Kapitel 5

Differentialrechnung auf $\mathbb{R}$

5.1 Differential (Ableitung), Elementare Eigenschaften

Definition 5.1

Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}$, und $x_0 \in \Omega$

1. f heisst differenzierbar an der Stelle x_0 falls

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Dieser Grenzwert wird dann mit $f'(x_0)$ oder $\frac{df}{dx}(x_0)$ bezeichnet. Die Zahl $f'(x_0)$ heisst die Ableitung oder das Differential von f an der Stelle x_0

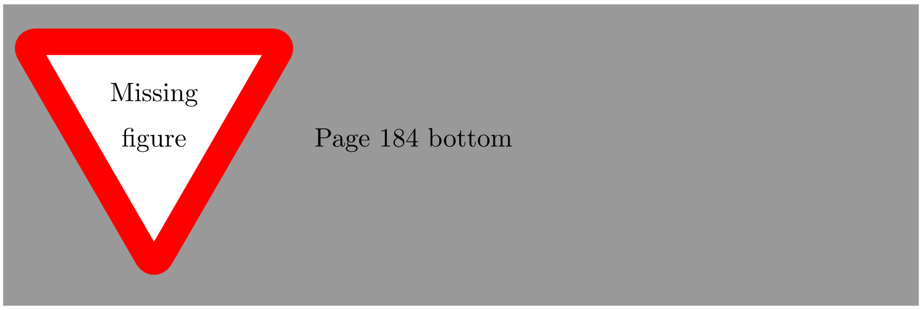
2. f heisst in Ω differenzierbar, falls sie an jeder Stelle $x_0 \in \Omega$ differenzierbar. In diesem Fall, nennt sich die Funktion $x \to f'(x)$ Ableitung von f

Bemerkung 5.2

In der Definition 5.1, verlangen wir also, dass für jede in $\Omega \backslash \{x_0\}$ erhaltene folge $(x_n)_{n \geq 1}$ mit Grenzwert x_0, der Limes

Bemerkung 5.3

Sei f differenzierbar in x_0



Dann ist

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

die Steigung der Geraden durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$.

Geometrisch ist also $f'(x_0)$ die Steigung der Tangenten am Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$. Diese Tangente hat die Gleichung

$$T(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Sei

$$f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) + R_{x_0}(x) = T(x) + R_{x_0}(x)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} + \frac{R(x)}{x - x_0}$$

Dann folgt

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0$$

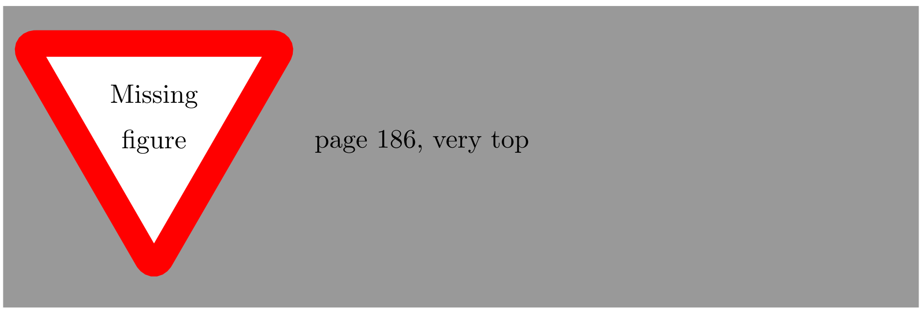
Die Lineare Funktion $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ stellt eine gute Approximation der Funktion $f(x)$ dar:

Es gilt

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R_{x_0}(x)$$

mit

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0$$



Beispiel 5.4

1.
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to mx + b \end{aligned}$$
ist überall differenzierbar mit $f'(x) = m$, $\forall x \in \mathbb{R}$
$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= m(x - x_0) \\ \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} &= m \end{aligned}$$

