Dec 3

(207)

Bsp 5.16 (Bsp 5.21(i))

(1) Bestimme alle differenzierbar Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f' = \lambda f$.

Offensichtlich erfüllt $t \to e^{\lambda t}$ dieser Gleichung.

$$f(t) = e^{\lambda t}$$
$$f'(t) = \lambda e^{\lambda t} = \lambda f(t).$$

Betrachten wir $g(t) = e^{-\lambda t} f(t)$.

$$g'(t) = -\lambda e^{-\lambda t} f(t) + e^{-\lambda t} f'(t)$$
$$= e^{-\lambda t}(-\lambda f(t) + f'(t))$$
$$= e^{-\lambda t}(0) \quad \forall t$$
$$= 0$$

Also folgt dass g konstant ist. d.h

$$g(t) = C \Rightarrow f(t) = Ce^{+\lambda t}$$

Anders sagt: Die Menge der Lösungen von $f' = \lambda f$ ist ein 1 dim'l Vectorraum.

$$V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f' = \lambda f\} = \{ce^{\lambda t} \mid c \in \mathbb{R}$$

208

(2) $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$

$$f'(x) = \frac{2(1+x^2) - (2x)(2x)}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{2 - 2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

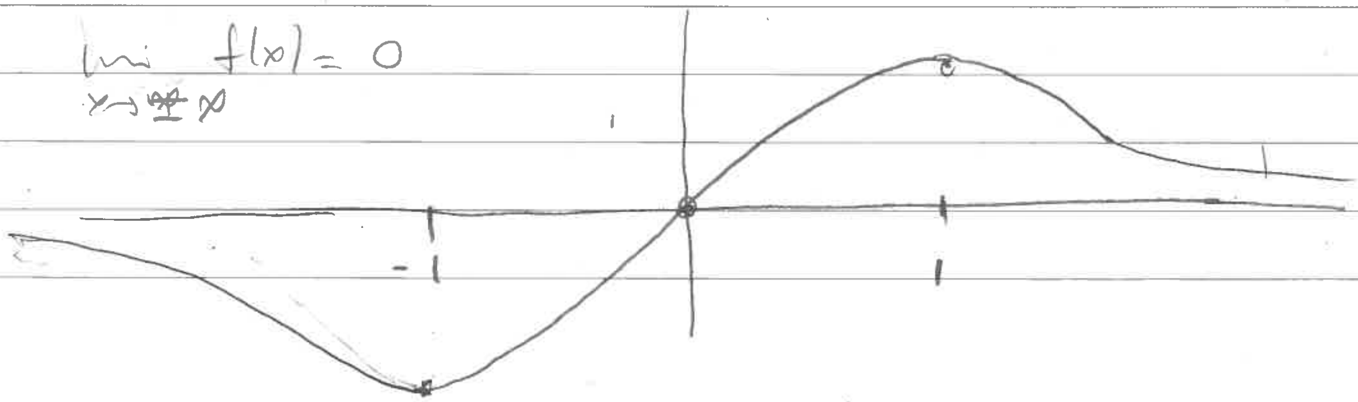
$f'(x) < 0$ for $|x| > 1$

$f'(\pm 1) = 0$

$f'(x) > 0$ for $|x| < 1$

x	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$
$f(x)$	↘	↗	↗	↘

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$



Kor 5.17 (Bernoulli, L'Hospital)
Kor 5.2.2

Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar in (a,b) mit $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$.

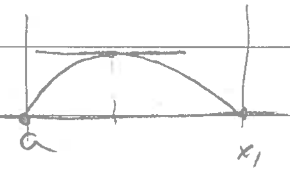
Wir nehmen an, dass (i) $f(a) = 0 = g(a)$

(ii) $\lim\limits_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$.

Dann ist $g(x) \neq 0$ $\forall x > a$ und

$$\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Beweis: Falls es $x_1 > a$ gibt mit $g(x_1) = 0$, dann folgt die Existenz von $x_0 \in (a, x_1)$ mit $g'(x_0) = 0$ (MWS).



