Dec 10, 13

231

③ $\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n\geq 2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}$ Cel. 1, $|x|<1$.

<u>Defn 5.31</u> (5.4.2) ① $f : \Omega \to \mathbb{R}$

Ist m-mal <u>differenzierbar</u>, falls

$\underbrace{((f')' \cdots)'}_{m\text{-mal}}$ existiert. Die m-te

iterierte Ableitung wird mit

$$f^{(m)} = \frac{d^m f}{dx^m} : \Omega \to \mathbb{R} \quad \text{bezeichnet}$$

Es gilt: $\forall k, l \geq 0 \quad f^{(k+l)} = (f^{(k)})^{(l)}$

② f ist in $C^m(\Omega)$ falls f m-Mal differenzierbar ist und alle

Funktionen $f = f^{(0)}, f', f^{(2)}, \ldots f^{(m)}$ stetig sind

③ f ist in $C^\infty(\Omega)$ falls $f \in C^m(\Omega)$

$\forall m \geq 0$.

Kor 5.32 Unter dem Voraussetzungen von Satz 5.29 ist $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ in $C^\infty(-\rho, \rho)$ und die Ableitungen von f erhält man durch Gliedweises differenzieren.

Formel: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad , \quad x \in (-\rho, \rho)$

$$f'(x) = \sum n a_n x^n$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n)(n-1) \dots (n-k+1) x^{n-k}$$

$$\boxed{f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}}$$

§ 5.5. Taylor Formel

Wir beginnen, als Motivation, mit Polynomen.

Sei $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$

ein Polynom, grad $P \leq n$.

Durch $x = (x-a) + a$ und Umordnen nach Potenzen von $(x-a)$ erhalten wir

$$p(x) = b_0 + b_1 (x-a) + b_2 (x-a)^2 + \dots + b_n (x-a)^n$$

Bsp. $p(x) = x^3 + x + 1$

Sei $a = 1$: $\quad ((x-1)+1)^3 + (x-1) + 1 + 1 = p(x)$

$$= (x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 3(x-1) + 1 + (x-1) + 2$$

$$= (x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 4(x-1) + 3$$

Wir bestimmen jetzt die Koeffizienten b_i:

$\boxed{p(a) = b_0}$, $\quad p'(x) = b_1 + 2b_2(x-a) + \dots + n b_n (x-a)^{n-1}$

$\boxed{p'(a) = b_1}$

$$p''(x) = 2b_2 + 6b_3(x-a) + \cdots + n(n-1)(x-a)^{n-2}$$

$$\Rightarrow \boxed{p''(a) = 2b_2}$$

Rekursiv : $p^{(j)}(a) = j!\, b_j$

Mit der Konvention $b_j = 0$ für $j \geq n+1$

da $p^{(n+1)} \equiv 0$. Es folgt

$$p(x) = p(a) + p'(a)(x-a) + \frac{p''(a)}{2!}(x-a)^2$$

$$+ \cdots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Bsp. $p(x) = x^3 + x + 1 \qquad p(1) = 3$

$p'(x) = 3x^2 + 1 \,, \quad p'(1) = 4$

$p''(x) = 6x \qquad p''(1) = 6 \,, \quad \frac{p''(1)}{2!} = 3$

$p'''(x) = 6 \qquad p'''(1) = 6 \qquad \frac{p'''(1)}{3!} = 1$

$$p(x) = 3 + 4(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3$$

Folgendes ist dann naheliegend.

<u>Satz 5.33 (5.5.1)</u> Sei $[a,b] \subset \Omega \subset \mathbb{R}$

und $f \in C^{m-1}(\Omega)$, m-mal differenzierbar auf Ω.

$\left(\begin{array}{l} m-1\text{-mal diff. und} \\ f, f', f'', \dots f^{(m-1)} \text{ stetig} \end{array} \right)$

Dann gibt es $c \in (a,b)$:

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \dots + f^{m-1}(a)\frac{(b-a)^{m-1}}{(m-1)!}$$

$$+ \frac{f^m(c)}{m!}(b-a)^m.$$

(Beweis Dec 12)

<u>Beweis:</u> Wir betrachten die Funktion

$$g(x) = f(x) + f'(x)(b-x) + \dots + \frac{f^{m-1}(x)(b-x)^{m-1}}{(m-1)!}$$

$$+ \frac{K(b-x)^m}{m!} - f(b)$$

die auf Ω differenzierbar ist.

