

# Kapitel 4

## Stetigkeit

### 4.1 Grenzwerte von Funktionen

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  eine Teilmenge und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Abbildung.

#### Definition 4.1

$f$  hat an der Stelle  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  den *Grenzwert*  $a$ , falls für jede Folge  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $\Omega$  mit  $x_k \rightarrow x_0$  ( $k \rightarrow \infty$ ) gilt  $f(x_k) \rightarrow a$ .

Wir schreiben:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$

**Bemerkung:**  $x_0$  muss nicht im Definitionsbereich von  $f$  sein.

#### Definition 4.2

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  heisst *stetig* an der Stelle  $x_0 \in \Omega$ , falls:

1.  $f$  an der Stelle  $x_0$  definiert ist,
2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existiert, und
3.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

#### Definition 4.2'

Die Abbildung  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist im Punkt  $x_0 \in \Omega$  *stetig*, falls für jede gegen  $x_0$  konvergierende Folge  $(x_n)_{n \geq 1}$  in  $\Omega$ , die Folge  $(f(x_n))_{n \geq 1}$  zum Grenzwert  $f(x_0)$  konvergiert, d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right)$$

Anders gesagt:

- Grenzwerte von Folgen werden von stetigen Funktionen nicht verändert.

- Stetige Funktionen erhalten Grenzwerte von Folgen.

**Definition 4.2"**

Die Abbildung  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist auf  $\Omega$  *stetig* (oder *einfach stetig*, wenn der Kontext klar ist), falls  $f$  in jedem Punkt  $x \in \Omega$  stetig ist.

**Beispiele**

Mittels den Resultaten aus dem dritten Kapitel haben wir wichtige Beispiele von stetigen Funktionen.

- Diese Funktion ist auf ganz  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  stetig:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (a, b) &\mapsto (a + b) \end{aligned}$$

(Seien  $(a_n), (b_n)$  Folgen mit  $a = \lim a_n, b = \lim b_n$ . Dann ist die Folge  $(a_n + b_n)$  konvergent, und  $\lim a_n + b_n = a + b$ , nach Satz 3.8)

- Diese Funktion ist auf ganz  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  stetig:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (a, b) &\mapsto ab \end{aligned}$$

- Diese Funktion ist auf  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^x$  stetig:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^x &\rightarrow \mathbb{R} \\ (a, b) &\mapsto a/b \end{aligned}$$

- Aus wiederholter Anwendung von 1. und 2. ergibt sich die *polynomielle Funktion*:

heisst die wirklich so?

Sei  $n \geq 0, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} : p(x) := a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$

Die polynomielle Funktion ist stetig auf ganz  $\mathbb{R}$ .

- Die folgenden beiden Abbildungen sind stetig auf ihrem Definitionsbereich.

$$\begin{array}{ll} \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \\ (a, b) \mapsto (a + b) & (\lambda, a) \mapsto \lambda a \end{array}$$

- Die folgenden Abbildungen sind stetig.

$$\begin{array}{lll} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} & \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} & \mathbb{C} \times \mathbb{C}^x \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto \bar{z} & (z, w) \mapsto z * w & (z, w) \mapsto z/w \end{array}$$

what goes there? p130  
(week8sem1)

- Die folgenden Funktionen sind auf [...] stetig:

## KAPITEL 4. STETIGKEIT

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^d &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|x\|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{R} \\ z &\mapsto |z|\end{aligned}$$

- Die charakteristische Funktion von  $\mathbb{Q}$ :

$$\text{Sei } f(x) = \chi_{\mathbb{Q}} = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Sei  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  fest mit  $(x_k) \in \mathbb{Q}, x_k \rightarrow x$ . Dann ist  $f(x_k) = \chi(x_k) = 1 \not\rightarrow 0 = \chi(x)$ .  
(Zu  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  sei  $x_k$  die an der k-ten Nachkommastelle abgebrochene Dezimaldarstellung von  $x$ . Dann gilt  $x_k \in \mathbb{Q} \forall k \in \mathbb{N}$  und  $x_k \rightarrow x$ .)

- Sei

$$f: \begin{cases} x & x < 1 \\ x & x > 1 \end{cases}$$



$f$  ist in  $x = 1$  nicht stetig, weil  $f$  an der Stelle  $x = 1$  nicht definiert ist. In diesem Beispiel ist die Funktion  $f$  nicht stetig, aber sie ist eigentlich eine “gute” Funktion.

Does that really say gute?

no ozlem number...

### Definition (Struwe 4.1.3 (ii))

$\Omega \subset \mathbb{R}^d, f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, x_0 \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega$  so dass  $\exists (x_k) \in \Omega$  mit  $\lim x_k = x_0$ .