Wiederspruch zur Annahme $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$

Also $g(x) \neq 0$ $\forall x > a$

R10

Nun sei $a < s < b$ beliebig, und

$$h(x) := \frac{f(s)}{g(s)}\, g(x) - f(x), \quad x \in [a, s]$$

Dann gilt, $h(a) = 0$ und $h(s) = 0$;

es gibt also $x_s \in (a, s)$ mit $h'(x_s) = 0$

d.h. $$0 = h'(x_s) = \frac{f(s)}{g(s)}\, g'(x_s) - f'(x_s)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{f'(x_s)}{g'(x_s)} = \frac{f(s)}{g(s)} \qquad (*)$$

Sei nun $s_n \in (a, b)$ beliebig mit

$\lim s_n = a$.

Da $a < x_{s_n} < s_n$ folgt, $\lim x_{s_n} = a$.

und aus $(*)$

$$\lim \frac{f(s_n)}{g(s_n)} = \lim \frac{f'(x_{s_n})}{g'(x_{s_n})} = A.$$

$\boxtimes$

2.11

Bmk 5-18 (1) Es gibt die selbe version für $\lim_{x \nearrow b}$.

(2) Limes von links und rechts zusammen)

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, sei $a < c < b$, wir nehmen an f, g sind in $(a, c) \cup (c, b)$ diff., $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a, c) \cup (c, b)$

und (I) $f(c) = g(c) = 0$

(II) $\lim_{\substack{x \to c \\ x \neq c}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$

Dann ist $g(x) \neq 0$ $\forall x \in (a, c) \cup (c, b)$

und $\lim_{\substack{x \to c \\ x \neq c}} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Bsp 5-19 (Bsp. 5.2.2)

(1) $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \lim \frac{3x^2}{2x} = \frac{3}{2}$

212

(2) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim \frac{\cos x}{1} = 1$$

(3) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x^2}{x^2} \overset{\text{l'h.}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{2x \cos(x^2)}{2x}$$

$$\overset{\text{l'h.}}{=} \lim_{x \to 0} \cos x^2 = 1$$

(4) $$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim \frac{-\sin x}{2x} = -\frac{1}{2}$$

(5) $$\lim_{x \to 0} \frac{\left(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!}\right)}{x^3} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x \to 0} \left(\frac{e^x - 1 - x}{3x^2}\right)$$

$$\overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{6x} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{6} = \frac{1}{6}.$$

Die nächste Anwendung der MWS ist der so genannte "Umkehrsatz".

<u>Fundamentale Frage:</u> Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und bijektiv, und sei $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Inverse Funktion.

Ist dann g auch differenzierbar?

<u>z.B.</u>

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \to x^3$$

ist überall diff. und Bijektiv

Die "Umkehrfunktion"

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \to x^{1/3}$$

ist aber in 0 nicht differenzierbar.

$$\frac{g(h) - g(0)}{h} = \frac{h^{1/3}}{h} = h^{-2/3} \to \infty$$

(Was ist passiert an der Stelle $x=0$?
$f'(x) = 3x^2 \Big|_{x=0} = 0$!)

Man kann folgendes bemerken:

Falls $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv und die Umkehrfu

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auch differenzierbar ist

dann folgt aus $(f \circ g)(x) = x \quad \forall x$ und

der Kettenregel dass:

$$f'(g(x))\, g'(x) = 1 \qquad \forall x$$

Insbesondere $\quad f'(x) \neq 0 \quad \forall x$

$$(g'(x) \neq 0)$$

Dies ist also eine Notwendige Bedingung

zur Existenz der Ableitung von f^{-1}

Satz 5.20 (Umkehrsatz) (Satz 5.2.2)

Sei $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar

mit $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b)$

Seien $\quad c = \inf\limits_x f(x) \quad , \quad d = \sup\limits_x f(x)$

Dann ist $f: (a,b) \to (c,d)$ bijektiv.

und die Umkehrfunktion

$f^{-1}: (c,d) \to (a,b)$ ist differenzierbar

mit $(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$ $\forall x \in (a,b)$

d.h $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$ $\forall y \in (c,d)$

Beweis: $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ streng monotone wachsend (Kor 5-15)

Da f streng monoton wachsend ist

folgt die erste Behauptung aus dem

Zwischenwertsatz für monotone Funktionen.

