

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Logik und Unterlagen</b>	<b>1</b>
1.1	Prinzip des Indirekten Beweises . . . . .	2
1.2	Zwei Prinzipien . . . . .	3
1.3	Mengenoperationen . . . . .	6
1.4	Abbildungen . . . . .	8
1.5	Dedekind Schubladen Prinzip . . . . .	11
1.6	Die inverse Abbildung (Umkehrfunktion) . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Reelle Zahlen, Euklidische Räume und Komplexe Zahlen</b>	<b>15</b>
2.1	Elementare Zahlen . . . . .	15
2.2	Die Reellen Zahlen . . . . .	16
2.3	Infimum und Supremum . . . . .	19
2.4	Euklidische Räume . . . . .	24
2.5	Die Komplexen Zahlen . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Folgen und Reihen (Der Limes Begriff)</b>	<b>31</b>
3.1	Folgen, allgemeines . . . . .	31
3.2	Grenzwert oder Limes eine Folge. Ein zentraler Begriff . . . . .	32
3.3	Konvergenzkriterien . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Stetigkeit</b>	<b>37</b>
<b>5</b>	<b>Differentialrechnung auf <math>\mathbb{R}</math></b>	<b>39</b>
<b>6</b>	<b>Integration</b>	<b>41</b>
6.1	Riemann Integral: Definition, elementare Eigenschaften . . . . .	43
6.2	Differentiation und Integration . . . . .	56
6.3	Partielle Integration . . . . .	60
6.4	Methode der Substitution . . . . .	66
6.5	Integration rationaler Funktionen (Partialbruchzerlegung) . . . . .	70
6.6	Das Uneigentliche Integral . . . . .	73
<b>7</b>	<b>Gewöhnliche Differenzialgleichungen</b>	<b>79</b>
7.1	Lineare DGL mit konstante Koeffizienten . . . . .	80
7.2	Inhomogene DGL . . . . .	83
7.3	Lineare DGL erster Ordnung (mit allgemeinen koeffizienten) . . . . .	90
7.4	Separierbare DGL . . . . .	93

<b>8</b>	<b>Differentialrechnung in <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>95</b>
8.1	Partielle Ableitungen und Differential . . . . .	95
8.2	Differentiationsregeln . . . . .	106
8.3	Differentialformen und Vektorfelder . . . . .	114
8.4	Wegintegrale . . . . .	120
8.5	Höhere Ableitungen . . . . .	131
8.6	Vektorwertige Funktionen . . . . .	140
<b>9</b>	<b>Integration in <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>143</b>
9.1	Der Satz von Fubini . . . . .	146
9.2	Substitutionsregel . . . . .	155

# Kapitel 1

## Logik und Unterlagen

Im Laufenden Semester werden wir viele mathematische Beweise einführen. Heute werden wir uns mit der Mathematische Logik beschäftigen.

In der Mathematik stoßen wir auf gewisse Grundannahmen, “Axiome”, die wir als gegeben ansehen. Eine dieser Annahmen ist der

### Satz vom ausgeschlossenen Dritten

Eine zulässige mathematische Aussage ist entweder wahr oder falsch, jedoch nie beides zugleich.

### Beispiel

1.  $5 < 7$  Wahr
2.  $4 < 2$  Falsch

In der wirklichen Welt ist es anders. Ist z.B. “Mathematik ist schön” wahr oder falsch?

Mit Aussagen kann man “rechnen”. Wir führen nun ein paar geläufige Notationen der Logik ein:

Seien  $A, B$  Aussagen

- $A$  und  $B$  wird mit  $A \wedge B$  bezeichnet
- $A$  oder  $B$  wird mit  $A \vee B$  bezeichnet

### Folgerung (eine wahre Implikation)

- Aus  $A$  folgt  $B$  wird mit  $\rightarrow$  bezeichnet
- Wenn  $A$ , dann auch  $B$
- Die Negation der Aussage  $A$  wird mit  $\neg A$  bezeichnet
- $A$  ist äquivalent zu  $B$  wird mit  $A \Leftrightarrow B$  bezeichnet
- $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$   $A$  wahr genau dann, wenn  $B$  wahr ist.

### Bemerkung

Die Folgerung ist transitiv. Wenn wir wissen, dass  $A \rightarrow B$  und  $B \rightarrow C$ , dann wissen wir dass  $A \rightarrow C$ .

### Prinzip des Mathematischen Beweises

Wir können aus einer Kette von Folgerungen

$$A \rightarrow B \rightarrow C \cdots \rightarrow S$$

einen mathematischen “Satz”  $S$  aus einer Annahme  $A$  herleiten. (Ein Beweis ist eine Folge von Implikationen von Aussagen).

### Kontraposition (Umkehrschluss)

$A \rightarrow B$  ist gleichbedeutend mit  $\neg B \rightarrow \neg A$ .

Falls  $A \rightarrow B$ , so kann  $A$  nicht wahr sein wenn  $B$  falsch ist (weil wenn  $A$  wahr ist, würde  $B$  auch wahr sein).

## 1.1 Prinzip des Indirekten Beweises

Zum Beweis der Aussage  $A \rightarrow B$  genügt es die Aussage  $\neg B \rightarrow \neg A$  zu zeigen, oder die Annahme  $A \wedge \neg B$  zum Widerspruch zu führen.

### Indirekter Beweis

Man fügt  $\neg B$  als Annahme hinzu und kommt nach einer Kette von erlaubten Schlüssen zu einer falschen Aussage.

Daraus schliesst man, dass die Zusatzannahme  $\neg B$  nicht wahr ist.

#### Beispiel 1.1

- $A$  = ”jede natürliche Zahl  $n$  hat einen Nachfolger  $n + 1$ ”
- $B$  = ”es gibt keine grösste natürliche Zahl”

Wir beweisen dass  $B$  aus  $A$  folgt. Nehmen wir an, dass  $A$  wahr und  $B$  falsch ist.

$\neg B$  = es gibt eine grösste natürliche Zahl  $N_0$ , d.h.  $N_0 > l$  für jedes  $l \in \mathbb{N}$ .

Mittels der Aussage  $A$  wissen wir, dass  $N_0$  einen Nachfolger  $N_0 + 1$  hat. Für diesen gilt  $N_0 + 1 > N_0$ . Dies ist aber ein Widerspruch.

#### Definition 1.1

Eine Menge ist eine Zusammenfassung verschiedener Objekte zu einem Ganzen.

Die Objekte werden Elemente der Menge genannt.

## KAPITEL 1. LOGIK UND UNTERLAGEN

Sei  $A$  eine Menge, dann wird “ $a$  ist element von  $A$ ” mit “ $a \in A$ ” bezeichnet. Seien  $A, B$  Mengen, dann wird “jedes Element von  $A$  ist ein Element von  $B$ ” mit “ $A \subset B$ ” bezeichnet, und man sagt “ $A$  ist in  $B$  enthalten” (oder  $A$  ist eine Teilmenge von  $B$ ).

Falls zugleich  $A \subset B$  und  $B \subset A$  gilt, so sind  $A$  und  $B$  gleich und man schreibt  $A = B$ .

### Beispiele 1.2

1. Die Menge  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  der natürlichen Zahlen.
2. Die leere Menge mit “ $\emptyset$ ” bezeichnet. Sie ist in jeder Menge enthalten.
3. Die Menge  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  aller ganze Zahlen.
4. Meistens werden Mengen nicht durch die Liste ihre Elemente gegeben, sondern durch bestimmte Eigenschaften ihrer Elemente definiert

$$\mathbb{P} = \{2, 3, 4, 5, 7, 11, 13, \dots\}$$

die Menge aller Primzahlen  $\mathbb{P} : \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ primzahl}\}$

## 1.2 Zwei Prinzipien

Wir werden die folgenden zwei Beweismethoden häufig benutzen.

### 1. Prinzip des Indirekten Beweises

Zum Beweis der Aussage  $A \rightarrow B$  genügt es, die Aussage  $\neg B \rightarrow \neg A$  zu zeigen oder die Annahme  $A \wedge \neg B$  zum Widerspruch zu führen.

### 2. Prinzip der Vollständigen Induktion

Sei für jedes  $n \in \mathbb{N}$  eine Behauptung  $A(n)$  gegeben. Soll die Behauptung für alle natürlichen Zahlen  $n \in \mathbb{N}$  bewiesen werden, so genügen dazu zwei Beweisschritte:

- i) Der Beweis von  $A(0)$
- ii) Für jedes  $n \in \mathbb{N}$ , der Beweis von  $A(n+1)$  unter der Voraussetzung, dass  $A(n)$  gilt.

Oft gelten aber Behauptungen nicht von  $n = 0$ .

Soll die Gültigkeit von  $A(n)$  für alle  $n \geq m$  bewiesen werden so genügen wieder zwei Schritte:

- i) Beweis von  $A(m)$
- ii) Für jedes  $n \geq m$  impliziert  $A(n)$  die Behauptung  $A(n+1)$

Das Prinzip der vollständigen Induktion ist genau wie ein Dominoeffekt.

Sie stellen alle Dominosteine auf, einen nach dem anderen. Falls der erste Dominostein fällt ( $A(1)$  wahr) und falls wir die Dominosteine genug nah nebeneinander gestellt haben, so dass ein fallender Dominostein den nächsten trifft ( $A(k) \rightarrow A(k+1)$ ), dann wissen wir, dass alle Dominosteine fallen.

### Beispiel 1.3 (Induktion)

1. Für alle  $n \geq 1$  gilt:

$$A(n) : 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

Beweis mittels vollständiger Induktion

- i)  $A(i)$  lautet  $1 = 1^2$  und gilt.
- ii) Sei  $n \geq 1$ . Annahme:  $A(n)$  gilt. Die linke Seite der Identität  $A(n+1)$  ist

$$1 + 3 + \dots + (2n-1) + (2n+1) = n^2 + (2n+1) = (n+1)^2$$

womit  $A(n+1)$  bewiesen ist.

2. Als zweites Beispiel der vollständigen Induktion beweisen wir den Fundamentalsatz von Euklid:

### Satz 1.4

Jede natürliche Zahl  $n \geq 2$  ist ein Produkt von Primzahlen, welches bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig ist. Wir werden uns hier aber nicht mit der Eindeutigkeit befassen.

### Beweis

Sei  $A(n)$  die Aussage: Jede natürliche Zahl  $m$  mit  $2 \leq m \leq n$  ist ein Produkt von Primzahlen

- i)  $A(2)$  gilt, denn 2 ist eine Primzahl.
- ii) Sei  $n \geq 2$ . Wir nehmen an, dass  $A(n)$  gilt. Für  $n+1$  gibt es zwei Möglichkeiten
  - a)  $n+1$  ist eine Primzahl und somit gilt  $A(n+1)$
  - b)  $n+1$  ist keine Primzahl d.h. es gibt ein  $2 \leq a \leq n$  welches  $n+1$  teilt. Dann ist  $b := \frac{n+1}{a}$  auch ganzzahlig und zudem ist  $2 \leq b \leq n$  erfüllt. Aus  $A(n)$  folgt, dass sowohl  $a$  wie  $b$  ein Produkt von Primzahlen sind. Somit ist auch  $n+1 = ab$  ein Produkt von Primzahlen.

### Satz 1.5

Die Menge  $\mathbb{P}$  der Primzahlen ist unendlich.

## KAPITEL 1. LOGIK UND UNTERLAGEN

### Beweis

Nehmen wir das Gegenteil “ $\mathbb{P}$  ist endlich” an, d.h.  $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$  in aufsteigender Folge; also  $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, \dots$ . Wir betrachten die Zahl  $k = p_1 p_2 \dots p_i \dots p_m + 1$ . Aus Satz 1.4 folgt, dass eine Primzahl  $p_i$  (aus der Liste  $\{p_1, \dots, p_m\}$ ) existiert, mit  $p_i$  teilt  $k$ . Da  $p_i$  offensichtlich  $p_1 p_2 \dots p_i \dots p_m$  teilt, folgt dass  $p_i$  die Restzahl  $k - p_1 \dots p_m = 1$  teilt. Das ist ein Widerspruch.

### Teilbarkeit

#### Formale Definition

Eine ganze Zahl  $a$  teilt eine ganze Zahl  $b$  genau dann, wenn es eine ganze Zahl  $n$  gibt, für die  $an = b$  ist.

Man sagt dann (Synonyme)	Man schreibt
$a$ teilt $b$	$a \mid b$
$a$ ist Teiler von $b$	
$b$ ist teilbar durch $a$	
$b$ ist Vielfaches von $a$	

#### Eigenschaften der Teilbarkeit

- Gilt  $a \mid b$  und  $b \mid c$ , so folgt  $a \mid c$
- Für  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  gilt:  $a \mid b \iff ka \mid kc$
- $a \mid b$  und  $c \mid d \rightarrow ac \mid bd$
- $a \mid b$  und  $a \mid c \rightarrow a \mid kb + lc$ , für alle  $l, k \in \mathbb{Z}$

#### Formaler Beweis von Satz 1.5

1.  $k = (p_1 p_2 \dots p_i \dots p_m) + 1$   
Es gibt eine Primzahl  $p_i$  die  $k$  teilt.  $p_i \mid k$  mittels Satz 1.4.
2. Sei  $b = p_1 p_2 \dots p_i \dots p_m =$  Produkt aller Primzahlen. Sei  $a = p_i$ ,  $n = p_1 p_2 \dots p_{i-1} p_{i+1} \dots p_m$ . Dann  $b = an$ . Das bedeutet, dass  $a$  ein Teiler von  $b$  ist, d.h.  $p_i \mid (p_1 \dots p_m)$
3.  $p_i \mid k$  und  $p_i \mid (p_1 \dots p_m) \rightarrow p_i \mid k - (p_1 \dots p_m) = 1$ .  
So erhalten wir einen Widerspruch.

#### Bemerkung

Letztes mal haben wir gesagt, dass “jedes Element von  $A$  ist auch Element von  $B$ ” ( $\forall x, x \in A \rightarrow x \in B$ ) mit  $A \subset B$  bezeichnet wird. Wir sagen auch “ $A$  ist in  $B$  enthalten” oder “ $A$  ist Teilmenge von  $B$ ”. Falls  $A \subset B$  und eine Element  $b \in B$  existiert mit  $b \notin A$ , so sagen wir “ $A$  ist eine “eigentliche Teilmenge” von  $B$ ”. Manchmal schreiben wir  $A \subsetneq B$  in diesem Fall.

Es gibt viele Bücher mit der folgenden Notation: “jedes Element von  $A$  ist ein Element von  $B$ ” wird mit  $A \subseteq B$  bezeichnet. Und wenn  $A \subseteq B$  und  $A \neq B$  dann wird  $A \subset B$  statt  $A \subsetneq B$  benutzt.  $A = B$  falls  $x \in A \iff x \in B$ .

**Satz**

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ und } B \subset A$$

**Beweis**

Annahme:  $A = B$ . Falls  $x \in A$ , dann gilt, mittels  $A = B$ ,  $x \in B$  und damit gilt auch  $A \subset B$ . Falls  $x \in B$ , dann gilt  $x \in A$  (mittels  $A = B$ ), und damit gilt  $B \subset A$ .

Wir haben bewiesen, dass  $A = B \rightarrow A \subset B$  und  $B \subset A$ .  
Nun nehmen wir  $A \subset B$  und  $B \subset A$  an. Damit möchten wir  $A = B$  zeigen.

Sei  $x \in A$ . Mittels  $A \subset B$  erhalten wir  $x \in B$  und somit  $x \in A \rightarrow x \in B$ . (\*)

Sei  $x \in B$ . Mittels  $B \subset A$  erhalten wir  $x \in A$  und somit  $x \in B \rightarrow x \in A$ . (\*\*)

(\*) und (\*\*)  $\rightarrow A = B$  per Definition.

### 1.3 Mengenoperationen

Zunächst erinnern wir kurz an die Definitionen der elementaren Operationen auf Mengen.

Seien  $A$  und  $B$  Mengen. Wir können dann daraus folgende Mengen bilden:

- Die Vereinigung:  $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
- Der Durchschnitt:  $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
- Die Differenz:  $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
- Symmetrische Differenz:  $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Wir haben dann folgende Eigenschaften

**Satz 1.6**

Seien  $A, B, C$  Mengen.

1.  $A \cap B = B \cap A$ ;  $A \cup B = B \cup A$   
 $A \cap \emptyset = \emptyset$ ;  $A \cup \emptyset = A$

**Bemerkung**

- $\cup$  verhält sich wie  $+$
  - $\cap$  verhält sich wie die Multiplikation
  - $\emptyset$  verhält sich wie das Nullelement
2.  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$   
 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
  3.  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$



## KAPITEL 1. LOGIK UND UNTERLAGEN

### Beweis

Einerseits gilt

$$(A \cup B) \cap C = \{x \in X : x \in A \cup B\} \cap \{x \in X : x \in C\}$$

Andererseits  $(A \cap C) \cup (B \cap C) = \{x \in X : x \in A \cap C\} \cup \{x \in X : x \in B \cap C\}$ .

Daraus folgt

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap C &\subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C) \\ (A \cap C) \cup (B \cap C) &\subseteq (A \cup B) \cap C \end{aligned}$$

und somit sind die zwei Mengen gleich.

### Definition 1.7

Das Kartesische Produkt  $A \times B$  der Mengen  $A, B$  ist die Menge der geordneten Paare  $(a, b)$  wobei  $a \in A, b \in B$

### Beispiel

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(a, b) : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$ . Falls  $\mathbb{Z}$  als "eindimensionales" Gebilde dargestellt wird



So wird  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  als "zweidimensionales" Gebilde dargestellt



Um die Operationen auf mehrere Mengen zu verallgemeinern, sind die folgenden Quantoren nützlich (\*)

1.  $\forall$  "Für alle" (Allquantor)
2.  $\exists$  "Es gibt" (Existenzquantor)
3.  $\exists!$  "Es gibt genau ein"

Sei nun  $I$  eine beliebige Menge ( $I$ =Indexmenge) und sei für alle  $i \in I$  eine Menge  $A_i$  gegeben. Dann:

- $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I, x \in A_i\}$ . Vereinigung besteht aus den Elementen  $x$ , für welche es ein  $i \in I$  gibt, so dass  $x$  zu  $A_i$  gehört.
- $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I, x \in A_i\}$ . Durchschnitt.

Wir definieren das Kartesische Produkt endlich vieler Mengen  $A_1 \dots A_n$ :

$$A_1 \times A_n = \prod_{i=1}^n A_i = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in A_i\}$$

**Satz 1.8**

Seien  $A_1 \dots A_k \subset X$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Es gilt

1.

$$\left( \bigcap_{i=1}^k A_i \right)^c = \bigcup_{i=1}^k A_i^c$$

2.

$$\left( \bigcup_{i=1}^k A_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^k A_i^c$$

**Beweis**

$$\begin{aligned} \left( \bigcap_{i=1}^k A_i \right)^c &= \left\{ x \mid x \in X \wedge x \notin \bigcap_{i=1}^k A_i \right\} = \{x \mid x \in X, \exists i \in \{1, \dots, k\} : x \notin A_i\} \\ &= \bigcup_{i=1}^k \{x \mid x \in X \wedge x \notin A_i\} = \bigcup_{i=1}^k A_i^c \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \left( \bigcup_{i=1}^k A_i \right)^c &= \left\{ x \mid x \in X \wedge x \notin \bigcup_{i=1}^k A_i \right\} = \{x \mid x \in X, \forall i \in \{1, \dots, k\} : x \notin A_i\} \\ &= \bigcap_{i=1}^k \{x \mid x \in X \wedge x \notin A_i\} = \bigcap_{i=1}^k A_i^c \end{aligned}$$

(Siehe Analysis Serie 1, 1. Semester, Aufgabe 2.e)

(\*) Wir haben gesehen, dass wir manchmal eine Aussage verneinen müssen. Deshalb müssen wir lernen wie man Aussagen mit Quantoren verneinen kann.

$$\neg (\forall n : A(n)) \Leftrightarrow (\exists n : \neg A(n))$$

$$\neg (\exists n : A(n)) \Leftrightarrow (\forall n : \neg A(n))$$

$$\neg (\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} : x^2 < 0$$

## 1.4 Abbildungen

Seien  $X, Y$  Mengen.

**Definition 1.9**

Eine Funktion oder Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  der Menge  $X$  in die Menge  $Y$  ist eine Vorschrift (ein Gesetz) die (das) jedem Element  $x \in A$  genau ein Element  $y = f(x) \in Y$  zuordnet.

Es gibt verschiedene wichtige Objekte die in Zusammenhang mit einer Abbildung auftreten

$X =$  Definitionsbereich oder Definitionsmenge (domain)

$Y =$  Wertebereich oder Zielmenge (range)

$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$  ist das sog. Bild oder die Bildmenge

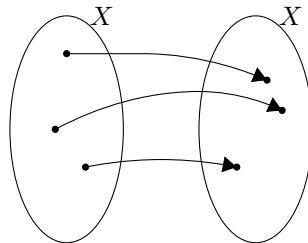
$f^{-1}(y) = x$  heisst Urbild von  $y$ .

Der Graph einer Funktion  $f$  ist die Menge aller Paare  $(x, f(x))$  wobei  $x$  alle Elemente der Menge  $X$  durchläuft. Er ist eine Teilmenge von  $X \times Y$ .

$$Gr(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$$

**Beispiel 1.10**

1. (Identität) Für jede Menge  $X$ , ist  $id_X : X \rightarrow X$  definiert durch  $id_X(x) = x, \forall x \in X$



2. (Konstante) Sei  $X$  Menge und  $c \in X$ . Die konstante Abbildung mit Wert  $c$  ist  $f(x) = c, \forall x \in X$



3. Seien  $X, Y$  Mengen. Dann sind  
 $pr_x : X \times Y \rightarrow X \quad pr_y : X \times Y \rightarrow Y$   
 $(x, y) \mapsto x \quad (x, y) \mapsto y$   
 die Projektionen auf den ersten bzw. zweiten Faktor.

4. Sinus

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow [-1, 1] \\ x &\mapsto \sin x \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 + x \end{aligned}$$

**Definition 1.11**

Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung

1.  $f$  heisst injektiv falls aus  $f(x_1) = f(x_2)$  stets  $x_1 = x_2$  folgt, also falls jedes  $y \in Y$  höchstens ein Urbild hat.
2.  $f$  heisst surjektiv falls es für jedes  $y \in Y$  ein  $x \in X$  gibt mit  $f(x) = y$

$$\forall y \in Y, \exists x \in X : f(x) = y$$

Also wenn jedes Element  $y \in Y$  mindestens ein Urbild hat.

3.  $f$  heisst bijektiv falls  $f$  injektiv und surjektiv ist, d.h. falls jedes  $y \in Y$  genau ein Urbild hat.

**Beispiel 1.12**

- |  |  |
|--|--|
| 1. $id_X : X \rightarrow X$ bijektiv.  | 5. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$<br>$x \mapsto x^2$<br>Nicht surjektiv<br>Nicht injektiv   |
| 2. Eine konstante Abbildung<br>$f : \mathbb{X} \rightarrow X, x \mapsto c$ ist   | 6. $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$<br>$n \mapsto 2n$<br>ist injektiv. $f(\mathbb{N})$ ist die Menge<br>aller geraden Zahlen  |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• injektiv <math>\Leftrightarrow \mathbb{X} = \{c\}</math></li> <li>• surjektiv <math>\Leftrightarrow X = \{c\}</math></li> </ul> | 7. Eine Menge $A$ hat $n$ Elemente falls es eine bijektive<br>$f : \{1, \dots, n\} \rightarrow A$ gibt. Die Zahl<br>$n$ wird dann die Kardinalität von<br>$A$ genannt und mit $ A $ , gelegentlich<br>auch mit $\#A$ bezeichnet. |
| 3. Die Projektionen  |  |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>pr_x : X \times Y \rightarrow X</math></li> <li>• <math>pr_y : X \times Y \rightarrow Y</math></li> </ul>                 |  |
| sind stets surjektiv.  |  |
| 4. $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$<br>$x \mapsto \sin x$<br>Surjektiv, nicht injektiv   |  |

**Definition Kardinalität**

Wir sagen zwei Mengen  $X$  und  $Y$  sind gleichmächtig falls eine bijektive Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  existiert.

## KAPITEL 1. LOGIK UND UNTERLAGEN

Mit dem ersten Cantorschen Diagonalverfahren kann man die rationalen Zahlen abzählen, d.h.  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{N}$  sind gleichmächtig



Zwei Funktionen  $f$  und  $g$  können verkettet werden wenn der Wertebereich der ersten Funktion mit dem Definitionsbereich der zweiten Funktion übereinstimmt.

Zu Beachten: In dieser Notation steht die zuerst angewandte Abbildung rechts. Das bedeutet bei  $g \circ f$  wird zuerst die Funktion  $f$  angewandt und dann die Funktion  $g$ .

- Die Identische Abbildung verhält sich bei der Komposition neutral, für eine Funktion

$f : X \rightarrow Y$  gilt also

$$f \circ id_X = f = id_Y \circ f$$

wobei

$$id_X : X \rightarrow X$$

$$x \mapsto x$$

$$id_Y : Y \rightarrow Y$$

$$y \mapsto y$$

- Die Komposition von Funktionen ist assoziativ, d.h. für Funktionen  $f, g, h$  gilt

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

- Aber die Komposition von Funktionen ist im Allgemeinen nicht kommutativ!

$$f \circ g \neq g \circ f$$

Zum Beispiel:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x + 1$$

$$f \circ g = f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$g \circ f = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1$$

## 1.6 Die inverse Abbildung (Umkehrfunktion)

Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine bijektive Funktion.

Die inverse Funktion  $g : Y \rightarrow X$  einer bijektiven Funktion  $f : X \rightarrow Y$  ist die Funktion, die jedem Element  $y$  der Zielmenge dessen eindeutig bestimmtes Urbildelement zuweist. (bei bijektiven Funktionen hat die Urbildmenge jedes Elements  $y$  genau ein Element).

$g(y) := x$ , eindeutig definiertes  $x \in X$ , mit  $f(x) = y$ . Dann ist definitionsgemäss  $(g \circ f)(x) = x$ , d.h.  $g \circ f = id_X$ . Die eindeutig definierte Abbildung  $g$

## KAPITEL 1. LOGIK UND UNTERLAGEN

wird (auch) mit  $f^{-1}$  bezeichnet und Umkehrfunktion von  $f$  genannt.

Für  $f \circ f^{-1}$ : Sei  $y \in Y$  und  $x$  erfülle  $f(x) = y$ . Dann ist  $(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$

$$f \circ f^{-1} = id_Y$$

### Beispiel

1.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2x + 3 \end{aligned}$$

Die Funktion ist bijektiv.

Die Umkehrfunktion ist gegeben durch

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x - 3}{2} \end{aligned}$$

2. Sei  $\mathbb{R}^+ = [0, \infty]$  die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen und

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

Dann ist  $f$  bijektiv und die Umkehrfunktion ist gegeben durch

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

**Verallgemeinerungen** Falls  $f : X \rightarrow Y$  *injektiv* ist, kann man die Umkehrabbildung  $f^{-1} : f(\mathbb{X}) \rightarrow \mathbb{X}$  definieren. Das heisst, die Funktion  $f^{-1}$  erfüllt: wenn  $f(x) = y$ , dann  $f^{-1}(y) = x$ .

Vorsicht:  $f^{-1} \circ f = id_{\mathbb{X}}$  aber  $f \circ f^{-1} = id_{f(\mathbb{X})}$  und  $f \circ f^{-1} = id_Y$  nur genau dann wenn  $f(X) = Y$ , d.h.  $f$  bijektiv ist.

## *KAPITEL 1. LOGIK UND UNTERLAGEN*



## Kapitel 2

# Reelle Zahlen, Euklidische Räume und Komplexe Zahlen

### 2.1 Elementare Zahlen

Natürliche Zahlen	$\mathbb{N}$	=	$\{0, 1, 2, \dots\}$	addieren und multiplizieren
	$\cap$			
Ganze Zahlen	$\mathbb{Z}$	=	$\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$	subtrahieren
	$\cap$			
Rationale Zahlen	$\mathbb{Q}$	=	$\left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$	dividieren

Viele Gleichungen haben keine Lösung in  $\mathbb{Q}$ .

Before set Z, can't read,  
page 22

#### Satz 2.1

Sei  $p \in \mathbb{N}$  eine Primzahl. Dann hat  $x^2 = p$  keine Lösung in  $\mathbb{Q}$ .

#### Beweis

Zum Erinnerung zwei Natürlichen Zahlen  $a$  und  $b$  sind teulfremd (oder relativ prim) wenn es keine natürliche Zahl ausser der Eins gibt, die beiden Zahlen teilt.

$$((a, b) = 1) \rightarrow \text{grösster gemeinsamer Teiler}$$

#### Indirekter Beweis

Wir nehmen an: es gibt  $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$  mit  $x^2 = p$ , wobei  $a, b$  teulfremd und  $\geq 1$  sind. Dann gilt

$$a^2 = pb^2$$

woraus folgt, dass  $p$   $a$  teilt, also ist  $a = pk$ ,  $k \in \mathbb{N}$  und somit

$$a^2 = p^2 k^2 = pb^2 \Rightarrow pk^2 = b^2$$

woraus folgt, dass  $p$   $b$  teilt.

## 2.2 Die Reellen Zahlen

Wir werden jetzt das System von Axiomen beschreiben, das die Menge der reellen Zahlen “eindeutig” charakterisiert.

Die Menge  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen ist mit zwei Verknüpfungen “+” (Addition) und “ $\cdot$ ” (Multiplikation) versehen, sowie mit einer Ordnungsrelation  $\leq$ . Die Axiome werden wie folgt gruppiert:

1.  **$(\mathbb{R}, +, \cdot)$  ist ein Körper**

Es gibt zwei Operationen (zweistellige Verknüpfungen)

- $+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(a, b) \mapsto a + b$
- $\times: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(a, b) \mapsto a \cdot b$

und zwei ausgezeichnete Elemente 0 und 1 in  $\mathbb{R}$ , die folgenden Eigenschaften haben:

Kommutativität	A1)	$x + y = y + x$
Assoziativität	A2)	$(x + y) + z = x + (y + z)$
Neutrales Element	A3)	$x + 0 = x = 0 + x$
Inverses Element	A4)	$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \text{ mit } x + y = 0 = y + x$
Komutivität	M1)	$x \cdot y = y \cdot x$
Assoziativität	M2)	$(xy)z = x(yz)$
Neutrales Element	M3)	$x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$
Inverse Element	M4)	$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0 \exists y \in \mathbb{R} \text{ mit } xy = 1 = yx$

und die Multiplikation ist verträglich mit der Addition im Sinne des Distributivitätsgesetz (D)

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x(y + z) = xy + xz$$

- $(\mathbb{R}, +)$  mit A1→A4 ist eine Abelsche Gruppe bezüglich der Addition
- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  mit A1→A4, M1→M4 und D ist ein Zahlkörper.

### Bemerkung 2.2

Eine Menge  $G$ , versetzt mit Verknüpfung  $+$  und dem neutralen Element 0, die den obigen Eigenschaften A2→A4 genügt, heisst Gruppe.

Eine Menge  $K$  versetzt mit Verknüpfung  $+, \cdot$  und Elementen  $0 \neq 1$ , die den obigen Eigenschaften A1→A4, M1→M4, D genügt heisst Körper.

### Folgerung 2.3

Seien  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

KAPITEL 2. REELLE ZAHLEN, EUKLIDISCHE RÄUME UND KOMPLEXE ZAHLEN

- $$\left. \begin{array}{l} \text{i) } a + b = a + c \Rightarrow b = c \text{ und } 0 \text{ ist eindeutig, d.h. falls } z \in \mathbb{R} \text{ der} \\ \text{Eigenschaften } a + z = a \ \forall a \in \mathbb{R} \text{ genügt, so folgt } z = 0 \\ \text{ii) } \forall a, b \in \mathbb{R}, \exists! \text{ (eindeutig bestimmtes) } x \in \mathbb{R} : a + x = b. \text{ Wir schreiben } x = b - a \text{ und } 0 - a = -a \text{ ist das additive Inverse zu } a \\ \text{iii) } b - a = b + (-a) \\ \text{iv) } -(-a) = a \\ \text{v) Falls } ab = ac \text{ und } a \neq 0 \Rightarrow b = c \text{ und } 1 \text{ ist eindeutig, d.h. falls} \\ x \in \mathbb{R} \text{ der Eigenschaften } ax = a \ \forall a \in \mathbb{R} \text{ genügt, so folgt } x = 1 \\ \text{vi) } \forall a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, \exists! x \in \mathbb{R} : ax = b. \text{ Wir schreiben } x = \frac{b}{a} \text{ und} \\ \frac{1}{a} = a^{-1} \text{ ist das multiplikativ Inverse zu } a. \\ \text{vii) Falls } a \neq 0 \Rightarrow (a^{-1})^{-1} = a \end{array} \right\} \text{Axiom 1 (Assoziativgesetz)}$$

### Beweis 2.3

- (a) Sei  $a + b = a + c$   
 $A4 \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R} : a + y = 0$   
 $a + b = a + c \Rightarrow y + (a + b) = y + (a + c)$   
 $\xrightarrow{A2} (y + a) + b = (y + a) + c$   
 $\Rightarrow 0 + b = 0 + c \xrightarrow{A3} b = c$   
 Nehmen wir an, dass es  $0' \in \mathbb{R}$  gibt, so dass  $x + 0' = x, \forall x \in \mathbb{R}$ , d.h. es gibt ein zweites neutrale Element für  $+$ .
- Dann  $0 + 0' = 0$  aber auch  $A3 \Rightarrow 0 + 0 = 0 \Rightarrow 0 + 0' = 0 + 0 \Rightarrow 0 = 0'$
- (b) Seien  $a, b \in \mathbb{R}$ , und sei  $y \in \mathbb{R}$  mit  $a + y = 0$ . Definieren wir  $x := y + b \Rightarrow a + x = a + (y + b) = (a + y) + b = 0 + b = b$   
 $\Rightarrow$  es gibt mindestens eine Lösung der Gleichung  $a + x = b$ . Von i) folgt, dass  $x$  eindeutig bestimmt ist  $a + x = b = a + x' \Rightarrow x = x'$
- (c) Seien  $x = b - a, y = b + (-a)$ . Wir wollen beweisen, dass  $x = y$ .

Aus i) wissen wir, dass  $b - a$  eine Lösung von  $a + x = b$

$$y + a = (b + (-a)) + a = b + ((-a) + a) = b + 0 = 0$$

ist  $\Rightarrow y$  ist auch eine Lösung.

Weil die Lösung von  $a + x = b$  ist eindeutig bestimmt, ist  $y = x$

- (d)
- (e)
- (f)
- (g)

## KAPITEL 2. REELLE ZAHLEN, EUKLIDISCHE RÄUME UND KOMPLEXE ZAHLEN

(h)  $\forall a \in \mathbb{R}, a \cdot 0 = 0$   
 $a \cdot 0 = a(0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0 \Rightarrow a \cdot 0 = 0$

(i)  $ab = 0 \Rightarrow a = 0$  oder  $b = 0$

Wir nehmen an:  $a \neq 0$  mit Inversen  $a^{-1}$ , ( $a^{-1}$  existiert mittels M4).  
 So folgt  $b = 1 \cdot b = (a^{-1} \cdot a) b = a^{-1}(a \cdot b) = a^{-1} \cdot 0 = 0$

?multipli? page 27  
middle to top

### 2. Ordnungsaxiome $\leq$

Auf  $\mathbb{R}$  gibt es eine Relation,  $\leq$ , genannte Ordnung, die folgenden Eigenschaften genügt

(a) Reflexivität:  $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x$

(b) Transitivität:  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$

(c) Identität:  $\forall x, y \in \mathbb{R}, (x \leq y)$  und  $(y \leq x) \Rightarrow x = y$

(d) Die Ordnung ist total:  $\forall x, y \in \mathbb{R}$  gilt entweder  $x \leq y$  oder  $y \leq x$

Die Ordnung ist konsistent mit  $+$ , und  $\cdot$ .

(a)  $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$

(b)  $x, y \geq 0 \Rightarrow xy \geq 0$

Mit  $\leq$  hat man auch  $\geq, <, >$ . Wir verzichten auf eine Auflistung aller Folgerungen und beschränken uns auf einige wichtigen Folgerungen.

