Kapitel 2

Reelle Zahlen, Euklidische Räume und Komplexe Zahlen

2.1 Elementare Zahlen

Natürliche Zahlen	$\mathbb{N}$	$=$	$\{0, 1, 2, \dots\}$	addieren und multiplizieren
	$\cap$			
Ganze Zahlen	$\mathbb{Z}$	$=$	$\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$	subtrahieren
	$\cap$			
Rationale Zahlen	$\mathbb{Q}$	$=$	$\left\{ \frac{p}{q} \middle\vert\, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$	dividieren

Viele Gleichungen haben keine Lösung in $\mathbb{Q}$.

Satz 2.1

Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Dann hat $x^2 = p$ keine Lösung in $\mathbb{Q}$.

Beweis

Zur Erinnerung: Zwei Natürlichen Zahlen a und b sind teilerfremd (oder relativ prim) wenn es keine natürliche Zahl ausser der Eins gibt, die beide Zahlen teilt.

$$ggT(a, b) = 1 \quad \text{(grösster gemeinsamer Teiler = 1)}$$

Indirekter Beweis

Wir nehmen an, dass es $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ gibt mit $x^2 = p$, wobei a, b teilerfremd und ≥ 1 sind. Dann gilt

$$a^2 = pb^2$$

woraus folgt, dass p a teilt, also ist $a = pk$, $k \in \mathbb{N}$ und somit

$$a^2 = p^2k^2 = pb^2 \Rightarrow pk^2 = b^2$$

woraus folgt, dass p b teilt.

2.2 Die Reellen Zahlen

Wir werden jetzt das System von Axiomen beschreiben, das die Menge der reellen Zahlen "eindeutig" charakterisiert.

Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist mit zwei Verknüpfungen "+" (Addition) und "·" (Multiplikation) versehen, sowie mit einer Ordnungsrelation $\leq$. Die Axiome werden wie folgt gruppiert:

1. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ **ist ein Körper**
   Es gibt zwei Operationen (zweistellige Verknüpfungen)

   - $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
     $(a, b) \mapsto a + b$
   - $\times : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
     $(a, b) \mapsto a \cdot b$

   und zwei ausgezeichnete Elemente 0 und 1 in $\mathbb{R}$, die folgende Eigenschaften haben:

Kommutativität	A1)	$x + y = y + x$
Assoziativität	A2)	$(x + y) + z = x + (y + z)$
Neutrales Element	A3)	$x + 0 = x = 0 + x$
Inverses Element	A4)	$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$ mit $x + y = 0 = y + x$
Komutativität	M1)	$x \cdot y = y \cdot x$
Assoziativität	M2)	$(xy)z = x(yz)$
Neutrales Element	M3)	$x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$
Inverse Element	M4)	$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0\ \exists y \in \mathbb{R}$ mit $xy = 1 = yx$

   und die Multiplikation ist verträglich mit der Addition im Sinne des Distributivitätsgesetzes (D)

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x(y + z) = xy + xz$$

   - $(\mathbb{R}, +)$ mit A1→A4 ist eine Abelsche Gruppe bezüglich der Addition.
   - $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ mit A1→A4, M1→M4 und D ist ein Zahlkörper.

Bemerkung 2.2

Eine Menge G, versetzt mit Verknüpfung + und dem neutralen Element 0, die den obigen Eigenschaften A2→A4 genügt, heisst Gruppe.

Eine Menge K versetzt mit Verknüpfung $+, \cdot$ und Elementen $0 \neq 1$, die den obigen Eigenschaften A1→A4, M1→M4, D genügt, heisst Körper.

Folgerung 2.3

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

i) $a + b = a + c \Rightarrow b = c$ und 0 ist eindeutig, d.h. falls $z \in \mathbb{R}$ der Eigenschaft $a + z = a \ \forall a \in \mathbb{R}$ genügt, so folgt $z = 0$.

ii) $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\exists!$ (eindeutig bestimmtes) $x \in \mathbb{R} : a + x = b$. Wir schreiben $x = b - a$ und $0 - a = -a$ ist das additive Inverse zu a.

iii) $b - a = b + (-a)$

iv) $-(-a) = a$

A

v) Aus $ab = ac$ und $a \neq 0$ folgt $b = c$. Das bzgl. der Multiplikation neutrale Element 1 ist eindeutig, d.h. falls $x \in \mathbb{R}$ der Eigenschaft $ax = a \ \forall a \in \mathbb{R}$ genügt, so folgt $x = 1$

vi) $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $\exists! x \in \mathbb{R} : ax = b$. Wir schreiben $x = \frac{b}{a}$ und $\frac{1}{a} = a^{-1}$ ist das multiplikative Inverse zu a.

