Kapitel 8

Differentialrechnung in $\mathbb{R}^n$

8.1 Partielle Ableitungen und Differential

Wie kann man die Begriffe der Differentialrechnung auf Funktionen $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ erweitern?

Missing content?? pag 113 top

Funktionen in mehreren Variablen sind ein bisschen komplizierter als Funktionen in einer Variable.

Beispiel

1. $f(x) = x^2 + 5$ ist im Ursprung stetig, da $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$. Aber $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ist im Ursprung nicht stetig.

Where is number 2 of the beispiel??

is this continuation of the Beispiel, or is it outside??

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y = 0}} \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2} = 0 = f(0,0) \qquad \lim_{\substack{y \to 0 \\ x = 0}} \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2} = 0 = f(0,0)$$

Aber der Limes entlang der Gerade $y = mx$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0 \\ y = mx}} f(x, mx) = \lim_{x \to 0} \frac{mx^2}{(1+m^2)x^2} = \underbrace{\frac{m}{1+m^2}}_{\text{Hängt von } m \text{ ab}}$$

und $\frac{m}{1+m^2} \neq 0$, falls $m \neq 0$. Eine Funktion $f(x,y)$ an der Stelle (x_0, y_0) ist stetig wenn der Limes $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y)$ in jeder Richtung den gleichen Wert hat.

Definition 8.1

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $a \in \Omega$

1. f hat den Grenzwert $c \in \mathbb{R}$, d.h
$$\lim_{x \to a} f(x) = c$$
wenn es zu jeder (beliebig kleinen) Schranke $\varepsilon > 0$, eine δ-umgebung
$$B_\delta(a) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - a| < \delta\}$$
gibt, so dass $|f(x) - a| < \varepsilon$ für alle $x \in \Omega \cap B_\delta(a), x \neq a$ gilt.
2. f heisst in $a \in \Omega$ stetig, wenn $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = f(a)$ gilt.
3. f heisst in Ω stetig, wenn f in allen $a \in \Omega$ stetig ist.

Die Summe, das Produkt, der Quotient (Nenner ungleich Null) stetiger Funktion sind stetig.

f besitzt keinen Grenzwert in x_0 wenn sich bei Annäherungen an x_0 auf verschiedenen Kurven (z.b. Geraden) verschiedene Grenzwerte bzw. keinen Grenzwert ergeben bzw. ergibt.

Sandwichlemma

Seien f, g, h Funktionen, wobei $g < f < h$. Wenn $\lim\limits_{x \to a} g = L = \lim\limits_{x \to a} h$ gilt, dann ergibt $\lim\limits_{x \to a} f = L$.

Da $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} |y| = 0$ gilt, $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = 0 \Rightarrow f$ ist in (0,0) stetig.

<u>**Oder**</u>

Für Grenzwertbestimmungen (also auch für Stetigkeitsuntersuchungen) ist es oft nützlich, die Funktionen mittels Polarkoordinaten umzuschreiben. Vor allem bei rationalen Funktionen.

Hierbei gilt $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, wobei $r =$ Länge des Vektors (x, y) und φ der Winkel. Nun lassen wir die Länge r gegen 0 gehen.

Beispiel

1. Die Funktionen
   - $f(x, y) = x^2 + y^2$
   - $f(x, y, z) = x^3 + \frac{x^2}{y^2+1} + z$
   - $f(x, y) = 4x^2y^3 + 3xy$
   - $f(x, y) = \cos xy$

   sind stetig, da sie aus steigen Funktionen zusammengesetzt sind.
2. $$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{für} \quad \text{(x,y)} \neq (0,0) \\ 0 & \text{für} \quad \text{(x,y)} = (0,0) \end{cases}$$

Für $(x,y) \neq (0,0)$ ist f als Quotient von stetigen Funktionen stetig. Es verbleibt f im Punkt $(0,0)$ zu untersuchen. Da

$$\left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right| \leq 1$$

$$0 < |f(x,y)| < |y|$$

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = \frac{\left(r^2 \cos^2\theta\right)\left(r\sin\theta\right)}{r^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)} = r\cos^2\theta\sin\theta$$

$$\lim_{r\to 0} f(r,\theta) = \lim_{r\to 0} r\cos^2\theta\sin\theta = 0$$

3. Wir können nochmals die Stetigkeit der Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{für} \quad \text{(x,y)} \neq (0,0) \\ 0 & \text{für} \quad \text{(x,y)} = (0,0) \end{cases}$$

mittels Polarkoordinaten untersuchen

$$f(x,y) = \frac{r^2 \cos\theta\sin\theta}{r^2} = \cos\theta\sin\theta$$

$$\lim_{r\to 0} f(x,y) = \cos\theta\sin\theta$$

hängt von θ ab.

$$\Rightarrow f \text{ in (0,0) nicht stetig}$$

Bemerkung

Eine trickreiche Variante Grenzwerte zu berechnen, ergibt sich durch Substitution, d.h. man berechnet den Grenzwert

is this supposed to be inside the list or out??

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f\left(g(x,y)\right)$$

indem man zunächst $t = g(x,y)$ setzt und den Grenzwert

$$t_0 = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)$$

bestimmt. Dann ist

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f\left(g(x,y)\right) = \lim_{t\to t_0} f(t)$$

Beispiel

$$\lim_{(x,y)\to(4,0)} \frac{\sin xy}{xy}$$

Hier ist $g(x,y) = xy$, $\lim_{(x,y)\to(4,0)} g(x,y) = 0$. Somit

$$\lim_{(x,y)\to(4,0)} \frac{\sin xy}{xy} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

Wir werden auch sehen, dass die Existenz der Ableitungen in einigen Richtungen ungenügend für die Differenzierbarkeit der Funktion ist.

Was bedeutet die Ableitung in einingen Richtungen?

Beispiel

Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \to \left(x^2 + xy\right) \cos(xy)$$

Man kann für jedes y, die Funktion

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \to \left(x^2 + xy\right) (\cos xy)$$

als Funktion einer Variablen x auffassen und die Ableitung davon berechnen. Das Resultat wird mit $\frac{\partial f}{\partial x}$ bezeichnet und ist die erste partielle Ableitung von f nach x. In diesem Fall ist es durch

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (2x + y)(\cos xy) - (x^2 + xy)y \sin(xy)$$

gegeben.

Analog definiert man $\frac{\partial f}{\partial y}$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x(\cos xy) - (x^2 + xy)x \sin(xy)$$

Die allgemeine Definition nimmt folgende Gestalt an. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. In zukunft bezeichnen wir die $i-$te Koordinate eines Vektors $x \in \mathbb{R}^n$ mit x^i; also ist $x = \left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right)$.

Sei $e_i := (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ der $i-$te Basisvektor von $\mathbb{R}^n$

Definition 8.2

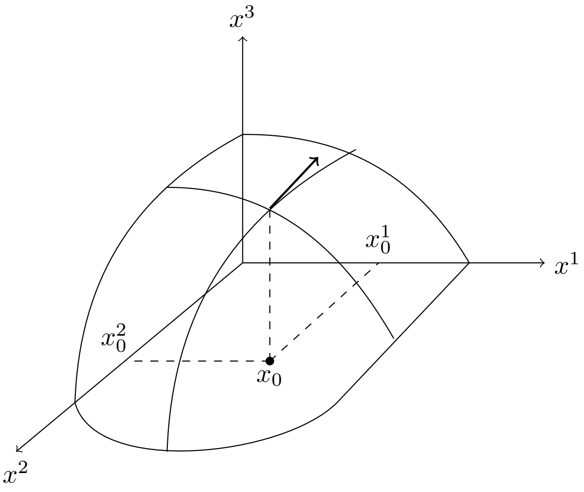
Die Funktion $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heisst an der Stelle $x_0 \in \Omega$ in Richtung e_i (oder nach x^i) partiell differenzierbar, falls der Limes

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) = f_{x^i}(x_0) := - \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_0 + he_i) - f(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f\left({x_0}^1, {x_0}^2, \ldots, {x_0}^i + h, {x_0}^{i+1}, \ldots, {x_0}^n\right) - f\left({x_0}^1, \ldots, {x_0}^n\right)}{h}$$

existiert

Bemerkung 8.3



Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\left(x_0^1, x_0^2\right) \in \mathbb{R}^2$. Wir betrachten die Scharen von f

$$f(\cdot, x_0^2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

und

$$f(x_0^1, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$\frac{\partial f}{\partial x^1}$, $\frac{\partial f}{\partial x^2}$ sind die zu dem Anstieg der Tangente entsprechenden Schnittkurven.

Beispiel

1. $f(x, y, z) = \cos yz + \sin xy$

   - $\frac{\partial f}{\partial x} = y \cos xy$
   - $\frac{\partial f}{\partial y} = -\sin(yz) \cdot z + \cos(xy) \cdot x$
   - $\frac{\partial f}{\partial z} = -\sin(yz) \cdot y$

2.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim \frac{\frac{h^3 \cdot 0}{h^2} - 0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim \frac{\frac{h \cdot 0^3}{0 + h^2} - 0}{h} = 0$$

Bemerkung

Für Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ einer Variable impliziert die Differenzierbarkeit in x_0, die Stetigkeit in x_0 und zudem eine gute Approximation von f durch eine affine Funktion in einer Umgebung von x_0. Folgendes Beispiel zeigt, dass in $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ partielle Differenzierbarkeit keine analoge Approximationseigenschaften oder Stetigkeit impliziert:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

Für alle $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ist f in beiden Richtungen partiell differenzierbar:

- Für $(x_0, y_0) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \left. \frac{y\left(x^2+y^2\right) - 2x^2 y}{\left(x^2+y^2\right)^2} \right|_{(x,y)=(x_0,y_0)} = \frac{y_0^3 - x_0^2 y_0}{\left({x_0}^2 + {y_0}^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \left. \frac{x\left(x^2+y^2\right) - 2xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \right|_{(x,y)\neq(x_0,y_0)} = \frac{x^2 - xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

- Für $(x_0, y_0) = (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{\overbrace{f(0+h,0) - f(0,0)}^{f(x_0+he_1)-f(x_0)}}{h} = \lim \frac{0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{\overbrace{f(0,0+h) - f(0,0)}^{f(x_0+he_2)-f(x_0)}}{h} = \lim \frac{0}{h} = 0$$

Im Ursprung besitzt f beide partielle Ableitungen, sie ist aber nicht stetig. Der Grund ist, dass die partielle Ableitungen nur partielle Informationen geben. Wir müssen die Differenzierbarkeit in irgendeiner anderen Weise verallgemeinen.

Die Lösung dieses Problem ist, dass man eine Approximationseigenschaft durch eine lineare Abbildung postuliert.

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0; $f'(x_0)$ existiert. In diesem Fall kann f für alle x nahe x_0 durch die Funktion $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ gut approximiert werden. Das heisst, dass

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x, x_0) \quad \text{mit } \lim_{x \to x_0} \frac{R(x, x_0)}{x - x_0} = 0$$

Bemerkung

$f'(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}'$ sollte als lineare Abbildung interpretiert werden

Lineare Abbildungen

Eine Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist linear, falls für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$$

Eine solche Abbildung ist durch ihre Werte

$$A(e_i) := A_1, A(e_2) := A_2, \ldots, A(e_n) := A_n$$

auf der Standardbasis $e_1, \ldots, e_n$ eindeutig bestimmt. Aus $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i e_i$ und der Linearität folgt nämlich

$$(*) \qquad A(x) = \sum_{i=1}^{n} x^i A(e_i) = \sum_{i=1}^{n} A_i x^i$$

Umgekehrt bestimmt ein Vektor $(A_1, \ldots, A_n)$ mittels der Formel $(*)$ eine lineare Abbildung.

