

Kapitel 3

Folgen und Reihen (Der Limes Begriff)

3.1 Folgen, allgemeines

Definition 3.1

Eine Folge reeller Zahlen ist eine Abbildung $a : \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ wobei wir das Bild von $n \geq 1$ mit a_n (statt $a(n)$) bezeichnen.

Eine Folge wird dann meistens mit $(a_n)_{n \geq 1}$, daher mit der geordneten Bildmenge bezeichnet.

Folgen können auf verschiedene Arten gegeben sein.

Beispiel 3.2

1. $a_n = \frac{1}{n}, n \geq 1$
2. $a_1 = 0.9, a_2 = 0.99, \dots, a_n = \underbrace{0.99 \dots 9}_{n\text{-mal}}$
3. $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, n \geq 1$
4. (Rekursiv) Sei $d > 0$ eine reelle Zahl $a_1, \dots, a_{n+1} := \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{d}{a_n}\right), n \geq 1$
z.B. $d = 2, a_1 = 1, a_2 = \frac{3}{2}, a_3 = \frac{17}{12}, a_4 = \dots$
5. Fibonacci Zahlen. $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \forall n \geq 2$

Definition 3.3

Eine Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ heißt beschränkt falls die Teilmenge $\{a_n : n \geq 1\} \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt ist. d.h. Es gibt $c \in \mathbb{R} (c \geq 0)$ so dass $|a_n| \leq c, \forall n \geq 1$

3.2 Grenzwert oder Limes eine Folge. Ein zentraler Begriff

Definition 3.4

Eine Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ konvergiert gegen a wann für jedes $\varepsilon > 0$ ein Index $N(\varepsilon) \geq 1$ gilt so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon, \forall n > N(\varepsilon)$$

Definition 3.4 (Version 2)

Eine Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$ falls für jedes $\varepsilon > 0$ die Menge der Indizes $n \geq 1$ für welcher $a_n \notin (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ endlich ist.

$$(\forall \varepsilon > 0, \#\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \notin (a - \varepsilon, a + \varepsilon)\} < \infty)$$

Äquivalenz beider Definitionen

Is this supposed to be a title?

(2) \Rightarrow (1)

Sei für $\varepsilon > 0$

$$M(\varepsilon) := \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \notin (a - \varepsilon, a + \varepsilon)\} = \{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - a| \geq \varepsilon\}$$

Da $M(\varepsilon)$ endlich ist, ist es nach oben beschränkt. Es gibt also $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ so dass $\forall n \in M(\varepsilon), n \leq N(\varepsilon) - 1$. Insbesondere gilt $\forall n \geq N(\varepsilon), n \notin M(\varepsilon)$ und daher $|a_n - a| < \varepsilon$.

(1) \Rightarrow (2)

$$M(\varepsilon) = \{n : |a_n - a| \geq \varepsilon\} \subset [0, N(\varepsilon) - 1]$$

Also endlich.

Falls die Eigenschaften in Definition 3.4 zutrifft, dann schreibt man

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ oder } a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$$

Die Zahl a nennt sich Grenzwert oder Limes der Folge $(a_n)_{n \geq 1}$. Eine Folge heisst konvergent falls sie einen Limes besitzt, andernfalls heisst sie divergent.

Bemerkung 3.5

1. Falls $(a_n)_{n \geq 1}$ konvergent ist der Limes eindeutig bestimmt

Beweis

Seien a und b Grenzwerte von $(a_n)_{n \geq 1}$. Sei $\varepsilon = \left| \frac{b-a}{3} \right| > 0$, dann gibt es N_1, N_2 so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N_1$$

KAPITEL 3. FOLGEN UND REIHEN (DER LIMES BEGRIFF)

$$|a_n - b| < \varepsilon \quad \forall n > N_2$$

Also $\forall n \geq \max\{N_1, N_2\}$

$$(a - b) \cong |(a - a_n) + (a_n - b)| < 2\varepsilon = \frac{2}{3} |b - a|$$

Binomischen Lehrsatz

Für beliebige Zahlen a, b und $n \in \mathbb{N}$ ist

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

2. Falls $(a_n)_{n \geq 1}$ konvergent ist, $\{a_n : n \geq 1\}$ beschränkt: Sei $\varepsilon = 1$, $\lim a_n = a$ und N_0 mit

$$|a_n - a| \leq 1 \quad \forall n > N_0$$

Dann ist $\forall n \quad |a_n| \geq \max\{|a| + 1, |a_j|, 1 \leq j \leq N_0\}$

Beispiel 3.6

1. Sei $a_n = \frac{1}{n}, n \geq 1$. Dann gilt $\lim a_n = 0$
 - Sei $\varepsilon > 0$. Dann $\frac{1}{\varepsilon} > 0$. Sei $n_0 \in \mathbb{N}, n_0 \geq 1$ mit $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ (Archimedische Eigenschaft, Satz 2.13)
Dann gilt für alle