, \dots, A_n$  existieren, so dass gilt

$$f(x) = f(x_0) + A_1(x^1 - x_0^1) + A_2(x^2 - x_0^2) + \dots + A_n(x^n - x_0^n) + R(x, x_0)$$

mit  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x, x_0)}{|x - x_0|} = 0$

**Bemerkung: Geometrische Interpretation**

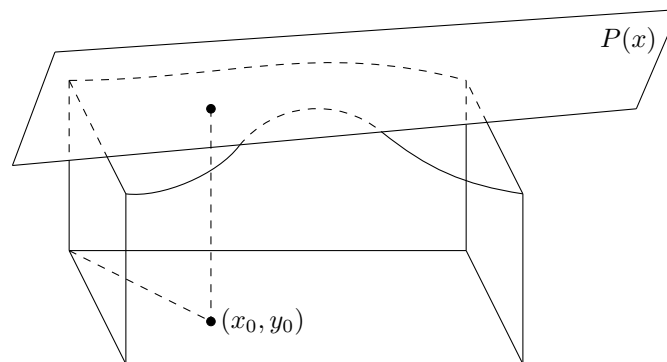
Sei  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega \in \mathbb{R}^2$ . Wir können die differenzierbare Funktion nahe dem Punkt  $x_0 = (x_0^1, x_0^2)$  mit Hilfe der linearen Funktion

$$P(x) = P(x^1, x^2) = f(x_0^1, x_0^2) + \underbrace{A_1(x^1 - x_0^1) + A_2(x^2 - x_0^2)}_{d_{x_0} f(x - x_0)}$$

approximieren.

n't understand what  
comes after the formula,  
see 126.1 middle

Die Differenz  $\underbrace{f(x) - P(x)}_{d_{x_0} f(x - x_0)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$  ist eine Ebene. Die ist die Tangentialebene zu  $f$  an der Stelle  $x_0$  und spielt die Rolle der Tangente für Funktionen in einer Variable.


**Beispiel 8.5**

- a) Jede affin lineare Funktion  $f(x) = Ax + b$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , wobei  $a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  linear,  $b \in \mathbb{R}$  ist an jeder Stelle  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  differenzierbar, mit  $df_{x_0} = A$  unabhängig von  $x_0$ , da

$$f(x) - f(x_0) - A(x - x_0) = 0 \quad \forall x, x_0 \in \mathbb{R}^n$$

- b) Koordinatenfunktionen  $x^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x^1, x^2, \dots, x^n) \rightarrow x^i$ ,  $x^i(x) = x^i$ . Dann ist  $x^i$  differenzierbar an jeder Stelle  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  mit

$$dx^i|_{x=x_0} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

die Differentiale  $dx^1, dx^2, \dots, dx^n$  bilden also an jeder Stelle  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  eine Basis des Raumes  $L(\mathbb{R}^n : \mathbb{R}) := \{A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; A \text{ linear}\}$ , wobei wir  $A \in L(\mathbb{R}^n : \mathbb{R})$  mit der Darstellung  $A = (A_1, \dots, A_n)$  bzgl. der Standardbasis  $\{e_1, \dots, e_n\}$  der  $\mathbb{R}^n$  identifizieren, und mit  $A_i = A(e_i)$

$$dx^i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \\ (dx^i(e_1), dx^i(e_2), \dots, dx^i(e_n))$$

Da  $dx^i(e_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$  gilt, ist  $(dx^i)_{1 \leq i \leq n}$  die duale Basis von  $L(\mathbb{R}^n : \mathbb{R})$  zur Standardbasis  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  des  $\mathbb{R}^n$ .



c) Jedes  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \in C^1(\mathbb{R})$  besitzt das Differential

$$df(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) dx = f'(x_0) dx$$

d.h.  $f'(x_0)$  ist die Darstellung von  $df(x_0)$  bezüglich der Basis  $dx$  von  $L(\mathbb{R} : \mathbb{R})$

d)  $f(x, y) = xe^y, \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ist an jeder Stelle  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned} df(x_0, y_0) &= \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) = (e^{y_0}, xe^{y_0}) \\ f(x, y) - f(x_0, y_0) &= \underbrace{f(x, y) - f(x_0, y)}_{\searrow} + f(x_0, y) - f(x_0, y_0) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \eta)(y - y_0) \end{aligned}$$

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung, mit geeigneten Zwischenstellen  $\xi = \xi(y)$  und  $\eta$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + R(x, y)$$

mit

$$\begin{aligned} R(x, y) &= \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right] (x - x_0) \\ &\quad + \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \eta) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right] (y - y_0) \end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit der Funktionen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^y \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xe^y$$

können wir den "Fehler"  $R(x, y)$  leicht abschätzen

$$\frac{|R(x, y)|}{|(x, y) - (x_0, y_0)|} \leq \sup_{\substack{|\xi - x_0| < |x - x_0| \\ |\eta - y_0| < |y - y_0|}} (|e^y - e^{y_0}| + |x_0||e^\eta - e^{y_0}|)$$

Für  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0), (x, y) \neq (x_0, y_0)$ : d.h. es gilt

$$\frac{R(x, y)}{|(x, y) - (x_0, y_0)|} \rightarrow 0$$

d.h. es gilt

$$\frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)}{|(x, y) - (x_0, y_0)|} \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} 0$$

d.h.  $f(x, y)$  ist differenzierbar und

$$df(x_0, y_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

can't read, page 130  
bottom

e) Die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ist in  $(0, 0)$  differenzierbar.

Wir haben schon gesehen, dass  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$  und  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{|R|}{|(x, y)|} &= \frac{\left| f(x, y) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)(x - 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)(y - 0) \right|}{|(x - 0, y - 0)|} \\ &= \frac{|f(x, y) - 0 - 0 - 0|}{|(x, y)|} = \frac{|f(x, y)|}{|(x, y)|} \end{aligned}$$

Zu untersuchen ist

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{|R((x, y), (0, 0))|}{|(x, y) - (0, 0)|} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{|f(x, y)|}{|(x, y)|}$$

Mittels Polarkoordinaten ist dies noch offensichtlicher

$$\begin{aligned} \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{|f(x, y)|}{x^2 + y^2} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^4 \cos^3 \theta \sin \theta}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} r^2 \cos^3 \theta \sin \theta = 0 \\ &\Rightarrow f \text{ in } (0, 0) \text{ differenzierbar} \end{aligned}$$

Gibt es eine Beziehung zwischen dem Differential und den partiellen Ableitungen?

### Bemerkung 8.6

Sei  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  differenzierbar an der Stelle  $x_0 \in \Omega$ . Dann existieren die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)$ ,  $i = 1, \dots, n$  und das Differential kann als

$$d_{x_0} f = \left( \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0) \right)$$

dargestellt werden.

### Beweis

Sei  $f$  an der Stelle  $x_0$  differenzierbar

$$\Rightarrow f(x_0 + he_i) = f(x_0) + (d_{x_0} f)(he_i) + R(x_0 + he_i, x_0)$$

wobei

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(x_0 + he_i, x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + he_i) - f(x_0) - (d_{x_0} f)(he_i)}{h} = 0 \\ &\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + he_i) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{hd_{x_0} f(e_i)}{h} = d_{x_0} f(e_i) \end{aligned}$$

d.h.  $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)$  existiert und  $= d_{x_0} f(e_i)$ .

Da  $(dx^i)_{i=1, \dots, n}$  die zur  $(e_j)_{1 \leq j \leq n}$  duale Basis ist

$$d_{x_0} f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) dx^i = \left( \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0) \right)$$

### Beispiel

Die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ist in  $(0, 0)$  nicht differenzierbar ( $f$  ist in  $(0, 0)$  nicht stetig)

### Satz 8.7

Falls  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}$  differenzierbar ist, ist sie in  $x_0$  auch stetig.

### Beweis

Folgt aus der Definition

#### Definition 8.8

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heisst von der Klasse  $C'$ , ( $f \in C'(\Omega)$ ), falls  $f$  an jeder Stelle  $x_0 \in \Omega$  und in jede Richtung  $e_i$  partiell differenzierbar ist und die Funktionen  $x \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x^i}(x)$  für jedes  $1 \leq i \leq n$  auf  $\Omega$  stetig sind.

### Satz 8.9

Sei  $f \in C'(\Omega)$ . Dann ist  $f$  an jeder Stelle  $x_0 \in \Omega$  differenzierbar.

### Beweis

Für  $n = 3$  seien  $x = (x^1, x^2, x^3)$ ,  $x_0 = (x_0^1, x_0^2, x_0^3)$ . Dann ist

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \{f(x^1, x^2, x^3) - f(x^1, x^2, x_0^3)\} \\ &\quad + \{f(x^1, x^2, x_0^3) - f(x^1, x_0^2, x_0^3)\} \\ &\quad + \{f(x^1, x_0^2, x_0^3) - f(x_0^1, x_0^2, x_0^3)\} \end{aligned}$$

Nach dem MWS der DR gilt:

$$f(x^1, x_0^2, x_0^3) - f(x_0^1, x_0^2, x_0^3) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(\xi^1, x_0^2, x_0^3)(x^1 - x_0^1)$$

wobei  $\xi^1$  zwischen  $x_0^1$  und  $x^1$ . Analog:

$$f(x^1, x^2, x_0^3) - f(x^1, x_0^2, x_0^3) = \frac{\partial f}{\partial x^2}(x^1, \xi^2, x_0^3)(x^2 - x_0^2)$$

wobei  $\xi^2 \in (x_0^2, x^2)$  und

$$f(x^1, x^2, x^3) - f(x^1, x^2, x_0^3) = \frac{\partial f}{\partial x^3}(x^1, x^2, \xi^3)(x^3 - x_0^3)$$

Eingesetzt in den Ausdruck für  $f(x) - f(x_0)$  ergibt:

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \frac{\partial f}{\partial x^1}(\xi^1, x_0^2, x_0^3)(x^1 - x_0^1) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial x^2}(x^1, \xi^2, x_0^3)(x^2 - x_0^2) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial x^3}(x^1, x^2, \xi^3)(x^3 - x_0^3) \end{aligned}$$

Also

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1, x_0^2, x_0^3)(x^i - x_0^i) + R(x_0, x)$$

Wobei

$$\begin{aligned} R(x_0, x) &= \left( \frac{\partial f}{\partial x^1}(\xi^1, x_0^2, x_0^3) - \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \right) (x^1 - x_0^1) \\ &\quad + \left( \frac{\partial f}{\partial x^2}(x^1, \xi^2, x_0^3) - \frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \right) (x^2 - x_0^2) \\ &\quad + \left( \frac{\partial f}{\partial x^3}(x^1, x^2, \xi^3) - \frac{\partial f}{\partial x^3}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \right) (x^3 - x_0^3) \end{aligned}$$

Also

$$|R(x, x_0)| < |x - x_0| \underbrace{\{|\dots| + |\dots| + |\dots|\}}_{\substack{\rightarrow 0 \text{ mit } x \rightarrow x_0 \\ \text{weil } \frac{\partial f}{\partial x^i} \text{ stetig sind}}}$$

Also ist  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x, x_0)}{|x - x_0|} = 0$  und  $f(x)$  ist differenzierbar.

