Wegen (2) $\lim |a_k - b_k| = \lim \left| \frac{b_1 - a_1}{2^k} \right| = 0$

d.h. $\lim a_k = \lim b_k$. Sei $c \in [a, b]$ dieser Wert.

Aus Stetigkeit von f folgt

$$f(c) = \lim f(a_n) = \lim f(b_n)$$

Aus (3) folgt $f(a_n) < y \Rightarrow f(c) \leq y$

$$y \leq f(b_n) \Rightarrow y \leq f(c)$$

also $\underline{\underline{f(c) = y}}$.

Nov 19.13

Kor. 4.20 (1) (Bsp. 4.6.1) Sei

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ ein polynome mit reellen Koeffizienten so dass $a_n \neq 0$ und n ungerade ist.

Dann besitzt p mindestens eine reelle Nullstelle.

Beweis: Sei $q(x) = \frac{p(x)}{a_n}$

$$= x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} x^{n-1} + \dots + \frac{a_0}{a_n}$$

$$= x^n \left[1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{x} + \dots + \frac{a_0}{a_n} \frac{1}{x^n} \right]$$

Dann $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^j} = 0$

Folgt insbesondere dass es $c > 0$ gibt so dass für $|x| \geq c$

$$1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{x} + \dots + \frac{a_0}{a_n} \frac{1}{x^n} \geq \frac{1}{2}$$

Folglich ist: $q(c) \geq c^n \frac{1}{2} > 0$

(n = ungerade) $q(-c) \leq -c^n \frac{1}{2} < 0$

Also gibt $x_0 \in [-c, c]$ mit $q(x_0) = 0$.

(2) Eine reelle 3×3 Matrix besitzt immer einen reelen Eigenwert.

Satz 4.21 (4.6.2 - Strue). Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, streng monoton wachsend (d.h. $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$) Dann ist $\text{Bild}(f) = [c, d] = [f(a), f(b)]$

$f: [a,b] \to [c,d]$ is bijektiv

und $f^{-1}: [c,d] \to [a|b]$ ist stetig.

Beweis: ① f ~~streng~~ monot. wachs.
d.h. Falls $x \neq y$, denn ist $f(x) \neq f(y)$
$\Rightarrow$ f injektive.

Zwischenwertsatz $\Rightarrow$ f surjektive.
$c = f(a) < f(b) = d$, Sei $y \in [c,d]$, ZWS $\Rightarrow \exists\, x \in [a,b]$ mit $f(x) = y$
$\Rightarrow$ f ist bijektive.

② f^{-1} ist stetig: Sei $y \in [c,d]$

und Sei $(y_n) \in [c,d]$ eine Folge

mit $\lim y_n = y_0$

f bijektive, $\exists\, x_n$, $x_n = f^{-1}(y_n) \in [a,b]$
und x_0 mit $x_0 = f^{-1}(y_0)$
(x_n) beschränkt, sei $f^{-1}(y_{\ell(n)})$

eine beliebige konv. Teilfolge

und x deren Grenzwert

$$\lim f^{-1}(y_{\ell(n)}) = x$$

f stetig $\Rightarrow \lim f(f^{-1}(y_{l(n)})) = f(\lim f^{-1}(y_{l(n)}))$
$= f(x)$

aber

$\Rightarrow \lim f(f^{-1}(y_{l(n)})) = \lim y_{l(n)}$

$\Rightarrow \lim y_{l(n)} = f(x)$, y_n ist auch konv.

$\Rightarrow \lim y_{(n)} = f(x)$, aber $\lim y_n = y_0$

$\Rightarrow y_0 = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y_0) = x_0$
f bij.

$\Rightarrow$ jede Teilfolge von (x_n) hat denselben Häufungspunkt x_0. Insbesondere

$\Rightarrow \limsup x_n = x_0 = \liminf x_n$

also $\lim f^{-1}(y_n) = \lim x_n = x_0 = f^{-1}(y_0)$

$\Rightarrow f$ stetig

Kor 4.22 (Satz 4.6.3) Sei $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig und streng mon. wachsend mit monotonen Limites

$$-\infty < c := \lim_{x \downarrow a} f(x) < \lim_{x \uparrow b} f(x) =: d < \infty$$

dann ist $f: (a,b) \to (c,d)$ bijektiv

und f^{-1} ist stetig.

Nov 19.

