(4) Bsp. 3.38 Exponentialreihen

$$\operatorname{Exp}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$ konvergiert

für jedes $z \in \mathbb{C}$

Sei $a_k := \frac{z^k}{k!}$.

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} \frac{k!}{z^k} = \frac{z}{k+1}$$

Also $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{z}{k+1}\right| = 0 < 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ Nach Satz 3.37(i), ist $\sum \frac{z^k}{k!}$ konvergent

Wir werden darauf zurückkommen.

(5) Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k k!}{k^k}$$

Sei $a_n = \frac{z^k k!}{k^k}$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{z^{k+1}(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{k^k}{k!\, z^k}$$

$$= z \frac{(k+1)}{(k+1)} \left(\frac{k}{k+1}\right)^k = z \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}$$

Dann ist $\lim \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{|z|}{e}$

Somit folgt konvergenz für $|z|<e$
und Divergenz für $|z|>e$
$|z|<e$ ist der "konvergenzkreis" für $\sum \frac{z^k k!}{k^k}$

Bsp ④⑤, sind die erste Einführung des Begriffs von Konvergenzkreis.

Die Quotientenkriterium versagt, wenn unendlich viele a_k verschwinden oder falls $\lim\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = 1$

Satz 3.39. (Wurzelkriterium).
Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

(I) Falls $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} < 1$ so konvergiert $\sum_1^\infty a_k$

(II) Falls $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} > 1$ so divergiert $\sum_1^\infty a_k$

Beweis: Übung.

Satz 3.39' Sei $\lim \sqrt[k]{a_k} = L$
1) $L < 1$ $\sum a_k$ conv.
2) $L > 1$ div
3) $L = 1$ kein inf.

Bsp. $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ konvergiert, da

$$\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\right)^{1/n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

Letzterer Satz ist ganz fundamental im Studium der Potenzreihen.

Potenzreihen sind wichtig weil sie analytische Funktionen darstellen.

Defn: Sei $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ein Folge in $\mathbb{R}$ odr $\mathbb{C}$.

Betrachte die Potenzreihe in $z\in\mathbb{C}$:

$$p(z) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

Mit Satz 3.39 (Wurzelkriterium) erhalten wir die folgende Characteresierung des Konvergenzbereichs von $p(z)$.

Satz 3.40. Die Potenzreihe

$$p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \text{ ist konvergent } \forall z\in\mathbb{C}$$

mit $|z| < \rho := \dfrac{1}{\limsup \sqrt[k]{|c_k|}} \in [0,\infty]$.

Sie ist divergent für alle $|z| > \rho$

Konvention: Falls $\{\sqrt[k]{|c_k|}, k>1\}$ nicht beschränkt ist setzen wir

$$\limsup \sqrt[k]{c_k} = +\infty \quad \text{und} \quad \rho = 0.$$

Falls $\{ \sqrt[k]{|c_k|} : k \geq 1 \}$ beschränkt ist

und zudem $\limsup \sqrt[k]{|c_k|} = 0$,

setzen wir $\rho = +\infty$ d.h. die

Reihe $p(z)$ convergiert für all $z \in \mathbb{C}$.

<u>Bmk</u>: Insbesondere ist der Konvergenzbereich von $p(z)$ ein Kreis.

<u>Bsp. 3.41</u> Sei $c_k = \begin{cases} 1 & k \text{ gerade} \\ \frac{1}{k} & k \text{ ungerade.} \end{cases}$

Dann gilt

○ $$\frac{c_{k+1} z^{k+1}}{c_k z^k} = \begin{cases} z/(k+1) & k \text{ gerade} \\ z k. & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\liminf \left| \frac{c_{k+1} z^{k+1}}{c_k z^k} \right| \cancel{=} (\liminf a_k) \text{ mit } a_k = \begin{cases} 1/k+1 \\ k \end{cases}$$

$$= |z| \lim_k \inf_{n \geq k} a_n = 0 < 1$$

und $|z| \limsup \left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| = |z| \limsup q_k = |z|\, k$

unbeschränkt für $|z| \neq 0$.

