Kapitel 5

Differentialrechnung auf $\mathbb{R}$

§5.1 Differential, (Ableitung) Elementere Eigenschaften

Defn 5.1 (5.1.1, 5.1.2)
Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}$, und $x_0 \in \Omega$.

① f heisst differenzierbar an der Stelle x_0 falls

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existiert.}$$

Dieser Grenzwert wird dann mit $f'(x_0)$ oder $\frac{df}{dx}(x_0)$ bezeichnet.

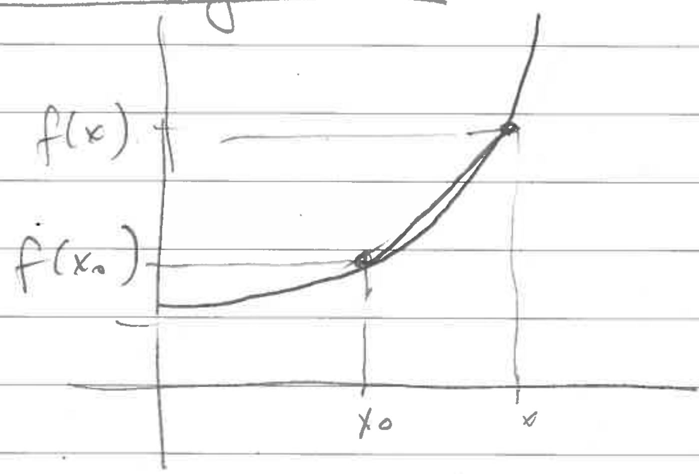
Die Zahl $f'(x_0)$ heisst die Ableitung oder das Differential von f an der Stelle x_0.

(2) f heisst in Ω differenzierbar, falls sie an jeder stelle $x_0 \in \Omega$ differenzierbar ist. In diesem Fall, nennt sich die Funktion $x \to f'(x)$ Ableitung von f.

Bemerkung 5.2 In der Def. 5.1, verlangen wir also, dass für jede in $\Omega \setminus \{x_0\}$ enthaltene Folge $(x_n)_{n \geq 1}$ mit Grenzwert x_0, der Limes

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$$ existiert.

Bemerkung 5.3 Sei f differenzierbar in x_0.



Dann ist $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ die Steigung der Geraden durch die Punkte

$(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$.

Geometrisch ist also $f'(x_0)$ die Steigung der Tangenten am Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$. Diese Tangent hat die Gleichung

$$T(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Sei $f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) + R_{x_0}(x)$

$$= T(x) + R_{x_0}(x)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} + \frac{R(x)}{x - x_0}$$

Dann folgt: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0$.