Wk 2

164

Kor 4.22 (Bsp 4.6.2)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Potenzfunktion $f(x) = x^n$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. Sie ist auf $(0, \infty)$ streng mont. wachsend mit Bild $(0, \infty)$. Die Umkehrfunktion

$$(0, \infty) \to (0, \infty)$$
$$x \to \sqrt[n]{x}$$ ist stetig.

Beweis: $y^n - x^n = (y-x)\underbrace{(y^{n-1} + y^{n-2}x + \dots + x^{n-1})}_{>0}$

Für $0 < x, y < \infty$ $y^{n-1} + y^{n-2}x + \dots + x^{n-1} > 0$

Also folgt $x < y \Rightarrow x^n < y^n$

d.h. f streng mon. wachsend.

Satz 4.23 (Bsp 4.6.2 (II))

Die Funktion $\mathrm{Exp} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig, streng monotone wachsend mit $\mathrm{Bild}(\mathrm{Exp}) = \mathrm{Exp}(\mathbb{R}) = (0, \infty)$

Defn 4.24 Die Umkehrfunktion von $\mathrm{Exp} : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ wird mit $\mathrm{Log} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ bezeichnet

Dann

Kor 4.25: $\mathrm{Log} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ hat folgende Eigenschaften

(1) Sie ist strikt monoton wachsend und stetig

(2) $\mathrm{Log}(1) = 0$.

(3) $\mathrm{Log}(xy) = \mathrm{Log}(x) + \mathrm{Log}(y)$.

Beweis Satz 4.0.23.

$\mathrm{Exp}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots$ abs. konv. auf ganz $\mathbb{R}$

(1) $\mathrm{Exp}(x) = \mathrm{Exp}\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left(\mathrm{Exp}\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \geq 0$

(2) Falls $x \geq 0$, ist $\mathrm{Exp}(x) \geq 1 > 0$
$(\mathrm{Exp}(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0)$

(3) Wegen $\mathrm{Exp}(+x) = 1/\mathrm{Exp}(-x) \neq 0$

$\mathrm{Exp}(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

d.h $\mathrm{Exp}(\mathbb{R}) \subset (0, \infty)$

(3) $\mathrm{Exp}(y) - \mathrm{Exp}(x) = \mathrm{Exp}(x)\left[\mathrm{Exp}(y-x) - 1\right]$

Falls $x < y$, so ist $\mathrm{Exp}(y-x) > 1$

und somit $\mathrm{Exp}(y) > \mathrm{Exp}(x)$
(da $\mathrm{Exp}(x) > 0$)

d.h Exp ist streng monot. wachsend.

167

(4) Zur Stetigkeit: Sei $x = x_0 + h$, $0 < h < 1$

$$\operatorname{Exp}(x) - \operatorname{Exp}(x_0) = \operatorname{Exp}(x_0)\,(\operatorname{Exp}(h) - 1)$$

da
$$\underbrace{|\operatorname{Exp} h - 1|}_{\to 0,\ h \to 0} = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^k}{k!}\right| \underset{2!}{\leq} \sum_{k=1}^{\infty} |h^k|$$

$$= \frac{|h|}{1-|h|} \to 0$$

Also für $x = x_0 + h \to x_0$, $\operatorname{Exp}(x) - \operatorname{Exp}(x_0) \to 0$.
und die Funktion Exp ist stetig.

$\operatorname{Exp}(x) \to \infty$ $(x \to \infty)$ und $\operatorname{Exp} x \to 0$ $(x \to -\infty)$.

$$\operatorname{Exp}(\operatorname{Log} x) = x$$

$$\operatorname{Exp}(\operatorname{Log} x + \operatorname{Log} y) = \operatorname{Exp}(\operatorname{Log} x)\operatorname{Exp}(\operatorname{Log} y) = xy$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{Log} x + \operatorname{Log} y = \operatorname{Log} xy.}$$

§ 4.7 Gleichmässig Stetigkeit

Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine stetige funk auf Ω

d.h.

$\forall x_0 \in \Omega, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \Omega$:

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

f ist nicht stetig auf Ω $\iff$

$\exists x_0 \in \Omega, \exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in \Omega$:

$$|x - x_0| < \delta \text{ und } |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

(Defn 4.7.2)

Defn 4.24 Gleichmässig stetig:

$f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ heisst gleichmässig stetig

falls für jede $\varepsilon > 0$, ein $\delta > 0$ gibt

so dass: $\forall x, x_0 \in \Omega$

$$\|x - x_0\| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon .$$

stetig: $\forall x_0 \in \Omega, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_{x_0,\varepsilon} > 0, \forall x \in \Omega:$

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

gleich stetig $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall x, \forall x_0 \in \Omega$

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

stetig: δ ist abhängig von ε und x_0

gleich.stetig δ ist abhäng von ε, aber unabhängig von x_0.

