Lecture 1
17.9.13

Kapitel 1. Logik und Unterlagen.

Im Laufendes Semester werden wir viele mathematische Beweise einführen.

Heute werden wir uns mit der Mathematische Logik beschäftigen.

In Mathematik stützen wir uns auf gewisse Grundannahmen "Axiome", die wir als gegeben ansehen.

Eine dieser Annahmen ist der

Satz von ausgeschlossenen Dritten =

Eine zulässige mathematische Aussage ist entweder wahr oder falsh, jedoch nie beiden zugleich.

(Eine Aussage ist eine behauptung)

Bsp. 1) $5 < 7$ wahr

2) $4 < 2$ Falsch

In der wirklichen Welt ist es anders
"Mathematik ist schön" ? W oder F ?

Mit Aussagen kann man "rechnen"

Wir führen nun ein Paar geläufige Notation der Logik ein

Seien A, B Aussagen

A und B wird mit $A \land B$ bezeichnet

A oder B (gemeint ist: oder/und) $A \lor B$

Folgerung (eine wahre Implikation)

Aus A folgt B " $A \Rightarrow B$ "

Wenn A, dann B

die Negation der Aussage A $\neg A$

A ist equivalent zu B $A \Leftrightarrow B$.

$(A \Rightarrow B) \land (B \Rightarrow A)$

A wahr genau dann, wenn B wahr ist

Bemerkung: Die Folgerung ist transitive.

Wir wissen $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow C$, dann leiten wir her dass $A \Rightarrow C$.

Prinzip der mathematischen Beweises

Wir können über eine Kette von Folgerungen

$A \Rightarrow B \Rightarrow C \ldots \Rightarrow S$

einen mathematischen "Satz" S aus einer Annahme A herleiten.

(Ein Beweis ist eine Folge von Implikationen von Aussagen.)

!!

<u>Kontraposition</u> (Umkehrschluss)

$A \Rightarrow B$ ist gleichbedeutend mit

$\neg B \Rightarrow \neg A$

Falls $A \Rightarrow B$, so kann A nicht wahr sein wenn B falsch ist
(weil A wahr wäre, würde B auch wahr sein)

Dann haben wir

<u>Prinzip des Indirekten Beweises</u>:

Zum Beweis der Aussage $A \Rightarrow B$ genügt es die Aussage $\neg B \Rightarrow \neg A$ zu zeigen.

<u>oder</u> die Annahme $A \wedge \neg B$ zum Widerspruch zu führen.

1) Indirekten Beweis.

Man fügt $\neg B$ als Annahme hinzu und kommt nach einer Kette von erlaubten schlüssen zu einer falschen Aussage.

Heraus schliesst man, dass das zusatzannahme $\neg B$ nicht wahr ist.

Sei $\mathbb{N} = \{0, 1, 2 \ldots\}$ die Menge der Natürliche zahl

Bsp 1-1 A = "Jede natürliche Zahl n hat einen Nachfolger n+1"

B = "es gibt keine grösste Natürliche zahl".

Wir beweisen dass aus A folgt B.

Nehmen wir an, dass A wahr und B falsch ist

$\neg B$ = "es gibt eine grösste Natürliche zahl N_0"

d.h $N_0 > l$ für jedes l in $\mathbb{N}$.

Mittels der Aussage A wissen wir dass N_0 einen Nachfolger N_0+1 hat

Dann

$N_0+1 > N_0$. Das ist aber ein Widerspruch ↯.

Zunächst eine allgemeine Definition.

<u>Def.</u> 1.1. Eine <u>Menge</u> ist eine – " Zusammenfassung verschiedener Objekte zu einem Ganzen.
Die Objekte werden <u>Elemente der Menge</u> genannt.

Sei A eine Menge
"a ist Element von A" wird mit "$a \in A$" bezeichnet.

Seien A, B Mengen
"jedes Element von A ist ein Element von B" wird mit "$A \subset B$" bezeichnet
man sagt "A ist in B enthalten"
oder A ist <u>Teilmenge</u> von B.
(Bemerkung!: $A \subset A$)
Falls zugleich $A \subset B$ und $B \subset A$ gilt
bezeichnet man A und B als gleich und schreibt $A = B$.