vii) Falls $a \neq 0 \Rightarrow \left(a^{-1}\right)^{-1} = a$

M

viii) $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \cdot 0 = 0$

ix) Falls $ab = 0$, dann folgt $a = 0$ oder $b = 0$

Beweis 2.3

(a) Sei $a + b = a + c$
$\text{A4} \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R} : a + y = 0$
$a + b = a + c \Rightarrow y + (a + b) = y + (a + c)$
$\overset{A2}{\Rightarrow} (y + a) + b = (y + a) + c$
$\Rightarrow 0 + b = 0 + c \overset{A3}{\Rightarrow} b = c$
Nehmen wir an, dass es $0' \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $x + 0' = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, d.h. es gibt ein zweites neutrales Element für $+$.

Dann $0 + 0' = 0$ aber auch $\text{A3} \Rightarrow 0 + 0 = 0 \Rightarrow 0 + 0' = 0 + 0 \Rightarrow 0 = 0'$

(b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, und sei $y \in \mathbb{R}$ mit $a + y = 0$. Definieren wir $x := y + b \Rightarrow a + x = a + (y + b) = (a + y) + b = 0 + b = b$
$\Rightarrow$ es gibt mindestens eine Lösung der Gleichung $a + x = b$. Von i) folgt, dass x eindeutig bestimmt ist $a + x = b = a + x' \Rightarrow x = x'$

(c) Seien $x = b - a$, $y = b + (-a)$. Wir wollen beweisen, dass $x = y$.

Aus i) wissen wir, dass $b - a$ eine Lösung von $a + x = b$

$$y + a = (b + (-a)) + a = b + ((-a) + a) = b + 0 = b$$

$\Rightarrow y$ ist auch eine Lösung.
Weil die Lösung von $a + x = b$ eindeutig bestimmt ist, folgt $y = x$.

(d)

(e)

(f)

(g)

ASK FOR BE
PAGE 27 TO

(h) $\forall a \in \mathbb{R},\ a \cdot 0 = 0$
$a \cdot 0 = a(0+0) = a \cdot 0 + a \cdot 0 \Rightarrow a \cdot 0 = 0$

(i) $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ oder $b = 0$
Wir nehmen an: $a \neq 0$ mit multiplikativem Inversem a^{-1}, (a^{-1} existiert mittels M4).
So folgt $b = 1 \cdot b = \left(a^{-1} \cdot a\right) b = a^{-1}(a \cdot b) = a^{-1} \cdot 0 = 0$

2. **Ordnungsaxiome $\leq$**
Auf $\mathbb{R}$ gibt es eine Relation $\leq$, genante Ordnung, die folgenden Eigenschaften genügt

(a) Reflexivität: $\forall x \in \mathbb{R}$: $x \leq x$

(b) Transitivität: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$: $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$

(c) Identität: $\forall x, y \in \mathbb{R}$: $(x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow x = y$

(d) Die Ordnung ist total: $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y$ gilt entweder $x \leq y$ oder $y \leq x$

Die Ordnung ist konsistent mit $+$, und $\cdot$

(a) $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z \qquad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$

(b) $x, y \geq 0 \Rightarrow xy \geq 0$

Mit $\leq$ hat man auch$\geq, <, >$. Wir verzichten auf eine Auflistung aller Folgerungen und beschränken uns auf einige wichtigen Folgerungen.

Folgerungen 2.4

i) $x \leq 0$ und $y \leq 0 \Rightarrow xy \geq 0$

ii) $x \leq 0$ und $y \geq 0 \Rightarrow xy \leq 0$

iii) $x \leq y$ und $z \geq 0 \Rightarrow xz \leq yz$

iv) $1 > 0$

v) $\forall x \in \mathbb{R} \qquad x^2 \geq 0$

vi) $0 < 1 < 2 < 3 < \ldots$

vii) $\forall x > 0 : x^{-1} > 0$

$\{$Annahme: $x^{-1} \leq 0$. Nach Multiplikation mit $x > 0$ folgt (mittels ii) $1 = x^{-1} \cdot x \leq 0 \cdot x = 0\}$

Bemerkung 2.5

$\leq$ auf $\mathbb{Q}$ genügt den obigen Eigenschaften. Die entscheidende weitere Eigenschaft von $\mathbb{R}$ ist die *Ordnungsvollständigkeit*.

3. **Ordnungsvollständigkeit - Vollständigkeitsaxiome**

   Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ nicht leere Teilmengen von $\mathbb{R}$, so dass $a \leq b$ für alle $a \in A, b \in B$. Dann gibt es $c \in \mathbb{R}$ mit $a \leq c \leq b \quad \forall a \in A, b \in B$

Bemerkung 2.6

Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ erfüllen diese Eigenschaften nicht!