Schreiben wir $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$ für einen Vektor $x = (x^1)_{1 \leq i \leq n}$ und $A = (A_1, \ldots, A_n)$ für die Darstellung einer linearen Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bezüglich die Standard Basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ so ist

$$A(x) = (A_1, \ldots, A_n) \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \sum A_i x^i$$

Definition 8.4

Die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heisst an der Stelle $x_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ differenzierbar, falls es eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + R(x_0, x)$$

wobei $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{R(x, x_0)}{|x - x_0|} = 0$

In diesem Fall heisst A das Differential an der Stelle x_0 und wird mit $\underset{x_0}{df}$ bezeichnet, d.h. f ist total differenzierbar in $x_0 = \left(x_0^1, \ldots, x_0^n\right)$, falls reelle Zahlen $A_1, \ldots, A_n$ existieren, so dass gilt

$$f(x) = f(x_0) + A_1\left(x^1 - x_0^1\right) + A_2\left(x^2 - x_0^2\right) + \ldots + A_n\left(x^n - x_0^n\right) + R(x, x_0)$$

mit $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{R(x, x_0)}{|x - x_0|} = 0$

Bemerkung: Geometrische Interpretation

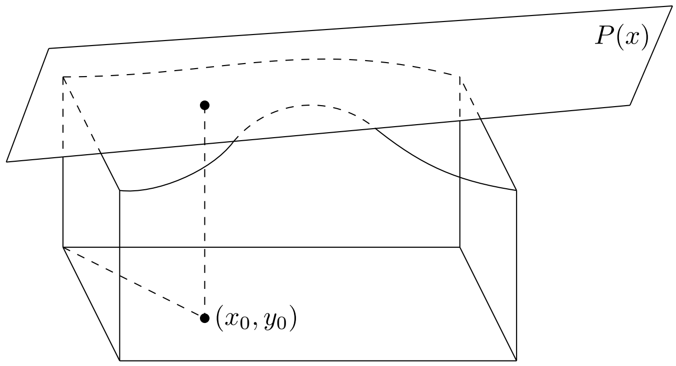
Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \in \mathbb{R}^2$. Wir können die differenzierbare Funktion nahe dem Punkt $x_0 = \left(x_0^1, x_0^2\right)$ mit Hilfe der linearen Funktion

$$P(x) = P\left(x^1, x^2\right) = f\left(x_0^1, x_0^2\right) + \underbrace{A_1\left(x^1 - x_0^1\right) + A_2\left(x^2 - x_0^2\right)}_{d_{x_0} f(x - x_0)}$$

approximieren.

n't understand what
mes after the formula,
ge 126.1 middle

Die Differenz $\underbrace{f(x) - P(x)}_{d_{x_0} f(x-x_0)} \underset{x \to x_0}{\to} 0 P(x)$ ist eine Ebene. Die ist die Tangentialebene zu f an der Stelle x_0 und spielt die Rolle der Tangente für Funktionen in einer Variable.



Beispiel 8.5

a) Jede affin lineare Funktion $f(x) = Ax + b$, $x \in \mathbb{R}^n$, wobei $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ linear, b $\in \mathbb{R}$ ist an jeder Stelle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar, mit $\underset{x_0}{df} = A$ unabhängig von x_0, da

$$f(x) - f(x_0) - A(x - x_0) = 0 \qquad \forall x, x_0 \in \mathbb{R}^n$$

b) Koordinatenfunktionen $x^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right) \to x^i$, $x^i(x) = x^i$. Dann ist x^i differenzierbar an jeder Stelle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit

$$dx^i\big|_{x=x_0} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$$

die Differentiale $dx^1, dx^2, \ldots, dx^n$ bilden also an jeder Stelle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ eine Basis des Raumes $L(\mathbb{R}^n : \mathbb{R}) := \{A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; A \text{ linear}\}$, wobei wir $A \in L(\mathbb{R}^n : \mathbb{R})$ mit der Darstellung $A = (A_1, \ldots, A_n)$ bzgl. der Standardbasis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ der $\mathbb{R}^n$ identifizieren, und mit $A_i = A(e_i)$

$$dx^i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$$

$$\left(dx^i(e_1), dx^i(e_2), \ldots, dx^i(e_n)\right)$$

Da $dx^i(e_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ gilt, ist $\left(dx^i\right)_{1 \leq i \leq n}$ die duale Basis von $L(\mathbb{R}^n : \mathbb{R})$ zur Standardbasis $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ des $\mathbb{R}^n$.

c) Jedes $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \in \subset' (\mathbb{R})$ besitzt das Differential

$$df(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)\, dx = f'(x_0)\, dx$$

d.h. $f'(x_0)$ ist die Darstellung von $df(x_0)$ bezüglich der Basis dx von $L(\mathbb{R} : \mathbb{R})$

d) $f(x,y) = xe^y$, $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist an jeder Stelle $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ differenzierbar und es gilt

$$df(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right) = \left(e^{y_0}, xe^{y_0}\right)$$

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = \underbrace{f(x,y) - f(x_0,y)}_{\swarrow} + f(x_0,y) - f(x_0,y_0)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\eta)(y-y_0)$$

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung, mit geeigneten Zwischenstellen $\xi = \xi(y)$ und η

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + R(x,y)$$

mit

$$\begin{aligned} R(x,y) &= \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right](x-x_0) \\ &+ \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\eta) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right](y-y_0) \end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit der Funktionen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^y \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^y$$

können wir den "Fehler" $R(x,y)$ leicht abschätzen

$$\frac{|R(x,y)|}{|(x,y)-(x_0,y_0)|} \leq \sup_{\substack{|\xi - x_0| < |x-x_0| \\ |\eta - y_0| < |y-y_0|}} \left(|e^y - e^{y_0}| + |x_0||e^\eta - e^{y_0}|\right)$$

Für $(x,y) \to (x_0,y_0)$, $(x,y) \neq (x_0,y_0)$: d.h. es gilt

$$\frac{R(x,y)}{|(x,y)-(x_0,y_0)|} \to 0$$

d.h. es gilt

$$\frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}{|(x,y)-(x_0,y_0)|} \underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{\longrightarrow} 0$$

d.h. $f(x,y)$ ist differenzierbar und can't read, page 130 bottom

$$df(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$$

e) Die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ist in $(0,0)$ differenzierbar.

Wir haben schon gesehen, dass $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Dann gilt

$$\frac{|R|}{|(x,y)|} = \frac{\left| f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0) \right|}{|(x-0, y-0)|}$$

$$= \frac{|f(x,y) - 0 - 0 - 0|}{|(x,y)|} = \frac{|f(x,y)|}{|(x,y)|}$$

Zu untersuchen ist

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|R((x,y),(0,0))|}{(x,y)-(0,0)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y)|}{|(x,y)|}$$

Mittels Polarkoordinaten ist dies noch offensichtlicher

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y)|}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^4 \cos^3\theta \sin\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0} r^2 \cos^3\theta \sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow f \text{ in } (0,0) \text{ differenzierbar}$$

Gibt es eine Beziehung zwischen dem Differential und den partiellen Ableitungen?

Bemerkung 8.6

Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ differenzierbar an der Stelle $x_0 \in \Omega$. Dann existieren die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)$, $i = 1, \ldots, n$ und dass Differential kann als

$$d_{y_0} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0) \right)$$

dargestellt werden.

Beweis

Sei f an der Stelle x_0 differenzierbar

$$\Rightarrow f(x_0 + he_i) = f(x_0) + (d_{x_0} f)(he_i) + R(x_0 + he_i, x_0)$$

wobei

$$\lim_{h\to 0} \frac{R(x_0 + he_i, x_0)}{h} = \lim \frac{f(x_0 + he_i) - f(x_0)(d_{x_0} f(he_i))}{h} = 0$$

$$\Rightarrow \lim \frac{f(x_0 + he_i) - f(x_0)}{h} = \lim \frac{h d_{x_0} f(e_i)}{h} = d_{x_0} f(e_i)$$

d.h. $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)$ existiert und $= d_{x_0} f(e_i)$.

Da $\left(dx^i\right)_{i=1,\ldots,n}$ die zur $(e_j)_{1\le j\le n}$ duale Basis ist

$$d_{x_0} f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)\, dx^i = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0) \right)$$

Beispiel

Die Funktion
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
ist in $(0,0)$ nicht differenzierbar (f ist in $(0,0)$ nicht stetig)

Satz 8.7

Falls $f : \Omega \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}$ differenzierbar ist, ist sie in x_0 auch stetig.

Beweis

Folgt aus der Definition

Definition 8.8

$f : \Omega \to \mathbb{R}$ heisst von der Klasse C', ($f \in C'(\Omega)$), falls f an jeder Stelle $x_0 \in \Omega$ und in jede Richtung e_i partiell differenzierbar ist und die Funktionen $x \to \frac{\partial f}{\partial x^i}(x)$ für jedes $1 \leq i \leq n$ auf Ω stetig sind.

Satz 8.9

Sei $f \in C'(\Omega)$. Dann ist f an jeder Stelle $x_0 \in \Omega$ differenzierbar.

Beweis

Für $n = 3$ seien $x = \left(x^1, x^2, x^3\right)$, $x_0 = \left(x_0^1, x_0^2, x_0^3\right)$. Dann ist
$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) = &\left\{ f\left(x^1, x^2, x^3\right) - f\left(x^1, x^2, x_0^3\right)\right\} \\ &+ \left\{ f\left(x^1, x^2, x_0^3\right) - f\left(x^1, x_0^2, x_0^3\right)\right\} \\ &+ \left\{ f\left(x^1, x_0^2, x_0^3\right) - f\left(x_0^1, x_0^2, x_0^3\right)\right\} \end{aligned}$$
Nach dem MWS der DR gilt:
$$f\left(x^1, x_0^2, x_0^3\right) - f\left(x_0^1, x_0^2, x_0^3\right) = \frac{\partial f}{\partial x^1}\left(\xi^1, x_0^2, x_0^3\right)\left(x^1 - x_0^1\right)$$
wobei ξ^1 zwischen x_0^1 und x^1. Analog:
$$f\left(x^1, x^2, x_0^3\right) - f\left(x^1, x_0^2, x_0^3\right) = \frac{\partial f}{\partial x^2}\left(x^1, \xi^2, x_0^3\right)\left(x^2 - x_0^2\right)$$
wobei $\xi^2 \in \left(x_0^2, x^2\right)$ und
$$f\left(x^1, x^2, x^3\right) - f\left(x^1, x^2, x_0^3\right) = \frac{\partial f}{\partial x^3}\left(x^1, x^2, \xi^3\right)\left(x^3 - x_0^3\right)$$
Eingesetzt in den Ausdruck für $f(x) - f(x_0)$ ergibt:
$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) = &\frac{\partial f}{\partial x^1}\left(\xi^1, x_0^2, x_0^3\right)\left(x^1 - x_0^1\right) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x^2}\left(x^1, \xi^2, x_0^3\right)\left(x^2 - x_0^2\right) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x^3}\left(x^1, x^2, \xi^3\right)\left(x^3 - x_0^3\right) \end{aligned}$$

Also

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x^1}\left(x_0^1, x_0^2, x_0^3\right)\left(x^i - x_0^i\right) + R(x_0, x)$$

Wobei

$$\begin{aligned} R(x_0, x) = &\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}\left(\xi^1, x_0^2, x_0^3\right) - \frac{\partial f}{\partial x^1}\left(x_0^1, x_0^2, x_0^3\right)\right)\left(x^1 - x_0^1\right) \\ &+ \left(\frac{\partial f}{\partial x^2}\left(x^1, \xi^2, x_0^3\right) - \frac{\partial f}{\partial x^2}\left(x_0^1, x_0^2, x_0^3\right)\right)\left(x^2 - x_0^2\right) \\ &+ \left(\frac{\partial f}{\partial x^3}\left(x^1, x^2, \xi^3\right) - \frac{\partial f}{\partial x^3}\left(x_0^1, x_0^2, x_0^3\right)\right)\left(x^3 - x_0^3\right) \end{aligned}$$

Also

$$|R(x, x_0)| < |x - x_0| \underbrace{\{|(\ldots)| + |(\ldots)| + |(\ldots)|\}}_{\substack{\to 0 \text{ mit } x \to x_0 \\ \text{weil } \frac{\partial f}{\partial x^i} \text{ stetig sind}}}$$

Also ist $\lim \frac{R(x,x_0)}{(x-x_0)} = 0$ und $f(x)$ ist differenzierbar.

