Oct 22 2013
lect (8)

§ 3.3 Cauchy Kriterium.

Frage: Wie sieht man allgemein ob eine Folge konvergiert?

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergent mit $\lim a_n = a$

Also gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$, $n(\varepsilon)$ mit $|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq n(\varepsilon)$

Daraus folgt, dass $\forall n, m \geq n(\varepsilon)$

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m|$$
$$\leq |a_n - a| + |a_m - a| < 2\varepsilon$$

Defn 3.21 $(a_n)_{n\geq 1}$ ist eine Cauchy Folge falls für $\varepsilon > 0$ ein $n(\varepsilon) \geq 1$ gibt so dass $|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n(\varepsilon)$.

Wir haben gesehen dass

(an) konvergiert $\Rightarrow$ (an) Cauchy.

Wir haben auch

Satz 3.22: ((Cauchy Kriterium).

Sei $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ eine Folge. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

1) (a_n) ist eine Cauchy Folge

2) (a_n) ist konvergent.

Beweis. $(2) \Rightarrow (1)$ ✓

Wir möchten zeigen dass $(1) \Rightarrow (2)$.

Wegen des Satzes von Bolzano Weierstrass besitzt jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge

Strategie = (I) (a_n) beschränkt

(II) $\exists\, (a_{\ell(n)}) \subset (a_n)$ konvergente Teilfolge

Sei $\lim a_{\ell(n)} = a$, (a_n) Cauchy.

$$|a_n - a| = |a_n - a_{\ell(n)} + a_{\ell(n)} - a|$$
$$\leq |a_n - a_{\ell(n)}| + |a_{\ell(n)} - a|$$

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ Cauchy

(I) (a_n) ist beschränkt: Sei $\varepsilon = 1$

Sei $n(1)$ so dass $|a_n - a_m| < 1 \quad \forall n,m \geq n(1)$

insbesondere $|a_n - a_{n(1)}| < 1$

woraus $|a_n| < a_{n(1)} + 1 \quad \forall n \geq n(1)$

folgt und somit $\forall n \geq 1$

$$|a_n| \leq \max\{|a_1|, \ldots, |a_{n(1)}|, |a_{n(1)}| + 1\}$$

d.h. (a_n) ist beschränkt

(II) Sei a ein Häufungspunkt von (a_n) (Bolzano-Weierstrass) und

$\ell : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strikt monotone mit

$\lim\limits_{n\to\infty} a_{\ell(n)} = a$ (Bem: $\ell(n) \geq n$)

Sei $\varepsilon > 0$ und $n_0(\varepsilon)$ so dass

$|a_{\ell(n)} - a| < \varepsilon \quad \forall n > n_0(\varepsilon)$

Sowie $n_1(\varepsilon)$ mit $|a_n - a_r| < \varepsilon \quad \forall n, r \geq n_1(\varepsilon)$
(((a_n) Cauchy))

$\forall n \geq \max\{n_0(\varepsilon), n_1(\varepsilon)\}$ gilt:

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{\ell(n)}| + |a_{\ell(n)} - a|$$
$$\leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

$\Rightarrow \lim a_n = a \Rightarrow (a_n)$ konvergiert.

Bsp 3.23 (1) Sei $a_n := 1 + \frac{1}{2} \cdots + \frac{1}{n}$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Dann ist also $1 \leq a_n \leq a_{n+1} \cdots$

monotone wachsend, aber divergent

denn: $a_{2n} - a_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$

$$\geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \quad \forall n \geq 1$$

Es erfüllt also nicht das Cauchy-Kriteri

Im gegensatz zu Harmonische Reihe | Oct 22. Lecture 2

85

(2) Sei $b_n := 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$

Die alternierende harmonische Reihe.