Seien

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0, x^2 \leq 2\}$$

$$B = \{y \in \mathbb{Q} \mid y \geq 0, y^2 \geq 2\}$$

Dann gilt $a \leq b \; \forall a \in A \; b \in B$. Aber ein $c \in \mathbb{Q}$, mit $a \leq c \leq b$ würde dann $c^2 = 2$ erfüllen! In Satz 2.1 haben wir gesehen dass $x^2 = p$ keine Lösung in $\mathbb{Q}$ hat.

Wir definieren jetzt für $x, y \in \mathbb{R}$

$$\max\{x, y\} = \begin{cases} x \text{ falls } y \leq x \\ y \text{ falls } x \leq y \end{cases}$$

Insbesondere ist der Absolutbetrag einer Zahl $x \in \mathbb{R}, |x|$

$$|x| : \max\{x, -x\}$$

Für diesen gilt folgender wichtiger Satz

Satz 2.7

i) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Dreiecksungleichung)

ii) $|xy| = |x||y|$

Beweis 2.7

i) $x \leq |x|, -x \leq |x|$
   $y \leq |y|, -y \leq |y|$
   und $x + y \leq |x| + |y|, -(x + y) \leq |x| + |y|$
   woraus $|x + y| \leq |x| + |y|$ folgt

ii) ASK FOR BEWEIS

ASK FOR BEWEIS

Satz (Youngsche Ungleichung)

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ gilt $2|ab| \leq \delta a^2 + \frac{b^2}{\delta}$

2.3 Infimum und Supremum

Im Zusammenhang mit der Ordnung führen wir einige wichtige Definitionen ein:

Definition 2.8

Sei $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge

a) $\mathbb{X}$ ist nach oben beschränkt, falls es $c \in \mathbb{R}$ gibt, mit $x \leq c, \forall x \in X$. Jedes derartige c heisst eine obere Schranke für $\mathbb{X}$.

b) $\mathbb{X}$ ist nach unten beschränkt, falls es $c \in \mathbb{R}$ gibt, mit $x \geq c$, $\forall x \in X$. Jedes derartige c heisst untere Schranke für $\mathbb{X}$.

c) X ist beschränkt, falls sie nach oben und unten beschränkt ist.

d) Ein Element $a \in \mathbb{X}$ ist ein maximales Element (oder Maximum) von $\mathbb{X}$ falls $x \leq a$, $\forall x \in \mathbb{X}$. Falls ein Maximum (bzw. Minimum) existiert, wird es mit $\max \mathbb{X}$ $(\min \mathbb{X})$ bezeichnet. Falls $\mathbb{X}$ keine obere Schranke hat, ist $\mathbb{X}$ nach oben unbeschränkt (analog für untere Schranke).

Beispiel 2.9

1. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ ist nach oben unbeschränkt. A ist nach unten beschränkt. Jedes $a \in \mathbb{R}, a \leq 0$ ist eine untere Schranke.
2. $B = [0, 1]$ ist nach oben und nach unten beschränkt.
   - 0 ist ein Minimum von B
   - 1 ist ein Maximum von B
3. $C = [0, 1)$ ist nach oben und nach unten beschränkt, $0 = \min(A)$. C hat kein Maximum.

Folgender Satz ist von zentraler Bedeutung und eine Folgerung des Ordnungsvollständigkeitsaxioms.

Satz 2.10

i) Jede nicht leere, nach oben beschränkte Teilmenge $A \subset B$ besitzt eine kleinste obere Schranke c. Die kleinste obere Schranke c ist eindeutig bestimmt, heisst Supremum von A und wird mit $\sup A$ bezeichnet.

ii) Jede nicht leere, nach unten beschränkt Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ besitzt eine grösste untere Schranke d, heisst Infimum von A und wird mit $\inf A$ bezeichnet.

Beweis

i) Sei $\emptyset \neq A \subset B$ nach oben beschränkt. Sei $B := \{b \in \mathbb{R} \mid b \text{ ist eine obere Schranke für } A\}$. Es folgt $B \neq \emptyset$ und $a \leq b$, $\forall a \in A$ $b \in B$

Mit dem Ordnungsvollständigkeitsaxiom folgt die Existenz einer Zahl $c \in \mathbb{R}$ mit $a \leq c \leq b$ $\forall a \in A$, $b \in B$.

Es ist klar, dass c eine obere Schranke für A ist. Also $c \in B$. Da $c \leq b \ \forall b \in B$, ist c die kleinste obere Schranke für A. Hiermit ist c eindeutig bestimmt.

