Feb 17 - 2014

Kapitel 6 Integration

Das Riemann Integral dient zur Lösung von folgenden 3 Problemkreisen:

(1) (a) Gegeben sei eine stetige Funktion $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, Gesucht ist eine "Stammfunktion", d.h. eine differenzierbare Funktion $F: [a, b] \to \mathbb{R}$ mit

$$F'(t) = f(t) \qquad \forall\, t \in [a, b]$$

(b) Für Naturwissenschaft und Technik ist die Folgende Verallgemeinerung von a) wichtig.

Sei $f: [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben
Gesucht ist eine differenzierbare Funktion $\varphi: [a, b] \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)), \qquad t \in [a, b]$$

Man nennt ein solches φ eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = f(x, y)$$

II Viele in den Natur und Ingenieurwissenschaften auftretenden Grössen benötigen zu ihrer exakten Definition einen Grenzprozess der folgenden Art:

Wirkt eine konstante Kraft f längs eines Weges der Länge s, und zwar längs der x-Achse vom Punkt a bis zum Punkt $b := a + s$, so versteht man unter der von der konstanten Kraft f geleisteten Arbeit das Produkt $f \cdot s = f(b-a)$

Ist die Kraft f jedoch örtlich variabel, d.h. $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion des Ortes $x \in [a,b]$, so wird man folgendermassen vorgehen.

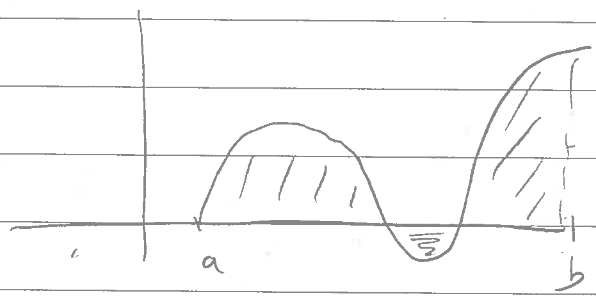
Zerlege das Interval $[a,b]$ in kleine Teilintervale $I_1, \dots I_n$. Wähle in jedem Interval $I_k := [x_{k-1}, x_k]$ einen Punkt ξ_k aus.

Man wird dann die "Riemannsche Summe"

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \quad \text{als Näherung}$$

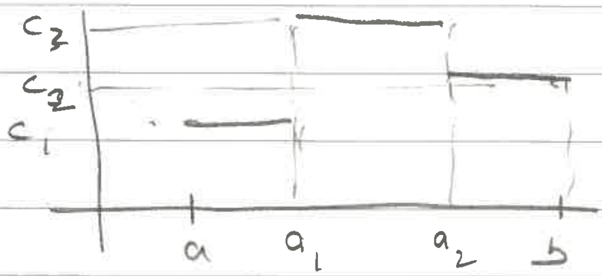
für die gesuchte Arbeit A ansehen. Hierzu wird man insbesondere dann berechtigt sein, wenn man mit jeder genügend feinen Zerlegung des Intervals I einem festen Wert A beliebig nahe kommt

II Sei $f : [a, b] \to [0, \infty]$ eine (stetige) Funktion. Gesucht ist eine vernünftige Definition des Flächeninhalts A des Gebietes zwischen der x-Achse und dem Graphen von f

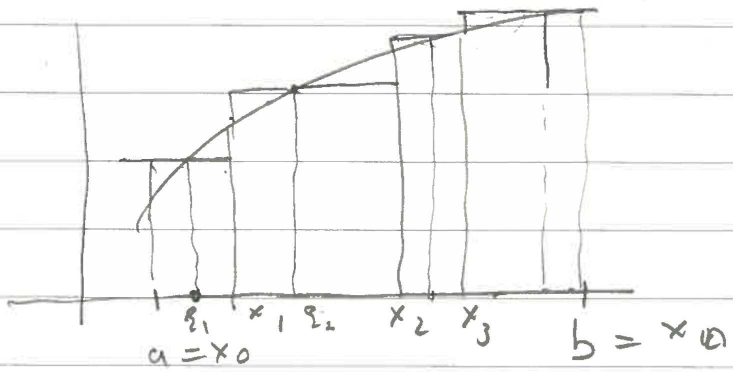


Dies ist sehr einfach, wenn die Funktion f überall den konstanten Wert $f(x) = c$ hat für eine feste reelle Zahl $c \in \mathbb{R}$. In diesem Fall ist die Fläche unter dem Graphen von f ein Rechteck und wir definieren dessen Flächeninhalt einfach als Breite mal Höhe, also das Produkt $A = (b-a)c$. Man beachte, dass die Zahl c auch negativ sein darf und dann ist auch A negativ.

Eine einfache Formel ergibt sich auch für eine Funktion, die sich aus konstanten Funktionen auf endlich vielen Teilintervallen von $[a, b]$ zusammensetzen lässt



Für allgemeine beschränkte Funktionen kann man nun wie in II vorgehen.



Wir wählen eine Aufteilung (Zerlegung, Einteilung, Partition) des Intervals $I = [a,b]$ in endlich viele Teilintervale.