Die Lineare Funktion $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

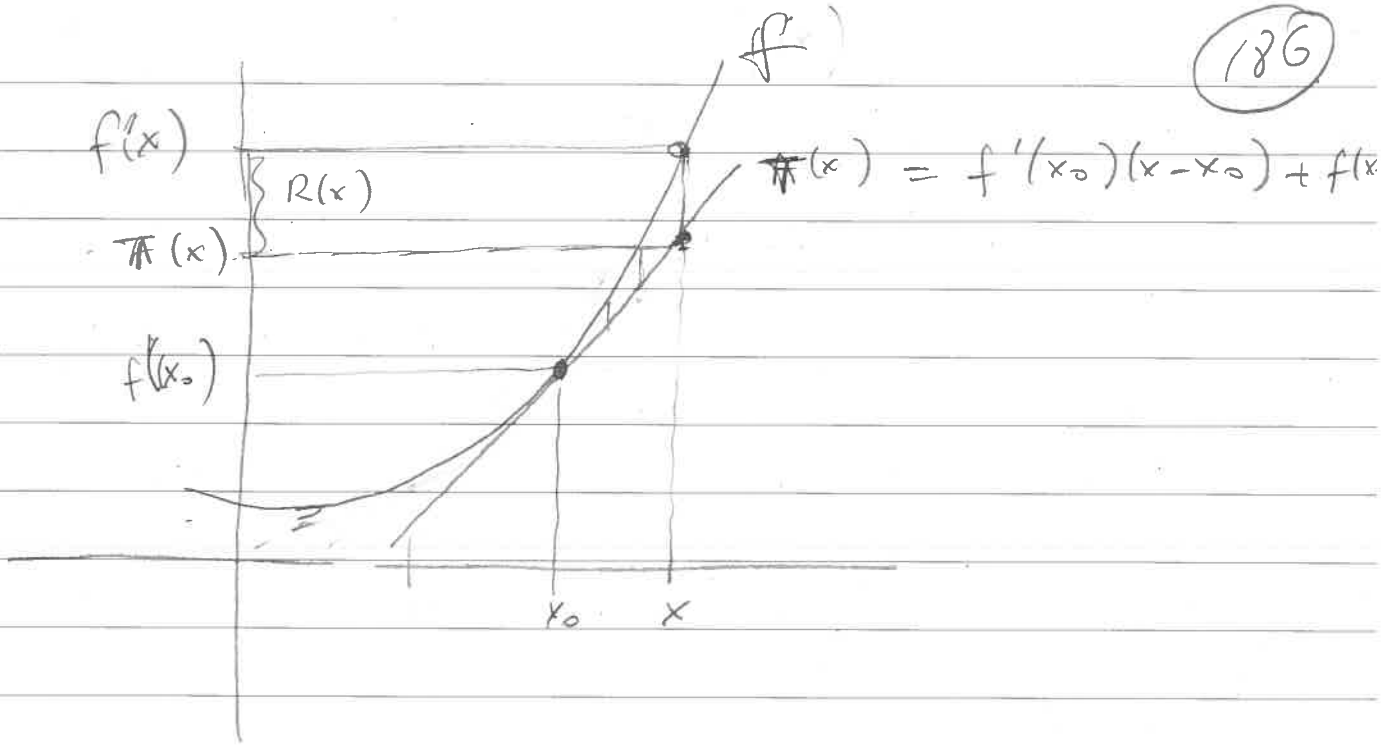
stellt eine gute Approximation der

Funktion $f(x)$ dar:

Es gilt

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R_{x_0}(x)$$

mit $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{R.(x)}{x - x_0} = 0$



Bsp. 5.4 (Bsp. 5.1.1)

① $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist überall diff.
$x \to mx+b$

mit $f'(x) = m \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) - f(x_0) = m(x - x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = m.$$

② $f(x) = |x|$ ist für alle $x_0 \neq 0$ diff. aber nicht für $x_0 = 0$.

$$f(x) - f(0) = \begin{cases} x & \text{if } x \geq 0 \\ -x & \text{if } x \leq 0 \end{cases}$$

Also ist $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \begin{cases} 1 & \text{f } x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

Besitzt also keinen Grenzwert für $x \to 0$, $x \neq 0$.

(3) $\mathrm{Exp}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist überall auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und $\mathrm{Exp}'(x) = \mathrm{Exp}(x)$

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq x = x_0 + h \in \mathbb{R}$.

$$\mathrm{Exp}(x_0+h) - \mathrm{Exp}(x_0) = \mathrm{Exp}(x_0)(\mathrm{Exp}\, h - 1)$$

$$\mathrm{Exp}(h) - 1 = h + \frac{h^2}{2!} + \dots$$

$$\frac{\mathrm{Exp}(h)-1}{h} = 1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \dots$$

Also $\left| \frac{\mathrm{Exp}(h)-1}{h} - 1 \right| \leq |h| \left[\frac{1}{2!} + \frac{|h|}{3!} + \frac{|h|^2}{4!} \right]$

$$\leq |h| \left[1 + |h| + \frac{|h|^2}{2!} + \dots \right]$$

$$\leq |h| \, \mathrm{Exp}(h)$$

Woraus $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\mathrm{Exp}(h)-1}{h} = 1$ folgt

und somit $\mathrm{Exp}'(x_0) = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\mathrm{Exp}(x_0+h)-\mathrm{Exp}(x_0)}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \mathrm{Exp}(x_0)\left(\frac{\mathrm{Exp}(h)-1}{h}\right) = \mathrm{Exp}(x_0).$

(5) $\sin x$ und $\cos x$ sind überall diff. und $\sin' = \cos$

$\cos' = -\sin$

Aus den Additionsgesetzen:

$\sin(x+h) - \sin x = \sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x$

$= \sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h.$

Nun ist $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

und $\frac{\cos h - 1}{h} = \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} = \frac{\sin^2 h}{h(\cos h + 1)}$

$= \underbrace{\frac{1}{\cos h + 1}}_{\downarrow\ \frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\frac{\sin^2 h}{h}}_{\downarrow\ 0} \qquad \underbrace{\left(\frac{\sin h}{h}\right)}_{\downarrow\ 1} \cdot \underbrace{\sin h}_{\downarrow\ 0}$

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \sin x\left(\frac{\cos h-1}{h}\right) + \cos x\,\frac{\sin h}{h}.$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim\left(\sin x \lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos h-1}{h}\right) + \cos x \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}.\right)$$

$$= \sin x \lim\left(\frac{\cos h-1}{h}\right) + \cos x \lim \frac{\sin h}{h}$$

$$= (\sin x)\,0 + (\cos x)(1) = \cos x.$$

Analog: $\cos(x+h)-\cos x = \cos x\cos h - \sin x\sin h - \cos x$

$$= \cos x(\cos h-1) - \sin x\sin h$$

Da wie oben $\frac{\cos h-1}{h}\to 0$ $\quad\frac{\sin h}{h}\to 1$

folgt $\cos' = -\sin$

oder $F_{\ldots}{}'($

Der Zusammenhang zwischen differenzierbarkeit und stetigkeit ist

Satz 5.5 (Satz 5.1.1)

· Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \Omega$ und

$f : \Omega \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar.

Dann ist f in x_0 stetig.

(Also, "Diff" ist mehr als "stetigkeit")

Beweis. f differenzierbar in x_0,

Sei $T : \Omega \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$

$$x \to \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Da f diff. in x_0,

hat T ein Grenzwert in x_0, und

mit $\lim\limits_{x \to x_0} T(x) = f'(x_0)$

Für $x \neq x_0$ $\quad f(x) = T(x)(x - x_0) + f(x_0)$

$f(x)$ ist die Summe von 2 fachen
$T(x)(x - x_0)$ und $f(x_0)$ = konstant.

Da beide funktionen ein Grenzwert an der stelle x_0 besitzen, hat auch f eine Grenzwert in x_0 und

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\left(\tau(x)\right) \lim_{x\to x_0}(x-x_0) + \lim_{x\to x_0} f(x_0)$$

$$= f'(x_0)\cdot 0 + f(x_0) = f(x_0)$$

$\Rightarrow f$ ist stetig in x_0. ☒

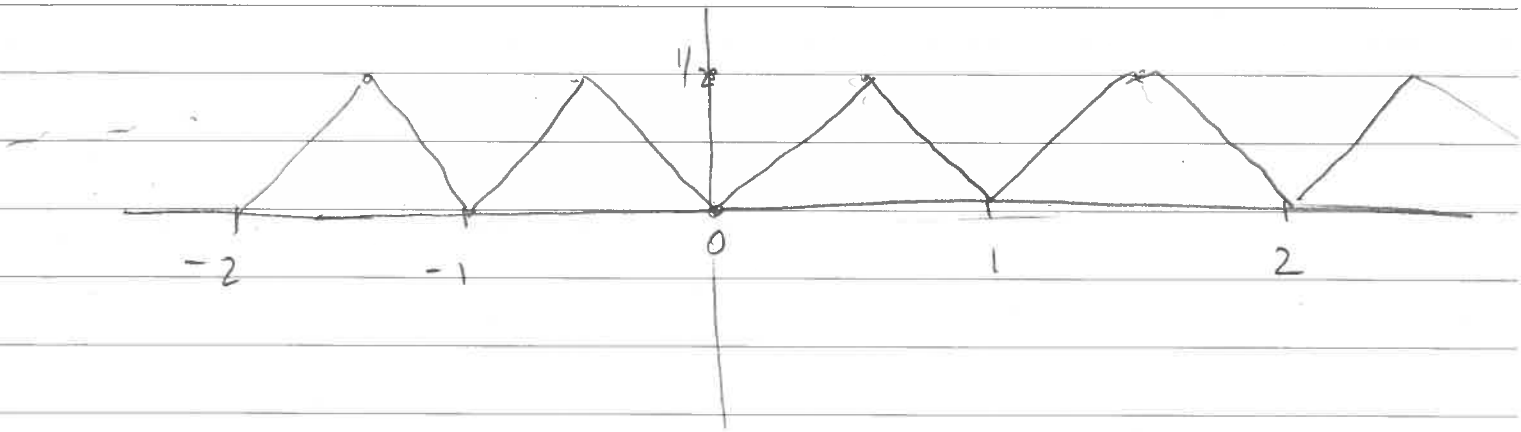
Bmk (Bmk 5.1.2) Die Umkehrung von Satz 5.5 gilt nicht.