Dann ist $g(b) = 0$.

Wähle K so dass $g(a) = 0$.

Dann gibt es $c \in (a,b)$ mit $g'(c) = 0$

(Nach Mittelwertsatz: $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig
Dann $\exists\, c \in (a,b)$ mit $g'(c) = \frac{g(b)-g(a)}{b-a}$)

Wir berechnen jetzt $g'(x)$:

$$g'(x) = f'(x) + \dots \left(\frac{f^{(j)}(x)\,(b-x)^j}{j!}\right)' + \dots +$$

$$+ K \frac{m\,(b-x)^{m-1}}{m!}$$

Nun ist $\left(\frac{f^{(j)}(x)\,(b-x)^j}{j!}\right)' = \frac{f^{(j)}\,(b-x)^{j-1}}{(j-1)!}(-1)$

$$+ \frac{f^{(j+1)}(x)\,(b-x)^j}{j!}$$

Woraus folgt:

$$g'(x) = \cancel{f'(x)} +$$

$$+ \left\{ -\cancel{f'(x)} + \cancel{f^{(2)}(x)(b-x)}\over{1!} \right\}$$

$$+ \left\{ -\frac{f^{(2)}(x)(b-x)}{1!} + \frac{f^{(3)}(x)(b-x)^2}{2!} \right\}$$

$$+ \vdots$$

$$+ \left\{ -\frac{f^{(m-1)}(b-x)^{m-2}}{(m-2)!} + \frac{f^{m}(x)(b-x)^{m-1}}{(m-1)!} \right\}$$

$$- K\frac{(b-x)^{m-1}}{(m-1)!}$$

Also: $g'(x) = \left[f^{(m)}(x) - K\right] \frac{(b-x)^{m-1}}{(m-1)!}$

Aus $g'(c) = 0$ folgt $\boxed{f^{m}(c) = K}$

Und $g(a) = 0$ nimmt folgende Form an:

$$g(a) = 0 = f(a) + f'(a)(b-a) + \dots + \frac{f^{m-1}(c)(b-a)^{m-1}}{(m-1)!}$$

$$+ \frac{f^{m}(c)}{m!}(b-a)^m - f(b)$$

Korollar 5.34 Sei $f : (c, d) \to \mathbb{R}$ m-mal differenzierbar, seien $x_0, x \in (c, d)$. Dann gibt es $\xi \in (x_0, x)$

mit $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots$

$$+ f^{m-1}(x_0)\frac{(x-x_0)^{m-1}}{(m-1)!}$$

$$+ \frac{f^{m}(\xi)(x-x_0)^{m}}{m!}$$

Wir führen folgende Terminologie ein:

$$T_m f(x; x_0) = f(x_0) + \ldots + f^{(m)}(x_0)\frac{(x-x_0)^m}{m!}$$

Ist das Taylor Polynom m-ter Ordnung ($f \in C^m$) und

$$R_m f(x; x_0) := f(x) - T_m f(x; x_0) \text{ ist}$$

der Restterm

Falls f $(m+1)$-mal diff. ist in Ω, so ist

$$R_m f(x; x_0) = f^{(m+1)}(\xi)\frac{(x-x_0)^{m+1}}{(m+1)!}, \quad \text{für ein } \xi \in (x_0, x)$$

<u>Bmk</u>: Bei der Differenzierbarkeit haben wir gesehen, dass die lineare Funktion $f(a) + f'(a)(x-a)$ im folgenden Sinne eine gute Approximation der Funktion $f(x)$ darstellt: Es gilt

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + R_1 f(x;a) = T_1 f(x;a) + R_1 f(x;a)$$

und

$$\lim_{x \to a} \frac{R_1 f(x;a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a) \right) = 0.$$

Die Taylorformel gibt nun an, wie man diese Approximation noch verbessern kann.

$$f(x) = \underbrace{T_m f(x;a)}_{\text{Approximation}} + \underbrace{R_m f(x;a)}_{\text{Fehler}}$$

Für diesen Fehler gilt:

$$\lim_{x \to a} \frac{R_m f(x;a)}{(x-a)^m} = 0. \qquad (*)$$

Das bedeutet, dass wenn x nahe ~~bei~~ a ist, $R_m f(x;a)$ klein ist im Vergleich zu der schon sehr kleinen Grösse $(x-a)^m$.