(d.h $f: (a,b) \to (c,d)$ bijektive).

Nun zeigen wir: f^{-1} ist differenzierbar.

Sei $y_0 \in (c,d)$, und $(y_k)_{k \geq 1}$ eine Folge

in (c,d) lim $\lim y_k = y_0$, $y_k \neq y_0$

$\forall k \geq 1$, Dann gibt es eindeutig bestimmte $(x_k)_{k\geq 1}$ in (a,b) mit $f(x_k) = y_k$ (f bijekt.)

und $x_0 \in (a,b)$ mit $f(x_0) = y_0$

Also ist

$$\frac{f^{-1}(y_k) - f^{-1}(y_0)}{y_k - y_0} = \frac{x_k - x_0}{f(x_k) - f(x_0)}$$

Bemerk dass $x_k \neq x_0 \quad \forall k \geq 1$ und

dass die stetigkeit (Satz 4.21 S.161) von f^{-1}, $\lim x_k = x_0$

implizert

$$\left(\begin{aligned} f(x_k) = y_k \Rightarrow \quad x_k &= f^{-1}(y_k) \\ \lim x_k &= f^{-1}(\lim y_k) \\ &= f^{-1}(y_0) \\ &= x_0 . \end{aligned} \right)$$

Nun ist $\dfrac{x_k - x_0}{f(x_k) - f(x_0)} = \dfrac{1}{\dfrac{f(x_k) - f(x_0)}{x_k - x_0}} \rightarrow \dfrac{1}{f'(x_0)}$

da $f'(x_0) \neq 0$.

Kor 5.21 (5.2.4) Die Funktion

$Log : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar

und $Log'(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x \in (0,\infty)$

Beweis: $Exp : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ erfüllt alle

Bedingungen von 5.20. Wir haben

($exp' = exp > 0$)

also $Log(Exp(x)) = x$

$$Log'(\underbrace{Exp(x)}_{y}) \underbrace{Exp(x)}_{y} = 1$$

$$Log'(y) = \frac{1}{y}.$$

$\boxtimes$.

Wir definieren mittels "Exp" die

verallgemeinerte Potenzfunktion $x \to x^{\alpha}$

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$: zunächst bemerken wir

für $n \in \mathbb{N}$: $x^n = e^{n \, Log x}$

und $x > 0$.

Wir definieren also für $x>0$

$$x^\alpha := e^{\alpha \log x}$$

Dann gilt

Kor 5.22 $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \to x^\alpha$ ist diff.

und $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

Exkurs: Die Exponentialfunktion wächst

scheller als jede Polynom

$$e^x > \frac{x^n}{n!} \quad x \geq 0.$$

Insbesondere $e^x > x \quad \forall x \geq 0$.

Die Log Funktion ist strikt monoton

wachsend $\Rightarrow$ Also $e^x > x \Rightarrow x \geq \operatorname{Log}(x) \quad \forall x > 0$

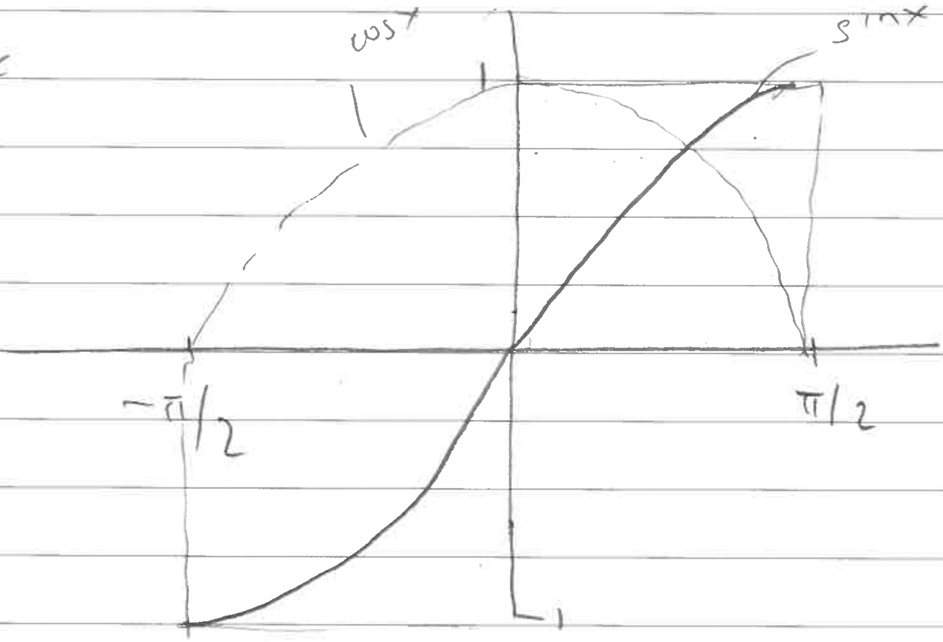
Für $a > 0$ $x^a > \log x^a = a \operatorname{Log} x$