### Beispiel 8.10

Polynome auf  $\mathbb{R}^n$  sind von der Klasse  $C^\infty$ . Für jeden Multiindex  $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  definieren wir die Monomialfunktion

$$x^\alpha := (x^0)^{\alpha_0} (x^1)^{\alpha_1} \dots (x^n)^{\alpha_n}$$

Ein Polynom von Grad  $\leq N$  ist dann gegeben durch

$$p(x) = \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha x^\alpha$$

wobei  $|\alpha| = \alpha_0 + \dots + \alpha_n$

Pages 135.1 - 135.2 are a zusammenfassung, not sure if needed to be included

## 8.2 Differentiationsregeln

Ganz analog zum eindimensionalen Fall gelten folgende Differentiationsregeln

**Satz 8.11**

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , sowie  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  an der Stelle  $x_0 \in \Omega$  differenzierbar. Dann gilt

1.  $d(f + g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0)$
2.  $d(fg)(x_0) = g(x_0)df(x_0) + f(x_0)dg(x_0)$
3. Falls  $g(x_0) \neq 0$

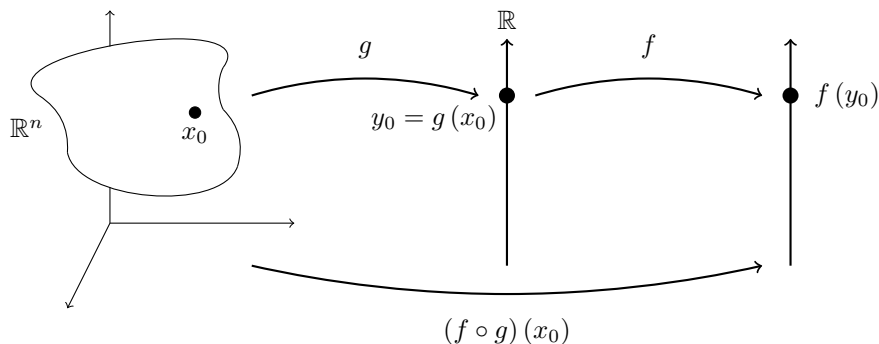
$$d\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \frac{g(x_0)df(x_0) - f(x_0)dg(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

Beweis ist der Selbe wie im eindimensionalen Fall. Für die Kettenregel gibt es mehrere Variationen

**Satz 8.12 (Kettenregel, 1. Version)**

Sei  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$  differenzierbar, sowie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  an der Stelle  $g(x_0) \in \mathbb{R}$  differenzierbar. Dann gilt

$$d(f \circ g)(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot dg(x_0)$$


**Beweis**

Sei  $g$  an der Stelle  $x_0$  differenzierbar

$$\Rightarrow g(x) - g(x_0) \stackrel{A}{=} dg(x_0)(x - x_0) + R_g(x - x_0)$$

mit

$$\frac{R_g(x - x_0)}{(x - x_0)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \Rightarrow \frac{g(x) - g(x_0)}{|x - x_0|} \stackrel{B}{\leq} C = \max \left[ \frac{\partial g}{\partial x^i}(x_0) \right]$$

$f$  in  $g(x_0)$  differenzierbar

$$f(g(x)) - f(g(x_0)) \stackrel{C}{=} f'(g(x_0)) [g(x) - g(x_0)] + R_f(g(x), g(x_0))$$

Woraus folgt:

$$\begin{aligned} f(g(x)) - f(g(x_0)) &= f'(g(x_0)) [dg(x_0)(x - x_0) + R_g(x, x_0)] \\ &\quad + R_f(g(x_0), g(x)) \end{aligned}$$

Aus B folgt:

$$\frac{R_f(g(x_0), g(x))}{x - x_0} = \underbrace{\frac{R_f(g(x_0) - g(x))}{|g(x) - g(x_0)|}}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \cdot \underbrace{\frac{|g(x) - g(x_0)|}{|x - x_0|}}_{\substack{\stackrel{B}{\leq} C}} \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{\substack{\downarrow \\ 0}}$$

d.h.

$$f(g(x)) - f(g(x_0)) = (f'(g(x_0)) \cdot dg(x_0))(x - x_0) + R_{f \circ g}(x, x_0)$$

wobei

$$R_{f \circ g}(x, x_0) = f'(g(x_0)) R_g(x, x_0) + R_f(g(x_0), g(x))$$

und

$$\frac{R_{f \circ g}(x, x_0)}{x - x_0} = \underbrace{f'(g(x_0)) \frac{R_g(x, x_0)}{(x - x_0)}}_{\downarrow 0} + \underbrace{\frac{R_f(g(x_0), g(x))}{x - x_0}}_{\downarrow 0}$$

### Beispiel 8.13

Sei  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$h(x, y) = e^{xy}$$

$h = f \circ g$  wobei  $g(x, y) = xy$ ,  $f(t) = e^t$ . Dann ist einerseits

$$dh(x, y) = \left( \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} \right) = (ye^{xy}, xe^{xy})$$

andererseits nach Kettenregel

$$dh(x, y) = d(f \circ g)' = f'(g(x, y)) \cdot dg(x, y) = e^{xy} \cdot (y, x) = (ye^{xy}, xe^{xy})$$

Für die nächste Kettenregel führen wir folgende Definition ein:

#### Definition 8.14

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}$  und  $f = (f_1, \dots, f_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Abbildung. Dann ist  $f$  an der Stelle  $x_0 \in \mathbb{R}$  differenzierbar, falls jede Komponentenfunktion  $f_i$  an der Stelle  $x_0$  differenzierbar ist. Wir definieren in diesem Fall

$$f'(x_0) := (f_1'(x_0), f_2'(x_0), \dots, f_n'(x_0))$$

### Bemerkung 8.15

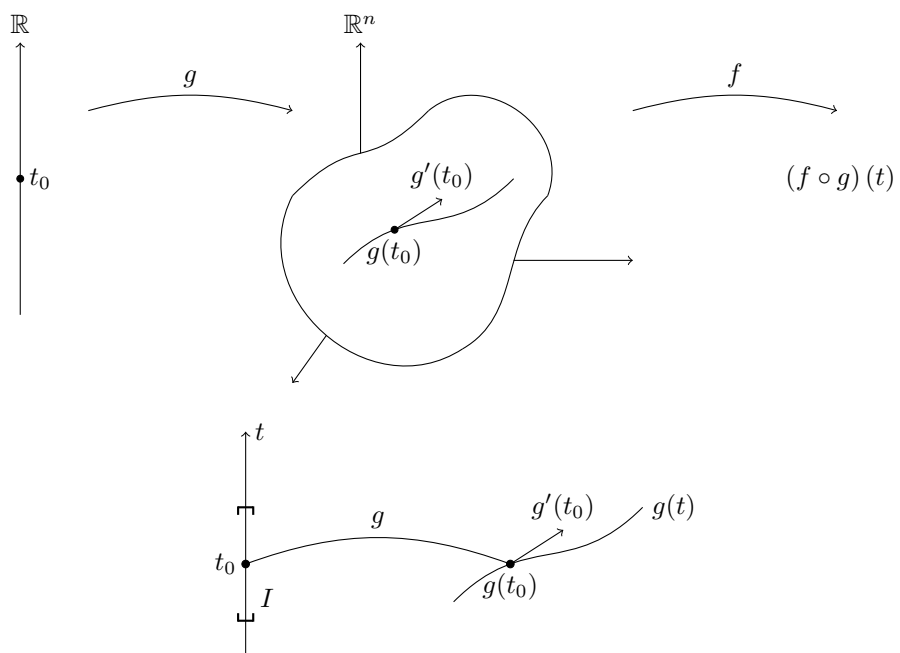
$f'(x_0)$  kann als Geschwindigkeitsvektor im Punkt  $f(x_0)$  aufgefasst werden.

**Satz 8.16 (Kettenregel, 2. Version)**

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n, I \subset \mathbb{R}$ . Sei  $g : I \rightarrow \Omega, t \mapsto (g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t))$ , an der Stelle  $t_0 \in I$  differenzierbar sowie  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  an der Stelle  $g(t_0)$  differenzierbar. Dann gilt:

$$\frac{d}{dt}(f \circ g)(t_0) = df(g(t_0)) \cdot g'(t_0)$$

$$\begin{aligned} d(f \circ g)(t_0) &= df(g(t_0)) \cdot dg(t_0) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^1}(g(t_0)) \cdot \frac{dg_1}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial x^2}(g(t_0)) \cdot \frac{dg_2}{dt}(t_0) \\ &\quad + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(g(t_0)) \cdot \frac{dg_n}{dt}(t_0) \end{aligned}$$


**Beispiel 8.17**

Die vier Grundrechenarten sind differenzierbare Funktionen von zwei Variablen. Insbesondere gilt:

- $a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x + y$

$$da(x, y) = \left( \frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial a}{\partial y} \right) = (1, 1)$$

- $m : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x \cdot y$

$$dm(x, y) = (y, x)$$

Setzt man diese beiden Funktionen in die obige Kettenregel ein, so erhält man die aus Analysis I bekannte Summen- und Produktregel:

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \rightarrow (g_1(t), g_2(t))$$

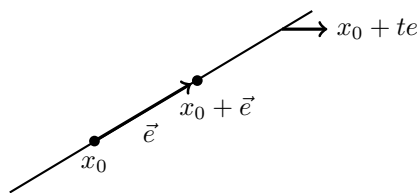
$$\frac{d}{dt}(g_1 + g_2) = \frac{d}{dt}(a \circ g) = (1, 1) \cdot \left( \frac{dg_1}{dt}, \frac{dg_2}{dt} \right) = 1 \cdot \frac{dg_1}{dt} + 1 \cdot \frac{dg_2}{dt}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(g_1 \cdot g_2) &= \frac{d}{dt}(m \circ g) = ((dm)(g(t))) \cdot \left( \frac{dg}{dt} \right) \\ &= (g_2(t), g_1(t)) \cdot \left( \frac{dg_1}{dt}, \frac{dg_2}{dt} \right) \\ &= \frac{dg_1}{dt} \cdot g_2(t) + \frac{dg_2}{dt} \cdot g_1(t) \end{aligned}$$

### Beispiel 8.18

Sei  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar an der Stelle  $x_0 \in \Omega$  und sei  $e \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ; mit  $|e| = 1$ . Betrachte die Gerade  $g(t) = x_0 + te$ ,  $t \in \mathbb{R}$  durch  $x_0$  mit Richtungsvektor



$$\frac{dg}{dt}(t_0) = e \quad \forall t_0 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\rightarrow x_0 + te \end{aligned}$$

Dann ist die Funktion  $f \circ g$  in einer Umgebung von  $t_0 = 0$  definiert und nach Kettenregel  $f \circ g$  an der Stelle  $t_0 = 0$  differenzierbar mit

$$\frac{d}{dt}(f \circ g)(0) = df(g(0)) \frac{dg}{dt}(0) = df(x_0)(e) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) \cdot e^i$$

$e = (e^1, \dots, e^n)$  und wird Richtungsableitung von  $f$  in Richtung  $e$  genannt;  $\partial_e f(x_0)$  bezeichnet. Insbesondere gilt für  $e = e_i$

$$\partial_{e_i} f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) = df(x_0)(e_i)$$