2. $f(x) = |x|$ ist für alle $x_0 \neq 0$ differenzierbar aber nicht für $x_0 = 0$
$$f(x) - f(0) = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$
Also ist
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} 1 & \text{fur } x > 0 \\ -1 & \text{fur } x < 0 \end{cases}$$
Besitzt also keinen Grenzwert für $x \to 0$, $x \neq 0$

3. $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist überall auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und $\exp'(x) = \exp(x)$. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq x = x_0 + h \in \mathbb{R}$
$$\begin{aligned} \exp(x_0 + h) - \exp(x_0) &= \exp(x_0)(\exp(h) - 1) \\ \exp(h) - 1 &= h + \frac{h^2}{2!} + \ldots \\ \Rightarrow \frac{\exp(h) - 1}{h} &= 1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \ldots \end{aligned}$$
Also
$$\begin{aligned} \left| \frac{\exp(h) - 1}{h} - 1 \right| &\leq |h| \left[\frac{1}{2!} + \frac{|h|}{3!} + \frac{|h|^2}{4!} + \ldots \right] \\ &\leq |h| \left[1 + |h| + \frac{|h|^2}{2!} + \ldots \right] \\ &\leq |h| \exp(h) \end{aligned}$$
Woraus
$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{\exp(h) - 1}{h} = 1$$
und somit
$$\begin{aligned} \exp'(x_0) &= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{\exp(x_0 + h) - \exp(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \exp(x_0) \left(\frac{\exp(h) - 1}{h} \right) \\ &= \exp(x_0) \end{aligned}$$

4. $\sin(x)$ und $\cos(x)$ sind überall differenzierbar und

$$\begin{aligned} \sin' &= \cos \\ \cos' &= -\sin \end{aligned}$$

Aus der Additionsgesetzen:

$$\begin{aligned} \sin(x+h) - \sin(x) &= \sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x) \\ &= \sin(x)(\cos(h) - 1) + \cos(x)\sin(h) \end{aligned}$$

Nun ist

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\cos(h) - 1}{h} &= \frac{\cos^2(h) - 1}{h(\cos(h) + 1)} = \frac{\sin^2(h)}{h(\cos(h) + 1)} \\ &= \underset{\substack{\downarrow \\ \frac{1}{2}}}{\frac{1}{\cos(h) + 1}} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{\sin^2(h)}{h}} \end{aligned}$$

There is a sin h/h which doesn't seem to belong anywhere, page 188 bottom right corner

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} &= \sin(x)\left(\frac{\cos(h) - 1}{h}\right) + \cos(x)\frac{\sin(h)}{h} \\ \Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} &= \lim\left(\sin(x)\lim_{h \to 0}\left(\frac{\cos(h) - 1}{h}\right)\right. \\ &\quad \left. + \cos(x)\lim_{h \to 0}\left(\frac{\sin(h)}{h}\right)\right) \\ &= \sin(x)\lim\left(\frac{\cos(h) - 1}{h}\right) \\ &\quad + \cos(x)\lim\left(\frac{\sin(h)}{h}\right) \\ &= (\sin(x)) \cdot 0 + (\cos(x)) \cdot 1 = \cos(x) \end{aligned}$$

Analog

$$\begin{aligned} \cos(x+h) - \cos(x) &= \cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x) \\ &= \cos(x)(\cos(h) - 1) + \sin(x)\sin(h) \end{aligned}$$

Da wie oben $\frac{\cos(h)-1}{h} \to 0$, $\frac{\sin(h)}{(h)} \to 1$ folgt $\cos' = -\sin$

Der Zusammenhang zwischen differenzierbarkeit und stetigkeit ist

Satz 5.5

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \Omega$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar. Dann ist f in x_0 stetig. (Also, "Diff" ist mehr als "Stetigkeit")

Beweis

f differenzierbar in x_0. Sei

$$\begin{aligned} T : \Omega \backslash \{x_0\} &\to \mathbb{R} \\ x &\to \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

Da f differenzierbar in x_0 ist, hat T ein Grenzwert in x_0, und

$$\lim_{x \to x_0} T(x) = f'(x)$$

Für $x \neq x_0$

$$f(x) = T(x)(x - x_0) + f(x_0)$$

$f(x)$ ist die Summe von 2 funktionen $T(x)(x - x_0)$ und $f(x_0) =$ konstant.

