

# Kapitel 8

## Differentialrechnung in $\mathbb{R}^n$

### 8.1 Partielle Ableitungen und Differential

Wie kann man die Begriffe der Differentialrechnung auf Funktionen  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  erweitern?

Missing content?? page 113 top

Funktion in mehreren Variablen sind ein bisschen komplizierter als Funktionen in einer Variable.

#### Beispiel

1.  $f(x) = x^2 + 5$  ist in Ursprung stetig da  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ . Aber  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ist im Ursprung nicht stetig.

Where is number 2 of the Beispiel??

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = 0}} \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2} = 0 = f(0, 0)$$

$$\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ x = 0}} \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2} = 0 = f(0, 0)$$

is this continuation of the Beispiel, or is it outside??

Aber der Limes entlang der Gerade  $y = mx$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ y = mx}} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2}{(1 + m^2)x^2} = \frac{m}{1 + m^2}$$

↓  
Hängt von  $m$  ab

und  $\frac{m}{1+m^2} \neq 0$ , falls  $m \neq 0$ . Eine Funktion  $f(x, y)$  an der Stelle  $(x_0, y_0)$  ist stetig wenn der Limes  $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$  in jeder Richtung den gleichen Wert haben.

**Definition 8.1**

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \Omega$

1.  $f$  hat den Grenzwert  $c \in \mathbb{R}$ , d.h

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$$

weenn es zu jeder (Beliebig kleinen) Schranke  $\varepsilon > 0$ , eine  $\delta$ -umgebung

$$B_\delta(a) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - a| < \delta\}$$

gibt, so dass  $|f(x) - c| < \varepsilon$  für alle  $x \in \Omega \cap B_\delta(a)$ ,  $x \neq a$  gilt

2.  $f$  heisst in  $a \in \Omega$  stetig, wenn  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  gilt.
3.  $f$  heisst in  $\Omega$  stetig, wenn  $f$  in allen  $a \in \Omega$  stetig ist.

Die Summe, das Produkt, der Quotient (Nenner ungleich Null) stetiger Funktion sind stetig.

$f$  besitzt keinen Grenzwert in  $x_0$  wenn sich bei Annäherungen an  $x_0$  auf verschiedenen Kurven (z.b. Geraden) verschiedene oder keine Grenzwert ergeben.

**Sandwichlemma**

Sei  $f, g, h$  funktionen wobei  $g < f < h$ . Wenn  $\lim_{x \rightarrow a} g = L = \lim_{x \rightarrow a} h$  gilt, dann ergibt  $\lim_{x \rightarrow a} f = L$ .

Da  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |y| = 0$  gilt,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 \Rightarrow f$  ist in  $(0,0)$  stetig.

**Oder**

Für Grenzwertbestimmungen (also auch für Stetigkeitsuntersuchungen) ist es oft nützlich, die Funktionen mittels Polarkoordinaten umzuschreiben. Vor allem bei Rationalen Funktionen.

Hierbei gilt  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , wobei  $r$  = länge des Vektors  $(x, y)$  und  $\varphi$  der Winkel. Nun lass wir die Länge  $r$  gegen 0 gehen.

**Beispiel**

1. Die Funktionen

- $f(x, y) = x^2 + y^2$
- $f(x, y, z) = x^3 + \frac{x^2}{y^2+1} + z$
- $f(x, y) = 4x^2y^3 + 3xy$
- $f(x, y) = \cos xy$

## KAPITEL 8. DIFFERENTIALRECHNUNG IN $\mathbb{R}^N$

sind stetig, da sie aus Steigen Funktionen zusammengesetzt.

2.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Für  $(x, y) \neq (0, 0)$  ist  $f$  als Quotient von stetiger Funktionen stetig. Es verbleibt  $f$  im Punkt  $(0, 0)$  zu untersuchen. Da

$$\left| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right| \leq 1$$

$$0 < |f(x, y)| < |y|$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \frac{(r^2 \cos^2 \theta) (r \sin \theta)}{r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = r \cos^2 \theta \sin \theta$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(r, \theta) = \lim_{r \rightarrow 0} r \cos^2 \theta \sin \theta = 0$$

3. Wir können nochmals die Stetigkeit der Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

mittels Polarkoordinaten untersuchen

$$f(x, y) = \frac{r^2 \cos \theta \sin \theta}{r^2} = \cos \theta \sin \theta$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(x, y) = \cos \theta \sin \theta$$

hängt von  $\theta$  ab.

$\Rightarrow f$  in  $(0, 0)$  nicht stetig

### Bemerkung

Eine trickreiche Variante Grenzwerte zu berechnen, ergibt sich durch substitution, d.h. man berechnet den Grenzwert

is this supposed to be inside the list or out??

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(g(x, y))$$

indem man zunächst  $t = g(x, y)$  setzt und den Grenzwert

$$t_0 = \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} g(x, y)$$

bestimmt. Dann ist

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(g(x, y)) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t)$$

**Beispiel**

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (4,0)} \frac{\sin xy}{xy}$$

Hier ist  $g(x, y) = xy$ ,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (4,0)} g(x, y) = 0$ . Somit

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (4,0)} \frac{\sin xy}{xy} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

Wir werden auch sehen das die Existenz der Ableitungen in einigen Richtungen ungenügend für die Differenzierbarkeit der Funktion ist.

**Was bedeutet die Ableitung in einiger Richtung?**

**Beispiel**

Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto (x^2 + xy) \cos(xy)$$

Man kann für jedes  $y$ , die Funktion

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (x^2 + xy) (\cos xy)$$

als Funktion einer Variablen  $x$  auffassen und die Ableitung davon berechnen. Das Resultat mit  $\frac{\partial f}{\partial x}$  bezeichnet, ist die erste partielle Ableitung von  $f$  nach  $x$ . In diesem fall ist es durch

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (2x + y)(\cos xy) - (x^2 + xy)y \sin(xy)$$

gegeben.

Analog definiert man  $\frac{\partial f}{\partial y}$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x(\cos xy) - (x^2 + xy)x \sin(xy)$$

Die allgemeine Definition nimmt folgende Gestalt ein. Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . In zukunft bezeichnen wir die  $i$ -te Koordinate eines Vektors  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $x^i$ ; also ist  $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ .

Sei  $e_i := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  der  $i$ -te Basisvektor von  $\mathbb{R}^n$

**Definition 8.2**

Die Funktion  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  heisst an der stelle  $x_0 \in \Omega$  in Richtung  $e_i$  (oder nach  $x^i$ ) partielle differenzierbar falls der limes

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) = f_{x^i}(x_0) := - \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_0 + he_i) - f(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^i + h, x_0^{i+1}, \dots, x_0^n) - f(x_0^1, \dots, x_0^n)}{h}$$

existiert

**Bemerkung 8.3**



Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x_0^1, x_0^2) \in \mathbb{R}^2$ . Wir betrachten die scharen von  $f$

$$f(\cdot, x_0^2) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

und

$$f(x_0^1, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}$  sind die Anstieg der Tangente zur entsprechende schrittkurven

**Beispiel**

1.  $f(x, y, z) = \cos yz + \sin xy$

- $\frac{\partial f}{\partial x} = y \cos xy$
- $\frac{\partial f}{\partial y} = -\sin(yz) \cdot z + \cos(xy) \cdot x$
- $\frac{\partial f}{\partial z} = -\sin(yz) \cdot y$

2.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^3 \cdot 0}{h^2 + 0} - 0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h \cdot 0^3}{0 + h^2} - 0}{h} = 0$$

**Bemerkung**

Für Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  einer variable impliziert die differenzierbarkeit in  $x_0$ , die Stetigkeit in  $x_0$  und zudem eine gute Approximation von  $f$  durch eine affine Funktion in einer Umgebung von  $x_0$ . Folgendes Beispiel zeigt, dass in  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ) Partielle Differenzierbarkeit keine analoges Approximationseigenschaften oder stetigkeit impliziert:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Für alle  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  ist  $f$  in beiden Richtungen partiell differenzierbar:

- Für  $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{y(x^2 + y^2) - 2x^2y}{(x^2 + y^2)^2} \Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} = \frac{y_0^3 - x_0^2y_0}{(x_0^2 + y_0^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{x(x^2 + y^2) - 2xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} = \frac{x^2 - xy^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

- Für  $(x_0, y_0) = (0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overbrace{f(0+h, 0) - f(0, 0)}^{f(x_0+he_1) - f(x_0)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overbrace{f(0, 0+h) - f(0, 0)}^{f(x_0+he_2) - f(x_0)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

Im Ursprung besitzt  $f$  beide partielle Ableitungen, sie ist aber nicht stetig. Der Grund ist, dass die partielle Ableitungen nur partielle Informationen geben. Wir müssen die Differenzierbarkeit irgend eine andere weise verallgemeinern.

Die Lösung dieses Problem ist, dass man eine Approximations-Eigenschaft durch eine Lineare Abbildung postuliert.

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $x_0$ ;  $f'(x_0)$  existiert. In diesem Fall kann  $f$  für alle  $x$  nahe  $x_0$  durch die Funktion  $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  gut approximiert werden. Das heisst dass

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x, x_0) \quad \text{mit} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x, x_0)}{x - x_0} = 0$$

**Bemerkung**

$f'(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}'$  sollt als lineare Abbildung interpretiert werden

## Lineare Abbildungen

Eine Abbildung  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ist linear falls für alle  $x, y \in \mathbb{R}^n$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$$

Eine solche Abbildung ist durch ihre Werte

$$A(e_i) := A_1, A(e_2) := A_2, \dots, A(e_n) := A_n$$

auf der Standardbasis  $e_1, \dots, e_n$  eindeutig bestimmt. Aus  $x = \sum_{i=1}^n x^i e_i$  und Linearität folgt nämlich

$$(*) \quad A(x) = \sum_{i=1}^n x^i A(e_i) = \sum_{i=1}^n A_i x^i$$

Umgekehrt bestimmt ein Vektor  $(A_1, \dots, A_n)$  vermöge der Formel  $(*)$  eine Lineare Abbildung.

Schreiben wir  $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$  für einen Vektor  $x = (x^1)_{1 \leq i \leq n}$  und

$A = (A_1, \dots, A_n)$  für die Darstellung einer Lineare Abbildung  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  bezüglich der Standard Basis  $\{e_1, \dots, e_n\}$  so ist

$$A(x) = (A_1, \dots, A_n) \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \sum A_i x^i$$

### Definition 8.4

Die Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heisst an der Stelle  $x_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$  differenzierbar falls eine lineare Abbildung  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  gibt so dass

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + R(x, x_0)$$

wobei  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x, x_0)}{|x - x_0|} = 0$

In diesem Fall heisst  $A$  der Differential an der Stelle  $x_0$  und wird mit  $\frac{df}{dx_0}$  bezeichnet, d.h.  $f$  ist total differenzierbar in  $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$  falls reelle Zahlen  $A_1, \dots, A_n$  existieren so dass gilt

$$f(x) = f(x_0) + A_1(x^1 - x_0^1) + A_2(x^2 - x_0^2) + \dots + A_n(x^n - x_0^n) + R(x, x_0)$$

mit  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x, x_0)}{|x - x_0|} = 0$

**Bemerkung: Geometrische Interpretation**

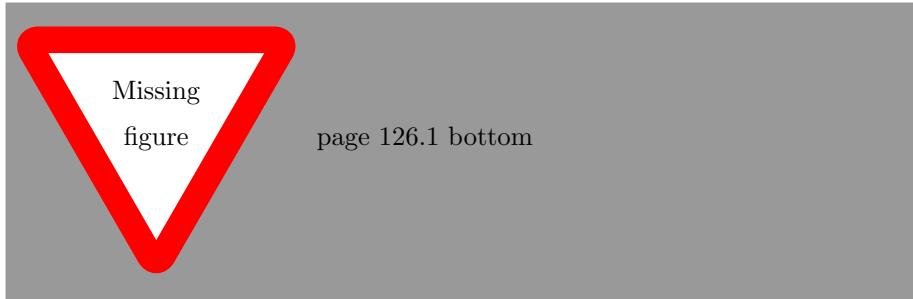
Sei  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega \in \mathbb{R}^2$ . Wir können die differenzierbare Funktion nahe dem Punkt  $x_0 = (x_0^1, x_0^2)$  mit Hilfe der Lineare Funktion

$$P(x) = f(x_0^1, x_0^2) + \underbrace{A_1(x^1 - x_0^1) + A_2(x^2 - x_0^2)}_{d_{x_0} f(x - x_0)}$$

approximieren.

can't understand what comes after the formula, page 126.1 middle

Die Differenz  $\underbrace{f(x) - P(x)}_{d_{x_0} f(x - x_0)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$  ist eine Ebene. Die ist die Tangenteebene zur  $f$  an der Stelle  $x_0$  und spielt die Rolle des Tangente für Funktionen in einer Variable.