### Folgerungen 2.4

i)  $x \leq 0$  und  $y \leq 0 \Rightarrow xy \geq 0$

ii)  $x \leq 0$  und  $y \geq 0 \Rightarrow xy \leq 0$

iii)  $x \leq y$  und  $z \geq 0 \Rightarrow xz \leq yz$

iv)  $1 > 0$

v)  $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0$

vi)  $0 < 1 < 2 < 3 < \dots$

vii)  $\forall x > 0 : x^{-1} > 0$

{Annahme:  $x^{-1} \leq 0$ . Nach Multiplikation mit  $x > 0$  folgt (mittels ii)  
 $1 = x^{-1} \cdot x \leq 0 \cdot x = 0$ }

### Bemerkung 2.5

What? page 28 bottom

$\leq$  auf  $\mathbb{R}$  genügt den obigen Eigenschaften. Die entscheidende weitere Eigenschaft von  $\mathbb{R}$  ist das.

### 3. Ordnungsvollständigkeit

Vollständigkeitsaxiom:

Seien  $A, B \subset \mathbb{R}$  nicht leere Teilmengen von  $\mathbb{R}$ , so dass  $a \leq b$  für alle  $a \in A, b \in B$ . Dann gibt es  $c \in \mathbb{R}$  mit  $a \leq c \leq b \quad \forall a \in A, b \in B$

Check for layout issues  
with title

## KAPITEL 2. REELLE ZAHLEN, EUKLIDISCHE RÄUME UND KOMPLEXE ZAHLEN

### Bemerkung 2.6

at? page 29 bottom

erfüllt diese Eigenschaft nicht!

Seien

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0, x^2 \leq 2\}$$

$$B = \{y \in \mathbb{Q} \mid y \geq 0, y^2 \geq 2\}$$

Dann gilt  $a \leq b \forall a \in A, b \in B$ . Aber ein  $c \in \mathbb{Q}$ , mit  $a \leq c \leq b$  würde dann  $c^2 = 2$  erfüllen! In Satz 2.1 haben wir gesehen dass  $x^2 = p$  keine Lösung in  $\mathbb{Q}$  hat.

Wir definieren jetzt für  $x, y \in \mathbb{R}$

$$\max\{x, y\} = \begin{cases} x & \text{falls } y \leq x \\ y & \text{falls } x \leq y \end{cases}$$

Insbesondere ist der Absolutbetrag einer Zahl  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|x|$

$$|x| := \max\{x, -x\}$$

Für diesen gilt folgender wichtiger Satz

### Satz 2.7

- i)  $|x + y| \leq |x| + |y|$  (Dreiecksungleichung)
- ii)  $|xy| = |x| |y|$

### Beweis 2.7

- i)  $x \leq |x|, -x \leq |x|$   
 $y \leq |y|, -y \leq |y|$   
und  $x + y \leq |x| + |y|, -(x + y) \leq |x| + |y|$   
woraus  $|x + y| \leq |x| + |y|$  folgt

- ii) ASK FOR BEWEIS

ASK FOR BEWEIS

### Satz (Young)

Für alle  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $\delta > 0$  gilt  $2|ab| \leq \delta a^2 + \frac{b^2}{\delta}$

## 2.3 Infimum und Supremum

Im Zusammenhang mit der Ordnung führen wir einige wichtige Definitionen ein:

### Definition 2.8

Sei  $X \subset \mathbb{R}$  eine Teilmenge

- a)  $X$  ist nach oben beschränkt, falls es  $c \in \mathbb{R}$  gibt  $x \leq c, \forall x \in X$ . Jedes derartige  $c$  heisst eine obere Schranke für  $X$ .
- b)  $X$  ist nach unten beschränkt, falls es  $c \in \mathbb{R}$  gibt, mit  $x \geq c, \forall x \in X$ . Jedes derartige  $c$  heisst untere Schranke für  $X$ .
- c)  $X$  ist beschränkt falls es nach oben und unten beschränkt ist.
- d) Ein Element  $a \in X$  ist ein maximales Element (oder Maximum) von  $X$  falls  $x \leq a, \forall x \in X$ . Falls ein Maximum (bzw. Minimum) existiert, wird es mit  $\max X$  ( $\min X$ ) bezeichnet. Falls  $X$  keine obere Schranke hat, ist  $X$  nach oben unbeschränkt (analog für obere Schranke).

### Beispiel 2.9

WHAT? Page 32 top

1.  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$  ist nach oben unbeschränkt.  $A$  ist nach unten beschränkt. Jedes  $\leq 0$  ist eine untere Schranke.
2.  $B = [0, 1]$  ist nach oben und nach unten beschränkt.
  - 0 ist ein Minimum von  $B$
  - 1 ist ein Maximum von  $B$
3.  $C = [0, 1)$  ist nach oben und nach unten beschränkt,  $0 = \min(A)$ .  $C$  hat kein Maximum.

Folgender Satz ist von zentraler Bedeutung und eine Folgerung des Ordnungsvollständigkeitsaxioms.

### Satz 2.10

- i) Jede nicht leere, nach oben beschränkte Teilmenge  $A \subset \mathbb{R}$  besitzt eine kleinste obere Schranke  $c$ . Die kleinste obere Schranke  $c$  ist eindeutig bestimmt und heisst Supremum von  $A$  und wird mit  $\sup A$  bezeichnet.
- ii) Jede nicht leere, nach unten beschränkte Teilmenge  $A \subset \mathbb{R}$  besitzt eine grösste untere Schranke  $d$  und heisst Infimum von  $A$  und wird mit  $\inf A$  bezeichnet.

### Beweis

- i) Sei  $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$  nach oben beschränkt. Sei  $B := \{b \in \mathbb{R} \mid b \text{ ist obere Schranke für } A\}$ . Dann  $B \neq \emptyset$  und  $a \leq b, \forall a \in A, b \in B$

Mit dem Ordnungsvollständigkeitsaxiom folgt die Existenz einer Zahl  $c \in \mathbb{R}$  mit  $a \leq c \leq b, \forall a \in A, b \in B$ .

Es ist klar, dass  $c$  eine obere Schranke für  $A$  ist. Also  $c \in B$ . Da  $c \leq b, \forall b \in B$ , ist  $c$  die kleinste obere Schranke für  $A$ . Hiermit  $c$  ist eindeutig

## KAPITEL 2. REELLE ZAHLEN, EUKLIDISCHE RÄUME UND KOMPLEXE ZAHLEN

bestimmt.

(Seien  $c$  und  $c'$  zwei Suprema von  $A$ ,  $c$  ist die kleinste obere Schranke und  $c'$  ist eine obere Schranke  $\Rightarrow c \leq c'$ . Das gleiche Argument mit  $c, c'$  vertauscht liefert  $c' \leq c$ )

- ii) Sei  $A$  eine nach unten beschränkte, nicht leere Menge. Sei  $-A := \{-x \mid x \in A\}$  die Menge der additiven Inversen von  $A$ . Dann  $-A \neq \emptyset$  und nach oben beschränkt. i)  $\Rightarrow \exists s = \sup(-A) \Rightarrow -s$  ist das Infimum von  $A$

limenet: Why enumerate for only one item??

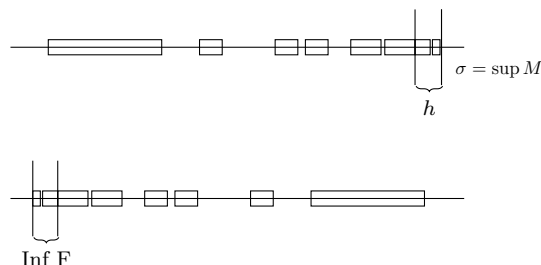
### Korollar 2.11

1. Falls  $E \subset F$  und  $F$  nach oben beschränkt ist, gilt  $\sup E \leq \sup F$
2. Falls  $E \subset F$  und  $F$  nach unten beschränkt ist, gilt  $\inf F \leq \inf E$
3. Falls  $\forall x \in E, \forall y \in F$  gilt  $x \leq y$ , dann folgt  $\sup E \leq \inf F$
4. Seien  $E, F \neq \emptyset, E, F \subset \mathbb{R}, h \in \mathbb{R}, h > 0$

page is clipped, page 34 bottom

- (i) Falls  $E$  ein Supremum besitzt  $\Rightarrow \exists x \in E$  mit  $x > \sup E$
- (ii) Falls  $E$  ein Infimum besitzt  $\Rightarrow \exists y \in E: y < \inf E + h$ . Das Supremum,  $\sup X = \sigma$  der Menge  $X$  ist folgendermassen charakterisiert: Es gibt in  $X$  keine Zahlen  $> \sigma$ ; aber für jede Toleranz  $h > 0$  gibt es in  $X$  Zahlen  $> \sigma - h$

can't read, is it E-h? page 34 bottom



Es gibt in  $X$  keine Zahlen  $< \inf X$  = aber für jede Toleranz  $h > 0$  gibt es in  $X$  Zahlen  $< \inf X + h$

faded color, can't read, page 34.1 middle to bottom

- (iii) Sei  $E + F = \{e + f : e \in E, f \in F\}$ . Falls  $E$  und  $F$  ein Supremum besitzen  $\Rightarrow E + F$  besitzt ein Supremum und  $\sup(E + F) = \sup(E) + \sup(F)$ . (Analog mit Infimum)

### Beweis

Ask for full Beweis!!

### Beispiel

1.  $E = (+\infty, 2) \subset F(-\infty, 4]$   
 $\sup E = 2, \sup F = 4 = \max F$   
 $E$  hat kein Maximum:  $\sup E \leq \sup F$

2.  $G : [4, 5) \subset H = (3, 6)$   
 $\min E = \inf G = 4 \geq \inf H = 3$
3.  $K = (3, \infty)$ ,  $E = (-\infty, 2)$   
 $\forall x \in E, y \in K$  gilt  $x \leq y$   
 $2 = \sup E \leq 3 = \inf K$
4.  $A\{\sin x \mid x \in \mathbb{R}\}$   
 $\inf A = -1 = \min A$   
 $\sup A = 1 = \max A$
5.  $A = \{(1 + \frac{1}{n})^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Wir werden sehen, dass  $A$  nach unten und nach oben beschränkt ist.  
 $\inf A = \min A = 2$ ,  $\sup A = e = 2.718 \dots$  Vereinbarung  
Für nach oben unbeschränkte Mengen  $A \neq \emptyset$  setzen wir  $\sup A = \infty$ .  
Analog für nach unten unbeschränkte Menge  $\emptyset \neq A$  setzen wir  $\inf A = -\infty$

Check for better layout

Der folgende Satz zeigt, wie die Ordnungsvollständigkeit von  $\mathbb{R}$  die Lösbarkeit gewisser Gleichungen in  $\mathbb{R}$  garantiert.

### Satz 2.12

Für jedes  $x > 0$  gibt es genau ein  $y > 0$  mit  $y^2 = x$ . Diese Lösung wird mit  $\sqrt{x}$  bezeichnet.

(Im Allgemeinen: Für jedes  $x > 0$  und  $n \geq 1$ ,  $n \in \mathbb{R}$  gibt es genau ein  $y > 0$  mit  $y^n = x$ . Diese Lösung wird mit  $\sqrt[n]{x}$  bezeichnet)

### Beweis

Sei  $x > 1$ , und  $A := \{z \in \mathbb{R} \mid z > 0 \text{ mit } z^2 \leq x\}$ . Dann ist  $A$  nach oben beschränkt und  $A \neq \emptyset (1 \in A)$ .  $\Rightarrow A$  besitzt ein Supremum.

Sei  $y := \sup A$ . Wir zeigen, dass  $y^2 = x$

- Schnitt 1: Annahme  $y^2 < x$ .

Sei  $0 \leq h \leq 1$ . Wir nehmen an:

$$\begin{aligned} (y+h)^2 &= y^2 + 2hy + h^2 \\ &= y^2 + h(2y+h) \\ &\leq y^2 + h(2y+1) \\ &= y^2 + h((y+1)^2 - y^2) \end{aligned}$$

Weil  $y^2 < x$  ist,  $\frac{x-y^2}{(y+1)^2-y^2} > 0$  und daher gibt es  $h \in \mathbb{R}$ ,  $h > 0$ ,  
 $h \leq \frac{x-y^2}{(y+1)^2-y^2}$  (sei  $h = \min\{1, \frac{x-y^2}{2x+1}\}$ )

Für solche  $h$  gilt

$$(y+h)^2 \leq y^2 + \left( \frac{x-y^2}{(y+1)^2-y^2} \right) ((y+1)^2 - y^2) =$$

Also  $y+h \in A$  und  $y+h > y$ . Ein Widerspruch:  $y$  ist eine obere Schranke für  $A$ , d.h.,  $z < y$   
 $\Rightarrow y^2 \geq x$  Analog beweist man  $y^2 \leq x$

chopped result, page 35.1



## KAPITEL 2. REELLE ZAHLEN, EUKLIDISCHE RÄUME UND KOMPLEXE ZAHLEN

- Schnitt 2: Annahme  $y^2 > x$   
Sei  $h = \frac{y^2 - x}{2y} \neq 0$

$$(y - h)^2 = y^2 - 2hy + h^2 > y^2 - 2hy = y^2 - (y^2 - x) = x$$

$\Rightarrow y - h$  ist eine obere Schranke für  $A$

Chopped, page 35.2 top

( $\forall z \in A, z^2 \leq x$ . Da  $(y - h)^2 > x$  ist,  $(y - h)^2 > x \geq z^2$ . Damit  $y - h > z, \forall z \in A$ )

Aber  $y - h < y$ , Widerspruch zur Minimalität von  $y$ .

Falls  $0 < x < 1$ , dann  $\frac{1}{x} > 1$

$\Rightarrow \exists u \in \mathbb{R}$ , mit  $u^2 = \frac{1}{x}$

Somit  $(\frac{1}{u})^2 = x$  und  $y = \frac{1}{u}$  ist eine Lösung von  $y^2 = x$ .

Zum Abschluss dieses Themas erwähnen wir noch eine wichtige Eigenschaft der reellen Zahlen

### Satz 2.13 (Archimedische Eigenschaft)

Zu jeder Zahl  $0 < b \in \mathbb{R}$  gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $b < n$ .

### Beweis (Indirekt)

Andernfalls gibt es  $b \in \mathbb{R}$  mit  $n \leq b, \forall n \in \mathbb{N}$

$$(\neg(\exists n \in \mathbb{N} : b < n)) = (\forall n \in \mathbb{N} : b \geq n)$$

Dann ist  $b$  eine obere Schranke für  $\mathbb{N}$  und es existiert  $c = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$ . Mit  $n \in \mathbb{N}$  ist jedoch auch  $n + 1 \in \mathbb{N}$ .

Also:  $n + 1 \leq c, \forall n \in \mathbb{N}$ . Somit folgt  $n \leq c - 1, \forall n \in \mathbb{N}$  ein Widerspruch zur Minimalität von  $c$ .

Chopped content, page 36 bottom

### Korollar 2.14

1. Seien  $x > 0$  und  $y \in \mathbb{R}$  gegeben. Dann gibt es  $n \in \mathbb{Z}$  mit  $y < nx$
2. Falls  $x, y, a \in \mathbb{R}$  die Ungleichheiten  $a \leq x \leq a + \frac{y}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$  erfüllen, ist  $x = a$ .

### Beweis

1. ASK FOR BEWEIS

Ask for beweis

2.  $a < x \Rightarrow x - a > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$   
 $\Rightarrow x > a + \frac{y}{n}$  Widerspruch

Wir wissen, dass gewisse Gleichungen in  $\mathbb{R}$  lösbar sind: z.B.  $y^2 = a, \forall a > 0$ . Aber man kann nicht alle Gleichungen in  $\mathbb{R}$  lösen, z.B.  $x^2 + 1 = 0$ . Da für alle  $x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ , ist  $x^2 = -1$  nicht lösbar. Um eine Lösung für diese Gleichung zu finden, müssen wir die komplexen Zahlen betrachten.

Zuerst, werden wir die Euklidischen Räume  $\mathbb{R}^n$  einführen

## 2.4 Euklidische Räume

Mit der Mengentheorie können wir das kartesische Produkt zweier Mengen bilden; es lässt sich ohne Schwierigkeiten zu endlichen Familien  $A_1, \dots, A_n$  verallgemeinern; nämlich

$$A_1 \times \dots \times A_n := \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in A_i\}$$

ist die Menge der geordneten  $n$ -Tupel von Elementen aus  $A_1, \dots, A_n$ .

Für beliebige  $n \geq 1$  betrachten wir  $\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n\text{-mal}}$  und untersuchen dessen Struktur. Auf  $\mathbb{R}^n$  haben wir zwei Verknüpfungen

1.  $+: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  Addition.

$$\left( \underbrace{(x_1, \dots, x_n)}_x, \underbrace{(y_1, \dots, y_n)}_y \right) \rightarrow \underbrace{(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)}_{\text{Komponentenweise Addition}}. \text{ Dann ist } (\mathbb{R}^n, +)$$

eine Abelsche Gruppe, mit  $0 := (0, \dots, 0)$  als neutrales Element

2.  $\cdot: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  Skalarmultiplikation.

$$(\lambda, x) \rightarrow \lambda \cdot x := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n). \text{ Dann gelten die folgenden Eigenschaften:}$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

- (a) Distributivität:  $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
- (b) Distributivität:  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
- (c) Assoziativität:  $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$
- (d) Einzelelement:  $1 \cdot x = x$

### Definition 2.15

Eine Menge  $\mathbb{V}$  mit  $+, \cdot$  und  $0 \in \mathbb{V}$ , so dass  $(\mathbb{V}, +)$  eine Abelsche Gruppe mit neutralem Element  $0$  ist und zudem (a)-(d) gelten, nennt sich ein Vektorraum über den Körper  $\mathbb{R}$  und seine Elemente heißen Vektoren

Also ist  $\mathbb{R}^n$  ein Vektorraum. In der linearen Algebra führt man dann Begriffe wie Basis usw. ein. Die Standardbasis von  $\mathbb{R}^n$  ist die Menge  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  wobei  $e_i := \{0, \dots, 0, 1, \dots, 0\}$

Jeder Vektor  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  besitzt eine eindeutige Darstellung  $x = \sum x_i e_i$  bezüglich der Standardbasis.

### Definition 2.16

1. Das Skalarprodukt zweier Vektoren  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$  ist die durch

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

## KAPITEL 2. REELLE ZAHLEN, EUKLIDISCHE RÄUME UND KOMPLEXE ZAHLEN

definierte reelle Zahl

$\langle \cdot, \cdot \rangle = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (orthogonal)

2. Falls  $\langle x, y \rangle = 0$  heissen  $x$  und  $y$  senkrecht aufeinander.  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  besitzt folgende Eigenschaften

(a) Symmetrie:  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

(b) Linearität:  $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle$

(c) Positivität:  $\langle x, x \rangle \geq 0$  mit Gleichheit genau dann, wenn  $x = 0$

### Definition 2.17

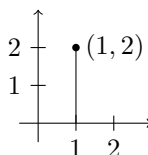
Die Norm  $\|x\|$  eines Vektors ist:

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

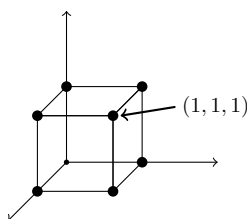
und wird oft als Länge interpretiert.

### Beispiel 2.18

- $\|(1, 2)\| = \sqrt{1 + 4}$



- $\|(1, 1, 1)\| = \sqrt{3}$



- $\|e_i\| = 1, \langle e_i, e_j \rangle = 0. e_i \perp e_j$   
 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  ist eine orthonormale Basis. Die Vektoren einer orthonormalen Basis sind orthogonal zueinander und normiert (die Länge ist gleich 1).

Die erste wichtige Eigenschaft eines Skalarprodukts ist

**Satz 2.19 (Cauchy-Schwarz)**

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$  gilt  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$  und

$$|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\| \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : x = \lambda y$$

Die Euklidische Norm hat die Eigenschaften

**Satz 2.20**

- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$  (Homogenität)
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (Dreiecksungleichung)

**Beweis**

ASK FOR BEWEIS

- ASK FOR BEWEIS

•

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \langle x, x + y \rangle + \langle y, x + y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + 2 \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &\leq \|x\|^2 + 2 \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2 \|y\| \|x\| + \|x\|^2 \end{aligned}$$

## 2.5 Die Komplexen Zahlen

Da für alle  $x \in \mathbb{R}$   $x^2 \geq 0$ , gibt es  $\sqrt{-1}$  nicht als reelle Zahl. Seit dem 18. Jahrhundert haben Mathematiker mit Ausdrücken wie  $a + b\sqrt{-1}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  gerechnet und auf sie die in  $\mathbb{R}$  geltenden Rechenregel angewandt, z.B.

$$(1 + 2\sqrt{-1})(1 - 2\sqrt{-1}) = 1^2 + 2^2 (\sqrt{-1})^2$$

Allgemein:

$$\begin{aligned} (a + b\sqrt{-1})(c + d\sqrt{-1}) &= ac + ad\sqrt{-1} + bc\sqrt{-1} + bd\sqrt{-1} \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)\sqrt{-1} \end{aligned}$$

Das Problem ist hier, dass  $\sqrt{-1}$  keinen präzisen mathematischen Sinn hat und dass deshalb auch nicht klar ist, was “+” in “ $a + b\sqrt{-1}$ ” heissen soll.

Das Problem ist wie folgt gelöst:

Chopped content, page  
42 middle

Als Modell von “ $a + b\sqrt{-1}$ ”,  $\mathbb{C}$ , nehmen wir  $\mathbb{R}^2$ . Wir haben schon die Addition von Vektoren und das neutrale Element. Wir definieren dann die Multiplikation

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \rightarrow x \cdot y$$

wobei  $x \cdot y = (ac - bd, ad + bc)$ ,  $x = (a, b)$ ,  $y = (c, d)$ . Dann erfüllen “+” und “.” folgende Eigenschaften:

## KAPITEL 2. REELLE ZAHLEN, EUKLIDISCHE RÄUME UND KOMPLEXE ZAHLEN

- Assoziativität:  $((a, b)(c, d))(e, f) = (a, b)((c, d)(e, f))$
- Neutrales Element:  $(1, 0)(a, b) = (a, b)$
- Kommutativ:  $(a, b)(c, d) = (c, d)(a, b)$
- Inverses Element  $\forall (a, b) \neq (0, 0)$  in  $\mathbb{R}^2 \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2$  mit  $(a, b)(x, y) = (1, 0)$
- Distributivität:  $((a, b) + (c, d)) \cdot (e, f) = (a, b)(e, f) + (c, d)(e, f)$

### Definition 2.21

Der Körper der komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  ist  $\mathbb{R}^2$  versehen mit “+”, “·”,  $0 = (0, 0)$  und  $(1, 0) = 1$

### Bemerkung 2.22

$z^2 + 1 = 0$  hat in  $\mathbb{C}$  eine Lösung. Nämlich ist  $(0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -(1, 0) = 1$ . Wir führen für  $(0, 1)$  die Bezeichnung “ $i$ ” ein, welches imaginäre Einheit heisst.

Also ist  $i^2 = -1$ . Jede komplexe Zahl  $z = (x, y)$  lässt sich dann wie folgt darstellen:

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x \cdot 1 + y \cdot i$$

In den Rechnungen lässt man oft das 1 in  $x \cdot 1$  fallen und schreibt  $z = x + yi$

### Definition 2.22

1. Sei  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ 
  - $\operatorname{Re} z := x$  heisst der Realteil
  - $\operatorname{Im} z := y$  heisst der Imaginärteil
2. Die zu:  $z = x + iy$  konjugierte Zahl ist  $\bar{z} = x - iy$
3. Wir definieren die Norm von  $z$  als  $\|z\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

### Satz 2.23

- (i)  $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- (ii)  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
- (iii)  $z \cdot \bar{z} = \|z\|^2 \cdot 1$
- (iv)  $\|z_1 \cdot z_2\| = \|z_1\| \cdot \|z_2\|$

### Beweis

ASK FOR BEWEIS

ASK FOR BEWEIS

## KAPITEL 2. REELLE ZAHLEN, EUKLIDISCHE RÄUME UND KOMPLEXE ZAHLEN

### Abkürzung

$$|z| := ||z||$$

### Bemerkung 2.24

Wir können  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{C}$  “einbetten” mittels  $\mathbb{R} \ni x \rightarrow (x, 0) \in \mathbb{C}$ . Sei  $\mathbb{C}_0 = \{(x, y) \in \mathbb{C} \mid y = 0\} = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ . Die Abbildung  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}_0, x \rightarrow (x, 0)$  ist eine Bijektion.

Diese Identifikation von  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}_0$  ist verträglich mit den Operationen in  $\mathbb{R}$  und in  $\mathbb{C}$ , d.h.

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

### Polarform

Not sure if this should be a title

Als Polarkoordinaten in der Ebene führen wir  $(r, \phi)$  ein



$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi & y &= r \sin \phi \\ z &= r (\cos \phi + i \sin \phi) \\ r &= |z| \end{aligned}$$

### Definition

Wir definieren (nach Euler)

$$e^{i\phi} := \cos \phi + i \sin \phi$$

$$z = re^{i\phi} = |z| e^{i\phi}$$

Where does the definition end??

Aus die

??Additions?? page 45 bottom

- $\cos(\phi + \psi) = \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \sin \psi$
- $\sin(\phi + \psi) = \sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \psi$

In der Ebene  $\mathbb{R}^2$  stehen uns neben den kartesischen Koordinaten  $x, y$  noch die Polarkoordinaten  $r, \phi$  zur Verfügung. Für beliebiges  $z = x + iy \neq 0$

## KAPITEL 2. REELLE ZAHLEN, EUKLIDISCHE RÄUME UND KOMPLEXE ZAHLEN



$$e^{i\phi} = 1 \Leftrightarrow \phi = 2k\pi$$

$$\cos \phi + i \sin \phi = 1 \Leftrightarrow \cos \phi = 1 \text{ und } \sin \phi = 0$$

$$\Leftrightarrow \phi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} e^{i\theta} \cdot e^{i\phi} &= (\cos \theta + i \sin \theta) (\cos \phi + i \sin \phi) \\ &= \underbrace{\cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi}_{\cos(\theta+\phi)} + i \underbrace{(\cos \theta \sin \phi + \sin \theta \cos \phi)}_{\sin(\theta+\phi)} \\ &= e^{i(\theta+\phi)} \end{aligned}$$

folgt  $e^{i\phi} e^{i\psi} = e^{i(\phi+\psi)}$

Somit folgt für  $z = re^{i\theta}$ ,  $\omega = se^{i\phi} \in \mathbb{C}$  die einfache Darstellung  $z\omega = rse^{i(\theta+\phi)}$ ,

$$\frac{z}{\omega} = \left(\frac{r}{s}\right) e^{i(\theta-\phi)}$$

Die polare Darstellung ist in Berechnungen sehr nützlich, insbesondere um das Produkt und den Quotienten zu berechnen

### Beispiel

1.

$$z = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\omega = \sqrt{3} - i = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

$$\frac{(\sqrt{3} - i)^3}{(1 + i)^2} = \frac{\omega^3}{z^4} = \frac{8e^{-i\frac{\pi}{2}}}{4e^{i\pi}} = 2e^{-\frac{3\pi}{2}i} = 2e^{\frac{\pi}{2}i} = 2i$$

2. Die Polarform ist auch sehr nützlich um die Wurzel einer komplexen Zahl zu berechnen. Sei  $\omega \in \mathbb{C}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Wir möchten die Gleichung  $z^n = \omega$  lösen.

$$\omega = |\omega| e^{i\phi}$$

$$\begin{aligned} z^n = \omega &= |\omega| e^{i\theta} \Rightarrow z = |\omega|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{(\theta+2k\pi)}{n}} \\ &= |\omega| e^{i(\theta+2k\pi)} \end{aligned}$$

**Beispiel**

is this inside the other  
Beispiel or out??

$$z^3 = 1 \Rightarrow z^3 = (e^{2\pi i k})^{\frac{1}{3}} \in \{e^{i\pi \frac{2k}{3}} : k = 0, 1, 2\} = \{1, e^{2i\frac{\pi}{3}}, e^{4i\frac{\pi}{3}}\}$$

Allgemeine Formel der Einheitswurzel  $z = \{e^{i\frac{2\pi k}{n}} : k = 0, 1, \dots, n-1\}$

**Bemerkung**

- (a) Es gibt keine mit den Körperoperationen verträgliche Ordnung in  $\mathbb{C}$
- (b) Hingegen ist  $\mathbb{C}$  im Unterschied zu  $\mathbb{R}$  algebraisch vollständig. Nicht nur die Gleichung  $x^2 + 1 = 0$  hat in  $\mathbb{C}$  eine Lösung, sondern es gilt der fundamentale Satz der Algebra. Es sagt, dass jedes Polynom  $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$  vom Grad  $n \geq 1$  hat in  $\mathbb{C}$  genau  $n$  Nullstellen.



## Kapitel 3

# Folgen und Reihen (Der Limes Begriff)

### 3.1 Folgen, allgemeines

**Definition 3.1**

Eine Folge reeller Zahlen ist eine Abbildung  $a : \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  wobei wir das Bild von  $n \geq 1$  mit  $a_n$  (statt  $a(n)$ ) bezeichnen.

Eine Folge wird dann meistens mit  $(a_n)_{n \geq 1}$ , daher mit der geordneten Bildmenge bezeichnet.

Folgen können auf verschiedene Arten gegeben sein.

**Beispiel 3.2**

1.  $a_n = \frac{1}{n}, n \geq 1$
2.  $a_1 = 0.9, a_2 = 0.99, \dots, a_n = \underbrace{0.99\dots9}_{n\text{-mal}}$
3.  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, n \geq 1$
4. (Rekursiv) Sei  $d > 0$  eine reelle Zahl  $a_1, \dots, a_{n+1} := \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{d}{a_n}\right), n \geq 1$   
z.B.  $d = 2, a_1 = 1, a_2 = \frac{3}{2}, a_3 = \frac{17}{12}, a_4 = \dots$
5. Fibonacci Zahlen.  $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \forall n \geq 2$

**Definition 3.3**

Eine Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  heißt beschränkt falls die Teilmenge  $\{a_n : n \geq 1\} \subseteq \mathbb{R}$  beschränkt ist. d.h. Es gibt  $c \in \mathbb{R} (c \geq 0)$  so dass  $|a_n| \leq c, \forall n \geq 1$

## 3.2 Grenzwert oder Limes eine Folge. Ein zentraler Begriff

### Definition 3.4

Eine Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  konvergiert gegen  $a$  wann für jedes  $\varepsilon > 0$  ein Index  $N(\varepsilon) \geq 1$  gilt so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon, \forall n > N(\varepsilon)$$

### Definition 3.4 (Version 2)

Eine Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  konvergiert gegen  $a \in \mathbb{R}$  falls für jedes  $\varepsilon > 0$  die Menge der Indizes  $n \geq 1$  für welcher  $a_n \notin (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  endlich ist.

$$(\forall \varepsilon > 0, \#\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \notin (a - \varepsilon, a + \varepsilon)\} < \infty)$$

### Äquivalenz beider Definitionen

Is this supposed to be a title?

(2)  $\Rightarrow$  (1)

Sei für  $\varepsilon > 0$

$$M(\varepsilon) := \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \notin (a - \varepsilon, a + \varepsilon)\} = \{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - a| \geq \varepsilon\}$$

Da  $M(\varepsilon)$  endlich ist, ist es nach oben beschränkt. Es gibt also  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  so dass  $\forall n \in M(\varepsilon), n \leq N(\varepsilon) - 1$ . Insbesondere gilt  $\forall n \geq N(\varepsilon), n \notin M(\varepsilon)$  und daher  $|a_n - a| < \varepsilon$ .

(1)  $\Rightarrow$  (2)

$$M(\varepsilon) = \{n : |a_n - a| \geq \varepsilon\} \subset [0, N(\varepsilon) - 1]$$

Also endlich.

Falls die Eigenschaften in Definition 3.4 zutrifft, dann schreibt man

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ oder } a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$$

Die Zahl  $a$  nennt sich Grenzwert oder Limes der Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$ . Eine Folge heisst konvergent falls sie einen Limes besitzt, andernfalls heisst sie divergent.

### Bemerkung 3.5

1. Falls  $(a_n)_{n \geq 1}$  konvergent ist der Limes eindeutig bestimmt

### Beweis

Seien  $a$  und  $b$  Grenzwerte von  $(a_n)_{n \geq 1}$ . Sei  $\varepsilon = \left| \frac{b-a}{3} \right| > 0$ , dann gibt es  $N_1, N_2$  so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N_1$$

### KAPITEL 3. FOLGEN UND REIHEN (DER LIMES BEGRIFF)

$$|a_n - b| < \varepsilon \quad \forall n > N_2$$

Also  $\forall n \geq \max\{N_1, N_2\}$

$$(a - b) \cong |(a - a_n) + (a_n - b)| < 2\varepsilon = \frac{2}{3} |b - a|$$

### Binomischen Lehrsatz

Für beliebige Zahlen  $a, b$  und  $n \in \mathbb{N}$  ist

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

2. Falls  $(a_n)_{n \geq 1}$  konvergent ist,  $\{a_n : n \geq 1\}$  beschränkt: Sei  $\varepsilon = 1$ ,  $\lim a_n = a$  und  $N_0$  mit

$$|a_n - a| \leq 1 \quad \forall n > N_0$$

Dann ist  $\forall n \quad |a_n| \geq \max\{|a| + 1, |a_j|, 1 \leq j \leq N_0\}$

### Beispiel 3.6

- Sei  $a_n = \frac{1}{n}, n \geq 1$ . Dann gilt  $\lim a_n = 0$ 
  - Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann  $\frac{1}{\varepsilon} > 0$ . Sei  $n_0 \in \mathbb{N}$ ,  $n_0 \geq 1$  mit  $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$  (Archimedische Eigenschaft, Satz 2.13)

Dann gilt für alle  $n \geq n_0$ ,  $\frac{1}{\varepsilon} < n_0 \leq n \Rightarrow \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon, \forall n \geq n_0$

- Sei  $0 < q < 1$  und  $a_n := q^n$ ,  $n \geq 1$ . Dann gilt  $\lim a_n = 0$  ( $a_n$  konvergiert gegen 0)

Cannot read, page 54 top

### Beweis

Zu beweisen

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$$

Should it be  $\in \mathbb{R}??$

$$\forall n \geq N_0 : q^n < \varepsilon$$

Die Idee ist zu zeigen dass  $\frac{1}{q^n}$  sehr Gross wird und deswegen  $q^n$  sehr klein wird. Setzen wir  $\frac{1}{q} = 1 + \delta$  mit  $\delta > 0$  ( $1 < 1 \Rightarrow \frac{1}{q} > 1$ )

$$\frac{1}{q^n} = \left( \frac{1}{q} \right)^n = (1 + \delta)^n = 1 + n\delta + \binom{n}{2} \delta^2 + \dots + \delta^n \geq 1 + n\delta > n\delta, \forall n \in \mathbb{N}$$

also

$$0 < q^n < \frac{1}{n\delta}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Sei jetzt  $\varepsilon > 0$ , wähle  $N_0 = N_0(\varepsilon)$  mit  $\frac{1}{\varepsilon\delta} < N_0 \Rightarrow \frac{1}{N_0\delta} < \varepsilon$

$$\forall n > N_0 \quad 0 < q^n \leq \frac{1}{n\delta} < \frac{1}{N_0\delta} < \varepsilon$$

### KAPITEL 3. FOLGEN UND REIHEN (DER LIMES BEGRIFF)

3.  $\sqrt[n]{n}$ ,  $\lim a_n = 1$ . Klar:  $n \geq 1$  also  $\sqrt[n]{n} \geq 1$   
Gegeben ein  $\varepsilon > 0$ , wollen wir  $n$  so gross wählen, dass

$$\sqrt[n]{n} - 1 < \varepsilon$$

das heisst,  $n < (1 + \varepsilon)^n$ . Wir entwickeln

$$(1 + \varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \binom{n}{2}\varepsilon^2 + \dots + \varepsilon^n$$

can't read last element  
of the expansion

$\varepsilon$  ist klein aber fixiert.

Für  $n$  sehr gross wird  $1 + n\varepsilon$  nie grösser als  $n$  sein. Wir versuchen unsere Glück mit

$$\binom{n}{2}\varepsilon^2 \text{ term}$$

$$\binom{n}{2}\varepsilon^2 = \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2$$

Wir benutzen also  $(1 + \varepsilon)^n \geq \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2$ . Wir wollen  $n$  so wählen dass

$$\frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 > n$$

d.h.  $n - 1 > \frac{2}{\varepsilon^2}$  oder  $n > 1 + \frac{2}{\varepsilon^2}$

Setzen wir  $N_0 := \left(1 + \frac{2}{\varepsilon^2}\right) + 1$ . Dann gilt für  $\forall n > N_0$

$$(1 + \varepsilon)^n > n \geq 1$$

$$\Rightarrow 1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + \varepsilon$$

$$\Rightarrow -\varepsilon < 0 \leq \sqrt[n]{n} - 1 \leq \varepsilon \Rightarrow |\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon, \forall n > N_0$$

4. Nicht alle Folgen sind konvergent. Es gibt zwei verschiedene Verhältnissen einer divergenten Folge

$$a_n = (-1)^n \Rightarrow \{1, -1, \dots\} \text{ beschränkt aber nicht konvergent}$$

5.  $a_n = n$  unbeschränkt, divergent.