Für den Restterm $R_m f(x,a)$, haben wir die Abschätzung (s. 240.1)

$$R_m f(x;a) = f(x) - T_m f(x;a)$$

$$= \left[f^m(\xi) - f^m(a)\right] \frac{(x-a)^m}{m!}$$

$$|R_m f(x;a)| < \sup_{a<\xi<x} |f^{(m)}(\xi) - f^m(a)| \frac{(x-a)^m}{m!}.$$

Falls $f \in C^{m+1}$, können wir Mittelwertsatz anwenden:

Dann folgt

$$|R_m f(x;a)| \leq \left(\sup_{a<\xi<x} |f^{(m+1)}(\xi)|\right)|x-a| \frac{(x-a)^m}{m!}$$

$$\leq M \frac{(x-a)^{m+1}}{m!}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{R_m f(x;a)}{(x-a)^m}\right| \to 0 \quad x \to a.$$

$$f(x) = f(a) + \dots + \frac{f^{m-1}(a)\,(x-a)^{m-1}}{(m-1)!}$$

$$+ \frac{f^{(m)}(\xi)\,(x-a)^m}{m!}$$

$$f(x) + \frac{f^m(a)(x-a)^m}{m!} = T_m f(x;a) + \frac{f^m(\xi)(x-a)^m}{m!}$$

$$\Rightarrow f(x) - T_m f(x,a) = \frac{f^m(\xi) - f^m(a)}{m!}\,(x-a)^m$$

Bsp. 5.35

1) $f(x) = \sin x \qquad x_0 = 0.$

$f'(x) = \cos x, \quad f'(0) = 1$

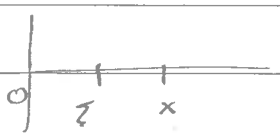
$f''(x) = -\sin x, \quad f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x \quad f'''(0) = -1$

$f^4(x) = \sin x \quad f^4(0) = 0$

$f^5(x) = \cos x \quad f^{(5)}(0) = 1$

Also $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{\cos(\xi)}{5!} x^5.$



$T_1(x) = x = T_2(x)$

$T_3(x) = x - \frac{x^3}{3} = T_4(x)$

Insbesondere

$\left| \sin x - x + \frac{x^3}{3} \right| \leq \frac{x^5}{5!}$ liefert für

$|x|$ klein ein sehr gute Approximation von

z.Bsp. $x = \frac{1}{10} \quad \left| \sin \frac{1}{10} - \frac{1}{10} + \frac{1}{1000} \right| < \frac{1}{10^5 \cdot 5!}$

$\sin \frac{1}{10} \sim \frac{1}{10} - \frac{1}{1000} = 0.1 - 0.001 = 0.099$

Lokale Extrema.

Wir haben schon gesehen die Folgende Satz.

Satz 5.12. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $(a\,b)$ differenzierbar. Sei

- $z_+ \in (a,b)$ mit $f(z_+) = \mathrm{Max}\{f(x) : x \in [a,b]$

Dann gilt $f'(z_+) = 0$.

Mitteils Taylor Formel können wir lokale Extrema (Max oder Min) diskutieren.

- Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \Omega$.

Defn 5.38 (5.5.1)

(1) $x_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}$ heisst lokale Maximalstelle (bzw Minimalstelle) von f falls es $r > 0$ gibt s.d. $\forall x \in B_r(x_0)$
$f(x) \leq f(x_0)$ (resp $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in B_r(x_0)$)

Die lokale Minimalstelle (bzw max) ist

strikt falls $f(x) > f(x_0)$ (bzw $f(x) < f(x_0)$)

3) Lokale extremalstelle : entweder lokale Minimalstelle oder Max. stelle.