Dann ist  $f$  an der Stelle  $x_0$  *stetig ergänzbar*, falls  $a = \lim f(x_k)$  existiert. In diesem Fall setzen wir

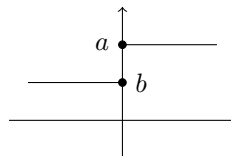
$$f(x_0) = a$$

Die durch  $f(x_0) = a$  ergänzte Funktion  $f$  ist offenbar stetig an der Stelle  $x_0$ .

offenbar  $\rightarrow$  offensichtlich?

- Diese stückweise konstante Funktion ist stetig an jeder Stelle  $x_0 \neq 0$ . Sie ist jedoch für  $a \neq b$  an der Stelle  $x_0 = 0$  nicht stetig ergänzbar. (Struwe Beispiel 4.1.3 (vii))

$$\begin{aligned}f: \mathbb{R}^x &\rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &= \begin{cases} a & \text{falls } x < 0 \\ b & \text{falls } x > 0 \end{cases}\end{aligned}$$



- Sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  monoton wachsend, d.h.  $\forall x, y \in (a, b)$  mit  $x \leq y$  folgt  $f(x) \leq f(y)$ . Sei ausserdem  $x_0 \in (a, b)$ . Dann existieren die *links- und rechtsseitigen Grenzwerte*

$$f(x_0^+) := \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0 \\ x \downarrow x_0}} f(x), \quad f(x_0^-) := \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0 \\ x \uparrow x_0}} f(x)$$

und  $f$  ist stetig an der Stelle  $x_0$  genau dann, wenn  $f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0)$ .

### Beweis

Wir behaupten, dass für jede Folge  $(y_n)_{n \geq 1}$  mit  $\{y_n : n \geq 1\} \subset (a, x_0)$  und  $\lim y_n = x_0$  die Folge  $(f(y_n))_{n \geq 1}$  konvergent und der linksseitige Limes  $l_-(x_0)$  unabhängig von der Wahl der Folge ist.

$$l_-(x_0) := \text{linksseitiges Limes} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$$

$$\begin{array}{c} \text{---} ( \text{---} | \text{---} ) \text{---} \\ a \qquad \qquad x_0 \qquad \qquad b \end{array}$$

Wir betrachten zunächst die “spezielle” Folge  $x_n = (x_0 - \frac{1}{n})_{n \geq r}$ . Hier ist  $r$  so gewählt, dass  $x_0 - \frac{1}{r} \geq a$ .

Dann ist  $(f(x_0 - \frac{1}{n}))_{n \geq r}$  monoton wachsend ( $x_0 - \frac{1}{n+1} > x_0 - \frac{1}{n}$  und  $f$  monoton wachsend) und  $(f(x_0 - \frac{1}{n}))_{n \geq r}$  beschränkt ( $f(a) < [...] < f(b)$ ).

missing in source material p134week8sem1

$$\text{Sei } l_- := \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_0 - \frac{1}{n})$$

Wir möchten zeigen, dass für jede  $(y_n) \subset (a, x_0)$  mit  $\lim y_n = x_0$   $\lim f(y_n)$  existiert und  $\lim f(y_n) = l_-$ .

= l\_- oder = l.?

Da es für jedes  $x < x_0$  ein  $n$  gibt, mit  $x \leq x_0 - \frac{1}{n}$ , folgt

$$f(x) \leq f(x_0 - \frac{1}{n}) \leq l_-$$

Sei nun  $(y_n)_{n \geq 1}$  beliebig in  $(a, x_0)$  mit  $\lim y_n = x_0$ . Sei  $\varepsilon > 0$ ,  $(y_n < x_0)$  und  $n_0(\varepsilon)$  mit

$$l_- - \varepsilon < f(x_0 - \frac{1}{n}) \leq l_- \quad \forall n > n_0(\varepsilon)$$

Insbesondere

$$l_- - \varepsilon < f(x_0 - \frac{1}{n_0(\varepsilon)}) \leq l_-$$

Sei jetzt  $n_1(\varepsilon) = n_1(n_0(\varepsilon)) > 0$ , so dass

$$x_{n_0(\varepsilon)} = x_0 - \frac{1}{n_0(\varepsilon)} < y_n < x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \forall n \geq n_1(\varepsilon)$$

$$((y_n) \subset (a, x_0), \lim y_n = x_0)$$

## KAPITEL 4. STETIGKEIT

Da  $f$  monoton ist, folgt

$$l_- - \varepsilon < f(x_0 - \frac{1}{n_0(\varepsilon)}) \leq f(y_n) \leq l_- = \lim f(x_n)$$

Insbesondere  $\lim f(y_n) = l_-$ .