**Beispiel 8.5**

- a) Jede affin Lineare Funktion  $f(x) = Ax + b$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , wobei  $a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  linear,  $b \in \mathbb{R}$  ist an jeder Stelle  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  differenzierbar, mit  $\frac{df}{dx}_{x_0} = A$  unabhängig von  $x_0$  da

$$f(x) - f(x_0) - A(x - x_0) = 0 \quad \forall x, x_0 \in \mathbb{R}^n$$

- b) Koordinatenfunktionen  $x^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x^1, x^2, \dots, x^n) \rightarrow x^i$ ,  $x^i(x) = x^i$ . Dann ist  $x^i$  differenzierbar an jeder Stelle  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  mit

$$dx^i|_{x=x_0} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

die Differenziale  $dx^1, dx^2, \dots, dx^n$  bilden also an jeder Stelle  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  eine Basis des Raumes  $L(\mathbb{R}^n : \mathbb{R}) := \{A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; A \text{ linear}\}$ , wobei wir  $A \in L(\mathbb{R}^n : \mathbb{R})$  mit der Darstellung  $A = (A_1, \dots, A_n)$  bzgl. der Standardbasis  $\{e_1, \dots, e_n\}$  der  $\mathbb{R}^n$  identifizieren, und mit  $A_i = A(e_i)$

$$dx^i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

$$(dx^i(e_1), dx^i(e_2), \dots, dx^i(e_n))$$

Da gilt  $dx^i(e_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$  ist  $(dx^i)_{1 \leq i \leq n}$  die duale Basis von  $L(\mathbb{R}^n : \mathbb{R})$  zur Standardbasis  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  des  $\mathbb{R}^n$ .



# KAPITEL 8. DIFFERENTIALRECHNUNG IN $\mathbb{R}^N$

c) Jedes  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \in C'(\mathbb{R})$  besitzt das Differential

$$df(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) dx = f'(x_0) dx$$

d.h.  $f'(x_0)$  ist die Darstellung von  $df(x_0)$  bezüglich der Basis  $dx$  von  $L(\mathbb{R} : \mathbb{R})$

d)  $f(x, y) = xe^y, \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ist an jeder Stelle  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned} df(x_0, y_0) &= \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) = (e^{y_0}, xe^{y_0}) \\ f(x, y) - f(x_0, y_0) &= \underbrace{f(x, y) - f(x_0, y)}_{\checkmark} + f(x_0, y) - f(x_0, y_0) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \eta)(y - y_0) \end{aligned}$$

Nach der MWS der DR, mit geeigneten Zwischenstellen  $\xi = \xi(y)$  und  $\eta$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + R(x, y)$$

mit

$$\begin{aligned} R(x, y) &= \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right] (x - x_0) \\ &\quad + \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \eta) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right] (y - y_0) \end{aligned}$$

Wegen die Stetigkeit der Funktionen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^y \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xe^y$$

können wir den "Fehler"  $R(x, y)$  leicht abschätzen

$$\frac{|R(x, y)|}{|(x, y) - (x_0, y_0)|} \leq \sup_{\substack{|\xi - x_0| < |x - x_0| \\ |\eta - y_0| < |y - y_0|}} (|e^y - e^{y_0}| + |x_0| |e^\eta - e^{y_0}|)$$

Für  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0), (x, y) \neq (x_0, y_0)$ : d.h. es gilt

$$\frac{R(x, y)}{|(x, y) - (x_0, y_0)|} \rightarrow 0$$

d.h. es gilt

$$\frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)}{|(x, y) - (x_0, y_0)|} \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} 0$$

d.h.  $f(x, y)$  ist differenzierbar und

$$df(x_0, y_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

can't read, page 130  
bottom

e) Die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ist in  $(0, 0)$  differenzierbar.

Wir haben schon gesehen dass  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$  und  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{|R|}{|(x, y)|} &= \frac{\left| f(x, y) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)(x - 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)(y - 0) \right|}{|(x - 0, y - 0)|} \\ &= \frac{|f(x, y) - 0 - 0 - 0|}{|(x, y)|} = \frac{|f(x, y)|}{|(x, y)|} \end{aligned}$$

Zum untersuchen ist

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{|R((x, y), (0, 0))|}{|(x, y) - (0, 0)|} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{|f(x, y)|}{|(x, y)|}$$

Mittels Polarkoordinaten ist dies noch einsichtiger

$$\begin{aligned} \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{|f(x, y)|}{x^2 + y^2} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^4 \cos^3 \theta \sin \theta}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} r^2 \cos^3 \theta \sin \theta = 0 \\ &\Rightarrow f \text{ in } (0, 0) \text{ differenzierbar} \end{aligned}$$

Gibt es eine Beziehung zwischen des Differential und der partielle Ableitungen?

### Bemerkung 8.6

Sei  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  differenzierbar an der Stelle  $x_0 \in \Omega$ . Dann existieren die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)$ ,  $i = 1, \dots, n$  und dass Differential kann

$$d_{x_0} f = \left( \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0) \right)$$

dargestellt werden.

### Beweis

$f$  an der Stelle  $x_0$  differenzierbar

$$\Rightarrow f(x_0 + he_i) = f(x_0) + (d_{x_0} f)(he_i) + R(x_0 + he_i, x_0)$$

wobei

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(x_0 + he_i, x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + he_i) - f(x_0) - (d_{x_0} f)(he_i)}{h} = 0 \\ \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + he_i) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h d_{x_0} f(e_i)}{h} = d_{x_0} f(e_i) \end{aligned}$$

d.h.  $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)$  existiert und  $= d_{x_0} f(e_i)$ .

Da  $(dx^i)_{i=1, \dots, n}$  die zur  $(e_j)_{1 \leq j \leq n}$  duale Basis ist

$$d_{x_0} f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) dx^i = \left( \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0) \right)$$

**Beispiel**

Die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ist in  $(0, 0)$  nicht differenzierbar ( $f$  ist in  $(0, 0)$  nicht stetig)

**Satz 8.7**

Falls  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}$  differenzierbar, ist sie in  $x_0$  auch stetig.

**Beweis**

Folgt aus der Definition

**Definition 8.8**

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heisst von der Klasse  $C'$ , ( $f \in C'(\Omega)$ ) falls  $f$  an jeder Stelle  $x_0 \in \Omega$  und in jede Richtung  $e_i$  partielle differenzierbar ist und die Funktionen  $x \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x^i}(x)$  für jedes  $1 \leq i \leq n$  auf  $\Omega$  stetig sind

**Satz 8.9**

Sei  $f \in C'(\Omega)$ . Dann ist  $f$  an jeder Stelle  $x_0 \in \Omega$  differenzierbar.