#### Beispiel 3.7

Seien  $p \in \mathbb{N}$ ,  $0 < q < 1$ . Dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p q^n = 0$ . Dass heisst Exponentialfunktion wächst schneller als jede Potenz (Wann  $x$  genügend Gross ist,  $a^x > x^b$ )

### Beweis

Der Trick ist folgender

$$n^p q^n = \left( n^{\frac{p}{n}} \cdot q \right)^n = \left( (\sqrt[n]{n})^p \left( q^{\frac{1}{p}} \right)^p \right)^n$$

Wir werden Beispiel 3.6 (2.), (3.) benutzen.

(d.h.  $\lim \sqrt[n]{n} = 1$   $\lim r^n = 0, 0 < r < 1$ )

Da  $\lim \sqrt[n]{n} = 1, \forall \eta > 0, \exists N_0(\eta)$

$$\sqrt[n]{n} < 1 + \eta, n > N_0(\eta)$$

Wir wählen  $\eta > 0$  so dass  $q^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{(1+\eta)^2}$ . Dann

$$\sqrt[n]{n} \cdot q^{\frac{1}{p}} \leq \frac{(1+\eta)}{(1+\eta)^2} = \frac{1}{1+\eta} \quad \forall n > N_0(\eta)$$

Wobei

$$\forall n > N_0(\eta)$$

$$a_n = \left( \sqrt[n]{n} q^{\frac{1}{p}} \right)^{pn} < r^n$$

mit

$$r := \left( \frac{1}{1+\eta} \right)^p, r < 1$$

Sei jetzt  $\varepsilon > 0$ . Da  $\lim r^n = 0, \exists N_1 = N_1(\varepsilon), \forall n > N_1(\varepsilon), r^n < \varepsilon$

Für  $n > \max\{N_0(\eta), N_1(\varepsilon)\}, a_n < r^n < \varepsilon \Rightarrow \lim a_n = \lim n^p q^n = 0$

## 3.3 Konvergenzkriterien

Mit konvergenten Folgen kann man wie folgender Satz zeigt.

Can't read, page 59 top

### Satz 3.8

Seien

### *KAPITEL 3. FOLGEN UND REIHEN (DER LIMES BEGRIFF)*

## Kapitel 4

# Stetigkeit

## *KAPITEL 4. STETIGKEIT*



## Kapitel 5

# Differentialrechnung auf $\mathbb{R}$

*KAPITEL 5. DIFFERENTIALRECHNUNG AUF  $\mathbb{R}$*

## Kapitel 6

# Integration

- I) a) Gegeben sei eine stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Gesucht ist eine differenzierbare Funktion  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$F'(t) = f(t), \forall t \in [a, b]$$

- b) Für Naturwissenschaft und Technik ist die folgende Verallgemeinerung von a) wichtig:  
Sei  $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben. Gesucht ist eine differenzierbare Funktion  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)), t \in [a, b]$$

Man nennt ein solches  $\varphi$  eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = f(x, y)$$

- II) Viele in der Natur und Ingenieurwissenschaften auftretenden Größen benötigen zu ihrer exakten Definition einen Grenzprozess der folgenden Art:

Wirkt eine konstante Kraft  $f$  längs eines Weges der Länge  $s$ , und zwar längs der  $x$ -Achse vom Punkt  $a$  bis zum Punkt  $b := a + s$ , so versteht man unter der von der konstanten Kraft  $f$  geleisteten Arbeit das Produkt  $f \times s = f(b - a)$ .

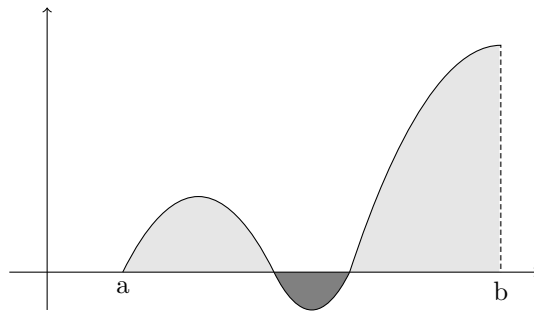
Ist die Kraft  $f$  jedoch örtlich variabel, d.h.  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion des Ortes  $x \in [a, b]$ , so wird man folgendermassen vorgehen.

Zerlege das Intervall  $[a, b]$  in kleine Teilintervalle  $I_1, \dots, I_n$ . Wähle in jedem Intervall  $I_k := [x_{k-1}, x_k]$  einen Punkt  $\xi$  aus. Man wird dann die "Riemannsche Summe"

$$A \sim \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

als Näherung für die gesuchte Arbeit  $A$  ansehen. Hierzu wird man insbesondere dann berechtigt sein, wenn man mit jeder genügend feinen Zerlegung des Intervalls  $I$ , einem festen Wert  $A$  beliebig nahe kommt.

- III) Sei  $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty]$  eine (stetige) Funktion. Gesucht ist eine vernünftige Definition des Flächeninhalts  $A$  des Gebietes zwischen der  $x$ -Achse und dem Graphen von  $f$



Dies ist sehr einfach, wenn die Funktion  $f$  überall den konstanten Wert  $f(x) = c$  hat für eine feste reelle Zahl  $c \in \mathbb{R}$ . In diesem Fall ist die Fläche unter dem Graphen von  $f$  ein Rechteck und wir definieren dessen Flächeninhalt einfach als Breite mal Höhe, also das Produkt  $A = (b - a)c$ . Man beachte, dass die Zahl  $c$  auch negativ sein darf und dann ist auch  $A$  negativ.

Eine einfache Formel ergibt sich auch für eine Funktion, die sich aus konstanten Funktionen auf endlich vielen Teilintervalle von  $[a, b]$  zusammensetzen lässt.



Für allgemeine beschränkte Funktionen kann man nun wie in II) vorgehen.



Wir wählen eine Aufteilung (Zerlegung, Einteilung, Partition) des Intervalls  $I = [a, b]$  in endlich viele Teilintervalle.

Aus jedem dieser Teilintervalle  $I_k$  ersetzen wir  $f$  durch eine Funktion die auf diesem Teilintervall konstant ist und in einem noch zu klärenden Sinn nicht allzu stark von  $f$  abweicht. Dann bilden wir die Summe der Flächeninhalte der auf diese Weise erhaltenen Rechtecke. Diese Summe ist als Näherungswert für die gewünschte Fläche zu verstehen.

Um den genauen Wert der Fläche festzulegen bilden wir immer feinere Zerlegungen des Intervalls. Es ist dann das Grenzwertverhalten der diesen Summen zu untersuchen.

## 6.1 Riemann Integral: Definition, elementare Eigenschaften

1. Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Funktion.

### Definition 6.1

Eine Partition (oder Zerlegung, Einteilung, Unterteilung) eines Intervalls  $[a, b]$  ist eine endliche Menge  $P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$

$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$

$P(I) := \{P \subset I \mid a, b \in P, P \text{ ist endlich}\}$  die Menge alle Partitionen



Die Feinheit der Zerlegung  $P$  ist dabei definiert durch

$$\delta(P) := \max(x_i - x_{i-1}), 1 \leq i \leq n$$

d.h.  $\delta(P)$  ist die Länge des grössten Teilintervalls  $I_i := [x_i, x_{i-1}]$ ,  $k = i, \dots, n$

2. Wahl  $\xi_i$  von Zwischenpunkten  $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .  
Jede Summe der Form

$$S(f, P, \xi) := \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

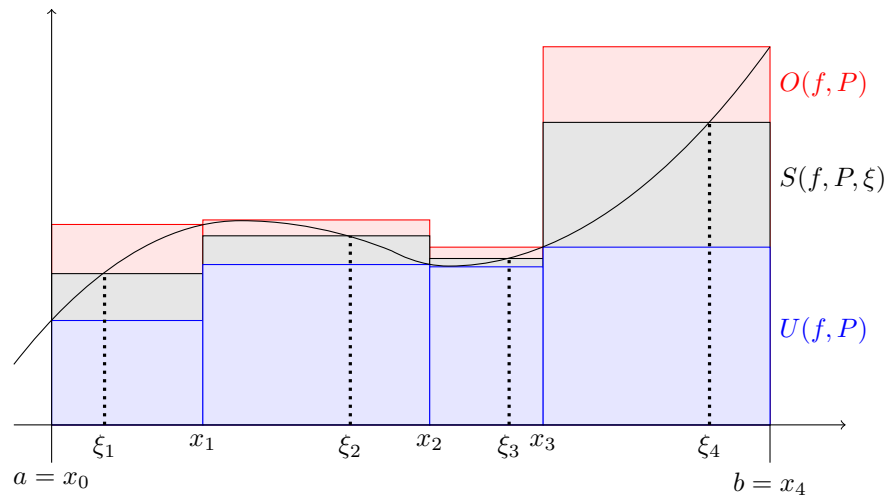
nennt man eine **Riemannsche Summe** der Zerlegung  $P$  und  $\xi$ .  
Die Summe

$$U(f, P) := \sum_{i=1}^n \left( \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \right) (x_i - x_{i-1})$$

nennt man die **Untersumme** von  $f(x)$  zur Zerlegung  $P$ , und

$$O(f, P) := \sum_{i=1}^n f \left( \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \right) (x_i - x_{i-1})$$

nennt man die **Obersumme** von  $f(x)$  zur Zerlegung  $P$ .



### Bemerkung 6.2

Aus den Definitionen folgt direkt

- a) Für eine feste Zerlegung  $P$  gilt stets  $U(f, P) \leq S(f, P, \xi) \leq O(f, P)$   
b) Für zwei Partitionen  $P, Q \in P(I)$  gilt die Ungleichung  $P \subset Q \Rightarrow U(f, P) \leq U(f, Q) \leq O(f, Q) \leq O(f, P)$ .

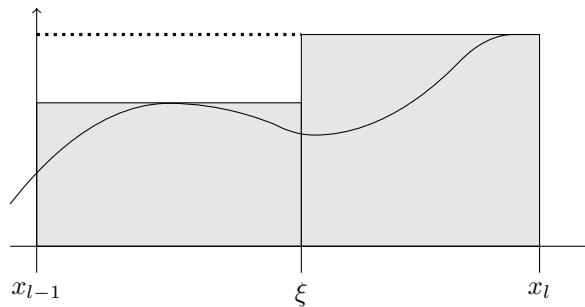
## KAPITEL 6. INTEGRATION

### Beweis

Um dies zu verstehen, ist es nützlich, den Fall zu betrachten, dass die Zerlegung  $Q$  genau einen Punkt mehr enthält als  $P$ .

Sei  $P = \{x_0, \dots, x_N\}$  und  $Q = P \cup \{\xi\}$ , wobei  $\xi$  ein neuer Unterteilungspunkt, also nicht gleich einem der Elemente von  $P$  ist. Dann gibt es genau ein  $l \in \{1, \dots, N\}$  so dass  $x_{l-1} < \xi < x_l$  ist. Damit erhält man

$$(\sup_{[x_{l-1}, \xi]} f)(\xi - x_{l-1}) + (\sup_{[\xi, x_l]} f)(x_l - \xi) \leq (\sup_{[x_{l-1}, x_l]} f)(x_l - x_{l-1})$$



Addiert man dazu alle Summanden in

$$O(f, P) = \sum_i (\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f)(x_i - x_{i-1})$$

mit  $t \neq l$  so ergibt sich die Ungleichung

$$O(f, Q) \leq O(f, P)$$

Ebenso beweist man  $U(f, Q) \geq U(f, P)$ . Damit ist b) für den Fall bewiesen, dass  $Q$  genau ein Element mehr als  $P$  enthält. Der allgemeine Fall lässt sich hierauf leicht durch vollständige Induktion zurückführen.

### Lemma 6.3

Sei  $f : I := [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Funktion. Dann gilt

$$\sup_{P \in P(I)} U(f, P) \leq \inf_{P \in P(I)} O(f, P)$$

### Beweis

Aus

$$P \subset Q \Rightarrow U(f, P) \leq U(f, Q) \leq O(f, Q) \leq O(f, P)$$

folgt, dass die Zahl  $O(f, Q)$  für jede Partition  $Q \in P(I)$  eine obere Schranke für die Menge  $\{U(f, P) \mid P \in P(I)\}$  ist. Also folgt aus der Definition des Supremums als kleinste obere Schranke, dass  $\sup_{P \in P(I)} U(f, P) \leq O(f, Q)$  ist.

Diese Ungleichung gilt für jede Partition  $Q \in P(I)$ . Das heisst wiederum, dass die Zahl  $\sup_{P \in P(I)} U(f, P)$  eine untere Schranke für die Menge  $\{O(f, Q) \mid Q \in P(I)\}$  ist.

Also folgt aus der Definition der Infimums als grösste untere Schranke, dass die Gleichung  $\sup_{P \in P(I)} U(f, P) \leq \inf_{Q \in P(I)} O(f, Q)$  ist. Damit ist Lemma 6.3 bewiesen.

**Definition 6.4**

- 1) Für beschränktes  $f = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  bezeichnen

$$\int_a^b f dx = \sup\{U(f, P) : P \in P(I)\}$$

$$\int_a^{\bar{b}} f dx = \inf\{O(f, P) : P \in P(I)\}$$

das Untere und Obere Integral von  $f$ .

- 2) Ein solches  $f$  heisst über  $[a, b]$  Riemann - Integabel falls

$$\int_a^b f dx = \int_a^{\bar{b}} f dx$$

In diesem Fall heisst  $A = \int_a^b f dx$  das Riemann Integral von  $f$  über den Interval  $[a, b]$

**Beispiel 6.5**

- 1) Sei  $c \in \mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  die konstante Funktion mit dem Wert  $c$ , das heisst  $f(x) = c, \forall x \in I$ . Dann gilt

$$U(f, P) = O(f, P) = (b - a)c, \forall P \in P(I)$$

$\Rightarrow f$  ist Riemann integrierbar und

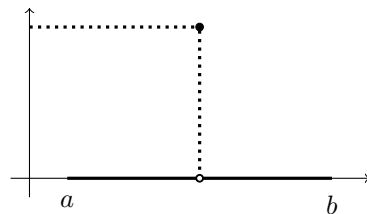
$$\int_a^b f dx = \int_a^b c dx = c(b - a)$$

In diesem einfachen Fall stimmt unsere Definition mit der Interpretation des Flächeninhalts als Breite mal Höhe überein. Man beachte, dass die Konstante  $c$  auch negativ sein darf.



## KAPITEL 6. INTEGRATION

$$2) f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq x_0 \\ 1 & \text{für } x = x_0 \end{cases} \quad x_0 \in [a, b]$$



Dann ist  $f$  integrierbar mit

$$\int_a^b f(x) dx = 0$$

denn es gilt  $U(f, P) = 0$  und  $0 < O(f, P) \leq 2\delta(P), \forall P$ .

$O(f, P)$  kann, durch geeignete Wahl der Partition beliebig klein gewählt werden. z.B.  $P_n = \{a, a + \frac{(b-a)}{n}, \dots, b\} \Rightarrow \delta(P) = \frac{b-a}{n}, \inf_{P \in P(I)} O(f, P) = 0$

$$3) f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [a, b] \setminus Q \\ 0 & \text{für } x \in [a, b] \cap Q \end{cases}$$

Dann gilt  $U(f, P) = 0$  und  $O(f, P) = 1, \forall P \in P(I)$   
 $\Rightarrow f$  ist nicht integrierbar. ( $f$  ist beschränkt aber nicht integrierbar)

### Satz 6.6 (Riemannsches Kriterium für Integrierbarkeit)

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent

1.  $f(x)$  ist integrierbar über  $[a, b]$
2. Für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert eine Partition  $Q \in P(I)$  mit

$$O(f, Q) - U(f, Q) < \varepsilon$$

### Beweis

(a) $\Rightarrow$ (b) Sei  $f$  Riemann integrierbar,  $A := \int_a^b f(x) dx = \sup U(f, P) = \inf O(f, P)$

Nach definition von  $\sup$  und  $\inf$  folgt dass zwei Partitionen  $P_1, P_2 \in P(I)$  existieren, so dass

- (i)  $A - \frac{\varepsilon}{2} < U(f, P_1)$
- (ii)  $O(f, P_2) < A + \frac{\varepsilon}{2}$
- (iii)  $U(f, P_1) \leq U(f, Q) < O(f, Q) \leq O(f, P_2)$

Definiere  $Q := P_1 \cup P_2$ . Dann  $P_1 \subset Q$  und  $P_2 \subset Q$ .  
 Nach Bemerkung 6.2b) folgt

$$\begin{aligned} (i), (ii), (iii) &\Rightarrow A - \frac{\varepsilon}{2} < U(f, Q) \leq O(f, Q) < A + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\Rightarrow O(f, Q) - U(f, Q) < \varepsilon \end{aligned}$$

(b) $\Rightarrow$ (a) Für alle  $P \in P(I)$

$$0 \leq \underbrace{\int_a^b f(x) dx}_{\inf O(f, P)} - \underbrace{\int_a^{\bar{b}} f(x) dx}_{\sup U(f, P)} \leq O(f, P) - U(f, P)$$

Aus (b) folgt das  $\forall \varepsilon > 0$

$$0 < \int_a^{\bar{b}} f(x) dx - \int_a^b f(x) dx < \varepsilon \Rightarrow \int_a^{\bar{b}} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

$\Rightarrow f$  ist integrierbar.

### Satz 6.7

1. Jede Stetige Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  ist R. Integrierbar.
2. Jede Monotone Funktion ist R. Integrierbar.

### Beweis

1.  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $I = [a, b]$  kompakt,  $\Rightarrow f$  gleichmässig stetig.  
 d.h. zu jedem  $\varepsilon > 0$ . gibt es  $\delta > 0$  mit

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

Für eine  $P \in P(I)$  mit Feinheit  $\delta(P) < \delta$  gilt dann

$$\begin{aligned} O(f, P) - U(f, P) &= \sum_{i=1}^n (\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f)(x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{b - a} (x_i - x_{i-1}) \\ &= \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon \end{aligned}$$

Somit ist  $f$  nach Riemannsches Kriterium integrierbar.

2. Sei  $f$  monoton wachsend,  $P \in P(I)$  eine uniforme Partition mit

$$x_i = a + \left( \frac{b - a}{n} \right) i, 0 \leq i \leq n$$

## KAPITEL 6. INTEGRATION

$$\begin{aligned}
 O(f, P) - U(f, P) &= \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i))(x_{i+1} - x_i) \\
 &= \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i)) \\
 &= \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) < \varepsilon
 \end{aligned}$$

Für jede  $\varepsilon > 0$ , haben wir  $\frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{n} < \varepsilon$ . Nach dem Riemannschem Kriterium ist  $f$  integrierbar. (Monoton fallend ist analog).

### Satz 6.8 (Riemannsche Summe)

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Funktion. Folgende Aussagen sind äquivalent.

- I)  $f$  ist Riemann Integrierbar und  $A := \int_a^b f(x)dx$
- II) Für jedes  $\varepsilon > 0$ , existiert eine Zahl  $\xi > 0$ , so dass für jede Partition  $P_i = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$  von  $I$  und alle  $\xi_i, \dots, \xi_N \in \mathbb{R}$  gilt

$$\delta(P) < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| A - \sum_{k=1}^N f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| < \varepsilon$$

Dieser Satz lässt sich auch so formulieren: Eine beschränkte Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann Riemann integrierbar wenn der Grenzwert

$$\lim_{\substack{\delta(P) \rightarrow 0 \\ \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]}} \sum_{k=1}^N f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

und dann haben wir

$$A = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta(P) \rightarrow 0} S(f, P, \delta)$$

### Beweis

Siehe D.Salomon: Das Riemannsche Integrale (Satz 3.1).

### Korollar 6.8

Seien  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte und integrierbare Funktion.  $\{P^{(n)}\}$  eine Folge von Partitionen der Intervals  $[a, b]$  mit  $\delta(P^{(n)}) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  und  $\{\xi^{(n)}\}$  eine Feste Wahl von Zwischenpunkten zur Partition  $P^{(n)}$ . Dann ist

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, P^{(n)}, \xi^{(n)})$$

**Beweis**

Wegen Satz 6.8 existiert zu jedem  $\varepsilon > 0$ , ein  $\delta > 0$  derart, das für alle Partitionen  $\delta(P) < \delta$  die Ungleichung

$$\left| S(f, P, \xi) - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon$$

gilt und zwar bei beliebiger Wahl der Zwischenpunkten.

Wegen  $\delta(P^{(n)}) \rightarrow 0$  existiert ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $\delta(P^{(n)}) < \delta$  für alle  $n \geq N$ . Für jedes  $n \geq N$  ist daher

$$\left| S(f, P^{(n)}, \xi) - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon$$

voraus sich die Behauptung unmittelbar ergibt.

**Beispiel**

$$\int_0^1 (x^2 - x) dx = ?$$

$$f(x) = x^2 - x \text{ stetig} \Rightarrow f \text{ integrierbar}$$

Wir wenden Korollar 6.8 an. Wir betrachten die Folge  $\{P^{(n)}\}$  von äquidistanten Partition des intervals  $[0, 1]$  mit

$$x_k^{(n)} := \frac{k}{n}, \quad \forall k = 0, 1, \dots, n$$

Dann  $\delta(P^{(n)}) = \frac{1}{n} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Wir wählen die Zwischenpunkte

$$\xi_k^{(n)} := \frac{k}{n}, \quad \forall k = 1, \dots, n$$

Die  $\xi_k^{(n)}$  sind die rechten Endpunkte der Teilintervale  $I_{k-1} := [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ . Hiermit folgt

$$\begin{aligned}
 S(f, P^{(n)}, \xi^{(n)}) &= \sum_{k=1}^n f(\xi_k^{(n)}) (x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)}) \\
 &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{k^2}{n^2} - \frac{k}{n} \right) \left( \frac{k}{n} - \frac{k-1}{n} \right) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( \frac{k^2}{n^2} - \frac{k}{n} \right) = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 - \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \\
 &= \frac{1}{n^3} \left( \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) - \frac{1}{n^2} \left( \frac{n(n+1)}{2} \right) \\
 &\rightarrow \frac{2}{6} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} \\
 &\Rightarrow \int_0^1 (x^2 - x) dx = -\frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

## Eigenschaften des Integrals

### Satz 6.9

Seien  $a < c < b$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  und  $f, g : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  zwei Riemann integrierbare Funktionen. Dann gilt folgendes:

1. Die Funktion  $\alpha f + \beta g$  ist integrierbar mit

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

2. Wenn  $f, g$  die Ungleichung  $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b]$  erfüllen, dann gilt

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

3.  $|f|$  sind R. Integrierbar und

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

4. Das Produkt  $fg$  ist Integrierbar.

### Bemerkung 6.10

Wir bezeichnen die Menge aller Riemann integrierbaren Funktionen  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $R(I) := \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ R.Integrierbar}\}$ . Nach Satz 6.9 i), ist dies ein reeler Vektorraum.  $R(I)$  ist ein Unterraum des Vektorraumes aller reelwertigen Funktion

$$F(I) := \{f : I \rightarrow \mathbb{R}\}$$

$$C(I) := \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$$

ist ein Unterraum von  $R(I)$

$$C(I) \subset R(I) \subset F(I)$$

### Beweis 6.9

1. Setze  $h := \alpha f + \beta g$  und sei  $\varepsilon > 0$  beliebig gegeben. Da  $f$  und  $g$  integrierbar sind, existieren wegen Riem. Kriterium (Satz 6.6). Partitionen  $P_1$  und  $P_2 \in P(I)$  mit

$$O(f, P_1) - U(f, P_1) < \frac{\varepsilon}{(|\alpha| + |\beta|)}$$

und

$$O(g, P_2) - U(g, P_2) < \frac{\varepsilon}{(|\alpha| + |\beta|)}$$

Aus der Definition von  $h$  folgt zunächst

$$|h(x) - h(y)| \leq |\alpha| |f(x) - f(y)| + |\beta| |g(x) - g(y)|$$

Mit der verfeinerten Partition  $P := P_1 \cup P_2$  ergibt sich unter Verwendung von (\*), wobei

$$(*) \quad \sup_{x \in I} h(x) - \inf_{x \in I} h(x) = \sup\{h(x) - h(y) \mid x, y \in I\}$$

Für beschränkte Funktion  $h$  auf einem Intervall  $I$  gilt

$$\begin{aligned} O(h, P) - U(h, P) &= \sum_{k=1}^n \left( \sup_{[x_{k-1}, x_k]} h - \inf_{[x_{k-1}, x_k]} h \right) (x_k - x_{k-1}) \\ &\stackrel{*}{=} \sum_{x, y \in I_k} \sup |h(x) - h(y)| (x_k - x_{k-1}) \\ &\leq |\alpha| \sum_{x, y \in I_k} \sup |f(x) - f(y)| (x_k - x_{k-1}) \\ &\quad + |\beta| \sum_{x, y \in I_k} \sup |g(x) - g(y)| (x_k - x_{k-1}) \\ &= |\alpha| \sum_{k=1}^n (\sup f - \inf f) (x_k - x_{k-1}) \\ &\quad + |\beta| \sum_{k=1}^n (\sup g - \inf g) (x_k - x_{k-1}) \\ &= |\alpha| [O(f, P) - U(f, P)] + |\beta| [O(g, P) - U(g, P)] \\ &< |\alpha| \frac{\varepsilon}{(|\alpha| + |\beta|)} + |\beta| \frac{\varepsilon}{(|\alpha| + |\beta|)} = \varepsilon \end{aligned}$$

Nach Bmk. 6.2  $P_1 \subset P$

$$\Rightarrow U(f, P_1) < U(f, P)$$

## KAPITEL 6. INTEGRATION

und

$$O(f, P) < O(f, P_1)$$

Dann

$$-U(f, P) < -U(f, P_1)$$

und

$$O(f, P) - U(f, P) < O(f, P_1) - U(f, P_1) < \frac{\varepsilon}{(|\alpha| + |\beta|)}$$

2. Seien  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar mit  $f(x) \leq g(x), \forall x \in I$ .  
 Die Funktion  $h := g - f$  ist wegen (1.) integrierbar. Sei nun  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$   
 eine beliebige Partition von  $[a, b]$  folgt dann  $\inf h(x) \geq 0, \forall k = 0, 1, \dots, n$   
 und daher

$$U(h, P) = \sum_P (\inf h)(x_k - x_{k-1}) \geq 0$$

Was wiederum  $\int_a^b h(x) dx = \sup U(h, P) \geq 0$  impliziert.

Da  $h$  aber integrierbar ist, folgt hieraus

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_a^b h(x) dx = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx \\ &= \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx \geq 0 \end{aligned}$$

Dies liefert die Behauptung

3. Nun gilt  $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|, \forall x \in I$   
 Nach (2) folgt daraus die Ungleichung

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Diese Ungleichung ist äquivalent zu

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| < \int_a^b |f(x)| dx$$

4. Als integrierbare Funktionen sind  $f$  und  $g$  beschränkt. Also existieren die Konstanten

$$\alpha := \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \quad \text{und} \quad \beta := \sup_{x \in [a, b]} |g(x)|$$

Wegen Riem. Kriterium (Satz 6.6) gibt es Partitionen  $P_1, P_2$  mit

$$\begin{aligned} O(f, P_1) - U(f, P_1) &< \frac{\varepsilon}{(\alpha + \beta)} \\ O(g, P_2) - U(g, P_2) &< \frac{\varepsilon}{(\alpha + \beta)} \end{aligned}$$

Setzen wir  $h := fg$  so gilt

$$\begin{aligned} |h(x) - h(y)| &\leq |f(x)| |g(x) - g(y)| + |g(y)| |f(x) - f(y)| \\ &\leq \alpha |g(x) - g(y)| + \beta |f(x) - f(y)|, \forall x, y \in [a, b] \end{aligned}$$

Sei  $P = P_1 \cup P_2$ .

Wie in dem Beweis von (1.) ergibt sich unter verwendung von

$$\sup_{x \in I} h - \inf_{x \in I} h = \sup \{|h(x) - h(y)| \mid x, y \in I\}$$

dann

$$\begin{aligned} O(h, P) - U(h, P) &= \sum_{k=1}^n (\sup h - \inf h)(x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n \sup_{x, y \in I_k} |h(x) - h(y)| (x_k - x_{k-1}) \\ &\leq |\beta| \sum_{k=1}^n \sup_{I_k} |f(x) - f(y)| (x_k - x_{k-1}) \\ &\quad + |\alpha| \sum_{k=1}^n \sup_{I_k} |g(x) - g(y)| (x_k - x_{k-1}) \\ &= |\beta| \sum_{k=1}^n (\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f)(x_k - x_{k-1}) \\ &\quad + |\alpha| \sum_{k=1}^n (\sup_{I_k} g - \inf_{I_k} g)(x_k - x_{k-1}) \\ &= |\beta| [O(f, P) - U(f, P)] + |\alpha| [O(g, P) - U(g, P)] < \varepsilon \end{aligned}$$

### Satz 6.10 (Standardabschätzungen)

Sei  $f$  integrierbar über  $[a, b]$ . Dann gelten die Abschätzungen

$$(b - a) \inf_{[a, b]} f \leq \int_a^b f(x) dx \leq (b - a) \sup_{[a, b]} f$$

### Beweis

Für die Partition  $P = \{a, b\}$  von  $[a, b]$  folgt sofort

$$(b - a) \inf_{[a, b]} f = U(f, P) \leq \int_a^b f(x) dx < O(f, P) = (b - a) \sup_{[a, b]} f$$

### Satz 6.11

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar. Dann ist  $f$  auch auf jedem Teilintervall  $[c, d] \subseteq [a, b]$  integrierbar.



## KAPITEL 6. INTEGRATION

### Beweis

$f$  ist auf  $[a, b]$  integrierbar wegen Satz 6.6.

Zu jedem  $\varepsilon > 0$ , existiert eine Partition  $P'$  von  $[a, b]$  mit

$$O(f, P') - U(f, P') < \varepsilon$$

Wir betrachten dann die Verfeinerung

$$P'' := P' \cup \{c, d\}$$

Wegen Bmk. 6.2 haben wir

$$O(f, P'') - U(f, P'') < \varepsilon$$

Sei nun  $P := P'' \cap [c, d]$  die Restriktion der Partition  $P''$  auf  $[c, d]$ . Dann gilt mit  $g := f|_{[c, d]}$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} O(g, P) - U(g, P) &= \sum_P (M_k(g) - m_k(g))(x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_P (M_k(f) - m_k(f))(x_k - x_{k-1}) \\ &\leq \sum_{P''} (M''_k(f) - m''_k(f))(x_k - x_{k-1}) \end{aligned}$$

$$O(f, P'') - U(f, P'') < \varepsilon$$

wobei

$$M_k(f) := \sup_{I_k \subset P} f \quad m_k(f) := \inf_{I_k \subset P} f$$

und, analog

$$M''_k(f) = \sup_{I_k \in P''} f$$

### Satz 6.12

Seien  $a \leq b \leq c$ . Die Funktion  $f : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann integrierbar falls beide Einschränkungen  $f|_{[a, b]}$  und  $f|_{[b, c]}$  integrierbar sind. In diesem Fall gilt

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

### Konvention 6.13

- 1) Sei  $f$  integrierbar auf einem Intervall  $I$ . Für  $a \leq b$  in  $I$  definiert man

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

Mit dieser Konvention gelten alle bisherigen Eigenschaften. z.B.

$$\forall a, b, c \in I : \int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$$

2)

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

## 6.2 Differentiation und Integration

In diesem Kapitel wird dem Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration hergestellt. Zu diesem Zweck beginnen wir mit dem folgenden Satz, Mittelwertsatz der Integralrechnung.

### Satz 6.14 (Mws. der Integralrechnung)

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Dann existiert ein  $\xi \in [a, b]$  mit

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a)$$

Geometrisch:



### Beweis

Wir setzen

$$m := \min\{f(x) \mid x \in [a, b]\} = f(x_-)$$

$$M := \max\{f(x) \mid x \in [a, b]\} = f(x_+)$$

Wegen Satz 6.10

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$$

## KAPITEL 6. INTEGRATION

$$f(x_-) = m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M = f(x_+)$$

Also  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$  für ein  $M \in [m, M]$ . Da  $f$  stetig ist, wegen Zwischenwertsatz gibt es  $\xi \in [a, b]$  mit  $f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ . Nun kommt die erste Hauptsatz der Diff- und Integralrechnung.

### Satz 6.15 (Hauptsatz A)

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Definiere für jeder  $x \in [a, b]$

$$F(x) := \int_x^b f(t) dt$$

Dann ist  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und  $F'(x) = f(x)$ ,  $\forall x \in [a, b]$ .

### Beweis

Für jedes  $h \neq 0$  ist

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \left[ \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right] \stackrel{6.12}{=} \frac{1}{h} \int_a^{x+h} f(t) dt$$

Nach dem Mws der Integralrechnung existiert zu jedem solchen  $h \neq 0$  ein Zwischenpunkt  $\xi_h \in [x, x+h]$  (bzw.  $\xi_h \in [x+h, x]$  falls  $h < 0$ ) mit

$$\int_x^{x+h} f(t) dt = (h) f(\xi_h)$$

Nun ist  $\xi_h \rightarrow x$  für  $h \rightarrow 0$ . Da  $f$  stetig ist

$$f(\xi_h) \rightarrow f(x) \text{ für } h \rightarrow 0$$

Damit erhalten wir

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (h f(\xi_h)) = f(x)$$

Folgender Begriff ist dann naheliegend.

### Definition 6.16

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Eine Stammfunktion von  $f$  (auf  $a, b$ ) ist eine differenzierbare Funktion  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $F'(x) = f(x)$ .

Wegen Satz 6.15, hat jede stetige Funktion mindestens eine Stammfunktion. Mit Ausnahme einer additiven Konstante, die beim Differenzieren ja wegfällt, ist die Stammfunktion auch eindeutig bestimmt. Dies ist der Inhalt des folgenden Satzes.

**Satz 6.17**

Seien  $I \subset \mathbb{R}$  ein beliebiges Intervall und  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Stammfunktion von  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann gelten:

- (a) Die Funktion  $F + c$  ist für jede Konstante  $c \in \mathbb{R}$  ebenfalls eine Stammfunktion von  $f$ .
- (b) Ist  $G : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine weitere Stammfunktion von  $f$ , so gibt es eine Konstante  $c \in \mathbb{R}$  mit  $G = F + c$

**Beweis**

- (a) Offenbar ist mit  $F$  auch  $F+c$  differenzierbar und es gilt  $(F+c)' = F' = f$
- (b) Da  $F$  und  $G$  Stammfunktionen von  $f$  sind, gilt  $F' = f, G' = f$ . Also  $(F - G)' = 0$  und  $F - G = \text{konstante Funktion}$ .

**Definition 6.18**

Eine Stammfunktion von  $f$  heisst auch unbestimmtes Integral von  $f$  und wird bezeichnet mit  $\int f(x)dx$ . Mittels einer Stammfunktion lässt sich das Integral einer gegebenen Abbildung sehr leicht berechnen. Dies ist der Inhalt des Hauptsatz B.

**Satz 6.19 (Hauptsatz der Diff- und Integralberechnung Version B)**

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion und  $F$  eine beliebige Stammfunktion von  $f$ . Dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) := F(x)|_a^b, \quad \forall a, b \in I$$

**Beweis**

Für  $x \in I$  definieren wir

$$F_0(x) := \int_a^x f(t)dt$$

Dann ist  $F_0 : I \rightarrow \mathbb{R}$  wegen Satz 6.15 eine (Spezielle) Stammfunktion von  $f$  mit

$$F_0(a) = 0 \quad F_0(b) = \int_a^b f(t)dt$$

## KAPITEL 6. INTEGRATION

Für die beliebige Stammfunktion  $F$  gilt somit  $F - F_0 = c$  für eine Konstante  $c \in \mathbb{R}$ . Deshalb ist

$$F(b) - F(a) = F_0(b) - F_0(a) = F_0(b) = \int_a^b f(t) dt$$

womit alles bewiesen ist. Der Satz 6.19 ist das zentrale Ergebnis und zur Berechnung konkreter Integral. Man benötigt nur eine Stammfunktion und hat von dieser lediglich die Differenz der Funktionswerte zwischen den beiden Endpunkten des Intervalls  $[a, b]$  zu bilden. Insbesondere spielt es keine Rolle, welche Werte die Stammfunktion im Inneren des Intervalls  $[a, b]$  annimmt.