Der Beweis für  $L_+$  verläuft ganz analog.

Nun zur Stetigkeit: Es gilt immer

$$l_-(x_0) \leq f(x_0) \leq l_+(x_0)$$

Falls  $l_-(x_0) < l_+(x_0)$ , sei  $(t_n)_{n \geq 1}$  wie folgt definiert:

$$t_n = \begin{cases} x_0 - \frac{1}{n} & n \text{ gerade} \\ x_0 + \frac{1}{n} & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Dann gilt  $\lim t_n = x_0$ . Aber  $f(t_{2n+1}) - f(t_n) \geq l_+(x_0) - l_+(x_0) > 0$ , woraus folgt, dass  $(f(t_n))_{n \geq 1}$  nicht konvergent.

Falls  $l_-(x_0) = l_+(x_0)$  folgt die Stetigkeit sofort.

dest? p 135 bottom

### Satz 4.3

Sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  monoton wachsend. Dann ist die Menge der Unstetigkeitspunkte von  $f$  entweder endlich oder abzählbar.

### Beweis

Sei  $U(f) = \{x \in (a, b) : f \text{ ist nicht stetig an } x\}$ . Dann ist  $\forall x \in U(f), \quad l_-(x) < l_+(x)$  und wir wählen ein  $g(x) \in (l_-(x), l_+(x))$ . Falls  $x_1 < x_2$  in  $U(f)$ , folgt  $l_+(x_1) < l_-(x_2)$  und somit  $g(x_1) < g(x_2)$ . Damit ist  $g : U(f) \rightarrow \mathbb{R}$  injektiv. Stetigkeit verträgt sich gut mit den üblichen Operationen auf Funktionen.

unreadable.. p136 mid

same unreadable character

### Satz 4.4

Seien  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $x_0 \in \Omega$ . Falls  $f$  und  $g$  in  $x_0$  stetig sind, so sind es auch  $f + g$  und  $\alpha f$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

### Korollar 4.5

Falls  $f, g$  auf  $\Omega$  stetig sind, so sind es auch  $f + g$  und  $\alpha f$ .

### Definition 4.6

$$C(\Omega, \mathbb{R})$$

bezeichnet die Menge der stetigen Abbildungen  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Nach Korollar 4.5 ist es ein Vektorraum.

**Satz 4.7**

Seien  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, \Omega \subset \mathbb{R}^d$  und  $g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $f(\Omega) \subset \Gamma$  und  $x_0 \in \Omega, y_0 = f(x_0) \in \Gamma$ . Falls  $f$  in  $x_0$  und  $g$  in  $y_0$  stetig sind, folgt, dass  $g \circ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  in  $x_0$  stetig ist.

**Beweis**

Sei  $(t_n)_{n \geq 1}$  in  $\Omega$  mit  $\lim t_n = x_0$ . Da  $f$  stetig ist,  $\lim f(t_n) = f(x_0) = y_0$ , und aus der Stetigkeit von  $g$  folgt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(f(t_n)) = g(y_0) = (g \circ f)(x_0)$$

**Korollar 4.8**

Falls  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d, f(\Omega) \subset \Gamma$  und  $g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^m$ , auf  $\Omega$  bzw auf  $\Gamma$  stetig sind, so folgt, dass  $g \circ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  auf  $\Omega$  stetig ist.

## 4.2 Stetige Funktionen

In diesem Abschnitt behandeln wir die erste der fundamentalen Eigenschaften von stetigen Funktionen, nämlich, dass eine auf einem endlichen Intervall  $[a, b]$  (Endpunkte eingeschlossen) stetige Funktion immer ein Maximum und Minimum besitzt. Dies verallgemeinern wir dann auf Abbildungen von  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  nach  $\mathbb{R}^n$ , wobei  $\Omega$  eine spezielle Eigenschaft haben muss (Kompaktheit).

**Satz 4.9**

Seien  $-\infty < a \leq b < \infty$  und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist  $f([a, b])$  in  $\mathbb{R}$  beschränkt und es gibt  $c_-, c_+ \in [a, b]$  mit

$$\begin{aligned} f(c_+) &= \sup \{f(x) : x \in [a, b]\} \\ f(c_-) &= \inf \{f(x) : x \in [a, b]\} \end{aligned}$$

d.h. Supremum und Infimum werden angenommen.