(Seien c und c' zwei Suprema von A, c ist die kleinste obere Schranke und c' ist eine obere Schranke $\Rightarrow c \leq c'$. Das gleiche Argument mit c,c' vertauscht liefert $c' \leq c$)

ii) Sei A eine nach unten beschränkte, nicht leere Menge. Sei $-A := \{-x \mid x \in A\}$ die Menge der additiven Inversen von A. Dann $-A \neq \emptyset$ und nach oben beschränkt. i) $\Rightarrow \exists s = \sup(-A) \Rightarrow$ $-s$ ist das Infimum von A

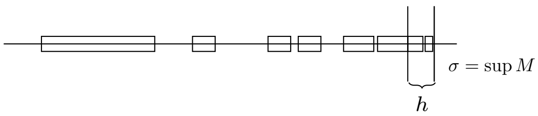
Korollar 2.11

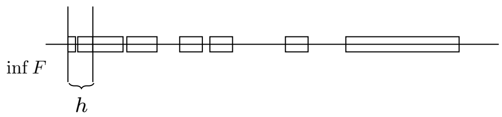
1. Falls $E \subset F$ und F nach oben beschränkt ist, gilt $\sup E \leq \sup F$
2. Falls $E \subset F$ und F nach unten beschränkt ist, gilt $\inf F \leq \inf E$
3. Falls $\forall x \in E$, $\forall y \in F$ gilt $x \leq y$, dann folgt $\sup E \leq \inf F$
4. Seien $E, F \neq \emptyset, \quad E, F \subset \mathbb{R}, \quad h \in \mathbb{R}, \quad h > 0$

   (i) Falls E ein Supremum besitzt $\Rightarrow \exists x \in E$ mit $x > \sup E - h$

   (ii) Falls E ein Infimum besitzt $\Rightarrow \exists y \in$: $y < \inf E + h$.

   Das Supremum, $\sup \mathbb{X} = \sigma$ der Menge $\mathbb{X}$ ist folgendermassen charakterisiert: Es gibt in $\mathbb{X}$ keine Zahlen $> \sigma$; aber für jede Toleranz $h > 0$ gibt es in $\mathbb{X}$ Zahlen $> \sigma - h$





   Es gibt in $\mathbb{X}$ keine Zahlen $< \inf \mathbb{X}$; aber für jede Toleranz $h > 0$ gibt es in $\mathbb{X}$ Zahlen $< \inf \mathbb{X} + h$

   (iii) Sei $E + F = \{e + f : e \in E, f \in F\}$. Falls E und F ein Supremum besitzen $\Rightarrow E + F$ besitzt ein Supremum und $\sup(E + F) = \sup(E) + \sup(F)$. (Analog mit Infimum)

Beweis

Ask for full Beweis!!

Beispiel

1. $E = (-\infty, 2) \subset F(-\infty, 4]$
   $\sup E = 2, \sup F = 4 = \max F$
   E hat kein Maximum
   $\sup E \leq \sup F$

2. $G : [4, 5) \subset H = (3, 6)$
   $\min G = \inf G = 4 \geq \inf H = 3$

3. $K = (3, \infty)$, $E = (-\infty, 2)$
   $\forall x \in E$, $y \in K$ gilt $x \leq y$
   $2 = \sup E \leq 3 = \inf K$

4. $A\{\sin x \mid x \in \mathbb{R}\}$
   $\inf A = -1 = \min A$
   $\sup A = 1 = \max A$

5. $A = \{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Wir werden sehen, dass A nach unten und nach oben beschränkt ist.
   $\inf A = \min A = 2$
   $\sup A = 2.718 \cdots =: e$ (die Eulersche Zahl per Vereinbarung)

Für nach oben unbeschränkte Mengen $A \neq \emptyset$ setzen wir $\sup A = \infty$. Analog für nach unten unbeschränkte Menge $\emptyset \neq A$ setzen wir $\inf A = -\infty$.
Der folgende Satz zeigt, wie die Ordnungsvollständigkeit von $\mathbb{R}$ die Lösbarkeit gewisser Gleichungen in $\mathbb{R}$ garantiert.

Satz 2.12

Für jedes $x > 0$ gibt es genau ein $y > 0$ mit $y^2 = x$. Diese Lösung wird mit $\sqrt{x}$ bezeichnet.