Ins besondere:

$$b_{2k-2} = \underbrace{\left(1-\frac{1}{2}\right)}_{>0} + \underbrace{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)}_{>0} + \dots + \left(\frac{1}{2k-3} - \frac{1}{2k-2}\right)$$

$$b_{2k} = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right)$$

○ also folgt: $0 < b_{2k-2} < b_{2k} \quad \forall k \geq 1$

b_{2k} monotone wachsend.

und $b_{2k+1} = b_{2k-1} - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1}$

$b_{2k-1} + \underbrace{\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k}\right)}_{<0}$

woraus: $b_{2k+1} < b_{2k-1}$

○ zudem $b_{2k} = b_{2k-1} - \frac{1}{2k}$ also

$b_{2k} < b_{2k-1}$

$\forall k \in \mathbb{N}$

$\frac{1}{2} = b_2 < b_4 \dots < b_{2k-2} < b_{2k} < b_{2k-1} < b_{2k-3} \dots$

$< b_1 = 1$

Die Teilfolgen $(b_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ $(b_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergieren nach Satz 3.9 (Monotone Konvergenz Satz) (S. 62)

Da

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad |b_n - b_{n+1}| = \frac{1}{n+1}$$

haben sie zudem denselben Limes

und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert nach Satz 3.19.

(analog wie in Bsp. 3.20)

§ 3.4. Folgen in $\mathbb{R}^d$ oder $\mathbb{C}$

Die Theorie der Folgen in $\mathbb{R}$, der Konvergenzbegriff usw lassen sich leicht auf Folgen in $\mathbb{R}^d$ oder $\mathbb{C}$ übertragen. $\|\cdot\|$ bezeichnet die Euklidische Norm auf $\mathbb{R}^d$ und $\mathbb{C}$

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2}$$

Von diesem Standpunkt identifiziert sich $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ so dass wir von jetzt an Folgen in $\mathbb{R}^d$ betrachten. Die in 3.1 eingeführte Begriffe lassen sich leicht auf $\mathbb{R}^d$ übertragen.

Defn Eine Folge in $\mathbb{R}^d$ ist eine Abbildung

$$a : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^d$$
$$n \longrightarrow a_n$$

Defn 3.24 Eine Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ in $\mathbb{R}^d$ heisst beschränkt falls es $c > 0$ gibt mit $\|a_n\| \leq c \quad \forall_{n \geq 1}$

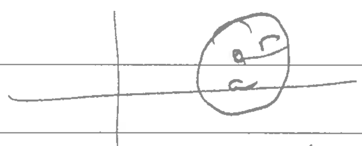
Bemerkung]: Für $d \geq 2$ haben wir keine vollständige Ordnung, deswegen lassen sich Begriffe wie "nach oben beschränkt" nicht übertragen.

Defn 3.25 Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ in $\mathbb{R}^d$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}^d$ falls für jedes $\varepsilon > 0$ einen Index $N(\varepsilon) \geq 1$ gibt so dass

$$\|a_n - a\| < \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon)$$

Die andere Version lässt sich auch übertragen. Wir definieren dafür den (offene) r-Ball mit Zentrum $a \in \mathbb{R}^d$

$$B_{<r}(a) := \{ x \in \mathbb{R}^d : \|x - a\| < r \}$$



$B_{<r}(a)$ ist die Verallgemeinerung von $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$

Nützlich ist auch der (geschlossene) r-Ball

$\overline{B}_r(a) = B_{\leq r}(a) := \{ x \in \mathbb{R}^d : \|x - a\| \leq r \}$.

der das Interval $[a-r, a+r]$ verallgemeinert.

<u>Defn 3.25!</u> Eine Folge $(a_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}^d$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}^d$ falls

für jedes $\varepsilon > 0$, die Menge der Indizen $n \geq 1$ für welche $a_n \notin B_{<\varepsilon}(a)$ endlich ist.

Falls dieses zutrifft, schreibt man

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ oder $a_n \xrightarrow{n \to \infty} a$

→ 89_1

Es gilt dann wieder

<u>Lemma 3.26</u> Sei $(a_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathbb{R}^d$ konvergent

(1) der Limes ist eindeutig bestimmt

(2) die Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ ist beschränkt.

89_1

<u>Bemerkung</u>: Die Konvergenz von $(a_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^d$ ist gleichbedeutend mit der Existenz von einem Vektor $a \in \mathbb{R}^d$ so dass die Folge in $\mathbb{R}$ $(\|a_n - a\|)_{n\geq 1}$ gegen 0 konvergiert

Der Konvergenzbegriff verträgt auch sehr gut mit Vektorraum Struktur wie das folgenge Analog von Satz 3.8 zeigt.