**Beweis**

1.  $f([a, b])$  ist nach oben beschränkt (Indirekter Beweis)

Falls nicht, so gibt es  $\forall n \in \mathbb{N}$  ein  $t_n \in [a, b]$  mit  $f(t_n) \geq n$ .  
 $(t_n)_{n \geq 1}$  ist beschränkt, nach Bolzano-Weierstrass. Sei  $(t_{l(n)})$  eine konvergente Teilfolge mit  $\lim t_{l(n)} = x$ .  
 Dann ist  $x \in [a, b]$ , da  $a \leq t_n \leq b$   
 (Satz:  $(a_n), (b_n)$  konvergente Folgen mit  $\lim a_n = a, \lim b_n = b$ . Falls  $a_n \leq b_n$ , folgt  $a \leq b$ .)  
 Aus der Stetigkeit von  $f$  folgt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n) = f(x)$ . Insbesondere ist  $f(t_{l(n)})$  beschränkt, was im Widerspruch zu  $f(t_{l(n)}) \geq l(n)$  steht.

$\implies f$  ist nach oben beschränkt.

## KAPITEL 4. STETIGKEIT

2.  $f$  ist nach unten beschränkt (analog)

Sei  $M := \sup \{f(x) : x \in [a, b]\}$ , welches als Folge von 1. existiert.  
Sei für jedes  $n \geq 1$   $x_n \in [a, b]$  mit

$$M - \frac{1}{n} < f(x) \leq M \quad (*)$$

$(M - \frac{1}{n} \text{ ist kein Supremum} \implies \exists x_n \text{ mit } M - \frac{1}{n} < f(x_n))$

3.  $(x_n) \subset [a, b]$  beschränkt.

Sei nach Bolzano-Weierstrass  $(x_{l(n)})_{n \geq 1}$  eine konvergente Teilfolge mit Limes  $c_+$ . Aus der Stetigkeit von  $f$  folgt:

$$f(c_+) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{l(n)})$$

Aus  $(*)$  folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{l(n)}) = M$$

d.h.  $\exists c_+ \in [a, b]$  mit

$$f(c_+) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{l(n)}) = M$$

4. Infimum ist ähnlich.

### Bemerkung

Satz 4.9 kann man als eine Eigenschaft des Intervalls  $[a, b]$  auffassen. Sie gilt zum Beispiel nicht für  $(0, 1]$  wie das Beispiel der auf  $(0, 1]$  stetigen Funktion  $f(x) = \frac{1}{x}$  zeigt.



Die grundlegende Eigenschaft ist Kompaktheit.

#### Definition 4.10

Eine Teilmenge  $K \subset \mathbb{R}^d$  heisst *kompakt*, falls jede Folge  $(x_n)_{n \geq 1}$  von Punkten aus  $K$  einen Häufungspunkt *in*  $K$  besitzt, d.h. falls jede Folge in  $K$  eine *in*  $K$  konvergente Teilfolge hat.

**Beispiel**

1.  $(0, 1]$  ist nicht kompakt:  
 $(\frac{1}{n})_{n \geq 1} \subset (0, 1]$  konvergiert gegen  $0 \notin (0, 1]$ .
2.  $[a, b]$  ist kompakt.  
 Sei  $(t_n)_{n \geq 1}$  eine Folge mit  $a \leq t_n \leq b$ .  $(t_n)$  ist beschränkt, nach Bolzano-Weierstrass sei  $(t_{l(n)})$  eine konvergente Teilfolge mit Limes  $l$ . Dann folgt aus  $a \leq t_n \leq b$   $(t_{l(n)}) \quad \forall n \geq 1$ , dass

$$a \leq \lim t_{l(n)} \leq b$$

D.h.  $l \in [a, b]$ .

**Lemma 4.11**

Falls  $K \subset \mathbb{R}^d$  kompakt ist, ist es beschränkt und besitzt zudem ein Minimum und Maximum.

**Beweis**

Sonst gibt es zu jedem  $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$  ein  $x_n \in K$  mit  $\|x_n\| \geq n$ . Dann kann aber  $(x_n)_{n \geq 1}$  keine konvergente Teilfolge besitzen:  $(\|x_{l(n)}\| > l(n))$ .

$\implies K$  ist beschränkt.

Sei  $s := \sup K$ . Dann gibt es  $\forall n \geq 1, k_n \in K$  mit

$$s - \frac{1}{n} < k_n \leq s$$

Insbesondere gilt  $\lim k_n = s$ . Da  $K$  kompakt ist, hat  $k_n$  eine in  $K$  konvergierende Teilfolge. Daraus folgt, dass  $s \in K$ .

**Beispiel**

$S^d := \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : \|x\| = 1\}$ , die  $d$ -dimensionale Sphäre, ist kompakt.