Zunächst beschränken wir uns auf Beispiele die Natürliche Zahlen.

Beispiele 1-2

1) die Menge $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ der Natürlichen Zahlen

2) die leere Menge, mit "$\emptyset$" bezeichnet

Sie ist in jeder Menge enthalten.

3) die Menge $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ aller ganzen Zahlen

4) Meistens werden Mengen nicht durch die Liste ihre Elemente gegeben

sondern durch bestimmte Eigenschaften ihrer Elemente definiert

$\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots\}$

die Menge aller Primzahlen

$\mathbb{P} = \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ Primzahl}\}$

§1.2 Zwei Prinzipen.

Wir werden 2 Methoden des Beweises häufig benutzen.

1) Prinzip des Indirekten Beweises

Zum Beweis der Aussage $A \Rightarrow B$ genügt est die Aussage $\neg B \Rightarrow \neg A$ zu zeigen.

oder die Annahme $A \wedge \neg B$ zum Wiederspruch zu führen.

2) Prinzip der Volständigen Induktion

Sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Behauptung $A(n)$ gegeben. Soll die Behauptung für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ bewiessen werden so genügen dazu zwei Beweisschritte:

(1) der Beweis von $A(0)$

(2) für jedes $n \in \mathbb{N}$, der Beweis von $A(n+1)$ unter der Voraussetzung, dass $A(n)$ gilt

Oft Behauptungen nicht von $n=0$ an treten

Soll die Gültigkeit von $A(n)$ für alle $n \geq m$ bewiesen werden so genügen wieder zwei Schritte

(1) Beweis von $A(m)$

(2) für jedes $n \geq m$ impliziert $A(n)$ die Behauptung $A(n+1)$

Das Prinzip der vollständigen Induktion ist genau wie ein Dominoeffekt.

Sie stellen alle Dominosteine eine nach der andere. Falls der erste Dominostein fällt ($A(1)$ wahr) und falls wir die Dominosteine genug nebeneinander gestellt haben, so dass ein fallender Dominostein den nächsten trifft ($A(k) \Rightarrow A(k+1)$) dann wissen wir, dass alle D.S. fallen.

$A(0) \Rightarrow A(1) \Rightarrow A(2)$ — — —

Beisp 1.3 (Induktion).

1) Für alle $n \geq 1$ gilt:

$$1 + 3 + 5 + \dots (2n-1) = n^2 \qquad A(n).$$

Beweis mittels Vollst. Ind.

(I) $A(1)$ lautet $1 = 1^2$ und gilt ✓

(II) Sei $n \geq 1$. Annahme: so gilt $A(n)$

Die Linke Seite der Identität $A(n+1)$ ist:

$$\underbrace{1 + 3 + \dots (2n-1)}_{\substack{\text{mittels} \\ A(n)}} + (2n+1)$$

$$\overset{A(n)}{=} n^2 + (2n+1) = (n+1)^2$$

womit $A(n+1)$ bewiesen ist.

2) Als zweite Beispiel für V. I. beweisen wir den Fundamental Satz von Euklid:

Satz 1.4 Jede Natürliche Zahl $n \geq 2$ ist ein Produkt von Primzahlen, dass bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig ist.

Wir werden uns hier nicht mit der eindeutigkeit befessen.

Beweis: Sei $A(n)$ die Aussage:

jede natürliche Zahl m mit $2 \leq m \leq n$ ist ein Produkt von Primzahlen.

(I) $A(2)$ gilt denn 2 ist Primzahl

(II) Sei $n \geq 2$. Wir nehmen an, dass $A(n)$ gilt.

Für $n+1$ gibt es zwei Möglichkeiten

(a) $n+1$ ist eine Primzahl und somit gilt $A(n+1)$

(b) $n+1$ ist keine Primzahl, d.h. es gibt $2 \leq a \leq n$ die $n+1$ teilt

Dann ist $b := \frac{n+1}{a}$ auch ganz und zudem erfüllt $2 \leq b \leq n$. Aus $A(n)$ folgt dass sowohl a wie b ein Produkt von Primzahlen sind somit $n+1 = a \cdot b$ ein Produkt von Primzahlen ist.