Aus jedem dieser Teilintervale I_k ersetzen f durch eine Funktion die auf diesem Teilintervall konstant ist und in einem noch zu klärenden Sinn nicht allzu stark von f abweicht. Dann bilden wir die Summe der Flächeninhalte der auf diese Weise erhaltenen Rechtecke. Diese Summe ist als Näherungswert für das gewünschte Fläche zu verstehen.

$$A \sim \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

Um den genauen Wert der Fläche festzulegen bilden wir immer feiner Zerlegungen des Intervals.
Est ist dann das Grenzwertverhalten der diesen Summen zu untersuchen.

§6.1 Riemann Integral: Definition, Elementare Eigenschaften.

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion

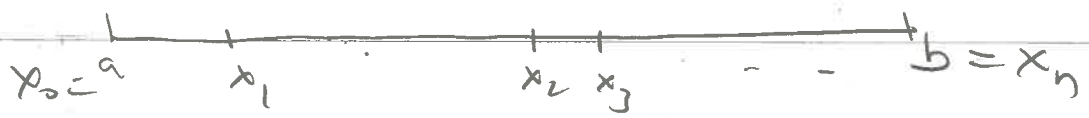
Defn 6.1 Eine Partition oder Zerlegung oder Einteilung oder Unterteilung eines Intervals $[a,b]$ ist eine endliche Menge

$$P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$$

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_n$$

$$\mathcal{P}(I) := \{P \subset I \mid a, b \in P,\ P \text{ ist endlich}\}$$

die Menge aller Partitionen.



Die <u>Feinheit</u> der Zerlegung P ist dabei definiert durch

$$\delta(P) := \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$$

d.h. $\delta(P)$ ist die Länge des grössten Teilintervals

$$I_i := [x_i , x_{i-1}] \quad k = i, \ldots, n.$$

2) Wahl ξ_i von Zwischenpunkten

$$x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i \qquad 1 \leq i \leq n$$

Jede Summe der Form

$$S(f, P, \xi) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

nennt man eine <u>Riemannsche Summe</u>
Partition
der Zerlegung P, und ξ

Die Summe

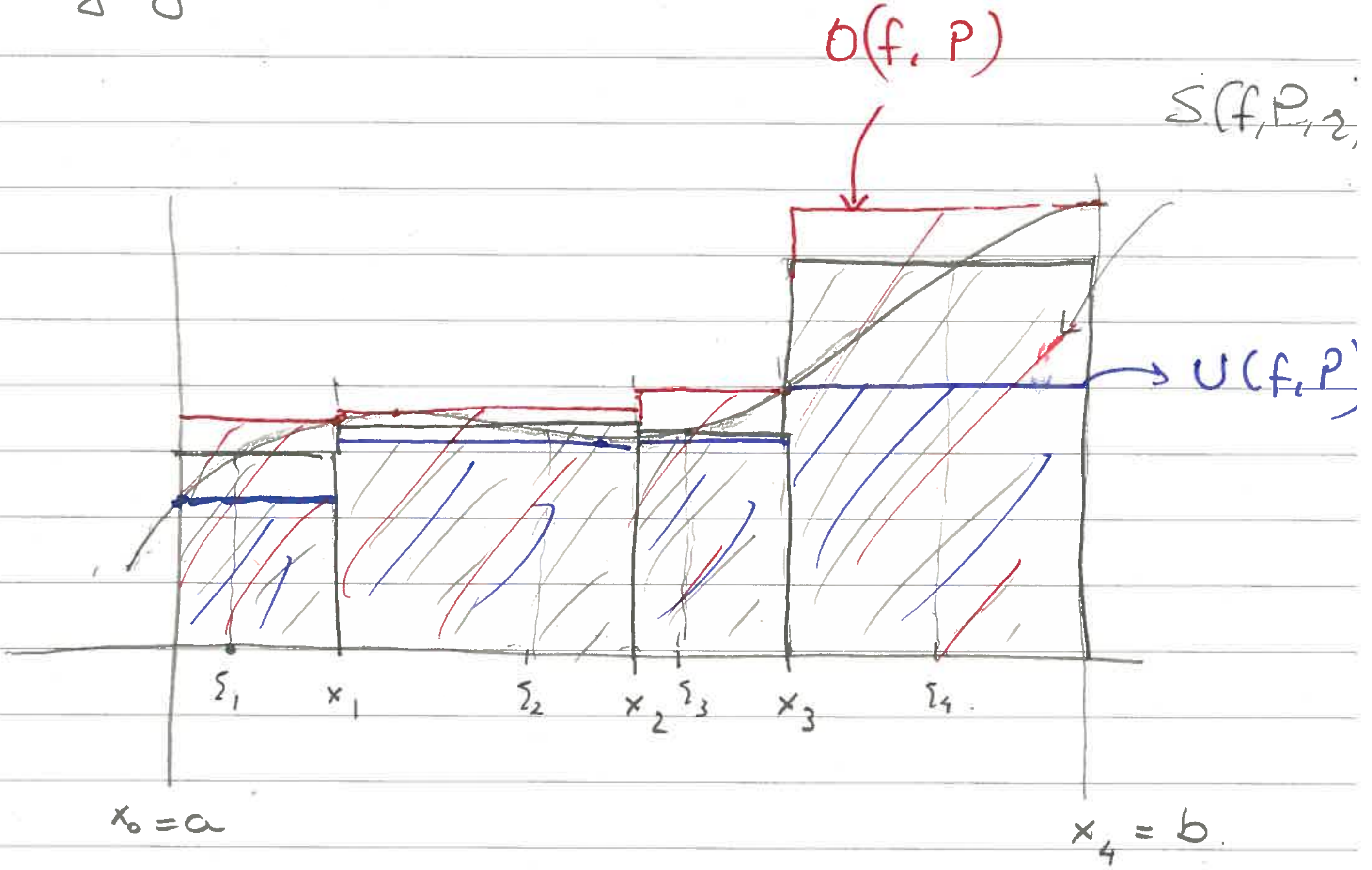
$$U(f, P) := \sum_{i=1}^{n} \left(\inf_{[x_i, x_{i-1}]} f \right)(x_i - x_{i-1})$$

nennt man die <u>Untersumme</u> von $f(x)$ zur Zerlegung P

und

$$O(f, P) := \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \right) (x_i - x_{i-1})$$

nennt man die <u>Obersumme</u> von $f(x)$ zur Zerlegung P.