☒

Falls f an einer lokalen Minimalstelle x_0 differenzierbar ist, so folgt wie in Beweis von Satz 5-12

$$0 \leq \lim_{x \downarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) = \underbrace{\lim_{x \uparrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\leq 0}$$

Also $f'(x_0) = 0$.

Allgemein gilt

Satz 5-39. (5-5-1) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ $f : \Omega \to \mathbb{R}$. $f \in C^\infty(\Omega)$, $x_0 \in \Omega$. Dann tritt einer der Folgende Fälle ein

(1) $f^{j}(x_0) = 0 \quad \forall j \geq 1$

(2) $m := 1 + \max\{ j : f^{i}(x_0) = 0 \quad 1 \le i \le j \} < +\infty$.

d.h. $f^{m}(x_0) \neq 0$, und $f^{(1)}(x_0) = 0 = f^{(2)}(x_0) = \dots = f^{(m-1)}(x_0) = 0$

(2.1) m is ungerade, denn ist x_0 kein Extremalstelle.

(2.2) m is gerade und $f^{m}(x_0) > 0$ dann ist x_0 strikte lokale minimalstelle

(2.3) m is gerade und $f^{m}(x_0) < 0$

denn ist x_0 strikte lokale Maximalstelle

Beweis: Falls (1) nicht eintritt, so tritt (2) ein.

Also sei $f^{(1)}(x_0) = f^{(2)}(x_0) \dots = f^{m-1}(x_0) = 0$

und $f^{m}(x_0) \neq 0$.

Jetzt wenden wir Taylor Formel an.

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)}_{0}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{m-1}(x_0)}{(m-1)!}(x - x_0)^{m-1}$$

$$+ \frac{f^{m}(\xi)}{m!}(x - x_0)^{m}$$ für ein $\xi \in (x, x_0)$

Aus $f'(x_0) = \cdots = f^{m-1}(x_0) = 0$ folgt

$$f(x) = f(x_0) + f^m(\xi)\frac{(x-x_0)^m}{m!} \quad , \xi \in (x, x_0)$$

(2.1) m ungerade. Falls f an x_0 ein lokales minimum hat so folgt

$$f^m(x_0) \overset{f^m \text{ stetig}}{=} \lim_{\xi \to x_0} f^m(\xi) = \lim_{\xi \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^m} \cdot m!$$

Da m ungerade ist
$(x-x_0)^m > 0$, $x > x_0$
$(x-x_0)^m < 0$, $x < x_0$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{x \downarrow x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^m} \cdot m! \geq 0 \\ \lim\limits_{x \uparrow x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^m} m! \leq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f^m(x_0) = 0$. Widerspruch zur $f^m(x_0) \neq 0$

Analog für x_0 lokales maximumstelle.

(2.2) Falls m gerade ist und $f^m(x_0) > 0$.

dann folgt aus $0 < f^m(x_0) = \lim\limits_{\xi \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^m} m.$

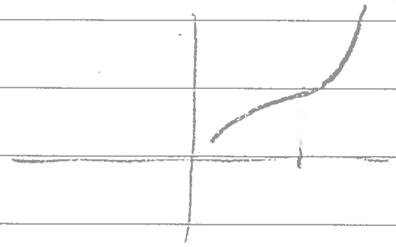
dass für x ~~nahe~~ $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ x_0; $x \neq x_0$, $f(x) - f(x_0) > 0$

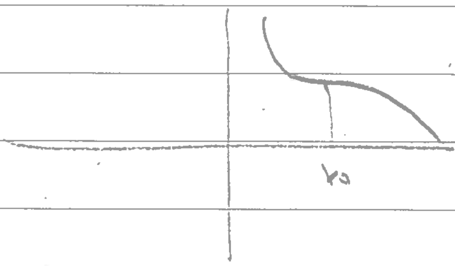
$\Rightarrow f(x) > f(x_0)$, x_0 ein lokale min.