Als eine andere Beisp. für indirekter Beweis haben wir, Satz 1.4 $\Rightarrow$

<u>Satz 1.5</u> Die Menge $\mathbb{P}$ der Primzahlen ist unendlich.

<u>Beweis</u> Nehmen wir an das gegenteil: $\mathbb{P}$ ist endlich

d.h $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, \dots p_m\}$

in aufsteigender Folge; also

$p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$. ...

Wir betrachten die Zahl

$$k = p_1 p_2 \dots p_m + 1$$

Auf Satz 1.4 folgt dass so eine Primzahl p_i (aus der Liste $p_1 \dots p_m$) gilt mit p_i teilt k. Da p_i offensichtlich $p_1 \dots p_m$ teilt, folgt das p_i

$k - p_1 \dots p_m = 1$ teilt. Das ist ein Widerspruch $\lightning$

Teilbarkeit

Formale Definition:

Eine ganze Zahl a teilt eine ganze Zahl b genau dann, wenn es eine ganze Zahl n gibt, für die $a \cdot n = b$ ist.

Man sagt dann	Man schreibt
a teilt b.	$a \mid b$.
a is Teiler von b	
b ist teilbar durch a	
b ist Vielfaches von a.	

Eigenschaften der Teilbarkeit

- Gilt $a \mid b$ und $b \mid c$, so folgt $a \mid c$
- für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gilt: $a \mid b \Leftrightarrow ka \mid kc$
- $a \mid b$ und $c \mid d \Rightarrow ac \mid bd$
- $a \mid b$ und $a \mid c \Rightarrow a \mid kb + lc$, für alle $l, k \in \mathbb{Z}$.

1) $k = (p_1 p_2 \cdot p_i \cdot \cdot p_m) + 1$

Es gibt eine primzahl p_i dass k teilt.

$p_i \mid k$ mittels Satz 1-4.

2) Sei $b = p_1 p_2 \cdot \cdot p_i \cdot p_m$ = produkt aller Primzah

Sei $a = p_i$, $n = p_1 p_2 \cdot p_{i-1} \cdot p_{i+1} \cdot \cdot p_m$

Dann $b = a \cdot n$

Das heisst a ist Teiler von b.

d.h $p_i \mid (p_1 \cdot \cdot \cdot p_m)$

3) $p_i \mid k$ und $p_i \mid (p_1 \cdot \cdot p_m)$

$\Rightarrow p_i \mid k - (p_1 \cdot \cdot p_m) = 1.$

Wiederspruch ↯

So erhalten wir einen Wiederspruch.

Bemerkung. letztes mal haben wir gesagt (11-3)

Jedes element von A ist auch Element von B

(für alle x, $x \in A \Rightarrow x \in B$.)

wird mit $A \subset B$ bezeichnet

$\downarrow$

A ist in B enthalten.

A ist Teilmenge von B.

d.h $A \subset A$

Falls $A \subset B$ und eine Element $b \in B$ gibt mit $b \notin A$

sagen wir A ist eine "eigentliche Teilmenge" von B

(proper subset)

Manchmal schreiben wir $A \underset{\neq}{\subset} B$

In diesem Fall.

Es gibt viele Bücher, mit der folgenden Notation

Jedes element von A ist ein element von B wird mit $A \subseteq B$ bezeichnet. (statt $A \subset B$)

Und Wenn $A \subseteq B$ und $A \neq B$

dann benutzen sie $A \subset B$

statt $A \underset{\neq}{\subset} B$.

$A = B$ falls $x \in A \Leftrightarrow x \in B$.