(Im Allgemeinen: Für jedes $x > 0$ und $n \geq 1$, $n \in \mathbb{R}$ gibt es genau ein $y > 0$ mit $y^n = 0$. Diese Lösung wird mit $\sqrt[n]{x}$ bezeichnet)

Beweis

Sei $x > 1$, und $A := \{z \in \mathbb{R} \mid z > 0 \text{ mit } z^2 \leq x\}$. Dann ist A nach oben beschränkt und $A \neq \emptyset$ (da mindestens $1 \in A$).
$\Rightarrow A$ besitzt ein Supremum.
Sei $y := \sup A$. Wir zeigen, dass $y^2 = x$

- Schritt 1: Annahme $y^2 < x$.
  Sei $0 \leq h \leq 1$. Wir nehmen an:

$$\begin{aligned}(y+h)^2 &= y^2 + 2hy + h^2 \\ &= y^2 + h(2y+h) \\ &\leq y^2 + h(2y+1) \\ &= y^2 + h\left((y+1)^2 - y^2\right)\end{aligned}$$

  Weil $y^2 < x$ ist, $\frac{x-y^2}{(y+1)^2-y^2} > 0$ und daher gibt es $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$, $h \leq \frac{x-y^2}{(y+1)^2-y^2}$ (sei $h = \min\{1, \frac{x-y^2}{2x+1}\}$)

  Für solche h gilt

$$(y+h)^2 \leq y^2 + \left(\frac{x-y^2}{(y+1)^2-y^2}\right)\left((y+1)^2 - y^2\right) = x$$

Also $y + h \in A$ und $y + h > y$. Ein Widerspruch: y ist eine obere Schranke für A, d.h., $z < y \; \forall z$
$\Rightarrow y^2 \geq x$ Analog beweist man $y^2 \leq x$

- Schritt 2: Annahme $y^2 > x$
  Sei $h = \frac{y^2 - x}{2y} \neq 0$

$$(y-h)^2 = y^2 - 2hy + h^2 > y^2 - 2hy = y^2 - (y^2 - x) = x$$

  $\Rightarrow y - h$ ist eine obere Schranke für A

$$\big(\forall z \in A, z^2 \leq x. \text{ Da } (y-h)^2 > x \text{ ist, } (y-h)^2 > x \geq z^2. \text{ Damit } y - h > z, \forall z \in A\big)$$

  Aber $y - h < y$, Widerspruch zur Minimalität von y.

Falls $0 < x < 1$, dann $\frac{1}{x} > 1$
$\Rightarrow \exists u \in \mathbb{R}$, mit $u^2 = \frac{1}{x}$
Somit $\frac{1}{u^2} = \left(\frac{1}{u}\right)^2 = x$ und $y = \frac{1}{u}$ ist eine Lösung von $y^2 = x$.

Zum Abschluss dieses Themas erwähnen wir noch eine wichtige Eigenschaft der reellen Zahlen

Satz 2.13 (Archimedische Eigenschaft)

Zu jeder Zahl $0 < b \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b < n$.

Beweis (Indirekt)

Andernfalls gibt es $b \in \mathbb{R}$ mit $n \leq b$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$(\neg \exists n \in \mathbb{N} : b < n) \;=\; (\forall n \in \mathbb{N} : b \geq n)$$

Dann ist b eine obere Schranke für $\mathbb{N}$ und es existiert $c = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$. Mit $n \in \mathbb{N}$ ist jedoch auch $n + 1 \in \mathbb{N}$.
Also: $n + 1 \leq c$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Somit folgt $n \leq c - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ein Widerspruch zur Minimalität von c.

Korollar 2.14

1. Seien $x > 0$ und $y \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann gibt es $n \in \mathbb{Z}$ mit $y < nx$
2. Falls $x, y, a \in \mathbb{R}$ die Ungleichheiten $a \leq x \leq a + \frac{y}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ erfüllen, ist $x = a$.

Beweis

1. ASK FOR BEWEIS

   Ask for beweis
2. $a < x \Rightarrow x - a > 0$
   $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n(x - a) > y$
   $\Rightarrow x > a + \frac{y}{n}$ Widerspruch

Wir wissen, dass gewisse Gleichungen in $\mathbb{R}$ lösbar sind: z.B. $y^2 = a$, $\forall a > 0$. Aber man kann nicht alle Gleichugen in $\mathbb{R}$ lösen, z.B. $x^2 + 1 = 0$. Da für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, dass $x^2 > 0$, ist $x^2 = -1$ nicht lösbar. Um eine Lösung für diese Gleichung zu finden, müssen wir die komplexen Zahlen betrachten.

Zuerst werden wir die Euklidischen Räume $\mathbb{R}^n$ einführen

2.4 Euklidische Räume

Mit der Mengentheorie können wir das kartesische Produkt zweier Mengen bilden; es lässt sich ohne Schwierigkeiten zu endlichen Familien $A_1, \ldots, A_n$ verallgemeinern, nämlich

$$A_1 \times \cdots \times A_n := \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in A_i\}$$

ist die Menge der geordneten $n-$Tupel von Elementen aus $A_1, \ldots, A_n$.