Das Quotientenkriterium gibt also keine Information.

Das Wurzelkriterium dagegen gibt

$$|z| \sqrt[k]{|c_k|} = |z| \begin{cases} 1 & k \text{ gerade} \\ \frac{1}{\sqrt[k]{k}} & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

Also $\lim \sqrt[k]{|c_k|} = 1$. $\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1\right)$

Somit konv $\sum c_k z^k$ für $|z| < 1$

und divergiert für $|z| > 1$

Bmk: Das Wurzelkriterium ist "stärker" als das Quotientenkriterium.

Quotientenkriterium vs Wurzelkriterium

Lemma:

Wurzelkriterium ist "stärker" als Quotientenkriterium

Lemma Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ eine Folge. Dann

$$\liminf \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{③}{\leq} \liminf |a_n|^{1/n} \overset{①}{\leq} \limsup |a_n|^{1/n} \underset{②}{\leq} \limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

Beweis. ① $\liminf |a_n|^{1/n} \leq \limsup |a_n|^{1/n}$ gilt immer

② Sei $\sigma = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$, $q_0 = \limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

Wir möchten zeigen dass $\sigma \leq q_0$

Sei $q > q_0$. $\exists$ n_0 gross genug so dass

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q \quad \forall n > n_0 \quad \text{(wie im Beweis des Quotientenkriterium)}$$

Dann $$|a_{n+k}| \leq \left|\frac{a_{n+k}}{a_{n+k-1}}\right| \left|\frac{a_{n+k-1}}{a_{n+k-2}}\right| \cdots \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |a_n|$$

$$\leq q^k |a_n| = q^{n+k} \frac{|a_n|}{q^n}$$

$$\Longrightarrow |a_{n+k}| \leq q^{n+k} \left|\frac{a_n}{q^n}\right|$$

$$\Rightarrow a_{n+k}^{1/n+k} \leq q \left|\frac{a_n}{q^n}\right|^{1/n+k} \quad \forall n \geq n_0$$

Für beliebige n (n-fixed), gilt

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_n}{q^n}\right|^{1/n+k} = 1.$$

$$\Rightarrow \limsup a_k^{1/k} \leq q \cdot 1 \Rightarrow \sigma \leq q < q_0.$$

(3) Übung

Kor: (1) Wurzelkriterium ist stärker als Quo.kri

d.h. Liefert bei einer Reihe das Quotientenkriterium eine Entscheidung.

(d.h. $\limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ im Falle der Konv.

$\liminf \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ im Falle der Div.)

so liefert auch das Wurzelkriterium eine Entscheidung.

(d.h. $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$ im Fallen der Konv.

$\liminf \sqrt[n]{a_n} > 1$ " " der Div.)

(2) Wurzelkriterium gibt kein Information

$\Longrightarrow$ Quot. kriterium gibt kein Information

$\left(\limsup \sqrt[n]{a_n} = 1 \Rightarrow \lim \inf \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq 1 \right)$

Frage: Warum benutzen wir Quotientenkrit?

Ant Manchmal ist /einfacher anzuwenden!

ls

Bemerkung!

Das Wurzelkriterium liefert eine Entscheidung der divergenz auch wenn $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1$!

d.h.

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ divergent.}$$

da, $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow \lim a_n \neq 0$.

Beweis: $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow \forall k_0 \in \mathbb{N} \sup_{k \geq k_0} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$

$\Rightarrow \forall k_0 \in \mathbb{N}$, gibt es dann ein $k \geq k_0$ mit

$$\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$$

$$\Rightarrow |a_k| \geq 1 \Rightarrow \lim a_k \neq 0$$

$$\Rightarrow \sum a_k \text{ divergent.}$$

d.h. Für das Wurzelkriterium eine Entscheidung der Divergenz um zu liefern. Ist es hinreichend dass

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1$$

Bsp 3.42. Riemann Zeta Funktion

Für $s>0$ betrachten wir die Reihe

$$\zeta(s) := 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots + \frac{1}{n^s} + \dots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

und fragen nach Konvergenz.