z.B. $f(x) = |x|$ ist stetig in $x = 0$ aber nicht diff.

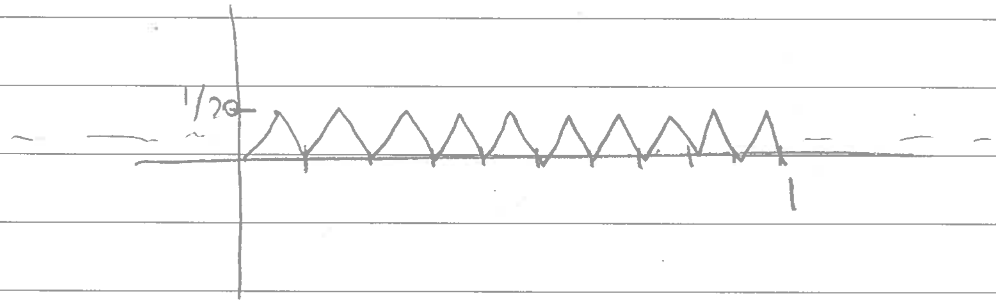
Bsp. 5.6 Das Folgende Beispiel zeigt dass, es stetige funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, die an keiner stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ diff sind (Van der Waerden (1930))

Sei für $x \in \mathbb{R}$ $\langle x \rangle =$ Distanz von x zur nächsten ganzen Zahl $= \min\{|x-m| : m \in \mathbb{Z}\}$

Der Graph von $\langle x \rangle$ sieht so aus



Graph von $\frac{\langle 10x \rangle}{10}$



Sei $f(x) := \langle x \rangle + \frac{\langle 10x \rangle}{10} + \frac{\langle 10^2 x \rangle}{100} + \dots$

Da $0 \leq \langle 10^n x \rangle \leq \frac{1}{2}$ folgt abs. Konv.

Ausserdem sei $f_k(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{\langle 10^n x \rangle}{10^n}$

Denn ist

$$|f(x) - f_k(x)| = \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{\langle 10^n x \rangle}{10^n} \right| \leq \frac{1}{2} \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{10^n} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{10^{-k}}{9}$$

$\forall k \geq 1$ ist $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig.

Da die Folge $(f_k)_{k\geq 1}$ gleichmässig gegen f konvergiert ist f stetig.

Man kann zeigen, dass f in keinem Punkt von $\mathbb{R}$ differenzierbar ist.

Um komplizierte Funktionen ableiten zu können müssen wir einige Rechenregeln herleiten.

<u>Satz 5.7</u> (Satz 5.1.2) Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen, $x_0 \in \mathbb{R}$. Wir nehmen an dass f und g in x_0 differenzierbar sind. Dann sind $f+g$, $f \cdot g$ und falls $g(x_0) \neq 0$ auch f/g an der Stelle x_0 differenzierbar

Es gelten dann folgende Formel.