Da beide funktionen ein Grenzwert an der Stelle x_0 besitzen, hat auch f eine Grenzwert in x_0 und

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} f(x) &= \lim_{x \to x_0} (T(x)) \lim_{x \to x_0} (x - x_0) + \lim_{x \to x_0} f(x_0) \\ &= f'(x) \cdot 0 + f(x_0) = f(x_0) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ ist stetig in x_0.

$\blacksquare$

Bemerkung

Die Umkehrung von Satz 5.5gilt nicht, z.B. $f(x) = |x|$ ist stetig in $x = 0$ aber nicht differenzierbar.

Add page + reference, page 190 middle

Beispiel 5.6

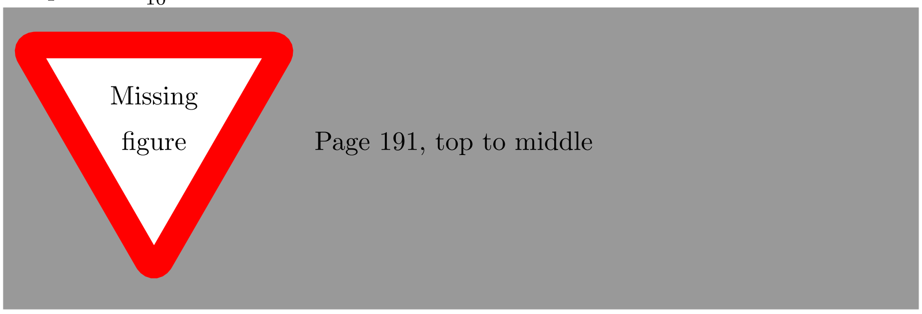
Das folgende Beispiel zeigt dass, es stetige funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, die an keiner Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar sind. (Von der Waerden (1930))

Sei für $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} < x > &= \text{Distanz von } x \text{ zur nächsten ganzen Zahl} \\ &= \min \{|x - m| : m \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

Der Graph von $< x >$ sieht so aus

Graph von $\frac{10x}{10}$



Sei

$$f(x) := < x > + \frac{< 10x >}{10} + \frac{< 10^2 x >}{100} + \ldots$$

Da

$$0 \leq < 10^n x > \leq \frac{1}{2}$$

folgt absolut konvergenz. Ausserdem sei

$$f_k(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{< 10^n x >}{10^n}$$

Dann ist

$$|f(x) - f_k(x)| = \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{< 10^n x >}{10^n} \right| \leq \frac{1}{2} \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{10^n} \right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{10^{-k}}{9}$$

$\forall k \geq 1$ ist $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig.

Da die Folge $(f_k)_{k \geq 1}$ gleichmässig gegen f konvergiert ist f stetig. Man kann zeigen, dass f in keinem Punkt von $\mathbb{R}$ differenzierbar ist.

End of beweis is put here, I think it is better if it stays up when the bsp begins. Page 192 middle

Satz 5.7

Seien $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ Funktionen, $x_0 \in \mathbb{R}$. Wir nehmen an dass f und g in x_0 differenzierbar sind. Dann sind $f + g$, $f \cdot g$ und falls $g(x_0) \neq 0$ auch f/gan der Stelle x_0 differenzierbar. Es gelten dann folgende Formel:

Is this supposed to be a fraction?? page 192 bottom

1. $(af + bg)'(x_0) = af'(x_0) + bf'(x_0) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$
2. $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
3. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

Beweis

$\blacksquare$