Für beliebige $n \geq 1$ betrachten wir $\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n-\text{mal}}$ und untersuchen dessen Struktur. Auf $\mathbb{R}^n$ haben wir zwei Verknüpfungen

1. $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Addition.
   $\left(\underbrace{(x_1, \ldots, x_n)}_{x}, \underbrace{(y_1, \ldots, y_n)}_{y}\right) \to \underbrace{(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)}_{\text{Komponentenweise Addition}}$. Dann ist $(\mathbb{R}^n, +)$ eine Abelsche Gruppe, mit $0 := (0, \ldots, 0)$ aln neutrales Element
2. $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Skalarmultiplikation.
   $(\lambda, x) \to \lambda \cdot x := (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$. Dann gelten die folgende Eigenschaften: $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
   (a) Distributivität: $(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x$
   (b) Distributivität: $\alpha (x + y) = \alpha x + \alpha y$
   (c) Assoziativität: $(\alpha\beta) x = \alpha (\beta x)$
   (d) Neutralelement: $1 \cdot x = x$

Definition 2.15
Eine Menge $\mathbb{V}$ mit $+, \cdot$ und $0 \in \mathbb{V}$, so dass $(\mathbb{V}, +)$ eine Abelsche Gruppe mit neutralem Element 0 ist und zudem (a)-(d) gelten, nennt sich einen Vektorraum über dem Körper $\mathbb{R}$ und seine Elemente heissen Vektoren.

Also ist $\mathbb{R}^n$ ein Vektorraum. In der linearen Algebra führt man dann Begriffe wie Basis usw. ein. Die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ ist die Menge $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ wobei $e_i := \{0, \ldots, 0, 1, \ldots, 0\}$.

Jeder Vektor $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$ besitzt eine eindeutige Darstellung $x = \sum x_i e_i$ bezüglich der Standardbasis.

Definition 2.16
1. Das Skalarprodukt zweier Vektoren $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$ ist die durch
$$< x, y >:= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$
definierte reelle Zahl
$< \cdot, \cdot >= \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

2. Falls $< x, y >= 0$ heissen x und y senkrecht (orthogonal) aufeinander. $< \cdot, \cdot >$ besitzt folgende Eigenschaften
   (a) Symmetrie: $< x, y >=< y, x >$
   (b) Linearität: $< x, \alpha y + \beta z >= \alpha < x, y > +\beta < x, z >$
   (c) Positivität: $< x, x >\geq 0$ mit Gleicheit genau dann, wenn $x = 0$

Definition 2.17

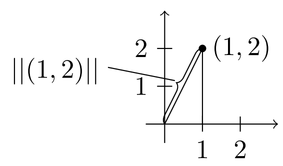
Die Norm $\|x\|$ eines Vektors ist:

$$\|x\| := \sqrt{< x, x >} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

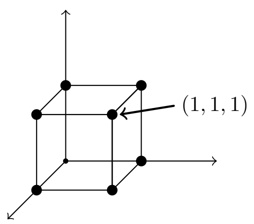
und wird oft als Länge interpretiert.

Beispiel 2.18

- $\|(1, 2)\| = \sqrt{1 + 4}$



- $\|(1, 1, 1)\| = \sqrt{3}$



- $\|e_i\| = 1$, $< e_i, e_j >= 0$. $e_i \perp e_j$
  $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ ist eine orthonormale Basis. Die Vektoren einer orthogonalen Basis sind orthogonal zueinander und normiert (die Länge ist gleich 1).

Die erste wichtige Eigenschaft des Skalaprodukts ist

Satz 2.19 (Cauchy-Schwarz)

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt $|< x, y >| \leq \|x\|\|y\|$ und

$$|< x, y >| = \|x\|\|y\| \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : x = \lambda y \Leftrightarrow \text{die Vektoren sind parallel zueinander}$$

Die Euklidische Norm hat die Eigenschaften

Satz 2.20

- $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ (Homogenität)
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung)

Beweis

SK FOR BEWEIS

- ASK FOR BEWEIS
-
$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 &=< x + y, x + y > \\
&=< x, x + y > + < y, x + y > \\
&< x, x > + < x, y > + < y, x > + < y, y > \\
&< x, x > +2 < x, y > + < y, y > \\
&\leq \|x\|^2 + 2| < x, y > | + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2\|y\|\|x\| + \|x\|^2 = (||x|| \, ||y||)^2
\end{aligned}$$

2.5 Die Komplexen Zahlen

Da für alle $x \in \mathbb{R}$ $x^2 \geq 0$ gilt, gibt es $\sqrt{-1}$ nicht als reelle Zahl. Seit dem 18. Jahrhundert haben Mathematiker mit Ausdrücken wie $a + b\sqrt{-1}$, $a, b \in \mathbb{R}$ gerechnet und auf sie die in $\mathbb{R}$ geltenden Rechnenregeln angewandt, z.B.