__Bemerkung 6.2.__ Aus den Definitionen folgt direkt

a) Für eine feste Zerlegung P gilt stets

$$U(f,P) \leq S(f,P,\xi) \leq O(f,P)$$

b) Für zwei Partitionen $P, Q \in \mathcal{P}(I)$ gilt die Ungleichung

$$P \subset Q \implies$$

$$U(f,P) \leq U(f,Q) \leq O(f,Q) \leq O(f,P)$$

__Beweis.__ Um dies zu verstehen, ist es nützlich, den Fall zu betrachten, dass die Zerlegung Q genau einen punkt mehr enthält als P.

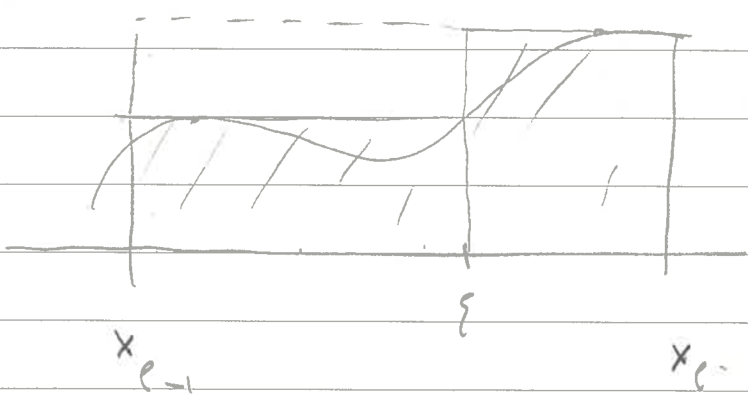
Set $P = \{x_0, \dots, x_N\}$

$Q = P \cup \{\xi\}$ wobei ξ ein neuer Unterteilungspunkt, also nicht gleich einem der Elemente von P ist. Dann gibt es genau ein $\ell \in \{1, \dots, N\}$ so dass $x_{\ell-1} < \xi < x_\ell$ ist.

Damit erhält man

$$\left(\sup_{[x_{\ell-1},\xi]} f\right)(\xi - x_{\ell-1}) + \left(\sup_{[\xi,x_\ell]} f\right)(x_\ell - \xi)$$

$$\le \left(\sup_{[x_{\ell-1},x_\ell]} f\right)(x_\ell - x_{\ell-1}).$$



Addiert man dazu alle Summanden in

$$O(f,P) = \sum_i \left(\sup_{[x_{i-1},x_i]} f\right)(x_i - x_{i-1})$$

mit $i \neq \ell$ so ergibt sich die Ungleichung

$$O(f,Q) \le O(f,P)$$

Ebenso beweist man $U(f,Q) \ge U(f,P)$

Damit ist b) für den Fall bewiesen, dass Q genau ein Element mehr als P enthält. Der allgemeine Fall lässt sich hierauf leicht durch vollständige Induktion zurückführen

<u>Lemma 6.3</u> Sei $f: I:=[a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann gilt

$$\sup_{P\in\mathcal{P}(I)} U(f,P) \leq \inf_{P\in\mathcal{P}(I)} O(f,P)$$

<u>Beweis</u>: Aus

$$P\subset Q \Rightarrow U(f,P) \leq U(f,Q) \leq O(f,Q) \leq O(f,P)$$

folgt, dass die Zah $O(f,Q)$ für jede Partition $Q\in\mathcal{P}(I)$ eine obere Schranke für die Menge $\{U(f,P) \mid P\in\mathcal{P}(I)\}$ ist.

Also folgt aus der Definition des Supremums als kleinste obere Schranke, das

$$\sup_{P\in\mathcal{P}(I)} U(f,P) \leq O(f,Q) \text{ ist.}$$

Diese Ungleichung gilt für jede Partition $Q\in\mathcal{P}(I)$

Das heisst wiederum, dass die Zahl

$\sup_{P \in \mathcal{P}(I)} U(f, P)$ eine untere Schranke für die Menge $\{O(f, Q) \mid Q \in \mathcal{P}(I)\}$ ist.

Also folgt aus der Definition der Infimum als grösste untere Schranke, dass die Gleichung

$$\sup_{P \in \mathcal{P}(I)} U(f, P) \leq \inf_{Q \in \mathcal{P}(I)} O(f, Q)$$ ist

Damit Lemma 6.3 ist bewiesen.

