letzte Donnerstag $f: X \to Y$
$x \mapsto y$.

Eine Funktion f ordnet jedem Element x einer Definitionsmenge X genau ein
(Definitionsbereich)
Element y einer Zielmenge Y zu. (range)
(Wertebereich).
Für das Element $x \in X$ zugeordnete Element der Zielmenge schreibt man im Allgemeinen $f(x)$.

Das Bild eines Elements x der Definitionsm X ist einfach der Funktionswert $f(x)$.
(Jedes $x \in X$ mit $f(x) = y$ heisst ein Urbild von y.)
Das Bild einer Funktion ist die Menge der Bilder aller Elemente der Definitionsmenge X. Also

$$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\} \text{ — image}$$
$$= \mathrm{Im}(f) := \{y \in Y \mid \exists x \in X : y = f(x)\}$$

Das Bild einer Funktion ist folglich eine Teilmenge der Zielmenge, und wird Bildmenge genannt.

!! Die Umkehrung gilt nicht: Ein Element des Wertebereichs muss (wenn überhaupt) nicht nur einem Element der Definitionsmenge zugeordnet worden sein

Sei $f: X \to Y$ eine Abbildung.

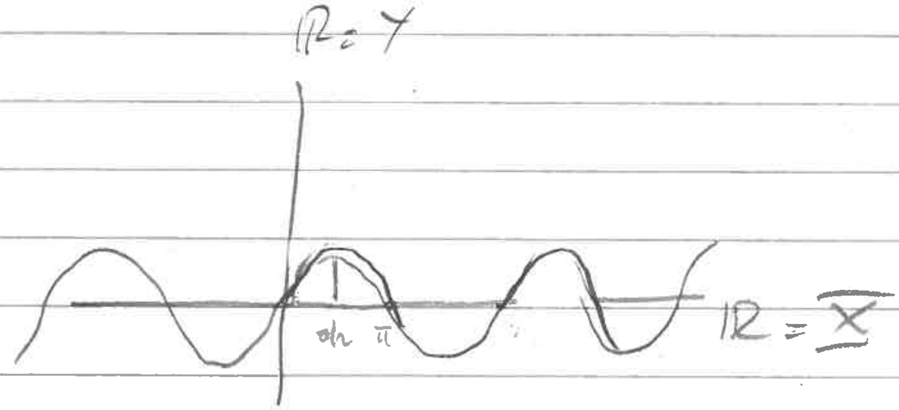
Der <u>Graph von f</u> ist die Menge aller Paare $(x, f(x))$ wobei x alle Elemente der Menge X durchläuft.

$$Gr(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$$

ist eine Teilmenge von $X \times Y$.

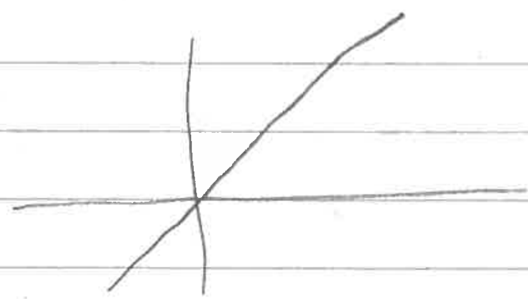
<u>Bsp</u> ① $f(x) = \sin x$ $\qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad x \to \sin x$



② $Id_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\qquad x \to x$



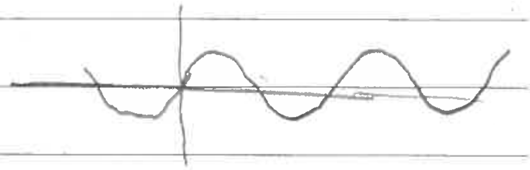
<u>Bsp.</u> $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow \sin x$

Definitionsbereich $= \mathbb{R} = \mathbb{X}$

Wertebereich $= \mathbb{R} = Y$

Bild: $[-1, 1]$.