**Beweis**

Sei  $(x_n)_{n \geq 1} \subset S^d$ , dann ist diese Folge offensichtlich beschränkt, besitzt sie (nach Bolzano-Weierstrass) eine konvergente Teilfolge  $(x_{l(n)})_{n \geq 1}$ . Sei  $p \in \mathbb{R}^{d+1}$  deren Limes. Da die Funktion  $f(x) := \|x\|$  stetig ist, folgt

$$\|p\| = f(p) \stackrel{\text{defn}}{=} f(\lim x_{l(n)}) \stackrel{f \text{ stetig}}{=} \lim f(x_{l(n)}) = 1$$

$$\implies p \in S^d$$

Die Verallgemeinerung von Satz 4.9 ist

**Satz 4.12**

1. Sei  $K \subset \mathbb{R}^d$  kompakt und  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetige Abbildung. Dann ist  $f(K) \subseteq \mathbb{R}^n$  eine kompakte Teilmenge.
2.  $f$  nimmt ihr Supremum und Infimum an, d.h. es gibt  $c_-, c_+ \in K$  mit

$$f(x_-) \leq f(x) \leq f(x_+) \quad \forall x \in K$$



## KAPITEL 4. STETIGKEIT

### Beweis

1. Sei  $(y_n)_{n \geq 1}$  eine beliebige Folge in  $f(K)$ . Wir müssen zeigen, dass es eine konvergente Teilfolge mit Limes in  $f(K)$  gibt. Sei  $(x_n) \in K$  mit

$$f(x_n) = y_n, n \geq 1$$

Dann ist  $(x_n)_{n \geq 1}$  eine Folge in  $K$ . Da  $K$  kompakt ist, gibt es  $p \in K$  und  $(x_{l(n)})$ , eine konvergente Teilfolge mit  $\lim x_{l(n)} = p$ .  
Aus der Stetigkeit von  $f$  folgt

$$f(p) = f(\lim x_n) \stackrel{f \text{ stetig}}{=} \lim f(x_{l(n)}) = \lim y_{l(n)}$$

D.h.  $y_{l(n)}$  ist eine Teilfolge von  $y_n$  mit Limes  $f(p) \in K$ .  
 $\Rightarrow f(K)$  ist kompakt.

2. Da  $f(K)$  kompakt ist, (nach 1.), ist  $f(K)$  beschränkt, und besitzt zudem ein Minimum und Maximum (nach Lemma 4.11).

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \exists y_+, y_- \in f(K), \text{ mit } y_+ &= \sup f(K) \\ &y_- = \inf f(K) \\ \exists c_+, c_- \in K, \text{ mit } y_+ &= f(c_+) \\ &y_- = f(c_-) \end{aligned}$$

## 4.3 Norm auf $\mathbb{R}^d$

Der Distanzbegriff auf  $\mathbb{R}^d$  kommt vom Skalarprodukt. Es gibt interessante, andere Arten einen Distanzbegriff einzuführen, nämlich mit dem Begriff der Norm.

In the source notes, this is 4.4, but there is no 4.3 that I can find...

### Definition 4.13

Eine *Norm* auf  $\mathbb{R}^d$  ist eine Abbildung

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$$

mit den folgenden Eigenschaften:

1. *Definitheit*:  $\|x\| \geq 0$  mit Gleichheit genau dann wenn  $x = 0$ .
2. *Positive Homogenität*:  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^d$
3. *Dreiecks-Ungleichung*:  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d$

### Beispiel 4.14

- 1.

$$\|x\|_2 = \left( \sum_{i=1}^d |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad x = (x_1, \dots, x_d)$$

kommt vom Skalarprodukt.

2. Für  $1 \leq p < \infty$  sei

$$\|x\|_p := \left( \sum_{i=1}^d |x_i^p| \right)^{\frac{1}{p}}$$

und  $\|x\|_\infty = \max \{|x_i| : 1 \leq i \leq d\}$ , dann sind  $\|\cdot\|_p, 1 \leq p \leq \infty$  Normen auf  $\mathbb{R}^d$ .