6.2.2 Struve.

Defn 6.4 1) Für beschränktes $f : [a,b] \to \mathbb{R}$
$\underset{I}{\shortparallel}$

bezeichnen

$$\underline{\int_a^b} f\,dx = \sup\{U(f,P) : P \in \mathcal{P}(I)\}$$

$$\overline{\int_a^b} f\,dx = \inf\{O(f,P) : P \in \mathcal{P}(I)\}$$

das <u>untere</u> und <u>obere</u> <u>Integral</u> von f

2) Ein solches f heisst über $[a,b]$ <u>Riemann-Integrabel</u> falls

$$\underline{\int_a^b} f\,dx = \overline{\int_a^b} f\,dx.$$

In diesem Fall heisst $A := \int_a^b f\,dx$

das <u>Riemann Integral</u> <u>von f</u> über dem Intervall $[a,b]$.

Bsp 6.5. 1) Sei $c \in \mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$ die konstante Funktion mit dem Wert c, dass heisst

$$f(x) = c \qquad \forall x \in I$$

Dann gilt

$$U(f, P) = O(f, P) = (b-a)\,c. \qquad \forall P \in \mathcal{P}(I)$$

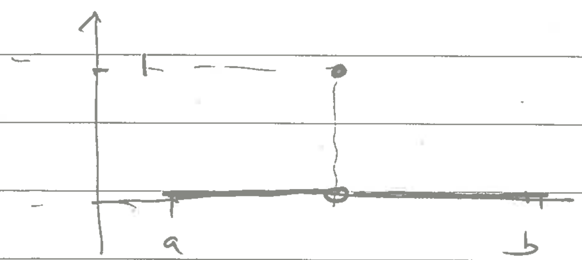
$\Rightarrow$ f ist Riemann integrierbar und

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b c\,dx = c\,(b-a).$$

In diesem einfachen Fall stimmt als unsere Definition mit der Interpretations des Flächeninhalts als Breite mal Höhe überein.

Man beachte, dass die Konstante c auch negative sein darf

2) $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq x_0 \\ 1 & \text{für } x = x_0 \end{cases} \qquad x_0 \in [a, b]$$



Dann ist f integrierbar mit

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0$$

denn es gilt

$$U(f,P) = 0 \quad \text{und}$$

$$0 < O(f,P) \leq 2\,\delta(P) \qquad \forall P$$

O(f, P) kann,
durch geeignete Wahl der Partition, beliebig klein gewählt werden.

z.B. $P_n : \{a, a + \frac{(b-a)}{n}, \dots, b\}$.

$$\Rightarrow \delta(P) = \frac{b-a}{n}$$

$$\inf_{P \in \mathcal{P}(I)} O(f,P) = 0$$

Feb 19 2014
we 2

(3) $f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [a,b] \setminus \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \in [a,b] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$

Dann gilt $U(f,P) = 0$ und $O(f,P) = 1$
$\forall P \in \mathcal{P}(I)$

$\Rightarrow f$ ist nicht Integrierbar
(f ist beschränkt aber nicht Integrierbar)

Satz 6.6 (Riemannsches Kriterium für integrierbarkeit)

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent

(a) $f(x)$ ist integrierbar über $[a,b]$

(b) Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine Partition $Q \in \mathcal{P}(I)$ mit

$$O(f, Q) - U(f, Q) < \varepsilon .$$

Beweis: ((a) $\Rightarrow$ (b))

Sei f Riemann integrierbar, $A := \int_a^b f(x)dx$

$$= \sup U(f, P)$$
$$= \inf O(f, P)$$

Nach definition von Sup und Inf folgt dass zwei Partitionen $P_1, P_2 \in \mathcal{P}(I)$ existieren, so dass

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < U(f, P_1) \qquad O(f, P_2) < A + \frac{\varepsilon}{2}$$

Definiere $Q := P_1 \cup P_2$. Dann $P_1 \subset Q$ und $P_2 \subset Q$

Nach Bmk 6.2 b) folgt

(*) $U(f, P_1) \leq U(f, Q)$ und

(**) $O(f, Q) \leq O(f, P_2)$

$(*), (**) \Rightarrow A - \frac{\varepsilon}{2} < U(f, Q) \leq O(f, Q) < A + \frac{\varepsilon}{2}$

$$\Rightarrow O(f, Q) - U(f, Q) < \varepsilon \qquad \boxtimes$$

(b) $\Rightarrow$ (a) für alle $P \in \mathcal{P}(I)$

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq O(f, P) - U(f, P)$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \operatorname{Inf} O(f, P), \qquad \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \operatorname{Sup} U(f, P)$$

Aus (b) folgt das $\forall \varepsilon > 0$

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

$\Rightarrow f$ ist integrierbar.

$\boxtimes$

Satz 6.7 1) Jede stetige Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ ist R. integrierbar

2) Jede Monotone Funktion ist R. integrierbar

Beweis 1) $f: I \to \mathbb{R}$ stetig, $I = [a, b]$ kompakt

$\Rightarrow f$ gleichmässig stetig

d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$, gibt es $\delta > 0$ mit

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Für eine $P \in \mathcal{P}(I)$ mit Feinheit $\delta(P) < \delta$ gilt dann

$$O(f, P) - U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \right)(x_i - x_{i-1})$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\varepsilon}{b-a} \right)(x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})}_{b-a}$$

$$= \varepsilon$$

Somit ist f nach Riemannsche Kriterium integrierbar.