Geometrisch ist die Richtungsableitung von  $f$  in Richtung  $e$  genau die Steigung der Tangente zur Schnittkurve, falls wir den Graph von  $f$  mit einer zur  $xy$ -Ebene senkrechten Ebene durch  $x_0 + te$  schneiden.





page 144, middle. STARTED; CAN'T FULLY UNDERSTAND THE DRAWING DUE TO LINES BEING FADED ON THE PDF

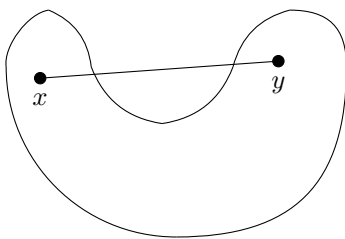
Um den Mittelwertsatz der DR zu verallgemeinern, benützen wir folgende Begriffe:

**Definition 8.19**

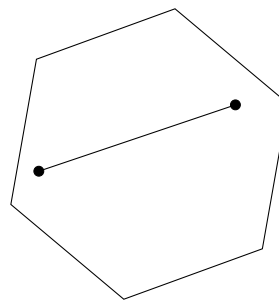
Eine Menge  $K \subset \mathbb{R}^n$  ist genau dann konvex, falls für jedes Paar von Punkten  $x, y \in K$  die Menge  $K$  auch das Segment

$$(1-t)x + ty \quad t \in [0, y]$$

mit Endpunkten  $x, y$  enthält



Nicht Konvex



Konvex

**Satz 8.20**

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  konvex  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar,  $x_0, x_1 \in \Omega$  sowie  $x_t := (1-t)x_0 + tx_1$ . Dann gibt es  $\vartheta \in [0, 1]$  mit

$$f(x_1) - f(x_0) = df(x_{\vartheta})(x_1 - x_0)$$

is it  $tx_1$  or  $tx$ , ?? page 145 middle

**Beweis**

Sei  $g(t) = (1-t)x_0 + tx_1 = x_t$ . Dann ist  $t \rightarrow (f \circ g)(t)$  auf  $[0, 1]$  stetig und in  $(0, 1)$  differenzierbar. Also gibt es  $\vartheta \in (0, 1)$  mit (nach MWS der DR einer Variable)

$$f(x_1) - f(x_0) = (f \circ g)(1) - (f \circ g)(0) = (f \circ g)'(\vartheta)(1 - 0)$$

Nun ist

$$(f \circ g)'(\vartheta) = df\left(g(\vartheta) \cdot \frac{dg}{dt}(\vartheta)\right)$$

the formula done or  
es it continue on a  
w line, page 146 top

Die Kettenregel wird auch angewandt um Integrale mit Parametern zu studieren. Ein Beispiel davon ist:

### Beispiel

Sei  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(s, t) \rightarrow h(s, t)$ . Wir nehmen an,  $h$  ist stetig,  $\frac{\partial h}{\partial t}$  existiert und ist auf ganz  $\mathbb{R}^2$  stetig. Sei

$$u(t) = \int_a^{b(t)} h(s, t) ds, \quad b(t) \in C'(\mathbb{R}), \quad a \in \mathbb{R}$$

it  $C'$  or  $C'^{??}$  page  
6 middle; limenet: it  
 $C^1$

### Satz 8.21

Sei  $h(s, t)$  eine stetige differenzierbare Funktion von zwei Variablen und  $b(t)$  differenzierbare Funktion einer Variable. Dann ist die Funktion

$$u(t) := \int_a^{b(t)} h(s, t) ds$$

wo definiert, differenzierbar mit der Ableitung

$$u'(t) := h(b(t), t) \cdot b'(t) + \int_a^{b(t)} \frac{\partial h}{\partial t}(s, t) ds$$

### Korollar 8.22

Sei  $h = h(s, t) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, und  $\frac{\partial h}{\partial t}$  existiert und auf ganz  $\mathbb{R}^2$  stetig. Sei

$$u(t) = \int_0^t h(s, t) ds$$

Dann

$$u(t) \in C'(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad u'(t) = h(t, t) + \int_0^t \frac{\partial h}{\partial t}(s, t) ds$$

### Beweis

Setze  $b(t) = t$ ,  $a = 0$  in Satz 8.21.

**Korollar 8.23**

Sei  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion mit stetiger partieller Ableitung  $\frac{\partial h}{\partial t}$ . Dann ist die Funktion

$$u(t) := \int_a^b h(s, t) ds$$

differenzierbar mit Ableitung

$$u'(t) := \int_a^b \frac{\partial h}{\partial t}(s, t) ds$$

**Beweis**

Setze  $b(t) = b$ , in Satz 8.20

**Bemerkung 8.24**

Mit Korollar 8.23 kann man bestimmte Integrale berechnen, auch wenn die dazugehörigen unbestimmten Integrale nicht elementar darstellbar sind

**Beispiel 8.25**

Berechne das Integral

$$\int_0^1 \frac{x^5 - 1}{\log x} dx$$

Sei

$$u(\alpha) := \int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\log x} dx$$

Für  $\alpha \geq 0$  erfüllt  $u(\alpha)$  die Voraussetzungen des Satzes. Wir berechnen

$$u'(\alpha) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{x^\alpha - 1}{\log x} \right) dx = \int_0^1 \frac{x^\alpha \log x}{\log x} dx = \int_0^1 x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Big|_0^{x=1} = \frac{1}{\alpha+1}$$

Daraus folgt aus dem fundamentalen Satz der Integralrechnung

$$u(\alpha) = \int u'(\alpha) d\alpha = \int \frac{d\alpha}{\alpha+1} = \log(\alpha+1) + C$$

Für eine noch zu bestimmende Konstante  $C$ . Aber

$$\begin{aligned} u(0) &= \int_0^1 0 dx = 0 \Rightarrow C = 0 \\ \Rightarrow \int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\log x} dx &= \log(\alpha+1) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{x^5 - 1}{\log x} dx = \log 6$$

**Beweis Satz 8.21 (Idee)**

Sei

$$f(x, y) = \int_a^x h(s, y) ds : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(t) = \begin{pmatrix} b(t) \\ t \end{pmatrix} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, g'(t) = \begin{pmatrix} b'(t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dann

$$u(t) = (f \circ g)(t) = f(b(t), t) = \int_a^{b(t)} h(s, t) ds$$

Nach dem Hauptsatz der Integralrechnung  $f$  ist nach  $x$  partiell differenzierbar und  $\frac{\partial f}{\partial x} = h(x, y)$ .  
Man muss zeigen, dass  $f$  ist nach  $y$  partiell differenzierbar mit

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \int_a^x \frac{\partial h(s, y)}{\partial y} ds$$

Dann ergibt die Kettenregel

$$\begin{aligned} u'(t) &= \frac{d}{dt} (f \circ g)(t) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(g(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(g(t)) \right) \cdot \frac{dg}{dt} \\ &= \left( h(b(t), t), \left( \int_a^x \frac{\partial h(s, y)}{\partial y} ds \right) h(b(t), t) \right) \begin{pmatrix} b'(t) \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \left( h(b(t), t), \int_a^{b(t)} \frac{\partial h}{\partial y}(s, t) ds \right) \begin{pmatrix} b'(t) \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= h(b(t), t) \cdot b'(t) + \int_a^{b(t)} \frac{\partial h}{\partial t}(s, t) ds \end{aligned}$$

**8.3 Differentialformen und Vektorfelder**

Sei  $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  der Raum der linearen Abbildungen von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}$ . Falls  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion ist, die in jedem Punkt differenzierbar ist, dann ist  $df(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  und man erhält eine Abbildung

$$\begin{aligned} \Omega &\rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \\ x_0 &\rightarrow df(x_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0) \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0) dx^1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0) dx^n \end{aligned}$$

Dies ist ein Beispiel der 1-Form

**Definition 8.26**

Eine Differentialform von Grad 1 (auch “1-Form”) auf  $\Omega$  ist eine Abbildung

$$\lambda : \Omega \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

**Beispiel 8.27**

1. Seien  $x^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  die Koordinatenfunktion,  $1 \leq i \leq n$ . Für jedes  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  ist  $dx^i(x_0) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ; dies führt zur 1-Form

$$\begin{aligned} dx^i : \mathbb{R}^n &\rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \\ x_0 &\rightarrow dx^i(x_0) \end{aligned}$$

Für jedes  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  gilt  $dx^i(e_j) = \delta_{ij}$ , also bilden  $dx^1(x_0), \dots, dx^n(x_0)$  eine Basis für  $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ .

Eine beliebige 1-Form  $\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  lässt sich dann eindeutig wie folgt darstellen

$$\lambda(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(x_0) dx^i(x_0)$$

wobei  $\lambda_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen sind.

2. Für jedes  $f \in C^1(\Omega)$  ist das Differential  $df$  eine 1-Form

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} dx^2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n$$

Is it  $C'$  or  $C'^{??}$  page 152.1 top; limenot:  $C^1$

3. Der Ausdruck  $\lambda(x, y, z) = 3dx + 5zdy + xdz$  definiert eine 1-Form auf  $\mathbb{R}^3$  mit

$$\begin{aligned} \lambda_1(x, y, z) &= 3 \\ \lambda_2(x, y, z) &= 5z \\ \lambda_3(x, y, z) &= x \end{aligned}$$

**Definition 8.28**

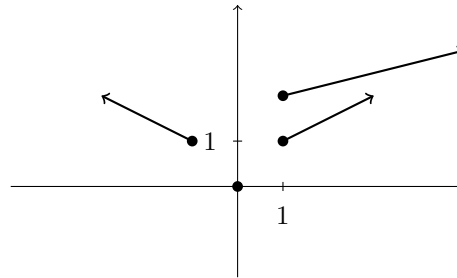
Ein Vektorfeld auf  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ist eine Abbildung  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$

Does the definition include the examples? page 153 top

**Beispiel**

1.

$$\begin{aligned} v : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\rightarrow (2xy, x^2) \end{aligned}$$


 2.  $v(x, y) = (-y, x)$ 


Page 153, bottom

PLEASE SUGGEST SOME COORDINATES, AS I CANNOT REPLICATE YOUR DRAWING!

**Bemerkung 8.29**

 Sei  $\langle, \rangle$  das übliche Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^n$ , d.h.

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x^i y^i$$

Mittels  $\langle, \rangle$  kann man von 1-Formen zu Vektorfeldern und umgekehrt übergehen. Dies geht wie folgt:

 1. Sei  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Vektorfeld. Dann definieren wir  $\forall x \in \Omega, \omega \in \mathbb{R}^n$ 

$$\lambda(x)(\omega) := \langle v(x), \omega \rangle$$

 Offensichtlich  $\lambda(x) \in (\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  und somit ist

$$\lambda : \Omega \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

$$x \rightarrow \lambda(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega \rightarrow \langle v(x), \omega \rangle$$

 eine 1-Form auf  $\Omega$

Umgekehrt

2. Sei  $\lambda : \Omega \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  1-Form und  $\lambda(x) := \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) dx^i$  wie oben.