### Beispiele von Stammfunktionen

#### Beispiel 6.20

Definitions Bereich	Funktion $f$	Stammfunktion $F$
$(0, \infty)$	$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \neq -1$ $\log x  + c, \alpha = -1$
$\mathbb{R}$	$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \in \mathbb{N}$
$\mathbb{R}$	$e^x$	$e^x + c$
$\mathbb{R}$	$\sin x$	$-\cos x + c$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x + c$
$(-1, 1)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + c$
$(-1, 1)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x + c$
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\arctan x + c$
$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$\tan x$	$-\ln \cos x  + c$
$(0, \pi)$	$\cot x$	$\ln \sin x  + c$
$\mathbb{R}$	$\sinh x$	$\cosh x + c$
$\mathbb{R}$	$\cosh x$	$\sinh x + c$
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{arcsinh} x + c$
$(1, \infty)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arccosh} x + c$
$[-1, 1]$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{arctanh} x + c$

**Beispiel**

$$F(x) = -\ln |\cos x| = -\frac{1}{2} \ln (\cos x)^2$$

und die Ableitung ist (nach Kettenregel):

$$F'(x) = -\frac{1}{2} \frac{1}{\cos(x)^2} (2 \cos x)(-\sin x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

**6.3 Partielle Integration**

Da das Integration die Umkehrung von differenzieren ist, liefert jede Ableitungsregel eine für das Integrieren.

Partielle Integration ist eine Umkehrung der Leibnizschen Produktregel und besagt für unbestimmte bzw. das bestimmte Integral:

$$\begin{aligned} (uv)' &= u'v + uv' \\ \Rightarrow \int uv' &= uv - \int u'v + c \end{aligned}$$

**Satz 6.21 (Partielle Integration)**

Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  zwei stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

und

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

**Beispiel 6.22**

1.  $\int \underbrace{x}_u \underbrace{e^x}_{v'} dx = xe^x - \int 1e^x dx = xe^x - e^x \begin{cases} f(x) = x & g'(x) = e^x \\ f'(x) = 1 & g(x) = e^x \end{cases}$
2.  $\int \underbrace{x^n}_u \underbrace{e^x}_{v'} dx = x^n e^x - \int nx^{n-1}e^x dx$

Durch Induktion über  $n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$  folgert man daraus das Resultat

$$\int x^n e^x dx = (-1)^n n! \sum_{k=0}^n \frac{(-x)^k}{k!} e^x + c$$

3. Partielle Integration eignet sich gut dazu, Logarithmische terme zu eliminieren.

Manchmal muss man dazu den Integranden erst künstlich als Produkt schreiben

$$\int \log x dx = \int \underbrace{(\log x)}_u \underbrace{(1)}_{v'} dx$$

## KAPITEL 6. INTEGRATION

$$= (\log x)x - \int \frac{1}{x} x dx = x \log x - x + c$$

4. Manchmal führt wiederholte partielle Integration auf den ursprünglichen Ausdruck zurück. Mit Glück kann man dann noch diesem auflösen

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x dx &= \int \underbrace{(\sin x)}_u \underbrace{(\sin x)}_{v'} dx \\ &= -\sin x \cos x + \int \cos^2 x dx \\ &= -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x) dx \\ &= -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x dx \\ \Rightarrow 2 \int \sin^2 x dx &= x - \sin x \cos x \\ \Rightarrow \int \sin^2 x dx &= \frac{1}{2} (x - \sin x \cos x) \end{aligned}$$

Andere möglichkeit:

$$\begin{aligned} \cos 2x &= 1 - 2 \sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 \\ \sin^2 x &= \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) \end{aligned}$$

mit

$$\cos 2x = \left( \frac{\sin 2x}{2} \right)'$$

Dann:

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x &= \frac{1}{2} \int 1 - \cos 2x dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ x - \int \cos 2x dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ x - \frac{\sin 2x}{2} \right] + c \\ \sin 2x &= 2 \sin x \cos x \end{aligned}$$

**Beispiel 6.23**

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{k+1} dx &= \int_0^{\pi/2} \underbrace{(\sin x)^k}_u \underbrace{(\sin x)}_{v'} dx \\
&= \underbrace{(\sin x)^k}_u \underbrace{(-\cos x)}_v \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \underbrace{k(\sin x)^{k-1}(\cos x)}_{u'} \underbrace{(-\cos x)}_v dx \\
&= 0 + k \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{k-1} [1 - \sin^2 x] dx \\
&= k \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{k-1} - k \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{k+1} dx
\end{aligned}$$

Also:

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{k+1} dx = \frac{k}{(1+k)} \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{k-1} dx$$

Falls  $k+1 = 2n$ :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2n} dx &= \frac{2n-1}{2n} \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2(n-1)} dx \\
&= \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-3}{2n-2} \dots \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} 1 dx \\
&= \frac{(2n)(2n-1)(2n-2) \dots 1}{[(2n)(2n-2) \dots 2]^2} \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Analog:

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2n+1} dx = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$

Beachte: der  $\pi$ -Term kommt im Zweiten Fall nicht vor!Dies benutzen wir wie folgt um ein "Formel" für  $\pi$  aufzustellen.Für  $0 \leq x \leq \pi/2$ :

$$\begin{aligned}
(\sin x)^k - (\sin x)^{k+1} &= (\sin x)^k [1 - \sin x] \geq 0 \\
\Rightarrow (\sin x)^k &\geq (\sin x)^{k+1} \quad (k \geq 0, 0 \leq x \leq \pi/2)
\end{aligned}$$



## KAPITEL 6. INTEGRATION

Also:

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2n+1} dx \leq \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2n} dx \leq \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2n-1} dx$$

d.h.

$$\frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} \leq \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \leq \frac{(2^{n-1} (n-1)!)^2}{(2n-1)!}$$

Also:

$$\begin{aligned} \frac{(2^n n!)^4}{(2n+1)!} \cdot \frac{2}{(2n)!} &\leq \pi \leq \frac{(2^n n!)^4}{(2n!)^2} \cdot \frac{2}{2n} \\ \frac{(2^n n!)^4}{(2n+1)!} \cdot \frac{2}{((2n)!)^2} &\leq \pi \leq \frac{(2^n n!)^4}{(2n!)^2} \cdot \frac{2}{2n} \\ \Rightarrow \pi &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \frac{(2^n n!)^4}{(2n!)^2} \quad \text{Wallische Formel.} \end{aligned}$$

### Beispiel 6.24 (Stirlingsche Formel)

Für  $n \geq 2$  sei  $\ln(n!) = \sum_{k=2}^n \ln(k)$ . Wir zeigen dass man kann  $\ln |k|$  sehr gut durch

$$\int_{k-1/2}^{k+1/2} \ln x dx \text{ approximieren.}$$

Da

$$x \ln x - x$$

Stammfunktion von  $\ln(x)$  ist, folgt

$$\int_{k-1/2}^{k+1/2} \ln x dx = x \ln x - x \Big|_{k-1/2}^{k+1/2}$$

Darin kommen also  $\ln(k + \frac{1}{2})$  sowie  $\ln(k - \frac{1}{2})$  vor. Wir benutzen nun Taylor:

Falls  $g(x) = \ln(x)$  sei

$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + \frac{g''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{g^{(3)}(\xi)}{3!}(x - x_0)^3$$

mit  $\xi$  zwischen  $x$  und  $x_0$ .

Auf  $\left. \begin{array}{l} x = k + \frac{1}{2} \\ x_0 = k \end{array} \right\}$  angewendet ergibt:

$$\ln\left(k + \frac{1}{2}\right) = \ln k + \frac{1}{2k} - \frac{1}{8k^2} + t_k$$

wobei

$$t_k = \frac{2}{\xi^3} \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{24\xi^3}$$

$$|t_k| \leq \frac{1}{24k^3} \quad \xi \in \left[k, k + \frac{1}{2}\right]$$

Analog:

$$\ln \left(k - \frac{1}{2}\right) = \ln k - \frac{1}{2k} - \frac{1}{8k^2} + t'_k$$

$$|t'_k| \leq \frac{1}{24(k - \frac{1}{2})^3}$$

Also:

$$\begin{aligned} \int_{k-1/2}^{k+1/2} x \ln -x dx &= \left(k + \frac{1}{2}\right) \left(\ln k + \frac{1}{2k} - \frac{1}{8k^2} + t_k\right) - \left(k + \frac{1}{2}\right) \\ &\quad - \left[\left(k - \frac{1}{2}\right) \left(\ln k - \frac{1}{2k} - \frac{1}{8k^2} + t'_k\right) - \left(k - \frac{1}{2}\right)\right] \\ &= \ln k - \frac{1}{8k^2} + \left(k + \frac{1}{2}\right) t_k - \left(k - \frac{1}{2}\right) t'_k \\ &= \ln k + r_k \quad |r_k| \leq \frac{c}{k^2} \end{aligned}$$

Mit

$$(*) = \left(\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln x dx = \ln k + r_k\right)$$

folgt dass:

$$\begin{aligned} \ln n! &= \sum_{k=2}^n \ln k \stackrel{(*)}{=} \sum_{k=2}^n \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln x dx - \sum_{k=2}^n r_k \\ &= \underbrace{\int_1^{n+\frac{1}{2}} \ln x dx}_{(*)} - \int_1^{\frac{3}{2}} \ln x dx - \sum_{k=2}^n r_k \\ (*) &= \int_1^{n+\frac{1}{2}} \ln x dx = x \ln x - x \Big|_1^{n+\frac{1}{2}} \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(n + \frac{1}{2}\right) - \left(n + \frac{1}{2}\right) + 1 \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(n + \frac{1}{2}\right) - n + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

## KAPITEL 6. INTEGRATION

Ersetzen wir  $\ln\left(n + \frac{1}{2}\right) = \ln n + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + t_n$  so folgt:

$$\begin{aligned} (*) &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + \left(n + \frac{1}{2}\right) \left\{ \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + t_n \right\} + \frac{1}{2} \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + \frac{1}{2} - \frac{1}{8n^2} + nt_n + \frac{1}{4n} - \frac{1}{16n^2} + \frac{1}{2}t_n + \frac{1}{2} \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + 1 + \frac{1}{8n} + nt_n - \frac{1}{16n^2} + \frac{1}{2}t_n \end{aligned}$$

Also:

$$\ln(n!) = n \ln n + \frac{1}{2} \ln n - n + a_n$$

wobei

$$a_n = \frac{1}{4n} + \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{8n^2} + t_n\right) + \sum_{k=2}^n r_k - \int_1^{\frac{3}{2}} \ln x dx$$

und  $|r_k| \leq \frac{c}{k^2} \Rightarrow \sum_{k=2}^n r_k$  konvergiert.

Sei  $a := \lim a_n$ ,  $b = e^a$  und  $b_n = e^{a_n}$ . Also:

$$\log n! = \left(n + \frac{1}{2}\right) \log n - n + a_n = \log n^{n+\frac{1}{2}} - n + a_n$$

folgt

$$n! = n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{a_n} = \sqrt{n} n^n e^{-n} e^{a_n} \Rightarrow b_n = \frac{n!}{\sqrt{n} n^n e^{-n}}$$

Wir möchten jetzt  $b := e^a$  bestimmen:

$$\begin{aligned} b = \lim b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n^2}{b_{2n}} = \lim \left( \frac{n!}{\sqrt{n} n^n e^{-n}} \right)^2 \left( \frac{\sqrt{2n} (2n)^{2n} e^{2n}}{(2n)!} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \sqrt{\frac{2}{n}} \frac{(2n)^{2n}}{n^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \sqrt{\frac{2}{n}} 2^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2^n n!)^n}{(2n)!} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \\ &= \sqrt{2\pi} \end{aligned}$$

Also  $b = \sqrt{2\pi}$  womit

$n! \approx \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$	Stirling's formel
---------------------------------------	-------------------

**Beispiel: Der Satz von Taylor**

Die Taylor - Entwicklung einer Funktion  $f \in C^{n+1}$  um  $x_0$  erhält man durch  $n$ -fache partielle Integration:

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \int_{x_0}^x f'(t) dt = \int_{x_0}^x \underbrace{(x-t)^0}_{v'} \underbrace{f'(t)}_u dt \\ &= (x-x_0)f'(x_0) + \int_{x_0}^x \underbrace{(x-t)'}_{v'} \underbrace{f''(t)}_u dt \\ &= (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2} f''(x_0) + \frac{1}{2} \int_{x_0}^x (x-t)^2 f'''(t) dt \\ &\quad \vdots \\ &= \sum_{k=1}^n (x-x_0)^k \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \end{aligned}$$

Aus Mittelwertsatz der Integralrechnung bekommt man die Lagrange Restgliedformel.

$$\frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) (x-x_0)^{n+1} \text{ für ein } \xi \in [x_0, x]$$

## 6.4 Methode der Substitution

Methode der Substitution ist eine Umkehrung der Kettenregel.

**Satz 6.25 (Substitutionsregel)**

Sei

- $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig
- $g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  der Klasse  $C'$

Sowie  $t_0 \leq t_1$  in  $[\alpha, \beta]$  so dass  $g([t_0, t_1]) \subset [a, b]$ . Dann gilt

$$\int_{g(t_0)}^{g(t_1)} f(x) dx = \int_{t_0}^{t_1} f(g(t)) g'(t) dt$$

**Beweis**

Sei  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Stammfunktion für  $f$ . Dann gilt (nach Hauptsatz B)

$$\int_{g(t_0)}^{g(t_1)} f(x) dx = F(g(t_1)) - F(g(t_0))$$

## KAPITEL 6. INTEGRATION

Nach der Kettenregel, haben wir

$$(F \circ g)'(t) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$$

d.h.  $F \circ g$  ist eine Stammfunktion für  $f(g(t))g'(t)$ . Woraus mit dem Hauptsatz B folgt

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} f(g(t))g'(t)dt &= (F \circ g)(t_1) - (F \circ g)(t_0) \\ &= F(g(t_1)) - F(g(t_0)) \\ &= \int_{g(t_0)}^{g(t_1)} f(x)dx \end{aligned}$$

### Korollar 6.26

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt + C$$

Dies Formel bedeutet folgenden: Die Linke Seite als Funktion von  $x$  ist gleich der rechten Seite als Funktion von  $t$  vermöge der Relation

$$\begin{aligned} x &= g(t) \\ dx &= g'(t)dt \end{aligned}$$

Für die Substitutionsregel

$$\int_{t_0}^{t_1} f(g(t))g'(t)dt = \int_{g(t_0)}^{g(t_1)} f(x)dx$$

gibt es im Prinzip zwei lesarten. Mann kann sie entweder von links nach rechts oder von rechts nach links anwenden:

1. (links  $\rightarrow$  rechts)  
Liegt ein Integral explizit in der Form

$$\int_{t_0}^{t_1} f(g(t))g'(t)dt \text{ vor,}$$

so können wir die Substitutionsregel von links nach rechts abwende

### Beispiel

(a)

$$\int_0^1 (1+t^2)^4(2t)dt$$

Setzt man nämlich  $f(x) := x^4$  und  $g(t) := 1+t^2$ . So folgt:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (1+t^2)^4 (2t) dt &= \int_0^1 f(g(t)) g'(t) dt \\
&= \int_{g(0)}^{g(1)} f(x) dx = \int_1^2 x^4 dx = \left[ \frac{1}{5} x^5 \right]_1^2 \\
&= \frac{32}{5} - \frac{1}{5} = \frac{31}{5}
\end{aligned}$$

(b)

$$\int \sin^3 t \cos t dt$$

Die substitution  $x = \sin t$  mit  $\frac{dx}{dt} = \cos t \Rightarrow dx = \cos t dt$  liefert

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C = \frac{\sin^4 t}{4} + C$$

(c)

$$\int \tan t dt = \int \frac{\sin t}{\cos t} dt$$

Die Substitution  $x = \cos t$   $\frac{dx}{dt} = -\sin t$ ,  $dx = -\sin t dt$

$$\begin{aligned}
\int \tan t dt &= - \int \frac{1}{\cos t} (-\sin t) dt \\
&= - \int \frac{1}{x} dx = -\log |x| + C \\
&= -\log |\cos t| + C
\end{aligned}$$

2. (rechts  $\rightarrow$  links)

Ein integral liegt der Gestalt  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$  mit gewissen Grenzen  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  vor, das schwer zu berechnen scheint, versucht man dann mittels geeigneten Substitution  $x = g(t)$ , dieses Integral umzuformulieren, so dass die Substitutionsregel anwendbar ist, wobei  $g(t_0) = \alpha$  und  $g(t_1) = \beta$  gelten muss.

**Beispiel 6.26**

(a)

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

Also  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ . Mit der Substituten  $x = g(t) = \sin t$ ,  $t \in [0, \pi/2]$ ,  $dx = \cos t dt$  ist dann  $g(0) = 0$ ,  $g(\frac{\pi}{2}) = 1$  und

# KAPITEL 6. INTEGRATION

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_{g(0)}^{g(\pi/2)} f(x) dx = \int_0^{\pi/2} f(g(t)) g'(t) dt \\
 &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt \\
 &\stackrel{(*)}{=} \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} (1 + \cos 2t) dt \\
 &= \frac{1}{2} \left( t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} (t + \sin t \cos t) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

mit

$$(*) \quad \cos^2(t) = \frac{1 + \cos 2t}{2}$$

(b)

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x-3}} dx \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \sqrt{2x-3} \\ du = \frac{1}{2}(2x-3)^{-1/2} 2dx = \frac{dx}{\sqrt{2x-3}} \\ u^2 = 2x-3 \\ \frac{u^2+3}{2} = x \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x}{\sqrt{2x-3}} dx &= \int \left( \frac{u^2+3}{2} \right) du = \frac{1}{2} \int (u^2+3) du \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{u^3}{3} + 3u \right) = \frac{u}{2} \left( \frac{u^2}{3} + 3 \right) \\
 &= \frac{\sqrt{2x-3}}{2} \left[ \frac{2x-3}{3} + 3 \right] + C \\
 &= \sqrt{2x-3} \left( \frac{x}{3} + 1 \right) + C
 \end{aligned}$$

**Beispiel: Flächeninhalt einer Ellipse**



$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$$

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \text{ mit } x, y > 0$$

$$F = 4 \int_0^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx$$

mit  $x = au$ ,  $dx = adu$

$$\begin{aligned} F &= 4 \int_0^1 b \sqrt{1-u^2} adu \\ &= 4ab \int_0^1 \sqrt{1-u^2} du \end{aligned}$$

mit  $u = \sin t$ ,  $du = \cos t dt$

$$\begin{aligned} 4ab \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt &= 4ab \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt \\ &= \frac{4ab}{2} (t + \sin t \cos t) \Big|_0^{\pi/2} \\ &= \pi ab \end{aligned}$$

## 6.5 Integration rationaler Funktionen (Partialbruchzerlegung)

Sei  $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  eine Rationale Funktion, d.h.  $P, Q$  sind polynome mit reellen Koeffizienten. Die Partialbruchzerlegung ist eine Darstellung von  $R(x)$  als summe von "elementaren" rationale Funktionen. Sie basiert auf einem Korollar des Fundamentales Satzes der Algebra, das sagt, dass jedes reelle Polynom ein Produkt von linearen und quadratischen Polynomen mit  $\mathbb{R}$  Koeffizienten.

### Satz 6.27

Sei  $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  eine rationale Funktion. Dann

$$R(x) = P_1(x) + \sum_{i=1}^n R_i(x) + \sum_{j=1}^m S_j(x)$$

wobei  $P_1 = \text{polynom}$

$$\begin{aligned} R_i(x) &= \frac{a_{i1}}{(x-x_i)} + \frac{a_{i2}}{(x-x_i)^2} + \dots + \frac{a_{ir_i}}{(x-x_i)^{r_i}} \\ S_j(x) &= \frac{b_{j1}x + d_{j1}}{\left((x-\alpha_j)^2 + \beta_j^2\right)} + \frac{b_{j2}x + d_{j2}}{\left((x-\alpha_j)^2 + \beta_j^2\right)^2} + \dots + \frac{b_{jm_j}x + d_{jm_j}}{\left((x-\alpha_j)^2 + \beta_j^2\right)^{m_j}} \end{aligned}$$

Die  $\frac{1}{(x-a)}$ ,  $\frac{bx+d}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^m}$  werden "elementare rationale Funktionen" genannt und wir wollen dafür Stammfunktionen bestimmen.

### Bemerkung

1. Das Polynom  $P_1(x)$  tritt nur auf, falls  $\deg P > \deg Q$ . In diesem Fall berechnet man  $P_1(x)$  mit Polynom division und es gilt  $p(x) = P_1(x) - Q(x) + P_2(x)$  mit  $\deg P_2 < \deg Q$
2. Das nennerpolynom  $Q(x)$  besitze



## KAPITEL 6. INTEGRATION

- Die reellen Nullstellen  $x_i$  mit Vielfachheit  $r_i$
- Die Komplexe Nullstellen  $z_j = \alpha_j + i\beta_j$  mit Vielfachheit  $m_j$  und damit komplex Konjugierte Nullstellen  $\bar{z}_j = \alpha_j - i\beta_j$

3. Unbekannte Parameter, die bestimmt werden müssen

$$\begin{array}{lll} a_{ik} & k = 1, \dots, r_i & i = 1, \dots, n \\ \beta_{jl}, \alpha_{jl} & l = 1, \dots, m_j & j = 1, \dots, m \end{array}$$

Diese Parameter werden durch Koeffizientenvergleich berechnet, die rechte Seite wird dabei auf den Hauptnenner gebracht.

### Beispiel

$R(x) = \frac{1-x}{x^2(x^2+1)}$  Ansatz:

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{b_1x + d_1}{x^2 + 1} \\ \Rightarrow 1 - x &= x(x^2 + 1)a_1 + a_2(x^2 + 1) + x^2(b_1x + d_1) \end{aligned}$$

Ausmultiplizieren:

$$1 - x = (a_1 + b_1)x^3 + (a_2 + d_1)x^2 + a_1x + a_2$$

Koeffizientenvergleich:

$$a_1 + b_1 = 0 \quad a_2 + d_1 = 0 \quad a_1 = -1 \quad a_2 = 1$$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1-x}{x^2(x^2+1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{x-1}{x^2+1}$$

### Grundtypen der Integration rationaler Funktionen

- Typ O: Polynom:

$$\int \sum a_n x^n dx = \sum a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

- Typ I: Inverse Potenzen

$$\int \frac{dx}{(x-x_0)^r} = \begin{cases} \log|x-x_0| + c & \text{für } r=1 \\ \frac{1}{(1-r)} \frac{1}{(x-x_0)^{r-1}} & \text{für } r \geq 2 \end{cases}$$

- Typ II:

$$\int \frac{bx+d}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^m} dx$$

Substitution:  $x - \alpha = \beta t$ ,  $dx = \beta dt$  ergibt

$$\int \frac{b[\beta t + \alpha] + d}{(t^2 + 1)^m \beta^{2m}} \beta dt$$

Dies hat die allgemeine Form

$$\begin{aligned} \int \frac{ct+b}{(t^2+1)^m} dt &= c \int \frac{t}{(t^2+1)^m} dt + \int \frac{b}{(t^2+1)^m} dt \\ &= \int \frac{t}{(t^2+1)^m} dt \quad \text{mit } t^2+1=u, 2t dt = du \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^m} = \begin{cases} \frac{u^{-m+1}}{2(1-m)} & , m \geq 2 \\ \frac{1}{2} \ln |u| & , m = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2(1-m)} \frac{1}{(t^2+1)} (1-m) & , m \geq 2 \\ \frac{1}{2} \ln |1+t^2| & , m = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Sei

$$I_m := \int \frac{dt}{(t^2+1)^m}$$

– Für  $m = 1$ :

$$I_1 = \int \frac{dt}{(t^2+1)} = \arctan t + C$$

– Für  $m \geq 1$ :

$$I_m := \int \frac{dt}{(t^2+1)^m}$$

Partielle Integration ergibt:

$$\begin{aligned} I_m &:= \int \underbrace{\frac{1}{v'}}_{v'} \cdot \underbrace{\frac{1}{(t^2+1)^m}}_u dt = \frac{t}{(t^2+1)^m} + \int \frac{t \cdot 2m \cdot t}{(t^2+1)^{m+1}} dt \\ &= \frac{t}{(t^2+1)^m} + 2m \int \frac{t^2+1-1}{(t^2+1)^{m+1}} dt \\ &= \frac{t}{(t^2+1)^m} + 2m \int \frac{1}{(t^2+1)^m} dt - 2m \int \frac{1}{(t^2+1)^{m+1}} dt \\ \Rightarrow I_m &= \frac{t}{(t^2+1)^m} + 2m \{I_m - I_{m+1}\} \end{aligned}$$

woraus

$$I_{m+1} = \frac{1}{2m} \left[ \frac{t}{(t^2+1)^m} + \left( \frac{2m-1}{2m} \right) I_m \right]$$

z.B.

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{t}{(t^2+1)} + \frac{1}{2} I_1 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{t}{(t^2+1)^2} + \frac{1}{2} \arctan t \right] + C \end{aligned}$$

### Beispiel 6.28

1.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2-3x-4} &= \frac{1}{(x-4)(x+1)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+1} \\ \Rightarrow A(x+1) + B(x-4) &= 1 \end{aligned}$$

## KAPITEL 6. INTEGRATION

$$x = 4 \Rightarrow A \cdot 5 = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{5}$$

$$x = -1 \Rightarrow B \cdot (-5) = 1 \Rightarrow B = -\frac{1}{5}$$

$$\int \frac{1}{x^2 - 3x - 4} dx = \frac{1}{5} \int \left( \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{1}{5} \ln \left| \frac{x-4}{x+1} \right| + c$$

2.

$$\frac{9}{x^3 - 3x - 2} = \frac{9}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{(x+1)^2}$$

$$A(x+1)^2 + (Bx+C)(x-2) = 9$$

$$x = -1 \Rightarrow (-B+C)(-3) = 9$$

$$x = 2 \Rightarrow A(9) = 9 \Rightarrow A = 1$$

$$x = 0 \Rightarrow A + C(-2) = 9 \Rightarrow -2C = 8 \Rightarrow C = -4$$

$$(-B+C) = -3 \Rightarrow B = C+3 = -1$$

$$\Rightarrow \frac{9}{x^3 - 3x - 2} = \frac{1}{x-2} + \frac{-x-4}{(x+1)^2}$$

$$\int \frac{9}{x^3 - 3x - 2} dx = \int \left( \frac{1}{x-2} + \frac{-x-1}{(x+1)^2} - \frac{3}{(x+1)^2} \right) dx$$

$$= \ln|x-2| - \ln|x+1| + \frac{3}{x+1} + c$$

$$= \ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right| + \frac{3}{x+1} + c$$

## 6.6 Das Uneigentliche Integral

Sei  $f$  eine unbeschränkte Funktion. Dann ist  $f$  nicht R. integrierbar, z.B.  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

hat keinen Sinn. Aber  $\forall \varepsilon > 0$  ist  $\frac{1}{\sqrt{x}} \in [\varepsilon, 1]$  stetig also integrierbar. Der Wert des Integral ist

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \Big|_{\varepsilon}^1 = 2 - 2\sqrt{\varepsilon}$$

also existiert

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2$$

Dies ist ein Beispiel von uneigentlichen R. Integral.

**Definition 6.29**

Sei  $f$  eine Funktion auf einem offenen Intervall  $(a, b)$ , deren Einschränkung auf jedes kompakte Teilintervall  $[a', b']$  integrierbar ist. Dann das uneigentliche Integral von  $f$  von  $a$  bis  $b$  definiert als

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{a' \searrow a} \lim_{b' \nearrow b} \int_{a'}^{b'} f(x)dx$$

falls diese Grenzwerte existieren ( $a$  und  $b$  können  $\pm\infty$  sein)

**Bemerkung 6.30**

1. Ist  $f$  schon auf  $[a, b]$  definiert und integrierbar, so existiert das Uneigentliche Integral und stimmt mit dem üblichen bestimmten Integral überein.
2. Ist  $f$  schon  $[a, b)$  definiert und auf jedem kompakten Teilintervall der Form  $[a, b']$  integrierbar, so gilt schon

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{b' \nearrow b} \int_a^{b'} f(x)dx$$

**Beispiel**

$$\int_0^\infty e^{-x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x}dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( -e^{-x} \Big|_0^b \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} (-e^{-b} + 1) = 1$$

3. Vorsicht: Die beiden Grenzwerte müssen im allgemeinen unabhängig voneinander genommen werden.

**Beispiel**

$$\begin{aligned} \int_{-b}^b xdx &= 0 \quad \forall b > 0, \text{ und daher} \\ \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^b xdx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \frac{b^2}{2} - \frac{b^2}{2} \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} 0 = 0 \end{aligned}$$

Die einzelnen Grenzwerte von  $\int_a^b xdx$  für  $b \rightarrow \infty$  und  $a \rightarrow -\infty$  existieren dagegen nicht

$$\left( \int_a^b xdx = \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right)$$

## KAPITEL 6. INTEGRATION

und somit auch nicht das uneigentliche Integral  $\int_{-\infty}^{\infty} x dx$

4. Alle Grundeigenschaften und Integrationstechniken für das bestimmte Integral gelten ebenso für das uneigentliche Integral.

Als Beispiel beweisen wir folgendes nützliches Konvergenzkriterium für Reihen

### Satz 6.30

Sei  $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$  monoton fallend. Dann konvergiert  $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$  genau dann wenn  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  existiert. In diesem Fall gilt:

$$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(k) - \int_1^{\infty} f(x) dx \leq f(1)$$

### Beweis



$$f(1) + f(2) + \dots + f(n-1) \geq \int_1^n f(x) dx \geq f(2) + \dots + f(n)$$

$$\sum_{k=1}^n f(k) - f(n) = \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \geq \int_1^n f(x) dx \geq \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) = \sum_{k=1}^n f(k) - f(1)$$

$$(*) \quad \sum_{k=1}^n f(k) - f(n) \geq \int_1^n f(x) dx \geq \sum_{k=1}^n f(k) - f(1)$$

$$\Rightarrow 0 < f(n) \leq \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx \leq f(1)$$

Aus

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) \geq \int_1^n f(x) dx$$

folgt das,

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) < \infty \Rightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx < \infty$$

und, aus

$$\int_1^n f(x) dx \geq \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1)$$

folgt dass

$$\int_1^{\infty} f(x) dx < \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f(k) < \infty$$

Aus (\*) folgt:

$$0 < f(n) \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(k) - \int_1^{\infty} f(x) dx \leq f(1)$$

### Beispiel 6.31

1.  $\sum (s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$  existiert für alle  $s > 1$

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{x^s} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-s} dx = \lim \begin{cases} \log |b| & s = 1 \\ \frac{x^{-s+1}}{1-s} \Big|_1^b & s > 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \text{divergent falls } s = 1 \\ \text{konvergent gegen } \frac{1}{s-1} \end{cases} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} - \int_1^{\infty} f(x) dx \leq f(1) = 1 \\ \Rightarrow \frac{1}{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} &\leq 1 + \frac{1}{s-1} = \frac{s}{s-1} \end{aligned}$$

- 2.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |x| e^{-x^2} dx &= - \int_{-\infty}^0 x e^{-x^2} dx + \int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx \\ \int_0^b x e^{-x^2} dx &= \frac{1}{2} \int_0^{b^2} e^{-u} du \quad \text{mit } u = x^2, du = 2x dx \\ &= \frac{1}{2} (1 - e^{-b^2}) \rightarrow \frac{1}{2} \text{ für } b \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| e^{-x^2} dx = 1$$

## KAPITEL 6. INTEGRATION

3. Wir haben die folgende einfache aber wichtige Beispiele

(a)

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^s} = \begin{cases} \frac{a^{1-s}}{s-1} & \text{für } s > 1 \\ \infty & \text{für } s \leq 1 \end{cases}$$

(b) Für alle  $a < b$  und  $s \in \mathbb{R}$  gilt

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^s} = \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-s}}{1-s} & \text{für } s < 1 \\ \infty & \text{für } s \geq 1 \end{cases}$$

### Satz 6.32 (Majorantenkriterium)

a) Sei  $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann gilt

$$\forall x : |f(x)| < g(x)$$

und  $\int_a^\infty g(x) dx$  konvergent  $\Rightarrow \int_a^\infty f(x) dx$  (absolut) konvergent.

b) Weiterhin gilt folgende Umkehrung:  $\forall x : 0 \leq g(x) \leq f(x)$  und  $\int_a^\infty g(x) dx$  divergent  $\Rightarrow \int_a^\infty f(x) dx$  divergent.

### Beispiel 6.33

1.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{t^2}{(1+6t^2)^{5/3}} dt &< \int_0^\infty \frac{t^2}{(6t^2)^{5/3}} dt < \int_0^\infty \frac{c}{t^{4/3}} dt < \infty \\ &\Rightarrow \int_0^\infty \frac{t^2}{(1+6t^2)^{5/2}} dt \text{ konvergiert} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{t^2}{(1+6t^2)^{3/2}} dt \\ &\frac{t^2}{(1+6t^2)^{3/2}} > \frac{t^2}{(12t^2)^{3/2}} > \frac{c}{t} \quad t \geq 1 \\ &\Rightarrow \int_0^\infty \frac{t^2}{(1+6t^2)^{5/2}} dt \text{ divergiert weil } \int_0^\infty \frac{c}{t} dt \text{ divergiert} \end{aligned}$$

3. Exponentialintegral:

$$E_i(x) := \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt \text{ für } x < 0$$

Da  $\lim_{t \rightarrow -\infty} te^t = 0$ , gibt es  $c > 0$  mit  $|te^t| \leq c$ ,  $\forall t \in [-\infty, x]$ , und somit gilt

$$\left| \frac{e^t}{t} \right| = \left| \frac{te^t}{t^2} \right| \leq \frac{c}{t^2}$$

Mit der Konvergenz des Integrals  $\int_{-\infty}^x \frac{1}{t^2} dt$  folgt die (Absolut) Konvergenz des  $E_i(x)$  für alle  $x < 0$



## Kapitel 7

# Gewöhnliche Differenzialgleichungen

Eine Gleichung, in der Ableitungen einer gesuchte Funktionen auftreten, nennt man Differentialgleichung.

$$y'(t) = y + y^2$$

$$(y'(t))^2 = y(t) + 2$$

Hängt die gesuchte Funktion in der DGL nur von einer einzigen Variablen ab, so spricht man von einer “gewöhnliche DGL”.

Hängt hingegen die gesuchte Funktion von mehreren Variablen ab, d.h. kommen partielle Ableitungen in der Differentialgleichung vor, so liegt eine “Partielle DGL” vor. Viele physikalische Prozesse lassen sich oft durch Differentialgleichungen beschreiben.

### Beispiel

1. Ein lineares Federpendel wird durch folgende DGL beschrieben

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -Kx \quad \text{mit } K = \text{Federkonstante}$$



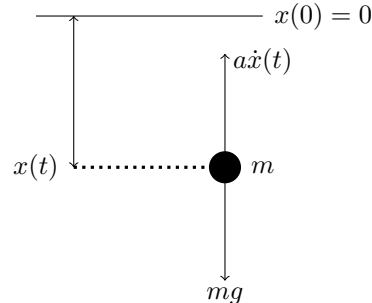
Unbekannt ist hier die Auslenkung  $x$  in Abhängigkeit von der Zeit  $t$

2. Beim radioaktiven Zerfall, haben wir

$$\frac{df(t)}{dt} = -\alpha f \quad f(0) = f_0$$

wobei  $f(t)$  = die noch vorhandene Masse eines Stoffes. Pro Zeiteinheit zerfallende Masse ist proportional zur noch vorhandenen Masse

### 3. Freier Fall mit Reibung



Sei  $m$  eine Massepunkt der Unter Einfluss der Schwerkraft fällt. Es kann auch ein Reibungskraft geben.

Die gröse der Reibungskraft ist proportional zur Geschwindigkeit. Dann ist, nach der zweiten Newtonische Gesetz

$$m\ddot{x} = mg - a\dot{x} \quad v = \frac{dx}{dt}$$

Beim Beispiel 2., haben wir schon letzte Semester gesehen dass

$$\frac{df(t)}{dt} = -\alpha f$$

als eine Lösung  $Ke^{-\alpha t}$ ,  $K \in \mathbb{R}$ , hat

$$f' = -\alpha f \Rightarrow \frac{f'}{f} = -\alpha$$

$$\int \frac{f'(t)}{f(t)} dt = - \int \alpha dt$$

$$\ln |f(t)| = -\alpha t + C$$

$$\Rightarrow f(t) = Ke^{-\alpha t} \text{ mit } K = e^C$$

Alle 3 Beispiele sind Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten.

## 7.1 Lineare DGL mit konstante Koeffizienten

### Definition 7.1

Eine lineare Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung hat die Gestalt

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

mit  $a_i(x), i = 0, \dots, n-1, b(x)$  Funktionen.