1) $(af+bg)'(x_0) = af'(x_0) + bf'(x_0)$ $\forall a,b \in \mathbb{R}$

2) $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

3) $\left(f/g\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

Beweis: ① Für $x \neq x_0$

$$\frac{(af+bg)(x) - (af+bg)(x_0)}{x-x_0}$$

$$= a\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right) + b\left(\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right)$$

Da f und g in x_0 diff. sind, folgt das $af+bg$ in x_0 diff ist und

$$(af+bg)'(x_0) = af'(x_0) + bf'(x_0)$$

② $f(x)g(x) - f(x_0).g(x_0)$

$$= [f(x) - f(x_0)]g(x) + f(x_0)[g(x) - g(x_0)]$$

Durch $(x-x_0)$ dividiert

$$\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)}\,g(x)$$

$$+ \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\,f(x_0).$$

Da g in x_0 diff ist, ist g in x_0 stetig und $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$ (Satz 5.5)

Die Formel folgt dann aus der differenzierbarkeit von f und g in x_0.

(3) $$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)}.$$

$$= \frac{[f(x)-f(x_0)]\,g(x_0) - f(x_0)\,[g(x)-g(x_0)]}{g(x)g(x_0)}.$$

Man dividiere durch $x-x_0$ und benutze die stetigkeit von g in x_0.

Bsp 5.8. (Bsp 5.1.2)

1) $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = x^n$ ist überall differenzierbar und $f_n'(x) = n x^{n-1}$

Beweis. Induktion: $f_0(x) = 1 \quad \forall x$

$$f_0'(x) = 0 \;(= 0\, x^{-1})$$

$$f_1(x) = x \quad \forall x$$

$$f_1'(x) = 1 = 1\, x^{1-1} \;\checkmark$$

Sei $n \geq 2$. Wir nehmen an dass die Formel für $n-1$ gilt, i.e.

$$f_{n-1}'(x) = (x^{n-1})' = (n-1)\, x^{n-2}$$

$$f_n(x) = x^n = x\, x^{n-1} = x\, f_{n-1}(x).$$

Nach (2) Satz 5.7

$$f_n'(x) = (x)' f_{n-1}(x) + x\, f_{n-1}'(x)$$

$$= f_{n-1}(x) + x\,(n-1)\, x^{n-2}$$

$$= x^{n-1} + (n-1)\, x^{n-1} = n\, x^{n-1}$$

(2) $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$

$p'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1$

Insbesondere ist die Ableitung eines Polynom von Grad n ein Poly von Grad $(n-1)$ $n \geq 1$.

(3) Sei $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ wobei p, q poly. bezeichnen.

R(x) ist eine so genannte rationale Funktionen mit Definitionsbereich

$\Omega = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$.

$$R'(x) = \frac{p'(x)q(x) - p(x)q'(x)}{q^2(x)}$$

z.B $R(x) = \frac{x^3+1}{x-1}$

$$R'(x) = \frac{(3x^2)(x-1) - (x^3+1)}{(x-1)^2} = \frac{3x^3 - 3x^2 - x^3 - 1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{2x^3 - 3x^2 - 1}{(x-1)^2}$$

Die nächste Rechenregel wird uns erlauben Funktionen wie z.B

$\operatorname{Exp}(x^2+1)$, $\sin(x^2)$ .. abzuleiten.

Satz 5.9 (Satz. 5.1.3) (Kettenregel)

Seien $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $g : T \to \mathbb{R}$

Funktionen mit $f(\Omega) \subset T$, und $x_0 \in \Omega$.

Wir nehmen an, dass f an der Stelle x_0 und g an der Stelle $f(x_0)$, differenzierbar sind. Dann ist

$g \circ f : \Omega \to \mathbb{R}$ an der Stelle x_0

differenzierbar und

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0).$$

Bmk: f ist differenzierbar an x_0

falls $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert

d.h. für jede in $\Omega \setminus \{x_0\}$ enthaltene

Folge $(x_n)_{n \geq 1}$ mit Grenzwert x_0, der

Limes $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$ existiert

Beweis: Sei $(x_n)_{n\geq 1}$ mit $\lim x_n = x_0$, $x_n \neq x_0$.

Dann gilt $\lim f(x_n) = f(x_0)$ (Nach Satz 5.5 f diff in x_0 $\Rightarrow$ f stetig in x_0)

Sei $y_n := f(x_n)$, $y_0 = f(x_0)$. Wir nehmen an dass

$y_n \neq f(x_0)$ $\forall n$.