$$\left(1 + 2\sqrt{-1}\right)\left(1 - 2\sqrt{-1}\right) = 1^2 - 2^2\left(\sqrt{-1}\right)^2 = 5$$

Allgemein:

$$\begin{aligned}
\left(a + b\sqrt{-1}\right)\left(c + d\sqrt{-1}\right) &= ac + ad\sqrt{-1} + bc\sqrt{-1} + bd\sqrt{-1} \\
&= (ac - bd) + (ad + bc)\sqrt{-1}
\end{aligned}$$

Das Problem hier ist, dass $\sqrt{-1}$ keinen präzisen mathematisches Sinn hat und dass deshalb auch nicht klar ist, was "+" in "$a + b\sqrt{-1}$" bedeuten soll.

Das Problem wird wie folgt gelöst:

Als Modell von "$a+b\sqrt{-1}$", $\mathbb{C}$, nehmen wir $\mathbb{R}^2$. Wir kennen bereits die Addition von Vektoren und das neutrale Element $0 = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$. Wir definieren dann die Multiplikation

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \to x \cdot y$$

wobei $x \cdot y = (ac - bd, ad + bc)$, $x = (a, b)$, $y = (c, d)$. Dann erfüllen "+" und "·" folgende Eigenschaften:

- Assoziativität: $((a,b)(c,d))\,(e,f) = (a,b)\,((c,d)(e,f))$
- Neutrales Element: $(1,0)(a,b) = (a,b)$
- Kommutativ: $(a,b)(c,d) = (c,d)(a,b)$
- Inverses Element $\forall (a,b) \neq (0,0)$ in $\mathbb{R}^2$ $\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $(a,b)(x,y) = (1,0)$
- Distributivität: $((a,b)+(c,d)) \cdot (e,f) = (a,b)(e,f) + (c,d)(e,f)$

Definition 2.21

Der Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist $\mathbb{R}^2$ versehen mit "+","·", $0 = (0,0)$ und $(1,0) = 1$

Bemerkung 2.22

$z^2 + 1 = 0$ hat in $\mathbb{C}$ eine Lösung. Nämlich ist $(0,1)(0,1) = (-1,0) = -(1,0) = -1$. Wir führen für $(0,1)$ die Bezeichnung "i" ein, welches imaginäre Einheit heisst.

Also ist $i^2 = -1$. Jede komplexe Zahl $z = (x,y)$ lässt sich dann wie folgt darstellen:

$$z = (x,y) = (x,0) + (0,y) = x(1,0) + y(0,1) = x \cdot 1 + y \cdot i$$

In den Rechnungen lässt man oft das 1 in $x \cdot 1$ fallen und schreibt $z = x + yi$

Definition 2.22

1. Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$
   - $\operatorname{Re} z := x$ heisst der Realteil
   - $\operatorname{Im} z := y$ heisst der Imaginärteil
2. Die zu: $z = x + iy$ konjugierte Zahl ist $\overline{z} = x - iy$
3. Wir definieren die Norm von z als $\|z\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Satz 2.23

(i) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

(ii) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

(iii) $z \cdot \overline{z} = \|z\|^2 \cdot 1$

(iv) $\|z_1 \cdot z_2\| = \|z_1\| \cdot \|z_2\|$

Beweis

ASK FOR BEWEIS

ASK FOR BEWEIS

Abkürzung

$|z| := \|z\|$

Bemerkung 2.24

Wir können $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ "einbetten" mittels $\mathbb{R} \ni x \to (x, 0) \in \mathbb{C}$. Sei $\mathbb{C}_0 = \{(x, y) \in \mathbb{C} \mid y = 0\} = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}_0$, $x \to (x, 0)$ist eine Bijektion.

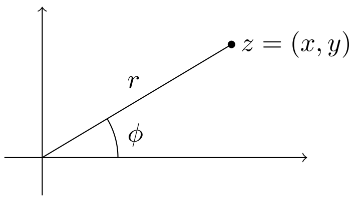
Diese Identifikation von $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}_0$ ist verträglich mit den Operationen in $\mathbb{R}$ und in $\mathbb{C}$, d.h.