Ist das so genannte Störfunktion  $b(x)$  konstant gleich 0, so heisst die DGL homogen, andernfalls inhomogen. Im Falle  $a_i(x) = a_i$  Konstanten, heisst die LDG, LDG mit Konstanten koeffizienten.

## KAPITEL 7. GEWÖHNLICHE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

In diesem Abschnitt betrachten wir DGL mit konstanten Koeffizienten. Eine DGL ist genau dann linear wenn alle Potenzen der gesuchte Funktion und deren Ableitung(en) nur mit Potenz 1 vorkommen. z.B.:

- $(y')^2 + y^2 = 1$  ist nicht linear
- $y' = 2xy$  ist linear
- $y' = \sqrt{y} + 1$  ist nicht linear
- $y'' + 2y' + x = 0$  ist linear

Zum nächst betrachten wir Homogene LDG mit konstanten Koeffizienten. Sei

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0 = 0 \quad (\text{H})$$

wobei  $a_i \in \mathbb{R} \ i = 0, \dots, n-1$

### Definition 7.2

Das charakteristische Polynom der Gleichung (H) ist gegeben durch

$$p(t) := t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_0$$

### Lemma 7.3

Die Funktion  $y(x) = e^{\lambda x}$  ist genau dann Lösung von (H) falls  $p(\lambda) = 0$

### Beweis

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

$$y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$$

$$y^j(x) = \lambda^j e^{\lambda x}$$

Also mit

$$= y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_0 = (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0)e^x =$$

$$\Leftrightarrow \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0 = p(\lambda) = 0$$

### Satz 7.4

Sei  $p(\lambda) = \prod_{i=1}^l (\lambda - \lambda_i)^{m_i}$  mit  $\lambda_j \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda_i \neq \lambda_j (i \neq j)$ . Dann ist jede Lösung der zugehörigen HDGL darstellbar als Linearkombination der  $n$  linear unabhängigen Funktionen  $y_{ik}(x) = x^k e^{\lambda_i x}$ ,  $1 \leq i \leq l$ ,  $0 \leq k \leq m_i$ .

**Bemerkung 7.5**

1. Falls die charakteristische Polynom  $n$  verschiedene reelle Nullstelle  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  besitzt, so bilden  $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$  eine Basis des Vektorraums der Lösungen, das heisst für jede Lösung  $y(x)$  gibt es  $c_1, c_2, \dots, c_n$  so dass

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x}$$

2. Sei  $\lambda$  eine  $k$ -fache reelle Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Dann sind

$$e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda x}$$

$k$  linear unabhängige Lösungen.

3. Sind  $\lambda = \alpha + i\beta$ ,  $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ , ein Paar konjugiert komplexer  $k$ -fache Nullstellen, so sind die Funktionen

$$\begin{array}{cc} e^{\alpha x} \cos(\beta x) & e^{\alpha x} \sin(\beta x) \\ \vdots & \vdots \\ x^{k-1} e^{\alpha x} \cos(\beta x) & x^{k-1} e^{\alpha x} \sin(\beta x) \end{array}$$

$2k$  linear unabhängige Lösungen der DGL

$$\left( e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x} \cos(\beta x) + i e^{\alpha x} \sin(\beta x) \right)$$

**Beispiel 7.6**

- 1.

$$y'' - y = 0$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 1 = 0 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

- 2.

$$y'' + y = 0$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 1 = (\lambda + i)(\lambda - i)$$

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

- 3.

$$y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0$$

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0 = (\lambda^2 + 1)^2 = (\lambda - i)^2 (\lambda + i)^2$$

Also,  $\cos x, \sin x, x \cos x, x \sin x$  sind Lösungen.

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 x \cos x + c_3 \sin x + c_4 x \sin x$$

4.

$$y^{(4)} - y = 0$$

$$p(\lambda) = t^4 - 1 = (t^2 - 1)(t^2 + 1) = (t + 1)(t - 1)(t + i)(t - i)$$

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \sin x + c_4 \cos x$$

5.

$$2y'' + 20y' + 48y = 0$$

$$p(\lambda) = 2\lambda^2 + 20\lambda + 48 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -4, -6$$

Die Lösung ist

$$y(x) = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{-6x}$$

## 7.2 Inhomogene DGL

Bisher haben wir nur Homogene Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten betrachtet. Sehr oft treten auch Zusatzterme in den Gleichung auf. Wir haben der Folgende Allgemeine Satz für die Lösungsstruktur linearer DGL

### Satz 7.7

Die allgemeine Lösung einer inhomogenen DGL

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = b(x)$$

ist die Summe einer "spezielle" Lösung der inhomogenen DGL und der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen DGL

$$\underbrace{y_A(x)}_{\text{Allgemeine Lösung der inhomogene DGL}} = \underbrace{y_S(x)}_{\text{Spezielle Lösung der inhomogene DGL}} + \underbrace{y_{AH}(x)}_{\text{Allgemeine Lösung der Homogene DGL}}$$

### Beispiel

$$y'' + y = \sin x$$

Um diese inhomogene DGL zu lösen, benötigen wir die allgemeine Lösung der zugehörigen homogene DGL  $y'' + y = 0$

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow y_{AH}(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

Nun wird noch eine spezielle Lösung der inhomogene DGL  $y'' + y = \sin x$  benötigt. Wir verifizieren dass  $y(x) = -\frac{1}{2}x \cos x$  eine derartige Lösung ist

$$y'(x) = -\frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} x \sin x$$

$$y''(x) = \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} x \cos x = \sin x + \frac{1}{2} x \cos x$$

$$y''(x) + y(x) = \sin x + \frac{1}{2} x \cos x - \frac{1}{2} x \cos x = \sin x$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenes DGL ist damit

$$y(x) = \underbrace{-\frac{1}{2}x \cos x}_{\text{Spezielle Lösung der inhomogene DGL}} + \underbrace{c_1 \sin x + c_2 \cos x}_{\text{Allgemeine Lösung der Homogene DGL}}$$

**Bemerkung**

Man kann als Speziell Lösung der inhomogenes DGL auch

$$y(x) = -\frac{1}{2}x \cos x + 5 \sin x$$

wählen. Dann gilt auch hier  $y'' + y = \sin x$ . Die allgemeine Lösung der inhomogenes DGL

$$y(x) = \underbrace{-\frac{1}{2}x \cos x + 5 \sin x}_{\text{Spezielle Lösung inhomogenes DGL}} + \underbrace{k_1 \sin x + k_2 \cos x}_{\text{Allgemeine Lösung homogenes DGL}}$$

Sie unterscheidet sich nicht von der Lösung

$$y(x) = -\frac{1}{2}x \cos x + c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

$$c_1 = 5 + k$$

**Frage:**

Wie kann man eine spezielle Lösung finden?

**Antwort:**

Zur Lösung der inhomogenes DGL kann man in vielen Fällen einen so genannte “Ansatz vom Typ der rechten Seite” wählen. Hier geht man davon aus, dass die Lösung die gleiche Gestalt wie die Störfunktion haben wird.

z.B.: ist die Störfunktion ein Polynom, so nimmt man an, dass die spezielle Lösung auch ein polynom sein wird. Ist die Störfunktion ein exponentialfunktion so nimmt man an, dass die Lösung auch ein exponentialfunktion sein wird.

**Beispiel 7.8**

1. Wir betrachten die DGL

$$y'' + y' - 6y = 3e^{-4x}$$

Die Zugehörige homogenes DGL

$$y'' + y' - 6y = 0$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \quad \lambda_{1,2} = 2, -3$$

Die Allgemeine Lösung der Homogenes DGL ist

$$y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x}$$

Zur Lösung der inhomogenes DGL verwenden wir einen “Ansatz vom Typ der Rechten Seite”, gehen also davon aus, dass die spezielle Lösung der inhomogenes DGL die ähnliche Gestalt hat (als die Störfunktion)

$$y_s(x) = K e^{-4x}$$

## KAPITEL 7. GEWÖHNLICHE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

Für die Ableitungen des Ansatzes haben wir

$$y'_s(x) = -4Ke^{-4x}$$

$$y''_s(x) = 16Ke^{-4x}$$

Eingesetzt in die homogenes DGL ergibt sich

$$y'' + y' - 6y = 16Ke^{-4x} - 4Ke^{-4x} - 6Ke^{-4x} = 6Ke^{-4x} = 3e^{-4x}$$

Also  $6K = 3 \Rightarrow K = \frac{1}{2}$ . Damit ist  $y_s(x) = \frac{1}{2}e^{-4x}$  und die allgemeine Lösung der DGL

$$y(x) = \frac{1}{2}e^{-4x} + c_1e^{-3x} + c_2e^{2x} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

2.

$$y'' + y' - 6y = 50 \sin x$$

Wählen wir als "Ansatz vom Typ der rechten Seite"

$$y_s(x) = K_1 \sin x + K_2 \cos x$$

$$y'_s(x) = K_1 \cos x - K_2 \sin x$$

$$y''_s(x) = -K_1 \sin x - K_2 \cos x$$

$$\begin{aligned} y'' + y' - 6y &= -K_1 \sin x - K_2 \cos x + K_1 \cos x - K_2 \sin x + 6K_1 \sin x + 6K_2 \cos x \\ &= (-7K_1 - K_2) \sin x + (-7K_2 + K_1) \cos x \\ &= 50 \sin x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -7K_2 + K_1 = 0 \Rightarrow K_1 = 7K_2$$

$$-7K_1 - K_2 = 50 \Rightarrow -49K_2 - K_2 = 50$$

$$\Rightarrow K_2 = -1, K_1 = -7$$

$$y_s(x) = -7 \sin x - \cos x$$

Damit ist die allgemeine Lösung der inhomogenes DGL

$$y(x) = -7 \sin x - \cos x + c_1e^{-3x} + c_2e^{2x}$$

Ein problem ergibt sich, wenn als Störfunktion eine Lösung der homogenes DGL erscheint:

3.

$$y'' + y' - 6y = e^{2x}$$

"Der Ansatz vom Typ der rechten Seite"

$$y(x) = Ke^{2x}$$

führt nicht weiter da dieser Ansatz eingesetzt in homogenes DGL 0 ergeben muss und nicht  $e^{2x}$ . Wir führen nun der Ansatz

$$y(x) = Kxe^{2x}$$

## KAPITEL 7. GEWÖHNLICHE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

$$y'(x) = Ke^{2x} + 2Kxe^{2x}$$

$$y''(x) = 2Ke^{2x} + 2Ke^{2x} + 4Kxe^{2x}$$

$$\begin{aligned} y'' + y' - 6y &= 4Kxe^{2x} + 4Kxe^{2x} + Ke^{2x} + 2Kxe^{2x} - 6Kxe^{2x} \\ &= 5Ke^{2x} = 10e^{2x} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow K = 2$$

Der Ansatz führte also auf die Lösung

$$y_s(x) = 2xe^{2x}$$

Insgesamt:

$$y(x) = 2xe^{2x} + c_1e^{-3x} + c_2e^{2x} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

3.

$$y'' + y = \sin x$$

$$y_H = c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

Für die Spezielle Lösung zu finden, wählen wir den Ansatz vom Typ der rechten Seite

$$y_s(x) = x(K_1 \sin x + K_2 \cos x)$$

$$y'_s(x) = (K_1 \sin x + K_2 \cos x) + x(K_1 \cos x - K_2 \sin x)$$

$$y''_s(x) = K_1 \cos x - K_2 \sin x + K_1 \cos x - K_2 \sin x + x(-K_1 \sin x - K_2 \cos x)$$

Eingesetzt in die DGL ergibt sich

$$y''_s(x) + y_s(x) = 2K_1 \cos x - 2K_2 \sin x - x(K_1 \sin x + K_2 \cos x) + x(K_1 \sin x + K_2 \cos x)$$

$$= 2K_1 \cos x - 2K_2 \sin x = \sin x$$

$$\Rightarrow 2K_1 = 0, -2K_2 = 1 \Rightarrow K_1 = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y_s(x) = -\frac{1}{2}x \cos x$$

$$y_A = -\frac{1}{2}x \cos x + c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

Zur Lösung der Inhomogenen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, kann man einen “Ansatz vom Typ der rechten Seite” wählen. Die Idee ist dass die Lösungsfunktion und Störfunktion ähnlich sind.



## KAPITEL 7. GEWÖHNLICHE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

Störfunktion	Ansatz für Lösung $y_s(x)$
$P_n(x)$	$Q_n(x) = a_n x^n + \dots + a_0$
$K e^{ax}$	$K e^{ax}$
$A \sin bx$ $A \cos bx$	$K_1 \sin bx + K_2 \cos bx$
$A e^{\alpha x} \sin \beta x$ $B e^{\alpha x} \cos \beta x$	$K_1 e^{\alpha x} \sin \beta x + K_2 e^{\alpha x} \cos \beta x$
$P_n(x) e^{\alpha x} \sin \beta x$	$e^{\alpha x} [R_n(x) \sin \beta x + S_n(x) \cos \beta x]$

wobei  $P_n, Q_n, S_n, R_n$  Polynome von Grad  $n$  sind.

### Bemerkung 7.9

1. Liegt eine Linearkombination der Störfunktion vor, so hat man auch als Ansatz eine entsprechende Linearkombination zu wählen. Dies ist Superpositionsprinzip

end of this list?

### Superpositionsprinzip:

Ist  $y_1(x)$  eine spezielle Lösung der L. Differentialgleichung

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_0(x)y = b_1(x)$$

und  $y_2(x)$  eine spezielle Lösung der LDGL

$$y^n(x) + \dots + a_0(x)y = b_2(x)$$

dann ist  $y_1(x) + y_2(x)$  eine Spezielle Lösung der DGL

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_0(x)y = b_1(x) + b_2(x)$$

### Beispiel

Die DGL  $y'' + y' - 6y = 50 \sin x$  hat die spezielle Lösung

$$y_s(x) = -7 \sin x - \cos x$$

und die DGL  $y'' + y' - 6y = 10e^{2x}$  hat die spezielle Lösung

$$y_s(x) = 2xe^{2x}$$

Die DGL  $y'' + y' - 6y = 50 \sin x + 10e^{2x}$  hat die spezielle Lösung

$$y_s(x) = -7 \sin x - \cos x + 2xe^{2x}$$

## KAPITEL 7. GEWÖHNLICHE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

Die allgemeine Lösung

$$y(x) = -7 \sin x - \cos x + 2xe^{2x} + c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x}$$

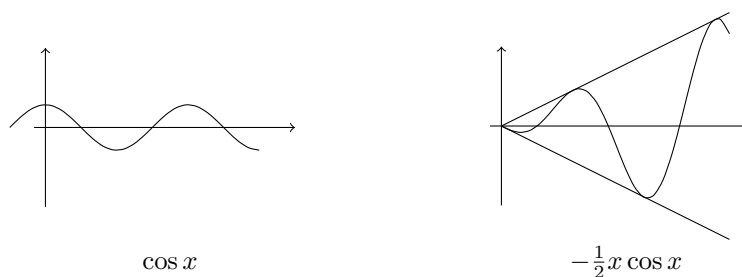
2. Falls  $\lambda = \alpha + i\beta$  ( $\beta$  kann null sein) eine  $m$ -fache Nullstelle der charakteristischen Polynoms von (Resonanzfall)

$$(H) \quad y^n(x) + a_n y^{(n-1)} + \dots + a_0 = 0$$

so muss man den Ansatz für  $y_s(x)$  mit dem Faktor  $x^m$  multiplizieren.

### Beispiel

$y'' + y = \sin x$  hat die spezielle Lösung  $y_s = -\frac{1}{2}x \cos x$



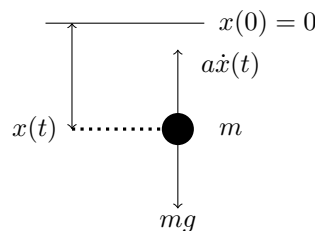
### Zusatzbedingungen einer DGL. Anfangs und Randbedingungen

Die in der allgemeinen Lösung einer DGL  $n$ -ter Ordnung auftretenden Parameter lassen sich durch Zusatzbedingungen festlegen. Physikalische sinnvolle Zusatzbedingungen werden meist in der Form von Anfangsbedingungen oder Randbedingungen vorgegeben.

Durch Vorgabe von derartigen Bedingungen eliminiert man die Parameter aus der allgemeinen Lösung der DGL und erhält damit eine partikuläre Lösung.

### Beispiel 7.10

Freifall mit Reibung



## KAPITEL 7. GEWÖHNLICHE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

$m\ddot{x} = mg - a\dot{x}$ . Anfangsbedingungen:  $x(0) = 0; v(0) = \dot{x}(0) = 0$

$$mx''(t) + ax'(t) = mg$$

$$(H) \quad mx''(t) + ax'(t) = 0$$

$$p(\lambda) = m\lambda^2 + a\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0, \lambda = -\frac{a}{m}$$

$$x_h(t) = c_1 + c_2 e^{-\frac{a}{m}t}$$

Für die spezielle Lösung, wählen wir als Ansatz  $x_s(t) = kt$

$$\left( \begin{array}{l} b(t) = mg = \text{konstant, aber } e^{0 \cdot t} = 1 = \text{konstant} \\ \text{ist eine Lösung der (H)} \end{array} \right)$$

$$x'(t) = k \quad x''(t) = 0$$

$$mx''(t) + ax'(t) = ak = mg \Rightarrow k = \frac{mg}{a}$$

Allgemeine Lösung

$$x(t) = x_h(t) + x_s(t) = c_1 + c_2 e^{-\frac{a}{m}t} + \frac{mg}{a}t$$

Anfangsbedingungen

$$x(0) = 0 = c_1 + c_2 = 0$$

$$x'(t) = c_2 \left(-\frac{a}{m}\right) e^{-\frac{a}{m}t} + \frac{mg}{a} = 0$$

$$x'(0) = 0 \Rightarrow c_2 \left(-\frac{a}{m}\right) + \frac{mg}{a} = 0$$

$$c_2 = \frac{m^2 g}{a^2} \quad c_1 = -\frac{m^2 g}{a^2}$$

$$\Rightarrow x(t) = -\frac{m^2 g}{a^2} + \frac{m^2 g}{a^2} e^{-\frac{a}{m}t} + \frac{mg}{a}t$$

$$x(t) = \frac{mg}{a}t - \frac{m^2 g}{a^2} [1 - e^{-\frac{a}{m}t}]$$

Eine partikuläre Lösung einer DGL  $n$ -ter Ordnung

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) + \dots + a_0 y(x) = b(x)$$

kann man aus der allgemeine Lösung

$$y(x) = y(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$$

der DGL erhalten

- Durch die Vorgabe von Anfangsbedingungen

$$y(x_0) = A_0$$

$$y'(x_0) = A_1$$

$$y^{(n-1)}(x_0) = A_n$$

(Funktionswert und weitere Ableitungen bis zur  $(n-1)$ -ten an einer speziellen stelle  $x_0$ .

- Durch die Vorgabe von Randbedingungen

$$y(x_1) = B_1, y(x_2) = B_2, \dots, y(x_n) = B_n$$

Funktionswerte an  $n$  verschiedene Stellen

**Beispiel 7.11**

Lineares Federpendel:

$$mx''(t) + K_1 x = 0, \omega^2 = \frac{K}{m}$$

$$x''(t) + \omega^2 x = 0 \quad (H)$$

$$p(\lambda) : \lambda^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm \omega i$$

Homogene Lösung:  $x_h(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$  Wenn wir den folgenden Zusatzbedingungen haben

(i)  $x(0) = 1, x'(0) = 2\omega$

$$x'(t) = -c_1 \omega \sin \omega t + c_2 \omega \cos \omega t$$

$$x(0) = 1 \Rightarrow c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = c_1 = 1$$

$$x'(0) = 2\omega \Rightarrow -c_1 \omega \sin 0 + c_2 \omega \cos 0 = 2\omega$$

$$\Rightarrow \omega c_2 = 2\omega \Rightarrow c_2 = 2$$

$$\Rightarrow x_p(t) = \cos \omega t + 2 \sin \omega t$$

(ii) Mit Randbedingungen:  $x(0) = 1, x\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) = 1$

$$x(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = c_1 = 1$$

$$x\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) = c_1 \cos \frac{\pi}{2} + c_2 \sin \frac{\pi}{2} = c_2 = 1$$

Also  $x_p(t) = \cos \omega t + \sin \omega t$

### 7.3 Lineare DGL erster Ordnung (mit allgemeinen Koeffizienten)

Die LDGL hat allgemeine Form

$$y'(x) = a(x)y + b(x)$$

$b(x)$  - inhomogene Term.

Und  $y'(x) = a(x)y$  ist die zugehörige homogene Gleichung.

Lösung von  $y'(x) = a(x)y$ :

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = a(x)$$

d.h.  $(\ln y(x))' = a(x)$ . Sei  $A(x)$  eine Stammfunktion von  $a(x)$ , so ist

$$\ln y(x) = A(x) + c$$

Also  $y(x) = e^{A(x)} \cdot e^c = K e^{A(x)}$

## KAPITEL 7. GEWÖHNLICHE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

### Satz 7.12

Die allgemeine Lösung von  $y' = ay$  ist  $y(x) = Ke^{A(x)}$  wobei  $K \in \mathbb{R}$  und  $A'(x) = a(x)$

### Beispiel

$$xy' - 2y = 0$$

$$y' = \frac{2}{x}y \Rightarrow a(x) = \frac{2}{x}, A(x) = 2 \ln |x| = \ln x^2$$

$$e^{A(x)} = e^{\ln x^2} = x^2$$

$$\Rightarrow \text{Lösung von } y'(x) = \frac{2}{x}y \Rightarrow y(x) = Kx^2$$

Jetzt suchen wir eine spezielle Lösung von  $y' = a(x)y + b(x)$

### Ansatz

$y = uv$  wobei  $u, v$  Funktionen sind. Dann ist

$$y' = u'v + uv'$$

und

$$a(x)y + b(x) = ay + b = u'v + uv'$$

$$a(uv) + b = u'v + uv'$$

$$\Rightarrow u'v + u[v' - av] = b$$

Jetzt wählen wir  $v$  so dass

$$v' - av = 0$$

, d.h.

$$v = e^{A(x)}$$

Dann ist  $u'v = b$  d.h.  $u' = be^{-A(x)}$  d.h.  $u$  ist eine Stammfunktion von  $be^{-A(x)}$

### Satz 7.13

Seien  $A(x)$  eine Stammfunktion von  $a(x)$  und  $U(x)$  eine Stammfunktion von  $be^{-A(x)}$ . Dann ist  $y(x) = e^{A(x)} \cdot U$  Lösung von  $y' = a(x)y + b(x)$

### Korollar 7.14

Die Allgemeine Lösung von LDGL  $y' = ay + b$  ist durch  $y(x) = e^{A(x)} \int b(x)e^{-A(x)} dx + Ke^{A(x)}$  gegeben wobei  $K \in \mathbb{R}$ ,  $A(x)$  eine Stammfunktion von  $a(x)$

**Beispiel 7.15**

1.

$$xy' - 2y = 2x^4$$

$$\Rightarrow y' = \underbrace{\frac{2}{x}}_{a(x)} y + \underbrace{2x^3}_{b(x)}$$

$$A(x) = 2 \ln |x| = \ln x^2$$

$Ke^{A(x)} = Kx^2$  ist die Lösung von homogene DGL  $y' = ay$

Wir bestimmen jetzt die Stammfunktion von

$$b(x) \cdot e^{-A(x)} = 2x^3 e^{-\ln(x)^2} = 2x^3 x^{-2} = 2x$$

$$2 \frac{x^3}{x^2} = 2x$$

Also ein Stammfunktion von  $b(x)e^{-A(x)}$  ist  $\int 2x dx = x^2$  und  $x^2 e^{A(x)} = x^4$ .  
Somit ist die Allgemeine Lösung

$$y(x) = x^4 + Kx^2$$

2.

$$y' = 4x + 5y - 3$$

$$y' - \underbrace{5}_a y = \underbrace{4x - 3}_b$$

LDGL mit konstanten Koeffizienten. Störfunktion ist  $4x - 3$ .

HDGL:

$$y' - 5y = 0$$

$$\frac{y'}{y} = 5$$

$$\ln y(x) = 5x + c$$

$$y_h(x) = Ke^{5x} \text{ Hom. Lösung}$$

$$A(x) = 5x$$

Spez. Lösung: Sei  $U(x)$  Stammfunktion von  $(4x - 3)e^{-5x}$ . Dann ist die spezielle Lösung

$$e^{5x} U(x) = e^{5x} \int (4x - 3)e^{-5x} dx$$

$$\int \underbrace{(4x - 3)}_u \underbrace{e^{-5x}}_{v'} dx$$

$$\stackrel{P.I.}{=} (4x - 3) \frac{e^{-5x}}{-5} + \frac{4}{5} \int e^{-5x} dx$$

$$= \left[ \left( \frac{4x-3}{-5} \right) - \frac{4}{25} \right] e^{-5x}$$

$$= \left( \frac{-4x}{-5} + \frac{11}{25} \right) e^{-5x}$$

$$\Rightarrow \text{Spezielle Lösung: } y_s(x) = e^{5x} \cdot U(x) = \frac{-4x}{5} + \frac{11}{25}$$

Allgemeine Lösung:

$$y(x) = K e^{5x} - \frac{4x}{5} + \frac{11}{25}$$

## 7.4 Separierbare DGL

### Definition 7.16

Eine separierbare DGL ist eine der Form

$$y' = f(x)g(y)$$

Ein einfaches Verfahren, so genannte “separation der Variablen” lässt sich anwenden, wenn die DGL separierbar ist. Der “trick”: Wir trennen die Terme voneinander und dann integrieren. Dabei ist es hilfreich  $y' = \frac{dy}{dx}$  zu schreiben und formel  $dy$  bzw.  $dx$  als Zähler bzw. Nenner des Bruches aufzufassen

### Beispiel 7.17

1.

$$y' = 2xy$$

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2x dx$$

↓

trennen formel  $x$  bzw  $y$  - Terme

Jetzt Integrieren wir auf beiden Seiten

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x dx$$

$$\ln |y| = x^2 + c$$

Da wir an der Lösung  $y$  interessiert sind und nicht am Logarithmus davon, wenden wir die Exponentialfunktion an

$$|y| = e^{x^2+c} = e^c e^{x^2}$$

Links und rechts stehen nur positive Grösse. Wenn wir aber auf der Rechten Seite nicht nur positive konstante  $e^c > 0$  zulassen, sondern irgendwelche Konstanten  $K \in \mathbb{R}$  so erhalten wir

$$y(x) = K e^{x^2}$$

2.

$y' = 1 + y^2$  ist separierbar

$$\int \frac{dy}{1 + y^2} = \int dx$$

$$\Rightarrow \arctan y = x + c \Leftrightarrow y = \tan(x + c)$$

**Bemerkung 7.18**

$y' = f(x)g(y)$  hat die Konstante Lösungen  $y = y_0$  für alle  $y_0$  mit  $g(y_0) = 0$ . Der Fall  $g(y) = 0$  muss gesondert betrachtet werden.

3.

$$|x|, |y| < 1, y' = \sqrt{\frac{1 - y^2}{1 - x^2}}$$

hat keine Konstante Lösungen

$$\frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\Rightarrow \arcsin y = \arcsin x + c$$

$$y = \sin[\arcsin x + c]$$

$$= x \cos c \pm \sqrt{1 - x^2} \sin c$$

$$= ax + b\sqrt{1 - x^2}$$

wobei  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a^2 + b^2 = 1$ . Rückeinsetzen in die DGL liefert die Zusatzbedingung

$$y' = a - \frac{bx}{\sqrt{1 - x^2}} > 0, \quad (1 + y^2 > 0)$$



# Kapitel 8

## Differentialrechnung in $\mathbb{R}^n$

### 8.1 Partielle Ableitungen und Differential

Wie kann man die Begriffe der Differentialrechnung auf Funktionen  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  erweitern?

Missing content?? page 113 top

Funktion in mehreren Variablen sind ein bisschen komplizierter als Funktionen in einer Variable.

#### Beispiel

1.  $f(x) = x^2 + 5$  ist in Ursprung stetig da  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ . Aber  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ist im Ursprung nicht stetig.

Where is number 2 of the Beispiel??

$$\begin{array}{ll} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = 0}} \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2} = 0 = f(0, 0) & \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ x = 0}} \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2} = 0 = f(0, 0) \end{array}$$

is this continuation of the Beispiel, or is it outside??

Aber der Limes entlang der Gerade  $y = mx$

$$\begin{array}{ll} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = mx}} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2}{(1 + m^2)x^2} = \frac{m}{1 + m^2} \\ \downarrow \\ \text{Hängt von } m \text{ ab} \end{array}$$

und  $\frac{m}{1+m^2} \neq 0$ , falls  $m \neq 0$ . Eine Funktion  $f(x, y)$  an der Stelle  $(x_0, y_0)$  ist stetig wenn der Limes  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$  in jeder Richtung den gleichen Wert haben.

### Definition 8.1

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \Omega$

1.  $f$  hat den Grenzwert  $c \in \mathbb{R}$ , d.h.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$$

weil es zu jeder (beliebig kleinen) Schranke  $\varepsilon > 0$ , eine  $\delta$ -Umgebung

$$B_\delta(a) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - a| < \delta\}$$

gibt, so dass  $|f(x) - c| < \varepsilon$  für alle  $x \in \Omega \cap B_\delta(a)$ ,  $x \neq a$  gilt

2.  $f$  heißt in  $a \in \Omega$  stetig, wenn  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  gilt.
3.  $f$  heißt in  $\Omega$  stetig, wenn  $f$  in allen  $a \in \Omega$  stetig ist.

Die Summe, das Produkt, der Quotient (Nenner ungleich Null) stetiger Funktionen sind stetig.

$f$  besitzt keinen Grenzwert in  $x_0$  wenn sich bei Annäherungen an  $x_0$  auf verschiedenen Kurven (z.B. Geraden) verschiedene oder keine Grenzwerte ergeben.

### Sandwichlemma

Sei  $f, g, h$  Funktionen wobei  $g < f < h$ . Wenn  $\lim_{x \rightarrow a} g = L = \lim_{x \rightarrow a} h$  gilt, dann ergibt  $\lim_{x \rightarrow a} f = L$ .

Da  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |y| = 0$  gilt,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 \Rightarrow f$  ist in  $(0,0)$  stetig.

### Oder

Für Grenzwertbestimmungen (also auch für Stetigkeitsuntersuchungen) ist es oft nützlich, die Funktionen mittels Polarkoordinaten umzuschreiben. Vor allem bei rationalen Funktionen.

Hierbei gilt  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , wobei  $r$  = Länge des Vektors  $(x, y)$  und  $\varphi$  der Winkel. Nun lassen wir die Länge  $r$  gegen 0 gehen.

### Beispiel

1. Die Funktionen

- $f(x, y) = x^2 + y^2$
- $f(x, y, z) = x^3 + \frac{x^2}{y^2 + 1} + z$

## KAPITEL 8. DIFFERENTIALRECHNUNG IN $\mathbb{R}^n$

- $f(x, y) = 4x^2y^3 + 3xy$
- $f(x, y) = \cos xy$

sind stetig, da sie aus Steigen Funktionen zusammengesetzt.

2.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Für  $(x, y) \neq (0, 0)$  ist  $f$  als Quotient von stetigen Funktionen stetig. Es verbleibt  $f$  im Punkt  $(0, 0)$  zu untersuchen. Da

$$\left| \frac{x^2}{x^2+y^2} \right| \leq 1$$

$$0 < |f(x, y)| < |y|$$

$$f(x, y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \frac{(r^2 \cos^2 \theta)(r \sin \theta)}{r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = r \cos^2 \theta \sin \theta$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(r, \theta) = \lim_{r \rightarrow 0} r \cos^2 \theta \sin \theta = 0$$

3. Wir können nochmals die Stetigkeit der Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

mittels Polarkoordinaten untersuchen

$$f(x, y) = \frac{r^2 \cos \theta \sin \theta}{r^2} = \cos \theta \sin \theta$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(x, y) = \cos \theta \sin \theta$$

hängt von  $\theta$  ab.

$\Rightarrow f$  in  $(0, 0)$  nicht stetig

### Bemerkung

Eine trickreiche Variante Grenzwerte zu berechnen, ergibt sich durch substitution, d.h. man berechnet den Grenzwert

is this supposed to be inside the list or out??

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(g(x, y))$$

indem man zunächst  $t = g(x, y)$  setzt und den Grenzwert

$$t_0 = \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} g(x, y)$$

bestimmt. Dann ist

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(g(x, y)) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t)$$

**Beispiel**

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (4,0)} \frac{\sin xy}{xy}$$

Hier ist  $g(x, y) = xy$ ,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (4,0)} g(x, y) = 0$ . Somit

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (4,0)} \frac{\sin xy}{xy} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

Wir werden auch sehen dass die Existenz der Ableitungen in einigen Richtungen ungenügend für die Differenzierbarkeit der Funktion ist.

**Was bedeutet die Ableitung in einiger Richtung?**

**Beispiel**

Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto (x^2 + xy) \cos(xy)$$

Man kann für jedes  $y$ , die Funktion

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (x^2 + xy) (\cos xy)$$

als Funktion einer Variablen  $x$  auffassen und die Ableitung davon berechnen. Das Resultat mit  $\frac{\partial f}{\partial x}$  bezeichnet, ist die erste partielle Ableitung von  $f$  nach  $x$ . In diesem Fall ist es durch

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (2x + y)(\cos xy) - (x^2 + xy)y \sin(xy)$$

gegeben.

Analog definiert man  $\frac{\partial f}{\partial y}$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x(\cos xy) - (x^2 + xy)x \sin(xy)$$

Die allgemeine Definition nimmt folgende Gestalt an. Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . In Zukunft bezeichnen wir die  $i$ -te Koordinate eines Vektors  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $x^i$ ; also ist  $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ .

Sei  $e_i := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  der  $i$ -te Basisvektor von  $\mathbb{R}^n$

**Definition 8.2**

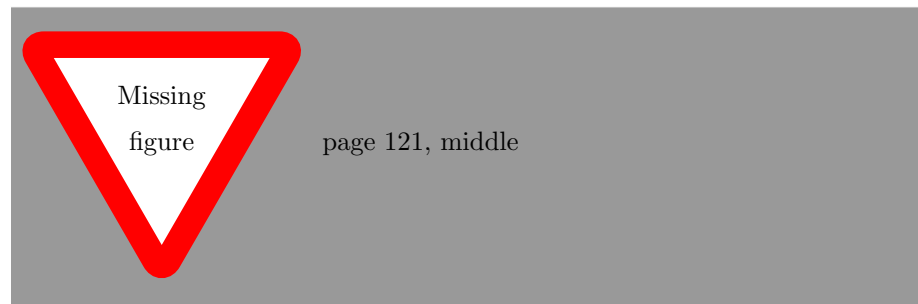
Die Funktion  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  heißt an der Stelle  $x_0 \in \Omega$  in Richtung  $e_i$  (oder nach  $x^i$ ) partiell differenzierbar falls der Limes

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) = f_{x^i}(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + he_i) - f(x_0)}{h} \\ h \neq 0$$

$$= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^i + h, x_0^{i+1}, \dots, x_0^n) - f(x_0^1, \dots, x_0^n)}{h}$$

existiert

**Bemerkung 8.3**



Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x_0^1, x_0^2) \in \mathbb{R}^2$ . Wir betrachten die scharen von  $f$

$$f(\cdot, x_0^2) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

und

$$f(x_0^1, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}$  sind die Ansteig der Tangente zur entsprechende schrittkurven

**Beispiel**

1.  $f(x, y, z) = \cos yz + \sin xy$

- $\frac{\partial f}{\partial x} = y \cos xy$
- $\frac{\partial f}{\partial y} = -\sin(yz) \cdot z + \cos(xy) \cdot x$
- $\frac{\partial f}{\partial z} = -\sin(yz) \cdot y$

2.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^3 \cdot 0}{h^2 + 0} - 0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h \cdot 0^3}{0 + h^2} - 0}{h} = 0$$

**Bemerkung**

Für Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  einer variable impliziert die differenzierbarkeit in  $x_0$ , die Stetigkeit in  $x_0$  und zudem eine gute Approximation von  $f$  durch eine affine Funktion in einer Umgebung von  $x_0$ . Folgendes Beispiel zeigt, dass in  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ) Partielle Differenzierbarkeit keine analoges Approximationseigenschaften oder stetigkeit impliziert:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Für alle  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  ist  $f$  in beiden Richtungen partiel differenzierbar:

- Für  $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \left. \frac{y(x^2 + y^2) - 2x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} \right|_{(x,y)=(x_0,y_0)} = \frac{y_0^3 - x_0^2 y_0}{(x_0^2 + y_0^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \left. \frac{x(x^2 + y^2) - 2xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \right|_{(x,y)=(x_0,y_0)} = \frac{x^2 - xy^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

- Für  $(x_0, y_0) = (0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overbrace{f(0+h, 0) - f(0, 0)}^{f(x_0+he_1) - f(x_0)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overbrace{f(0, 0+h) - f(0, 0)}^{f(x_0+he_2) - f(x_0)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

Im Ursprung besitzt  $f$  beide partielle Ableitungen, sie ist aber nicht stetig. Der Grund ist, dass die partielle Ableitungen nur partielle Informationen geben. Wir müssen die Differenzierbarkeit irgend eine andere weise verallgemeinern.