Also $\operatorname{Log}(x) < x^a / a$

Die Log-Funktion wächst also langsamer als jede positive Potenz.

§5.3 Die Trigonometrischen Funktionen und hyperbolische Funktionen.

① $\sin x$



$\sin'(x) = \cos x$; d.h. $\sin'(x) > 0 \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

und besitzt daher ein differenzierbare Umkehrfunktion

$$\arcsin : (-1, 1) \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

deren Ableitung wie folgt berechnet wird

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}.$$

Falls $\alpha = \arcsin x \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi/2$

so ist $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

$$\cos^2\alpha + x^2 = 1$$

d.h. $\cos^2\alpha = 1 - x^2$

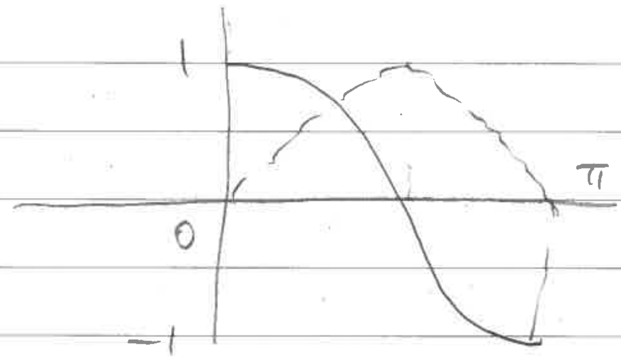
Da nun $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ folgt $\cos\alpha > 0$

$\Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1-x^2}$. Daraus ergibt sich

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Analog haben wir

(2) $\cos \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

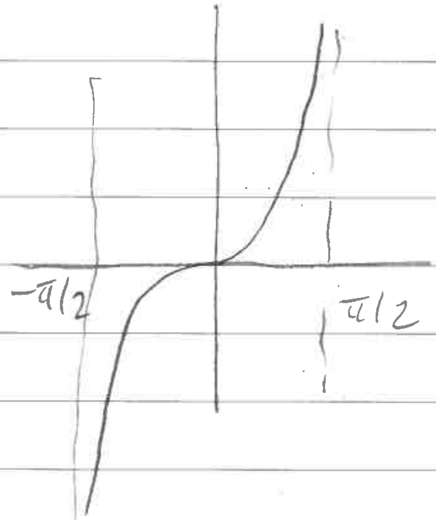


$\cos : (0, \pi) \to (-1, 1)$ bijektiv

$\arccos : (-1, 1) \to (0, \pi)$ ist die inverse Funktion

und $\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

(3) $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$

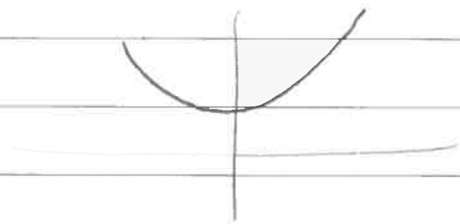


$\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

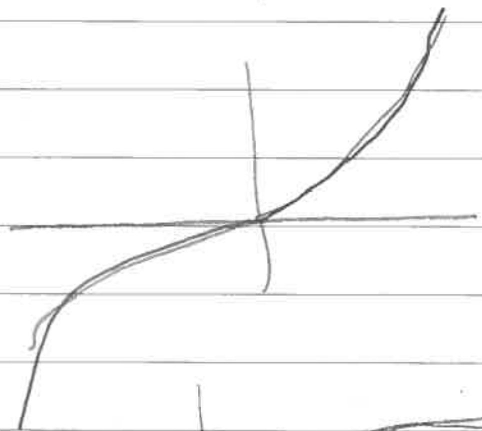
und $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