Zwischen diesen verschiedenen Normen haben wir die folgenden Verhältnisse:

$$\|x\|_\infty = \max |x_i| \leq \|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^d |x_i|^p} \leq d \|x\|_\infty \quad (*)$$

Bild von  $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^d |x_i| \leq 1$



$\|x\|_2 = \sqrt{\sum x_i^2} \leq 1$



$\max_i \{|x_i|\} = \|x\|_\infty \leq 1$



**Definition 4.15**

Zwei Normen  $\|\cdot\|^{(1)}, \|\cdot\|^{(2)}$  auf  $\mathbb{R}^d$  heißen *äquivalent*, falls es  $c_1, c_2 > 0$  gibt, mit

$$c_1 \|x\|^{(1)} \leq \|x\|^{(2)} \leq c_2 \|x\|^{(1)} \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

**Bemerkung:** Sei  $C = \max \{C_2, \frac{1}{C_1}\}$ , dann gilt  $(\frac{1}{C})\|x\|^{(1)} \leq \|x\|^{(2)} \leq C\|x\|^{(1)}$

**Beispiel**

Die Normen  $\|\cdot\|_p$   $1 \leq p \leq \infty$  sind wegen (\*) äquivalent.

**Bemerkung 4.16**

Äquivalente Normen definieren dieselben “offenen Mengen” via Distanzfunktion.

**Beweis**

Für die Normkugeln

$$B_r^{(1)}(x_0) := \{x : \|x - x_0\|^{(1)} < r\}$$

gilt mit  $c_1 \|x\|^{(1)} \leq \|x\|^{(2)} \leq c_2 \|x\|^{(1)}$

$$B_{rc_1}^{(1)}(x_0) \subset B_r^{(2)}(x_0) \subset B_{c_2 r}(x_0)$$

$\implies x_0 \in \Omega$  innerer Punkt von  $\Omega$  bezüglich  $\|\cdot\|^{(2)} \iff x_0 \in \Omega$  innerer Punkt von  $\Omega$  bezüglich  $\|\cdot\|^{(1)}$

Auf  $\mathbb{R}^d$  haben wir

**Satz 4.17**

Je zwei Normen auf  $\mathbb{R}^d$  sind äquivalent.

**Beweis**

Es genügt zu zeigen, dass eine beliebige Norm  $\|\cdot\|$  zu  $\|\cdot\|_2$  äquivalent ist.

Seien  $x = \sum x_i e_i, y = \sum y_i e_i$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \|x - y\| &= \left\| \sum_{i=1}^d (x_i - y_i) e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^d |x_i - y_i| \|e_i\| \leq \|x - y\| \underbrace{\sum_{i=1}^d \|e_i\|}_{:=C} \\ &\stackrel{(*)}{\leq} C' \|x - y\|_2 \end{aligned}$$

Also folgt, dass  $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto \|x\|$  stetig ist.

marked as skip? p152  
week 9 sem1

Layout imperfect, but  
hard to make better..  
p153 week9 sem1

Da  $S^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_2 = 1\}$  kompakt ist, folgt, dass es  $c_+, c_- \in S^{d-1}$  gibt, mit  $k_- := \|c_-\| \leq \|x\| \leq \|c_+\| := k_+ \forall x \in S^{d-1}$ . Da  $c_0 \neq 0$  folgt  $k_- > 0$ .

Sei  $x \neq 0$  allgemein ( $C_- \in S^{d-1}$ ), dann ist  $y := \frac{x}{\|x\|_2} \in S^{d-1}$  also  $k_- \leq \left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\| < k_+$ , woraus

$$k_- \|x\|_2 \leq \|x\| \leq k_+ \|x\|_2$$

folgt.

## 4.4 $\varepsilon - \delta$ Kriterium für Stetigkeit

4.5 in source notes.  
what to do?

Wir haben das folgende Kriterium für Stetigkeit an der Stelle  $x_0$ :

### Satz 4.18

Sei  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  eine Abbildung,  $x_0 \in \Omega$ . Folgende Eigenschaften sind äquivalent:

1.  $f$  ist stetig an der Stelle  $x_0$ .  
D.h. für jede gegen  $x_0$  konvergierende Folge  $(x_n) \subset \Omega$  konvergiert die Folge  $f(x_n)$  gegen  $f(x_0)$ .
2. Für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es  $\delta > 0$ , so dass für alle  $x \in \Omega$  mit  $|x - x_0| < \delta$  gilt:

$$|\delta(x) - \delta(x_0)| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in \Omega, \|x - x_0\| < \delta \implies \|\delta(x) - \delta(x_0)\| < \varepsilon$$

### Beweis 4.18

(1)  $\Rightarrow$  (2) (Indirekt)

Wir nehmen also an, dass (2) nicht gilt, d.h. es gibt  $\varepsilon > 0$ , so dass für jedes  $\delta > 0$  einem Punkt  $x_\delta$  gibt mit

$$\|x_\delta - x_0\| < \delta \text{ und } \|f(x_\delta) - f(x_0)\| > \varepsilon$$

$$\left( \begin{array}{l} \neg (\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \Omega : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon) \\ = (\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in \Omega : |x - x_0| < \delta \not\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon) \\ \text{d.h.} \\ \exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x_\delta \in \Omega : |x_\delta - x_0| < \delta \text{ und } |f(x_\delta) - f(x_0)| > \varepsilon \end{array} \right)$$