Die Lösung dieses Problem ist, dass man eine Approximations-Eigenschaft durch eine Lineare Abbildung postuliert.

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $x_0$ ;  $f'(x_0)$  existiert. In diesem Fall kann  $f$  für alle  $x$  nahe  $x_0$  durch die Funktion  $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  gut approximiert werden. Dass heisst dass

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x, x_0) \quad \text{mit} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x, x_0)}{x - x_0} = 0$$

**Bemerkung**

$f'(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}'$  sollt als lineare Abbildung interpretiert werden

## Lineare Abbildungen

Eine Abbildung  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ist linear falls für alle  $x, y \in \mathbb{R}^n$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$$

Eine solche Abbildung ist durch ihre Werte

$$A(e_i) := A_1, A(e_2) := A_2, \dots, A(e_n) := A_n$$

auf der Standardbasis  $e_1, \dots, e_n$  eindeutig bestimmt. Aus  $x = \sum_{i=1}^n x^i e_i$  und Linearität folgt nämlich

$$(*) \quad A(x) = \sum_{i=1}^n x^i A(e_i) = \sum_{i=1}^n A_i x^i$$

Umgekehrt bestimmt ein Vektor  $(A_1, \dots, A_n)$  vermöge der Formel  $(*)$  eine Lineare Abbildung.

Schreiben wir  $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$  für einen Vektor  $x = (x^1)_{1 \leq i \leq n}$  und

$A = (A_1, \dots, A_n)$  für die Darstellung einer Lineare Abbildung  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  bezüglich der Standard Basis  $\{e_1, \dots, e_n\}$  so ist

$$A(x) = (A_1, \dots, A_n) \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \sum A_i x^i$$

### Definition 8.4

Die Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heisst an der Stelle  $x_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$  differenzierbar falls eine lineare Abbildung  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  gibt so dass

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + R(x_0, x)$$

wobei  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x, x_0)}{|x - x_0|} = 0$

In diesem Fall heisst  $A$  der Differential an der Stelle  $x_0$  und wird mit  $df_{x_0}$  bezeichnet, d.h.  $f$  ist total differenzierbar in  $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$  falls reelle Zahlen  $A_1, \dots, A_n$  existieren so dass gilt

$$f(x) = f(x_0) + A_1(x^1 - x_0^1) + A_2(x^2 - x_0^2) + \dots + A_n(x^n - x_0^n) + R(x, x_0)$$

mit  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x, x_0)}{|x - x_0|} = 0$

**Bemerkung: Geometrische Interpretation**

Sei  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega \in \mathbb{R}^2$ . Wir können die differenzierbare Funktion nahe dem Punkt  $x_0 = (x_0^1, x_0^2)$  mit Hilfe der Lineare Funktion

$$P(x) = P(x^1, x^2) = f(x_0^1, x_0^2) + \underbrace{A_1(x^1 - x_0^1) + A_2(x^2 - x_0^2)}_{d_{x_0} f(x - x_0)}$$

approximieren.

can't understand what comes after the formula, page 126.1 middle

Die Differenz  $\underbrace{f(x) - P(x)}_{d_{x_0} f(x - x_0)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$  ist eine Ebene. Die ist die Tangenteebene zur  $f$  an der Stelle  $x_0$  und spielt die Rolle des Tangente für Funktionen in einer Variable.



**Beispiel 8.5**

- a) Jede affin Lineare Funktion  $f(x) = Ax + b$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , wobei  $a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  linear,  $b \in \mathbb{R}$  ist an jeder Stelle  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  differenzierbar, mit  $\frac{df}{dx}_{x_0} = A$  unabhängig von  $x_0$  da

$$f(x) - f(x_0) - A(x - x_0) = 0 \quad \forall x, x_0 \in \mathbb{R}^n$$

- b) Koordinatenfunktionen  $x^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x^1, x^2, \dots, x^n) \rightarrow x^i$ ,  $x^i(x) = x^i$ . Dann ist  $x^i$  differenzierbar an jeder Stelle  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  mit

$$dx^i|_{x=x_0} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

die Differenziale  $dx^1, dx^2, \dots, dx^n$  bilden also an jeder Stelle  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  eine Basis des Raumes  $L(\mathbb{R}^n : \mathbb{R}) := \{A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; A \text{ linear}\}$ , wobei wir  $A \in L(\mathbb{R}^n : \mathbb{R})$  mit der Darstellung  $A = (A_1, \dots, A_n)$  bzgl. der Standardbasis  $\{e_1, \dots, e_n\}$  der  $\mathbb{R}^n$  identifizieren, und mit  $A_i = A(e_i)$

$$dx^i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

$$(dx^i(e_1), dx^i(e_2), \dots, dx^i(e_n))$$

Da gilt  $dx^i(e_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$  ist  $(dx^i)_{1 \leq i \leq n}$  die duale Basis von  $L(\mathbb{R}^n : \mathbb{R})$  zur Standardbasis  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  des  $\mathbb{R}^n$ .



KAPITEL 8. DIFFERENTIALRECHNUNG IN  $\mathbb{R}^n$

c) Jedes  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \in C'(\mathbb{R})$  besitzt das Differential

$$df(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) dx = f'(x_0) dx$$

d.h.  $f'(x_0)$  ist die Darstellung von  $df(x_0)$  bezüglich der Basis  $dx$  von  $L(\mathbb{R} : \mathbb{R})$

d)  $f(x, y) = xe^y, \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ist an jeder Stelle  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned} df(x_0, y_0) &= \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) = (e^{y_0}, xe^{y_0}) \\ f(x, y) - f(x_0, y_0) &= \underbrace{f(x, y) - f(x_0, y)}_{\swarrow} + f(x_0, y) - f(x_0, y_0) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \eta)(y - y_0) \end{aligned}$$

Nach der MWS der DR, mit geeigneten Zwischenstellen  $\xi = \xi(y)$  und  $\eta$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + R(x, y)$$

mit

$$\begin{aligned} R(x, y) &= \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right] (x - x_0) \\ &\quad + \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \eta) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right] (y - y_0) \end{aligned}$$

Wegen die Stetigkeit der Funktionen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^y \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xe^y$$

können wir den "Fehler"  $R(x, y)$  leicht abschätzen

$$\begin{aligned} \frac{|R(x, y)|}{|(x, y) - (x_0, y_0)|} &\leq \sup_{\substack{|\xi - x_0| < |x - x_0| \\ |\eta - y_0| < |y - y_0|}} (|e^y - e^{y_0}| + |x_0| |e^\eta - e^{y_0}|) \end{aligned}$$

Für  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0), (x, y) \neq (x_0, y_0)$ : d.h. es gilt

$$\frac{R(x, y)}{|(x, y) - (x_0, y_0)|} \rightarrow 0$$

d.h. es gilt

$$\frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)}{|(x, y) - (x_0, y_0)|} \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} 0$$

d.h.  $f(x, y)$  ist differenzierbar und

$$df(x_0, y_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

can't read, page 130  
bottom

e) Die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ist in  $(0, 0)$  differenzierbar.

Wir haben schon gesehen dass  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$  und  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{|R|}{|(x, y)|} &= \frac{\left| f(x, y) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)(x - 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)(y - 0) \right|}{|(x - 0, y - 0)|} \\ &= \frac{|f(x, y) - 0 - 0 - 0|}{|(x, y)|} = \frac{|f(x, y)|}{|(x, y)|} \end{aligned}$$

Zum untersuchen ist

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{|R((x, y), (0, 0))|}{|(x, y) - (0, 0)|} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{|f(x, y)|}{|(x, y)|}$$

Mittels Polarkoordinaten ist dies noch einsichtiger

$$\begin{aligned} \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{|f(x, y)|}{x^2 + y^2} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^4 \cos^3 \theta \sin \theta}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} r^2 \cos^3 \theta \sin \theta = 0 \\ &\Rightarrow f \text{ in } (0, 0) \text{ differenzierbar} \end{aligned}$$

Gibt es eine Beziehung zwischen des Differential und der partielle Ableitungen?

### Bemerkung 8.6

Sei  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  differenzierbar an der Stelle  $x_0 \in \Omega$ . Dann existieren die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)$ ,  $i = 1, \dots, n$  und dass Differential kann

$$d_{x_0} f = \left( \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0) \right)$$

dargestellt werden.

### Beweis

$f$  an der Stelle  $x_0$  differenzierbar

$$\Rightarrow f(x_0 + he_i) = f(x_0) + (d_{x_0} f)(he_i) + R(x_0 + he_i, x_0)$$

wobei

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(x_0 + he_i, x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + he_i) - f(x_0) - (d_{x_0} f)(he_i)}{h} = 0 \\ &\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + he_i) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{hd_{x_0} f(e_i)}{h} = d_{x_0} f(e_i) \end{aligned}$$

d.h.  $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)$  existiert und  $= d_{x_0} f(e_i)$ .

Da  $(dx^i)_{i=1, \dots, n}$  die zur  $(e_j)_{1 \leq j \leq n}$  duale Basis ist

$$d_{x_0} f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) dx^i = \left( \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0) \right)$$

### Beispiel

Die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ist in  $(0, 0)$  nicht differenzierbar ( $f$  ist in  $(0, 0)$  nicht stetig)

### Satz 8.7

Falls  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}$  differenzierbar, ist sie in  $x_0$  auch stetig.

### Beweis

Folgt aus der Definition

#### Definition 8.8

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heisst von der Klasse  $C'$ , ( $f \in C'(\Omega)$ ) falls  $f$  an jeder Stelle  $x_0 \in \Omega$  und in jede Richtung  $e_i$  partielle differenzierbar ist und die Funktionen  $x \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x^i}(x)$  für jedes  $1 \leq i \leq n$  auf  $\Omega$  stetig sind

### Satz 8.9

Sei  $f \in C'(\Omega)$ . Dann ist  $f$  an jeder Stelle  $x_0 \in \Omega$  differenzierbar.

### Beweis

Für  $n = 3$  seien  $x = (x^1, x^2, x^3)$ ,  $x_0 = (x_0^1, x_0^2, x_0^3)$ . Dann ist

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \{f(x^1, x^2, x^3) - f(x^1, x^2, x_0^3)\} \\ &\quad + \{f(x^1, x^2, x_0^3) - f(x^1, x_0^2, x_0^3)\} \\ &\quad + \{f(x^1, x_0^2, x_0^3) - f(x_0^1, x_0^2, x_0^3)\} \end{aligned}$$

Nach dem MWS der DR gilt:

$$f(x^1, x^2, x_0^3) - f(x_0^1, x_0^2, x_0^3) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(\xi^1, x_0^2, x_0^3)(x^1 - x_0^1)$$

wobei  $\xi^1$  zwischen  $x_0^1$  und  $x^1$ . Analog:

$$f(x^1, x^2, x_0^3) - f(x^1, x_0^2, x_0^3) = \frac{\partial f}{\partial x^2}(x^1, \xi^2, x_0^3)(x^2 - x_0^2)$$

wobei  $\xi^2 \in (x_0^2, x^2)$  und

$$f(x^1, x^2, x^3) - f(x^1, x^2, x_0^3) = \frac{\partial f}{\partial x^3}(x^1, x^2, \xi^3)(x^3 - x_0^3)$$

Eingesetzt in dem Ausdrucke für  $f(x) - f(x_0)$  ergibt:

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \frac{\partial f}{\partial x^1}(\xi^1, x_0^2, x_0^3)(x^1 - x_0^1) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial x^2}(x^1, \xi^2, x_0^3)(x^2 - x_0^2) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial x^3}(x^1, x^2, \xi^3)(x^3 - x_0^3) \end{aligned}$$

Also

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1, x_0^2, x_0^3)(x^i - x_0^i) + R(x_0, x)$$

Wobei

$$\begin{aligned} R(x_0, x) &= \left( \frac{\partial f}{\partial x^1}(\xi^1, x_0^2, x_0^3) - \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \right)(x^1 - x_0^1) \\ &\quad + \left( \frac{\partial f}{\partial x^2}(x^1, \xi^2, x_0^3) - \frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \right)(x^2 - x_0^2) \\ &\quad + \left( \frac{\partial f}{\partial x^3}(x^1, x^2, \xi^3) - \frac{\partial f}{\partial x^3}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \right)(x^3 - x_0^3) \end{aligned}$$

Also

$$|R(x, x_0)| < |x - x_0| \underbrace{\{ |\dots| + |\dots| + |\dots| \}}_{\substack{\rightarrow 0 \text{ mit } x \rightarrow x_0 \\ \text{weil } \frac{\partial f}{\partial x^i} \text{ stetig sind}}}$$

Also  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x, x_0)}{|x - x_0|} = 0$  und  $f(x)$  ist differenzierbar.

### Beispiel 8.10

Polynome auf  $\mathbb{R}^n$  sind von Klasse  $C^1$ . Für jedes Multindex  $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  definieren wir die Monomialfunktion

$$x^\alpha := (x^0)^{\alpha_0} (x^1)^{\alpha_1} \dots (x^n)^{\alpha_n}$$

Ein Polynom von Grad  $\leq N$  ist dann gegeben durch

$$p(x) = \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha x^\alpha$$

wobei  $|\alpha| = \alpha_0 + \dots + \alpha_n$

Pages 135.1 - 135.2 are a zusammenfassung, not sure if needed to be included

## 8.2 Differentiationsregeln

Ganz analog zum eindimensionalen Fall gelten folgende Differentiationsregeln

**Satz 8.11**

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , sowie  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  an der Stelle  $x_0 \in \Omega$  differenzierbar. Dann gilt

1.  $d(f + g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0)$
2.  $d(fg)(x_0) = g(x_0)df(x_0) + f(x_0)dg(x_0)$
3. Falls  $g(x_0) \neq 0$

$$d\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \frac{g(x_0)df(x_0) - f(x_0)dg(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

Beweis ist der selbe wie in Dim=1. Für die Kettenregel gibt es mehrere Variationen

**Satz 8.12 (Kettenregel, 1. Version)**

Sei  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$  differenzierbar, sowie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  an der Stelle  $g(x_0) \in \mathbb{R}$  differenzierbar. Dann gilt

$$d(f \circ g)(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot dg(x_0)$$



**Beweis**

$g$  an der Stelle  $x_0$  differenzierbar

$$\Rightarrow g(x) - g(x_0) \stackrel{A}{=} dg(x_0)(x - x_0) + R_g(x - x_0)$$

mit

$$\frac{R_g(x - x_0)}{(x - x_0)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \Rightarrow \frac{g(x) - g(x_0)}{|x - x_0|} \stackrel{B}{\leq} C = \max \left[ \frac{\partial g}{\partial x^i}(x_0) \right]$$

$f$  in  $g(x_0)$  differenzierbar

$$f(g(x)) - f(g(x_0)) \stackrel{C}{=} f'(g(x_0)) [g(x) - g(x_0)] + R_f(g(x), g(x_0))$$

Woraus folgt:

$$f(g(x)) - f(g(x_0)) = f'(g(x_0)) [dg(x_0)(x - x_0) + R_g(x, x_0)] + R_f(g(x_0), g(x))$$

Aus B folgt:

$$\begin{aligned} \frac{R_f(g(x_0), g(x))}{x - x_0} &= \underbrace{\frac{R_f(g(x_0) - g(x))}{|g(x) - g(x_0)|}}_{\downarrow 0} \cdot \underbrace{\frac{|g(x) - g(x_0)|}{|x - x_0|}}_{\stackrel{B}{\leq} C} \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\downarrow 0} \end{aligned}$$

d.h.

$$f(g(x)) - f(g(x_0)) = (f'(g(x_0)) \cdot dg(x_0))(x - x_0) + R_{f \circ g}(x, x_0)$$

wobei

$$R_{f \circ g}(x, x_0) = f'(g(x_0)) R_g(x, x_0) + R_f(g(x_0), g(x))$$

und

$$\frac{R_{f \circ g}(x, x_0)}{x - x_0} = \underbrace{f'(g(x_0)) \frac{R_g(x, x_0)}{(x - x_0)}}_{\downarrow 0} + \underbrace{\frac{R_f(g(x_0), g(x))}{x - x_0}}_{\downarrow 0}$$

### Beispiel 8.13

Sei  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$h(x, y) = e^{xy}$$

$h = f \circ g$  wobei  $g(x, y) = xy$ ,  $f(t) = e^t$ . Dann ist einerseits

$$dh(x, y) = \left( \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} \right) = (ye^{xy}, xe^{xy})$$

andererseits nach Kettenregel

$$dh(x, y) = d(f \circ g)' = f'(g(x, y)) \cdot dg(x, y) = e^{xy} \cdot (y, x) = (ye^{xy}, xe^{xy})$$

Für die nächste Kettenregel führen wir folgende Definition ein:

#### Definition 8.14

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}$  und  $f = (f_1, \dots, f_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Abbildung. Dann ist  $f$  an der Stelle  $x_0 \in \mathbb{R}$  differenzierbar, falls jede Komponentenfunktion  $f_i$  an der Stelle  $x_0$  differenzierbar ist. Wir definieren in diesem Fall

$$f'(x_0) := (f_1'(x_0), f_2'(x_0), \dots, f_n'(x_0))$$

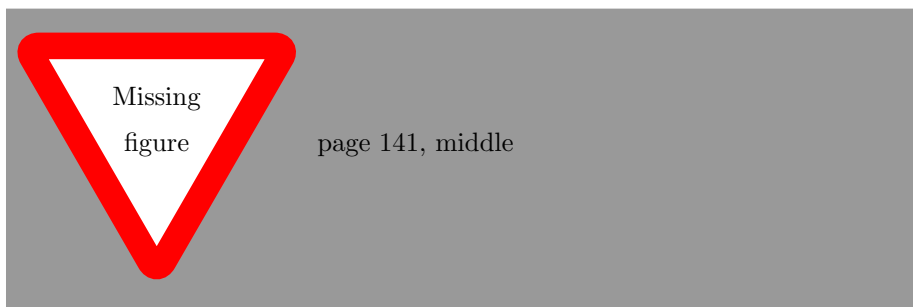
### Bemerkung 8.15

$f'(x_0)$  kann als Geschwindigkeitsvektor im Punkt  $f(x_0)$  aufgefasst werden.

**Satz 8.16 (Kettenregel, 2. Version)**

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n, I \subset \mathbb{R}$ . Sei  $g : I \rightarrow \Omega, t \rightarrow (g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t))$ , an der Stelle  $t_0 \in I$  differenzierbar sowie  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  an der Stelle  $g(t_0)$  differenzierbar. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f \circ g)(t_0) &= df(g(t_0)) \cdot g'(t_0) \\ d(f \circ g)(t_0) &= df(g(t_0)) \cdot dg(t_0) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^1}(g(t_0)) \cdot \frac{dg_1}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial x^2}(g(t_0)) \cdot \frac{dg_2}{dt}(t_0) \\ &\quad + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(g(t_0)) \cdot \frac{dg_n}{dt}(t_0) \end{aligned}$$



**Beispiel 8.17**

Die vier Grundrechenarten sind differenzierbare Funktionen von zwei Variablen. Insbesondere gilt:

- $a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x + y$

$$da(x, y) = \left( \frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial a}{\partial y} \right) = (1, 1)$$

- $m : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x \cdot y$

$$dm(x, y) = (y, x)$$

Setzt man diese beiden Funktionen in die obige Kettenregel ein, so erhält man die aus der Analysis I bekannte Summen und Produktregel:

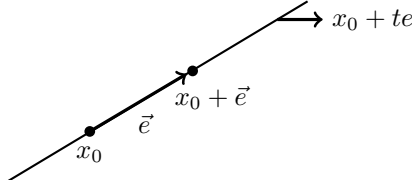
$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \rightarrow (g_1(t), g_2(t)) \\ \frac{d}{dt}(g_1 + g_2) = \frac{d}{dt}(a \circ g) = (1, 1) \cdot \left( \frac{dg_1}{dt}, \frac{dg_2}{dt} \right) = 1 \cdot \frac{dg_1}{dt} + 1 \cdot \frac{dg_2}{dt} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(g_1 \cdot g_2) &= \frac{d}{dt}(m \circ g) = ((dm)(g(t))) \cdot \left( \frac{dg}{dt} \right) \\ &= (g_2(t), g_1(t)) \cdot \left( \frac{dg_1}{dt}, \frac{dg_2}{dt} \right) \\ &= \frac{dg_1}{dt} \cdot g_2(t) + \frac{dg_2}{dt} \cdot g_1(t) \end{aligned}$$

**Beispiel 8.18**

Sei  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar an der Stelle  $x_0 \in \Omega$  und sei  $e \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ; mit  $|e| = 1$ . Betrachte die Gerade  $g(t) = x_0 + te$ ,  $t \in \mathbb{R}$  durch  $x_0$  mit Richtungsvektor



$$\frac{dg}{dt}(t_0) = e \quad \forall t_0 \in \mathbb{R}$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$t \mapsto x_0 + te$$

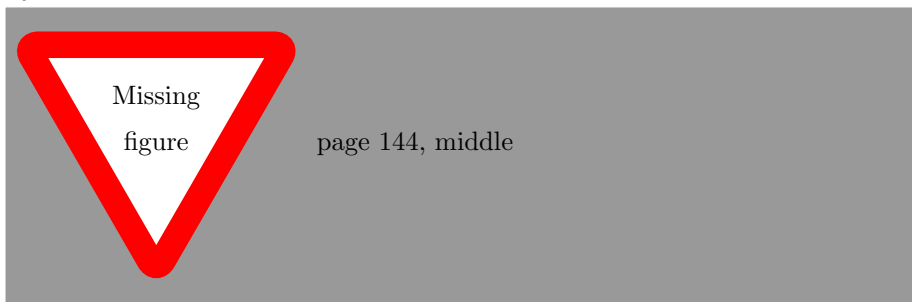
Dann ist die Funktion  $f \circ g$  in einer Umgebung von  $t_0 = 0$  definiert und nach Kettenregel  $f \circ g$  an der Stelle  $t_0 = 0$  differenzierbar mit

$$\frac{d}{dt}(f \circ g)(0) = df(g(0)) \frac{dg}{dt}(0) = df(x_0)(e) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) \cdot e^i$$

$e = (e^1, \dots, e^n)$  und wird Richtungsableitung von  $f$  in Richtung  $e$  genannt;  $\partial_e f(x_0)$  bezeichnet. Insbesondere gilt für  $e = e_i$

$$\partial_{e_i} f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) = df(x_0)(e_i)$$

Geometrisch die Richtungsableitung von  $f$  in Richtung  $e$  ist genau die Steigung der Tangente zur Schnittkurve falls wir den Graph von  $f$  mit einer zur Ebene  $xy$  senkrecht Ebene durch  $x_0 + te$  schneiden.



Für den Mittelwertsatz der DR - zu verallgemeinern benötigen wir folgenden Begriffen:

**Definition 8.19**

Eine Menge  $K \subset \mathbb{R}^n$  ist genau dann Konvex falls für jede Paar von Punkten  $x, y \in K$  die Menge  $K$  auch das segment

$$(1 - t)x + ty \quad t \in [0, 1]$$

mit endpunkt  $x, y$  enthält





### Satz 8.20

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  konvex  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar,  $x_0, x_1 \in \Omega$  sowie  $x_t := (1-t)x_0 + tx_1$ . Dann gibt es  $\vartheta \in [0, 1]$  mit

$$f(x_1) - f(x_0) = df(x_{i\vartheta})(x_1 - x_0)$$

is it  $tx_1$  or  $tx$ , ?? page 145 middle

### Beweis

Sei  $g(t) = (1-t)x_0 + tx_1 = x_t$ . Dann ist  $t \rightarrow (f \circ g)(t)$  auf  $[0, 1]$  stetig und in  $(0, 1)$  differenzierbar. Also gibt es  $\vartheta \in (0, 1)$  mit (nach MWS der DS einer variable)

$$f(x_1) - f(x_0) = (f \circ g)(1) - (f \circ g)(0) = (f \circ g)'(\vartheta)(1 - 0)$$

Nur ist

$$(f \circ g)'(\vartheta) = df\left(g(\vartheta) \cdot \frac{dg}{dt}(\vartheta)\right)$$

Die Kettenregel wird auch angewandt um Integrale mit Parametern zu studieren. Ein Beispiel davon ist:

Is the formula done or does it continue on a new line, page 146 top

### Beispiel

Sei  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(s, t) \rightarrow h(s, t)$ . Wir nehmen an,  $h$  ist stetig,  $\frac{\partial h}{\partial t}$  existiert und ist uf ganz  $\mathbb{R}^2$  stetig. Sei

$$u(t) = \int_a^{b(t)} h(s, t) ds, \quad b(t) \in C'(\mathbb{R}), \quad a \in \mathbb{R}$$

Is it  $C'$  or  $C'??$  page 146 middle

### Satz 8.21

Sei  $h(s, t)$  eine stetige differenzierbare Funktion von zwei variablen und  $b(t)$  differenzierbare Funktion eine variable. Dann ist die Funktion

$$u(t) := \int_a^{b(t)} h(s, t) ds$$

wo definiert, differenzierbar mit der Ableitung

$$u'(t) := h(b(t), t) \cdot b'(t) + \int_a^{b(t)} \frac{\partial h}{\partial t}(s, t) ds$$

**Korollar 8.22**

Sei  $h = h(s, t) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, und  $\frac{\partial h}{\partial t}$  existiert und auf ganz  $\mathbb{R}^2$  stetig. Sei

$$u(t) = \int_0^t h(s, t) ds$$

Dann

$$u(t) \in C^1(\mathbb{R}) \text{ und } u'(t) = h(t, t) + \int_0^t \frac{\partial h}{\partial t}(s, t) ds$$

**Beweis**

Setze  $b(t) = t$ ,  $a = 0$  in Satz 8.21.

**Korollar 8.23**

Sei  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion mit Stetiger partieller Ableitung  $\frac{\partial h}{\partial t}$ . Dann ist die Funktion

$$u(t) := \int_a^b h(s, t) ds$$

differenzierbar mit Ableitung

$$u'(t) := \int_a^b \frac{\partial h}{\partial t}(s, t) ds$$

**Beweis**

Setze  $b(t) = b$ , in Satz 8.20

**Bemerkung 8.24**

Mit Korollar 8.23 kann man bestimmte Integrale berechnen, auch wenn die zugehörige unbestimmten Integrale nicht elementar darstellbar sind

**Beispiel 8.25**

Berechne das integral

$$\int_0^1 \frac{x^5 - 1}{\log x} dx$$

# KAPITEL 8. DIFFERENTIALRECHNUNG IN $\mathbb{R}^n$

Sei

$$u(\alpha) := \int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\log x} dx$$

Für  $\alpha \geq 0$  erfüllt  $u(\alpha)$  die Voraussetzungen des Satzes. Wir berechnen

$$u'(\alpha) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{x^\alpha - 1}{\log x} \right) dx = \int_0^1 \frac{x^\alpha \log x}{\log x} dx = \int_0^1 x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}$$

Daraus folgt aus Fundamentales Satz der Integral Rechnung

$$u(\alpha) = \int u'(\alpha) d\alpha = \int \frac{d\alpha}{\alpha+1} = \log(\alpha+1) + C$$

Für eine noch zu bestimmende Konstante  $C$ . Aber

$$u(0) = \int_0^1 0 dx = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\log x} dx = \log(\alpha+1)$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{x^5 - 1}{\log x} dx = \log 6$$

## Beweis Satz 8.21 (Idee)

Sei

$$f(x, y) = \int_a^x h(s, y) ds : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(t) = \begin{pmatrix} b(t) \\ t \end{pmatrix} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, g'(t) = \begin{pmatrix} b'(t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dann

$$u(t) = (f \circ g)(t) = f(b(t), t) = \int_a^{b(t)} h(s, t) ds$$

Nach Hauptsatz der Integral Rechnung  $f$  ist nach  $x$  partielle differenzierbar und  $\frac{\partial f}{\partial x} = h(x, y)$ . Man muss zeigen das  $f$  ist nach  $y$  partielle differenzierbar mit

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \int_a^x \frac{\partial h(s, y)}{\partial y} ds$$

Dann ergibt die Kettenregel

$$\begin{aligned}
 u'(t) &= \frac{d}{dt} (f \circ g)(t) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(g(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(g(t)) \right) \cdot \frac{dg}{dt} \\
 &= \left( h(b(t), t), \left( \int_a^x \frac{\partial h(s, y)}{\partial y} ds \right) h(b(t), t) \right) \begin{pmatrix} b'(t) \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \left( h(b(t), t), \int_a^{b(t)} \frac{\partial h}{\partial y}(s, t) ds \right) \begin{pmatrix} b'(t) \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= h(b(t), t) \cdot b'(t) + \int_a^{b(t)} \frac{\partial h}{\partial t}(s, t) ds
 \end{aligned}$$

### 8.3 Differentialformen und Vektorfelder

Sei  $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  der Raum der linearen Abbildungen von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}$ . Falls  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion ist, die in jedem Punkt differenzierbar ist, dann ist  $df(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  und man erhält eine Abbildung

$$\begin{aligned}
 \Omega &\rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \\
 x_0 &\rightarrow df(x_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0) \right) \\
 &= \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0) dx^1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0) dx^n
 \end{aligned}$$

Dies ist ein Beispiel von 1-Form

#### Definition 8.26

Eine Differentialform vom Grad 1 (auch "1-Form") auf  $\Omega$  ist eine Abbildung

$$\lambda : \Omega \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

#### Beispiel 8.27

1. Seien  $x^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  die Koordinatenfunktionen  $1 \leq i \leq n$ . Für jedes  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  ist  $dx^i(x_0) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ; dies führt zur 1-Form

$$\begin{aligned}
 dx^i &: \mathbb{R}^n \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \\
 x_0 &\rightarrow dx^i(x_0)
 \end{aligned}$$

Für jedes  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , gilt  $dx^i(e_j) = \delta_{ij}$  also bilden  $dx^1(x_0), \dots, dx^n(x_0)$  eine Basis für  $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ .

Eine beliebig 1-Form  $\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  lässt sich dann eindeutig wie folgt darstellen

$$\lambda(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(x_0) dx^i(x_0)$$

## KAPITEL 8. DIFFERENTIALRECHNUNG IN $\mathbb{R}^n$

wobei  $\lambda_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen sind.

2. Für jedes  $f \in C^1(\Omega)$  ist das differential  $df$  eine 1-Form

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} dx^2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n$$

Is it  $C'$  or  $C'^{??}$  page 152.1 top

3. Der Ausdruck  $\lambda(x, y, z) = 3dx + 5zdy + xdz$  definiert ein 1-Form auf  $\mathbb{R}^3$  mit

$$\lambda_1(x, y, z) = 3$$

$$\lambda_2(x, y, z) = 5z$$

$$\lambda_3(x, y, z) = x$$

### Definition 8.28

Ein Vektorfeld auf  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ist eine Abbildung  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$

Does the definition include the examples? page 153 top

### Beispiel

- 1.

$$v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \rightarrow (2xy, x^2)$$



2.  $v(x, y) = (-y, x)$



Page 153, bottom

**Bemerkung 8.29**

Sei  $\langle, \rangle$  das übliche Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^n$ , d.h.

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x^i y^i$$

Mittels  $\langle, \rangle$  kann man von 1-Formen zu Vektorfeldern und umgekehrt übergehen. Dies geht wie folgt:

1. Sei  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Vektorfeld. Dann definieren wir  $\forall x \in \Omega, \omega \in \mathbb{R}^n$

$$\lambda(x)(\omega) := \langle v(x), \omega \rangle$$

Offensichtlich  $\lambda(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  und somit ist

$$\begin{aligned} \lambda : \Omega &\rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \\ x &\rightarrow \lambda(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\rightarrow \langle v(x), \omega \rangle \end{aligned}$$

eine 1-Form auf  $\Omega$

Umgekehrt

2. Sei  $\lambda : \Omega \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  1-Form und  $\lambda(x) := \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) dx^i$  wie oben.

Wir definieren

$$\begin{aligned} v : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\rightarrow (\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_n(x)) \end{aligned}$$

dann ist  $v$  ein Vektorfeld und

$$\lambda(x)(\omega) = \langle v(x), \omega \rangle$$

Sei  $\omega = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 + \dots + \omega^n e_n$ . Dann

$$\begin{aligned} \lambda(x)(\omega) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) dx^i(\omega) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) dx^i(\omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 + \dots + \omega^n e_n) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) (\omega^1 dx^i(e_1) + \omega^2 dx^i(e_2) + \dots + \omega^n dx^i(e_n)) \\ dx^i(e_j)_{ij} &\leftarrow = \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) \omega^i = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_n(x)) \cdot (\omega^1, \dots, \omega^n) \\ &= \langle v(x), \omega \rangle \end{aligned}$$

Diese Diskussion können wir auf das Differential einer Funktion anwenden

**Definition 8.30**

Sei  $f \in C^1(\Omega)$ , das durch

$$\langle v(x), \omega \rangle := df(x)(\omega), \omega \in \mathbb{R}^n$$

definierte Vektorfeld heisst Gradientenfeld von  $f$  und wird mit  $v(x) = \nabla f(x)$  oder  $\text{grad} f$  bezeichnet.

Bezüglich der Standardbasis  $e_1, \dots, e_n$  der  $\mathbb{R}^n$  folgt die Darstellung

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x^1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x^n}(x) \end{pmatrix}, \forall x \in \Omega$$

(Oben nehmen wir  $\lambda(x) := df(x) = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} r^i x^i$ , Bemerkung 8.29, 2.)

**Satz 8.31**

Sei  $f \in C^1(\Omega)$  und  $x_0 \in \Omega$ . Dann gibt  $\nabla f(x_0)$  die Richtung und  $|\nabla f(x_0)|$  den Betrag des Steilsten Anstiegs von  $f$  an der Stelle  $x_0$

**Beweis**

Aus der Definition des Gradientenfeld folgt  $\forall e \in \mathbb{R}^n$ , unit Vektor  $\|e\| = 1$

$$df(x_0)(e) = \langle \nabla f(x_0), e \rangle$$

Mit Cauchy-Schwarz folgt

$$\langle \nabla f(x_0), e \rangle \leq \|\nabla f(x_0)\| \|e\| = \|\nabla f(x_0)\|$$

mit Gleichheit genau dann wenn  $e$  ein positives vielfaches von  $\nabla f(x_0)$  ist, nämlich

$$e = \frac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|} \\ \Rightarrow df(x_0)e \leq |\nabla f(x_0)|$$

mit Gleichheit für  $e = \frac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|}$   $\nabla f(x_0) \neq 0 \Rightarrow \nabla f(x_0)$  zeigt die Richtung an, in der  $f$  am schnellsten wächst.

Geometrische Interpretation Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, C^1$ . Für jedes  $s \in \mathbb{R}$  wird  $f^{-1}(s) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = s\}$  Niveaufäche genannt.

**Beispiel**

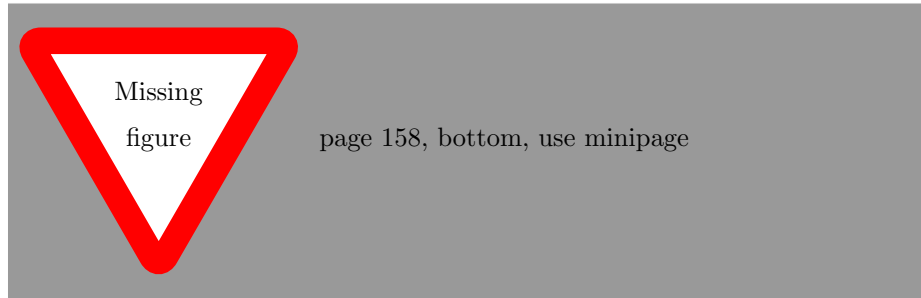
1.