Beispiel 8.10

Polynome auf $\mathbb{R}^n$ sind von der Klasse $C!$. Für jeden Multiindex $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ definieren wir die Monomialfunktion

$$x^\alpha := \left(x^0\right)^{\alpha_0}\left(x^1\right)^{\alpha_1} \ldots \left(x^n\right)^{\alpha_n}$$

Ein Polynom von Grad $\leq N$ ist dann gegeben durch

$$p(x) = \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha x^\alpha$$

wobei $|\alpha| = \alpha_0 + \ldots + \alpha_n$

Pages 135.1 - 135.2 are a zusammenfassung, not sure if needed to be included

8.2 Differentiationsregeln

Ganz analog zum eindimensionalen Fall gelten folgende Differentiationsregeln

Satz 8.11

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, sowie $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in \Omega$ differenzierbar. Dann gilt

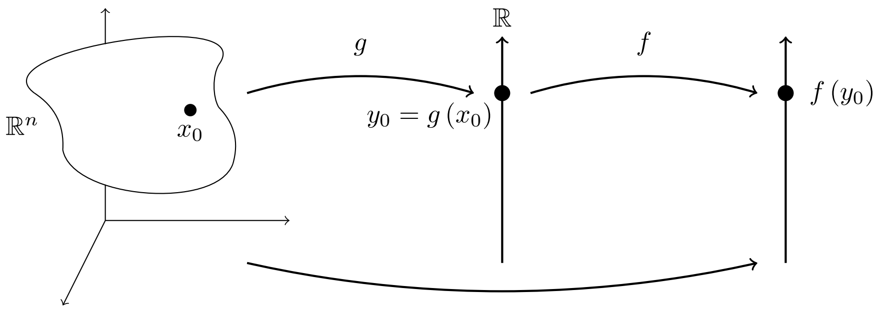
1. $d(f + g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0)$
2. $d(fg)(x_0) = g(x_0)\, df(x_0) + f(x_0)\, dg(x_0)$
3. Falls $g(x_0) \neq 0$
$$d\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \frac{g(x_0)\, df(x_0) - f(x_0)\, dg(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

Beweis ist der Selbe wie im eindimensionalen Fall. Für die Kettenregel gibt es mehrere Variationen

Satz 8.12 (Kettenregel, 1. Version)

Sei $g : \Omega \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ differenzierbar, sowie $f\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Stelle $g(x_0) \in \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt

$$d(f \circ g)(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot dg(x_0)$$



Beweis

Sei g an der Stelle x_0 differenzierbar

$$\Rightarrow g(x) - g(x_0) \overset{A}{=} dg(x_0)(x - x_0) + R_g(x - x_0)$$

mit

$$\frac{R_g(x - x_0)}{(x - x_0)} \underset{x \to x_0}{\to} 0 \Rightarrow \frac{g(x) - g(x_0)}{|x - x_0|} \overset{B}{\leq} C = \max\left[\frac{\partial g}{\partial x^i}(x_0)\right]$$

f in $g(x_0)$ differenzierbar

$$f(g(x)) - f(g(x_0)) \overset{C}{=} f'(g(x_0))[g(x) - g(x_0)] + R_f(g(x), g(x_0))$$

Woraus folgt:

$$\begin{aligned} f(g(x)) - f(g(x_0)) =& f'(g(x_0))[dg(x_0)(x - x_0) + R_g(x, x_0)] \\ & + R_f(g(x_0), g(x)) \end{aligned}$$

Aus B folgt:

$$\frac{R_f(g(x_0), g(x))}{x - x_0} = \underbrace{\underbrace{\frac{R_f(g(x_0) - g(x))}{|g(x) - g(x_0)|}}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \cdot \underbrace{\frac{|g(x) - g(x_0)|}{|x - x_0|}}_{\overset{B}{\leq} C}}_{\substack{\downarrow \\ 0}}$$

d.h.

$$f(g(x)) - f(g(x_0)) = (f'(g(x_0)) \cdot dg(x_0))(x - x_0) + R_{f \circ g}(x, x_0)$$

wobei

$$R_{f \circ g}(x, x_0) = f'(g(x_0)) R_g(x, x_0) + R_f(g(x_0), g(x))$$

und

$$\frac{R_{f\circ g}(x,x_0)}{x-x_0} = \underbrace{f'(g(x_0))\frac{R_g(x,x_0)}{(x-x_0)}}_{\downarrow 0} + \underbrace{\frac{R_f(g(x_0),g(x))}{x-x_0}}_{\downarrow 0}$$

Beispiel 8.13

Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$h(x,y) = e^{xy}$$

$h = f \circ g$ wobei $g(x,y) = xy$, $f(t) = e^t$. Dann ist einerseits

$$dh(x,y) = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}\right) = (ye^{xy}, xe^{xy})$$

anderseits nach Kettenregel

$$dh(x,y) = d(f\circ g)' = f'(g(x,y)) \cdot dg(x,y) = e^{xy} \cdot (y,x) = (ye^{xy}, xe^{xy})$$

Für die nächste Kettenregel führen wir folgende Definition ein:

Definition 8.14

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ und $f = (f_1, \ldots, f_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung. Dann ist f an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar, falls jede Komponentenfunktion f_i an der Stelle x_0 differenzierbar ist. Wir definieren in diesem Fall

$$f'(x_0) := \left({f_1}'(x_0), {f_2}'(x_0), \ldots, {f_n}'(x_0)\right)$$

Bemerkung 8.15

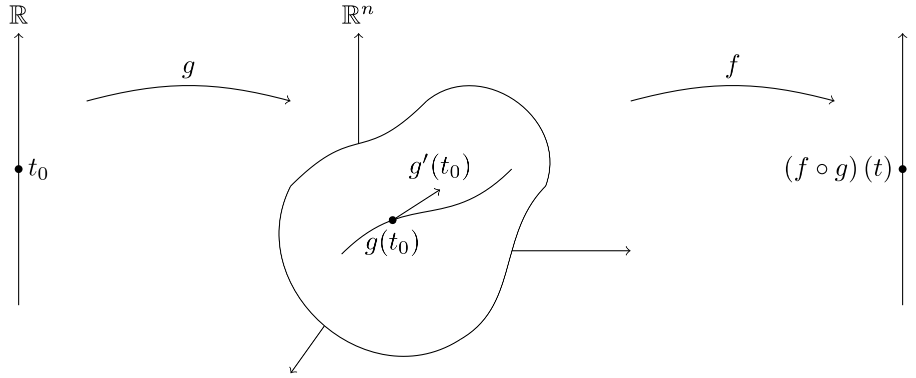
$f'(x_0)$ kann als Geschwindigkeitsvektor im Punkt $f(x_0)$ aufgefasst werden.

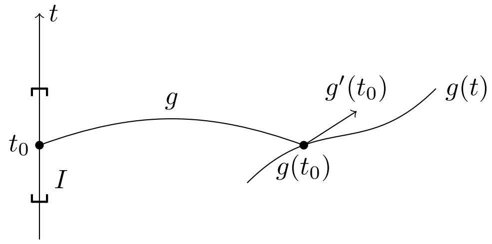
Satz 8.16 (Kettenregel, 2. Version)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$,$I \subset \mathbb{R}$. Sei $g : I \to \Omega$, $t \to (g_1(t), g_2(t), \ldots, g_n(t))$, an der Stelle $t_0 \in I$ differenzierbar sowie $f : \Omega \to \mathbb{R}$ an der Stelle $g(t_0)$ differenzierbar. Dann gilt:

$$\frac{d}{dt}(f\circ g)(t_0) = df(g(t_0)) \cdot g'(t_0)$$

$$\begin{aligned} d(f\circ g)(t_0) =& df(g(t_0)) \cdot dg(t_0) \\ =& \frac{\partial f}{\partial x^1}(g(t_0)) \cdot \frac{dg_1}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial x^2}(g(t_0)) \cdot \frac{dg_2}{dt}(t_0) \\ &+ \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(g(t_0)) \cdot \frac{dg_n}{dt}(t_0) \end{aligned}$$





Beispiel 8.17

Die vier Grundrechenarten sind differenzierbare Funktionen von zwei Variablen. Insbesondere gilt:

- $a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to x + y$

$$da\,(x, y) = \left(\frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial a}{\partial y}\right) = (1, 1)$$

- $m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to x \cdot y$

$$dm\,(x, y) = (y, x)$$

Setzt man diese beiden Funktionen in die obige Kettenregel ein, so erhält man die aus Analysis I bekannte Summen- und Produktregel:

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \to (g_1(t), g_2(t))$$

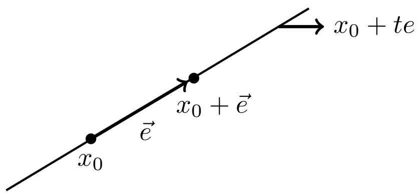
$$\frac{d}{dt}\,(g_1 + g_2) = \frac{d}{dt}\,(a \circ g) = (1, 1) \cdot \left(\frac{dg_1}{dt}, \frac{dg_2}{dt}\right) = 1 \cdot \frac{dg_1}{dt} + 1 \cdot \frac{dg_2}{dt}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\,(g_1 \cdot g_2) = \frac{d}{dt}\,(m \circ g) &= ((dm)\,(g(t))) \cdot \left(\frac{dg}{dt}\right) \\ &= (g_2\,(t)\,, g_1\,(t)) \cdot \left(\frac{dg_1}{dt}, \frac{dg_2}{dt}\right) \\ &= \frac{dg_1}{dt} \cdot g_2\,(t) + \frac{dg_2}{dt} \cdot g_1\,(t)\end{aligned}$$

Beispiel 8.18

Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ differenzierbar an der Stelle $x_0 \in \Omega$ und sei $e \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$; mit $|e| = 1$. Betrachte die Gerade $g(t) = x_0 + te$, $t \in \mathbb{R}$ durch x_0 mit Richtungsvektor



$$\frac{dg}{dt}(t_0) = \mathbb{R} \qquad \forall t_0 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\to x_0 + te \end{aligned}$$

Dann ist die Funktion $f \circ g$ in einer Umgebung von $t_0 = 0$ definiert und nach Kettenregel $f \circ g$ an der Stelle $t_0 = 0$ differenzierbar mit

$$\frac{d}{dt}(f \circ g)(0) = df(g(0))\frac{dg}{dt}(0) = df(x_0)(e) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) \cdot e^i$$

$e = \left(e^1, \ldots, e^n\right)$ und wird Richtungsableitung von f in Richtung e genannt; $\partial_e f(x_0)$ bezeichnet. Insbesondere gilt für $e = e_i$

$$\partial_{e_i} f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) = df(x_0)(e_i)$$

Geometrisch ist die Richtungsableitung von f in Richtung e genau die Steigung der Tangente zur Schnittkurve, falls wir den Graph von f mit einer zur xy-Ebene senkrechten Ebene durch $x_0 + te$ scheiden.

page 144, middle. STARTED; CAN'T FULLY UNDERSTAND THE DRAWING DUE TO LINES BEING FADED ON THE PDF

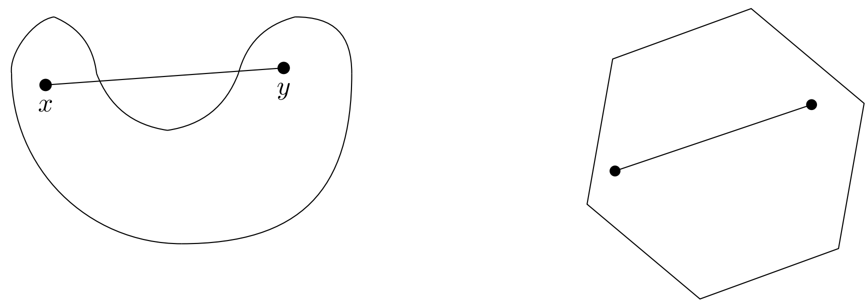
Um den Mittelwertsatz der DR zu verallgemeinern, benützen wir folgende Begriffe:

Definition 8.19

Eine Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann konvex, falls für jedes Paar von Punkten $x, y \in K$ die Menge K auch das Segment

$$(1-t)\,x + ty \qquad t \in [0, y]$$

mit Endpunkten x, y enthält



Nicht Konvex

Konvex

Satz 8.20

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ konvex $f : \Omega \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $x_0, x_1 \in \Omega$ sowie $x_t := (1-t)\,x_0 + tx_1$. Dann gibt es $\vartheta \in [0,1]$ mit

is it tx_1 or tx, ?? page 145 middle

$$f(x_1) - f(x_0) = df(x_{i\vartheta})(x_1 - x_0)$$

Beweis

Sei $g(t) = (1-t)\,x_0 + tx_1 = x_t$. Dann ist $t \to (f \circ g)(t)$ auf $[0,1]$ stetig und in $(0,1)$ differenzierbar. Also gibt es $\vartheta \in (0,1)$ mit (nach MWS der DR einer Variable)

$$f(x_i) - f(x_0) = (f \circ g)(1) - (f \circ g)(0) = (f \circ g)'(\vartheta)(1-0)$$

Nun ist

$$(f \circ g)'(\vartheta) = df\left(g(\vartheta) \cdot \frac{dg}{dt}(\vartheta)\right)$$

Die Kettenregel wird auch angewandelt um Integrale mit Parametern zu studieren. Ein Beispiel davon ist:

Is the formula done or does it continue on a new line, page 146 top

Beispiel

Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(s,t) \to h(s,t)$. Wir nehmen an, h ist stetig, $\frac{\partial h}{\partial t}$ existiert und ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig. Sei

$$u(t) = \int_a^{b(t)} h(s,t)ds,\ b(t) \in \subset' (\mathbb{R}),\ a \in \mathbb{R}$$

Is it C' or $\subset'$?? page 146 middle; limenet: it is C^1

Satz 8.21

Sei $h(s,t)$ eine stetige differenzierbare Funktion von zwei Variablen und $b(t)$ differenzierbare Funktion einer Variable. Dann ist die Funktion

$$u(t) := \int_a^{b(t)} h(s,t)ds$$

wo definiert, differenzierbar mit der Ableitung

$$u'(t) := h\,(b(t), t) \cdot b'(t) + \int_a^{b(t)} \frac{\partial h}{\partial t}\,(s, t)\,ds$$

Korollar 8.22

Sei $h = h\,(s, t) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig, und $\frac{\partial h}{\partial t}$ existiert und auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig. Sei

$$u(t) = \int_0^t h\,(s, t)\,ds$$

Dann

$$u(t) \in \subset' (\mathbb{R}) \text{ und } u'(t) = h\,(t, t) + \int_0^t \frac{\partial h}{\partial t}\,(s, t)\,ds$$

Beweis

Setze $b(t) = t$, $a = 0$ in Satz 8.21.