**Beweis**

Für  $n = 3$  seien  $x = (x^1, x^2, x^3)$ ,  $x_0 = (x_0^1, x_0^2, x_0^3)$ . Dann ist

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \{f(x^1, x^2, x^3) - f(x^1, x^2, x_0^3)\} \\ &\quad + \{f(x^1, x^2, x_0^3) - f(x^1, x_0^2, x_0^3)\} \\ &\quad + \{f(x^1, x_0^2, x_0^3) - f(x_0^1, x_0^2, x_0^3)\} \end{aligned}$$

Nach dem MWS der DR gilt:

$$f(x^1, x^2, x_0^3) - f(x_0^1, x_0^2, x_0^3) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(\xi^1, x_0^2, x_0^3)(x^1 - x_0^1)$$

wobei  $\xi^1$  zwischen  $x_0^1$  und  $x^1$ . Analog:

$$f(x^1, x^2, x_0^3) - f(x^1, x_0^2, x_0^3) = \frac{\partial f}{\partial x^2}(x^1, \xi^2, x_0^3)(x^2 - x_0^2)$$

wobei  $\xi^2 \in (x_0^2, x^2)$  und

$$f(x^1, x^2, x^3) - f(x^1, x^2, x_0^3) = \frac{\partial f}{\partial x^3}(x^1, x^2, \xi^3)(x^3 - x_0^3)$$

Eingesetzt in dem Ausdrucke für  $f(x) - f(x_0)$  ergibt:

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \frac{\partial f}{\partial x^1}(\xi^1, x_0^2, x_0^3)(x^1 - x_0^1) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial x^2}(x^1, \xi^2, x_0^3)(x^2 - x_0^2) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial x^3}(x^1, x^2, \xi^3)(x^3 - x_0^3) \end{aligned}$$

Also

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) (x^i - x_0^i) + R(x_0, x)$$

Wobei

$$\begin{aligned} R(x_0, x) = & \left( \frac{\partial f}{\partial x^1}(\xi^1, x_0^2, x_0^3) - \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \right) (x^1 - x_0^1) \\ & + \left( \frac{\partial f}{\partial x^2}(x^1, \xi^2, x_0^3) - \frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \right) (x^2 - x_0^2) \\ & + \left( \frac{\partial f}{\partial x^3}(x^1, x^2, \xi^3) - \frac{\partial f}{\partial x^3}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \right) (x^3 - x_0^3) \end{aligned}$$

Also

$$|R(x, x_0)| < |x - x_0| \underbrace{\{ |(\dots)| + |(\dots)| + |(\dots)| \}}_{\substack{\rightarrow 0 \text{ mit } x \rightarrow x_0 \\ \text{weil } \frac{\partial f}{\partial x^i} \text{ stetig sind}}}$$

Also  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x, x_0)}{|x - x_0|} = 0$  und  $f(x)$  ist differenzierbar.

### Beispiel 8.10

Polynome auf  $\mathbb{R}^n$  sind von Klasse  $C^1$ . Für jedes Multindex  $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  definieren wir die Monomialfunktion

$$x^\alpha := (x^0)^{\alpha_0} (x^1)^{\alpha_1} \dots (x^n)^{\alpha_n}$$

Ein Polynom von Grad  $\leq N$  ist dann gegeben durch

$$p(x) = \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha x^\alpha$$

wobei  $|\alpha| = \alpha_0 + \dots + \alpha_n$

Pages 135.1 - 135.2 are a zusammenfassung, not sure if needed to be included

## 8.2 Differentiationsregeln

Ganz analog zum eindimensionalen Fall gelten folgende Differentiationsregeln

### Satz 8.11

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , sowie  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  an der Stelle  $x_0 \in \Omega$  differenzierbar. Dann gilt

1.  $d(f + g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0)$
2.  $d(fg)(x_0) = g(x_0) df(x_0) + f(x_0) dg(x_0)$
3. Falls  $g(x_0) \neq 0$

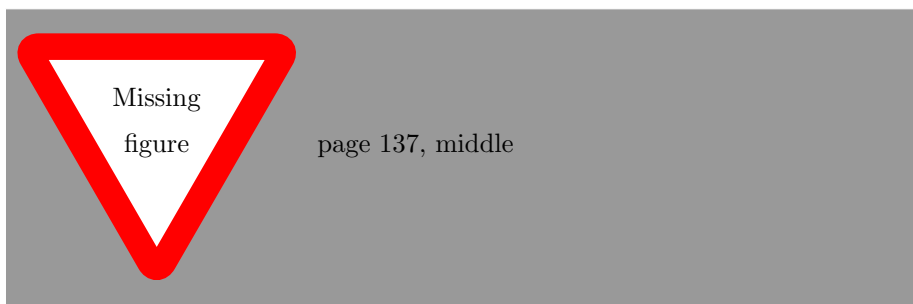
$$d\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \frac{g(x_0) df(x_0) - f(x_0) dg(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

Beweis ist der selbe wie in Dim=1. Für die Kettenregel gibt es mehrere Variationen

**Satz 8.12 (Kettenregel, 1. Version)**

Sei  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$  differenzierbar, sowie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  an der Stelle  $g(x_0) \in \mathbb{R}$  differenzierbar. Dann gilt

$$d(f \circ g)(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot dg(x_0)$$



**Beweis**

$g$  an der Stelle  $x_0$  differenzierbar

$$\Rightarrow g(x) - g(x_0) \stackrel{A}{=} dg(x_0)(x - x_0) + R_g(x - x_0)$$

mit

$$\frac{R_g(x - x_0)}{(x - x_0)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \Rightarrow \frac{g(x) - g(x_0)}{|x - x_0|} \stackrel{B}{\leq} C = \max \left[ \frac{\partial g}{\partial x^i}(x_0) \right]$$

$f$  in  $g(x_0)$  differenzierbar

$$f(g(x)) - f(g(x_0)) \stackrel{C}{=} f'(g(x_0)) [g(x) - g(x_0)] + R_f(g(x), g(x_0))$$

Woraus folgt:

$$f(g(x)) - f(g(x_0)) = f'(g(x_0)) [dg(x_0)(x - x_0) + R_g(x, x_0)] + R_f(g(x_0), g(x))$$

Aus B folgt:

$$\frac{R_f(g(x_0), g(x))}{x - x_0} = \underbrace{\frac{R_f(g(x_0) - g(x))}{|g(x) - g(x_0)|}}_{\downarrow 0} \cdot \underbrace{\frac{|g(x) - g(x_0)|}{|x - x_0|}}_{\stackrel{B}{\leq} C}$$