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \rightarrow x^2 + y^2 + z^2$$

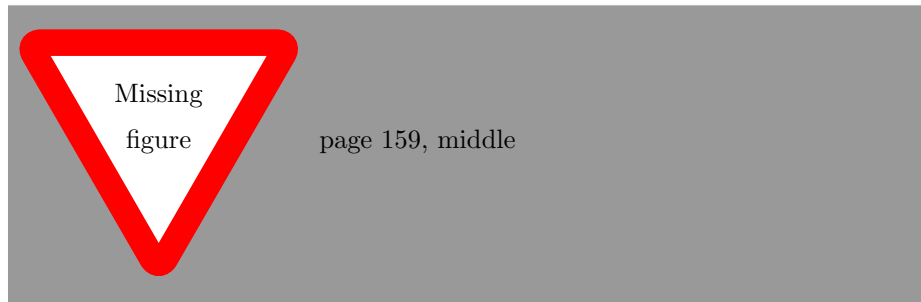
Add arrow pointing down for description of function, page 157 middle

dann ist  $f^{-1}(s)$  = Kugel mit Zentrum  $O$  und Radius  $\sqrt{s}$

2.  $f(x, y) = xy$  ist ein Hyperbolisches Paraboloid mit Niveaulinien



$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Nun sei  $x_0 \in \Omega$  mit  $f(x_0) = s$ , i.e.  $x_0 \in f^{-1}(s)$ . Sei  $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine diff. Kurve durch  $x_0$  mit  $\gamma[-1, 1] \subset f^{-1}(s)$ ,  $\gamma(0) = x_0$



Dann gilt  $f(\gamma(t)) = s, \forall t \in [-1, 1]$  und es folgt aus Kettenregel

$$\frac{d}{dt}(f(\gamma(t))) = \frac{d}{dt}(s) = 0$$

$\Downarrow$

$$df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0 = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$$

Insbesondere  $0 = df(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = \langle \nabla f(x_0), \gamma'(0) \rangle$  d.h.  $\nabla f(x_0)$  steht senkrecht zur Niveaulinie von  $f$  durch  $x_0$

### Beispiel

Sei  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{2}, x, y \in \mathbb{R}^2$

$$\nabla f(x, y) = (x, -y)$$

Sei  $(x_0, y_0) = (1, -1)$

$$\nabla f(1, -1) = (1, 1) \quad (\nabla f(1, -1)) = \sqrt{2}$$

$$\frac{\nabla f}{|\nabla f|}(1, -1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$$



# KAPITEL 8. DIFFERENTIALRECHNUNG IN $\mathbb{R}^n$

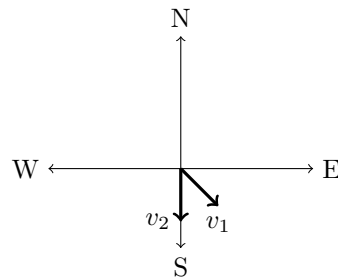
3. Im Punkt  $P$  biegt der Bergweg ab; nach Südosten geht er mit 25% Steigung berg an, nach Süden mit 20% Gefälle berg ab. Der wanderer im Nebel möchte über die Wiese möglichst rasch zum Gipfel. In welche Richtung muss er gehen und wie steil ist es dorthin?

Wir legen die Koordinatensystem so, dass die  $x$ -Achse nach Osten und die  $y$ -Achse nach Norden zeigt, und setzen voraus, dass die Höhenfunktion  $h$  differenzierbar ist. Wir wollen ihren Gradienten in  $P$   $\nabla h(P)$  bestimmen. Noch Voraussetzung hat  $h$  die beiden Richtungsableitungen

$$dh(P)(v_1) = 0.25 \quad dh(P)(v_2) = -0.2$$

wobei

$$v_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad v_2 = (0, -1)$$



$$\begin{aligned} dh(P)(v_1) &= \left( \frac{\partial h}{\partial x}(P), \frac{\partial h}{\partial y}(P) \right) \cdot v_1 \\ &= \frac{\partial h}{\partial x}(P) \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\partial h}{\partial y}(P) \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{4} \\ dh(P)(v_2) &= \left( \frac{\partial h}{\partial x}(P) \right) (0) - \frac{\partial h}{\partial y}(P) (-1) = -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

Durch Lösen des linearen Gleichungssystems folgen wir:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(P) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{5}, \quad \frac{\partial h}{\partial y}(P) = \frac{1}{5}$$

Die Richtung des Gradients ist somit

$$\nabla h(P) = \arctan \frac{\frac{1}{5}}{\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{5}} = 19.86 \text{ degrees}$$

und die Steigung in diese Richtung ist

$$|\nabla h(P)| = \sqrt{\left( \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{5} \right)^2 + \left( \frac{1}{5} \right)^2} = 0.59 = 59\%$$

add arg at the beginning of the equation using special command, as well as tilde on top of equal sign

add tilde on top of second to last equal sign

## 8.4 Wegintegrale

Wir haben gesehen in Bemerkung 8.29 dass Mittels das übliche Skalarprodukt  $\langle, \rangle$  kann man von 1-Formen zu Vektorfelder und umgekehrt übergehen.

can't read, page 162  
middle

In diesem Kapitel werden wir das “Wegintegral” von 1-Formen oder von Vektorfelder längs eine Kurve studieren. Dazu untersuchen wir zunächst Kurven in  $\mathbb{R}^n$

### Parameterdarstellung einer Kurve

Sei  $\gamma \subset \mathbb{R}^n$  eine Kurve. Eine Parameterdarstellung (PD) von  $\gamma$  ist eine Funktion

$$\begin{aligned} \gamma : I = [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\rightarrow \gamma(t) \end{aligned}$$

wobei  $\gamma(t)$  ein Punkt  $\gamma$  ist und jeder Punkt auf  $\gamma$  kann als  $\gamma(t)$  dargestellt werden

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$$

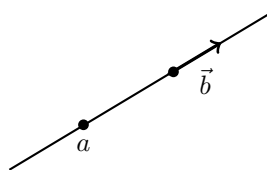
Die positive Orientierung von  $\gamma$  ist die Richtung mit der die Kurve durchgelaufen wird

#### Besipiel 8.32

1.

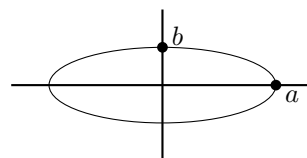
$$\gamma(t) = (a_1 + b_1 t, a_2 + b_2 t, a_3 + b_3 t), \quad t \in \mathbb{R}$$

ist die Parameterdarstellung einer Gerade durch den Punkt  $a = (a_1, a_2, a_3)$  und parallel zum Vektor  $(b_1, b_2, b_3)$



2.  $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$  ist eine Parameter Darstellung eine Ellipse

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ t &\in [0, 2\pi] \end{aligned}$$



3.  $\gamma_1(t) = (a \cos t, b \sin t, ct)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  ist eine Parameterdarstellung einer elliptische Helix



$\gamma_2(t) = (a \cos t, -b \sin t, c(2\pi - t))$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  ist Parameterdarstellung der gleichen Kurve wobei die Orientierung umgekehrt ist



Der Tangentenvektor zur Kurve an der Stelle  $\gamma(t)$  ist  $\gamma'(t)$

$$\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t), \dots, \gamma'_n(t))$$

Do I have to include the example?? page 164 bottom

### Definition 8.33

Das Wegintegral von  $\vartheta$  langs  $\gamma$

$$\int_{\gamma} v d\vec{s} = \int_{\gamma} v(\gamma) d\gamma := \int_a^b \langle v(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

$v d\vec{s} = \gamma'(t) dt$  heisst gerichtetes Längenelement

### Beispiel 8.34

Ein einführendes Beispiel: Sei ein Massenpunkt, der sich unter den Einfluss eines Kraftfeldes  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  bewegt.

Wenn der Massenpunkt durch eine Konstante Kraft  $\vec{F}$  längs einer Geraden um den Vektor  $\vec{s}$  verschoben.

Die dabei verrichtete Arbeit ist definitionsgemäss das Skalar Produkt aus dem Kraftvektor  $\vec{F}$  und dem Verschiebungsvektor  $\vec{s}$ .



Allgemeinen Fall

Verschiebung längs einer Kurve  $\gamma$  in einem Kraftfeld  $F = (P(x, y), Q(x, y))$



$\Delta W = F \cdot \Delta(\gamma) = \text{Kraftkomponente entlang des Weges mal zurückgelegter Weg.}$

Da sich Betrag und Richtung der Kraft sowie der jeweilige Winkel zum Weg vom Punkt zu Punkt ändern, gilt das zur Berechnung notwendige Skalarprodukt näherungsweise jeweils nur für ein Wegelement  $\Delta r$ . Die Berechnung der Arbeit erfolgt daher in folgender Weise.

- a) Zerlegung des Weges in Teilabschnitte

$$\Delta\gamma_1 = \gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i) = \frac{\Delta\gamma}{\Delta t} \cdot \Delta t$$

can't read, page 167  
middle

- b) Ermittlung der Arbeit Kraft:

$$F(\gamma(t_i)) = F(x(t_i), y(t_i))$$

- c) Berechnen der Arbeit je Teilabschnitt-Skalarprodukt

$$\Delta W_i = F(x(t_i), y(t_i)) \cdot \Delta\gamma_i$$

- d) Aufsummieren der Teil-Arbeit

$$W \approx \sum \Delta W_i = \sum F(x(t_i), y(t_i)) \cdot \underbrace{\frac{\Delta\gamma}{\Delta t} \cdot \Delta t}_{\Delta\gamma_i}$$

- e) Durch Verkleinerung des Wegelementes erhält man den exakten Wert

der geleisteten Arbeit

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \end{aligned}$$

**Bemerkung 8.35**

Wir können das Wegintegral auch mit Differentialformen formulieren. Sei

$$\begin{aligned} v : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\rightarrow (v^i(x))_{i=1}^n \end{aligned}$$

ein stetiges Vektorfeld ( $v^i(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  stetig) dann ist durch  $\lambda(x)(\omega) := \langle v(x), \omega \rangle$  definierte  $\lambda(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  eine 1-Form

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} v d\vec{s} &= \int_a^b \langle v(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\ &= \int_a^b \lambda(\gamma(t))(\gamma'(t)) dt \end{aligned}$$

Umgekehrt

Sei  $\lambda : \Omega \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  eine 1-Form die in Folgende Sinne stetig ist:

Sei

$$\begin{aligned} \gamma : [a, b] &\rightarrow \Omega \\ t &\rightarrow (\gamma^1(t), \gamma^2(t), \dots, \gamma^n(t)) \end{aligned}$$

ein  $C'$ -weg. Dann ist

$$\begin{aligned} [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\rightarrow \lambda(\gamma(t))(\gamma'(t)) \\ &= \sum \lambda_i(\gamma(t)) \cdot \frac{d\gamma^i}{dt}(t) \end{aligned}$$

eine Stetige Funktion somit ist das Integral  $\int_a^b \lambda(\gamma(t))(\gamma'(t)) dt$  wohl definiert.

**Definition 8.36**

Das Wegintegral von  $\gamma \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  längs  $\gamma$  ist

$$\int_{\gamma} \lambda := \int_a^b \lambda(\gamma(t))(\gamma'(t)) dt$$

**Beispiel 8.37**

1. Sei  $\gamma \in C'([0, 2\pi] = \mathbb{R}^2)$  mit

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

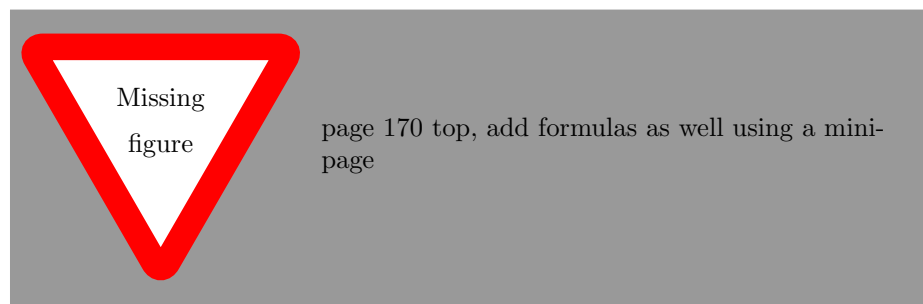
eine Parametrisierung des Einheitskreises  $\lambda = \lambda(x, y)$  die 1-Form mit

$$\lambda(x, y) = -ydx + xdy \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \lambda &= \int_0^{2\pi} \underbrace{(-\sin t, \cos t)}_{\lambda(\gamma(t))} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}}_{\gamma'(t)} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi \end{aligned}$$

2. Sei  $\gamma(x, y) = 3x^2 y dx + (x^3 + 1) dy$ . Wir betrachten die Kurvenintegral längs verschiedener Wege



$$\int_{\gamma_1} \lambda = \int 3x^2 y dx + (x^3 + 1) dy = \int_0^1 (3t^3 + (t^3 + 1)) dt = 2$$

$$\int_{\gamma} \lambda = \int_0^1 (3t^4 + (t^3 + 1) \cdot 2t) dt = 2$$

### Bemerkung

Sei  $f(x, y) = x^3y + y$ . Dann ist

$$df(x + y) = 3x^2y dx + (x^3 + 1) dy$$

und

$$f(1, 1) - f(0, 0) = (1 + 1) - (0, 0) = 2$$

Wir können den Begriff des Wegintegrals auf Wege zu erweitern die Stückweise  $C'$  sind. Ein Stückweise  $C'$ -Weg ist eine Stetige Abbildung  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit einer Unterteilung des Intervalls

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n = b$$

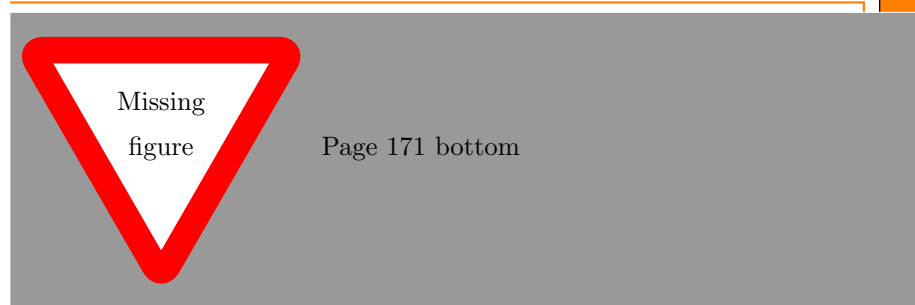
so dass

$$\gamma|_{[a_i, a_{i+1}]} = [a_i, a_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$C'$  ist.

d.h.  $t \rightarrow \gamma'(t)$  ist auf  $(a_i, a_{i+1})$  stetig und erweitert sich stetig auf  $[a_i, a_{i+1}]$

### Beispiel



Dann definiert man

$$\int_{\gamma} \lambda := \sum_{t=0}^{n-1} \int_{\gamma|_{[a_i, a_{i+1}]}} \lambda$$

Jetzt werden wir einige Grundlegenden Eigenschaften des Wegintegrals herleiten.

### Satz 8.38

Eigenschaften des Wegintegrals

- E1) Das Wegintegral  $\int_{\gamma} \lambda$  ist unabhängig von einer orientierungsverhaltenden umparametrisierung.

D.h. Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ ,  $C'$  und  $\varphi : [a', b'] \rightarrow [a, b]$ ,  $C'$  mit  $\varphi(a') = a$ ,  $\varphi(b') = b$ ,  $\varphi'(t) > 0 \forall t \in [a', b']$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \int_{\gamma \circ \varphi} \lambda &= \int_{a'}^{b'} \lambda(\gamma(\varphi(t))) (\gamma \circ \varphi)'(t) dt \\ &= \int_{a'}^{b'} \lambda(\gamma(\varphi(t))) \gamma'(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \\ &= \int_a^b \lambda(\gamma(s)) \gamma'(s) ds = \int_{\gamma} \lambda \end{aligned}$$

Geometrisch heisst dies, dass  $\int_{\gamma} \lambda$  nur vom Bild  $\gamma([a, b])$  mit vorgegebenen Durchlaufsinne abhängt

E2) Seien  $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \Omega$  und  $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \Omega$  zwei Wege mit  $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$



Wir definieren  $\gamma_1 + \gamma_2$  der Weg der durch aneinanderhängen von  $\gamma_1$  mit  $\gamma_2$  entsteht, d.h.

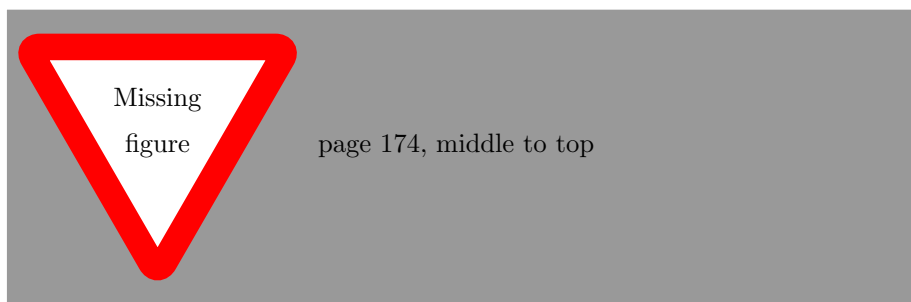
$$\gamma_1 + \gamma_2 = \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [a_1, b_1] \\ \gamma_2(t - b_1 + a_2) & t \in [b_1, b_1 + b_2 - a_2] \end{cases}$$

Dann gilt

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2} \lambda = \int_{\gamma_1} \lambda + \int_{\gamma_2} \lambda$$

E3) Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  ein Weg. Dann sei  $-\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  der Gleiche Weg aber im entgegengesetzten Durchlaufsinne, d.h.  $(-\gamma)(t) = \gamma(-t + a + b)$





Dann gilt

$$\int_{-\gamma} \lambda = - \int_{\gamma} \lambda$$

E4) Sei  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C'$ -Funktion, sowie  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  Stückweise  $C'$ .  
Dann gilt

$$\int_{\gamma} df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

$\gamma$  ist  $C'$ , dann ist

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} df &= \int_a^b df(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} (f \circ \gamma)(t) dt \\ &= (f \circ \gamma)(b) - (f \circ \gamma)(a) \\ &= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) \end{aligned}$$

Mittels den Wegintegrals können wir die  $C'$ -Funktionen charakterisieren deren Differentialverschwinden.

### Satz 8.39

Sei  $\Omega$  "Offen" und  $(C')$ -Wegzusammenhängend. Sei  $f \in C'(\Omega)$  falls  $df(x) = 0$ ,  $\forall x \in \Omega$  so ist  $f$  konstant.

Can't read, page 175 middle

### Beweis

$\Omega$  wegzusammenhängend heisst dass zu je zwei Punkten  $x, y \in \Omega$  gibt es in  $C'$ -Weg  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$  mit  $\gamma(0) = x$  und  $\gamma(1) = y$ ,  $\gamma([0, 1]) \subset \Omega$ . Dann folgt

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) \\ &= \int_{\gamma} df = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f(y) = f(x), \forall x, y \in \Omega \Rightarrow f$  ist konstant.

Frage: Wann ist eine 1-Form  $\lambda$ , von der form  $\lambda = df$ , d.h. differential einer Funktion? d.h. gegeben eine 1-Form  $\lambda$ , gibt es eine Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  s.d.  $df = \lambda$

Wenn ein  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  gibt so dass  $df = \lambda$ , heisst  $f$  ein Potential. (Potential ist wie ein Stammfunktion für ein 1-Form). Mittels Wegintegral, stellen wir jetzt ein Kriterium

**Satz 8.30**

Sei  $\lambda \in \Omega \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  eine Stetige 1-Form. Folgende Aussage sind äquivalent

1. Es gibt  $f \in C'(\Omega)$  mit  $df = \lambda$
2. Für je zwei Stückweise  $C'$ -Wege  $\gamma_i = [a_i, b_i] \rightarrow \Omega$  mit selben Anfangs und Endpunkten (d.h.  $\gamma_1(a_1) = \gamma_2(a_2)$ ,  $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(b_2)$ ) gilt

$$\int_{\gamma_1} \lambda = \int_{\gamma_2} \lambda$$

3. Für jede geschlossene  $C'$ Weg  $\gamma$  gilt

$$\int_{\gamma} \lambda = 0$$

**Beweis**

(1)  $\Rightarrow$  (2): Folgt aus E4)

(2)  $\Leftrightarrow$  (3): Klar

(2)  $\Rightarrow$  (1): Sei  $p_0 \in \Omega$ ; für jedes  $x \in \Omega$ . Sei  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$  Stückweise  $C'$  mit  $\gamma(0) = p_0$ ,  $\gamma(1) = x$ . Definiere  $f(x) := \int_{\gamma} \lambda$ .

Dann ist  $f$  nach Annahme (2) Wohldefiniert (d.h. unabhängig von dem Weg von  $p_0$  nach  $x$ ) (Wir können  $f$  auch mit  $\int_{p_0}^x \lambda$  bezeichnen)

**Behauptung**

$f \in C'(\Omega)$  und  $df = \lambda$ . Um zu zeigen dass  $df = \lambda$  müssen wir zeigen dass für  $x, x_0 \in \Omega$

$$f(x) - f(x_0) = \lambda(x_0)(x - x_0) + R(x, x_0)$$

mit  $\frac{R(x, x_0)}{|x - x_0|} \rightarrow 0$ .

Sei  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Sei  $\gamma_1 : [-1, 0] \rightarrow \Omega$  ein Weg von  $p_0$  nach  $x_0$ . Dann gilt

$$\int_{\gamma_1} \lambda = f(x_0)$$

# KAPITEL 8. DIFFERENTIALRECHNUNG IN $\mathbb{R}^n$

Sei

$$\begin{aligned}\gamma_x : [0, 1] &\rightarrow \Omega \\ t &\rightarrow (1-t)x_0 + tx\end{aligned}$$



Um  $\gamma^x([0, 1]) \subset \Omega$  zu garantieren, nehmen wir  $r > 0$  so dass  $B_r(x_0) \subset \Omega$  und nehmen an, dass  $x \in B_r(x_0)$ . Dann ist

$$f(x) = \int_{\gamma_1 + \gamma_x} \lambda = \int_{\gamma_1} \lambda + \int_{\gamma_x} \lambda = f(x_0) + \int_{\gamma^x} \lambda$$

Nun ist

$$\begin{aligned}\int_{\gamma^x} \lambda &= \int_0^1 \lambda(\gamma_x(t)) \gamma_x'(t) dt \\ &= \int_0^1 \lambda(\gamma_x(t)) (x - x_0) dt \\ &= \lambda(x_0) (x - x_0) + \int_0^1 (\lambda(\gamma^x(t)) - \lambda(x_0)) (x - x_0) dt\end{aligned}$$

Sei  $\lambda = \sum \lambda^i dx^i$  dann ist obigen Integral gleich

$$\begin{aligned}&\sum \int_0^1 [\lambda_i(\gamma^x(t)) - \lambda_i(x_0)] (x^i - x_0^i) dt \\ &\leq \sum \left( \int_0^1 [\lambda_i(\gamma^x(t)) - \lambda_i(x_0)]^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} |x - x_0|\end{aligned}$$

Also  $f(x) - f(x_0) = \lambda(x_0)(x - x_0) + R(x, x_0)$ , wobei

$$\frac{R(x - x_0)}{|x - x_0|} \leq \left( \sum_{i=1}^n \left( \int_0^1 (\lambda_i(\gamma^x(t)) - \lambda_i(x_0)) dt \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Aus stetigkeit der folgt das

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x, x_0)}{|x - x_0|} \rightarrow 0$$

Can't read, page 179 bottom

**Beispiel 8.31**

1. Sei  $\lambda = 2xy^2dx + 2x^2ydy$ .

Ansatz:

$$f(x, y) = \int_{\gamma(x, y)} \lambda$$

wobei  $\gamma_{(x, y)}(t) = (tx, ty)$ ,  $t \in (0, 1)$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \lambda &= \int_0^1 \lambda(tx, ty)(x, y) dt \\ &= \int_0^1 \left[ 2(tx)(ty)^2 \cdot x + 2(tx)^2(ty) \cdot y \right] dt \\ &= 4x^2y^2 \int_0^1 t^3 dt = x^2y^2 \end{aligned}$$

und  $df(x, y) = 2xy^2dx + 2x^2ydy$ .

Oder: Ansatz:

$$df : \lambda \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2, \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2 \Rightarrow f(x, y) = \int 2xy^2 dx = x^2y^2 + C(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y + \frac{d}{dy}C(y) = 2x^2y \Rightarrow \frac{d}{dy}C(y) = 0 \Rightarrow C(y) = \text{Konstant}$$

$$\Rightarrow f(x, y) = x^2y^2 + C$$

Where is number 2??  
page 180

Analog wie für 1-Formen kann man Satz 8.30 für Vektorfelder formulieren

**Definition 8.32**

Ein Vektorfeld  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  heisst konservativ falls  $\forall \gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$  geschlossen

$$\int_{\gamma} v ds = 0$$

Aus Satz 8.30 Folgt

**Satz 8.33**

Für eine Stetige Vektorfeld  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  sind folgende Aussagen equivalent

1.  $v$  ist Konservative
2. Es gibt  $f \in C'(\Omega)$  mit  $v = \nabla f$ . In diesem Fall heisst  $v$  Potentialfeld mit dem Potential  $f$ .

Im Nächsten Kapitel, mittels höhere Partielle Ableitungen, erhalten wir eine einfach zu notwendige Bedingung für ein Konservatives Vektorfeld. Wir werden sehen dass

can't understand, page 182 top

$$v = (v^i)_{1 \leq i \leq n} \in C'(\Omega, \mathbb{R}^n) \text{ konservative} \\ \Rightarrow \frac{\partial v^i}{\partial x^j} = \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \quad 1 \leq i, j \leq n$$

## 8.5 Höhere Ableitungen

**Definition 8.44**

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \Omega \subset \mathbb{R}^n$   $f \in C'(\Omega)$  heisst von Klasse  $C^2$  falls  $\frac{\partial f}{\partial x^i} \in C'(\Omega)_{1 \leq i \leq n}$

Für beliebiges  $m$ , die Funktion  $f \in C'(\omega)$  heisst von der Klasse  $C^m$ ,  $f \in C^m(\omega)$  falls  $\frac{\partial f}{\partial x^i} \in C^{m-1}(\Omega), 1 \leq i \leq n$

Where does the definition end? page 183 top

Für eine  $f \in C^2(\Omega)$ , die Funktionen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} := \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\partial f}{\partial x^j} \right)$$

heissen die zweiten partiellen Ableitungen von  $f$ .

Analog definiert man die  $m$ -ten partielle Ableitungen von  $f$  oder partielle Ableitungen vom Grad  $m$  für jedes  $m > 0$  (Für  $f \in C^m(\Omega)$ )

**Satz 8.45**

Sei  $f \in C^2(\Omega)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} &= \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} \end{aligned}$$

Im Allgemein

**Satz 8.46**

Für jede  $C^k$ -Funktion sind alle Partielle Ableitungen vom Grad  $\leq k$  von der Reihenfolge der Ableitungen unabhängig. Von Satz 8.35 erhalten wir folgende notwendige Bedingung für konservativität

**Korollar 8.47**

Sei  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $v = (v^i)_{1 \leq i \leq n}$  ein  $C'$ -Vektorfeld. Falls  $v$  konservativ ist, folgt

$$\frac{\partial v^i}{\partial x^j} = \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \quad 1 \leq i, j \leq n$$

**Beweis**

Nach Voraussetzung gibt es  $f \in C'(\Omega)$  mit  $v^i(x) = \frac{\partial f}{\partial x^i}$ . Da nun  $v^i \in C'$ ,  $1 \leq i \leq n$  folgt  $f \in C^2(\Omega)$ . Woraus

$$\frac{\partial v^i}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) = \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial}{\partial x^i} v^j$$

folgt.

**Beispiel 8.48**

1.

$$v(x, y) = \begin{pmatrix} 4xy^2 \\ 2y \end{pmatrix}$$

Es gilt  $\frac{\partial v^1}{\partial y} = 8xy$ ,  $\frac{\partial v^2}{\partial x} = 2$ . Also ist  $v$  nicht konservativ

2. Sei  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \neq (0, 0)\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$  und

$$v(x, y) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

Dann  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  mindestens  $C'$ . Ausserdem

$$\frac{\partial v^1}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial v^2}{\partial x}$$

Jetzt berechnen wir  $\int_C v ds$ , wobei  $C$ :



$$\begin{aligned}\int_C v ds &= \int_0^{2\pi} \langle v(C(t)), C'(t) \rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi \neq 0 \\ &\Rightarrow v \text{ auf } \Omega \text{ ist nicht konservativ!}\end{aligned}$$

Jetzt betrachten wir  $\Omega' = \{(x, y) \mid x > 0\}$  und führen Polarkoordinaten ein

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

Dann ist  $\tan \theta = \frac{y}{x}$  und

$$\theta = \arctan \frac{y}{x}$$

Wir betrachten  $\theta : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$  als eine Funktion der Variablen  $x, y$  und berechnen

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{x}{x^2 + y^2}\end{aligned}$$

Also gilt

$$\nabla \theta(x, y) = v(x, y)$$

$$v(x, y) \in \Omega'$$

$\Rightarrow v$  ist konservativ auf  $\Omega$

Das heißt Konservativität ist eine Eigenschaft zugleich des Vektorfeldes  $v$  und der Region  $\Omega$

#### Definition 8.49

Eine offene Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  heißt einfach zusammenhängend falls

1.  $\Omega$  ist stückweise  $C'$ -Wegzusammenhängend
2. Jeder stückweise  $C'$ -Weg in  $\Omega$  kann stetig innerhalb  $\Omega$  auf einen Punkt zusammengezogen werden

Die Region  $\Omega = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  ist nicht einfach, zu  $\Omega' = \{(x, y) \mid x > 0\}$  ist es aber.

can't understand image on page 187, top

**Satz 8.50**

Sei  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  beschränkt zusammenhängend sowie einfachzusammenhängend, sei  $v \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$  Vektorfeld. Dann sind äquivalent

1.  $v$  ist konservativ
2.  $\frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_2}{\partial x}$

**Taylorentwicklung und der lokale Verhalten von  $C^m$ -Funktionen**

Not sure how big of a title...

Wir werden jetzt ein Verallgemeinerung der 1. Variablen Taylorentwicklung herleiten.

Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^m$ -Funktion sowie  $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ . (Allgemein könnte man  $\mathbb{R}^n$  durch eine offene konvexe Menge ersetzen)

Sei

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\rightarrow (1-t)x_0 + x_1 \end{aligned}$$

Dann ist  $g := f \circ \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine

Dont know where this actually fits:  $(g(0) = f(x_0), g(1) = f(x_1))$

can't read, page 189  
bottom

$C^m$ -Funktion und (nach Taylor von Funktionen 1-variable) es gibt  $\xi \in (0, 1)$  so dass

$$(*) \quad g(t) = g(0) + g'(0)t + \dots + \frac{g^{(m-1)}(0)}{(m-1)!}t^{m-1} + \frac{g^{(m)}(\xi)}{m!}t^m$$

can't read between brackets before equal sign, page 190 very top

Jetzt berechnen wir  $g^{(i)}(t)$  im Funktion von  $f$  und seinem Ableitungen. Für  $g'(t)$  benutzen wir die Kettenregel:

$$g'(t) = df(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

mit

$$\varphi'(t) = x_1 - x_0 = (x_1' - x_0', x_1^2 - x_0^2, \dots, x_1^n - x_0^n)$$

Erhalten wir:

$$\begin{aligned} g'(t) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(\varphi(t)) (x_1^i - x_0^i) = \nabla f(\varphi(t)) \cdot (x_1 - x_0) \\ g'(0) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) (x_1^i - x_0^i) = \nabla f(x_0) \cdot (x_1 - x_0) \end{aligned}$$



## KAPITEL 8. DIFFERENTIALRECHNUNG IN $\mathbb{R}^n$

Jetzt berechnen wir  $g^{(2)}(t)$ :

$$g^{(2)}(t) = \frac{d}{dt} (g'(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial x^i} (\varphi(t)) \right) (x_1^i - x_0^i)$$

Analog gilt:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial x^i} (\varphi(t)) \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} (\varphi(t)) (x_1^j - x_0^j)$$

Eingesetzt gilt:

$$\begin{aligned} g^{(2)}(t) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} (\varphi(t)) \right) (x_1^i - x_0^i) (x_1^j - x_0^j) \\ g^{(2)}(0) &= \sum_{i,j=1}^n \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} (x_0) \right) (x_1^i - x_0^i) (x_1^j - x_0^j) \end{aligned}$$

Daraus schliesst man induktive das

$$g^{(k)}(t) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^n \left( \frac{\partial^k f}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_k}} (\varphi(t)) \right) \prod_{l=1}^k (x_1^{i_l} - x_0^{i_l})$$

Eingesetzt in (\*) (s.134) ergibt

MISSING CONTENT?? page 191 bottom

### Satz 8.51 (Taylor entwicklung)

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} (x_0) (x_1^i - x_0^i) + \dots \\ &+ \frac{1}{(m-1)!} \sum_{i_1, \dots, i_{m-1}=1}^n \frac{\partial^{m-1} f}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_{m-1}}} (x_0) \prod_{l=1}^{m-1} (x_1^{i_l} - x_0^{i_l}) \\ &+ \frac{1}{m!} \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n \frac{\partial^m f}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_m}} (x_\xi) \prod_{l=1}^m (x_1^{i_l} - x_0^{i_l}) \end{aligned}$$

mit eine Zahl  $\xi \in (0, 1)$ ,  $x_\xi = (1 - \xi) x_0 + \xi x_1$ .

### Bemerkung 8.52

Insbesondere für  $m = 2$  erhalten wir für  $f$  die quadratische Näherung

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_0) + \nabla f(x_0) (x_1 - x_0) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} (x_0) (x_1^i - x_0^i) (x_1^j - x_0^j) + r_2(f, x_1, x_0) \end{aligned}$$

mit Fehler

$$\frac{r_2(f, y_1, x_0)}{|x_1 - x_0|} \rightarrow 0, (x_1 \rightarrow x_0)$$

**Definition 8.53**

Die Matrix der Zweiten partiellen Ableitungen heisst die Hesse - Matrix von  $f$ , und mit  $\text{Hess}(f)$  oder  $\nabla^2 f$  bezeichnet

$$\begin{aligned}\text{Hess}(f) = \nabla^2 f &:= \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \cdot \partial x^j} \right)_{i,j=1 \dots n} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x' \partial x'} & \frac{\partial^2 f}{\partial x' \partial x^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x' \partial x^n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x'} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^n \partial x'} & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x^n \partial x^n} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Seien  $\nabla f, x_1 - x_0$  Zeilenvektoren und sei  $(x - x_0)^t$  der zu  $x_1 - x_0$  transponierte Spaltenvektor. Dann wird die Taylorentwicklung von Grad 2 äquivalent zu

$$\begin{aligned}f(x) &= f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0)^t \\ &\quad + \frac{1}{2}(x - x_0) \cdot \nabla^2 f(x_0)(x - x_0)^t \\ &\quad + r_3(f, x, x_0)\end{aligned}$$

**Bemerkung**

Die Hesse - Matrix von  $f$ , nach Satz von Schwarz ist eine Symmetrische Matrix.

**Beispiel**

$f(x, y) = e^{x+y} \cos x$  im Punkt  $(0, 0)$ . Die Taylorentwicklung vom Grad 2:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= e^{x+y} \cos x - e^{x+y} \sin x, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= e^{x+y} \cos x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 1\end{aligned}$$

shouldn't it be  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 1$  for second one??

$$(\nabla f)(0, 0) = (1, 1) \quad f(0, 0) = 1$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) &= e^{x+y} \cos x - e^{x+y} \sin x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = e^{x+y} \cos x - e^{x+y} \sin x - e^{x+y} \sin x - e^{x+y} \cos x \\ &= -2e^{x+y} \sin x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) &= 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= e^{x+y} \cos x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 1\end{aligned}$$

$$\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}((x,y) - (0,0)) \nabla^2 f(0,0) ((x,y) - (0,0))^T &= (x,y) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= (x,y) \begin{pmatrix} y \\ x+y \end{pmatrix} \\ &= 2xy + y^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(x,y) &= e^{x+y} \cos x = 1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (x,y) + \frac{1}{2} (x,y) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= 1 + (x,y) + \frac{1}{2} (2xy + y^2) + r_3(f, (x,y))\end{aligned}$$

Taylorpolynom von Grad 2:  $1 + (x+y) + \frac{1}{2} (2xy + y^2)$

Die Hesse - Matrix bestimmt ob die Funktion  $f$  in der Nähe von  $x$  konvex oder konkav ist (oder nicht). Sie "spielt" die gleiche Rolle, wie die zweite Ableitung von Funktionen in einer Variable.

Als nächstes benötigen wir eine mehrdimensionale Entsprechung zu den positivität in den eindimensionalen Beziehungen  $f''(z) > 0$  bzw.  $f''(z) < 0$ .