Bsp. 4.25 $\mathrm{Exp}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist nicht gleichmässig stetig

$$|\mathrm{Exp}(x) - \mathrm{Exp}(x_0)| = |\mathrm{Exp}(x - x_0) - 1| \, \mathrm{Exp}(x_0)$$

Falls $x - x_0 = \pm\delta$, $\delta \neq 0$ und $x_0 \to \infty$

denn $|\mathrm{Exp}(x) - \mathrm{Exp}(x_0)| \longrightarrow \infty$.

Bsp 2 $f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \to 2x+5$$

Dann ist f gleichmässig stetig.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$,

Sei $x_0, x \in \mathbb{R}$.

Dann $|f(x) - f(x_0)| = |2x+5 - 2x_0+5|$

$$= 2|x - x_0|$$

$\Longrightarrow$ Wenn wir $\delta = \varepsilon/2$ wählen, dann

$$|x - x_0| < \varepsilon/2 \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Nov. 29

Bsp 3 $f: \Omega \to \Omega$ $\quad \Omega = (0, \infty)$

$$x \to x^2$$

f ist stetig aber nicht gleichmässig st.

① f stetig: Sei $x_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$

$$|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |(x - x_0)(x + x_0)|$$

Sei $|x-x_0| < \delta < 1$ Dann,

$x < x_0 + 1 := a$. Dann $x, x_0+1 < a$

$|x^2 - x_0^2| = |x-x_0||x+x_0| < |x-x_0| 2a$

Wenn wir $\delta = \min(1, \frac{\varepsilon}{2a})$ wählen

dann $|x - x_0^2| < |x-x_0| 2a \leq \varepsilon$.

Bmk δ ist abhängig von ε, und a und a ist x_0+1, abhängig von x_0.

(2) f ist nicht gleichmstetig ~~dh~~.

$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}$:

$|x-x_0| < \delta$ und $|x^2 - x_0^2| \geq \varepsilon$

Sei $\varepsilon = 1$, sei $\delta > 0$. Sei $x_0 = 1/\delta$

und $x = x_0 + \delta/2$

Dann $|x - x_0| < \delta/2 < \delta$ aber

$|x^2 - x_0^2| = \left|\left(\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right)^2 - \frac{1}{\delta^2}\right| = 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1 = \varepsilon$

Bsp 4 $f : \Omega \to \Omega$, $\Omega = [0,4]$.
$x \to x^2$

Dann ist f gleichmässig stetig.

Beweis Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

Sei $x_0, x \in \Omega = [0,4]$, $0 \leq x, x_0 \leq 4$

$\Rightarrow 0 \leq x + x_0 \leq 8$

$|x - x_0| < \delta \Rightarrow$

$|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |x - x_0||x + x_0| \leq (4+4)\delta$

Sei $\delta = \varepsilon/8$, dann $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Bsp 5 $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$
$x \to \sqrt{x}$

ist gleichmässig stetig auf $(0, \infty)$

Beweis: Übung.

Wir haben gesehen dass

$f: (0,\infty) \to (0,\infty)$
$x \mapsto x^2$

nicht Gleichm.-stetig

aber $f: [0,4] \to [0,4]$ ist Gleichm.-stetig
$x \mapsto x^2$

○ Was ist der Unterschied?

$[0,4]$ ist kompakt, $(0,\infty)$ nicht

<u>Satz 4.26</u> (Stme ?...) Sei $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt und $f: K \to \mathbb{R}^n$ stetig

○ Dann ist f gleichmässig stetig.

<u>Beweis</u> (indirekt) Sonst es gibt $\varepsilon > 0$ so dass für jedes $\delta > 0$ Punkte $x, y \in K$ gibt mit

$\|x - y\| < \delta$ und $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$

Sei $\forall k \geq 1$, mit $\delta = \frac{1}{k}$, ein Paar (x_k, y_k) gewählt so dass $|x_k - y_k| < \frac{1}{k}$ und $|f(x_k) - f(y_k)| > \varepsilon$

Da K kompakt ist, gibt eine konv. Teilfolge $x_{\ell(k)} \to z$

Aus $|x_k - y_k| < \frac{1}{k}$ folgt dass $y_{\ell(k)} \to z$

Sei nun k_0 so dass

$\|f(x_{\ell(k_0)}) - f(z)\| < \varepsilon/2 \quad \forall k > k_0$

(f stetig)