(I) Für $0<s\leq 1$ gilt $\frac{1}{k^s} \geq \frac{1}{k}$

also $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \to \infty$.

Also für $0<s\leq 1$, ist $\zeta(s)$ divergent.

(II) Für $s>1$, sei $a_k = 1/k^s$.

Dann haben wir $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^s \to 1$

und $\sqrt[k]{a_k} = \frac{1}{(k^{1/k})^s} \to 1$

Also funktionieren weder Quotientenkriterium noch Wurzelkriterium.

112

Oct 31, 18

Wir werden die Idee an, die zur
Divergenz von $\sum \frac{1}{k}$ führt, ein wenig modifiziert.

Wir hatten (für die Harmonische Reihe)

$$\underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}_{>\ \frac{1}{4}+\frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}}_{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}$$

$$\geq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+ \dots$$

Nun sei $s>1$: Wir segmentieren die Reihe auf die selbe Art.

$$1+\underbrace{\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}}_{<\ \frac{1}{2^s}+\frac{1}{2^s}}+\underbrace{\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{6^s}+\frac{1}{7^s}}_{<\ \frac{1}{4^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{4^s}}+\dots$$

$$=1+\frac{1}{2^{s-1}}+\frac{2^2}{2^{2s}}+\frac{2^3}{2^{3s}}+\dots$$

$$=1+\frac{1}{2^{s-1}}+\left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^2+\left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^3+\dots$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{2^{s-1}}}$$ Also konvergiert, da $\frac{1}{2^{s-1}}<1$

§ 3.6 Absolute Konvergenz von Reihen

Wir haben schon gesehen, dass
$\sum \frac{1}{n}$ ist nicht konvergent und

$\sum \frac{(-1)^n}{n}$ ist konvergent.

Wir können deshalb herleiten dass

○ $\sum a_n$ konv $\not\Rightarrow$ $\sum |a_n|$ konvergent.

Definition 3.43 Die Reihe $\sum_{1}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut, falls die Reihe $\sum |a_k|$ konvergiert.

konv $\not\Rightarrow$ abs konv.

○ Warum sind absolut konvergent Reihen gut?

Frage: Wenn wir eine Reihe haben, können wir in sehr unterschliedlicher Weise summieren? Kommt es auf die Reihenfolge an?

Antwort: Ja! Es kommt auf die Reihenfolge an!!!

Bsp 3.44 Die Reihe $\sum \frac{(-1)^k}{k}$ konvergiert jedoch ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}$ divergent.

Wählt man zu $l \in \mathbb{N}$ den index k_l so, das

$$\sum_{k=1}^{k_l} \frac{1}{2k} > l + \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{2k-1}$$

Und ordnet man die Folge $\sum \frac{(-1)^k}{k}$ nun

so um, dass auf die ersten k_j positiven Folgenglieder jeweils das j-te negative Glied folgt, $j \in \mathbb{N}$, dann erhält man für die so umgeordneten alternierenden harmonische Reihe

$$\sum \frac{(-1)^k}{k} \text{ "=" } \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2k_1} - 1$$

$$+ \frac{1}{2(k_1+1)} + \ldots + \frac{1}{2k_2} - \frac{1}{3}$$

$$\vdots$$

$$+ \frac{1}{2(k_{l-1}+1)} + \ldots + \frac{1}{2k_l} - \frac{1}{2l-1}$$

$$\vdots$$

$$= \sum_{\ell=1}^{\infty} \Bigg(\underbrace{\sum_{k=1}^{k_\ell} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{\ell} \frac{1}{2k-1}}_{> \ell} \Bigg)$$

$$> \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell$$

- d.h. dii ungeordnete alternwende harmonische Reihe ist divergent!