2) Sei f monot. wachsend
$P \in \mathcal{P}(I)$ eine uniforme Partition mit

$$x_i = a + \left(\frac{b-a}{n}\right) i \qquad 0 \le i \le n$$

$$O(f,P) - U(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(f(x_{i+1}) - f(x_i)\right)(x_{i+1} - x_i)$$

$$= \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(f(x_{i+1}) - f(x_i)\right)$$

$$= \frac{b-a}{n}\left(f(b) - f(a)\right) < \varepsilon$$

für jede $\varepsilon > 0$, haben wir $\frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{n} < \varepsilon$
für hinreichend gross n
Nach dem Riemannschem Kriterium ist
f integrierbar
(mon. fallend ist analog.)

Feb 24 - 2010

Satz 6.8. (Riemannsche Summe).
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.
Folgende Aussagen sind äquivalent.
(I) f ist Riemann integrierbar und $\int_a^b f(x)dx = A \in \mathbb{R}$

(II) Für jedes $\varepsilon > 0$, existiert eine Zahl $\delta > 0$,
so dass für jede Partition $P = \{x_0, x_1, \dots x_N\}$
von I und alle $\xi_1, \dots, \xi_N \in \mathbb{R}$ gilt

$$\left.\begin{array}{l}\delta(P) < \delta \\ x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k \ \forall k\end{array}\right. \Longrightarrow \left| A - \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| < \varepsilon$$

Dieser Satz lässt sich auch so formulieren:

Eine beschränkte Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann integrierbar wenn der Grenzwert

$$\lim_{\substack{\delta(P) \to 0 \\ \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]}} \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \text{ existiert}$$

und dann haben wir $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta(P) \to 0} S(f, P, \xi)$

<u>Beweis:</u> Siehe D. Salamon Das Riemannsche Integral (Satz 3.1)

<u>Kor 6.8</u> Seien $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte und integrierbare Funktion. $\{P^{(n)}\}$ eine Folge von Partitionen des Intervals $[a, b]$ mit $\delta(P^{(n)}) \to 0$ für $n \to \infty$ und $\{\xi^{(n)}\}$ eine feste Wahl von Zwischenpunkten zur Partition $P^{(n)}$.
Dann ist

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} S(f, P^{(n)}, \xi^{(n)}).$$

<u>Beweis</u> Wegen Satz 6.8 existiert zu jedem $\varepsilon > 0$, ein $\delta > 0$ derart, das für alle Partitionen $\delta(P) < \delta$ die Ungleichung
$$\left| S(f, P, \xi) - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon$$
gilt und zwar bei beliebiger Wahl der Zwischenpunkte ξ.

Wegen $\delta(P^{(n)}) \to 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\delta(P^{(n)}) < \delta$ für alle $n \geq N$.

Für jedes $n \geq N$ ist daher
$$\left| S(f, P^{(n)}, \xi) - \int_a^b f\,dx \right| < \varepsilon$$
woraus sich die Behauptung unmittelbar ergibt.

<u>Bsp</u> $\int_0^1 (x^2 - x)\,dx = ?$

$f(x) = x^2 - x$ stetig $\overset{\text{Satz 6.7}}{\Longrightarrow}$ f integrierbar

Wir wenden Kor. an. Wir betrachten die Folge $\{P^{(n)}\}$ von äquidistanten Partitionen des Intervalls $[0,1]$ mit
$$x_k^{(n)} := \frac{k}{n} \quad \forall\, k = 0, 1, \ldots n$$

Dann $\delta(P^{(n)}) = \frac{1}{n} \to 0$ für $n \to \infty$

19.2

Wir wählen die Zwischenpunkte

$$\xi_k^{(n)} := \frac{k}{n} \quad \forall k = 1, \dots, n$$

Die $\xi_k^{(n)}$ sind die rechten Endpunkte der Teilintervalle $I_{k-1} := \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$

Hiermit folgt

$$S(f, P^{(n)}, \xi^{(n)}) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k^{(n)}) \left(x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k^2}{n^2} - \frac{k}{n}\right)\left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k^2}{n^2} - \frac{k}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k$$

$$= \frac{1}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) - \frac{1}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$\rightarrow \frac{2}{6} - \frac{1}{2} = \frac{-1}{6}.$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (x^2 - x)\, dx = \frac{-1}{6}.$$

Eigenschaften des Integrals.

Satz 6.9 Seien $a < c < b$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $f, g : I := [a,b] \to \mathbb{R}$ zwei Riemann integrierbare Funktionen. Dann gilt folgendes,

(Satz 6.3.2 Struve)

(1) Die Funktionen $\alpha f + \beta g$ ist integrierbar mit

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)\,dx = \alpha \int_a^b f\,dx + \beta \int_a^b g\,dx$$

(Satz (6.3.1) Struve)

(2) Wenn f, g die Ungleichung $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$ erfüllen, dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

(Kor 6.3.1 Struve)

(3) $|f|$ sind R. integrierbar und

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

(4) Das Produkt fg ist R. integrierbar.

Bmk 6.10 Wir bezeichnen die Menge aller Riemann integrierbaren Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ mit

$$\mathcal{R}(I) := \{ f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ R. integrierbar} \}.$$

Nach Satz 6.9 1) ist dies ein reeller Vektorraum

$\mathcal{R}(I)$ ist ein Unterraum des Vektorraumes aller reelwertigen Funktion

$$\mathcal{F}(I) := \{ f : I \to \mathbb{R} \}$$

$$C(I) := \{ f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \}$$

ist ein Unterraum von $\mathcal{R}(I)$

$$C(I) \subset \mathcal{R}(I) \subset \mathcal{F}(I)$$

Beweis 6.9. (1) Setze $h := \alpha f + \beta g$ und sei $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben.