Sei $y = 2 \in \mathbb{R}$. 2 hat kein Urbild

Das Urbild eines Elements y der Zielmenge ist die Menge aller Elemente der Definitionsmenge, deren Bild y ist.
Jedes $x \in \mathbb{X}$ mit $f(x)=y$ heisst ein Urbild von y
Man schreibt $f^{-1}(y) := \{x \in \mathbb{X} \mid f(x) = y\}$.

$f^{-1}(2) = \emptyset$ 2 ist kein Element der Def.menge zugeordnet worden

$f^{-1}(0) = \{0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots\}$

0 ist unendlich vieler Elemente der Def-menge zugeordnet worden.

$\mathrm{Bild}(f) \subsetneq Y$

17.4

$f: X \to Y$

<u>Injektive</u> : kein Element von Y
wird mehrfach angenommen

<u>surjektive</u> : jedes Element von Y
wird angenommen

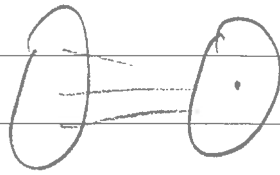
<u>bijektive</u> : jedes Element von Y
genau einmal angenommen

Bsp 1.1.2 ① $\mathrm{id}_X : X \to X$ bijektiv

② Eine konstante Abbildg $f: X \to X$, $x \mapsto c$

ist injektiv $\Leftrightarrow$ $X = \{c\}$

surj $\Leftrightarrow$ $X = \{c\}$.



③ Die Projektionen $pr_X : X \times Y \to X$

$pr_Y : X \times Y \to Y$

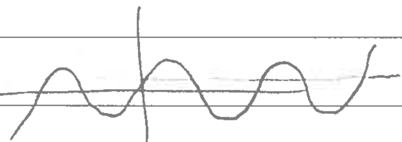
sind stets surjektiv.

④ $f: \mathbb{R} \to [-1, 1]$

$x \mapsto \sin x$

surjektiv

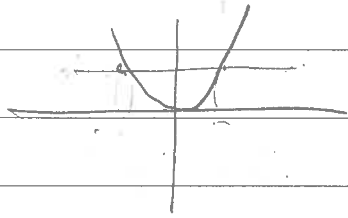
nicht injektiv



④' $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x$, nicht surj. nicht inj.

⑤ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x^2$



nicht surj.

nicht inj. aber $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

$x \mapsto x^2$ ist surjektiv

⑥ $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

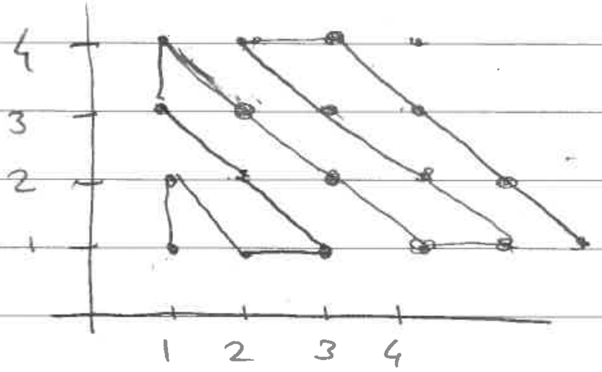
$n \mapsto 2n$ ist injektiv

$f(\mathbb{N})$ ist die Menge aller geraden Zahlen

⑦ Eine Menge A hat n Elemente falls es eine bijektion $f: \{1, \dots, n\} \to A$ gibt. Die Zahl n wird dann die Kardinalität von A genannt und mit $|A|$ bezeichnet gelegentlich auch mit $\#A$ bezeichnet

<u>Defn</u> : (Kordinalität). Wir sagen zwei Mengen X und Y sind <u>gleichmächtig</u> falls eine bijektive Abbildung $f: X \to Y$ gibt.

Mit dem ersten Cantorschen Diagonalverfahren kann man die Rationalen zahlen abzählen d.h. $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{N}$ sind gleichmächtig.



Konvention: $|\emptyset| = 0$

Dedekind Schubladen Prinzip

(Pigeonhole Principle).