Wir definieren

$$\begin{aligned} v : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\rightarrow (\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_n(x)) \end{aligned}$$

dann ist  $v$  ein Vektorfeld und

$$\lambda(x)(\omega) = \langle v(x), \omega \rangle$$

Sei  $\omega = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 + \dots + \omega^n e_n$ . Dann

$$\begin{aligned} \lambda(x)(\omega) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) dx^i(\omega) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) dx^i(\omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 + \dots + \omega^n e_n) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) (\omega^1 dx^i(e_1) + \omega^2 dx^i(e_2) + \dots + \omega^n dx^i(e_n)) \\ dx^i(e_j)_{ij} &\leftarrow = \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) \omega^i = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_n(x)) \cdot (\omega^1, \dots, \omega^n) \\ &= \langle v(x), \omega \rangle \end{aligned}$$

Diese Diskussion können wir auf das Differential einer Funktion anwenden

**Definition 8.30**

Sei  $f \in C^1(\Omega)$ . Das durch

$$\langle v(x), \omega \rangle := df(x)(\omega), \omega \in \mathbb{R}^n$$

definierte Vektorfeld heisst Gradientenfeld von  $f$  und wird mit  $v(x) = \nabla f(x)$  oder  $\text{grad} f$  bezeichnet.

Bezüglich der Standardbasis  $e_1, \dots, e_n$  der  $\mathbb{R}^n$  folgt die Darstellung

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x^1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x^n}(x) \end{pmatrix}, \forall x \in \Omega$$

(Oben nehmen wir  $\lambda(x) := df(x) = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} r^i x^i$ , Bemerkung 8.29, 2.)

**Satz 8.31**

Sei  $f \in C^1(\Omega)$  und  $x_0 \in \Omega$ . Dann gibt  $\nabla f(x_0)$  die Richtung und  $|\nabla f(x_0)|$  den Betrag des steilsten Anstieges von  $f$  an der Stelle  $x_0$  an.

**Beweis**

Aus der Definition des Gradientenfeld folgt  $\forall e \in \mathbb{R}^n$ , Einheitsvektor  $\|e\| = 1$

$$df(x_0)(e) = \langle \nabla f(x_0), e \rangle$$

Mit Cauchy-Schwarz folgt

$$\langle \nabla f(x_0), e \rangle \leq \|\nabla f(x_0)\| \|e\| = \|\nabla f(x_0)\|$$

mit Gleichheit genau dann, wenn  $e$  ein positives Vielfaches von  $\nabla f(x_0)$  ist, nämlich

$$e = \frac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|}$$

$$\Rightarrow df(x_0)e \leq |\nabla f(x_0)|$$

mit Gleichheit für  $e = \frac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|}$   $\nabla f(x_0) \neq 0 \Rightarrow \nabla f(x_0)$  zeigt die Richtung an, in der  $f$  am schnellsten wächst.

■

**Geometrische Interpretation**

Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, C'$ . Für jedes  $s \in \mathbb{R}$  wird  $f^{-1}(s) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = s\}$  Niveaufläche genannt.

**Beispiel**

1.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \end{aligned}$$

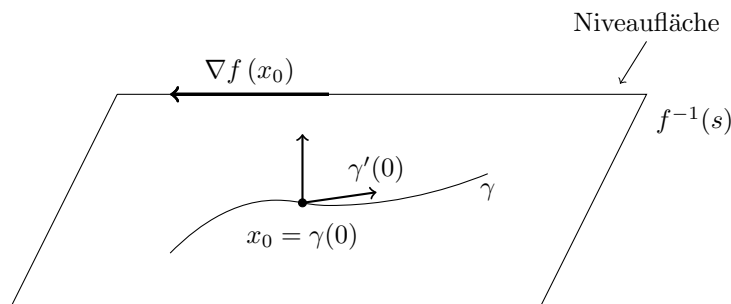
dann ist  $f^{-1}(s) = \text{Sphäre mit Zentrum } O \text{ und Radius } \sqrt{s}$

2.  $f(x, y) = xy$  ist ein hyperbolischer Paraboloid mit Niveaulinien



$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Nun sei  $x_0 \in \Omega$  mit  $f(x_0) = s$ , i.e.  $x_0 \in f^{-1}(s)$ . Sei  $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein differenzierbare Kurve durch  $x_0$  mit  $\gamma[-1, 1] \subset f^{-1}(s)$ ,  $\gamma(0) = x_0$





Dann gilt  $f(\gamma(t)) = s, \forall t \in [-1, 1]$  und es folgt aus der Kettenregel

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f(\gamma(t))) &= \frac{d}{dt}(s) = 0 \\ \Downarrow \\ df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) &= 0 = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \end{aligned}$$

Insbesondere  $0 = df(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = \langle \nabla f(x_0), \gamma'(0) \rangle$  d.h.  $\nabla f(x_0)$  steht senkrecht zur Niveaufäche von  $f$  durch  $x_0$

### Beispiel

Sei  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{2}, x, y \in \mathbb{R}^2$

$$\nabla f(x, y) = (x, -y)$$

Sei  $(x_0, y_0) = (1, -1)$

$$\nabla f(1, -1) = (1, 1) \quad |\nabla f(1, -1)| = \sqrt{2}$$

$$\frac{\nabla f}{|\nabla f|}(1, -1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$$

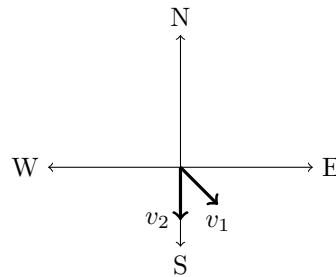
3. Im Punkt  $P$  biegt der Bergweg ab; nach Südosten geht er mit 25% Steigung bergauf, nach Süden mit 20% Gefälle bergab. Der wanderer im Nebel möchte über die Wiese möglichst rasch zum Gipfel. In welche Richtung muss er gehen und wie steil ist es dorthin?

Wir legen das Koordinatensystem so, dass die  $x$ -Achse nach Osten und die  $y$ -Achse nach Norden zeigt, und setzen voraus, dass die Höhenfunktion  $h$  differenzierbar ist. Wir wollen ihren Gradienten in  $P$   $\nabla h(P)$  bestimmen. Nach Voraussetzung hat  $h$  die beiden Richtungsableitungen

$$dh(P)(v_1) = 0.25 \quad dh(P)(v_2) = -0.2$$

wobei

$$v_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad v_2 = (0, -1)$$



$$\begin{aligned}
 dh(P)(v_1) &= \left( \frac{\partial h}{\partial x}(P), \frac{\partial h}{\partial y}(P) \right) \cdot v_1 \\
 &= \frac{\partial h}{\partial x}(P) \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\partial h}{\partial y}(P) \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{4} \\
 dh(P)(v_2) &= \left( \frac{\partial h}{\partial x}(P) \right) (0) - \frac{\partial h}{\partial y}(P) (-1) = -\frac{1}{5}
 \end{aligned}$$

Durch Lösen des linearen Gleichungssystems folgen wir:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(P) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{5}, \quad \frac{\partial h}{\partial y}(P) = \frac{1}{5}$$

Die Richtung des Gradienten ist somit

$$\arg \nabla h(P) = \arctan \frac{\frac{1}{5}}{\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{5}} \cong 19.86^\circ$$

und die Steigung in diese Richtung ist

$$|\nabla h(P)| = \sqrt{\left( \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{5} \right)^2 + \left( \frac{1}{5} \right)^2} \cong 0.59 = 59\%$$

## 8.4 Wegintegrale

Wir haben in Bemerkung 8.29 gesehen, dass man mittels dem üblichen Skalarprodukt  $\langle, \rangle$  von 1-Formen zu Vektorfeldern und umgekehrt übergehen kann.

In diesem Kapitel werden wir das “Wegintegral” von 1-Formen oder von Vektorfeldern längs einer Kurve studieren. Dazu untersuchen wir zunächst Kurven in  $\mathbb{R}^n$

### Parameterdarstellung einer Kurve

Sei  $\gamma \subset \mathbb{R}^n$  eine Kurve. Eine Parameterdarstellung (PD) von  $\gamma$  ist eine Funktion

$$\begin{aligned}
 \gamma : I = [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\
 t &\rightarrow \gamma(t)
 \end{aligned}$$

wobei  $\gamma(t)$  ein Punkt  $\gamma$  ist und jeder Punkt auf  $\gamma$  kann als  $\gamma(t)$  dargestellt werden

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$$

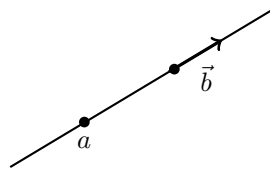
Die positive Richtung von  $\gamma$  ist die Richtung mit der die Kurve durchgelaufen wird

### Beispiel 8.32

1.

$$\gamma(t) = (a_1 + b_1 t, a_2 + b_2 t, a_3 + b_3 t), t \in \mathbb{R}$$

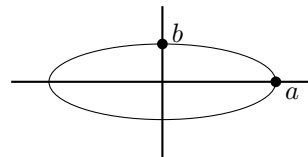
ist die Parameterdarstellung einer Gerade durch den Punkt  $a = (a_1, a_2, a_3)$  und parallel zum Vektor  $(b_1, b_2, b_3)$



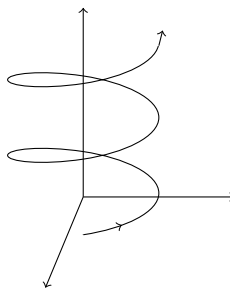
2.  $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$  ist eine Parameterdarstellung einer Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

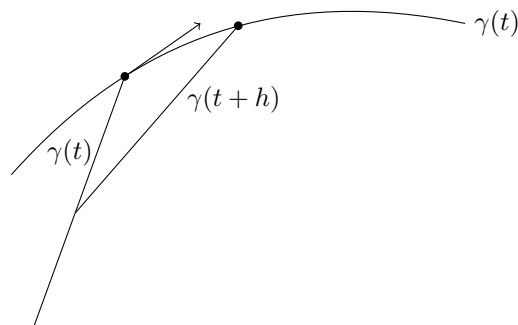
$$t \in [0, 2\pi]$$



3.  $\gamma_1(t) = (a \cos t, b \sin t, ct)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  ist eine Parameterdarstellung einer elliptischen Helix



$\gamma_2(t) = (a \cos t, -b \sin t, c(2\pi - t))$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  ist die Parameterdarstellung der gleichen Kurve wobei die Richtung umgekehrt ist



Der Tangentialvektor zur Kurve an der Stelle  $\gamma(t)$  ist  $\gamma'(t)$

$$\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t), \dots, \gamma'_n(t))$$

I have to include  
the example?? page 164  
ttom

### Definition 8.33

Das Wegintegral von  $\vartheta$  längs  $\gamma$

$$\int_{\gamma} v d\vec{s} = \int_{\gamma} v(\gamma) d\gamma := \int_a^b \langle v(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

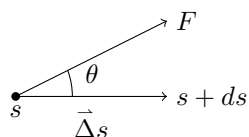
$v d\vec{s} = \gamma'(t) dt$  heisst gerichtetes Längenelement

### Beispiel 8.34

Ein einführendes Beispiel: Sei  $m$  ein Massenpunkt, der sich unter den Einfluss eines Kraftfeldes  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  bewegt.