Der stärkeren Konvergenz begriff, Absolut konvergenz ausschliesst solche pathologische verhältnis.

- Falls dii Reihe absolute konvergent ist, ist dii konvergenz sehr stabil. sehr robust.

Bemerkung 3.45

(1) Konv $\not\Rightarrow$ Abs Konv.

Aber Abs konv $\Longrightarrow$ konv.

Beweis: $\sum |a_n|$ konv. sei $b_n = a_n + |a_n|$

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } a_n \leq 0 \\ 2a_n = 2|a_n| & a_n \geq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $0 \leq b_n \leq 2|a_n|$ $\Rightarrow$ $\sum b_n$ konv.

$a_n = b_n - |a_n|$ und beide Reihen konv

$\Rightarrow$ $\sum a_n = \sum b_n - \sum |a_n|$ konv

Oct 31 2013
Lek 2.

(2) Wurzel und Quotientenkriterium sind Kriterium für absolute Konvergenz

(3). Da $S_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq S_{n+1} = S_n + |a_n|$

ist, ist die Folge $(S_n)_{n \geq 1}$

monotone wachsend; Absolute Konvergenz ist somit äquivalent mit der Beschränktheit von $(S_n)_{n \geq 1}$

④ Falls $\sum a_k$ abs. konv., dann

konv. natürlich $\sum_{k=j}^{\infty} |a_n|$ für jede j

und $\forall \varepsilon > 0$ $\exists j(\varepsilon)$ so dass

$$\sum_{k=j}^{\infty} |a_k| < \varepsilon \quad \forall j > j(\varepsilon)$$

$$\boxed{\text{Notation: } \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty \;\hat{=}\; \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ konvergent}}$$

Satz 3.46 Sei $\sum_{1}^{\infty} a_k$ abs. konvergent

und $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion. Dann ist

auch die "umgeordnete Reihe" $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ abs. konvergent

mit gleicher Summe.

Beweis: Übung.

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da $\sum_{1}^{\infty} |a_k|$ konv.

gibt es $n_0(\varepsilon)$ mit $\sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k| < \varepsilon$

Sei $n_1(\varepsilon) := \max\{\varphi^{-1}(1), \varphi^{-1}(2), \dots \varphi^{-1}(n_0)\}$

Falls $k > n_1(\varepsilon)$ dann folgt $\varphi(k) > n_0$

(φ injektiv).

Also $\forall n, m \geq n_1(\varepsilon)$

$$\left|\sum_{k=m}^{n_1} a_{\varphi(k)}\right| \leq \sum_{k=m}^{n_1} |a_{\varphi(k)}| \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k| < \varepsilon$$

Insbesondere konv $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ Absolut

und

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{n_0} a_k - \sum_{k=1}^{n_1} a_{\varphi(k)}\right|$$

$$+ \left|\sum_{n_1+1}^{\infty} a_{\varphi(k)}\right| + \left|\sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_k\right|$$

$$\leq 3 \sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k| \leq 3\varepsilon.$$

Bsp 3.47 $\sum_{k=1}^{\infty} k q^k$ ist für $|q|<1$ abs. konvergiert (z.B Quo.kriterium)

$$\sum_{k=1}^{\infty} k q^k = \begin{array}{llll} q & + q^2 & + q^3 & + q^4 \\ & q^2 & + q^3 & + q^4 \\ & & + q^3 & + q^4 \\ & & & + q^4 \ldots \end{array}$$