Da f und g integrierbar sind, existieren wegen Riem. Kriterium (Satz 6.6) Partitionen P_1 und $P_2 \in \mathcal{P}(I)$ mit

$$O(f, P_1) - U(f, P_1) < \frac{\varepsilon}{2(|\alpha| + |\beta|)} \quad \text{und}$$

$$O(g, P_2) - U(g, P_2) < \frac{\varepsilon}{2(|\alpha| + |\beta|)}$$

Aus der Definition von h folgt zunächst

$$|h(x) - h(y)| \leq |\alpha| \, |f(x) - f(y)| + |\beta| \, |g(x) - g(y)|$$

Mit der verfeinerten Partition $P = P_1 \cup P_2$ ergibt sich unter Verwendung von

(*) Für beschränkte Funktion h auf einem Intervall I gilt

$$\sup_{x \in I} h(x) - \inf_{x \in I} h(x) = \sup\{h(x) - h(y) \mid x, y \in I\}$$

$$= \sup\{|h(x) - h(y)| \mid x, y \in I\}$$

dann

$$O(h,P) - U(h,P) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sup_{[x_{k-1}, x_k]} h - \inf_{[x_{k-1}, x_k]} h\right)(x_k - x_{k-1})$$

$$\overset{(*)}{=} \sum \sup_{x,y \in I_k} |h(x) - h(y)| \, (x_k - x_{k-1})$$

$$\leq |\alpha| \sum \sup_{x,y \in I_k} |f(x) - f(y)| (x_k - x_{k-1})$$

$$+ |\beta| \sum \sup |g(x) - g(y)| (x_k - x_{k-1})$$

$$= |\alpha| \sum_{k=1}^{n} \left(\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f\right)(x_k - x_{k-1})$$

$$+ |\beta| \sum \left(\sup g - \inf g\right)(x_k - x_{k-1})$$

$$= |\alpha| \left[O(f,P) - U(f,P)\right] +$$

$$|\beta| \left[O(g,P) - U(g,P)\right]$$

$$< |\alpha| \frac{\varepsilon}{2(|\alpha| + |\beta|)} + |\beta| \frac{\varepsilon}{2(|\alpha| + |\beta|)} = \varepsilon$$

Noch

Bmk 6.2 : $P_1 \subset P$

$$\Rightarrow U(f, P_1) < U(f, P) \quad \text{und}$$

$$O(f, P) < O(f, P_1)$$

Dann, $-U(f, P) < -U(f, P_1)$ und,

$$O(f, P) - U(f, P) < O(f, P_1) - U(f, P_1)$$

$$< \frac{\varepsilon}{2(|\alpha| + |\beta|)}$$

(2) Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ integrierbar mit $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in I$.

Die Funktion $h := g - f$ ist wegen (1) integrierbar. Sei nun $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ eine beliebige Partition von $[a, b]$.

Aus $h(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$ folgt dann

$$\inf_{I_k} h(x) \geq 0 \quad \forall k = 0, 1, \dots n \quad \text{und daher}$$

$$U(h, P) = \sum_P \left(\inf_{I_k} h\right)(x_k - x_{k-1}) \geq 0$$

Was wiederum

$$\int_{\underline{a}}^{b} h(x)\,dx = \sup_{P} U(h,P) \geq 0 \quad \text{impliziert}$$

Da h aber integrierbar ist, folgt hieraus

$$0 \leq \int_{\underline{a}}^{b} h(x)\,dx = \int_{a}^{b} h(x)\,dx$$

$$= \int_{a}^{b} (g(x) - f(x))\,dx = \int_{a}^{b} g(x)\,dx - \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

Dies liefert die Behauptung $\int_a^b g(x)\,dx \geq \int_a^b f(x)\,dx$

(3) Nun gilt

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \quad \forall x \in I$$

Nach (2) folgt daraus die Ungleichung

$$-\int_{a}^{b} |f(x)|\,dx \leq \int_{a}^{b} f(x)\,dx \leq \int_{a}^{b} |f(x)|\,dx$$

Diese Ungleichung ist äquivalent zu

$$\left|\int_{a}^{b} f(x)\,dx\right| < \int_{a}^{b} |f(x)|\,dx .$$

(4) Als integrierbare Funktionen sind f und g beschränkt. Also existieren die Konstanten

$$\alpha := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \quad \text{und} \quad \beta := \sup_{x\in[a,b]} |g(x)|.$$

Wegen Riem. Kriterium (Satz 6.6) gibt es Partitionen P_1, P_2 mit

$$O(f,P_1) - U(f,P_1) < \frac{\varepsilon}{2(\alpha+\beta)}, \quad O(g,P_2) - U(g,P_2) < \frac{\varepsilon}{2(\alpha+\beta)}$$

Setzen wir $h := fg$ so gilt

$$|h(x) - h(y)| \leq |f(x)||g(x) - g(y)| + |g(y)||f(x) - f(y)|$$

$$\leq \alpha\,|g(x) - g(y)| + \beta\,|f(x) - f(y)|$$

$\forall\, x,y \in [a,b]$.

Sei $P = P_1 \cup P_2$.

