(2) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ existiert

Wir werden beweisen dass a_n monotone wachsend und beschränkt ist.

Der limes wird mit "e" bezeichnet

$e = 2.71828 \ldots$ (Eulerische Konstant).

Beweis: $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Wir möchten den Binomischen Lehrsatz anwenden

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)$$

$$+ \cdots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \cdots$$

Nun ist aber

$$\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) < \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)$$

usw.

deswegen folgt : $2 < a_n < a_{n+1} \quad \forall n \geq 1$

d.h a_n ist monotone wachsend.

Die Produkte der Form

$$\left(1-\frac{1}{n}\right) \cdots \left(1-\frac{k-1}{n}\right) < 1$$

$$\left(n! \geq 2^{n-1} \quad \frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad a_n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$$

$$< 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}\cdots = 3$$

d.h. a_n ist beschränkt.

Monotone Konvergenz $\Longrightarrow (a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert.

$\boxtimes$

Bsp 3.10 ③ Rekursive Definitionen

Sei $c > 1$, $c \in \mathbb{R}$, $a_1 = c$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right)$, $n \geq 1$

Dann ist $\lim a_n = \sqrt{c}$.

Beweis: Dies ist ein wichtiges Beispiel.

Hier wird vorgeführt wie man aus der apriori Existenz des Limes dessen Wert schliessen kann.

Beweis. 1. Schritt: $a_{n+1}^2 \geq c$. $\forall n \geq 1$

a_n ist (nach unten) beschränkt

$$a_{n+1} = \frac{c + \overbrace{a_n^2}^{2a_n^2 - a_n^2}}{2a_n} = a_n + \frac{c - a_n^2}{2a_n}$$

$\Longrightarrow$

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 + (c - a_n^2) + \left(\frac{c - a_n^2}{2a_n}\right)^2$$

$$= c + \left(\frac{c - a_n^2}{2a_n}\right)^2 \geq c. \quad (*)$$

Schritt 2. $a_{n+1} \leq a_n$

d.h. a_n ist monotone fallend.

$(*)$: $a_{n+1}^2 \geq c$

$\Rightarrow \frac{c}{a_{n+1}} \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, insbesondere

$\frac{c}{a_n} \leq a_n$

$\Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) \leq \frac{1}{2}\left(a_n + a_n\right) = a_n$

Monotone Konvergenz Satz $\Rightarrow (a_n)$ konvergiert

Sei $a = \lim a_n$

Da $a_n^2 \geq c \quad \forall n \geq 2$ folgt

$a^2 \geq c$

Aus $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right)$ und Satz 3.8

folgt $a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{c}{a}\right)$

$\Rightarrow \frac{c}{a} = a \Rightarrow c = a^2 \Rightarrow a = \sqrt{c}$.

Schliesslich $\lim a_n = \sqrt{c}$

$\boxtimes$

§ 3.4 Teilfolgen, Häufungspunkte.

Defn 3.11 Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Folge und sei $\ell(n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine strikt monotone wachsend Folge von positiven Naturliche Zahlen. Die Verkettung von $\ell(n)$ und (a_n) heisst eine Teilfolge $(a_{\ell(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$n \to \ell(n) \to a_{\ell(n)}.$$

Die Idee ist sehr einfach:

Wir haben die Folge

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots a_J, a_{J+1}, \dots$$

und wir definieren eine neue Folge mit einigen Elementen von (a_n)

$$a_1, a_3, a_6, a_{J+1}, \dots$$

Bsp. ① $a_n = \{1, 0, -1, 1, 0, -1, 1, 0, -1, \dots\}$

$$= \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 3k+2 \\ 1 & \text{falls } n = 3k+1 \\ -1 & \text{falls } n = 3k+3. \end{cases}$$

$n \to 3n+2 \to a_{3n+2} = (0, 0 \ldots)$

$n \to 3n+1 \to a_{3n+1} = (1, 1, \ldots)$

$n \to 3n \to a_{3n} = (-1, -1, \ldots)$

(2) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $a_n = n \Rightarrow (2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Teilfolge $n \to 2^n \to a_{2^n}$

(3) $a_n = (-1)^n$, $(a_{2n})_{n \geq 1}$ (a_{2n+1}) sind Teilfolgen.

Bemerkung 3.12 In Definition 3.11 ist $\ell(\mathbb{N} \setminus \{0\})$ eine unendliche Teilmenge von $\mathbb{N} \setminus \{0\}$

Umgekehrt, falls $\Lambda \subset \mathbb{N} \setminus \{0\}$ eine unendliche Teilmenge ist dann erhält man eine Teilfolge von $(a_n)_{n \geq 1}$ mittels einer Monotonen Abzählung $\ell : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \Lambda$ von Λ

$$\left(\ell(n) := \min\left(\Lambda \setminus \{\ell(1), \ell(2), \ell(n-1)\}\right) \right)$$

Definition 3.13 $a \in \mathbb{R}$ ist Häufungspunkt von $(a_n)_{n\geq 1}$ falls es eine gegen a konvergierende Teilfolge $(a_{\ell(n)})_{n\geq 1}$ gibt.