<u>Satz 3.27</u> Seien $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ konvergent Folgen in $\mathbb{R}^d$, sowie $\lambda \in \mathbb{R}$. Sei $a = \lim a_n$, $b = \lim b_n$. Dann sind $(a_n \pm b_n)_{n\geq 1}$ und $(\lambda a_n)_{n\geq 1}$ konvergent und es gilt

$$\lim (a_n \pm b_n) = a \pm b, \quad \lim \lambda a_n = \lambda a.$$

Folgender Satz ist dann grundlegend um Bolzano-Weierstrass sowie der Cauchy Kriterium auf $\mathbb{R}^d$ zu verallgemeinern.

Für eine Folge (a_n) von Vektoren in $\mathbb{R}^d$ ist es zweckmässig folgende Notation für die Koordinaten von a_n zu benutzen $a_n = (a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, a_n^{(d)})$.

Dann gilt

Satz 3.28. Folgende Aussagen sind äquivalent.

(I) $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert in $\mathbb{R}^d$

(II) jede der Folgen (a_n^i) konvergiert in $\mathbb{R}$.

Falls dieses zutrifft seien $a = \lim_{n\to\infty} a_n$

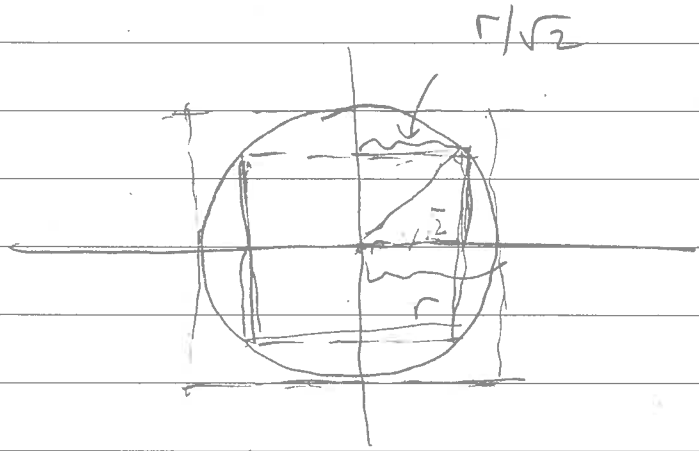
sowie $a^i := \lim_{n\to\infty} a_n^{(i)}$

dann gilt $a = (a^1, a^2, a^d)$

Beweis: Dazu brauchen wir folgendes geometrisches Lemma:

Lemma 3.29. $\forall\, x = (x^1, x^2, , x^d) \in \mathbb{R}^d$

gilt $\max_{1\leq i\leq d} |x^i| \leq \underset{\sqrt{\sum |x^i|^2}}{\overset{}{\underset{\shortparallel}{\|x\|}}} \leq \sqrt{d} \max_{1\leq i\leq d} |x^i|$



$$\left(-\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2 \subset B_{\leq r}(0) \subseteq (-r, r)^2$$

Beweis von Satz 3.28

(I) $\Rightarrow$ (II) Folgt aus der Ungleichung

$$|a_n^{(i)} - a^{(i)}| \leq \|a_n - a\|$$

(II) $\Rightarrow$ (I) Sei $a^i = \lim a_n^i$ und $a = (a^i)_i$

Aus $\|a_n - a\| \leq \sqrt{d} \max\limits_{1 \leq i \leq d} |a_n^{(i)} - a^{(i)}|$

folgt (I)

Satz 3.29 (Bolzano-Weierstrass) Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ in $\mathbb{R}^d$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Bsp. 1) $(a_n) = \begin{pmatrix} 1/n \\ 2/n \end{pmatrix} \subset \mathbb{R}^2$

$$\lim a_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2) $(a_n) = \begin{pmatrix} \frac{n^2+n+1}{2n^2+n+1} \\ n \end{pmatrix}$. (a_n) ist divergent

$\lim \frac{n^2+n+1}{2n^2+n+1} \to \frac{1}{2}$ aber $\lim n = \infty$.

Defn 3.30 $(a_n)_{n\geq 1}$ ist eine Cauchy Folge falls es $\forall\, \varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \geq 1$ gibt so dass $\|a_n - a_m\| < \varepsilon \quad \forall\, n, m \geq N(\varepsilon)$

Aus Satz 3.28 und 3.22 (Cauchy Kriterium) folgt

Satz 3.31 Es sind äquivalent

(i) $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert (ii) (a_n) ist eine Cauchy Folge.