Wie in dem Beweis von (1) ergibt sich unter Verwendung von

$$\sup_{x\in I} h - \inf_{x\in I} h = \sup\{|h(x) - h(y)| \; x,y \in I\}$$

dann

$O(h,P) - U(h,P)$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\sup_{I_k} h - \inf_{I_k} h\right)(x_k - x_{k-1})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sup_{x,y \in I_k} |h(x) - h(y)| \, (x_k - x_{k-1})$$

$$\leq |\beta| \sum \sup_{I_k} |f(x) - f(y)| \, (x_k - x_{k-1}) + |\alpha| \sum \sup |g(x) - g(y)| \, (x_k - x_{k-1})$$

$$= |\beta| \sum \left(\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f\right)(x_k - x_{k-1}) + |\alpha| \sum \left(\sup g - \inf g\right)(x_k - x_{k-1})$$

$$= |\beta| \left[O(f,P) - U(f,P)\right] + |\alpha| \left[O(g,P) - U(g,P)\right]$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Satz 6.10: Standardabschätzungen.
Sei f integrierbar über $[a,b]$. Dann gelten die Abschätzungen

$$(b-a) \inf_{[a,b]} f \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq (b-a) \sup_{[a,b]} f.$$

Beweis: Für die Partition $P = \{a, b\}$ von $[a,b]$ folgt sofort

$$(b-a) \inf_{[a,b]} f = U(f,P) \leq \int_a^b f(x)\,dx < O(f,P) = (b-a) \sup_{[a,b]} f$$

Satz 6.11 Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann ist f auch auf jedem Teilinterval $[c,d] \subseteq [a,b]$ integrierbar.

Beweis: f ist auf $[a,b]$ integrierbar

$\xRightarrow[\text{Satz 6.6 Rieman. Kriterium}]{}$

Zu jedem $\varepsilon > 0$, existiert eine Partition P' von $[a,b]$ mit

$$O(f, P') - U(f, P') < \varepsilon.$$

Wir betrachten dann die Verfeinerung

$$P'' := P' \cup \{c, d\}$$

Wegen Bmk 6.2 : ($P \subset Q \Rightarrow$ $U(f,P) \leq U(f,Q) \leq O(f,Q) \leq O(f,P)$)

haben wir

$$O(f, P'') - U(f, P'') < \varepsilon.$$

Sei nun $P := P'' \cap [c,d]$ die Restriktion der Partition P'' auf $[c,d]$

Dann gilt mit $g := f|_{[c,d]}$ die

Abschätzung

$$O(g,P) - U(g,P) = \sum_{P} \left(M_k(g) - m_k(g)\right)(x_k - x_{k-1})$$

$$= \sum_{P} \left(M_k(f) - m_k(f)\right)(x_k - x_{k-1})$$

$$\leq \sum_{P''} \left(M''_k(f) - m''_k(f)\right)(x_k - x_{k-1})$$

$$= O(f, P'') - U(f, P'') < \varepsilon.$$

wobei

$M_k(f) := \sup\limits_{I_k \subset P} f \qquad m_k(f) := \inf\limits_{I_k \subset P} f$

(Satz 6.3.3 Struwe) Gebietsadditivität)

Satz 6.12 Seien $a \leq b \leq c$.

Die Funktion $f : [a,c] \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar falls beide Einschränkungen

$f|_{[a,b]}$ und $f|_{[b,c]}$ integrierbar sind.

In diesem Fall gilt

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

Konvention 6.13 ① Sei f integrabel auf einem Intervall I

Für $a \leq b$ in I definiert man

$$\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Mit dieser Konvention gelten alle bisherigen Eigenschaften. z.B

$$\forall a, b, c \in I: \quad \int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$$

② $\int_a^a f(x)\,dx := 0.$

§6.2 Differentiation und Integration.

In diesem Kapitel wird der Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration hergestellt.

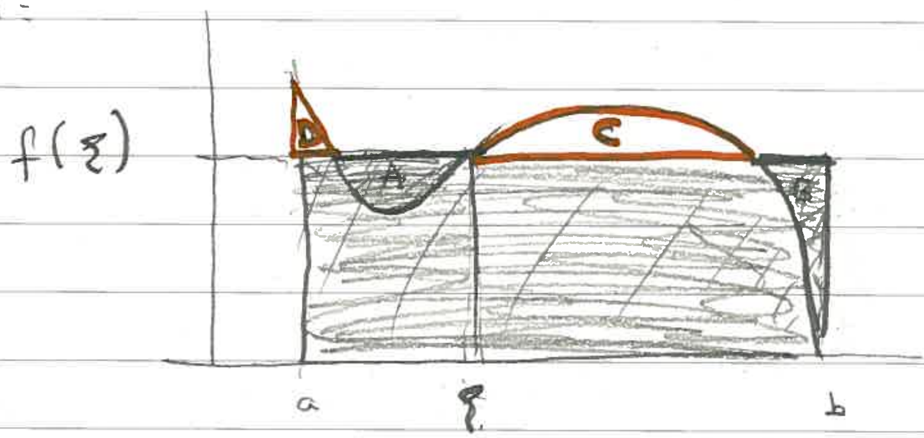
Zu diesem Zweck beginnen wir mit dem folgenden Satz, Mittelwertsatz der Integralrechnung.

Satz 6.14 (MWS der Integralrechnung).