Satz: $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ und $B \subset A$

Beweis ($\Rightarrow$) Annahme: $A = B$

Falls $x \in A$, dann mittels $A = B$, $x \in B$ gilt

somit gilt, $A \subset B$

und

Falls $x \in B$, dann $x \in A$ gilt (mittels $A = B$)
somit gilt. $B \subset A$

Wir haben bewiesen dass
$A = B \Rightarrow A \subset B$ und $B \subset A$

($\Leftarrow$) Zunächst nehmen wir an dass

$A \subset B$ und $B \subset A$

Wir möchten zeigen dass $A = B$.

Sei $x \in A$, mittels $A \subset B$, haben wir $x \in B$
somit $x \in A \Rightarrow x \in B$ (*)
Sei $x \in B$, mittels $B \subset A$, haben wir $x \in A$
somit haben wir
$x \in B \Rightarrow x \in A$ (**)

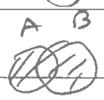
(*) und (**) $\Rightarrow$ $A = B$ per Definition. $\boxtimes$

§ 1.3 Mengenoperationen

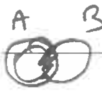
Zunächst erinnern wir kurz an die Definitionen der elementaren Operationen auf Mengen

Seien A und B Mengen.

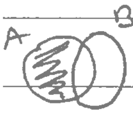
Wir können dann daraus folgende Mengen bilden.



die **Vereinigung** Menge $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$



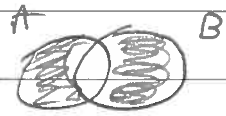
der **Durchschnitt** $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$



die **Differenz**: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$

Restmenge — A ohne B

Symmetrische Differenz



$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Falls $A \subset X$, bezeichnet man $X \setminus A$ das

A in X enthalten, Teilmenge von X

mit A^c = Komplement

Wir haben dann folgende Eigenschaften

<u>Satz 1.6.</u> Seien A, B, C Mengen.

(1) $A \cap B = B \cap A$; $A \cup B = B \cup A$
$A \cap \emptyset = \emptyset$ $\qquad A \cup \emptyset = A$

<u>Bemerkung</u>: $\cup$ verhaltet sich wie $+$
$\cap$ wie multiplicati
$\emptyset$ wie Null-element.

(2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(3) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

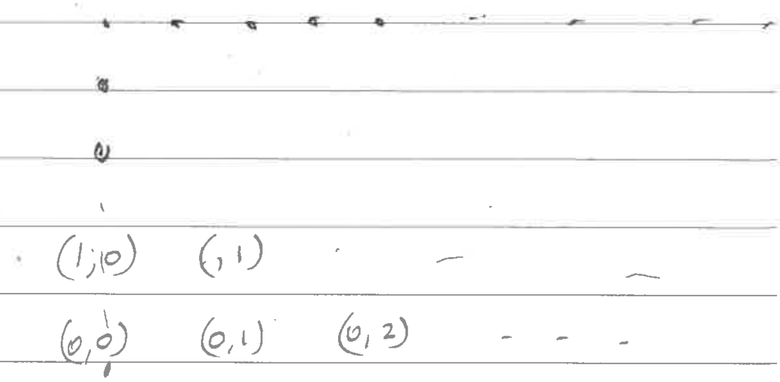
<u>Bws</u> Übung

<u>Def</u> 1.7 Das <u>Kartesische Produkt</u> $A \times B$ der Mengen A, B ist die Menge der geordneten Paare (a, b) wobei $a \in A$, $b \in B$.

<u>Bsp</u> $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(a, b) : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$.
Falls $\mathbb{Z}$ als "eindimensionalen" Gebilde dargestellt wird

$-3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2$

so wird $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ als "zweidimensionales" Gebilde dargestellt



Um die Operationen auf mehrere Mengen zu verallgemeinern sind die folgenden Quantoren nützlich. → (*) →

(1) $\forall$ "für alle" (Allquantor)

(2) $\exists$ "es gibt" (Existenzquantor).