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

Polarform

Als Polarkoordinaten in der Ebene führen wir (r, ϕ) ein



$x = r\cos\phi \qquad y = r\sin\phi$
$z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$
$r = |z|$

Definition

Wir definieren (nach Euler)

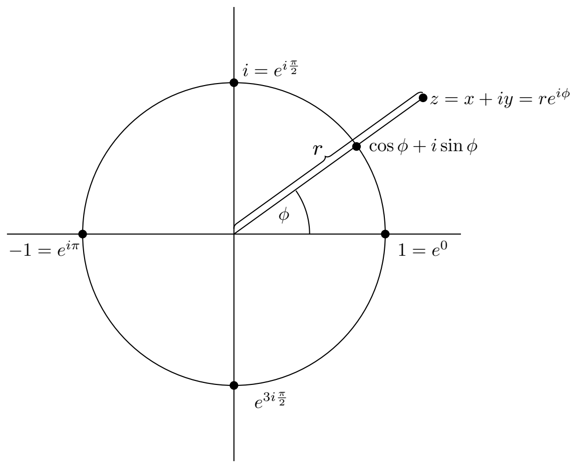
$$e^{i\phi} := \cos\phi + i\sin\phi$$
$$z = re^{i\phi} = |z|e^{i\phi}$$

here does the definiti- end??

In der Ebene $\mathbb{R}^2$ stehen uns neben den kartesischen Koordinaten x, y noch die Polarkoordinaten r, ϕ zur Verfügung. Es gelten die folgenden Additionstheoreme:

- $\cos(\phi + \psi) = \cos\phi\cos\psi - \sin\psi\sin\phi$
- $\sin(\phi + \psi) = \sin\phi\cos\psi + \cos\phi\sin\psi$

Für beliebiges $z = x + iy \neq 0$ gilt also:



$r = |z|$

$\phi = \arg z$ - Das Argument von z

$$
\begin{aligned}
e^{i\phi} &= 1 \Leftrightarrow \phi = 2k\pi \\
\cos\phi + i\sin\phi = 1 &\Leftrightarrow \cos\phi = 1 \text{ und } \sin\phi = 0 \\
&\Leftrightarrow \phi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\
e^{i\theta} \cdot e^{i\phi} &= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\phi + i\sin\phi) \\
&= \underbrace{\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi}_{\cos(\theta+\phi)} + i\underbrace{(\cos\theta\sin\phi + \sin\theta\cos\phi)}_{\sin(\theta+\phi)} \\
&= e^{i(\theta+\phi)}
\end{aligned}
$$

Es folgt somit $e^{i\phi}e^{i\psi} = e^{i(\phi+\psi)}$.

Somit folgt für $z = re^{i\theta}$, $\omega = se^{i\phi} \in \mathbb{C}$ die einfache Darstellung $z\omega = rse^{i(\theta+\phi)}$,

$$\frac{z}{\omega} = \left(\frac{r}{s}\right) e^{i(\theta-\phi)}$$

Die polare Darstellung ist in Berechnungen sehr nützlich, insbesondere um das Produkt und den Quotienten zu berechnen

Beispiel

$$
\begin{aligned}
z &= 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \\
\omega &= \sqrt{3} - i = 2e^{-i\frac{\pi}{6}} \\
\frac{\left(\sqrt{3} - i\right)^3}{(1+i)^2} &= \frac{\omega^3}{z^4} = \frac{8e^{-i\frac{\pi}{2}}}{4e^{i\pi}} = 2e^{-\frac{3\pi}{2}i} = 2e^{\frac{\pi}{2}i} = 2i
\end{aligned}
$$

Die Polarform ist auch sehr nützlich um die Wurzel einer komplexen Zahl zu berechnen. Sei $\omega \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Wir möchten die Gleichung $z^n = \omega$ lösen.

$$
\begin{aligned}
\omega &= |\omega|e^{i\phi} \\
z^n = \omega &= |\omega|e^{i\theta} = |\omega|e^{i(\theta+2k\pi} \\
\Rightarrow z &= |\omega|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{(\theta+2k\pi)}{n}}
\end{aligned}
$$

Beispiel

$$z^3 = 1 \Rightarrow z = \left(e^{2\pi ik}\right)^{\frac{1}{3}} \in \{e^{i\pi\frac{2k}{3}} : k = 0, 1, 2\} = \{1, e^{2i\frac{\pi}{3}}, e^{4i\frac{\pi}{3}}\}$$

Allgemeine Formel der n-ten Einheitswurzel $z = \{e^{i\frac{2\pi k}{n}} : k = 0, 1, \ldots, n-1\}$

Bemerkung

1. Es gibt keine mit den Körperoperationen verträgliche Ordnung in $\mathbb{C}$.
2. Hingegen ist $\mathbb{C}$ im Untershied zu $\mathbb{R}$ algebraisch vollständig. Nicht nur die Gleichung $x^2+1 = 0$ hat in $\mathbb{C}$ eine Lösung, sondern es gilt der Fundamentalsatz der Algebra. Er sagt, dass jedes Polynom $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$ vom Grad $n \geq 1$ in $\mathbb{C}$ genau n Nullstellen hat.