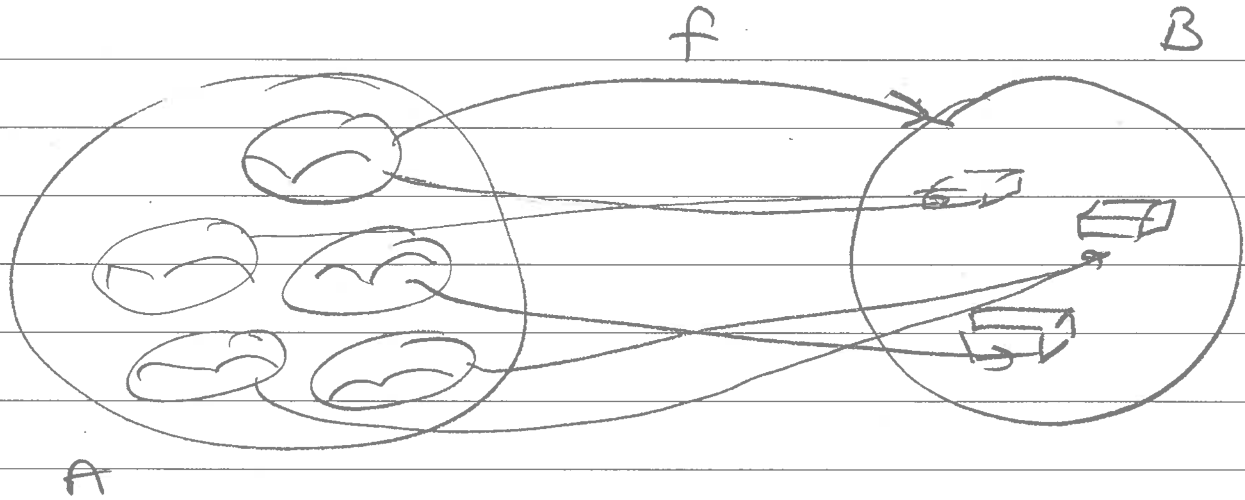
Sei $f: A \to B$ eine beliebige Abbildung zwischen endliche Mengen.

Falls $|B| < |A|$ dann ist f nicht injektiv

d.h. es gibt $b \in B$ und $a_1, a_2 \in A$ mit

i) $a_1 \neq a_2$

ii) $f(a_1) = f(a_2) = b$.



$3 = |B| < 5 = |A|$.

Sept 24 2013
Lehre 2 19-1

Mit Abbildungen kann man "operieren"

Die wichtigste Operation ist die Verkettung (oder Komposition) zweier Abbildungen. (Verknüpfung)

Defn:

Abbildungen $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ kann man hintereinander ausführen. Dies ergibt eine neue Abbildung

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \qquad X \xrightarrow{F} Z$$

$$F := g \circ f : X \to Z$$
$$x \to g(f(x))$$

Zwei Funktionen f und g können verkettet werden wenn der Wertebereich der ersten Funktion mit dem Definitionsbereich der zweiten Funktion übereinstimmt.

Mann sagt { g nach f oder
g komponiert mit f
$g \circ f$ }

Zu beachten:

In dieser Notation steht die zuerst angewandte Abbildung rechts: das heisst bei $g \circ f$ wird zuerst die Funktion f angewandt und dann die Funktion g. (Im Gegensatz zum Diagram

$$\underbrace{X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z}_{F = g \circ f}$$

- Die identische Abbildung verhält sich bei der Komposition neutral, für eine Funktion
  $f: X \to Y$ gilt also

$$f \circ id_X = f = id_Y \circ Y$$

wobei $id_X : X \to X$, $x \to x$ $\quad$ $id_Y : Y \to Y$, $y \to y$.

- Die Komposition von Funktionen ist assoziativ d.h. für Funktionen f, g, h gilt

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

- <u>Aber</u> die Komposition von Funktionen ist im Allgemeinen <u>nicht</u> kommutativ!

$$f \circ g \neq g \circ f$$

Bsp $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x^2$ $\qquad$ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x+1$

$$f \circ g = f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$g \circ f = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1$$

② Die Inverse Abbildung

(Umkehrfunktion)

Sei $f: X \to Y$ eine bijektiven Funktion.