Für $\mathbb{C}$ haben wir noch dass sich die Körperstruktur mit Konvergenz gut verträgt. Nämlich

Satz 3.32 Seien (z_n), (w_n) zwei konvergente Folgen in $\mathbb{C}$ mit $z = \lim z_n$, $w = \lim w_n$

Dann (i) $\overline{z_n} \to \overline{z}$ und $(\|z_n\|)_{n \geq 1}$ konv. gegen $\|z\|$

(ii) Die Folge $(z_n w_n)_{n \geq 1}$ konvergiert gegen zw.

(iii) Falls $w \neq 0$ und $w_n \neq 0$ $\forall n \geq 1$ so konvergiert $(z_n / w_n)_{n \geq 1}$ gegen z/w.

§ 3.5 Reihen

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

Sei $S_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$
die Folge der Partialsummen.
Eine Reihe ist eine unendliche Summe
$a_1 + a_2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ einer Folge $(a_n)_{n\geq 1}$.

Defn 3.33 Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist

- konvergent falls die Folge $(S_n)_{n\geq 1}$ konvergiert. In diesem Fall wird deren Limes mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bezeichnet

$$\lim S_n = \lim \sum_{k=1}^{n} a_k := \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

-

Bsp 3.34 (1) Für $|q|<1$ gilt

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$\lim S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} \quad (\cancel{da}\ \lim q^n = 0)$$

Somit konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ und deren Wert ist $\frac{1}{1-q}$.

(2) Die Harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist nach Bsp 3.23(i) divergent.

Oct 24-13
lek 2.

Für Reihen gibt es verschiedene praktische Konvergenz kriterium.

Das erste ergibt sich direkt aus dem Cauchy Kriterium (Satz 3.22)

Satz 3.35 (CK) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ einen Index $N(\varepsilon) \geq 1$ gibt so dass $\forall n \geq m > N(\varepsilon)$, $\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon$

Beweis: Übung

Die Reihe $\sum_1^\infty a_j$ konvergiert genau dann, wenn
$\left|\sum_m^n a_j\right| \to 0 \quad \forall\, n \geq m$

$\sum_1^\infty a_j$ konv $\iff S_n = \sum_1^n a_k$ konv. $\iff S_n$ Cauchy
$\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)$ s.d.
$\forall n > m > N(\varepsilon)\quad \underbrace{|S_n - S_{m-1}|}_{\sum_m^n a_k} < \varepsilon$

Korollar $\sum_{k=1}^\infty a_k$ konvergent $\Rightarrow |a_k| \to 0$.

Beweis: Nehmen wir $m = n$ in Satz 3.5

Das ist ein notwendiges Kriterium
aber nicht hinreichendes Kriterium.

Es gibt verschiedene Konvergenz Kriterium
- Notwendige - necessary
- Hinreichende - sufficient - (genügend)
- Notwendig und hinreichende

Bsp. $\sum_1^\infty k$ ist nicht konvergent, weil
$\lim_{k\to\infty} k \neq 0$. (notwendig)

$\sum \frac{1}{k}$ ist nicht konvergent obwohl $\lim \frac{1}{k} = 0$
(nicht genügend).

~~Im~~ Folgenden leiten wir aus Vergleich mit der geometrischen Reihe verschiedene Konvergenz Kriterien ab. (Quotientenkriterium, Wurzelkriterium).

Dies stützt sich auf

Satz 3.36. Seien $\sum_1^\infty a_k$, $\sum_1^\infty b_k$ Reihen wobei 1) es gibt k_0 so dass
$|a_k| \leq b_k \quad \forall k > k_0$

2) $\sum b_k$ konvergiert

Dann konvergiert $\sum_{k=1}^\infty a_k$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ und $N(\varepsilon) > k_0$ so dass

$$\sum_{k=m}^{n} b_k = \left|\sum_{k=m}^{n} b_k\right| \leq \varepsilon \quad \forall \underbrace{n,m > N(\varepsilon)}_{> k_0}$$

Dann folgt aus (1)

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=m}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=m}^{n} b_k \leq \varepsilon$$

Der Satz folgt aus dem C. K.

Bsp. ① $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = ?$

$$\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}} \quad \forall k \geq 1 \Rightarrow \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = 2$$

② $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = ?$

Zum erst zeigen wir dass $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ konvergiert.

Da $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \quad \forall k \geq 1$,

$$S_n = \sum_{1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n}$$

$\lim_{n \to \infty} S_n = 1$. d.h. $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$.