$\downarrow$   
0

d.h.

$$f(g(x)) - f(g(x_0)) = (f'(g(x_0)) \cdot dg(x_0))(x - x_0) + R_{f \circ g}(x, x_0)$$

wobei

$$R_{f \circ g}(x, x_0) = f'(g(x_0)) R_g(x, x_0) + R_f(g(x_0), g(x))$$

und

$$\frac{R_{f \circ g}(x, x_0)}{x - x_0} = \underbrace{f'(g(x_0)) \frac{R_g(x, x_0)}{(x - x_0)}}_{\downarrow 0} + \underbrace{\frac{R_f(g(x_0), g(x))}{x - x_0}}_{\downarrow 0}$$

### Beispiel 8.13

Sei  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$h(x, y) = e^{xy}$$

$h = f \circ g$  wobei  $g(x, y) = xy$ ,  $f(t) = e^t$ . Dann ist einerseits

$$dh(x, y) = \left( \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} \right) = (ye^{xy}, xe^{xy})$$

andererseits nach Kettenregel

$$dh(x, y) = d(f \circ g)' = f'(g(x, y)) \cdot dg(x, y) = e^{xy} \cdot (y, x) = (ye^{xy}, xe^{xy})$$

Für die nächste Kettenregel führen wir folgende Definition ein:

#### Definition 8.14

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}$  und  $f = (f_1, \dots, f_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Abbildung. Dann ist  $f$  an der Stelle  $x_0 \in \mathbb{R}$  differenzierbar, falls jede Komponentenfunktion  $f_i$  an der Stelle  $x_0$  differenzierbar ist. Wir definieren in diesem Fall

$$f'(x_0) := (f_1'(x_0), f_2'(x_0), \dots, f_n'(x_0))$$

### Bemerkung 8.15

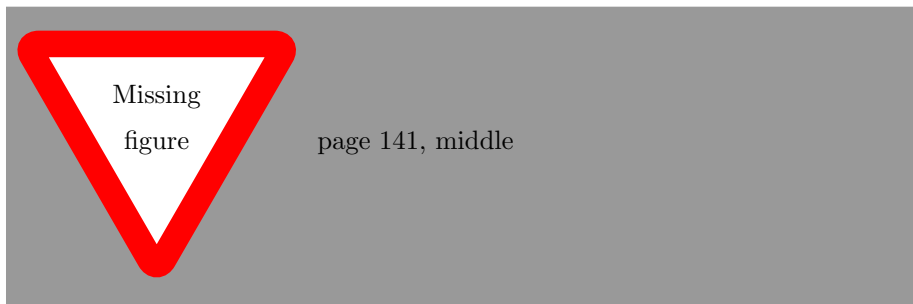
$f'(x_0)$  kann als Geschwindigkeitsvektor im Punkt  $f(x_0)$  aufgefasst werden.

### Satz 8.16 (Kettenregel 2. Version)

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n, I \subset \mathbb{R}$ . Sei  $g : I \rightarrow \Omega$ ,  $t \mapsto (g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t))$ , an der Stelle  $t_0 \in I$  differenzierbar sowie  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  an der Stelle  $g(t_0)$  differenzierbar. Dann gilt:

$$\frac{d}{dt}(f \circ g)(t_0) = df(g(t_0)) \cdot g'(t_0)$$

$$\begin{aligned} d(f \circ g)(t_0) &= df(g(t_0)) \cdot dg(t_0) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^1}(g(t_0)) \cdot \frac{dg_1}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial x^2}(g(t_0)) \cdot \frac{dg_2}{dt}(t_0) \\ &\quad + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(g(t_0)) \cdot \frac{dg_n}{dt}(t_0) \end{aligned}$$



### Beispiel 8.17

Die vier Grundrechenarten sind differenzierbare Funktionen von zwei variablen. Insbesondere gilt:

- $a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x + y$

$$da(x, y) = \left( \frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial a}{\partial y} \right) = (1, 1)$$

- $m : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x \cdot y$

$$dm(x, y) = (y, x)$$

Setzt man diese beiden Funktionen in die obige Kettenregel ein, so erhält man die aus der Analysis I bekannte Summen und Produktregel:

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \rightarrow (g_1(t), g_2(t))$$

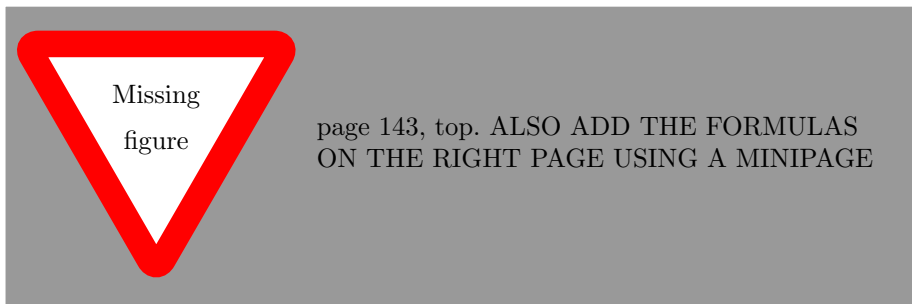
$$\frac{d}{dt}(g_1 + g_2) = \frac{d}{dt}(a \circ g) = (1, 1) \cdot \left( \frac{dg_1}{dt}, \frac{dg_2}{dt} \right) = 1 \cdot \frac{dg_1}{dt} + 1 \cdot \frac{dg_2}{dt}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(g_1 \cdot g_2) &= \frac{d}{dt}(m \circ g) = ((dm)(g(t))) \cdot \left( \frac{dg}{dt} \right) \\ &= (g_2(t), g_1(t)) \cdot \left( \frac{dg_1}{dt}, \frac{dg_2}{dt} \right) \\ &= \frac{dg_1}{dt} \cdot g_2(t) + \frac{dg_2}{dt} \cdot g_1(t) \end{aligned}$$

### Beispiel 8.18

Sei  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar an der Stelle  $x_0 \in \Omega$  und sei  $e \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ; mit  $|e| = 1$ . Betrachte die Gerade  $g(t) = x_0 + te$ ,  $t \in \mathbb{R}$  durch  $x_0$  mit Richtungsvektor