Die Inverse Funktion $g: Y \to X$, einer bijektiven Funktion $f: X \to Y$ ist
die Funktion, die jedem Element y der Zielmenge sein eindeutig bestimmtes Urbildelement zuweist.
(Bei bijektiven Funktionen hat die Urbildmenge jedes Element y, genau ein Element).

$g(y) := x$, eindeutig definierte $x \in X$,
mit $f(x) = y$.

Dann ist definitionsgemäss $(g \circ f)(x) = x$.
d.h $g \circ f = Id_X$

Die Eindeutig definierte Abbildung g wird (auch) mit f^{-1} bezeichnet und Inverse von f genannt.

For $f \circ f^{-1}$: Sei $y \in Y$ und sei x mit $f(x) = y$
Dann ist $(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y))$
$= f(x) = y$.

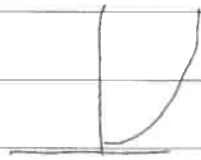
$$f \circ f^{-1} = Id_Y$$

Bsp ① $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to 2x+3$ bijektive

Umkehrfunktion ist gegeben durch
$$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to \frac{x-3}{2}$$

② Sei $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ die Menge der nichtnegativen reelen Zahlen und

$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ mit
$x \to x^2$



Dann ist f bijektive und die Umkehrfunktion
$f^{-1}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ ist gegeben durch
$x \to \sqrt{x}$

Verallgemeinerungen: Falls $f: X \to Y$ injektive ist, kann man die Umkehrabbildung (Linksinverse)
$$f^{-1}: f(X) \to X \text{ definieren.}$$
Das heisst, die Funktion f^{-1} erfüllt:
wenn $f(x)=y$, dann $f^{-1}(y)=x$

Vorsicht: $f^{-1} \circ f = Id_X$ aber

$$f \circ f^{-1} = Id_{f(X)}$$
und $f \circ f^{-1} = Id_Y$ genau dann wenn $f(X) = Y$
d.h f bijektive ist.

Kapitel 2. Reele Zahlen, Euklidische Räume und Komplexe Zahlen

§. 2-1 Elementare Zahlen

Naturzahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots \}$ addieren und multiplizieren

$\cap$

Ganzzahlen $\mathbb{Z} = \{\dots -2, -1, 0, 1, \dots\}$ subtrahieren

$\cap$

Rationalz. $\mathbb{Q} = \{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \}$ dividieren.

Viele Gleichungen haben keine Lösung in $\mathbb{Q}$.

Satz 2-1 Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Dann hat $x^2 = p$ keine Lösung in $\mathbb{Q}$.

Beweis: Zum Erinnerung: Zwei Natürliche Zahlen a und b sind teilfremd (oder relativ prim) wenn es keine Natürliche Zah ausser ~~der~~ Eins gibt, die beide Zahlen teilt.

$((a, b) = 1)$

grösste Gemeinsame Teiler)

Indirekter Beweis: Wir nehmen an, es gibt $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = p$ wobei

a, b teilfremd und ≥ 1 sind

Dann gilt

$$a^2 = p b^2 \qquad \left(\frac{a^2}{b^2} = p \right)$$

woraus folgt, dass p a teilt also

ist $a = p \cdot k'$, $k \in \mathbb{N}$ und somit

$$a^2 = p^2 k'^2 = p b^2 \Rightarrow p k'^2 = b^2$$

woraus folgt, dass p b teilt. Wiederspruch $(a,b)=1$

§2.2 Die Reellen Zahlen.

Sept 26-15
Lektion 1

Wir werden jetzt das System von Axiomen beschreiben das die Menge der reellen Zahlen "eindeutig" characterisiert.

Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist mit zwei Verknüpfungen "+" (Addition) und "$\cdot$" (Multiplikation) versehen sowie mit einer Ordnungsrelation $\leq$.
Die Axiome werden wie folgt gruppiert:

(I) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein Körper.

Es gibt 2 Operationen (zweistellige Verknüpfungen)

$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(a,b) \to a+b$ $\qquad$ $(a,b) \to a \cdot b$

und 2 ausgezeichnete Elemente 0 und 1 in $\mathbb{R}$ die folgenden Eigenschaften haben

Komutativität	(A1)	$x+y=y+x$	(M1)	$x\cdot y=y\cdot x$
Assoziativität	(A2)	$(x+y)+z=x+(y+z)$	(M2)	$(xy)z=x(yz)$
Neutrales Element	(A3)	$x+0=x=0+x$.	(M3)	$x\cdot 1=x=1\cdot x$
Inverses Element	(A4)	$\forall x\in\mathbb{R}, \exists y\in\mathbb{R}$ mit $x+y=0=y+x$	(M4)	$\forall x\in\mathbb{R}, x\neq 0$ $\exists y\in\mathbb{R}$ mit $xy=1=yx$

Und Die Multiplikation is verträglich mit der Addition im Sinne des Distributivitäts-Gesetz

(D) $\forall x,y,z\in\mathbb{R}: x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$

$(\mathbb{R},+)$ mit A1 → A4 ist eine Abelische Gruppe bezüglich der Addition

$(\mathbb{R},+,\cdot)$ mit A1 – A4, M – M4 und D ist ein Zahlkörper.

Bemerkung 2.2 Eine Menge G versehen mit Verknüpfung + und Neutrales Element 0 die den obigen Eigenschaften A2 – A4 genügen heisst Gruppe. (+ A1 Abelische Gruppe)

Eine Menge K versehen mit Verknüpfung $+,\cdot$ und Elementen $0\neq 1$ die den obigen Eigenschaften A1 – A4, M1 – M4, D genügen heisst Körper

Folgerungen 2.3 seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

(I) $a+b = a+c \Rightarrow b = c$ und
0 is eindeutig, d.h. Falls $z \in \mathbb{R}$ der Eigenschaften $a+z = a$ $\forall a \in \mathbb{R}$ genügt, so folgt $z = 0$.

A (II) $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\exists!$ (eindeutig bestimmtes) $x \in \mathbb{R}$: $a + x = b$. Wir schreiben $x = b - a$ und $0 - a = -a$ ist das additive Inverse zu a.

(III) $b - a = b + (-a)$

(IV) $-(-a) = a$

(V) Falls $ab = ac$ und $a \neq 0 \Rightarrow b = c$ und
1 ist eindeutig, d.h. Falls $x \in \mathbb{R}$ der Eigenschaften $a \cdot x = a$ $\forall a \in \mathbb{R}$ genügt so folgt $x = 1$

M (VI) $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $\exists!\, x \in \mathbb{R}$: $ax = b$.
Wir schreiben $x = b/a$ und $1/a = a^{-1}$ ist das Multiplikative Inverse zu a.

(VII) Falls $a \neq 0 \Rightarrow (a^{-1})^{-1} = a$

D. (VIII) $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \cdot 0 = 0$

(IX) Falls $ab = 0$ Dann folgt $a = 0$ oder $b = 0$

Beweis (2.3) (i) Sei $a+b=a+c$

$A4 \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R} : a+y=0$

$a+b=a+c \Rightarrow y+(a+b)=y+(a+c)$

$\overset{A2}{\Rightarrow} (y+a)+b=(y+a)+c$

$\Rightarrow 0+b=0+c \overset{A3}{\Rightarrow} b=c.$

Nehmen wir an, dass es $0' \in \mathbb{R}$ gibt so dass $x+0'=x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

d.h es gibt eine zweite neutrale Element für +

Dann $0+0'=0$ aber auch $A3 \Rightarrow 0+0=0$

$\Rightarrow 0+0'=0+0 \Rightarrow 0=0'$

(ii) Seien $a,b \in \mathbb{R}$, und sei $y \in \mathbb{R}$ mit $a+y=0$

Definieren wir $x:=y+b$

$\Rightarrow$

$a+x=a+(y+b) \overset{A2}{=} (a+y)+b=0+b=b$

$\Rightarrow \exists$ mindestens eine Lösung der Gleichung $a+x=b$

Von (i) folgt dass x eindeutig bestimmt ist.