Korollar 8.23

Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit stetiger partieller Ableitung $\frac{\partial h}{\partial t}$. Dann ist die Funktion

$$u(t) := \int_a^b h(s, t)ds$$

differenzierbar mit Ableitung

$$u'(t) := \int_a^b \frac{\partial h}{\partial t}(s, t)ds$$

Beweis

Setze $b(t) = b$, in Satz 8.20

Bemerkung 8.24

Mit Korollar 8.23 kann man bestimmte Integrale berechnen, auch wenn die dazugehörigen unbestimmten Integrale nicht elementar darstellbar sind

Beispiel 8.25

Berechne das Integral

$$\int_0^1 \frac{x^5 - 1}{\log x} dx$$

Sei

$$u(\alpha) := \int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\log x} dx$$

Für $\alpha \geq 0$ erfüllt $u(\alpha)$ die Voraussetzungen des Satzes. Wir berechnen

$$u'(\alpha) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{x^\alpha - 1}{\log x} \right) dx = \int_0^1 \frac{x^\alpha \log x}{\log x} dx = \int_0^1 x^\alpha dx = \left. \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right|_0^{x=1} = \frac{1}{\alpha+1}$$

Daraus folgt aus dem fundamentalen Satz der Integralrechnung

$$u(\alpha) = \int u'(\alpha)\, d\alpha = \int \frac{d\alpha}{\alpha+1} = \log(\alpha+1) + C$$

Für eine noch zu bestimmende Konstante C. Aber

$$u(0) = \int_0^1 0 dx = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\log x} dx = \log(\alpha+1)$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{x^5 - 1}{\log x} dx = \log 6$$

Beweis Satz 8.21 (Idee)

Sei

$$f(x,y) = \int_a^x h(s,y)\, ds : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$g(t) = \begin{pmatrix} b(t) \\ t \end{pmatrix} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ g'(t) = \begin{pmatrix} b'(t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dann

$$u(t) = (f \circ g)(t) = f(b(t), t) = \int_a^{b(t)} h(s,t) ds$$

Nach dem Hauptsatz der Integralrechnung f ist nach x partielle differenzierbar und $\frac{\partial f}{\partial x} = h(x,y)$. Man muss zeigen, dass f ist nach y partiell differenzierbar mit

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \int_a^x \frac{\partial h(s,y)}{\partial x} ds$$

Dann ergibt die Kettenregel

$$\begin{aligned}
u'(t) =& \frac{d}{dt}\left(f\circ g\right)(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\left(g(t)\right), \frac{\partial f}{\partial y}\left(g(t)\right)\right)\cdot \frac{dg}{dt} \\
=& \left(h\left(b(t),t\right), \left(\int_a^x \frac{\partial h(s,y)}{\partial y} ds\right) h\left(b(t),t\right)\right) \begin{pmatrix} b'(t) \\ 1 \end{pmatrix} \\
=& \left(h\left(b(t),t\right), \int_a^{b(t)} \frac{\partial h}{\partial y}(s,t) ds\right) \begin{pmatrix} b'(t) \\ 1 \end{pmatrix} \\
=& h\left(b(t),t\right)\cdot b'(t) + \int_a^{b(t)} \frac{\partial h}{\partial t}(s,t) ds
\end{aligned}$$

8.3 Differentialformen und Vektorfelder

Sei $L\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}\right)$ der Raum der linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$. Falls $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ eine Funktion ist, die in jedem Punkt differenzierbar ist, dann ist $df(x)\in L\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}\right)$ und man erhält eine Abbildung

$$\begin{aligned}
&\Omega \to L\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}\right) \\
&x_0 \to df\left(x_0\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}\left(x_0\right),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x^n}\left(x_0\right)\right) \\
&\qquad\qquad\quad = \frac{\partial f}{\partial x^1}\left(x_0\right)dx^1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n}\left(x_0\right)dx^n
\end{aligned}$$

Dies ist ein Beispiel der $1-$Form

Definition 8.26
Eine Differentialform von Grad 1 (auch “$1-$Form”) auf Ω ist eine Abbildung

$$\lambda:\Omega\to L\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}\right)$$

Beispiel 8.27

1. Seien $x^i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ die Koordinatenfunktion, $1\le i\le n$. Für jedes $x_0\in\mathbb{R}^n$ ist $dx^i\left(x_0\right)\in L\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}\right)$; dies führt zur $1-$Form

$$\begin{aligned}
dx^i:\mathbb{R}^n &\to L\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}\right) \\
x_0 &\to dx^i\left(x_0\right)
\end{aligned}$$

   Für jedes $x_0\in\mathbb{R}^n$ gilt $dx^i\left(e_j\right)=\delta_{ij}$, also bilden $dx^1\left(x_0\right),\ldots,dx^n\left(x_0\right)$ eine Basis für $L\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}\right)$, $\forall x\in\mathbb{R}^n$.

Eine beliebige $1-$Form $\lambda : \mathbb{R}^n \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ lässt sich dann eindeutig wie folgt darstellen

$$\lambda(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x_0)\, dx^i(x_0)$$

wobei $\lambda_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Funktionen sind.

2. Für jedes $f \in \subset'(\Omega)$ist das Differential df eine $1 - Form$

Is it C' or $\subset'$?? page 152.1 top; limenet: C^1

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} dx^2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n$$

3. Der Ausdruck $\lambda(x, y, z) = 3dx + 5zdy + xdz$ definiert eine $1-$Form auf $\mathbb{R}^3$ mit

$$\lambda_1(x, y, z) = 3$$
$$\lambda_2(x, y, z) = 5z$$
$$\lambda_3(x, y, z) = x$$

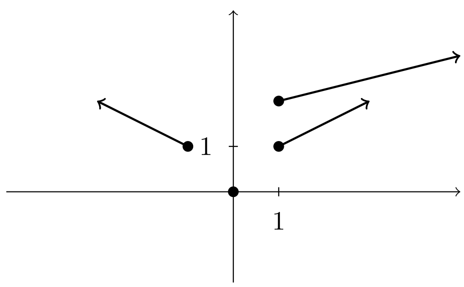
Definition 8.28
Ein Vektorfeld auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung $v : \Omega \to \mathbb{R}^n$

Does the definition include the examples? page 153 top

Beispiel

1.

$$v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \to \left(2xy, x^2\right)$$



2. $v(x, y) = (-y, x)$

Missing figure

Page 153, bottom
PLEASE SUGGEST SOME COORDINATES, AS I CANNOT REPLICATE YOUR DRAWING!

Bemerkung 8.29

Sei $<,>$ das übliche Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$, d.h.

$$< x, y >:= \sum_{i=1}^{n} x^i y^i$$

Mittels $<,>$ kann man von 1−Formen zu Vektorfeldern und umgekehrt übergehen. Dies geht wie folgt:

1. Sei $v : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld. Dann definieren wir $\forall x \in \Omega$, $\omega \in \mathbb{R}^n$

$$\lambda(x)(\omega) :=< v(x), \omega >$$

Offensichtlich $\lambda(x) \in (\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und somit ist

$$\begin{aligned} \lambda : \Omega &\to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \\ x &\to \lambda(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ &\qquad\qquad \omega \to < v(x), \omega > \end{aligned}$$

eine 1−Form auf Ω

<u>Umgekehrt</u>

2. Sei $\lambda : \Omega \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ 1−Form und $\lambda(x) := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) dx^i$ wie oben.

Wir definieren

$$\begin{aligned} v : \Omega &\to \mathbb{R}^n \\ x &\to (\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_n(x)) \end{aligned}$$

dann ist v ein Vektorfeld und

$$\lambda(x)(\omega) =< v(x), \omega >$$

Sei $\omega = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 + \cdots + \omega^n e_n$. Dann

$$\begin{aligned} \lambda(x)(\omega) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) dx^i(\omega) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) dx^i \left(\omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 + \ldots + \omega^n e_n\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) \left(\omega^1 dx^i(e_1) + \omega^i dx^i(e_i) + \ldots + \omega^n dx^i(e_n)\right) \\ dx^i(e_j)_{ij} \quad \leftarrow \quad &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) \omega^i = (\lambda_i(x), \ldots, \lambda_n(x)) \cdot \left(\omega^1, \ldots, \omega^n\right) \\ &= < v(x), \omega > \end{aligned}$$

Diese Diskussion können wir auf das Differential einer Funktion anwenden

Definition 8.30

Sei $f \in \subset' (\Omega)$. Das durch

$$< v(x), \omega >:= df(x)(\omega), \omega \in \mathbb{R}^n$$

definierte Vektorfeld heisst Gradientenfeld von f und wird mit $v(x) = \nabla f(x)$ oder grad$f$ bezeichnet.

Bezüglich der Standardbasis $e_1, \ldots, e_n$ der $\mathbb{R}^n$ folgt die Darstellung

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x^1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x^n}(x) \end{pmatrix}, \forall x \in \Omega$$

(Oben nehmen wir $\lambda(x) := df(x) = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} r^i x^i$, Bemerkung 8.29, 2.)

Satz 8.31

Sei $f \in \subset' (\Omega)$ und $x_0 \in \Omega$. Dann gibt $\nabla f\,(x_0)$ die Richtung und $|\nabla f\,(x_0)|$ den Betrag des steilsten Anstieges von f an der Stelle x_0 an.

Beweis

Aus der Definition des Gradientenfeld folgt $\forall e \in \mathbb{R}^n$, Einheitsvektor $\|\, e \,\|= 1$

$$df\,(x_0)\,(e) =< \nabla f\,(x_0)\,, e >$$

Mit Cauchy-Schwarz folgt

$$< \nabla f\,(x_0) > \leq \|\nabla f\,(x_0)\| \|e\| = \|\nabla f\,(x_0)\|$$

mit Gleichkeit genau dann, wenn e ein positives Vielfaches von $\nabla f\,(x_0)$ ist, nämlich

$$e = \frac{\nabla f\,(x_0)}{|\nabla f\,(x_0)|}$$

$$\Rightarrow df\,(x_0)\,e \leq |\nabla f\,(x_0)|$$

mit Gleicheit für $e = \frac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|}$ $\nabla f\,(x_0) \neq 0 \Rightarrow \nabla f\,(x_0)$ zeigt die Richtung an, in der f am schnellsten wächst.

■

Geometrische Interpretation

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, C'$. Für jedes $s \in \mathbb{R}$ wird $f^{-1}(s) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = s\}$ Niveaufläche genannt.

Beispiel

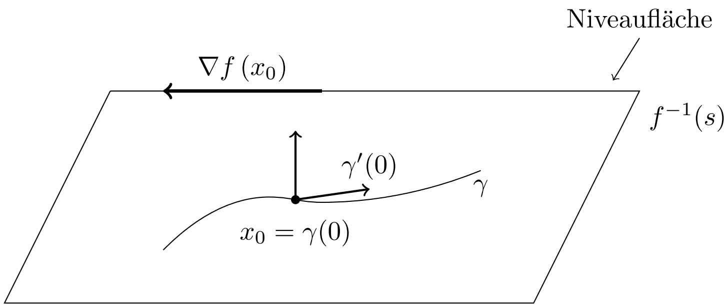
1.

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y, z) \to x^2 + y^2 + z^2$$

dann ist $f^{-1}(s) =$ Sphäre mit Zentrum O und Radius $\sqrt{s}$

2. $f(x, y) = xy$ ist ein hyperbolischer Parabolid mit Niveaulinien

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Nun sei $x_0 \in \Omega$ mit $f(x_0) = s$, i.e. $x_0 \in f^{-1}(s)$. Sei $\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^n$ ein differenzierbare Kurve durch x_0 mit $\gamma[-1, 1] \subset f^{-1}(s)$, $\gamma(0) = x_0$



Dann gilt $f(\gamma(t)) = s$, $\forall t \in [-1, 1]$ und es folgt aus der Kettenregel

$$\begin{aligned} &\tfrac{d}{dt}\left(f(\gamma(t))\right) = \tfrac{d}{dt}(s) = 0 \\ &\Downarrow \\ &df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0 =< \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) > \end{aligned}$$

Insbesondere $0 = df(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) =< \nabla f(x_0), \gamma'(0) >$ d.h. $\nabla f(x_0)$ steht senkrecht zur Niveauflache von f durch x_0

Beispiel

Sei $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{2}$, $x, y \in \mathbb{R}^2$

$$\nabla f(x, y) = (x, -y)$$

Sei $(x_0, y_0) = (1, -1)$

$$\nabla f(1, -1) = (1, 1) \qquad (\nabla f(1, -1)) = \sqrt{2}$$

$$\frac{\nabla f}{|\nabla f|}(1,-1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$$

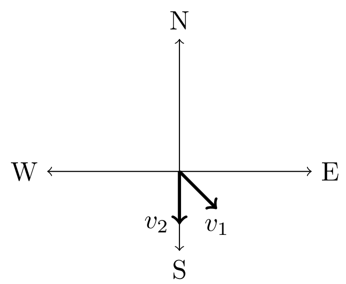
3. Im Punkt P biegt der Bergweg ab; nach Südosten geht er mit 25% Steigung bergauf, nach Süden mit 20% Gefälle bergab. Der wanderer im Nebel möchte über die Wiese möglichst rascht zum Gipfel. In welche Richtung muss er gehen und wie steil ist es dorthin?