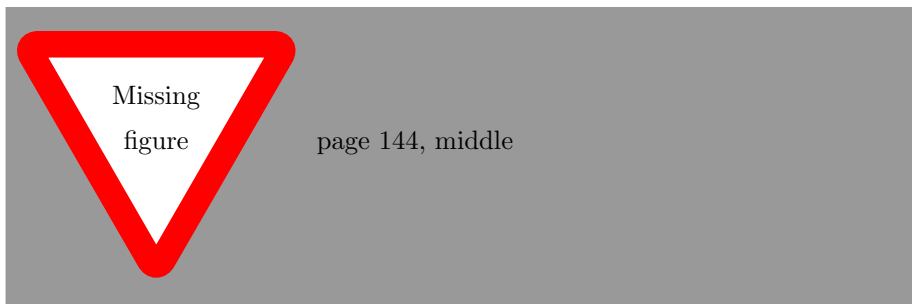
Dann ist die Funktion  $f \circ g$  in einer Umgebung von  $t_0 = 0$  definiert und nach Kettenregel  $f \circ g$  an der Stelle  $t_0 = 0$  differenzierbar mit

$$\frac{d}{dt} (f \circ g) (0) = df (g(0)) \frac{dg}{dt} (0) = df (x_0) (e) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} (x_0) \cdot e^i$$

$e = (e^1, \dots, e^n)$  und wird Richtungsableitung von  $f$  in Richtung  $e$  genannt;  $\partial_e f (x_0)$  bezeichnet. Insbesondere gilt für  $e = e_i$

$$\partial_{e_i} f (x_0) = \frac{\partial f}{\partial x^i} (x_0) = df (x_0) (e_i)$$

Geometrisch die Richtungsableitung von  $f$  in Richtung  $e$  ist genau die Steigung der Tangente zur Schnittkurve falls wir den Graph von  $f$  mit einer zur Ebene  $xy$  senkrecht Ebene durch  $x_0 + te$  scheiden.



Für den Mittelwertsatz der DR - zu verallgemeinern benützen wir folgenden Begriffen:

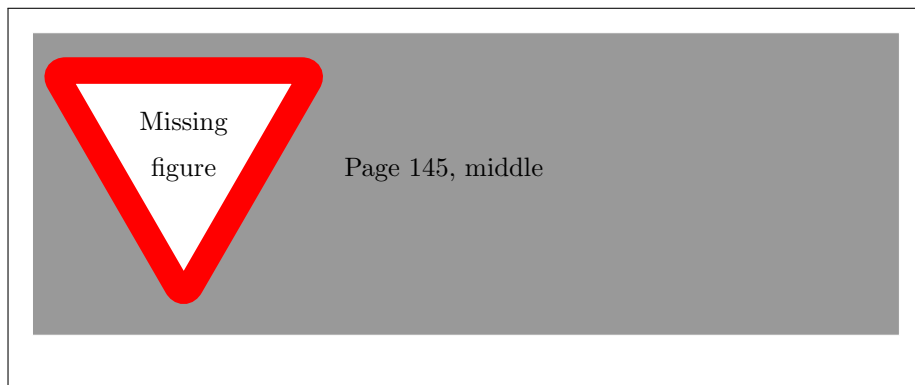
**Definition 8.19**

Eine Menge  $K \subset \mathbb{R}^n$  ist genau dann Konvex falls für jede Paar von Punkten  $x, y \in K$  die Menge  $K$  auch das segment

$$(1 - t) x + ty \quad t \in [0, y]$$

mit endpunkt  $x, y$  enthält





### Satz 8.20

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  konvex  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar,  $x_0, x_1 \in \Omega$  sowie  $x_t := (1-t)x_0 + tx_1$ . Dann gibt es  $\vartheta \in [0, 1]$  mit

$$f(x_1) - f(x_0) = df(x_{i\vartheta})(x_1 - x_0)$$

is it  $tx_1$  or  $tx$ , ?? page 145 middle

### Beweis

Sei  $g(t) = (1-t)x_0 + tx_1 = x_t$ . Dann ist  $t \rightarrow (f \circ g)(t)$  auf  $[0, 1]$  stetig und in  $(0, 1)$  differenzierbar. Also gibt es  $\vartheta \in (0, 1)$  mit (nach MWS der DS einer variable)

$$f(x_1) - f(x_0) = (f \circ g)(1) - (f \circ g)(0) = (f \circ g)'(\vartheta)(1 - 0)$$

Nur ist

$$(f \circ g)'(\vartheta) = df\left(g(\vartheta) \cdot \frac{dg}{dt}(\vartheta)\right)$$

Die Kettenregel wird auch angewandt um Integrale mit Parametern zu studieren. Ein Beispiel davon ist:

Is the formula done or does it continue on a new line, page 146 top

### Beispiel

Sei  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(s, t) \rightarrow h(s, t)$ . Wir nehmen an,  $h$  ist stetig,  $\frac{\partial h}{\partial t}$  existiert und ist uf ganz  $\mathbb{R}^2$  stetig. Sei

$$u(t) = \int_a^{b(t)} h(s, t) ds, \quad b(t) \in C'(\mathbb{R}), \quad a \in \mathbb{R}$$

Is it  $C'$  or  $C'??$  page 146 middle

### Satz 8.21

Sei  $h(s, t)$  eine stetige differenzierbare Funktion von zwei variablen und  $b(t)$  differenzierbare Funktion eine variable. Dann ist die Funktion

$$u(t) := \int_a^{b(t)} h(s, t) ds$$

## KAPITEL 8. DIFFERENTIALRECHNUNG IN $\mathbb{R}^N$

wo definiert, differenzierbar mit der Ableitung

$$u'(t) := h(b(t), t) \cdot b'(t) + \int_a^{b(t)} \frac{\partial h}{\partial t}(s, t) ds$$

### Korollar 8.22

Sei  $h = h(s, t) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, und  $\frac{\partial h}{\partial t}$  existiert und auf ganz  $\mathbb{R}^2$  stetig. Sei

$$u(t) = \int_0^t h(s, t) ds$$

Dann

$$u(t) \in C^1(\mathbb{R}) \text{ und } u'(t) = h(t, t) + \int_0^t \frac{\partial h}{\partial t}(s, t) ds$$

### Beweis

Setze  $b(t) = t$ ,  $a = 0$  in Satz 8.21.