(4) Hyperbelfunktionen

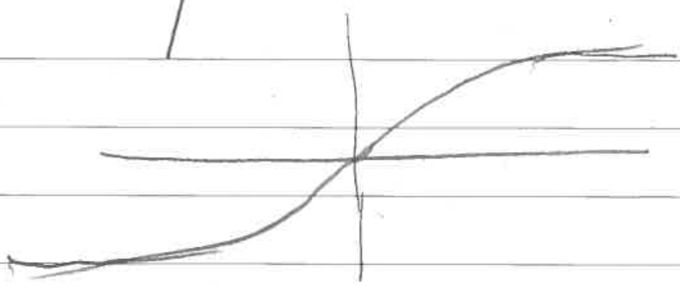
$\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$



$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$



$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$



Dann ist $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv, diff.

mit $\sinh'(x) = \cosh(x)$ somit monotone

steigend. Und $\operatorname{arcsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die

Inverse

- $\cosh : [0, \infty) \to [1, \infty)$ bijektiv.

Inverse: $\operatorname{arccosh} : (1, \infty) \to (0, \infty)$

- $\tanh : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ ist bijektiv

$\operatorname{arctanh} : (-1, 1) \to \mathbb{R}$. inverse

Dann gilt: $\sinh'(x) = \cosh(x)$

$$\cosh'(x) = \sinh(x)$$

$$\tanh'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$$

mit der Relation $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$

folgt: $\operatorname{arcsinh}'(x) = 1 / \sqrt{1 + x^2}$

$$\operatorname{arccosh}'(x) = 1 / \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\operatorname{arctanh}'(x) = 1 / 1 - x^2$$

§ 5.4 Funktionen der Klasse C^m

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$, $f: \Omega \to \mathbb{R}$, differenzierbar

<u>Defn 5.23 (5.4.1)</u> $f: \Omega \to \mathbb{R}$ heisst C^1 (von der Klasse C^1) falls f auf Ω differenzierbar ist und $x \to f'(x)$ auf Ω stetig ist.

<u>Notation</u> $C^1(\Omega)$ = Vektorraum der auf Ω C^1-Funktionen.

<u>Bsp. 5.24 (5.4.1)</u>

① exp, cos, sin, poly $\in C^1(\mathbb{R})$

② $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

<u>In 0</u>: $\dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \dfrac{h^2 \sin(1/h) - 0}{h} = h \sin\left(\frac{1}{h}\right)$

$\lim_{h \to 0} h \sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0$

Also $f'(0)=0$, f ist differenzierbar in $x_0=0$

Aber f' ist in 0 nicht stetig.

Für $x_n = \frac{1}{n\pi}$ ist $f'(x_n) = 2\frac{\sin(n\pi)}{n\pi}$

$+(-1)^{n+1} = (-1)^{n+1}$

$\lim x_n = 0$, $\lim f'(x_n)$ nicht existiert.
(insbesondere $\neq f'(0)$)

Wir haben eine Konvergenz Begriff auf $C^0(\Omega)$ gesehen: Gleichmässige Konvergenz:

$f_n \xrightarrow{g/m} f$ falls $\sup_{x\in\Omega}\|f_n - f\| \to 0$.

Falls alle f_n stetig sind, folgt dass f stetig ist.

Für $C^1(\Omega)$, haben wir

<u>Satz 5.26</u> (5.4.1) Sei $(f_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $C^1(\Omega)$. Wir nehmen an dass $f_n \xrightarrow{glm} f$ und $f_n' \xrightarrow{glm} g$. Dann gilt $f \in C^1(\Omega)$ und $g = f'$.