   Wir legen das Koordinatensystem so, dass die $x-$Achse nach Osten und die $y-$Achse nach Norden zeigt, und setzen voraus, dass die Höhenfunktion h differenzierbar ist. Wir wollen ihren Gradienten in P $\nabla h(P)$ bestimmen. Nach Voraussetzung hat h die beiden Richtungsableitungen

$$dh\,(P)\,(v_1) = 0.25 \qquad dh\,(P)\,(v_2) = -0.2$$

   wobei

$$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad v_2 = (0,-1)$$



$$\begin{aligned} dh\,(P)\,(v_1) &= \left(\frac{\partial h}{\partial x}(P), \frac{\partial h}{\partial y}(P)\right)\cdot v_1 \\ &= \frac{\partial h}{\partial x}(P)\,\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\partial h}{\partial y}(P)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4} \\ dh\,(P)\,(v_2) &= \left(\frac{\partial h}{\partial x}(P)\right)(0) - \frac{\partial h}{\partial y}(P)\,(-1) = -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

   Durch Lösen des linearen Gleichungssystem folgen wir:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(P) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{5}, \frac{\partial h}{\partial y}(P) = \frac{1}{5}$$

   Die Richtung des Gradients ist somit

$$\arg \nabla h\,(P) = \arctan \frac{\frac{1}{5}}{\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{5}} \cong 19.86^\circ$$

   und die Steigung in diese Richtung ist

$$|\nabla h\,(P)| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} \cong 0.59 = 59\%$$

8.4 Wegintegrale

Wir haben in Bemerkung 8.29 gesehen, dass man mittels dem üblichen Skalarprodukt $<,>$ von $1-$Formen zu Vektorfeldern und umgekehrt übergehen kann.

n't read, page 162
ddle

In diesem Kapitel werden wir das "Wegintegral" von $1-$Formen oder von Vektorfeldern längs eine Kurve studieren. Dazu untersuchen wir zunächst Kurven in $\mathbb{R}^n$

Parameterdarstellung einer Kurve

Sei $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ eine Kurve. Eine Parameterdarstellung (PD) von γ ist eine Funktion

$$\begin{aligned} \gamma : I = [a, b] &\to \mathbb{R}^n \\ t &\to \gamma(t) \end{aligned}$$

wobei $\gamma\,(t)$ ein Punkt γ ist und jeder Punkt auf γ kann als $\gamma\,(t)$ dargestellt werden

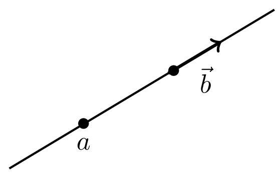
$$\gamma\,(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$$

Die positive Richtung von γ ist die Richtung mit der die Kurve durchgelaufen wird

Beispiel 8.32

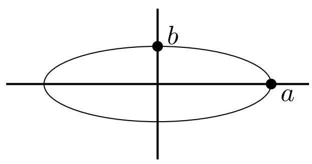
1. $$\gamma(t) = (a_1 + b_1 t, a_2 + b_2 t, a_3 + b_3 t)\,,\; t \in \mathbb{R}$$

   ist die Parameterdarstellung einer Gerade durch den Punkt $a = (a_1, a_2, a_3)$ und parallel zum Vektor (b_1, b_2, b_3)

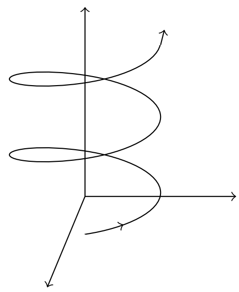


2. $\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t)$ ist eine Parameterdarstellung einer Ellipse

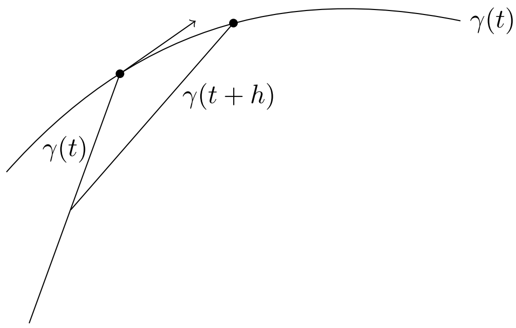
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
$$t \in [0, 2\pi]$$



3. $\gamma_1(t) = (a\cos t, b\sin t, ct)$, $t \in [0, 2\pi]$ ist eine Parameterdarstellung einer elliptischen Helix



$\gamma_2(t) = (a\cos t, -b\sin t, c(2\pi - t))$, $t \in [0, 2\pi]$ ist die Parameterdarstellung der gleichen Kurve wobei die Richtung umgekehrt ist



Der Tangentialvektor zur Kurve an der Stelle $\gamma(t)$ ist $\gamma'(t)$

$$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), \ldots, \gamma_n'(t))$$

Do I have to include the example?? page 16 bottom

Definition 8.33

Das Wegintegral von ϑ längs γ

$$\int_\gamma v d\vec{s} = \int_\gamma v(\gamma) d\gamma := \int_a^b < v(\gamma(t)), \gamma'(t) > dt$$

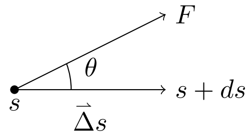
$vd\vec{s} = \gamma'(t)dt$ heisst gerichtetes Längenelement

Beispiel 8.34

Ein einführendes Beispiel: Sei m ein Massenpunkt, der sich unter den Einfluss eines Kraftfeldes $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bewegt.

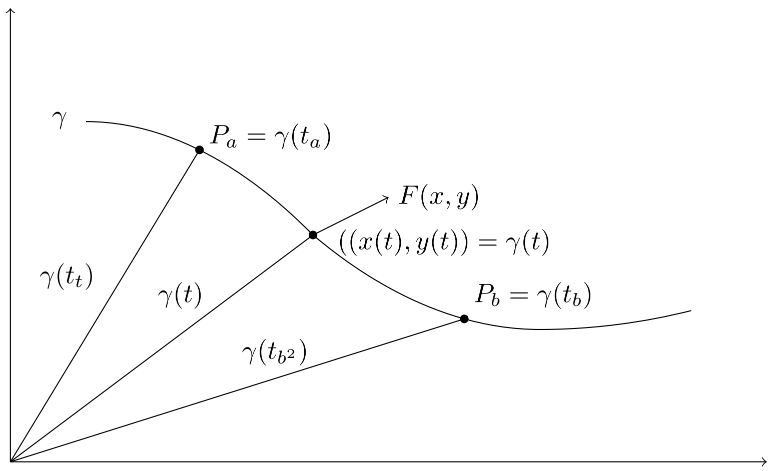
Der Massenpunkt wird durch eine konstante Kraft $\vec{F}$ längs einer Geraden um den Vektor $\vec{s}$ verschoben.

Die dabei verrichtete Arbeit ist definitionsgemäss das Skalarprodukt aus dem Kraftvektor $\vec{F}$ und dem Verschiebungsvektor $\vec{s}$.



$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos\theta$$

Allgemeiner Fall
Verschiebungs längs einer Kurve γ in einem Kraftfeld $F = (P(x,y), Q(x,y))$



$\Delta W = F \cdot \Delta(\gamma) =$ Kraftkomponente entlang des Weges mal züruckgelegter Weg.

Da sich Betrag und Richtung der Kraft sowie der jeweilige Winkel zum Weg vom Punkt zu Punkt ändern, gilt das zur Berechnung notwendige Skalarprodukt näherungsweise jeweils nur für ein Wegelement $\overrightarrow{\Delta} r$. Die Berechnung der Arbeit erfolgt daher in folgender Weise:

a) Zerlegung des Weges in Teilabschnitte

$$\Delta\gamma_1 = \gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i) = \frac{\Delta\gamma}{\Delta t} \cdot \Delta t$$

n't read, page 167
ddle; limenet: plus,
ammar is totally
ong

b) Ermittlung der Arbeit Kraft:

$$F(\gamma(t_i)) = F(x(t_i), y(t_i))$$

c) Berechnen der Arbeit je Teilabschnitt-Skalarprodukt

$$\Delta W_i = F(x(t_i), y(t_i)) \cdot \Delta\gamma_i$$

d) Aufsummieren der Teil-Arbeit

$$W \approx \sum \Delta W_i = \sum F(x(t_i), y(t_i)) \cdot \underbrace{\Delta\gamma}_{\frac{\Delta\gamma}{\Delta t} \cdot \Delta t}$$

e) Durch Verkleinerung des Wegelementes erhält man den exakten Wert der geleisteten Arbeit

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \\ &= \int_a^b < F(\gamma(t)), \gamma'(t) > dt \end{aligned}$$

Bemerkung 8.35

Wir können das Wegintegral auch mit Differentialformen formulieren. Sei

$$\begin{aligned} v : \Omega &\to \mathbb{R}^n \\ x &\to \left(v^i(x)\right)_{i=1}^n \end{aligned}$$

ein stetiges Vektorfeld ($v^i(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig) dann ist durch $\lambda(x)(\omega) :=< v(x), \omega >$ eine $1-$Form $\lambda(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ definiert

$$\begin{aligned} \int_\gamma v d\vec{s} &= \int_a^b < v(\gamma(t)), \gamma'(t) > dt \\ &= \int_a^b \lambda(\gamma(t))(\gamma'(t))\, dt \end{aligned}$$

<u>Umgekehrt</u>

Sei $\lambda : \Omega \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ eine $1-$Form die im folgenden Sinn stetig ist:

Sei

$$\begin{aligned} \gamma : [a,b] &\to \Omega \\ t &\to \left(\gamma^1(t), \gamma^2(t), \ldots, \gamma^n(t)\right) \end{aligned}$$

ein $C'-$Weg. Dann ist

$$\begin{aligned} [a,b] &\to \mathbb{R} \\ t &\to \lambda(\gamma(t))(\gamma'(t)) \\ &= \sum \lambda_i(\gamma(t)) \cdot \frac{d\gamma^i}{dt}(t) \end{aligned}$$

eine stetige Funktion. Somit ist das Integral $\int_a^b \lambda(\gamma(t))(\gamma'(t))\, dt$ wohl definiert.

Definition 8.36
Das Wegintegral von $\gamma \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ längs γ ist

$$\int_\gamma \lambda := \int_a^b \lambda(\gamma(t))(\gamma'(t))\,dt$$

Beispiel 8.37

1. Sei $\gamma \in C'\left([0, 2\pi] = \mathbb{R}^2\right)$ mit

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$
$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

eine Parametrisierung des Einheitskreises $\lambda = \lambda(x, y)$ die 1−Form mit

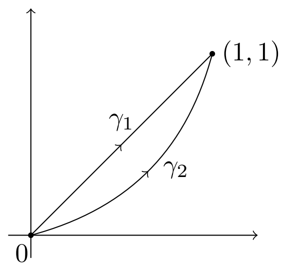
$$\lambda(x, y) = -ydx + xdy \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Dann gilt

$$\int_\gamma \lambda = \int_0^{2\pi} \underbrace{(-\sin t, \cos t)}_{\lambda(\gamma(t))} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}}_{\gamma'(t)} dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(\sin^2 t + \cos^2 t\right) dt = 2\pi$$

2. Sei $\gamma(x, y) = 3x^2ydx + \left(x^3 + 1\right) dy$. Wir betrachten das Kurvenintegral längs verschiedener Wege

$\gamma_1(t) = (t, t), 0 \leq t \leq 1$
$\gamma_1'(t) = (1, 1)$
$\gamma_2(t) = (t, t^2), 0 \leq t \leq 1$
$\gamma_2'(t) = (1, 2t)$



$$\int_{\gamma_1} \lambda = \int 3x^2ydx + \left(x^3 + 1\right) dy = \int_0^1 \left(3t^3 + \left(t^3 + 1\right)\right) dt = 2$$

$$\int_\gamma \lambda = \int_0^1 \left(3t^4 + \left(t^3 + 1\right) \cdot 2t\right) dt = 2$$

Bemerkung

Sei $f(x,y) = x^3y + y$. Dann ist

is this inside the enum
rated list or out?? pag
170 bottom

$$df(x+y) = 3x^2ydx + \left(x^3+1\right)dy$$

und

$$f(1,1) - f(0,0) = (1+1) - (0,0) = 2$$

Wir können den Begriff des Wegintegrals auf Wege erweitern, die stückweise C' sind. Ein stückweiser $C'-$Weg ist eine stetige Abbildung $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ mit einer Unterteilung des Intervalls

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b$$

so dass

$$\gamma|_{[a_i,a_{i+1}]} = [a_i, a_{i+1}] \to \mathbb{R}^n$$

C' ist.

d.h. $t \to \gamma'(t)$ ist auf (a_i, a_{i+1}) stetig und erweitert sich stetig auf $[a_i, a_{i+1}]$

Beispiel

is this inside the enum
rated list or out?? pag
171 middle

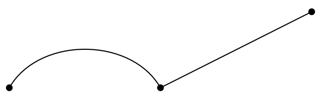


Bild eines stückweise $C'-$Weges

Dann definiert man

$$\int\limits_{\gamma} \lambda := \sum_{t=0}^{n-1} \int\limits_{\gamma|_{[a_i,a_{i+1}]}} \lambda$$

Jetzt werden wir die einzige grundlegendee Eigenschaften des Wegintegrals herleiten.