(2.3) m gerade, $f^{m}(x_0) < 0$ Analog.

Graphen die die Fälle (2.1) (2.2), (2.3) darstellen.

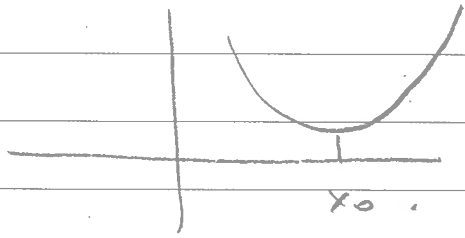
(2.1) $m = 3$





(2.2) $m = 2$

$f^{(2)}(x_0) > 0$



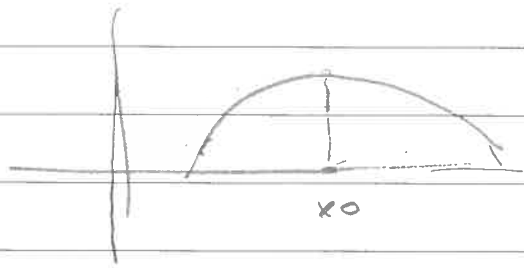
$f(x) = (x - x_0)^2 +$

$f'(x) = 2(x - x_0)$

$f''(x) = 2 > 0$

(2.3) $m = 2$

$f^{(2)}(x_0) < 0$



$f = 1 - (x - x_0)^2$

Für m ungerade ≥ 3 spricht man von einem Wendepunkt.

Bsp S.40 (1) Der Fall (1) tritt ein

z.B $f(x) = e^{-1/x^2}$ $x \in \mathbb{R}$ ist auf

ganz $\mathbb{R}$ C^∞ und $f^{(j)}(0) = 0$, $\forall j \geq 1$

2 (Bsp 5.5.2.)

$f(x) = x^4 - x^2 + 1$ $\qquad f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4}$

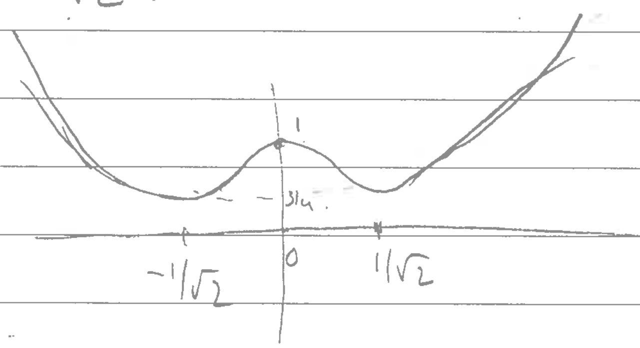
$f'(x) = 4x^3 - 2x = 2x\,(2x^2 - 1) = 0$

$\Longleftrightarrow \quad x \in \left\{ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right\}$

$f''(x) = 12x^2 - 2$

$f''(0) = -2 < 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0 = 0$ lok. st. Max.

$f''\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4 > 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ lok. s. minimum



3 Minimierungseigenschaft des arithmetischen Mittels

Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Wir suchen

$x_0 \in \mathbb{R}$ s.d. $f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} (x_0 - a_i)^2$ minimal ist

Sei $f(x) = \sum_{i=1}^{n} (x - a_i)^2 = nx^2 + 2Ax + B$

wobei $A = \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad B = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$

$f(x) \to \infty$ für $|x| \to \infty$

Also gibt es $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0) = \min f$.

Sei x_0 eine solche. Dann folgt

$$f'(x_0) = 0$$

d.h. $\sum_{i=1}^{n} 2(x_0 - a_i) = 0 = 2\sum_{i=1}^{n} x_0 - \sum_{i=1}^{n} a_i$

d.h $n x_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i \Rightarrow x_0 = \frac{1}{n}\sum a_i$

Nun ist $f''(x) = 2n > 0$ folglich ist

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i = x_0$ die gesuchte Minimalstelle

Konvexe Funktionen.

Eine einfache und geometrische Eigenschaft

einer Funktion ist konvexität: für

C^2 Funktionen kann konvexität mittels

der zweiten Ableitung getestet werden