Can't understand word between brackets, page 197 middle

#### Definition 8.54

Eine symmetrische Matrix  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heisst

1. **Positiv definit** wenn

$${}^t x A x = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x^i x^j > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

(oder wenn ihre Eigenwerte sämtlich positive sind)

2. **Negativ definit** wenn

$${}^t x A x < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

(wenn ihre Eigenwerte sämtlich negativ sind)

3. Sonst **indefinit** (wenn sie sowohl positive als auch negative Eigenwerte besitzt)

Im symmetrischen  $2 \times 2$  Fall ist die Gleichung auf Definitheit besonders leicht

### Satz 8.55

Eine Symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$$

ist genau dann

1. Positiv definit, wenn  $\det A > 0$  und  $a_{11} > 0$
2. Negativ definit, wenn  $\det A > 0$  und  $a_{11} < 0$
3. Indefinit, wenn  $\det A < 0$

### Extrema von Funktionen mehrere Variablen

Jetzt werden wir nach Punkten  $x \in \mathbb{R}^n$  sehen, in denen eine Funktion  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ein lokales Extremum annimmt. Wir erinnern uns an das Vorgehen im  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

1. Finde alle Punkte  $x \in \mathbb{R}$ , für die  $f'(x) = 0$  gilt (Notwendige Bedingung)
2. Falls in einem solchen Punkt zusätzlich  $f''(x) > 0$  (bzw.  $f''(z) < 0$ ) gilt so handelt es sich um ein lokales Minimum (bzw. Maximum) (hinreichende Bedingung)

Jetzt verallgemeinern wir diese Strategie Zunächst

#### Definition 8.55

Ein Punkt  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  mit  $df(x_0) = 0$  heisst kritischer Punkt von  $f$  (oder stationärer Punkt von  $f$ )

### Satz 8.56

Sei

$$\begin{aligned} f : \Omega \subset \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\in C^2(\Omega); x_0 \in \Omega \end{aligned}$$

## KAPITEL 8. DIFFERENTIALRECHNUNG IN $\mathbb{R}^n$

1. Falls  $x_0 \in \Omega$  lokale Extremum (min oder max) von  $f$  ist, so gilt  $df(x_0) = 0$
2. Falls  $df(x_0) = 0$ , und falls  $\text{Hess}(f)(x_0)$  positiv definiert ist, so ist  $x_0$  eine lokale Minimalstelle
3. Falls  $df(x_0) = 0$ , und falls  $\text{Hess}_f(x_0) < 0$  negativ definiert ist, so ist  $x_0$  eine lokale Maximalstelle
4. Falls  $df(x_0) = 0$ , und  $\text{Hess}_f(x_0)$  indefinit ist, so ist  $x_0$  ein Sattelpunkt (d.h. jede Umgebung  $U$  von  $x_0$  enthält Punkte  $p, q \in U$  mit  $f(p) > f(x_0) > f(q)$ )

### Beispiel

1.

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 \\ \nabla f &= (2(x-1), 2(y+2), 2(z+1)) \\ \nabla f(x_0) &= (0, 0, 0) \Rightarrow x_0 = (1, -2, -1) \end{aligned}$$

$$H_f(x_0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$H_f(x_0)$  ist positiv definiert  $\Rightarrow x_0(1, -2, -1)$  ist ein lokales Minimum.

2.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \cos(x+2y) + \cos(2x+3y) \\ \nabla f &= (-\sin(x+2y) - 2\sin(2x+3y), \\ &\quad -2\sin(x+2y) - 3\sin(2x+3y)) = (0, 0) \\ &\Rightarrow -\sin(x+2y) - 2\sin(2x+3y) = 0 \\ &\quad -2\sin(x+2y) - 3\sin(2x+3y) = 0 \\ &\Rightarrow \sin(2x+3y) = 0, \quad \sin(x+2y) = 0 \\ &\Rightarrow \left. \begin{aligned} 2x+3y &= k\pi \\ x+2y &= l\pi \end{aligned} \right\} \Rightarrow y = k\pi \text{ und } x = l\pi \end{aligned}$$

Kritische punkte:  $(\pi l, \pi k) \quad k, l \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x \partial y} = -2\cos(x+2y) - 6\cos(2x+3y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -\cos(x+2y) - 4\cos(2x+3y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -4\cos(x+2y) - 9\cos(2x+3y) \end{aligned}$$

$$(0, 0) : \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -5 < 0$$

$$|\nabla^2 f(0,0)| = \begin{vmatrix} -5 & -8 \\ -8 & -13 \end{vmatrix} = 13 \cdot 5 - 64 = 1 < 0$$

$\Rightarrow \nabla^2 f(0,0)$  ist negative definit und  $(0,0)$  ist eine lokale maximale Stelle.

Auch alle Punkte  $(-2\pi k, 2\pi l)$  sind lokale Maxima. Analog, bis auf Addition von Vielfachen von  $2\pi$  hat  $f$  lokale minimale Stelle in  $(\pi, \pi)$  und Sattelpunkte in  $(0, \pi)$  und  $(\pi, 0)$

## 8.6 Vektorwertige Funktionen

Sei  $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ,  $f = (f^i)_{1 \leq i \leq l} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^l$

### Definition 8.57

#### 1. Die Funktion

can,t understand the function, page 203 top

heisst an der Stelle  $x_0 \in \Omega$  differenzierbar, falls jede Komponente  $f^i$ ,  $1 \leq i \leq l$  an der Stelle  $x_0$  differenzierbar ist.

Das Differential  $df(x_0)$  hat die Gestalt

$$df(x_0) = \begin{pmatrix} df^1(x_0) \\ \vdots \\ df^l(x_0) \end{pmatrix}$$

#### 2. $f$ heisst auf $\Omega$ differenzierbar (bzw. von der Klasse $C^m$ , $m \geq 1$ ) falls jedes $f^i$ differenzierbar ist (bzw. $f^i \in C^m(\Omega)$ ) $1 \leq i \leq l$

### Bemerkung 8.58

#### 1. Bezüglich der Standardbasis $dx^j$ , $1 \leq j \leq n$ erhalten wir

$$df^i(x_0) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x_0) dx^j = \left( \frac{\partial f^i}{\partial x^1}(x_0), \dots, \frac{\partial f^i}{\partial x^n}(x_0) \right)$$

die Darstellung

$$df(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(x_0) & \frac{\partial f^1}{\partial x^2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n}(x_0) \\ \frac{\partial f^2}{\partial x^1}(x_0) & \frac{\partial f^2}{\partial x^2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f^2}{\partial x^n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^l}{\partial x^1}(x_0) & \frac{\partial f^l}{\partial x^2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f^l}{\partial x^n}(x_0) \end{pmatrix}$$

## KAPITEL 8. DIFFERENTIALRECHNUNG IN $\mathbb{R}^n$

Die  $l \times n$  matrix  $df(x_0) = \left( \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x_0) \right)_{1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq n}$  heisst Jacobi oder Funktionalmatrix von  $f$  an der Stelle  $x_0$ .

2. Auch im Vektorwertigen Fall ist die Funktion  $f$  genau dann differenzierbar in  $x_0$ , wenn eine lineare Abbildung  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  existiert mit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0$$

### Beispiel 8.59

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2) \text{ mit } df(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

Can't understand the symbol between the  $\mathbb{R}^2$ , page 205 middle to top

Es gelten die üblichen Differentiationsregeln

### Satz 8.60

Sei  $f, g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  an der Stelle  $x_0 \in \Omega$  differenzierbar und  $\alpha \in \mathbb{R}$ . dann sind die Funktionen  $\alpha f$  und  $f + g$  sowie das Skalarprodukt von  $f$  und  $g$  an der Stelle  $x_0$  differenzierbar und

1.  $d(\alpha f)(x_0) = \alpha df(x_0)$
2.  $d(f + g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0)$
3.  $d(f \cdot g)(x_0) = f(x_0) \cdot dg(x_0) + g(x_0) \cdot df(x_0)$   
wobei  $f(x_0) \cdot dg(x_0) = \sum_{i=1}^l f^i(x_0) dg^i(x_0)$

### Satz 8.61

Seien  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^l$  an der Stelle  $x_0 \in \Omega$  und  $f : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^m$  an der Stelle  $g(x_0)$  differenzierbar.

Dann ist die Funktion  $f \circ g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  an der Stelle  $x_0$  differenzierbar, und

$$d(f \circ g)(x_0) = df(g(x_0)) \cdot dg(x_0)$$

**Beispiel**

Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \rightarrow \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} \quad df = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

$$g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \rightarrow \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 \\ xyz \end{pmatrix} \quad dg = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$$

$$(f \circ g) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \rightarrow \begin{pmatrix} (x^2 + y^2 + z^2)^2 - (xyz)^2 \\ 2(x^2 + y^2 + z^2)(xyz) \end{pmatrix}$$

$$d(f \circ g)(x, y, z) = df(g(x, y, z)) \cdot dg(x, y, z)$$

$$= \begin{pmatrix} 2(x^2 + y^2 + z^2) & -2xyz \\ 2xyz & 2(x^2 + y^2 + z^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4x(x^2 + y^2 + z^2) - 2xy^2z^2 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$



## Kapitel 9

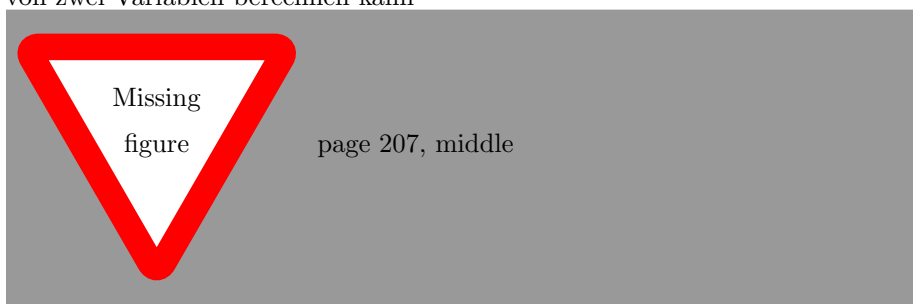
# Integration in $\mathbb{R}^n$

Im Eindimensionalen hatten wir mit dem Integral

$$\int_a^b f(x) dx$$

den Flächeninhalt unter dem Graphen von  $f$  berechnet. Wir suchen nach eine Verallgemeinerung mit der z.B. Volumen unter dem Graphen einer Funktion von zwei Variablen berechnen kann

can't understand word,  
page 207 middle



Erinnerung: Bestimmtes Riemann-Integral einer Funktion  $f(x)$  über einem Intervall  $[a, b]$ :

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Das Integral  $I$  war als Grenzwert von Riemannscher Ober und Untersumme definiert (falls diese Grenzwert jeweils existieren und übereinstimmen).

Konstruktionsprinzip für Bereichsintegrale ist Analog. Aber der Definitionsbereich  $D$  ist komplizierter. Wir betrachten zunächst den Fall zweier Variabler,  $n = 2$ , und einen Definitionsbereich  $D \subset \mathbb{R}^2$  der Form

$$D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$$

d.h.  $D$  ist ein kompakter Quader (Rechteck). Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Funktion.

**Definition 9.1**

Mann nennt  $Z = \{(x_0, x_1, \dots, x_n), (y_0, y_1, \dots, y_m)\}$  eine Zerlegung des Quaders  $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$  falls gilt

$$a_1 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b_1$$

$$a_2 = y_0 < y_1 < \dots < y_m = b_2$$

1. WHERE IS NUMBER 1??

2. Die Feinheit einer Zerlegung  $Z \in \mathcal{Z}(D)$  ist

$$\|Z\| := \max_{i,j} \{|x_{i+1} - x_i|, |y_{j+1} - y_j|\}$$

3. Für eine vorgegebene Zerlegung  $Z$ , nennt man die Mengen

$$Q_{ij} := [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$$

die Teilquader der Zerlegung  $Z$ . Das Volumen des Teilquaders  $Q_{ij}$  ist

$$\text{vol}(Q_{ij}) := (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$$

4. Für beliebige Punkte  $\xi_{ij} \in Q_{ij}$  der Jeweiligen Teilquader nennt man

$$R_f(Z) := \sum_{i,j} f(\xi_{ij}) \text{vol}(Q_{ij})$$

eine Riemannsche Summe zur Zerlegung  $Z$

5. Analog zum Integral einer Variablen heissen für eine Zerlegung  $Z$

$$U_f(Z) := \sum_{i,j} \inf_{\mathbf{X} \in Q_{ij}} f(\mathbf{X}) \text{vol}(Q_{ij})$$

$$O_f(Z) := \sum_{i,j} \sup_{\mathbf{X} \in Q_{ij}} f(\mathbf{X}) \text{vol}(Q_{ij})$$

die Riemannsche Untersumme bzw. Riemannsche Obersumme von  $f(x)$

**Bemerkung 9.2**

1. Es gilt

$$U_f(Z) \leq R_f(Z) \leq O_f(Z)$$

d.h. eine Riemannsche Summe zur Zerlegung  $Z$  liegt stets zwischen der Unter und Obersumme dieser Zerlegung.

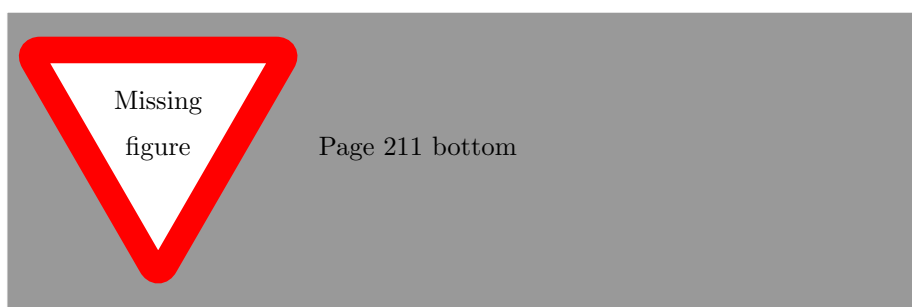
2. Entsteht eine Zerlegung  $Z_2$  aus der Zerlegung  $Z_1$  durch Hinzunahme wei-

terer Zwischenpunkte  $x_i$  oder/und  $y_j$  so gilt

$$U_f(Z_2) \geq U_f(Z_1) \quad \text{und} \\ O_f(Z_2) \leq O_f(Z_1)$$

Für zwei beliebige Zerlegungen  $Z_1, Z_2$  gilt stets

$$U_f(Z_1) \leq O_f(Z_2)$$



### Definition 9.3

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt

1. Riemannsche Unterintegral bzw. Riemannsche Oberintegral der Funktion  $f(x)$  über  $D$  ist

$$U_f := \sup \{U_f(z) : z \in Z(D)\} := \int_{\underline{D}} f(x) d\mu$$

$$O_f := \inf \{O_f(z) : z \in Z(D)\} := \int_{\bar{D}} f(x) d\mu$$

2. Die Funktion  $f(x)$  nennt man Riemann - integrierbar über  $D$ , falls Unter und Oberintegral übereinstimmen. Das Riemann Integral von  $f(x)$  über  $D$  ist

$$\int_D f(x) d\mu = \int_{\bar{D}} f(x) d\mu = \int_{\underline{D}} f(x) d\mu$$

### Bemerkung

In höheren Dimensionen,  $n > 2$ , ist die Vorgehensweise analog. Schreibweise:  
Für  $n = 2, n = 3$

$$\int_D f(x, y) d\mu \quad \text{bzw.} \quad \int_D f(x, y, z) d\mu$$

oder auch

$$\int_D f(x, y) \, dx dy \text{ bzw. } \int_D f(x, y, z) \, dx dy dz$$

oder

$$\int_D f \, dx dy \text{ bzw. } \int_D f \, dx dy dz$$

### Satz 9.4 (Elementare Eigenschaften des Integrals)

1. Linearität: Seien  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und  $R$  integrierbar,  $\beta, \alpha \in \mathbb{R}$ . Dann sind  $\alpha f, f + g$   $R$  - Integrierbar

$$\int_D (\alpha f + \beta g) \, d\mu = \alpha \int_D f \, d\mu + \beta \int_D g \, d\mu$$

2. Monotonie: Gilt  $f(x) \leq g(x), \forall x \in D$ , so folgt

$$\int_D f \, d\mu \leq \int_D g \, d\mu$$

3. Positivität: Gilt für alle  $x \in D, f(x) \geq 0$  (d.h.  $f(x)$  ist nichtnegativ), so folgt

$$\int_D f \, d\mu \geq 0$$

4. Abschätzung

$$\left| \int_D f(x) \, d\mu \right| \leq \sup_{x \in D} |f(x)| \, \text{vol}(D)$$

5. Sind  $D_1, D_2, D$  Quader,  $D = D_1 \cup D_2$  und  $\text{vol}(D_1 \cap D_2) = 0$ , so ist  $f$  genau dann über  $D$  integrierbar, falls  $f$  über  $D_1$  und über  $D_2$  integrierbar ist und es gilt

$$\int_D f \, d\mu = \int_{D_1} f \, d\mu + \int_{D_2} f \, d\mu$$

(Gebietsadditivität)

## 9.1 Der Satz von Fubini

According to the notes it should be 9.2, which one is right??

Wie kann man das  $R$  - Integral konkret berechnen? Der Satz von Fubini hilft uns.

**Satz 9.5 (Satz von Fubini)**

Sei  $Q = [a, b] \times [c, d] \in \mathbb{R}^2$  und sei  $f \in C^0(Q)$ . Dann gilt

$$\int_Q f d\mu = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

d.h. das Integral von  $f$  über  $Q$  kann iterativ durch 1-Dimensionale Integration bestimmt werden

**Beispiel 9.6**

1. Sei  $f(x, y) = 2x + 2yx$ ,  $Q = [0, 1] \times [-2, 2]$

$$\begin{aligned} \int_Q f d\mu &= \int_{-2}^2 \left( \int_0^1 (2x + 2yx) dx \right) dy \\ &= \int_{-2}^2 \left( x^2 + yx^2 \Big|_0^1 \right) dy \\ &= \int_{-2}^2 (1 + y) dy = y + \frac{y^2}{2} \Big|_{-2}^2 = 4 \end{aligned}$$

Oder:

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \left( \int_{-2}^2 (2x + 2yx) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left( 2xy + y^2x \Big|_{-2}^2 \right) dx \\ &= \int_0^1 [(4x + 4x) - (-4x + 4x)] dx \\ &= \int_0^1 8x dx = 4x^2 \Big|_0^1 = 4 \end{aligned}$$

- 2.

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \int_0^{2\pi} (e^x \sin y) dy dx \\ &= \int_0^1 \left( -e^x \cos y \Big|_0^{2\pi} \right) dx \\ &= \int_0^1 0 dx = 0 \end{aligned}$$

Oder:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 e^x \sin y dx \right) dy \\
 &= \int_0^{2\pi} \left( \sin y e^x \Big|_0^1 \right) dy \\
 &= \int_0^{2\pi} (e - 1) \sin y dy \\
 &= - (e - 1) \cos y \Big|_0^{2\pi} = 0
 \end{aligned}$$

### Geometrische Dehnung

Not sure about the text size...



In der Skizze ergibt sich als Volumen der markierten Schicht bei festem  $x$  und sehr kleinen Dicke  $dx$  näherungsweise das Volumen

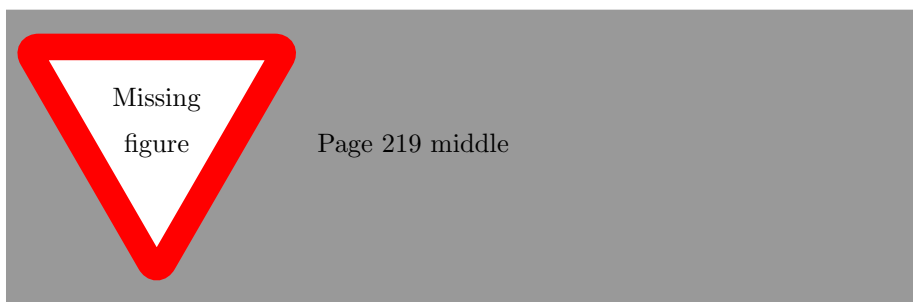
$$\left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

Das Aufaddieren sämtlicher Schichtvolumen entspricht gerade der Integration über die Variable  $x$ , d.h. für das gesuchte Volumen gilt

$$V = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

Bis jetzt können wir nur Integrale über achsenparallel rechteckige bzw. quaderförmige Bereiche berechnen.

Das reicht für viele praktische Aufgaben nicht aus. Meist ist der Integrationsbereich  $D$  krummlinig oder zumindest anders begrenzt



Die meisten praktischen Aufgaben lassen sich auf die Integration über sogenannte Normalbereiche zurückführen.

**Definition 9.10**

1. Eine Teilmenge  $D \subset \mathbb{R}^2$  heisst ein Normalbereich bezüglich der  $x$ -achse bzw. bezüglich der  $y$ -Achse falls es stetige Funktionen  $g, h$  bzw.  $\bar{g}, \bar{h}$  gibt mit

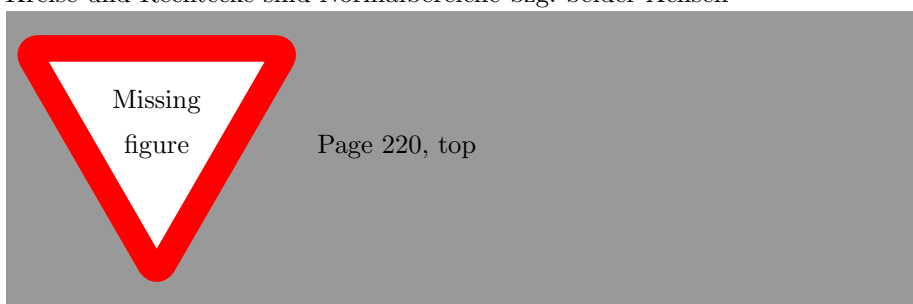
$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \text{ und } g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

bzw.

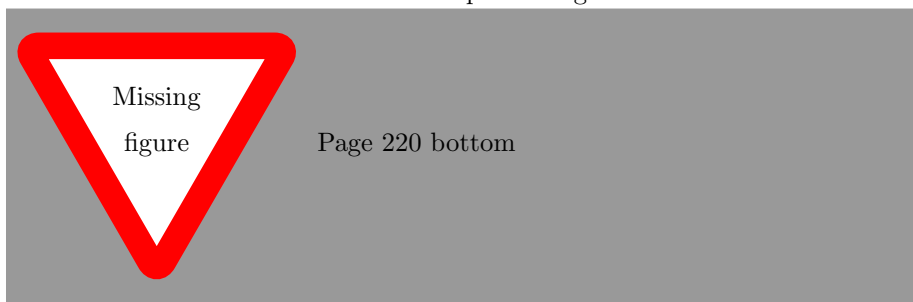
$$D = \{(x, y) \mid \bar{a} \leq x \leq \bar{b}, \text{ und } \bar{g}(x) \leq y \leq \bar{h}(x)\}$$

**Beispiel**

Kreise und Rechtecke sind Normalbereiche bzg. beider Achsen



Über Normalbereiche lässt sich sehr bequem integrieren



Die markierte Scheibe bei  $y = \text{const.}$  mit kleiner Dicke  $dx$  besitzt näherungsweise das Volumen

$$V(x) = \left( \int_{g(x)}^{f(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

Nun braucht man  $V(x)$  nur noch über  $[a, b]$  zu integrieren

$$V = \int_a^b \left( \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

**Satz 9.11**

1. Ist  $f(x)$  stetig auf einem Normalbereich

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \text{ und } g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

so gilt

$$\int_D f(x) d\mu = \int_a^b \left( \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

2. bzw. Falls

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{a} \leq x \leq \bar{b}, \text{ und } \bar{g}(x) \leq y \leq \bar{h}(x)\}$$

so gilt

$$\int_D f(x) d\mu = \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \left( \int_{\bar{g}(x)}^{\bar{h}(x)} f(x, y) dx \right) dy$$

**Beispiel 9.12**

1. Sei  $f(x, y) = x - y$



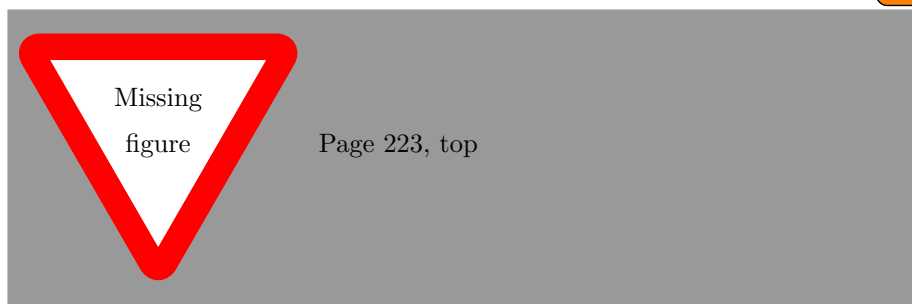


$$\begin{aligned}
 \int_D f d\mu &= \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} (x-y) dy dx \\
 &= \int_0^1 \left( xy - \frac{y^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} \right) dx \\
 &= \int_0^1 \left( x\sqrt{1-x^2} - \frac{1-x^2}{2} \right) dx \\
 &= \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx - \frac{1}{2} \int_0^1 1-x^2 dx \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx & \quad u = 1-x^2 \\
 & \quad du = -2x dx \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{u} du = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \\
 \int_D f d\mu &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0
 \end{aligned}$$

2. Sei  $D$  die durch die Gerade  $g(x) = x + 2$  und die Parabel  $b(x) = 4 - x^2$  begrenzte Gebiet

missing content?? page 223 top



Schnittpunkte:

$$\begin{aligned}
 x + 2 &= 4 - x^2 \\
 x^2 + x - 2 &= 0 \\
 (x - y)(x + 2) &
 \end{aligned}$$

Zu Berechnung des Doppelintegrals zerlegen wir das Gebiet in Streifen parallel zur  $y$ -Achse. Für festes  $x$  variiert  $y$  von  $g(x) = x + 2$  bis  $h(x) =$

$$4 - x^2$$

$$\begin{aligned} \int_D x d\mu &= \int_{-2}^1 \left( \int_{x+2}^{4-x^2} x dy \right) dx \\ &= \int_{-1}^2 x (4 - x^2 - x + 2) dx \\ &= \int_{-1}^2 (2x - x^3 - x^2) dx \\ &= x^2 - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^2 \\ &= \left( 4 - 4 - \frac{8}{3} \right) - \left( 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \right) = -\frac{127}{36} \end{aligned}$$

3. Sei  $D$  :



$$\int_D f d\mu = \int_{\downarrow -1}^1 \left( \int_{x=y^2}^1 f dx \right) dy$$

\*

(\* = Zerlegung des Gebietes in Streifen parallel zur  $x$ -Achse)

oder mit Zerlegung in streifen parallel zur  $y$ -Achse

$$\int_D f d\mu = \int_{x=0}^1 \left( \int_{y=-\sqrt{x}}^{y=\sqrt{x}} f(x, y) dy \right) dx$$

Manchmal muss man  $D$  zerlegen.

4. Bestimme  $\int_D x dx dy$  wobei  $D$  von  $y^2 = 4x$  und  $y = 2x - 4$  begrenzt wird.



Schnittpunkte  $P_1, P_2$ :

$$\begin{aligned} 4x &= y^2 = (2x - 4)^2 \\ \Rightarrow (2x - 4)^2 &= 4x \dots \\ \Rightarrow x &= 1 \text{ und } x = 4 \\ P_1 &= (1, -2) \quad P_2 = (4, 4) \end{aligned}$$

Zerlegung des Gebiets in Streifen parallel zur  $y$ -Achse

$$\int_D x d\mu = \int_0^1 \left( \int_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} x dy \right) dx + \int_1^4 \left( \int_{y=2x-4}^{2\sqrt{x}} x dy \right) dx = \dots = 14.4$$

Wenn wir Aussen nach  $y$  integrieren, brauchen wir keine Unterteilung

$$\begin{aligned} \int_D x d\mu &= \int_{y=-2}^{y=4} \left( \int_{x=\frac{y^2}{4}}^{\frac{y}{2}+2} x dx \right) dy \\ &= \int_{-2}^4 \left( \frac{x^2}{2} \Big|_{\frac{y^2}{4}}^{\frac{y}{2}+2} \right) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^4 \left( \left( \frac{y}{2} + 2 \right)^2 - \frac{y^2}{16} \right) dy \end{aligned}$$

### Bemerkung 9.13

1. Das Integral

$$A = \int_D 1 d\mu$$

ergibt die Fläche von  $D$ . Für einen Normal bereich bzg. der  $x$ -Achse erhalten wir daraus die bekannte Formel

$$A = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} 1 dy dx = \int_a^b (h(x) - g(x)) dx$$



2. Interpretiert man  $\rho(x, y)$  als ortabhängige Flächendichte, so erhält man mit

$$m = \int_D \rho(x, y) d\mu$$

die Masse von  $D$

**Definition 9.14**

Eine Teilmenge  $D \subset \mathbb{R}^3$  heisst Normalbereich, falls es eine Darstellung

$$D = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b; g(x) < y < h(x); \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y) \}$$

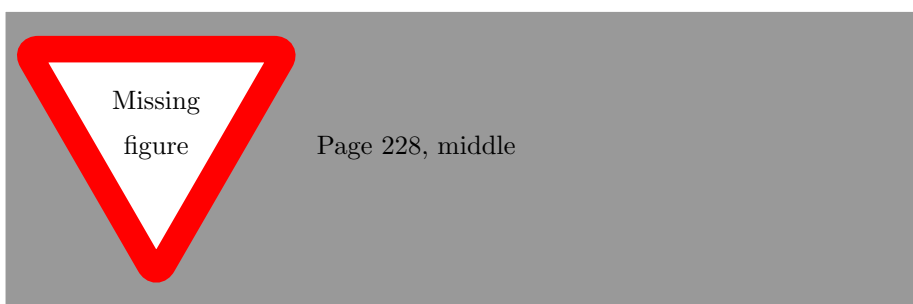
gibt.

(Vertauscht man die Rollen von  $x, y$  und  $z$  so entstehen weitere Mengen, die auch Normalbereiche genannt werden.)

**Satz 9.15**

Sei  $D \subset \mathbb{R}^3$  ein Normalbereich mit Darstellung wie oben, und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann gilt

$$\int_D f d\mu = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z) dz dy dx$$



$z = \varphi(x, y)$  und  $z = \psi(x, y)$  stellen die “Grund” und Deckelfläche von  $D$  dar.

Der Normalbereich  $A$  ist die Senkrechte Projektion von  $D$  in die  $x-y$  Ebene. Dessen “Grund” und “Deckelkurve” sind durch  $y = g(x)$  und  $y = h(x)$  gegeben.

**Bemerkung 9.16**

Das Integral

$$V = \int_D 1 d\mu \text{ für } D \subset \mathbb{R}^3$$

ergibt das Volumen von  $D$ . Für einen Normalbereich

$$D = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x), \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$$

erhält man

$$V = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} 1 dz dy dx = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} \psi(x, y) - \varphi(x, y) dy dx$$

## 9.2 Substitutionsregel

Häufig sind kartesische koordinaten für die Berechnung von Integralen eher ungeeignet. z.B. wenn man symmetrien bezüglich gewisser Punkte oder Achsen nutzen will.

Wir behandeln als nächstes Variablentransformationen vom Typ  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  und verallgemeinern die 1.Dim Substitutionsregel:

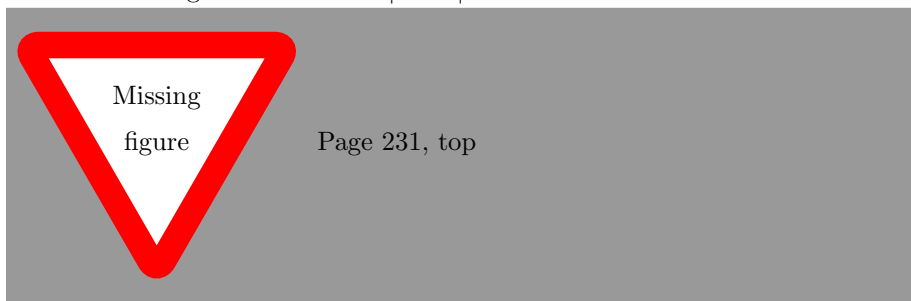
$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

mit  $f$  stetig,  $x = \varphi(t)$   $\varphi : [a, b] \rightarrow I$  stetig differenzierbar,  $I = \text{Interval}$ . Zunächst erinnern wir uns an die Lineare Algebra:

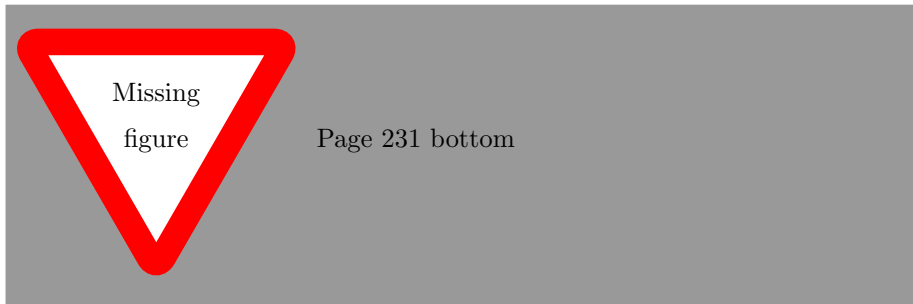
Das Bild des Einheitsquadrats/würfels unter der linearen Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \vec{x} &\rightarrow A\vec{x} \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n} \end{aligned}$$

ist ein Parallelogram mit Fläche  $|\det A|$



Dies bleibt wahr, wenn man zur affin-linearen Abbildung  $\Phi(\vec{x}) = A\vec{a} + \vec{b}$  betrachtet es kommt ja nur ein Verschiebung zu



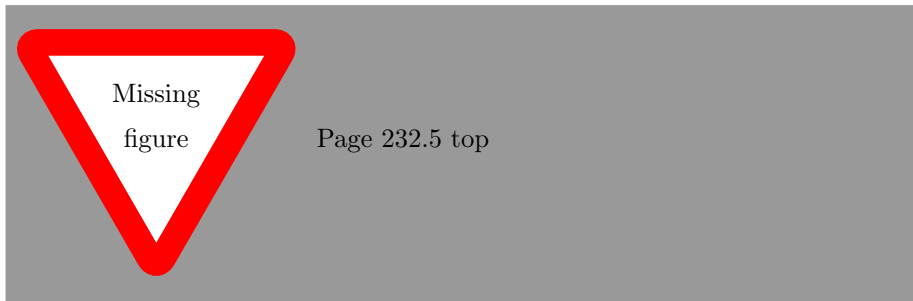
Nun, betrachten wir eine differenzierbare nichtlineare Transformation  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Dann gilt zumindest nahe eines festen Punktes  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ :

$$\Phi(\vec{x}) \approx \Phi(\vec{x}_0) + d\Phi(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0)$$

Die rechte Seite stellt gerade eine Abbildung vom Typ  $A\vec{x} + \vec{b}$  dar, wobei die Jacobi Matrix  $d\Phi(\vec{x}_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  die Rolle von  $A$  (und  $\Phi(\vec{x}_0)$  von  $\vec{b}$ ) übernimmt. Damit ist der lokale Flächenverzerrungsfaktor von  $\Phi$  gegeben durch  $|\det d\Phi(\vec{x}_0)|$  d.h. den Betrag der Jacobi oder Funktionaldeterminante. Die Lokale Flächenverzerrung muss bei der Substitution in Integralen berücksichtigt werden und zwar in der Form

$$d\vec{x} = |\det d\Phi(\vec{y})| d\vec{y}, \text{ falls } \vec{x} = \Phi(\vec{y})$$

Geometrische Darstellung in  $\mathbb{R}^2$



Die Flächen der einander entsprechenden markierten Vierecke unterscheiden sich gerade um den Faktor  $|\det d\Phi(\vec{x}_1)|$  bzw.  $|\det d\Phi(\vec{x}_2)|$

## Substitutionsregel

### Satz 9.17

Sei  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $\Phi : U \rightarrow V$  bijektiv, stetig diff.,  $\det d\Phi(\vec{y}) \neq 0 \forall \vec{y} \in U$ , sowie  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann gilt

$$\int_V f(\vec{x}) d\mu(\vec{x}) = \int_{\Phi(U)=V} f(\Phi(\vec{y})) |\det d\Phi(\vec{y})| d\mu$$

**Beispiel 9.18**

1. Berechne  $\iiint_V d\mu$ , wobei

$$V = \left\{ (x, y, z)^t \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x, y, z \geq \text{WHAT} \right\}$$

↓

Kugeloktanten

Es ist einfacher in Kugelkoordinaten zu berechnen

chopped content, page  
233 middle to bottom

$$\Phi(r, \theta, \psi) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \psi \\ r \sin \theta \cos \psi \\ r \sin \psi \end{pmatrix}$$