### Korollar 8.23

Sei  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion mit Stetiger partieller Ableitung  $\frac{\partial h}{\partial t}$ . Dann ist die Funktion

$$u(t) := \int_a^b h(s, t) ds$$

differenzierbar mit Ableitung

$$u'(t) := \int_a^b \frac{\partial h}{\partial t}(s, t) ds$$

### Beweis

Setze  $b(t) = b$ , in Satz 8.20

### Bemerkung 8.24

Mit Korollar 8.23 kann man bestimmte Integrale berechnen, auch wenn die zugehörige unbestimmten Integrale nicht elementar darstellbar sind

### Beispiel 8.25

Berechne das integral

$$\int_0^1 \frac{x^5 - 1}{\log x} dx$$

## KAPITEL 8. DIFFERENTIALRECHNUNG IN $\mathbb{R}^N$

Sei

$$u(\alpha) := \int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\log x} dx$$

Für  $\alpha \geq 0$  erfüllt  $u(\alpha)$  die Voraussetzungen des Satzes. Wir berechnen

$$u'(\alpha) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{x^\alpha - 1}{\log x} \right) dx = \int_0^1 \frac{x^\alpha \log x}{\log x} dx = \int_0^1 x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}$$

Daraus folgt aus Fundamentales Satz der Integral Rechnung

$$u(\alpha) = \int u'(\alpha) d\alpha = \int \frac{d\alpha}{\alpha+1} = \log(\alpha+1) + C$$

Für eine noch zu bestimmende Konstante  $C$ . Aber

$$u(0) = \int_0^1 0 dx = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\log x} dx = \log(\alpha+1)$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{x^5 - 1}{\log x} dx = \log 6$$

### Beweis Satz 8.21 (Idee)

Sei

$$f(x, y) = \int_a^x h(s, y) ds : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(t) = \begin{pmatrix} b(t) \\ t \end{pmatrix} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, g'(t) = \begin{pmatrix} b'(t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dann

$$u(t) = (f \circ g)(t) = f(b(t), t) = \int_a^{b(t)} h(s, t) ds$$

Nach Hauptsatz der Integral Rechnung  $f$  ist nach  $x$  partielle differenzierbar und  $\frac{\partial f}{\partial x} = h(x, y)$ . Man muss zeigen das  $f$  ist nach  $y$  partielle differenzierbar mit

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \int_a^x \frac{\partial h(s, y)}{\partial y} ds$$

Dann ergibt die Kettenregel

$$\begin{aligned}
 u'(t) &= \frac{d}{dt} (f \circ g)(t) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(g(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(g(t)) \right) \cdot \frac{dg}{dt} \\
 &= \left( h(b(t), t), \left( \int_a^x \frac{\partial h(s, y)}{\partial y} ds \right) h(b(t), t) \right) \begin{pmatrix} b'(t) \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \left( h(b(t), t), \int_a^{b(t)} \frac{\partial h}{\partial y}(s, t) ds \right) \begin{pmatrix} b'(t) \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= h(b(t), t) \cdot b'(t) + \int_a^{b(t)} \frac{\partial h}{\partial t}(s, t) ds
 \end{aligned}$$

### 8.3 Differentialformen und Vektorfelder

Sei  $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  der Raum der linearen Abbildungen von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}$ . Falls  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion ist, die in jedem Punkt differenzierbar ist, dann ist  $df(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  und man erhält eine Abbildung

$$\begin{aligned}
 \Omega &\rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \\
 x_0 &\rightarrow df(x_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0) \right) \\
 &= \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0) dx^1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0) dx^n
 \end{aligned}$$

Dies ist ein Beispiel von 1-Form

#### Definition 8.26

Eine Differentialform vom Grad 1 (auch "1-Form") auf  $\Omega$  ist eine Abbildung

$$\lambda : \Omega \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

#### Beispiel 8.27

1. Seien  $x^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  die Koordinatenfunktionen  $1 \leq i \leq n$ . Für jedes  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  ist  $dx^i(x_0) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ; dies führt zur 1-Form

$$\begin{aligned}
 dx^i &: \mathbb{R}^n \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \\
 x_0 &\rightarrow dx^i(x_0)
 \end{aligned}$$

Für jedes  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , gilt  $dx^i(e_j) = \delta_{ij}$  also bilden  $dx^1(x_0), \dots, dx^n(x_0)$  eine Basis für  $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ .

Eine beliebig 1-Form  $\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  lässt sich dann eindeutig wie folgt darstellen

$$\lambda(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(x_0) dx^i(x_0)$$

## KAPITEL 8. DIFFERENTIALRECHNUNG IN $\mathbb{R}^N$

wobei  $\lambda_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen sind.

2. Für jedes  $f \in C^1(\Omega)$  ist das Differential  $df$  eine 1-Form

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} dx^2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n$$

Is it  $C^1$  or  $C^0$ ? page 152.1 top

3. Der Ausdruck  $\lambda(x, y, z) = 3dx + 5zdy + xdz$  definiert ein 1-Form auf  $\mathbb{R}^3$  mit

$$\lambda_1(x, y, z) = 3$$

$$\lambda_2(x, y, z) = 5z$$

$$\lambda_3(x, y, z) = x$$

### Definition 8.28

Ein Vektorfeld auf  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ist eine Abbildung  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$

Does the definition include the examples? page 153 top

### Beispiel

- 1.

$$v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (2xy, x^2)$$



page 153, middle

2.  $v(x, y) = (-y, x)$



Page 153, bottom

**Bemerkung 8.29**

Sei  $\langle, \rangle$  das übliche Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^n$ , d.h.

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x^i y^i$$

Mittels  $\langle, \rangle$  kann man von 1-Formen zu Vektorfeldern und umgekehrt übergehen. Dies geht wie folgt:

1. Sei  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Vektorfeld. Dann definieren wir  $\forall x \in \Omega, \omega \in \mathbb{R}^n$

$$\lambda(x)(\omega) := \langle v(x), \omega \rangle$$

Offensichtlich  $\lambda(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  und somit ist

$$\begin{aligned} \lambda : \Omega &\rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \\ x &\rightarrow \lambda(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\rightarrow \langle v(x), \omega \rangle \end{aligned}$$

eine 1-Form auf  $\Omega$

Umgekehrt

2. Sei  $\lambda : \Omega \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  1-Form und  $\lambda(x) := \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) dx^i$  wie oben.

Wir definieren

$$\begin{aligned} v : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\rightarrow (\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_n(x)) \end{aligned}$$

dann ist  $v$  ein Vektorfeld und

$$\lambda(x)(\omega) = \langle v(x), \omega \rangle$$

Sei  $\omega = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 + \dots + \omega^n e_n$ . Dann

$$\begin{aligned} \lambda(x)(\omega) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) dx^i(\omega) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) dx^i(\omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 + \dots + \omega^n e_n) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) (\omega^1 dx^i(e_1) + \omega^2 dx^i(e_2) + \dots + \omega^n dx^i(e_n)) \\ dx^i(e_j)_{ij} &\leftarrow = \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) \omega^i = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_n(x)) \cdot (\omega^1, \dots, \omega^n) \\ &= \langle v(x), \omega \rangle \end{aligned}$$

Diese Diskussion können wir auf das Differential einer Funktion anwenden

**Definition 8.30**

Sei  $f \in C^1(\Omega)$ , das durch

$$\langle v(x), \omega \rangle := df(x)(\omega), \omega \in \mathbb{R}^n$$

definierte Vektorfeld heisst Gradientenfeld von  $f$  und wird mit  $v(x) = \nabla f(x)$  oder  $\text{grad} f$  bezeichnet.