Der Massenpunkt wird durch eine konstante Kraft  $\vec{F}$  längs einer Geraden um den Vektor  $\vec{s}$  verschoben.

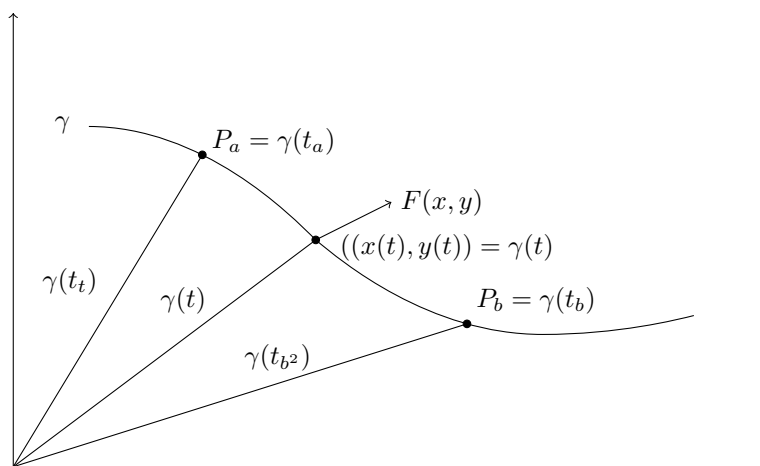
Die dabei verrichtete Arbeit ist definitionsgemäss das Skalarprodukt aus dem Kraftvektor  $\vec{F}$  und dem Verschiebungsvektor  $\vec{s}$ .



$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos \theta$$

Allgemeiner Fall

Verschiebung längs einer Kurve  $\gamma$  in einem Kraftfeld  $F = (P(x, y), Q(x, y))$



$\Delta W = F \cdot \Delta(\gamma) =$  Kraftkomponente entlang des Weges mal zurückgelegter Weg.

Da sich Betrag und Richtung der Kraft sowie der jeweilige Winkel zum Weg vom Punkt zu Punkt ändern, gilt das zur Berechnung notwendige Skalarprodukt näherungsweise jeweils nur für ein Wegelement  $\vec{\Delta r}$ . Die Berechnung der Arbeit erfolgt daher in folgender Weise:

- a) Zerlegung des Weges in Teilabschnitte

$$\Delta \gamma_1 = \gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i) = \frac{\Delta \gamma}{\Delta t} \cdot \Delta t$$

- b) Ermittlung der Arbeit Kraft:

$$F(\gamma(t_i)) = F(x(t_i), y(t_i))$$

- c) Berechnen der Arbeit je Teilabschnitt-Skalarprodukt

$$\Delta W_i = F(x(t_i), y(t_i)) \cdot \Delta \gamma_i$$

- d) Aufsummieren der Teil-Arbeit

$$W \approx \sum \Delta W_i = \sum F(x(t_i), y(t_i)) \cdot \underbrace{\frac{\Delta \gamma}{\Delta t} \cdot \Delta t}_{\Delta \gamma}$$

- e) Durch Verkleinerung des Wegelementes erhält man den exakten Wert der geleisteten Arbeit

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \end{aligned}$$

can't read, page 167  
middle; limenet: plus,  
grammar is totally  
wrong

**Bemerkung 8.35**

Wir können das Wegintegral auch mit Differentialformen formulieren. Sei

$$\begin{aligned} v : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\rightarrow (v^i(x))_{i=1}^n \end{aligned}$$

ein stetiges Vektorfeld ( $v^i(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  stetig) dann ist durch  $\lambda(x)(\omega) := \langle v(x), \omega \rangle$  eine 1-Form  $\lambda(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  definiert

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} v d\vec{s} &= \int_a^b \langle v(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\ &= \int_a^b \lambda(\gamma(t))(\gamma'(t)) dt \end{aligned}$$

Umgekehrt

Sei  $\lambda : \Omega \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  eine 1-Form die im folgenden Sinn stetig ist:

Sei

$$\begin{aligned} \gamma : [a, b] &\rightarrow \Omega \\ t &\rightarrow (\gamma^1(t), \gamma^2(t), \dots, \gamma^n(t)) \end{aligned}$$

ein  $C'$ -Weg. Dann ist

$$\begin{aligned} [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\rightarrow \lambda(\gamma(t))(\gamma'(t)) \\ &= \sum \lambda_i(\gamma(t)) \cdot \frac{d\gamma^i}{dt}(t) \end{aligned}$$

eine stetige Funktion. Somit ist das Integral  $\int_a^b \lambda(\gamma(t))(\gamma'(t)) dt$  wohl definiert.

**Definition 8.36**

Das Wegintegral von  $\gamma \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  längs  $\gamma$  ist

$$\int_{\gamma} \lambda := \int_a^b \lambda(\gamma(t))(\gamma'(t)) dt$$

**Beispiel 8.37**

1. Sei  $\gamma \in C'([0, 2\pi] = \mathbb{R}^2)$  mit

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

eine Parametrisierung des Einheitskreises  $\lambda = \lambda(x, y)$  die 1-Form mit

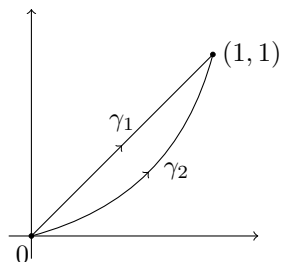
$$\lambda(x, y) = -ydx + xdy \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \lambda &= \int_0^{2\pi} \underbrace{(-\sin t, \cos t)}_{\lambda(\gamma(t))} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}}_{\gamma'(t)} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi \end{aligned}$$

2. Sei  $\gamma(x, y) = 3x^2ydx + (x^3 + 1)dy$ . Wir betrachten das Kurvenintegral längs verschiedener Wege

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= (t, t), 0 \leq t \leq 1 \\ \gamma_1'(t) &= (1, 1) \\ \gamma_2(t) &= (t, t^2), 0 \leq t \leq 1 \\ \gamma_2'(t) &= (1, 2t) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \lambda &= \int_0^1 3x^2ydx + (x^3 + 1)dy = \int_0^1 (3t^3 + (t^3 + 1)) dt = 2 \\ \int_{\gamma} \lambda &= \int_0^1 (3t^4 + (t^3 + 1) \cdot 2t) dt = 2 \end{aligned}$$

**Bemerkung**

Sei  $f(x, y) = x^3y + y$ . Dann ist

$$df(x, y) = 3x^2ydx + (x^3 + 1)dy$$

is this inside the enumerated list or out?? page 170 bottom

und

$$f(1, 1) - f(0, 0) = (1 + 1) - (0, 0) = 2$$

Wir können den Begriff des Wegintegrals auf Wege erweitern, die stückweise  $C'$  sind. Ein stückweiser  $C'$ -Weg ist eine stetige Abbildung  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit einer Unterteilung des Intervalls

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b$$

so dass

$$\gamma|_{[a_i, a_{i+1}]} = [a_i, a_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$C'$  ist.

d.h.  $t \rightarrow \gamma'(t)$  ist auf  $(a_i, a_{i+1})$  stetig und erweitert sich stetig auf  $[a_i, a_{i+1}]$

### Beispiel

this inside the enumerated list or out?? page 1 middle



Bild eines stückweise  $C'$ -Weges

Dann definiert man

$$\int_{\gamma} \lambda := \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\gamma|_{[a_i, a_{i+1}]}} \lambda$$

Jetzt werden wir die einzigen grundlegenden Eigenschaften des Wegintegrals herleiten.

### Satz 8.38 (Eigenschaften des Wegintegrals)

E1) Das Wegintegral  $\int_{\gamma} \lambda$  ist unabhängig von einer orientierungserhaltenden Umparametrisierung.

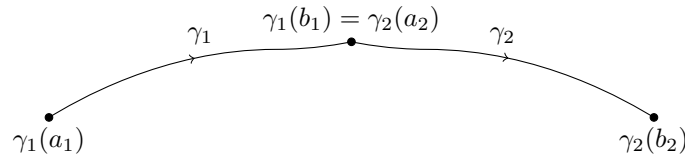
D.h. Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ ,  $C'$  und  $\varphi : [a', b'] \rightarrow [a, b]$ ,  $C'$  mit  $\varphi(a') = a$ ,  $\varphi(b') = b$ ,  $\varphi'(t) > 0$   $\forall t \in [a', b']$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \int_{\gamma \circ \varphi} \lambda &= \int_{a'}^{b'} \lambda(\gamma(\varphi(t))) (\gamma \circ \varphi)'(t) dt \\ &= \int_{a'}^{b'} \lambda(\gamma(\varphi(t))) \gamma'(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \\ &= \int_a^b \lambda(\gamma(s)) \gamma'(s) ds = \int_{\gamma} \lambda \end{aligned}$$



Geometrisch heisst dies, dass  $\int_{\gamma} \lambda$  nur vom Bild  $\gamma([a, b])$  mit vorgegebenen Durchlaufsinne abhängt.

E2) Seien  $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \Omega$  und  $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \Omega$  zwei Wege mit  $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$



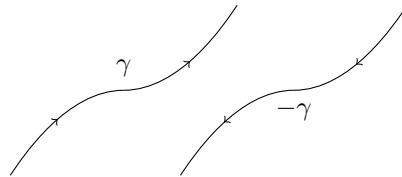
Wir definieren  $\gamma_1 + \gamma_2$  als Weg, der durch aneinanderhängen von  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  entsteht, d.h.

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [a_1, b_1] \\ \gamma_2(t - b_1 + a_2) & t \in [b_1, b_1 + b_2 - a_2] \end{cases}$$

Dann gilt

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2} \lambda = \int_{\gamma_1} \lambda + \int_{\gamma_2} \lambda$$

E3) Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  ein Weg. Dann sei  $-\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  der gleiche Weg aber im entgegengesetzten Durchlaufsinne, d.h.  $(-\gamma)(t) = \gamma(-t + a + b)$



Dann gilt

$$\int_{-\gamma} \lambda = - \int_{\gamma} \lambda$$

E4) Sei  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C'$ -Funktion, sowie  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  stückweise  $C'$ . Dann gilt

$$\int_{\gamma} df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

$\gamma$  ist  $C'$ , dann ist

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} df &= \int_a^b df(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} (f \circ \gamma)(t) dt \\ &= (f \circ \gamma)(b) - (f \circ \gamma)(a) \\ &= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) \end{aligned}$$

Mittels des Wegintegrals können wir die  $C'$ -Funktionen charakterisieren, deren Differentiale verschwinden.

**Satz 8.39**

Sei  $\Omega$  "offen" und  $C^1$ -wegzusammenhängend. Sei  $f \in C'(\Omega)$ . Falls  $df(x) = 0, \forall x \in \Omega$ , so ist  $f$  konstant.

**Beweis**

Wenn  $\Omega$  wegzusammenhängend ist, heisst das, dass zu je zwei Punkten  $x, y \in \Omega$  gibt es in  $C'$ -Weg  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \gamma$  mit  $\gamma(0) = x$  und  $\gamma(1) = y, \gamma([0, 1]) \subset \Omega$ . Dann folgt

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) \\ &= \int_{\gamma} df = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f(y) = f(x), \forall x, y \in \Omega \Rightarrow f$  ist konstant.