(2') $\exists !$ "es gibt genau ein",

Sei nun I eine beliebige Menge (I = Indexmenge) und sei für alle $i \in I$ eine Menge A_i gegeben

Dann:

- $\bigcup_{i \in I} A_i = \{ x \mid \exists i \in I, x \in A_i \}$ Vereinigung besteht aus den Elementen x, für welche eine $i \in I$ gibt so dass x zu A_i gehört

- $\bigcap_{i \in I} A_i = \{ x \mid \forall i \in I, x \in A_i \}$,

Durchschnitt

Wir führen noch das kartesische Produkt endlich vieler Mengen $A_1 \dots A_n$ definiere

$$A_1 \times \dots A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i = \{ (x_1, \dots x_n) \mid x_i \in A_i \}$$

Satz 1.8. Seien $A_1 \dots A_k \subset X$, $k \in \mathbb{N}$.
Es gilt

1) $\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i \right)^c = \bigcup_{i=1}^{k} A_i^c$

2) $\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^{k} A_i^c$

Wir haben gesehen dass wir manchmal eine Aussage verneinen müssen.
Deshalb müssen wir lernen wie man Aussage mit Quantoren verneinen kann.

$$\neg \left(\forall n : A(n) \right) \Longleftrightarrow \left(\exists n : \neg A(n) \right)$$

$$\neg \left(\exists n : A(n) \right) \Longleftrightarrow \left(\forall n : \neg A(n) \right)$$

$$\neg \left(\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0 \right) \Longleftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} : x^2 < 0$$

§ 1.4 Abbildungen.

Seien X, Y Mengen.

Def 1.9. Eine Funktion oder Abbildung

$$f : X \to Y$$

der Menge X in die Menge Y ist eine Vorschrift (ein Gesetz) die (das) jedem Element $x \in A$ genau ein Element $y = f(x) \in Y$ zuordnet.

Es gibt verschiedene wichtige Objekte die in Zusammenhang mit einer Abbildung auftreten.

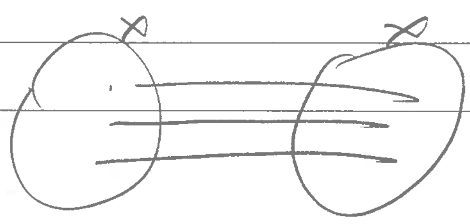
X = Definitionsbereich von f

Y = Die Ziel Menge

$f(X) = \{ f(x) \mid x \in X \}$ ist das Bild von f oder die Bildmenge.

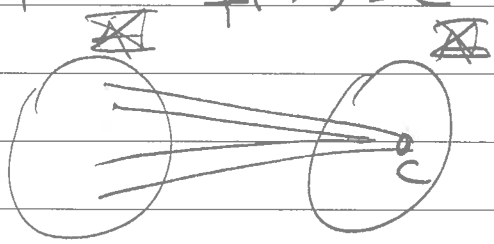
Bsp 1.10 1) (Identität) Für jede Menge X, ist $Id_X : X \to X$, definiert durch

$Id_X(x) = x$, $\forall x \in X$.



② (Konstante) Sei X Menge und $c \in X$

Die konstante Abbildung mit Wert c ist $f(x) = c \quad \forall x \in X$



③ Seien X, Y Mengen. Dann sind

$$pr_X : X \times Y \to X \qquad pr_Y : X \times Y \to Y$$
$$(x, y) \to x \qquad (x, y) \to y$$

die Projektionen auf dem ersten resp zweiten Faktoren

④ $f: \mathbb{R} \to [-1, 1]$
$x \to \sin x$

⑤ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to x^2 + x$

24-9-13 Lect

Definition 1.11 Sei $f: X \to Y$ eine Abbildung

(1) f heisst injektiv falls aus $f(x_1) = f(x_2)$ stets $x_1 = x_2$ folgt

(falls jeder $y \in Y$ höchstens ein Urbild hat

(2) f heisst surjektiv falls für jedes $y \in Y$ ein $x \in X$ gibt mit $f(x) = y$

$\forall y \in Y, \exists x \in X : f(x) = y$.

(3) f heisst bijektiv falls f injek. und surj. ist

d.h. falls jedes $y \in Y$ genau ein Urbild gibt.

Wenn jedes Element $y \in Y$ mindestens ein Urbild hat.