Sei  $\varepsilon > 0$ . Wir wählen jetzt  $\delta_n = \frac{1}{n}$ , dann gibt es  $x_n := (x_{\delta_n})_{n \in \mathbb{N}}$ , eine Folge in  $\Omega$ , mit  $\lim x_n = x_0$ . Aber die Folge  $(f(x_n))$  kann offensichtlich nicht gegen  $f(x_0)$  konvergieren (Da  $|f(x_n) - f(x_0)| > \varepsilon$ ), d.h.  $f$  ist nicht stetig in  $x_0$ .

(2)  $\Rightarrow$  (1) Sei  $(x_n)_{n \geq 1}$  eine Folge in  $\Omega$  mit Grenzwert  $x_0$ . Wir möchten zeigen, dass  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ . Sei  $\varepsilon > 0$ , nach (2) sei  $\delta_\varepsilon > 0$ , so dass  $\forall x \in \Omega$  mit

$$|x - x_0| < \delta_\varepsilon \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Da  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ , gibt es  $N \geq 1$ , so dass

$$\|x_n - x_0\| < \delta \quad \forall n \geq N_\delta$$

## KAPITEL 4. STETIGKEIT

(Hier hängt  $N$  von  $\delta$  und also im Endeffekt von  $\varepsilon$  ab). Aus (2) folgt

$$\|f(x_n) - f(x_0)\| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_\delta$$

Dies zeigt  $\lim f(x_n) = f(x_0)$

■

### Beispiel

1.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x + 8$ . Dann  $f$  ist stetig auf  $\mathbb{R}$ . Sei  $\varepsilon > 0$ , sei  $x_0 \in \mathbb{R}$

$$|f(x) - f(x_0)| = |(3x + 8) - (3x_0 + 8)| = 3|x - x_0| \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Sei  $\varepsilon > 0$ . Wenn wir  $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$  wählen, dann week9p156-1

$$\text{CAN'T READ, } |x - x_0| < \delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

In diesem Beispiel hängt  $\delta$  nur von  $\varepsilon$  ab. Das nächste Beispiel zeigt, dass  $\delta$  nicht nur von  $\varepsilon$ , sondern auch von  $x_0$  abhängen kann.

- 2.

$$f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$$

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

ist stetig auf  $(0, \infty)$ . Sei  $x_0 \in (0, \infty)$

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| = \left| \frac{x_0 - x}{x \cdot x_0} \right|$$

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow -\delta < x - x_0 < \delta \Rightarrow x > x_0 - \delta$$

$$|f(x) - f(x_0)| = \frac{|x_0 - x|}{|x||x_0|} < \frac{|x - x_0|}{|x_0||x_0 - \delta|}$$

Sei  $\delta < \frac{x_0}{2}$ , dann folgt

$$\delta < \frac{x_0}{2} \Rightarrow x_0 - \delta > x_0 - \frac{x_0}{2} > \frac{x_0}{2}$$

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{|x_0 - x|}{|x||x_0 - \delta|} \leq \frac{|x - x_0| \cdot 2}{|x_0|^2} \leq \frac{2\delta}{|x_0|}$$

Sei

$$\delta_{\varepsilon; x_0} = \min \left\{ \frac{x_0}{2}, \frac{\varepsilon |x_0|^2}{2} \right\}$$

Dann

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon |x_0|^2}{2} \cdot \frac{2}{|x_0|^2} = \varepsilon$$

## 4.5 Zwischenwertsatz

### Satz 4.19

Seien  $a < b$  in  $\mathbb{R}$  und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion, mit  $f(a) \leq f(b)$  (oder  $f(a) \geq f(b)$ ). Dann gibt es zu jedem  $y \in [f(a), f(b)]$  ein  $x \in [a, b]$  mit  $f(x) = y$ .