$a+x=b=a+x' \overset{(i)}{\Rightarrow} x=x'$!

(iii) Seien $x=b-a$, $y=b+(-a)$

Wir wollen beweissen dass $x=y$

Aus (ii) wissen wir, dass $b-a$ ist eine Lösung von $a+x=b$.

$y+a=(b+(-a))+a=b+((-a)+a)$

$=b+0=0$

$\Rightarrow y$ ist auch eine Lösung.

Weil die Lösung von $a+x=b$ ist eindeutig bestimmt, ist $y=x$.

~~Die~~ Beweise von iv — vii werden dem Leser als Übung überlassen.

(viii) $\forall a \in \mathbb{R} \quad a \cdot 0 = 0$.

$$a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) \underset{D}{=} a \cdot 0 + a \cdot 0$$

$$\overset{(i)}{\Rightarrow} a \cdot 0 = 0$$

(ix) $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ oder $b = 0$.

Wir nehmen an: $a \neq 0$ mit multiplikative Inversen a^{-1}, (a^{-1} existiert mittels (M4))

So folgt $b = 1 \cdot b = (a^{-1} \cdot a) b = a^{-1}(a \cdot b) = a^{-1} \cdot 0 = 0$.

(2) Ordnungsaxiome $\leq$

Auf $\mathbb{R}$ gibt es eine Relation, $\leq$ (kleiner oder gleich), genannten Ordnung, die folgenden Eigenschaften genügt

(O1) Reflexivität: $\forall x \in \mathbb{R}, \ x \leq x$

(O2) Transitivität: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$

(O3) Identitivität: $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $(x \leq y)$ und $(y \leq x) \Rightarrow x = y$

(O4) Die Ordnung ist total: $\forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt entweder $x \leq y$ oder $y \leq x$.

Die Ordnung is konsistent mit $+$, und $\cdot$

(OA) $x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}$

(OM) $x, y \geq 0 \Rightarrow xy \geq 0$.

Mit $\leq$ hat man auch $\geq$, $<$, $>$

- Wir verzichten auf eine Auflistung aller Folgerungen und beschränken uns auf einzige wichtige Folgerungen.

Folgerungen 2.4
(i) $x \leq 0$ und $y \leq 0 \Rightarrow xy \geq 0$
(ii) $x \leq 0$ und $y \geq 0 \Rightarrow xy \leq 0$
(iii) $x \leq y$ und $z \geq 0 \Rightarrow xz \leq yz$
(iv) $1 > 0$
(v) $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0$
(vi) $0 < 1 < 2 < 3$ ...
(vii) $\forall x > 0: x^{-1} > 0$.

Annahme $x^{-1} \leq 0$. Nach multiplikation mit $x > 0$ folgt (mittels (ii))
$1 = x^{-1} \cdot x \leq 0 \cdot x = 0$ wiederspruch zu (iv)

Bemerkung 2.5 $\leq$ auf $\mathbb{Q}$ genügt den obigen Eigenschaften.

Die entscheidende weitere Eigenschaft von $\mathbb{R}$ ist das:

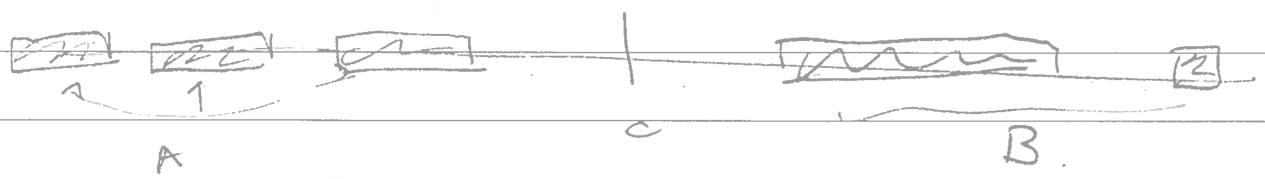
③ Ordnungsvollständigkeit

(OV) Vollständigkeitsaxiom: Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ nicht leere Teilmenge von $\mathbb{R}$, so dass

$$a \leq b \text{ für alle } a \in A,\ b \in B$$

Dann gibt es $c \in \mathbb{R}$ mit

$$a \leq c \leq b \quad \forall a \in A,\ b \in B.$$



Bemerkung 2.6 $\mathbb{Q}$ erfüllt dieses Eigenschaft nicht.

Seien $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0,\ x^2 \leq 2\}$

$B = \{y \in \mathbb{Q} \mid y \geq 0,\ y^2 \geq 2\}$

Dann gilt $a \leq b \quad \forall a \in A \quad b \in B$

Aber ein $c \in \mathbb{Q}$ mit $a \leq c \leq b$ würde dann $c^2 = 2$ erfüllen! In Satz 2.1 haben wir gesehen dass $x^2 = p$ keine Lösung in $\mathbb{Q}$ hat.

Wir definieren jetzt für $x, y \in \mathbb{R}$

$$\max\{x, y\} = \begin{cases} x & \text{falls } y \leq x \\ y & \text{falls } x \leq y. \end{cases}$$

Insbesondere ist der <u>Absolutbetrag</u> einer Zahl $x \in \mathbb{R}$, $|x|$

$$|x| := \max\{x, -x\}$$

Für diesen gilt folgender wichtiger Satz

<u>Satz 2.7</u> (i) $|x+y| \leq |x| + |y|$ (Dreiecksungleichung).

(ii) $|xy| = |x||y|$

<u>Beweis 2.7</u> (i) $x \leq |x|$, $-x \leq |x|$

$y \leq |y|$, $-y \leq |y|$

und $x+y \leq |x| + |y|$, $-(x+y) \leq |x| + |y|$

woraus $|x+y| \leq |x| + |y|$ folgt

(ii) Übung.

<u>Satz (Young)</u> Für alle $a, b \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ gilt

$$2|ab| \leq \delta a^2 + \frac{b^2}{\delta}.$$

§ 2.3 Infimum und Supremum

In Zusammenhang mit der Ordnung führen wir einige wichtige Definitionen ein:

Def 2.8. Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge

(a) X ist nach oben beschränkt falls es $c \in \mathbb{R}$ gibt mit $x \leq c$ $\forall x \in X$.
Jeder derartige c heisst eine obere Schranke für X

(b) X ist nach unten beschränkt, falls es $c \in \mathbb{R}$ gibt mit $x \geq c$ $\forall x \in X$
Jeder derartige c heisst eine untere Schranke für X.

(c) X ist beschränkt falls es nach oben und unten beschränkt ist

(d) Ein element $a \in X$ ist ein maximales Element (oder Maximum) von X falls $x \leq a$ $\forall x \in X$,
(analog für ein Minimum)

Falls ein Maximum (resp Minimum) existiert wird es mit $\operatorname{Max} X$ / ($\operatorname{Min} X$) bezeichnet.

Falls X keine obere Schranke hat, ist X nach oben unbeschränkt (analog für obere sch. sch.)

Bsp 2.9 ① $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
ist nach oben unbeschränkt

A ist nach unten beschränkt
jedes $L \leq 0$ ist eine untere Schranke

② $B = [0,1]$ ist nach oben und nach unten beschränkt.
0 ist ein minimum von B
1 ist ein maximum von B

$\boxed{\text{Oct 1\_ Let 1}}$

③ $C = [0,1)$ ist n.o und n.u beschränkt
$0 = \min(A)$
C hat kein Maximum.

Folgender Satz ist von zentraler Bedeutung und eine Folgerung der Ordungsvollständigkeitsaxiom.