Frage: Wann ist eine 1-Form  $\lambda$ , von der Form  $\lambda = df$ , d.h. das Differential einer Funktion? D.h. gegeben eine 1-Form  $\lambda$ , gibt es eine Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  s.d.  $df = \lambda$ ?

Wenn es ein  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, so dass  $df = \lambda$ , heisst  $f$  ein Potential. (Potential ist wie eine Stammfunktion für eine 1-Form). Mittels Wegintegral stellen wir jetzt ein Kriterium auf.

**Satz 8.30**

Sei  $\lambda \in \Omega \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  eine stetige 1-Form. Folgende Aussagen sind äquivalent

1. Es gibt  $f \in C'(\Omega)$  mit  $df = \lambda$
2. Für je zwei stückweise  $C'$ -Wege  $\gamma_i = [a_i, b_i] \rightarrow \Omega$  mit den selben Anfangs- und Endpunkten (d.h.  $\gamma_1(a_1) = \gamma_2(a_2), \gamma_1(b_1) = \gamma_2(b_2)$ ), gilt

$$\int_{\gamma_1} \lambda = \int_{\gamma_2} \lambda$$

3. Für jeden geschlossenen  $C'$ -Weg  $\gamma$  gilt

$$\int_{\gamma} \lambda = 0$$

**Beweis**

(1)  $\Rightarrow$  (2): Folgt aus E4)

(2)  $\Leftrightarrow$  (3): Klar

(2)  $\Rightarrow$  (1): Sei  $p_0 \in \Omega$ ; für jedes  $x \in \Omega$ . Sei  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$  stückweise  $C'$  mit  $\gamma(0) = p_0$ ,  $\gamma(1) = x$ . Definiere  $f(x) := \int_{\gamma} \lambda$ .

Dann ist  $f$  nach Annahme (2) wohl definiert (d.h. unabhängig vom Weg von  $p_0$  nach  $x$ ) (Wir können  $f$  auch mit  $\int_{p_0}^x \lambda$  bezeichnen)

### Behauptung

$f \in C'(\Omega)$  und  $df = \lambda$ . Um zu zeigen, dass  $df = \lambda$  müssen wir zeigen, dass für  $x, x_0 \in \Omega$

$$f(x) - f(x_0) = \lambda(x_0)(x - x_0) + R(x, x_0)$$

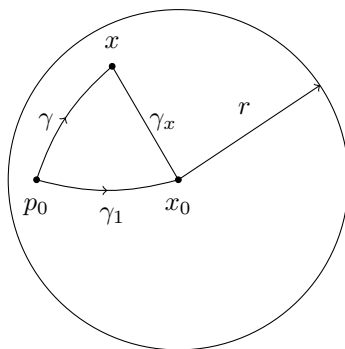
mit  $\frac{R(x, x_0)}{|x - x_0|} \rightarrow 0$ .

Sei  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Sei  $\gamma_1 : [-1, 0] \rightarrow \Omega$  ein Weg von  $p_0$  nach  $x_0$ . Dann gilt

$$\int_{\gamma_1} \lambda = f(x_0)$$

Sei

$$\begin{aligned} \gamma_x : [0, 1] &\rightarrow \Omega \\ t &\rightarrow (1 - t)x_0 + tx \end{aligned}$$



Um  $\gamma^x([0, 1]) \subset \Omega$  zu garantieren, nehmen wir  $r > 0$ , so dass  $B_r(x_0) \subset \Omega$  und nehmen an, dass  $x \in B_r(x_0)$ . Dann ist

$$f(x) = \int_{\gamma_1 + \gamma_x} \lambda = \int_{\gamma_1} \lambda + \int_{\gamma_x} \lambda = f(x_0) + \int_{\gamma^x} \lambda$$

Nun ist

$$\begin{aligned}\int_{\gamma^x} \lambda &= \int_0^1 \lambda(\gamma_x(t)) \gamma_x'(t) dt \\ &= \int_0^1 \lambda(\gamma_x(t)) (x - x_0) dt \\ &= \lambda(x_0) (x - x_0) + \int_0^1 (\lambda(\gamma^x(t)) - \lambda(x_0)) (x - x_0) dt\end{aligned}$$

Sei  $\lambda = \sum \lambda^i dx^i$  dann ist obiges Integral gleich

$$\begin{aligned}& \sum \int_0^1 [\lambda_i(\gamma^x(t)) - \lambda_i(x_0)] (x^i - x_0^i) dt \\ & \leq \sum \left( \int_0^1 [\lambda_i(\gamma^x(t)) - \lambda_i(x_0)]^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} |x - x_0|\end{aligned}$$

Also  $f(x) - f(x_0) = \lambda(x_0)(x - x_0) + R(x, x_0)$ , wobei

$$\frac{R(x - x_0)}{|x - x_0|} \leq \left( \sum_{i=1}^n \left( \int_0^1 (\lambda_i(\gamma^x(t)) - \lambda_i(x_0)) dt \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

can't read, page 179  
ttom

Aus der Stetigkeit der folgt, dass

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x, x_0)}{|x - x_0|} \rightarrow 0$$

### Beispiel 8.31

1. Sei  $\lambda = 2xy^2 dx + 2x^2 y dy$ .

Ansatz:

$$f(x, y) = \int_{\gamma(x, y)} \lambda$$

wobei  $\gamma_{(x, y)}(t) = (tx, ty)$ ,  $t \in (0, 1)$ . Dann ist

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \lambda &= \int_0^1 \lambda(tx, ty)(x, y) dt \\ &= \int_0^1 \left[ 2(tx)(ty)^2 \cdot x + 2(tx)^2(ty) \cdot y \right] dt \\ &= 4x^2y^2 \int_0^1 t^3 dt = x^2y^2\end{aligned}$$

und  $df(x, y) = 2xy^2 dx + 2x^2y dy$ .

Oder: Ansatz:

$$\begin{aligned}df : \lambda &\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2, \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y \\ &\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2 \Rightarrow f(x, y) = \int 2xy^2 dx = x^2y^2 + C(y) \\ &\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y + \frac{d}{dy}C(y) = 2x^2y \Rightarrow \frac{d}{dy}C(y) = 0 \Rightarrow C(y) = \text{Konstant} \\ &\Rightarrow f(x, y) = x^2y^2 + C\end{aligned}$$

Analog wie für 1-Formen kann man Satz 8.30 für Vektorfelder formulieren

Where is number 2??  
page 180

### Definition 8.32

Ein Vektorfeld  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  heisst konservativ, falls  $\forall \gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$  geschlossen ist

$$\int_{\gamma} v ds = 0$$

Aus Satz 8.30 folgt

### Satz 8.33

Für ein stetiges Vektorfeld  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  sind folgende Aussagen äquivalent

1.  $v$  ist konservativ
2. Es gibt  $f \in C'(\Omega)$  mit  $v = \nabla f$ . In diesem Fall heisst  $v$  Potentialfeld mit dem Potential  $f$ .

Im nächsten Kapitel, mittels höheren partiellen Ableitungen, erhalten wir eine einfache zu notwendige Bedingung für ein konservatives Vektorfeld. Wir werden sehen, dass

can't understand, page  
182 top

$$\begin{aligned}v &= (v^i)_{1 \leq i \leq n} \in C'(\Omega, \mathbb{R}^n) \text{ konservative} \\ &\Rightarrow \frac{\partial v^i}{\partial x^j} = \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \quad 1 \leq i, j \leq n\end{aligned}$$

## 8.5 Höhere Ableitungen

### Definition 8.44

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$   $f \in C'(\Omega)$  heisst von Klasse  $C^2$  falls  $\frac{\partial f}{\partial x^i} \in C'(\Omega)_{1 \leq i \leq n}$

here does the definiti-  
end? page 183 top

Für ein beliebiges  $m$ , heisst die Funktion  $f \in C'(\omega)$  heisst von der Klasse  $C^m$ ,  $f \in C^m(\omega)$ , falls  $\frac{\partial f}{\partial x^i} \in C^{m-1}(\Omega)$ ,  $1 \leq i \leq n$

Für ein  $f \in C^2(\Omega)$ , heissen die Funktionen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} := \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\partial f}{\partial x^j} \right)$$

die zweiten partiellen Ableitungen von  $f$ .

Analog definiert man die  $m$ -ten partiellen Ableitungen von  $f$  oder partielle Ableitungen vom Grad  $m$  für jedes  $m > 0$  (Für  $f \in C^m(\Omega)$ )

### Satz 8.45

Sei  $f \in C^2(\Omega)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} &= \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} \end{aligned}$$

Im Allgemeinen

### Satz 8.46

Für jede  $C^k$ -Funktion sind alle partiellen Ableitungen vom Grad  $\leq k$  von der Reihenfolge der Ableitungen unabhängig. Von Satz 8.35 erhalten wir folgende notwendige Bedingung für die Konservativität

### Korollar 8.47

Sei  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $v = (v^i)_{1 \leq i \leq n}$  ein  $C'$ -Vektorfeld. Falls  $v$  konservativ ist, folgt

$$\frac{\partial v^i}{\partial x^j} = \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \quad 1 \leq i, j \leq n$$

### Beweis

Nach Voraussetzung gibt es  $f \in C'(\Omega)$  mit  $v^i(x) = \frac{\partial f}{\partial x^i}$ . Da nun  $v^i \in C'$ ,  $1 \leq i \leq n$  folgt  $f \in C^2(\Omega)$ . Woraus

$$\frac{\partial v^i}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) = \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial}{\partial x^i} v^j$$

folgt.

**Beispiel 8.48**

1.

$$v(x, y) = \begin{pmatrix} 4xy^2 \\ 2y \end{pmatrix}$$

Es gilt  $\frac{\partial v'}{\partial y} = 8xy$ ,  $\frac{\partial v^2}{\partial x} = 2$ . Also ist  $v$  nicht konservativ

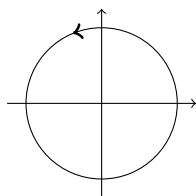
 2. Sei  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \neq (0, 0)\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$  und

$$v(x, y) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

Dann  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  mindestens  $C'$ . Ausserdem

$$\frac{\partial v'}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial v^2}{\partial x}$$

Jetzt berechnen wir  $\int_C v ds$ , wobei  $C$ :



$$C(t) = (\cos(t), \sin(t))$$

$$t \in (0, 2\pi]$$

$$\begin{aligned} \int_C v ds &= \int_0^{2\pi} \langle v(C(t)), C'(t) \rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi \neq 0 \\ &\Rightarrow v \text{ auf } \Omega \text{ ist nicht konservativ!} \end{aligned}$$

Jetzt betrachten wir  $\Omega' = \{(x, y) \mid x > 0\}$  und f"uhren Polarkoordinaten ein

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

Dann ist  $\tan \theta = \frac{y}{x}$  und

$$\theta = \arctan \frac{y}{x}$$

Wir betrachten  $\theta : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$  als eine Funktion der Variablen  $x, y$  und berechnen

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Also gilt

$$\nabla \theta(x, y) = v(x, y)$$

$$v(x, y) \in \Omega'$$

$\Rightarrow v$  ist konservativ auf  $\Omega$

Das heisst die Konservativität ist eine Eigenschaft zugleich des Vektorfeldes  $v$  und der Region  $\Omega$ .