Bezüglich der Standardbasis  $e_1, \dots, e_n$  der  $\mathbb{R}^n$  folgt die Darstellung

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x^1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x^n}(x) \end{pmatrix}, \forall x \in \Omega$$

(Oben nehmen wir  $\lambda(x) := df(x) = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} r^i x^i$ , Bemerkung 8.29, 2.)

**Satz 8.31**

Sei  $f \in C^1(\Omega)$  und  $x_0 \in \Omega$ . Dann gibt  $\nabla f(x_0)$  die Richtung und  $|\nabla f(x_0)|$  den Betrag des Steilsten Anstieges von  $f$  an der Stelle  $x_0$

**Beweis**

Aus der Definition des Gradientenfeld folgt  $\forall e \in \mathbb{R}^n$ , unit Vektor  $\|e\| = 1$

$$df(x_0)(e) = \langle \nabla f(x_0), e \rangle$$

Mit Cauchy-Schwarz folgt

$$\langle \nabla f(x_0), e \rangle \leq \|\nabla f(x_0)\| \|e\| = \|\nabla f(x_0)\|$$

mit Gleichheit genau dann wenn  $e$  ein positives Vielfaches von  $\nabla f(x_0)$  ist, nämlich

$$e = \frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}$$

$$\Rightarrow df(x_0)e \leq \|\nabla f(x_0)\|$$

mit Gleichheit für  $e = \frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}$   $\nabla f(x_0) \neq 0 \Rightarrow \nabla f(x_0)$  zeigt die Richtung an, in der  $f$  am schnellsten wächst.

Geometrische Interpretation Sei  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, C^1$ . Für jedes  $s \in \mathbb{R}$  wird  $f^{-1}(s) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = s\}$  Niveaufäche genannt.

**Beispiel**

1.

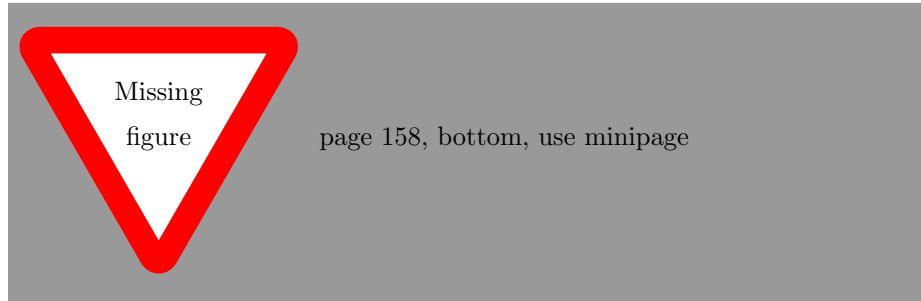
$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$$

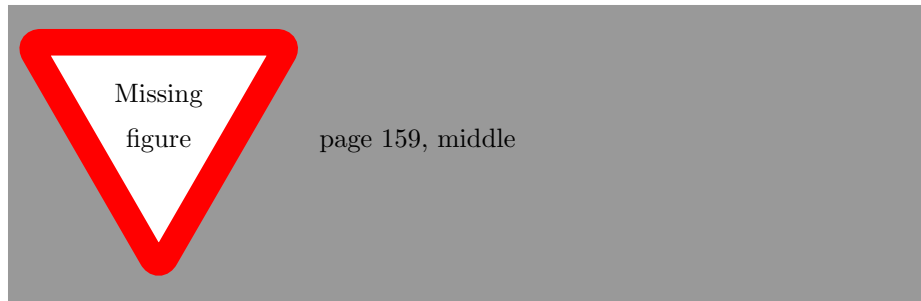
dann ist  $f^{-1}(s) = \text{Sphäre mit Zenter } O \text{ und Radius } \sqrt{s}$

Add arrow pointing down for description of function, page 157 middle

2.  $f(x, y) = xy$  ist ein Hyperbolischer Paraboloid mit Niveaulinien



$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Nun sei  $x_0 \in \Omega$  mit  $f(x_0) = s$ , i.e.  $x_0 \in f^{-1}(s)$ . Sei  $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein diff. kurve durch  $x_0$  mit  $\gamma[-1, 1] \subset f^{-1}(s)$ ,  $\gamma(0) = x_0$



Dann gilt  $f(\gamma(t)) = s, \forall t \in [-1, 1]$  und es folgt aus Kettenregel

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f(\gamma(t))) &= \frac{d}{dt}(s) = 0 \\ \Downarrow \\ df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) &= 0 = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \end{aligned}$$

Insbesondere  $0 = df(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = \langle \nabla f(x_0), \gamma'(0) \rangle$  d.h.  $\nabla f(x_0)$  steht senkrecht zur Niveaufache von  $f$  durch  $x_0$

### Beispiel

Sei  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{2}, x, y \in \mathbb{R}^2$

$$\nabla f(x, y) = (x, -y)$$

Sei  $(x_0, y_0) = (1, -1)$

$$\nabla f(1, -1) = (1, 1) \quad (\|\nabla f(1, -1)\| = \sqrt{2})$$

$$\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}(1, -1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$$

3. Im Punkt  $P$  biegt der Bergweg ab; nach Südosten geht er mit 25% steigung berg an, nach Süden mit 20% Gefälle berg ab. Der wanderer im Nebel möchte über die Wiese möglichst rascht zum Gipfel. In welche Richtung muss er gehen und wie steil ist es dorthin?



## KAPITEL 8. DIFFERENTIALRECHNUNG IN $\mathbb{R}^N$

Wir legen die Koordinatensystem so, dass die  $x$ -Achse nach Osten und die  $y$ -Achse nach Norden zeigt, und setzen voraus, dass die Höhenfunktion  $h$  differenzierbar ist. Wir wollen ihren Gradienten in  $P$   $\nabla h(P)$  bestimmen. Noch Voraussetzung hat  $h$  die beiden Richtungsableitungen

$$dh(P)(v_1) = 0.25 \quad dh(P)(v_2) = -0.2$$

wobei

$$v_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad v_2 = (0, -1)$$