Dann folgt

$$\frac{(g\circ f)(x_n) - (g\circ f)(x_0)}{x_n - x_0} = \frac{g(f(x_n)) - g(f(x_0))}{x - x_0}$$

$$= \left(\frac{g(f(x_n)) - g(f(x_0))}{f(x_n) - f(x_0)}\right)\left(\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x - x_0}\right)$$

$$= \left(\frac{g(y_n) - g(y_0)}{y_n - y_0}\right) \cdot \left(\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x - x_0}\right)$$

$\downarrow \lim n\to\infty$ $\qquad\qquad$ $\downarrow n\to\infty$

$g'(y_0)$ $\qquad\qquad$ $f'(x_0)$.

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} g'(f(x_0))\, f'(x_0)$$

Bsp 5.10 ① Berechne die Ableitung von

$$\mathrm{Exp}(x^3+1)$$

$g(x) = \mathrm{Exp}(x)$ $\quad f(x) = x^3+1$, $f'(x) = 3x^2$

$g'(x) = \mathrm{Exp}(x)$

$$(g \circ f)(x) = \mathrm{Exp}(x^3+1)$$

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$= \left[\mathrm{Exp}(x^3+1)\right] 3x^2$$

② $(\mathrm{Sin}(x^2))' = (g \circ f)'(x)$ mit

$g = \mathrm{Sin}(x)$ $\quad f(x) = x^2$

$g' = \cos x$ $\quad f'(x) = 2x$

$$(\mathrm{Sin}(x^2))' = \cos(x^2) \cdot 2x$$

③ $\left((3x^7 + 11x^6 + 5)^2\right)'$

$$= 2\,(3x^7 + 11x^6 + 5) \cdot (21x^6 + 66x^5)$$

202

(4) Sei $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diff. und $n \in \mathbb{N}$.

$f(x) = g(x)^n$

Dann ist $f'(x) = n\, g(x)^{n-1} \cdot g'(x)$.

(5) $\mathrm{Exp}(\mathrm{Exp}(x)) = e^{e^x}$

$\left(e^{e^x}\right)' = e^{(e^x)} \cdot e^x$

§ 5.2. Der Mittelwertsatz und Folgerungen.

Wichtige Informationen über eine Funktion f lassen sich leicht aus der Ableitung schliessen. Dies geschieht mittels dem Mittelwertsatz.

Ein Spezialfalls des Mittelwertsatz ist

Satz 5.12 (In Stowe, im Beweis von Satz 5.2.1)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Sei $z_+ \in [a,b]$ mit $f(z_+) = \max\{f(x) : x \in [a,b]\}$

Wir nehmen an dass $z_+ \in (a,b)$.
Dann gilt $f'(z_+) = 0$.

Eine Analoge Aussage gilt für z_-

Bmk 5.13: (1) ~~z_+~~, z_- existieren nach Satz 4.9

202

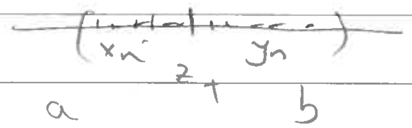
(2) Die Voraussetzung $z_t \in (a,b)$ ist wichtig: z.B

Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ $f(x) = x$

dann ist $z_t = 1$ und $f'(x) = 1 \neq 0$ $(\forall x \in (a,b$

[Nov 27 lek 2

Beweis: Sei $z_t \in (a,b)$.



Da $(a, z_t) \neq \emptyset$

$(z_t, b) \neq \emptyset$

gibt es $(x_n)_{n\geq 1} \subset (a, z_t)$ sowie

$(y_n)_{n\geq 1} \subset (z_t, b)$ mit

$$\lim_{n\to\infty} x_n = z_t = \lim_{n\to\infty} y_n \quad \left(\text{z.B } \begin{array}{l} x_n = z_t - \frac{1}{n} \\ y_n = z_t + \frac{1}{n} \end{array} \right)$$