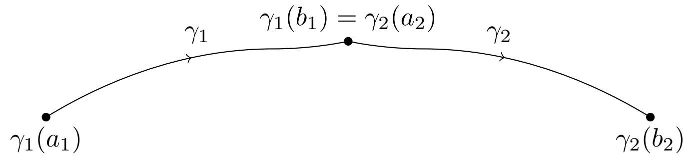
Satz 8.38 (Eigenschaften des Wegintegrals)

E1) Das Wegintegral $\int\limits_{\gamma} \lambda$ ist unabhängig von einer orientierungserhaltenden Umparametrisierung.
D.h. Sei $\gamma : [a,b] \to \Omega$, C' und $\varphi : [a',b'] \to [a,b]$, C' mit $\varphi(a') = a$, $\varphi(b') = b$, $\varphi'(t) > 0$ $\forall t \in [a',b']$. Dann ist

$$\begin{aligned}\int\limits_{\gamma\circ\varphi} \lambda &= \int\limits_{a'}^{b'} \lambda\left(\gamma\left(\varphi(t)\right)\right)\left(\gamma\circ\varphi\right)'(t)dt \\ &= \int\limits_{a'}^{b'} \lambda\left(\gamma\left(\varphi(t)\right)\right)\gamma'\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt \\ &= \int\limits_{a}^{b} \lambda\left(\gamma\left(s\right)\right)\gamma'\left(s\right)ds = \int\limits_{\gamma} \lambda\end{aligned}$$

Geometrisch heisst dies, dass $\int\limits_\gamma \lambda$ nur vom Bild $\gamma([a,b])$ mit vorgegebenen Durchlaufsinn abhängt.

E2) Seien $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \Omega$ und $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \Omega$ zwei Wege mit $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$



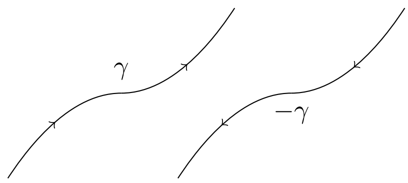
Wir definieren $\gamma_1 + \gamma_2$ als Weg, der durch aneinanderhängen von γ_1 und γ_2 entsteht, d.h.

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [a_1, b_1] \\ \gamma_2(t - b_1 + a_2) & t \in [b_1, b_1 + b_2 - a_2] \end{cases}$$

Dann gilt

$$\int\limits_{\gamma_1+\gamma_2} \lambda = \int\limits_{\gamma_1} \lambda + \int\limits_{\gamma_2} \lambda$$

E3) Sei $\gamma : [a,b] \to \Omega$ ein Weg. Dann sei $-\gamma : [a,b] \to \Omega$ der gleiche Weg aber im entgegengesetzen Durchlaufsinn, d.h. $(-\gamma)(t) = \gamma(-t + a + b)$



Dann gilt

$$\int\limits_{-\gamma} \lambda = -\int\limits_{\gamma} \lambda$$

E4) Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine C'−Funktion, sowie $\gamma : [a,b] \to \Omega$ stückweise C'. Dann gilt

$$\int\limits_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

γ ist C', dann ist

$$\begin{aligned} \int\limits_\gamma df &= \int\limits_a^b df(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt \\ &= \int\limits_a^b \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)\,dt \\ &= (f \circ \gamma)(b) - (f \circ \gamma)(a) \\ &= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) \end{aligned}$$

Mittels des Wegintegrals können wir die C'−Funktionen charakterisieren, deren Differentiale verschwinden.

Satz 8.39

Sei Ω "offen" und C^1-wegzusammenhängend. Sei $f \in C'(\Omega)$. Falls $df(x) = 0$, $\forall x \in \Omega$, so ist f konstant.

Beweis

Wenn Ω wegzusammenhängend ist, heisst das, dass zu je zwei Punkten $x, y \in \Omega$ gibt es in $C'-$Weg $\gamma : [0,1] \to \gamma$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$, $\gamma([0,1]) \subset \Omega$. Dann folgt

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) =& f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) \\ =& \int_\gamma df = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f(y) = f(x)$, $\forall x, y \in \Omega \Rightarrow f$ ist konstant.

Frage: Wann ist eine $1-$Form λ, von der Form $\lambda = df$, d.h. das Differential einer Funktion? D.h. gegeben eine $1-$Form λ, gibt es eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ s.d. $df = \lambda$
?

Wenn es ein $f : \Omega \to \mathbb{R}$ gibt, so dass $df = \lambda$, heisst f ein Potential. (Potential ist wie eine Stammfunktion für eine $1-$Form). Mittels Wegintegral stellen wir jetzt ein Kriterium auf.

Satz 8.30

Sei $\lambda \in \Omega \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ eine stetige $1-$Form. Folgende Aussagen sind äquivalent

1. Es gibt $f \in C'(\Omega)$ mit $df = \Omega$
2. Für je zwei stückweise $C'-$Wege $\gamma_i = [a_i, b_i] \to \Omega$ mit den selben Anfangs- und Endpunkten (d.h. $\gamma_1(a_1) = \gamma_2(a_2)$, $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(b_2)$), gilt
$$\int_{\gamma_1} \lambda = \int_{\gamma_2} \lambda$$
3. Für jeden geschlossenen C'Weg γ gilt
$$\int_\gamma \lambda = 0$$

Beweis

(1) $\Rightarrow$ (2): Folgt aus E4)

(2) $\Leftrightarrow$ (3): Klar

(2) $\Rightarrow$ (1): Sei $p_0 \in \Omega$; für jedes $x \in \Omega$. Sei $\gamma : [0,1] \to \Omega$ stückweise C' mit $\gamma(0) = p_0$, $\gamma(1) = x$. Definiere $f(x) := \int_\gamma \lambda$.

Dann ist f nach Annahme (2) wohl definiert (d.h. unabhängig vom Weg von p_0 nach x) (Wir können f auch mit $\int_{p_0}^x \lambda$ bezeichnen)

Behauptung

$f \in C'(\Omega)$ und $df = \lambda$. Um zu zeigen, dass $df = \lambda$ müssen wir zeigen, dass für $x, x_0 \in \Omega$

$$f(x) - f(x_0) = \lambda(x_0)(x - x_0) + R(x, x_0)$$

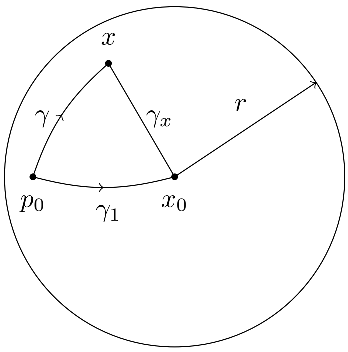
mit $\frac{R(x,x_0)}{|x-x_0|} \to 0$.

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Sei $\gamma_1 : [-1, 0] \to \Omega$ ein Weg von p_0 nach x_0. Dann gilt

$$\int_{\gamma_1} \lambda = f(x_0)$$

Sei

$$\begin{aligned} \gamma_x : [0,1] &\to \Omega \\ t &\to (1-t)x_0 + tx \end{aligned}$$



Um $\gamma^x([0,1]) \subset \Omega$ zu garantieren, nehmen wir $r > 0$, so dass $B_r(x_0) \subset \Omega$ und nehmen an, dass $x \in B_r(x_0)$. Dann ist

$$f(x) = \int_{\gamma_1 + \gamma_x} \lambda = \int_{\gamma_1} \lambda + \int_{\gamma_x} \lambda = f(x_0) + \int_{\gamma^x} \lambda$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \int_{\gamma^x} \lambda &= \int_0^1 \lambda(\gamma_x(t))\, \gamma_x{}'(t) dt \\ &= \int_0^1 \lambda(\gamma_x(t))\,(x - x_0) dt \\ &= \lambda(x_0)(x - x_0) + \int_0^1 (\lambda(\gamma^x(t)) - \lambda(x_0))(x - x_0)\, dt \end{aligned}$$

Sei $\lambda = \sum \lambda^i dx^i$ dann ist obiges Integral gleich

$$\sum \int_0^1 \left[\lambda_i \left(\gamma^x \left(t\right)\right) - \lambda_i \left(x_0\right)\right] \left(x^i - x_0^i\right) dt$$

$$\leq \sum \left(\int_0^1 \left[\lambda_i \left(\gamma^x \left(t\right)\right) - \lambda_i \left(x_0\right)\right]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left|x - x_0\right|$$

Also $f\left(x\right) - f\left(x_0\right) = \lambda\left(x_0\right)\left(x - x_0\right) + R\left(x, x_0\right)$, wobei

$$\frac{R\left(x - x_0\right)}{\left|x - x_0\right|} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\int_0^1 \left(\lambda_i \left(\gamma^x \left(t\right)\right) - \lambda_i \left(x_0\right)\right) dt \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Aus der Stetigkeit der folgt, dass

Can't read, page 179 bottom

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R\left(x, x_0\right)}{\left|x - x_0\right|} \to 0$$

Beispiel 8.31

1. Sei $\lambda = 2xy^2 dx + 2x^2 y dy$.

   Ansatz:

   $$f\left(x, y\right) = \int_{\gamma_{(x,y)}} \lambda$$

   wobei $\gamma_{(x,y)}\left(t\right) = \left(t_x, t_y\right)$, $t \in \left(0, 1\right)$. Dann ist

   $$\int_{\gamma} \lambda = \int_0^1 \lambda\left(tx, ty\right)\left(x, y\right) dt$$

   $$= \int_0^1 \left[2\left(tx\right)\left(ty\right)^2 \cdot x + 2\left(tx\right)^2 \left(ty\right) \cdot y\right] dt$$

   $$= 4x^2y^2 \int_0^1 t^3 dt = x^2 y^2$$

   und $df\left(x, y\right) = 2xy^2 dx + 2x^2 y dy$.

   Oder: Ansatz:

   $$df : \lambda \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2, \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 y$$

   $$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2 \Rightarrow f\left(x, y\right) = \int 2xy^2 dx = x^2y^2 + C\left(y\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 y + \frac{d}{dy} C(y) = 2x^2 y \Rightarrow \frac{d}{dy} C(y) = 0 \Rightarrow C(y) = \text{ Konstant}$$

$$\Rightarrow f(x, y) = x^2 y^2 + C$$

here is number 2?? ge 180

Analog wie für 1−Formen kann man Satz 8.30 für Vektorfelder formulieren

Definition 8.32
Ein Vektorfeld $v : \Omega \to \mathbb{R}^n$ heisst konservativ, falls $\forall \gamma : [0, 1] \to \Omega$ geschlossen ist

$$\int_\gamma v ds = 0$$

Aus Satz 8.30 folgt

Satz 8.33

Für ein stetiges Vektorfeld $v : \Omega \to \mathbb{R}^n$ sind folgende Aussagen äquivalent

1. v ist konservativ
2. Es gibt $f \in C'(\Omega)$ mit $v = \nabla f$. In diesem Fall heisst v Potentialfeld mit dem Potential f.

n't understand, page 2 top

Im nächsten Kapitel, mittels höheren partiellen Ableitungen, erhalten wir eine einfache zu notwendige Bedingung für ein konservatives Vektorfeld. Wir werden sehen, dass

$$v = \left(v^i\right)_{1 \le i \le n} \in C'(\Omega, \mathbb{R}^n) \text{ konservative}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial v^i}{\partial x^j} = \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \qquad 1 \le i, j \le n$$

8.5 Höhere Ableitungen

Definition 8.44
$f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $f \in C'(\Omega)$ heisst von Klasse C^2 falls $\frac{\partial f}{\partial x^i} \in C'(\Omega)_{1 \le i \le n}$

here does the definiti- end? page 183 top

Für ein beliebiges m, heisst die Funktion $f \in C'(\omega)$ heisst von der Klasse C^m, $f \in C^m(\omega)$, falls $\frac{\partial f}{\partial x^i} \in C^{m-1}(\Omega)$, $1 \le i \le n$

Für ein $f \in C^2(\Omega)$, heissen die Funktionen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} := \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)$$

die zweiten partiellen Ableitungen von f.