Dann folgt $\forall k > k_0$:

$$\|f(y_{\ell(k)}) - f(z)\| \geq \overbrace{|f(y_{\ell(k)}) - f(x_{\ell(k)})|}^{> \varepsilon} - \underbrace{|f(x_{\ell(k)}) - f(z)|}_{< \varepsilon/2}$$

$\geq \frac{\varepsilon}{2}$

Widerspruch zu Stetigkeit von f. ☐

§ 4-8. Punktweise und gleichmässige Konvergenz

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $f, f_k : \Omega \to \mathbb{R}^n$

Defn 4.28. (4-8.1) $(f_k)_{k\geq 1}$ konvergiert punktweise gegen f falls $\forall x \in \Omega$

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x).$$

$\forall x\in\Omega$, $\forall \varepsilon>0$, $\exists k_{\varepsilon,x}$ s.d. $|f_k(x)-f(x)| < \varepsilon$ $\forall k > k_{\varepsilon,x}$

Es stellt sich die Frage ob f stetig ist, falls alle $(f_k)_{k\geq 1}$ stetig sind

Bsp 4-30 (Bsp. 4-8.1 (I)) Sei $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$

$f_k(x) = x^k$, $k \geq 1$. Dann gilt

$0 \leq x < 1$: $\lim_{k\to\infty} x^k = 0$

$x = 1$: $\lim_{k\to\infty} x^k = 1$

Also konvergiert (f_k) punktweise gegen $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$

Insbesondere ist $f(x)$ nicht stetig.

<u>Bsp.</u> $f_n(x) = \dfrac{nx^2+1}{nx+1}$, $\Omega = [0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nx^2+1}{nx+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2+1/n}{x+1/n} = \frac{x^2}{x} = x$$

$f_n(x) \to f(x) = x$ und $f(x) = x$ ist stetig.

$$\left| f_n(x) - x \right| = \left| \frac{nx^2+1}{nx+1} - x \right| = \left| \frac{1-x}{nx+1} \right| \le \frac{1+|x|}{|nx+1|}$$

$$\le \frac{3}{1+n}$$, Da $x \in [1,2]$, $|nx+1| \ge n+1$ und $1+|x| \le 3$

$$\frac{3}{1+n} \le \varepsilon \Rightarrow \frac{3}{\varepsilon} - 1 \le n$$

d.h. $\forall \varepsilon > 0, \ \exists N_\varepsilon$ s.d. für $n > N_\varepsilon = \frac{3}{\varepsilon} - 1$

$|f_n(x) - x| < \varepsilon \quad \forall x \in [1,2]$.

N_ε hängt nur von ε ab und <u>nicht</u> von $x \in [1,2]$ ab.

<u>Defn 4-29</u> (4.8.1. ii) (f_k) konvergiert <u>gleichmässig</u> gegen f falls

$$\sup_{x \in \Omega} \|f_k(x) - f(x)\| \to 0 \quad , k \to \infty$$

d.h. $\forall \varepsilon > 0, \ \exists k_\varepsilon$ so dass $\forall k > k_\varepsilon$

$\forall x \in \Omega : \quad \|f_k(x) - f(x)\| < \varepsilon$.

<u>punkt. kon</u> : $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in \Omega, \exists k_{\varepsilon,x}$ s.t. $\forall k > k_{\varepsilon,x}$

$\|f_k(x) - f(x)\| < \varepsilon$.

<u>gleichm. kon</u> $\forall \varepsilon > 0 \ \exists k_\varepsilon$ s.t. $\forall k > k_\varepsilon$

$\forall x, |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$

<u>Bsp 4-30</u> (4.8.1) seien $(a_k)_{k \geq 1} \in \mathbb{C}$

$p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ mit konvergenz radius

$\rho := 1 / \limsup \sqrt[k]{|a_k|} \leq \infty$.