$$= q\{1+q+\ldots\}$$
$$+ q^2\{1+q+\ldots\}$$
$$\vdots$$
$$= \underbrace{\{1+q+\ldots\}}_{\frac{1}{1-q}} \underbrace{(q+q^2+\ldots)}_{\frac{q}{(1-q)}} = \frac{q}{(1-q)^2}$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty}\left(q^l \sum_{k=0}^{\infty} q^k\right) = \sum_{l=1}^{\infty} q^l \left(\frac{1}{1-q}\right) = \left(\frac{1}{1-q}\right) \underbrace{\sum_{l=1}^{\infty} q^l}_{\frac{q}{1-q}}$$

$$= \frac{q}{(1-q)^2}$$

Umordnung der Summation: Statt $\downarrow$ wird $\rightarrow$ summiert

Satz 3.47 Seien $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ Folgen in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Wir betrachten $(a_n b_k)_{(n,k)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ als Folge, wobei wir eine beliebige Abzählung von $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ durch $\mathbb{N}$ zulassen. Falls $\sum a_k$, $\sum b_k$ abs. konvergiert, ist $\sum a_k b_\ell$ abs. konv. und

$$\sum_{k,\ell=1}^{\infty} a_k b_\ell = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{\ell=1}^{\infty} b_\ell$$

unabhängig von der Summationsreihenfolge.

Als Korollar.

Korollar 3.48 Für alle x, y in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ gilt

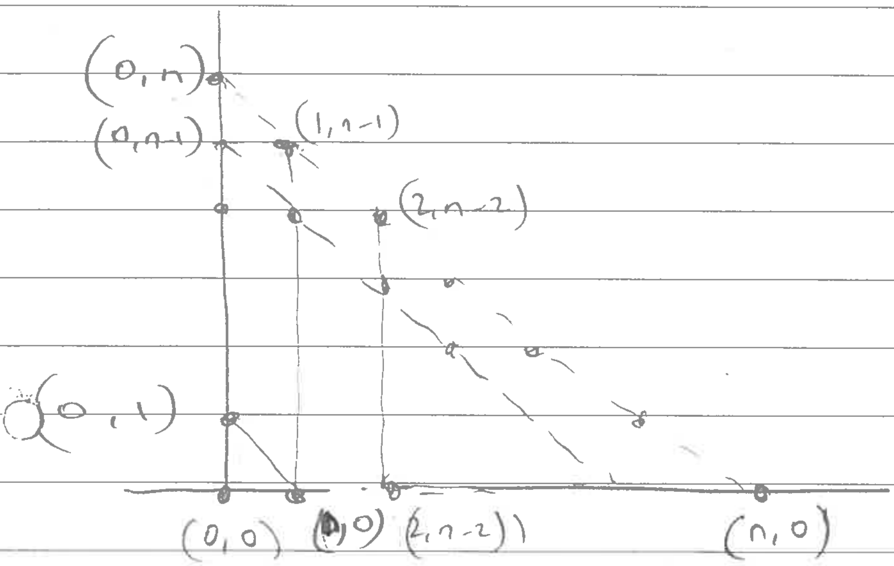
$$\operatorname{Exp}(x+y) = \operatorname{Exp}(x)\operatorname{Exp}(y)$$

$$\left(\operatorname{Exp}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right.$$

P

Beweis:

$$\mathrm{Exp}(x)\,\mathrm{Exp}(y) \overset{\text{Satz 3.47}}{=} \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{x^k y^l}{k!\,l!}$$



Wir zählen jetzt $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ wie folgt ab.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{\substack{k\geq 0,\, l\geq 0 \\ k+l=n}} \frac{x^k y^l}{k!\,l!}}_{\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k y^{n-k}}{k!\,(n-k)!}} \qquad \left(\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \right)$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{(x+y)^n}{n!}$$

$$\operatorname{Exp}(x)\operatorname{Exp}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \operatorname{Exp}(x+y)$$

Zum Abschluss behandeln wir noch den Zusammenhang mit "e" und "e^x".