<u>Beweis:</u> Da $f_n \xrightarrow{glm} f$ und $f_n' \xrightarrow{glm} g$, sind f und g stetig.

<u>Zu Zeigen</u>: f ist diff. und $f' = g$.

Seien $x \neq x_0$ in Ω.

Aus $f_n \xrightarrow{glm} f$ folgt, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

und $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - g(x_0) \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} - g(x_0) \right|$$

MWS: $\exists\ \xi_n$ zwischen x und x_0 so

dass $\dfrac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} = f_n'(\xi_n)$

Nun: $|f_n'(\xi_n) - g(x_0)| \leq$

$|f_n'(\xi_n) - g(\xi_n)| + |g(\xi_n) - g(x_0)|$

$\leq \sup_{\xi \in \Omega} |f_n'(\xi) - g(\xi)| + |g(\xi_n) - g(x_0)|$

$\downarrow$ Da $f_n' \xrightarrow{glm} g$ $\qquad$ $\downarrow$ falls $x \to x_0$

$(\xi_n \to x_0)$

0 $\qquad$ 0 (stetigkeit von g)

Folglich: $\lim_{x \to x_0} \left| \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - g(x_0) \right| = 0$

$\Rightarrow f' = g$ $\qquad$ $\blacksquare$

227

Bsp 5-28 (5-4-2) Die Gleichmässige Konvergenz von $f_n' \to g$ ist notwendig:

Sei $f_n(x) = \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + x^2}$, $x \in (-1, 1)$

Bhp: $f_n(x) \xrightarrow{glm} f = |x|$ für $|x| < 1$

Beweis: $|f_n(x) - |x|| = \left|\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + x^2} - |x|\right|$

$$= \frac{\left|\left(\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + x^2} - |x|\right)\right| \left|\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + x^2} + |x|\right|}{\left|\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + x^2} + |x|\right|}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + x^2 - (|x|)^2}{\left|\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + x^2} + |x|\right|} = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left|\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + x^2} + |x|\right|} \leq \frac{(1/n)^2}{1/n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

d.h. $f_n(x) \xrightarrow{glm.} |x|$

Nun: $|x|$ ist stetig aber nicht differenzierbar

$$f_n'(x) = \frac{x}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + |x|^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} \frac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x > 1 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 1 \end{cases}$$

$f_n'(x) \to g(x)$ nicht gleichmässig
(g nicht stetig in $x=0$)

Eine sehr wichtige Anwendung von Satz 5-26 ist auf Eigenschaften von Funktionen die Summe von Potenzreihen sind

Sei $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}$. Wir nehmen an

$$\rho := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} > 0.$$

<u>Satz 5.29</u> (5.4.2) Sei $x \in (-\rho, \rho) = \Omega$

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ die Summe der

absolut konvergenten Potenzreihe. Dann

ist $f \in C^1(\Omega)$ und

$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ mit selben Konvergenzradius.

<u>Beweis:</u> Sei $f_k(x) = \sum_{n=0}^{k} a_n x^n$

Sei $0 < r < \rho$. Dann gilt:

$\forall x \in (-r, r)$:

$$|f_k(x) - f(x)| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} |a_n| r^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Also $f_k \to f$ gleichmässig auf $(-r, r)$.
(Bsp: 4.30).

Da $\limsup \sqrt[n]{|n a_n|} = \limsup \left(\sqrt[n]{n} \sqrt[n]{|a_n|} \right)$

(Da $\lim \sqrt[n]{n} = 1$) $= \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$

konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} =: g(x)$

absolut $\forall x \in (-\rho, \rho)$.

Nun ist $f_k'(x) = \sum_{n=0}^{k} n a_n x^{n-1}$ und

es folgt wie oben $f_n'(x) \xrightarrow{glm} g$

Nach Satz 5.26, folgt das f, g stetig

und $g = f'$, auf $(-\rho, \rho)$.

Bsp 5.30
S(4-3.)

1) $\operatorname{Exp}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{Exp}'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \operatorname{Exp}(x)$$

2) $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$, $|x| < 1$

Daraus folgt: $\sum_{k=0}^{\infty} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$

eine nicht triviale Identität