#### Definition 8.49

Eine offene Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  heisst einfach zusammenhängend, falls

1.  $\Omega$  ist stückweise  $C'$ –wegzusammenhängend
2. Jeder stückweise  $C'$ –Weg in  $\Omega$  kann stetig innerhalb  $\Omega$  auf einen Punkt zusammengezogen werden

Die Region  $\Omega = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  ist nicht einfach, zu  $\Omega' = \{(x, y) \mid x > 0\}$  ist es aber.

limenet: This sentence doesn't make any sense at all

#### Satz 8.50

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  beschränkt zusammenhängend sowie einfach zusammenhängend, sei  $v \in C'(\Omega; \mathbb{R}^2)$  Vektorfeld. Dann sind folgende Aussagen äquivalent

1.  $v$  ist konservativ
2.  $\frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_2}{\partial x}$

#### Taylorentwicklung und das lokale Verhalten von $C^m$ –Funktionen

Not sure how big of a title...

Wir werden jetzt eine Verallgemeinerung der Taylorentwicklung einer Variablen herleiten.

Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^m$ –Funktion sowie  $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ . (Allgemein könnte man  $\mathbb{R}^n$  durch eine offene konvexe Menge ersetzen)

Sei

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$t \rightarrow (1 - t)x_0 + x_1$$



## KAPITEL 8. DIFFERENTIALRECHNUNG IN $\mathbb{R}^n$

Dann ist  $g := f \circ \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine

Don't know where this actually fits:  $(g(0) = f(x_0), g(1) = f(x_1))$

$C^m$ -Funktion und (nach Taylorentwicklung von Funktionen mit einer Variablen) gibt es  $\xi \in (0, 1)$ , so dass

can't read, page 189 bottom

$$(*) \quad g(\xi) = g(0) + g'(0)\xi + \dots + \frac{g^{(m-1)}(0)}{(m-1)!}\xi^{m-1} + \frac{g^{(m)}(\xi)}{m!}\xi^m$$

can't read between brackets before equal sign, page 190 very top

Jetzt berechnen wir  $g^{(i)}(t)$  als Funktion von  $f$  und deren Ableitungen. Für  $g'(t)$  benutzen wir die Kettenregel:

$$g'(t) = df(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

mit

$$\varphi'(t) = x_1' - x_0' = (x_1'^1 - x_0'^1, x_1'^2 - x_0'^2, \dots, x_1'^n - x_0'^n)$$

Erhalten wir:

$$\begin{aligned} g'(t) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(\varphi(t)) (x_1^i - x_0^i) = \nabla f(\varphi(t)) \cdot (x_1 - x_0) \\ g'(0) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) (x_1^i - x_0^i) = \nabla f(x_0) \cdot (x_1 - x_0) \end{aligned}$$

Jetzt berechnen wir  $g^{(2)}(t)$ :

$$g^{(2)}(t) = \frac{d}{dt}(g'(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial x^i}(\varphi(t)) \right) (x_1^i - x_0^i)$$

Analog gilt:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial x^i}(\varphi(t)) \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}(\varphi(t)) (x_1^j - x_0^j)$$

Eingesetzt gilt:

$$\begin{aligned} g^{(2)}(t) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}(\varphi(t)) \right) (x_1^i - x_0^i) (x_1^j - x_0^j) \\ g^{(2)}(0) &= \sum_{i,j=1}^n \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}(x_0) \right) (x_1^i - x_0^i) (x_1^j - x_0^j) \end{aligned}$$

Daraus schliesst man induktiv, dass

$$g^{(k)}(t) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^n \left( \frac{\partial^k f}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_k}}(\varphi(t)) \right) \prod_{l=1}^k (x_1^{i_l} - x_0^{i_l})$$

Eingesetzt in (\*) (s.41) ergibt

MISSING CONTENT?? page 191 bottom

**Satz 8.51(Taylorentwicklung)**

$$\begin{aligned}
 f(x_1) = & f(x_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) (x_1^i - x_0^i) + \dots \\
 & + \frac{1}{(m-1)!} \sum_{i_1, \dots, i_{m-1}=1}^n \frac{\partial^{m-1} f}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_{m-1}}}(x_0) \prod_{l=1}^{m-1} (x_1^{i_l} - x_0^{i_l}) \\
 & + \frac{1}{m!} \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n \frac{\partial^m f}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_m}}(x_\xi) \prod_{l=1}^m (x_1^{i_l} - x_0^{i_l})
 \end{aligned}$$

mit einer Zahl  $\xi \in (0, 1)$ ,  $x_\xi = (1 - \xi)x_0 + \xi x_1$ .

**Bemerkung 8.52**

Insbesondere für  $m = 2$  erhalten wir für  $f$  die quadratische Näherung

$$\begin{aligned}
 f(x_1) = & f(x_0) + \nabla f(x_0) (x_1 - x_0) \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_0) (x_1^i - x_0^i) (x_1^j - x_0^j) + r_2(f, x_1, x_0)
 \end{aligned}$$

mit Fehler

$$\frac{r_2(f, x_1, x_0)}{|x_1 - x_0|} \rightarrow 0, (x_1 \rightarrow x_0)$$

**Definition 8.53**

Die Matrix der zweiten partiellen Ableitungen heisst Hesse - Matrix von  $f$  und wird mit  $\text{Hess}(f)$  oder  $\nabla^2 f$  bezeichnet

$$\begin{aligned}
 \text{Hess}(f) = \nabla^2 f & := \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right)_{i,j=1 \dots n} \\
 & = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^n \partial x^1} & \dots & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x^n \partial x^n} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Seien  $\nabla f, x_1 - x_0$  Zeilenvektoren und sei  $(x - x_0)^t$  der zu  $x_1 - x_0$  transponierte Spaltenvektor. Dann wird die Taylorentwicklung von Grad 2 äquivalent zu

$$\begin{aligned}
 f(x) = & f(x_0) + \nabla f(x_0) (x - x_0)^t \\
 & + \frac{1}{2} (x - x_0) \cdot \nabla^2 f(x_0) (x - x_0)^t \\
 & + r_3(f, x, x_0)
 \end{aligned}$$

**Bemerkung**

Die Hesse - Matrix von  $f$  ist nach Satz von Schwarz eine symmetrische Matrix.

**Beispiel**

$f(x, y) = e^{x+y} \cos x$  im Punkt  $(0, 0)$ . Die Taylorentwicklung vom Grad 2:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= e^{x+y} \cos x - e^{x+y} \sin x, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= e^{x+y} \cos x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 1\end{aligned}$$

shouldn't it be  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 1$  for second one??

$$(\nabla f)(0, 0) = (1, 1) \quad f(0, 0) = 1$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) &= e^{x+y} \cos x - e^{x+y} \sin x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = e^{x+y} \cos x - e^{x+y} \sin x - e^{x+y} \sin x - e^{x+y} \cos x \\ &= -2e^{x+y} \sin x \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) &= 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= e^{x+y} \cos x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 1\end{aligned}$$

$$\nabla^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}((x, y) - (0, 0)) \nabla^2 f(0, 0) ((x, y) - (0, 0))^T &= (x, y) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= (x, y) \begin{pmatrix} y \\ x + y \end{pmatrix} \\ &= 2xy + y^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(x, y) &= e^{x+y} \cos x = 1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (x, y) + \frac{1}{2} (x, y) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= 1 + (x, y) + \frac{1}{2} (2xy + y^2) + r_3(f, (x, y))\end{aligned}$$

Taylorpolynom von Grad 2:  $1 + (x + y) + \frac{1}{2} (2xy + y^2)$

Die Hesse - Matrix bestimmt, ob die Funktion  $f$  in der Nähe von  $x$  konvex oder konkav ist (oder nicht). Sie spielt die gleiche Rolle wie die zweite Ableitung von Funktionen in einer Variable.

Als nächstes benötigen wir eine mehrdimensionale Entsprechung zur Positivität in den eindimensionalen Beziehungen  $f''(z) > 0$  bzw.  $f''(z) < 0$ .

**Definition 8.54**

Eine symmetrische Matrix  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heisst

1. **Positiv definit** wenn

$${}^t x A x = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x^i x^j > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

(oder wenn sämtliche Eigenwerte positive sind)

2. **Negativ definit** wenn

$${}^t x A x < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

(wenn sämtliche Eigenwerte negativ sind)

3. Sonst **indefinit** (wenn sie sowohl positive als auch negative Eigenwerte besitzt)

Im symmetrischen  $2 \times 2$  Fall ist die Gleichung auf Definitheit besonders leicht

**Satz 8.55**

Eine Symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$$

ist genau dann

1. Positiv definit, wenn  $\det A > 0$  und  $a_{11} > 0$
2. Negativ definit, wenn  $\det A > 0$  und  $a_{11} < 0$
3. Indefinit, wenn  $\det A < 0$

**Extrema von Funktionen mehrerer Variablen**

Jetzt werden wir nach Punkten  $x \in \mathbb{R}^n$  schauen, in denen eine Funktion  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ein lokales Extremum annimmt. Wir erinnern uns an das Vorgehen im  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

1. Finde alle Punkte  $x \in \mathbb{R}$ , für die  $f'(x) = 0$  gilt (Notwendige Bedingung)
2. Falls in einem solchen Punkt zusätzlich  $f''(x) > 0$  (bzw.  $f''(z) < 0$ ) gilt, so handelt es sich um ein lokales Minimum (bzw. Maximum) (hinreichende Bedingung)

Jetzt verallgemeinern wir diese Strategie. Zunächst:

**Definition 8.55**

Ein Punkt  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  mit  $df(x_0) = 0$  heisst kritischer Punkt von  $f$  (oder stationärer Punkt von  $f$ )

**Satz 8.56**

Sei

$$\begin{aligned} f &: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ f &\in C^2(\Omega); x_0 \in \Omega \end{aligned}$$

1. Falls  $x_0 \in \Omega$  ein lokale Extremum (Minimum oder Maximum) von  $f$  ist, so gilt  $df(x_0) = 0$
2. Falls  $df(x_0) = 0$ , und falls  $\text{Hess}(f)(x_0)$  positiv definit ist, so ist  $x_0$  eine lokale Minimalstelle
3. Falls  $df(x_0) = 0$ , und falls  $\text{Hess}_f(x_0) < 0$  negativ definit ist, so ist  $x_0$  eine lokale Maximalstelle
4. Falls  $df(x_0) = 0$ , und  $\text{Hess}_f(x_0)$  indefinit ist, so ist  $x_0$  ein Sattelpunkt (d.h. jede Umgebung  $U$  von  $x_0$  enthält Punkte  $p, q \in U$  mit  $f(p) > f(x_0) > f(q)$ )

**Beispiel**

1.

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 \\ \nabla f &= (2(x-1), 2(y+2), 2(z+1)) \\ \nabla f(x_0) &= (0, 0, 0) \Rightarrow x_0 = (1, -2, -1) \end{aligned}$$

$$H_f(x_0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$H_f(x_0)$  ist positiv definit  $\Rightarrow x_0(1, -2, -1)$  ist ein lokales Minimum.