Satz 3.49

$$\operatorname{Exp}(1) = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Beweis ① $\operatorname{Exp}(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 = n_0(\varepsilon)$, mit

$$\left| \operatorname{Exp}(1) - \sum_{k=0}^{n_0} \frac{1}{k!} \right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad -\varepsilon < \sum_{0}^{n_0} \frac{1}{k!} - \operatorname{Exp}(1) < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad -\varepsilon + \operatorname{Exp}(1) < \sum_{0}^{n_0} \frac{1}{k!} < \varepsilon + \operatorname{Exp}(1)$$

Insbesondere

$$\operatorname{Exp}(1) < \sum_{k=0}^{n_0} \frac{1}{k!} + \varepsilon$$

2 $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k}$$

$$\overset{*}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \underbrace{\left(\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k}\right)}_{a_k^{(n)}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} a_k^{(n)}$$

Da $a_k^{(n)} := \frac{n}{n}\frac{(n-1)}{n} \cdot \frac{n-k+1}{n} < 1$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \operatorname{Exp}(1)$$

$$\Rightarrow \quad 0 < \operatorname{Exp}(1) - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

3 $0 < a_k^{(n)} < 1$, und für jedes k fest

ist $a_k^{(n)} \to 1$, $n \to \infty$.

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} = \frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k+1}{n}\right)}{n^k/n^k}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

somit

$$1 - a_k^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad (k \text{ fest})$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{n_0} \left(1 - a_k^{(n)}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\Rightarrow$ Für $\varepsilon > 0$ $\exists\, n_1 = n_1(\varepsilon, n_0)$, so dass

$$\forall n \geq n_1 \qquad \sum_{k=0}^{n_0} \left(1 - a_k^{(n)}\right) < \varepsilon$$

Dann haben wir $\forall n \geq \operatorname{Max}\{n_0, n_1\}$

$$0 \overset{②}{<} \operatorname{Exp}(1) - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \overset{①}{<} \sum_{k=0}^{n_0} \frac{1}{k!} + \varepsilon - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\overset{② (*)}{<} \sum_{k=0}^{n_0} \frac{1}{k!} + \varepsilon - \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} \frac{1}{k!}$$

$$< \sum_{k=0}^{n_0} \frac{1}{k!} + \varepsilon - \sum_{k=0}^{n_0} a_k^{(n)} \frac{1}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n_0} \frac{1}{k!} \left(1 - a_k^{(n)}\right) + \varepsilon$$

$$< \sum_{k=0}^{n_0} \left(1 - a_k^{(n)}\right) + \varepsilon < 2\varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{Exp}(1) = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Analog kann man auch beweisen dass

Satz 3.50 $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{Exp}(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

Satz 3.49 $\Rightarrow$ $\mathrm{Exp}(1) = e^1$

$$\mathrm{Exp}(x+y) = (\mathrm{Exp}\, x)(\mathrm{Exp}\, y)$$

$$\Rightarrow \mathrm{Exp}(n) = \mathrm{Exp}(1)\,\mathrm{Exp}(n-1)$$
$$= \mathrm{Exp}(1)\,\mathrm{Exp}(1)\,\mathrm{Exp}(n-2)$$
$$\vdots$$
$$= e \cdot e \cdots e = e^n. \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$1 = \mathrm{Exp}(0) = \mathrm{Exp}(n)\,\mathrm{Exp}(-n)$$

$$\Rightarrow \mathrm{Exp}(-n) = \frac{1}{\mathrm{Exp}(n)} = \frac{1}{e^n} = e^{-n}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Exp}(n) = e^n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

$\forall q \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Exp}\left(\frac{1}{q}\right) = e^{1/q}$

Da $e = \mathrm{Exp}(1) = \mathrm{Exp}\left(q \cdot \frac{1}{q}\right)$

$$= \underbrace{\mathrm{Exp}\left(\tfrac{1}{q}\right) \cdots \mathrm{Exp}\left(\tfrac{1}{q}\right)}_{q \text{ mal}}$$