Analog definiert man die $m-$ten partiellen Ableitungen von f oder partielle Ableitungen vom Grad m für jedes $m > 0$ (Für $f \in C^m(\Omega)$)

Satz 8.45

Sei $f \in C^2(\Omega)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} &= \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} f\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j x^i}\end{aligned}$$

Im Allgemeinen

Satz 8.46

Für jede C^k-Funktion sind alle partiellen Ableitungen vom Grad $\leq k$ von der Reihenfolge der Ableitungen unabhängig. Von Satz 8.35 erhalten wir folgende notwendige Bedingung für die Konservativität

Korollar 8.47

Sei $v : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $v = \left(v^i\right)_{1 \leq i \leq n}$ ein $C'-$Vektorfeld. Falls v konservativ ist, folgt

$$\frac{\partial v^i}{\partial x^j} = \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \qquad 1 \leq i, j \leq n$$

Beweis

Nach Voraussetzung gibt es $f \in C'(\Omega)$ mit $v^i(x) = \frac{\partial f}{\partial x^i}$. Da nun $v^i \in C'$, $1 \leq i \leq n$ folgt $f \in C^2(\Omega)$. Woraus

$$\frac{\partial v^i}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial}{\partial x^i} v^j$$

folgt.

Beispiel 8.48

1. $$v(x, y) = \begin{pmatrix} 4xy^2 \\ 2y \end{pmatrix}$$

   Es gilt $\frac{\partial v'}{\partial y} = 8xy$, $\frac{\partial v^2}{dx} = 2$. Also ist v nicht konservativ

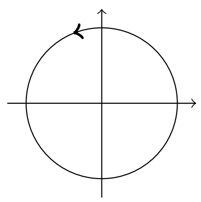
2. Sei $\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \neq (0, 0)\right\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$ und

   $$v(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right)$$

   Dann $v : \Omega \to \mathbb{R}^2$ mindestens C'. Ausserdem

   $$\frac{\partial v'}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{\partial v^2}{\partial x}$$

   Jetzt berechnen wir $\int_C v ds$, wobei C:



$$C(t) = (\cos(t), \sin(t))$$
$$t \in (0, 2\pi]$$

$$\begin{aligned}
\int_C v ds &= \int_0^{2\pi} < v\left(C\left(t\right)\right), C'\left(t\right) > dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-\sin t, \cos t\right) \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\sin^2 t + \cos^2 t\right) dt = 2\pi \neq 0
\end{aligned}$$
$$\Rightarrow v \text{ auf } \Omega \text{ ist nicht konservativ!}$$

n't understand image page 187, top

Jetzt betrachten wir $\Omega' = \{(x, y) \mid x > 0\}$ und führen Polarkoordinaten ein

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

Dann ist $\tan\theta = \frac{y}{x}$ und

$$\theta = \arctan\frac{y}{x}$$

Wir betrachten $\theta : \Omega' \to \mathbb{R}$ als ein Funktion der Variabeln x, y und berechnen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\theta}{\partial x} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \\
\frac{\partial\theta}{\partial x} &= \frac{x}{x^2 + y^2}
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\nabla\theta\left(x, y\right) = v\left(x, y\right)$$
$$v\left(x, y\right) \in \Omega'$$
$$\Rightarrow \; v \text{ ist konservative auf } \Omega$$

Das heisst die Konservativität ist eine Eigenschaft zugleich des Vektorfeldes v $\underline{v}$ und der Region Ω.

Definition 8.49
Eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heisst einfach zusammenhängend, falls

1. Ω ist stückweise C'−wegzusammenhängend

2. Jeder stückweise C'−Weg in Ω kann stetig innerhalb Ω auf einen Punkt zusammengezogen werden

Die Region $\Omega = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist nicht einfach zu $\Omega' = \{(x, y) \mid x > 0\}$ ist es aber.

limenet: This sentence doesn't make any sense at all

Satz 8.50

Sei $\Omega \in \mathbb{R}^2$ beschränkt zusammenhängend sowie einfachzusammenhängend, sei $v \in C'\left(\Omega : \mathbb{R}^2\right)$ Vektorfeld. Dann sind folgende Aussagen äquivalent

1. v ist konservativ
2. $\frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_2}{\partial x}$

Taylorentwicklung und das lokale Verhalten von C^m−Funktionen

Not sure how big of a title...

Wir werden jetzt ein Verallgemeinerung der Taylorentwicklung einer Variablen herleiten.

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine C^m−Funktion sowie $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$. (Allgemein könnte man $\mathbb{R}^n$ durch eine offene konvexe Menge ersetzen)

Sei

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^n \\ t &\to (1-t)\, x_0 + x_1 \end{aligned}$$

Dann ist $g := f \circ \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine

Don't know where this actually fits: $(g(0) = f = (x_0)\,, g(1) = f\,(x_1))$

C^m−Funktion und (nach Taylorentwicklung von Funktionen mit einer Variablen) gibt es $\xi \in (0, 1)$, so dass

can't read, page 189 bottom

$$(*) \qquad g\,() = g\,(0) + g'\,(0) + \ldots + \frac{g^{(m-1)}\,(0)}{(m-1)!} + \frac{g^{(m)}\,(\xi)}{m!}$$

can't read between brackets before equal sign, page 190 very top

Jetzt berechnen wir $g^{(i)}(t)$ als Funktion von f und deren Ableitungen. Für $g'(t)$ benutzen wir die Kettenregel:

$$g'(t) = df\,(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

mit

$$\varphi'(t) = x_1 - x_0 = \left({x_1}' - {x_0}', {x_1}^2 - {x_0}^2, \ldots, {x_1}^n - {x_0}^n\right)$$

Erhalten wir:

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} (\varphi(t)) \left(x_1^i - x_0^i\right) = \nabla f (\varphi(t)) \cdot (x_1 - x_0)$$
$$g'(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} (x_0) \left(x_1^i - x_0^i\right) = \nabla f (x_0) \cdot (x_1 - x_0)$$

Jetzt berechnen wir $g^{(2)}(t)$:

$$g^{(2)}(t) = \frac{d}{dt} (g'(t)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} (\varphi(t)) \right) \left(x_1^i - x_0^i\right)$$

Analog gilt:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} (\varphi(t)) \right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial \mathrm{x}^i} (\varphi(t)) \left(x_1^j - x_0^j\right)$$

Eingesetzt gilt:

$$g^{(2)}(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} (\varphi(t)) \right) \left(x_1^i - x_0^i\right) \left(x_1^j - x_0^j\right)$$
$$g^{(2)}(0) = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} (x_0) \right) \left(x_1^i - x_0^i\right) \left(x_1^j - x_0^j\right)$$

Daraus schliesst man induktiv, dass

$$g^{(k)}(t) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1}^{n} \left(\frac{\partial^k f}{\partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_k}} (\varphi(t)) \right) \prod_{l=1}^{k} \left(x_1^{i_l} - x_0^{i_l}\right)$$

Eingesetzt in $(*)$ (s.39) ergibt

MISSING CONTENT?? page 191 bottom

Satz 8.51(Taylorentwicklung)

$$\begin{aligned} f(x_1) =& f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x'} (x_0) \left(x_1^i - x_0^i\right) + \ldots \\ &+ \frac{1}{(m-1)!} \sum_{i_1, \ldots, i_{m-1} = 1}^{n} \frac{\partial^{m-1} f}{\partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_{m-1}}} (x_0) \prod_{l=1}^{(m-1)} \left(x_1^{i_l} - x_0^{i_l}\right) \\ &+ \frac{1}{m!} \sum_{i_1, \ldots, i_m = 1}^{n} \frac{\partial^m f}{\partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_m}} (x_\xi) \prod_{l=1}^{m} \left(x_1^{i_l} - x_0^{i_l}\right) \end{aligned}$$

mit einer Zahl $\xi \in (0,1)$, $x_\xi = (1-\xi) x_0 + \xi x_1$.

Bemerkung 8.52

Insbesondere für $m = 2$ erhalten wir für f die quadratische Näherung

$$\begin{aligned} f(x_1) =& f(x_0) + \nabla f(x_0)(x_1 - x_0) \\ &+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_0)\left(x_1^i - x_0^i\right)\left(x_1^j - x_0^j\right) + r_2(f, x_1, x_0) \end{aligned}$$

mit Fehler

$$\frac{r_2(f, y_1, x_0)}{|x_1 - x_0|} \to 0, (x_1 \to x_0)$$

Definition 8.53

Die Matrix der zweiten partiellen Ableitungen heisst Hesse - Matrix von f und wird mit Hess(f) oder $\nabla^2 f$ bezeichnet

$$\begin{aligned} \text{Hess}(f) =& \nabla^2 f := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \cdot \partial x^j}\right)_{i,j=1\ldots n} \\ =& \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x' \partial x'} & \frac{\partial^2 f}{\partial x' \partial x^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x' \partial x^n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x'} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^n \partial x'} & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x^n \partial x^n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Seien $\nabla f, x_1 - x_0$ Zeilenvektoren und sei $(x - x_0)^t$ der zu $x_1 - x_0$ transponierte Spaltenvektor . Dann wird die Taylorentwicklung von Grad 2 äquivalent zu

$$\begin{aligned} f(x) =& f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0)^t \\ &+\frac{1}{2}(x - x_0) \cdot \nabla^2 f(x_0)(x - x_0)^t \\ &+r_3(f, x, x_0) \end{aligned}$$

Bemerkung

Die Hesse - Matrix von f ist nach Satz von Schwarz eine symmetrische Matrix.

Beispiel

$f(x, y) = e^{x+y}\cos x$ im Punkt $(0, 0)$. Die Taylorentwicklung vom Grad 2:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} =& e^{x+y}\cos x - e^{x+y}\sin x, \; \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x} =& e^{x+y}\cos x, \; \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1 \end{aligned}$$

shouldn't it be $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$ for second one??

$$(\nabla f)(0,0) = (1,1) \qquad f(0,0) = 1$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) &= e^{x+y}\cos x - e^{x+y}\sin x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) &= e^{x+y}\cos x - e^{x+y}\sin x - e^{x+y}\sin x - e^{x+y}\cos x \\
&= -2e^{x+y}\sin x \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) &= 0 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= e^{x+y}\cos x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 1
\end{aligned}$$

$$\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
((x,y)-(0,0))\,\nabla^2 f(0,0)\,((x,y)-(0,0))^T &= (x,y)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= (x,y)\begin{pmatrix} y \\ x+y \end{pmatrix} \\
&= 2xy + y^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(x,y) = e^{x+y}\cos x &= 1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}(x,y) + \frac{1}{2}(x,y)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= 1 + (x,y) + \frac{1}{2}\left(2xy + y^2\right) + r_3(f,(x,y))
\end{aligned}$$

Taylorpolynom von Grad 2: $1 + (x+y) + \frac{1}{2}\left(2xy + y^2\right)$

Die Hesse - Matrix bestimmt, ob die Funktion f in der Nähe von x konvex oder konkav ist (oder nicht). Sie spielt die gleiche Rolle wie die zweite Ableitung von Funktionen in einer Variable.

n't understand word tween brackets, page 7 middle

Als nächstes benötigen wir eine mehrdimensionale Entsprechung zur Positivität in den eindimensionalen Beziehungen $f''(z) > 0$ bzw. $f''(z) < 0$.

Definition 8.54

Eine symmetrische Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heisst

1. **Positiv definit** wenn

$$^t xAx = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x^i x^j > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

(oder wenn sämtliche Eigenwerte positive sind)

2. **Negativ definit** wenn
$$^t x A x < 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$
(wenn sämtliche Eigenwerte negativ sind)

3. Sonst **indefinit** (wenn sie sowohl positive als auch negative Eigenwerte besitzt)

Im symmetrischen 2×2 Fall ist die Gleichung auf Definitheit besonders leicht

Satz 8.55

Eine Symmetrische Matrix
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$$
ist genau dann

1. Positiv definit, wenn $\det A > 0$ und $a_{11} > 0$
2. Negativ definit, wenn $\det A > 0$ und $a_{11} < 0$
3. Indefinit, wenn $\det A < 0$

Extrema von Funktionen mehrerer Variablen

Jetzt werden wir nach Punkten $x \in \mathbb{R}^n$ schauen, in denen eine Funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein lokales Extremum annimmt. Wir erinnern uns an das Vorgehen im $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

1. Finde alle Punkte $x \in \mathbb{R}$, für die $f'(x) = 0$ gilt (Notwendige Bedingung)
2. Falls in einem solchen Punkt zusätzlich $f''(x) > 0$ (bzw. $f''(z) < 0$) gilt, so handelt es sich um ein lokales Minimum (bzw. Maximum) (hinreichende Bedingung)

Jetzt verallgemeinern wir diese Strategie. Zunächst:

Definition 8.55

Ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $df\,(x_0) = 0$ heisst kritischer Punkt von f (oder stationärer Punkt von f)

Satz 8.56

Sei
$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$f \in C^2\,(\Omega)\,;x_0 \in \Omega$$

1. Falls $x_0 \in \Omega$ ein lokale Extremum (Minimum oder Maximum) von f ist, so gilt $df\,(x_0) = 0$
2. Falls $df\,(x_0) = 0$, und falls $\text{Hess}\,(f)\,(x_0)$ positiv definit ist, so ist x_0 eine lokale Minimalstelle
3. Falls $df\,(x_0)$, und falls $\text{Hess}_f\,(x_0) < 0$ negativ definit ist, so ist x_0 eine lokale Maximalstelle
4. Falls $df\,(x_0) = 0$, und $\text{Hess}_f\,(x_0)$ indefinit ist, so ist x_0 ein Sattelpunkt (d.h. jede Umgebung U von x_0 enthält Punkte $p, q \in U$ mit $f\,(P) > f\,(x_0) > f\,(q)$)

Beispiel

1.