Sei $\rho > 0$, und $0 \leq r < \rho$

Dann konvergiert die Folge

$$p_n(z) := \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

gleichmässig auf $\overline{B_r(0)}$ gegen $p(z)$

__Beweis:__ Sei $z \in \overline{B_r(0)}$ und $r < s < \rho$

$$|p(z) - p_n(z)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k\right|$$

$$\underset{z \in \overline{B_r(0)}}{\leq} \sum_{n+1}^{\infty} |a_n| r^k = \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \left|\frac{r}{s}\right|^k s^k$$

$$\leq \left(\frac{r}{s}\right)^{n+1} \sum_{n+1}^{\infty} |a_k| s^k$$

$\left|\frac{r}{s}\right| < 1$, $k > n+1 \Rightarrow \left(\frac{r}{s}\right)^k < \left(\frac{r}{s}\right)^{n+1}$

$$\leq \left(\frac{r}{s}\right)^{n+1} C_s \quad , \text{ wobei}$$

$$C_s := \sum_{0}^{\infty} |a_k| s^k < \infty$$

$$\Longrightarrow |p(z) - p_n(z)| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Der Sinn dieses Konvergenzbegriff ist:

Satz 4.31 (Satz 4.8.1)

Seien $f_k : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ so dass f_k gleichmässig gegen f konvergiert. Dann ist f stetig.

Kor. 4.32 Potenzreihen sind stetig im inneren ihres Konvergenzkreises.

Beweis: Folgt aus Satz 4.31 und Bsp 4.30

Beweis 4.31 Sei $x_0 \in \Omega$, und $(x_n)_{n \geq 1}$ eine Folge in Ω mit Grenzwert x_0.

Sei $\varepsilon > 0$, wir wählen ein k so dass

$$\sup_{x \in \Omega} |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Da f_k stetig ist, sei nun $N \geq 1$ mit

$$|f_k(x_n) - f_k(x)| \leq \varepsilon \quad \forall n > N$$

Dann gilt

$$\|f(x_n) - f(x_0)\| = |f(x_n) - f_k(x_n) + f_k(x_n) - f_k(x_0) + f_k(x_0) - f(x_0)|$$

$$\leq |f(x_n) - f_k(x_n)| + |f_k(x_n) - f_k(x_0)| + |f_k(x_0) - f(x_0)|$$

$$\leq 3\varepsilon$$

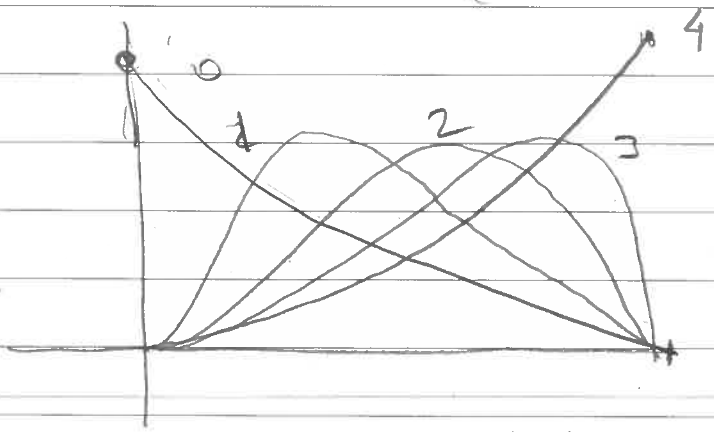
$\boxtimes$

Eine natürliche Frage ist, was sind die "einfachsten" Funktionen mit denen man alle stetigen Funktionen gleichmässig approximieren kann?

- Es gibt einen sehr allgemeinen Satz von Stone-Weierstrass, der gibt insbesondere ein Kriterium für Funktionen auf kompakten Teilmenge von $\mathbb{R}^d$.
- Satz von Weierstrass: Man kann jede stetige Funktion auf einem kompakten Intervall durch Polynome approximieren.

Ein expliziter Approximation verfahren für auf $[0,1]$ stetige Funktionen mittels Polynomen wurde von S. Bernstein gefunden (1911)

Set $B_{i,n}(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}$ $\quad 0 \leq i \leq n$



$n = 5$

Diese Polynom bilden ein Basis der Vektorraums der Polynomen von Grad $= n$.

Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, dann ist

$$B_n(f)(x) := \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(x)\, f\left(\frac{i}{n}\right)$$

<u>Satz</u> (Bernstein) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann konvergiert die Folgen $B_n(f)(x)_{n \geq 1}$ gleichmässig gegen f

---

Mit dem Bernstein Polynomen, kann man eine Bézier kurve n-ten Gerades zu gegebenen $n+1$ Kontrol Berurpunkten $P_0, \ldots, P_n$ definieren.

Die Bézierkurve ist ein wichtiges Werkzeug für Komputergrafik darstellt.

Seien z.b $P_0, \ldots, P_n$ n-Kontroll Punkte in den Ebene. Dann ist die Parametrische Kurve $t \longmapsto \sum_{i=1}^{n} B_{i,n}(t) P_i$, die Bezier-Kurve, Diese Kurve liegt immer in der Konvexen Hülle des Kontrolpolygons