Bsp. 3.14 1) $a_n = (-1)^n$ hat $+1$, und -1 als Häufungspunkte.

Wir werden jetzt die Menge der Häufungspunkte einer Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ näher studieren und insbesondere zeigen dass sie für beschränkte Folgen nicht leer ist.

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ beschränkt und c eine obere Schranke für $\{|a_n| : n \geq 1\}$.

Für jedes $k \geq 1$ ist die Menge

$A_k := \{a_n : n \geq k\} = \{a_k, a_{k+1}, \ldots\}$

beschränkt und zudem gilt

$$A_{k+1} \subset A_k \quad \forall\, k \geq 1$$

Sei also $m_k := \inf A_k \nearrow$ ($\inf A_k \leq \inf A_{k+1}$)

$M_k := \sup A_k \searrow$ $\sup A_{k+1} \leq \sup A_k$

Dann folgt aus Korollar 2.11 (s. 34)

(I) $(m_k)_{k\geq 1}$ monoton wachsend

(II) $(M_k)_{k\geq 1}$ monoton fallend

(III) $m_k \leq M_k$ ist

Korollar 2.11 1) Falls $E \subset F$ und F nach unten beschränkt ist, gilt $\inf F \leq \inf E$

2) Falls $E \subset F$ und F nach oben beschränkt ist, gilt $\sup E \leq \sup F$ "

Nach Monotone Konvergenz Satz (Satz 3.9, s. 6?

konvergieren beide Folgen

Wir definieren

Defn 3.15

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{k\to\infty} m_k \quad \text{limes inferior}$$

$$\limsup a_n := \lim_{k\to\infty} M_k \quad \text{limes superior}$$

Offensichtlich gilt $\liminf a_n \leq \limsup a_n$.

Interessant ist nun:

Oct 16, Lect 1

Lemma 3.16 Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ beschränkt.

Dann sind $\limsup a_n$ und $\liminf a_n$

Häufungspunkte von $(a_n)_{n\geq 1}$.

Beweis: Sei $\limsup_{n\to\infty} a_n = a$.

Wir möchten zeigen dass, eine Teilfolge

$a_{\ell(n)}$ gibt mit $\lim a_{\ell(n)} = a$.

Wir definieren $\ell : \mathbb{N}\setminus\{0\} \to \mathbb{N}\setminus\{0\}$

induktive wie folgt.

$\ell(1) \geq 1$ sei so gewählt, dass

$$M_1 - 1 \leq a_{\ell(1)} \leq M_1 = \sup A_1$$
$$= \{a_1, a_2, \ldots\}$$

Korollar 2.11 (4) sei $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$. Falls E ein Sup besitzt $\Rightarrow \exists\, x \in E$ mit $x > \sup E - h$

$E = \{a_1, \ldots\} = A_1$, $h = 1$

Sei $\ell(2) \in \{k \in \mathbb{N} \mid k > \ell(1) + 1\}$

so dass $M_{\ell(1)+1} - \frac{1}{2} \leq a_{\ell(2)} \leq M_{\ell(1)+1}$

$\sup\{a_{\ell(1)+1}, a_{\ell(1)+2} \ldots$

sei $E = \{a_{\ell(1)+1}, a_{\ell(1)+2}, \ldots\}$, $h = \frac{1}{2}$

Falls $\ell(1), \ell(2), \ldots, \ell(n-1)$ definiert ist,

wählen wir $\ell(n)$ so dass:

$$\ell(n) \in \{k \in \mathbb{N} : k > \ell(n-1) + 1\}$$

und $M_{\ell(n-1)+1} - \frac{1}{n} \leq a_{\ell(n)} \leq M_{\ell(n-1)+1}$ $(*)$

Bmk: $\ell(n) \geq n$

$$|M_{\ell(n-1)+1} - a_{\ell(n)}| < \frac{1}{n}$$

Dann ist $\ell(n)$ strikt monotone steigend und $\left| a_{\ell(n)} - M_{\ell(n-1)+1} \right| \leq \frac{1}{n}$.

Sei nun $\varepsilon > 0$ und $n(\varepsilon)$ so gewählt dass $\frac{1}{n(\varepsilon)} < \varepsilon/2$ und

$$a - \varepsilon/2 \leq M_{\ell(n(\varepsilon)-1)+1} \leq a + \varepsilon/2$$

$\Big(a = \lim M_k$: d.h. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon)$ so dass $|M_n - a| < \varepsilon/2$ $\forall n > N(\varepsilon)\Big)$

Dann gilt $\forall n > n(\varepsilon)$: $1/n < \varepsilon/2$

$$\left| M_{\ell(n-1)+1} - a \right| < \varepsilon/2 \qquad (**)$$

und $\left| M_{\ell(n-1)+1} - a_{\ell(n)} \right| < 1/n < \varepsilon/2$ $(*)$

$(*)$ und $(**)$ $\Rightarrow$ $\left| a_{\ell(n)} - a \right| < \varepsilon$

d.h. $\lim a_{\ell(n)} = a$. $\blacksquare$

Wir schliessen aus Lemma 3.16 den folgenden wichtigen Satz

Satz 3.18 (Bolzano - Weierstrass.)

Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

(Lemma 3.16: $\limsup a_n$, $\liminf a_n$ sind Häufungspunkte: d.h $\exists$ Teilfolge $a_{l(n)}$ mit $\lim a_{l(n)} = \limsup a_n$

und $a_{m(n)}$ mit $\lim a_{m(n)} = \liminf a_n$.

$a_{l(n)}$ und $a_{m(n)}$ sind konvergente Teilfolge von $a(n)$.

Folgende Aussagen sind direkte Konsequen:

Satz 3.19 Sei $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ beschränkt.

$a_- := \liminf a_n$, $a_+ := \limsup a_n$

(1) $\forall \varepsilon > 0$ gibt es nur endliche viele $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n \notin (a_- - \varepsilon, a_+ + \varepsilon)$

(2) a_+ Ist der grösste, a_- der kleinste Häufungspunkt

(3) folgende Aussagen sind äquivalent

(i) $(a_n)_{n \geq 1}$ konvergiert

(ii) jede Teilfolge von $(a_n)_{n \geq 1}$ konvergiert

(iii) $a_- = a_+$

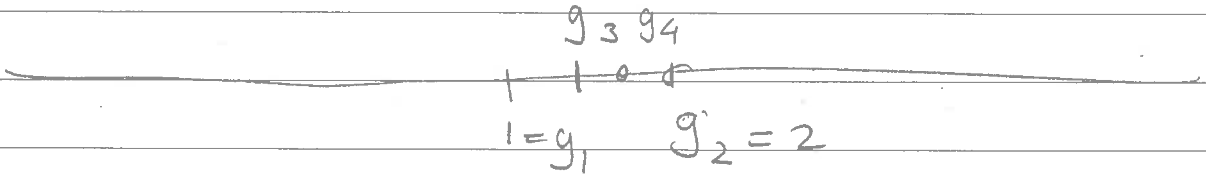
Bmk: (a_n) konvergiert gegen $a \Rightarrow$ jede Teilfolge konv. gegen a. Das Ist ein sehr nutzliches Kriterion for konvergenz.

Oct 17 lec

Bsp. 3.20 Wir definieren rekursiv

$$g_1 = 1, \quad g_{n+1} = 1 + \frac{1}{g_n}, \quad n \geq 1$$

$$g_1 = 1, \quad g_2 = 2 \quad g_3 = 3/2, \quad g_4 = 5/3$$



$$g_1 < g_2, \quad g_2 > g_3 \quad g_3 < g_4 > g_5 = 8/5 \dots$$

So die Folge ist nicht monoton.

Offensichtlich gilt $g_n \geq 1$ und

damit auch $g_n \leqslant 2$.

d.h g_n ist beschränkt.

Aber wir werden zwei Monoton-Teilfolgen finden.

$$g_{n+2} = 1 + \frac{1}{g_{n+1}} = 1 + \frac{1}{1+1/g_n}$$

$$= \frac{2+1/g_n}{1+1/g_n} = \frac{2g_n+1}{g_n+1}$$

$$= 2 - \frac{1}{g_n+1}$$

Daraus folgt

$$g_{n+2} - g_n = \frac{1}{g_{n-2}+1} - \frac{1}{g_n+1} = \frac{g_n - g_{n-2}}{(g_{n-2}+1)(g_n+1)}$$

Nun ist: $g_3 - g_1 = 3/2 - 1 > 0$

und somit ist $g_{2k+3} - g_{2k+1} > 0 \quad \forall k$, d.h. die Teilfolge $(g_{2k+1})_{k\geq 0}$ ist monotone wachsend.

$g_4 - g_2 = 5/3 - 2 < 0$ woraus folgt das $(g_{2k})_{k\geq 1}$ monotone fallend ist.

Seien also $a := \lim_k g_{2k+1}$

$b := \lim_k g_{2k}$

Dann: $a = \lim g_{2k+1} = \lim \left(1 + \frac{1}{g_{2k}}\right)$

$= 1 + \frac{1}{b} \Rightarrow ab = b+1$

und Analog $b = 1 + \frac{1}{a} \Rightarrow ab = 1+a$

woraus $ab = 1+a = b+1$ und somit $a=b$.

Folgt mit $g := a = b$ $g = 1 + \frac{1}{g}$

$\Rightarrow g = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$g_+ := \limsup g_n$ und $g_- := \liminf g_n$ sind

Häufungspunkte. D.h. es gibt Teilfolgen

a_n und b_n mit $\lim a_n = g_+$

$\lim b_n = g_-$

Da jede Teilfolge von (g_n) entweder

unendlich viele gerade oder ungerade

Indizen enthält folgt

$$g = g_+ = g_-$$

(Jede Teilfolge hat (entweder) unendlichle viele Elemente von (g_{2n}) (oder (g_{2n+1}))

$g_+ = \lim a_n = \lim g_{2n} = g$

$g_- = \lim b_n = \lim g_{2n} = g$

$\Big\} \; g_+ = g_-$

$\Downarrow$

$$\lim g_n = g = g_- = g_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$