Für $n \geq 1$ folgt

$$f'(z_t) = \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{f(x_n) - f(z_t)}^{<0}}{\underbrace{x_n - z_t}_{<0}} \geq 0$$

$$f(z_t) = \max \{f(x)\}$$

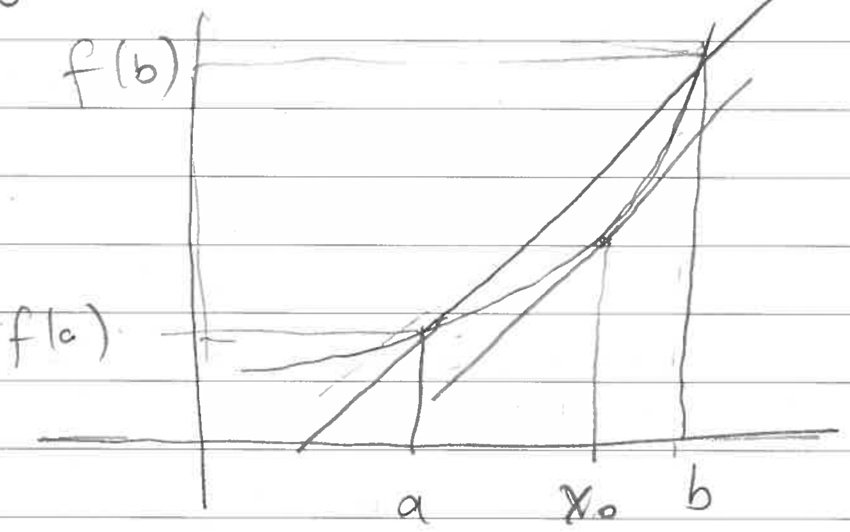
$$f'(z_t) = \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{f(y_n) - f(z_t)}^{<0}}{\underbrace{y_n - z_t}_{>0}} \leq 0.$$

woraus $f'(z_t) = 0$ folgt

$\boxtimes$

Satz 5-14 (Satz 5-2-1) Mittelwertsatz

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar, $a \neq b$. Dann gibt es $x_0 \in (a,b)$ mit $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$



Beweis: Die Idee ist sich auf den Fall $f(a) = f(b) = 0$ zurückzuführen und dann der Satz 5.13 anwenden.

Die Gleichung für die Sekante durch die Punkte $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ ist

$$S(x) = (x-a)\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right) + f(a).$$

Sei nun
$$g(x) = f(x) - S(x).$$ Dann ist
$$g(a) = 0 = g(b).$$

Fall 1 g ist identisch $= 0$. Also $f(x) = S(x)$ eine Gerade und die Aussage stimmt $\forall x_0 \in (a, b)$.

Fall 2 $g \not\equiv 0$. Also ist entweder
$$\max_x g(x) > 0 \left(\text{oder } \min_x g(x) < 0.\right)$$

In diesem Fall sei z_+ mit

$$g(z_+) = \max\{g(x) : x \in [a, b]\}.$$

Dann ist $z_+ \in (a, b)$ $\left(\begin{array}{l}\text{Da}\\ g(a) = g(b) = 0, \text{ und}\\ g(z_+) > 0\end{array}\right)$

und Nach Satz 5-12 $g'(z_t) = 0$

d.h. $g'(z_t) = f'(z_t) - S'(z_t) = 0$

$$\Rightarrow f'(z_t) = S'(z_t) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Der Fall

$\min_x g(x) < 0$ Analog.

☒.

Als erste Anwendung haben wir

Kor 5-15 (Kor 5.2.1)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ wie im Satz 5-14

1. falls $f'(x) = 0$ $\forall x \in (a, b)$ folgt dass f konstant ist.

2. falls $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in (a, b)$, so ist f monotone wachsend

3. falls $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a, b)$, so ist f streng mon. wachsend.

4. falls $f'(x) \leq 0$, monotone fallend

5. falls $f'(x) < 0$, streng mon. fallend.

Beweis: ① Seien $a \leq x < y \leq b$ beliebig und sei (Nach Mittelwertsatz) $\bigwedge x_0 \in (x, y)$ mit

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(x_0)$$

da $f'(x_0) = 0$ folgt $f(y) = f(x)$

$\Rightarrow$ f ist konstant

② Seien $a \leq x < y \leq b$ beliebig und $x_0 \in (x, y)$ mit $\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(x_0)$ ≥ 0.

Woraus folgt $f(y) \geq f(x)$ folgt

$\Rightarrow$ f monotone wachsend.

③–④ Analog.