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a).$$

Geometrisch:



$A + B = C + D$

Beweis: Wir setzen

$$m := \min\{f(x) \mid x \in [a,b]\} = f(x_-)$$

$$M := \max\{f(x) \mid x \in [a,b]\} = f(x_+)$$

Wegen Satz 6.10 (Standardabschätzungen)

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

$$f(x_-) = m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M = f(x_+)$$

Also $1/(b-a) \int_a^b f(x)dx = \mu$ für ein $\mu \in [m, M]$

Da f stetig ist, wegen Zwischenwertsatz

gibt es $\xi \in [a,b]$ mit $\mu = f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

$\boxtimes$

Nun kommt die erste Hauptsatz der Diff- und Integralrechnung.

Satz (6.15) (Hauptsatz A) Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Definiere für jeder $x \in [a,b]$

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

Dann ist $F: I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$.

<u>Beweis</u>: Für jedes $h \neq 0$ ist

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

Nach dem MWS der Integralrechnung existiert zu jedem solchen $h \neq 0$ ein Zwischenpunkt $\xi_h \in [x, x+h]$ (bzw. $\xi_h \in [x+h, x]$ falls $h < 0$)

mit
$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt = h\, f(\xi_h).$$

Nun ist $\xi_h \to x$ für $h \to 0$. Da f stetig ist,

$$f(\xi_h) \to f(x) \quad \text{für } h \to 0$$

Damit erhalten wir

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(h f(\xi_h)\right) = f(x)$$

$\blacksquare$

Folgender Begriff ist dann naheliegend:

<u>Defn 6.16</u> Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Ein <u>Stammfunktion</u> von f (auf (a,b)) ist ein differenzierbare Funktion $F: (a,b) \to \mathbb{R}$ mit $F'(x) = f(x)$.

Wegen Satz 6.15, hat jede stetige Funktion mindestens eine Stammfunktion.

Mit Ausnahme einer additiven Konstante, die beim Differenzieren ja wegfällt, ist die Stammfunktion auch eindeutig bestimmt. Dies ist der Inhalt des folgenden Satzes.

<u>Satz 6.17</u> Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Interval und $F: I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f: I \to \mathbb{R}$. Dann gelten:

(a) Die Funktion $F + c$ ist für jede Konstante $c \in \mathbb{R}$ ebenfalls eine Stammfunk von f

(b) Ist $G: I \to \mathbb{R}$ eine weitere Stammfunktion von f, so gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$

mit $G = F + C$.

<u>Beweis</u> (a) Offenbar ist ~~mit~~ mit F auch $F+C$ diff.bar und es gilt

$$(F+C)' = F' = f$$

(b) Da F und G Stammfunktionen von f sind, gilt $F' = f$, $G' = f$.

Also $(F-G)' = 0$ und $F - G =$ konstante Funktion.

<u>Definition 6.18.</u> Eine <u>Stammfunktion von f</u> heisst auch <u>unbestimmtes Integral von f</u> und wird bezeichnet mit $\int f(x)\,dx$.

Mittels einer Stammfunktion lässt sich das Integral einer gegebenen Abbildung sehr leicht berechnen.

Dies ist der Inhalt des Hauptsatz B)

Satz 6.19 (Hauptsatz der Diff.- und Integralrechnung, Version B).

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und F eine beliebige Stammfunktion von f. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_a^b$$

$\forall\, a, b \in I$.

Beweis: Für $x \in I$ definieren wir

$$F_0(x) := \int_a^x f(t)\,dt.$$

Dann ist $F_0 : I \to \mathbb{R}$ wegen Satz 6.15 (Hauptsatz A) eine (spezielle) Stammfunktion von f mit

$$F_0(a) = 0 \quad \text{und} \quad F_0(b) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Für die beliebige Stammfunktion F gilt somit $F - F_0 = c$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$.

Deshalb ist

$$F(b) - F(a) = F_0(b) - F_0(a) = F_0(b) = \int_a^b f(t)\,dt$$

womit alles bewiesen ist. ☒

Der Satz 6.19 ist das zentrale Ergebnis zur Berechnung konkreter Integrale

Man benötigt nur eine Stammfunktion und hat von dieser lediglich die Differenz der Funktionswerte zwischen den beiden Endpunkten des Intervalls $[a,b]$ zu bilden.

Insbesondere spielt es keine Rolle, welche Werte die Stammfunktion im Inneren des Intervalls $[a,b]$ annimmt.

Beispiele von Stammfunktionen

Bsp 6.20.

	defn Bereich	Funktion f	Stammfunkt F
100 fen Zen	$(0,\infty)$	x^{α}, $\alpha \in \mathbb{R}$.	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$, $\alpha \neq -1$ $\log\lvert x\rvert + c$ $\alpha = -1$
	$\mathbb{R}$	x^n, $n \in \mathbb{N}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ $n \in \mathbb{N}$
Exponent	$\mathbb{R}$	e^x	$e^x + c$

Trigonometrische Funk.

def. B	Funk f	Stammfunk F
$\mathbb{R}$	$\sin x$	$-\cos x + C$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x + C$
$(0,1)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$
$(-1,1)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x + C$
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$
$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$\tan x$	$-\ln \lvert\cos x\rvert + C$
$(0, \pi)$	$\cot x$	$\ln \lvert\sin x\rvert + C$.

Hyperbolische Funktionen

$\mathbb{R}$	$\sinh x$	$\cosh x + C$
$\mathbb{R}$	$\cosh x$	$\sinh x + C$
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{arcsinh} x + C$
$(1,\infty)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arccosh} x + C$.