$\forall k \geq 1$ Da $(k+1)^2 > k(k+1)$

$$\frac{1}{(k+1)^2} < \frac{1}{k(k+1)}$$

Daraus folgt $\sum \frac{1}{(k+1)^2} \leq \sum \frac{1}{k(k+1)} = 1$

$\sum \frac{1}{(k+1)^2}$ konvergiert.

Satz 3.37 (Quotientenkriterium) Sei $a_k \neq 0$ $\forall k \geq 1$ (i) Falls $\limsup_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$

so ist $\sum a_k$ konvergent

(ii) Falls $\liminf \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1$ so ist

$\sum a_k$ divergent → Oct 27.13.

Beweis: (i) Sei $q_0 := \limsup \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$

$$\limsup_{k\to\infty} \left(\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{k\geq n} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \right)$$

Wähle $q \in \mathbb{R}$ mit $q_0 < q < 1$.

Dann gilt für genugend gross $n_0 \in \mathbb{N}$

$\forall n \geq n_0 \quad = \quad \left| \sup_{k \geq n} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| - q_0 \right| \leq \underbrace{(q - q_0)}_{\varepsilon}$

d.h. $\quad \sup_{k \geq n} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q \quad \forall n \geq n_0 .$

Insbesondere bei Wahl von $n = n_0$

$\forall k \geq n_0 \quad \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q ,$

Es folgt für $k \geq n_0$ die Abschätzung

$|a_k| = \left| \frac{a_k}{a_{k-1}} \cdot \frac{a_{k-1}}{a_{k+2}} \cdots \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \cdot a_{n_0} \right|$

$\leq q^{k-n_0} |a_{n_0}| = \underbrace{q^{n_0} |a_{n_0}|}_{C} q^k = C q^k$

Wir können nun $b_k = Cq^k$ setzen und

satz 3.36 anwenden.

Da $\sum b_k$ konvergiert, (da $|q| < 1$)

$\sum a_k$ konvergiert.

(II) Sei $q_0 := \liminf_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$

(falls es existiert)

Wähle $q \in \mathbb{R}$ mit $q_0 > q > 1$

Dann existiert n_0 mit

$$\forall k > n_0 : \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > \inf_{k>n_0} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq q$$

$$\left(\left|\inf_{k\geq n}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| - q_0\right| < \underbrace{q-q_0}_{\varepsilon} \quad \forall k > n_0 \right.$$

$$\left. \Rightarrow -q_0 + q < \inf\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| - q_0, \quad \forall k > n_0 \right)$$

Dann folgt analog wie in (I) dass

$$|a_k| = \left|\frac{a_k}{a_{k-1}} \cdot \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} \cdots \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}}\right| |a_{n_0}|$$

$$> q^{k-n_0}|a_{n_0}| > c\, q^k \quad \forall k > k_0$$

Insbesondere ist $\{|a_k| : k\geq 1\}$ nicht beschränkt $\Rightarrow \lim a_k \not\to 0 \Rightarrow \sum a_k$ divergiert.

Falls $\lim \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$ existiert, dann

$$\liminf \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \limsup \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = L$$

und hat man

Satz 3.36' Sei $a_k \neq 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$ und

sei $L = \lim_{k \to \infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$.

(i) Falls $L < 1$, so ist $\sum a_k$ konvergent

(ii) Falls $L > 1$, so ist $\sum a_k$ divergent

(iii) Falls $L = 1$, kann man daraus nichts ableiten.

Bsp.: ① $\sum_1^\infty \frac{n!}{n^n}$ konvergiert,

Da $\left|\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!}\right| = n+1 \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

$= \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n \to \frac{1}{e} < 1.$

Insbesondere $\frac{n!}{n^n} \to 0$ falls $n \to \infty$

d.h n^n wächst schneller als $n!$ (schon gesehen).

(2) Wir haben schon gesehen dass

$\sum \frac{1}{n^2}$ konvergiert. Aber quo. kriterium gibt kein information

da $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{(n+1)^2}{n^2}\right| \to 1$.

(3) Wir haben auch schon gesehen

dass $\sum \frac{1}{n}$ divergiert.

In diesem fall auch $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k+1}{k} \to 1$

d.h

Das! Quotientenkriterium ist nicht anwendbar.