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 \\ \nabla f &= (2(x-1), 2(y+2), 2(z+1)) \\ \nabla f(x_0) &= (0,0,0) \Rightarrow x_0 = (1,-2,-1) \end{aligned}$$

$$H_f(x_0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$H_f(x_0)$ ist positiv definit $\Rightarrow x_0\,(1,-2,-1)$ ist ein lokales Minimum.

2.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \cos(x+2y) + \cos(2x+3y) \\ \nabla f &= (-\sin(x+2y) - 2\sin(2x+3y)\ , \\ &\quad -2\sin(x+2y) - 3\sin(2x+3y)) = (0,0) \\ &\Rightarrow -\sin(x+2y) - 2\sin(2x+3y) = 0 \\ &\quad -2\sin(x+2y) - 3\sin(2x+3y) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sin(2x+3y) = 0,\ \ \sin(x+2y) = 0$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} 2x+3y &= k\pi \\ x+2y &= l\pi \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = k\pi \text{ und } x = l\pi$$

Kritische Punkte: $(\pi l, \pi k) \qquad k,l \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial f}{\partial x \partial y} &= -2\cos(x+2y) - 6\cos(2x+3y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -\cos(x+2y) - 4\cos(2x+3y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -4\cos(x+2y) - 9\cos(2x+3y) \end{aligned}$$

$$(0,0) : \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -5 < 0$$

$$\left|\nabla^2 f(0,0)\right| = \begin{vmatrix} -5 & -8 \\ -8 & -13 \end{vmatrix} = 13 \cdot 5 - 64 = 1 < 0$$

$\Rightarrow \nabla^2 f(0,0)$ ist negativ definit und $(0,0)$ ist eine lokale Maximalstelle.

Auch alle Punkte $(-2\pi k, 2\pi l)$ sind lokale Maxima. Analog, bis auf Addition von Vielfachen von 2π, hat f eine lokale Minimalestelle in (π,π) und Sattelpunkte in $(0,\pi)$ und $(\pi,0)$

8.6 Vektorwertige Funktionen

Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $f = \left(f^i\right)_{1<i<l} \Omega \to \mathbb{R}^l$

Definition 8.57

1. Die Funktion

   can,t understand the function, page 203 top

   heisst an der Stelle $x_0 \in \Omega$ differenzierbar, falls jede Komponente f^i, $1 < i < l$ an der stelle x_0 differenzierbar ist.

   Das Differential $df(x_0)$ hat die Gestalt

$$df(x_0) = \begin{pmatrix} df'(x_0) \\ df^n(x_0) \end{pmatrix}$$

2. f heisst auf Ω differenzierbar (bzw. von der Klasse C^m, $m \geq 1$) falls jedes f^i differenzierbar ist (bzw. $f^i \in C^m(\Omega)$) $1 \leq i \leq l$

Bemerkung 8.58

1. Bezüglich der Standardbasis dx^j, $1 \leq j \leq n$ erhalten wir

$$df^i(x_0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x_0)\, dx^j = \left(\frac{\partial f^i}{\partial x'}(x_0), \ldots, \frac{\partial f^i}{\partial x^n}(x_0)\right)$$

   die Darstellung

$$df(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f'}{\partial x'}(x_0) & \frac{\partial f'}{\partial x^2}(x_0) & \ldots & \frac{\partial f'}{\partial x^n}(x_0) \\ \frac{\partial f^2}{\partial x'}(x_0) & \frac{\partial f^2}{\partial x^2}(x_0) & \ldots & \frac{\partial f^2}{\partial x^n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^l}{\partial x'}(x_0) & \frac{\partial f^l}{\partial x'}(x_0) & \ldots & \frac{\partial f^l}{\partial x^n}(x_0) \end{pmatrix}$$

   Die $l \times n$ matrix $df(x_0) = \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x_0)\right)_{1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq n}$ heisst Jacobi- oder Funktionalmatrix von f an der Stelle x_0.

2. Auch im vektorwertigen Fall ist die Funktion f genau dann differenzierbar in x_0, wenn eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ existiert mit

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0$$

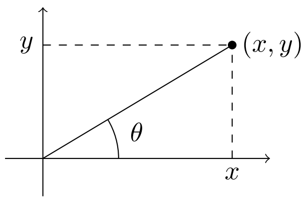
Beispiel 8.59

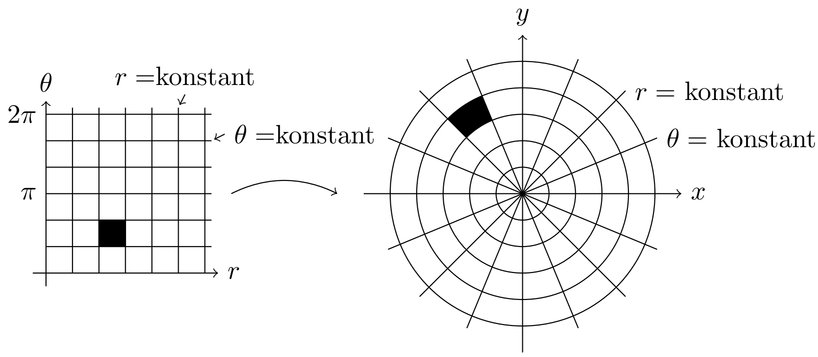
1.

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$
$$f \in C^\infty\left(\mathbb{R}^2 : \mathbb{R}^2\right) \text{ mit } df(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

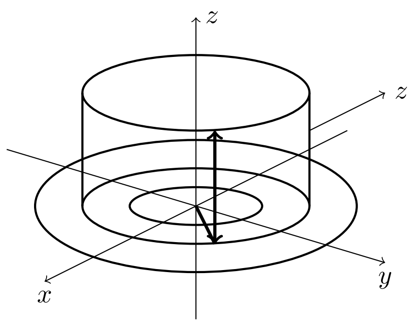
2. Polarkoordinaten

$$
\begin{aligned}
f : [0,\infty) \times [0, 2\pi] &\to \mathbb{R}^2 \\
\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f' \\ f^2 \end{pmatrix} \\
df'(r,\theta) &= (\cos\theta, -r\sin\theta) \\
df^2(r,\theta) &= (\sin\theta, r\cos\theta) \\
df(r,\theta) &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \leftarrow \text{Jacobi Matrix} \\
\det(df(r,\theta)) &= r\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = r
\end{aligned}
$$





3. Zylinderkoordinaten

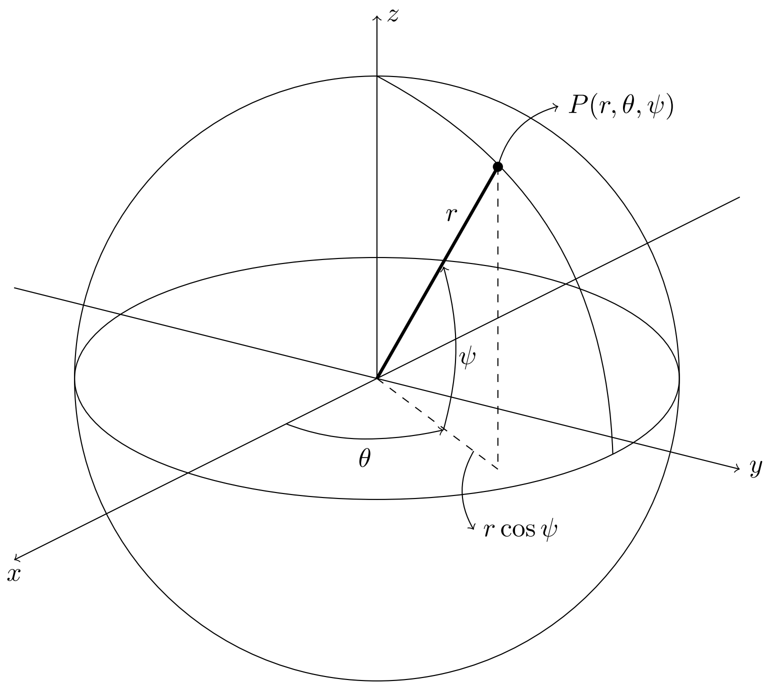


Die x, y Anteile werde in Polarkoordinaten transformiert und die z koordinate beibehalten

$$\begin{aligned}
f :&[0,\infty] \to [0,2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\
\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ z \end{pmatrix} &\to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f' \\ f^2 \\ f^3 \end{pmatrix} \\
df(r,\theta,z) &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \leftarrow \text{Jacobi Matrix} \\
\det\left(df(r,\theta,z)\right) =& r\left(\cos^2\theta + sin^2\theta\right) = r
\end{aligned}$$

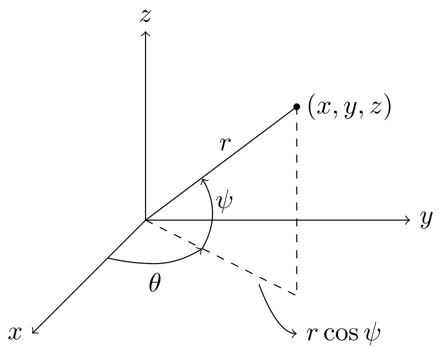
(Rotationssymmetrie bezüglich z Achse)

4. Kugelkoordinaten



$$\begin{aligned}
f :&[0,\infty) \times [0,2\pi] \times \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}^3 \\
f\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\psi \\ r\sin\theta\cos\psi \\ r\sin\psi \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\psi \\ \sin\theta\cos\psi \\ \sin\psi \end{pmatrix} \\
df\,(r,\theta,\psi) &= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\psi & -r\sin\theta\cos\psi & -r\cos\theta\sin\psi \\ \sin\theta\cos\psi & r\cos\theta\cos\psi & -r\sin\theta \sin? \\ \sin\psi & 0 & r\cos\psi \end{pmatrix} \\
\det\,(df) =& r^2 cos\psi
\end{aligned}$$

Check question mark, chopped content, page 205.3



ψ : Breitengrad

θ : Längengrad

(Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung)

Es gelten die üblichen Differentiationsregeln

Satz 8.60

Seien $f, g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ an der Stelle $x_0 \in \Omega$ differenzierbar und $\alpha \in \mathbb{R}$. dann sind die Funktionen αf und $f + g$ sowie das Skalarprodukt von f und g an der Stelle x_0 differenzierbar und

1. $d(\alpha f)(x_0) = \alpha df(x_0)$
2. $d(f + g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0)$
3. $d(f \cdot g)(x_0) = f(x_0) \cdot dg(x_0) + g(x_0) \cdot df(x_0)$
   wobei $f(x_0) \cdot dg(x_0) = \sum\limits_{i=1}^{l} f^i(x_0)\, dg^i(x_0)$

Satz 8.61

Seien $g : \Omega \to \mathbb{R}^l$ an der Stelle $x_0 \in \Omega$ und $f : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$ an der Stelle $g(x_0)$ differenzierbar.

Dann ist die Funktion $f \circ g : \Omega \to \mathbb{R}^m$ an der Stelle x_0 differenzierbar, und

$$d(f \circ g)(x_0) = df(g(x_0)) \cdot dg(x_0)$$

Beispiel

Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \to \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} \qquad df = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \to \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 \\ xyz \end{pmatrix} \qquad dg = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}(f\circ g):\mathbb{R}^3&\to\mathbb{R}^2\\ (x,y,z)&\to\begin{pmatrix}\left(x^2+y^2+z^2\right)^2-(xyz)^2\\ 2\left(x^2+y^2+z^2\right)(xyz)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d\,(f\circ g)\,(x,y,z)&=df\,(g\,(x,y,z))\cdot dg\,(x,y,z)\\ &=\begin{pmatrix}2\left(x^2+y^2+z^2\right) & -2xyz\\ 2xyz & 2\left(x^2+y^2+z^2\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2x & 2y & 2z\\ yz & xz & xy\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}4x\left(x^2+y^2+z^2\right)-2xy^2z^2 & * & *\\ * & * & *\\ * & * & *\end{pmatrix}\end{aligned}$$