2.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \cos(x+2y) + \cos(2x+3y) \\ \nabla f &= (-\sin(x+2y) - 2\sin(2x+3y), \\ &\quad -2\sin(x+2y) - 3\sin(2x+3y)) = (0, 0) \\ \Rightarrow -\sin(x+2y) - 2\sin(2x+3y) &= 0 \\ &\quad -2\sin(x+2y) - 3\sin(2x+3y) = 0 \\ \Rightarrow \sin(2x+3y) &= 0, \quad \sin(x+2y) = 0 \\ \Rightarrow \left. \begin{aligned} 2x+3y &= k\pi \\ x+2y &= l\pi \end{aligned} \right\} &\Rightarrow y = k\pi \text{ und } x = l\pi \end{aligned}$$

Kritische Punkte:  $(\pi l, \pi k) \quad k, l \in \mathbb{Z}$

$$\frac{\partial f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial f}{\partial x \partial y} = -2 \cos(x + 2y) - 6 \cos(2x + 3y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\cos(x + 2y) - 4 \cos(2x + 3y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4 \cos(x + 2y) - 9 \cos(2x + 3y)$$

$$(0, 0) : \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -5 < 0$$

$$|\nabla^2 f(0, 0)| = \begin{vmatrix} -5 & -8 \\ -8 & -13 \end{vmatrix} = 13 \cdot 5 - 64 = 1 < 0$$

$\Rightarrow \nabla^2 f(0, 0)$  ist negativ definit und  $(0, 0)$  ist eine lokale Maximalstelle.

Auch alle Punkte  $(-2\pi k, 2\pi l)$  sind lokale Maxima. Analog, bis auf Addition von Vielfachen von  $2\pi$ , hat  $f$  eine lokale Minimaestelle in  $(\pi, \pi)$  und Sattelpunkte in  $(0, \pi)$  und  $(\pi, 0)$

## 8.6 Vektorwertige Funktionen

Sei  $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ,  $f = (f^i)_{1 \leq i \leq l} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^l$

### Definition 8.57

1. Die Funktion

can,t understand the function, page 203 top

heisst an der Stelle  $x_0 \in \Omega$  differenzierbar, falls jede Komponente  $f^i$ ,  $1 \leq i \leq l$  an der Stelle  $x_0$  differenzierbar ist.

Das Differential  $df(x_0)$  hat die Gestalt

$$df(x_0) = \begin{pmatrix} df^1(x_0) \\ df^l(x_0) \end{pmatrix}$$

2.  $f$  heisst auf  $\Omega$  differenzierbar (bzw. von der Klasse  $C^m$ ,  $m \geq 1$ ) falls jedes  $f^i$  differenzierbar ist (bzw.  $f^i \in C^m(\Omega)$ )  $1 \leq i \leq l$

### Bemerkung 8.58

1. Bezüglich der Standardbasis  $dx^j$ ,  $1 \leq j \leq n$  erhalten wir

$$df^i(x_0) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x_0) dx^j = \left( \frac{\partial f^i}{\partial x^1}(x_0), \dots, \frac{\partial f^i}{\partial x^n}(x_0) \right)$$

die Darstellung

$$df(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f'}{\partial x'}(x_0) & \frac{\partial f'}{\partial x^2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f'}{\partial x^n}(x_0) \\ \frac{\partial f^2}{\partial x'}(x_0) & \frac{\partial f^2}{\partial x^2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f^2}{\partial x^n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^l}{\partial x'}(x_0) & \frac{\partial f^l}{\partial x^2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f^l}{\partial x^n}(x_0) \end{pmatrix}$$

Die  $l \times n$  matrix  $df(x_0) = \left( \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x_0) \right)_{1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq n}$  heisst Jacobi- oder Funktionalmatrix von  $f$  an der Stelle  $x_0$ .

2. Auch im vektorwertigen Fall ist die Funktion  $f$  genau dann differenzierbar in  $x_0$ , wenn eine lineare Abbildung  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  existiert mit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0$$

### Beispiel 8.59

1.

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 : \mathbb{R}^2) \text{ mit } df(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

2. Polarkoordinaten

$$f : [0, \infty) \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

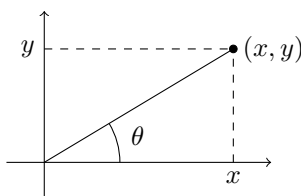
$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \end{pmatrix}$$

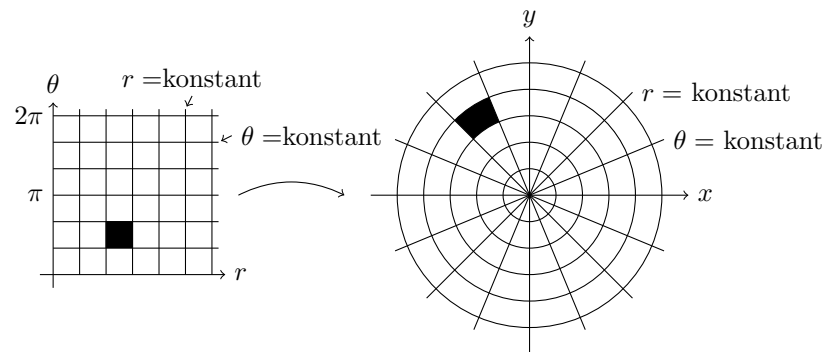
$$df^1(r, \theta) = (\cos \theta, -r \sin \theta)$$

$$df^2(r, \theta) = (\sin \theta, r \cos \theta)$$

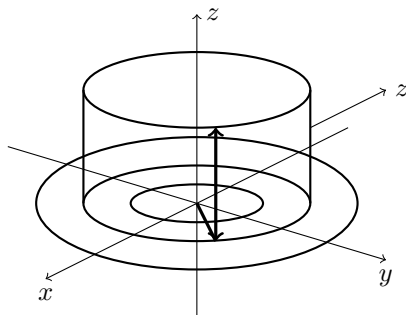
$$df(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \leftarrow \text{Jacobi Matrix}$$

$$\det(df(r, \theta)) = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r$$





### 3. Zylinderkoordinaten



Die  $x, y$  Anteile werde in Polarkoordinaten transformiert und die  $z$  koordinate beibehalten

$$f : [0, \infty] \rightarrow [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \\ f^3 \end{pmatrix}$$

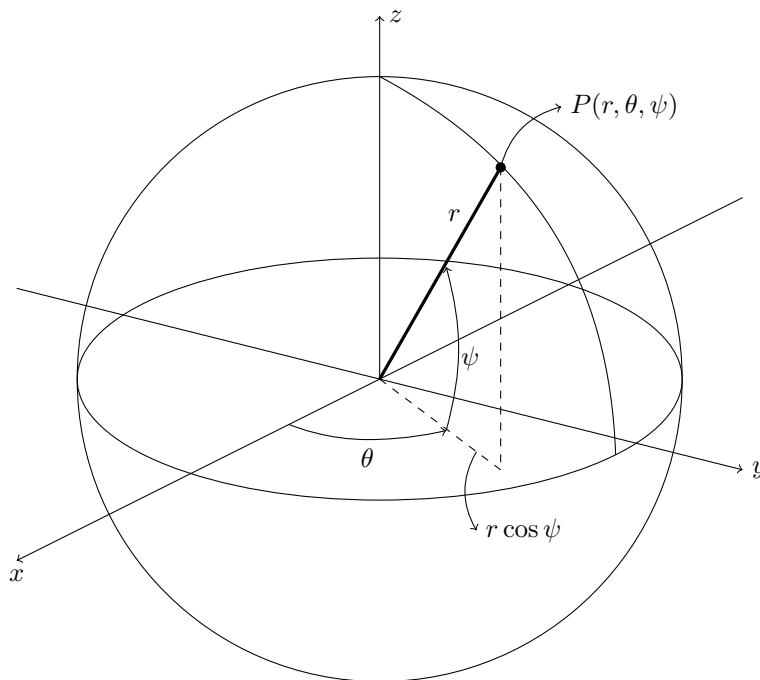
$$df(r, \theta, z) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \leftarrow \text{Jacobi Matrix}$$

$$\det(df(r, \theta, z)) = r (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r$$

(Rotationssymmetrie bezüglich  $z$  Achse)

### 4. Kugelkoordinaten





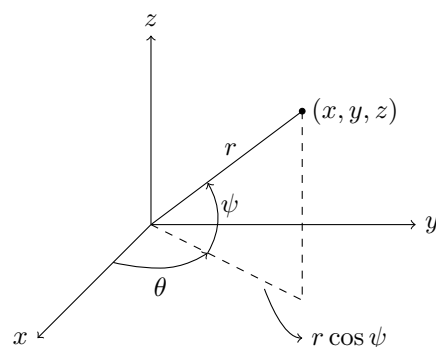
$$f : [0, \infty) \times [0, 2\pi] \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \psi \\ r \sin \theta \cos \psi \\ r \sin \psi \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \psi \\ \sin \theta \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix}$$

$$df(r, \theta, \psi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \psi & -r \sin \theta \cos \psi & -r \cos \theta \sin \psi \\ \sin \theta \cos \psi & r \cos \theta \cos \psi & -r \sin \theta \sin \psi \\ \sin \psi & 0 & r \cos \psi \end{pmatrix}$$

$$\det(df) = r^2 \cos \psi$$

Check question mark,  
chopped content, page  
205.3



$\psi$  : Breitengrad  
 $\theta$  : Längengrad

(Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung)

Es gelten die üblichen Differentiationsregeln

**Satz 8.60**

Seien  $f, g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  an der Stelle  $x_0 \in \Omega$  differenzierbar und  $\alpha \in \mathbb{R}$ . dann sind die Funktionen  $\alpha f$  und  $f + g$  sowie das Skalarprodukt von  $f$  und  $g$  an der Stelle  $x_0$  differenzierbar und

1.  $d(\alpha f)(x_0) = \alpha df(x_0)$
2.  $d(f + g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0)$
3.  $d(f \cdot g)(x_0) = f(x_0) \cdot dg(x_0) + g(x_0) \cdot df(x_0)$   
wobei  $f(x_0) \cdot dg(x_0) = \sum_{i=1}^l f^i(x_0) dg^i(x_0)$

**Satz 8.61**

Seien  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^l$  an der Stelle  $x_0 \in \Omega$  und  $f : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^m$  an der Stelle  $g(x_0)$  differenzierbar.

Dann ist die Funktion  $f \circ g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  an der Stelle  $x_0$  differenzierbar, und

$$d(f \circ g)(x_0) = df(g(x_0)) \cdot dg(x_0)$$

**Beispiel**

Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \rightarrow \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} \quad df = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

$$g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \rightarrow \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 \\ xyz \end{pmatrix} \quad dg = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$$

$$(f \circ g) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \rightarrow \begin{pmatrix} (x^2 + y^2 + z^2)^2 - (xyz)^2 \\ 2(x^2 + y^2 + z^2)(xyz) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} d(f \circ g)(x, y, z) &= df(g(x, y, z)) \cdot dg(x, y, z) \\ &= \begin{pmatrix} 2(x^2 + y^2 + z^2) & -2xyz \\ 2xyz & 2(x^2 + y^2 + z^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ yz & xz & xy \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4x(x^2 + y^2 + z^2) - 2xy^2z^2 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \end{aligned}$$