### Beweis

Die Idee ist einfach. Wir benutzen ein Approximationsverfahren (In diesem Fall ein Bisektionsverfahren). Wir definieren zwei monotone Folgen

$$a = a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq b_2 \leq b_1 = b$$

mit  $a_n \nearrow, b_n \searrow, \lim a_n = \lim b_n = c$  und

$$f(a_n) < y \leq f(b_n)$$

Dann folgt aus der Stetigkeit von  $f$ , dass

$$\lim f(a_n) = \lim f(b_n) = f(c) = y$$



Fall 1:

Falls  $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq y$ , setzen wir:

$$\begin{aligned} a_2 &= a \\ b_2 &= \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$



Fall 2:

Falls  $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < y$ , setzen wir:

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{a+b}{2} \\ b_2 &= b \end{aligned}$$

Auf jeden Fall gibt es

1.  $a_1 \leq a_2 < b_2 \leq b_1$
2.  $(b_2 - a_2) = \frac{1}{2}(b_1 - a_1)$
3.  $f(a_2) < y \leq f(b_2)$

Wir iterieren jetzt dieses Verfahren. Wir nehmen an, dass wir Folgen nach  $(k-1)$ -Schnitten definiert haben

## KAPITEL 4. STETIGKEIT

1.  $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \cdots \leq a_k < b_k \leq b_{k-1} \cdots \leq b_1$
2.  $(b_k - a_k) = \frac{1}{2^{k-1}} (b_1 - a_1)$
3.  $f(a_k) < y \leq f(b_k)$

Nun unterscheiden wir wieder zwei Fälle

Fall 1:

$$f\left(\frac{a_k + b_k}{2}\right) \geq y$$

dann definieren wir  $a_{k+1} = a_k$  und  $b_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2}$

Fall 2:

$$f\left(\frac{a_k + b_k}{2}\right) < y$$

dann definieren wir  $a_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2}$  und  $b_{k+1} = b_k$ . Dann ist immer

1.  $a_k \leq a_{k+1} < b_{k+1} \leq b_k$
2.  $b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{1}{2} (b_k - a_k) = \frac{1}{2^k} |b_1 - a_1|$
3.  $f(a_{k+1}) < y \leq f(b_{k+1})$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion erhalten wir zwei Folgen  $(a_n)_{n \geq 1}$ ,  $(b_n)_{n \geq 1}$ , die die Eigenschaften 1., 2. und 3. erfüllen.  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  sind monoton und beschränkt  $\Rightarrow$  gibt es

$$\bar{a} = \lim a_k \leq \bar{b} = \lim b_k$$

Wegen 2.

$$\lim |a_k - b_k| = \lim \left| \frac{b_1 - a_1}{2^k} \right| = 0$$

d.h.  $\lim a_k = \lim b_k$ . Sei  $c \in [a, b]$  dieser Wert. Aus Stetigkeit von  $f$  folgt

$$f(c) = \lim f(a_n) = \lim f(b_n)$$

Aus 3. folgt

$$\begin{aligned} f(a_n) < y &\Rightarrow f(c) \leq y \\ g \leq f(b_n) &\Rightarrow y \leq f(c) \end{aligned}$$

also  $f(c) = y$ .

■

### Korollar 4.20

1. Sei

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

ein Polynom mit reellen Koeffizienten, so dass  $a_n \neq 0$  und  $n$  ungerade ist. Dann besitzt  $p$  mindestens eine reelle Nullstelle.

**Beweis**

Sei

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{p(x)}{a_n} \\ &= x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot x^{n-1} + \dots + \frac{a_0}{a_n} \\ &= x^n \left[ 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{x} + \dots + \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{x^n} \right] \end{aligned}$$

Dann

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^5} = 0$$

Folgt insbesondere, dass es  $c > 0$  gibt so dass für  $|x| \geq c$

$$1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{x} + \dots + \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{x^n} \geq \frac{1}{2}$$

Folglich ist:

$$q(c) \geq c^n \frac{1}{2} > 0$$

$$(n = \text{ungerade}) \quad q(-c) \leq -c^n \frac{1}{2} < 0$$

Also gibt  $x_0 \in [-c, c]$  mit  $q(x_0) = 0$

■

2. Eine reelle  $3 \times 3$  Matrix besitzt immer einen reellen Eigenwert.

**Satz 4.21**

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, streng monoton wachsend (d.h.  $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ ).  
Dann ist

$$\text{Bild}(f) = [c, d] = [f(a), f(b)]$$

$f : [a, b] \rightarrow [c, d]$  ist bijektiv und  $f^{-1} : [c, d] \rightarrow [a, b]$  ist stetig.

**Beweis**

1.  $f$  streng monoton wachsend, d.h. falls  $x \neq y$ , dann ist  $f(x) \neq f(y) \Rightarrow f$  Injektiv.

Zwischenwertsatz  $\Rightarrow f$  surjektiv.  $c = f(a) < f(b) = d$ , Sei  $y \in [c, d]$ , ZWS  
 $\Rightarrow \exists x \in (a, b)$  mit  $f(x) = y \Rightarrow f$  ist bijektiv.

2.  $f^{-1}$  ist stetig: Sei  $y \in [c, d]$  und sei  $(y_0) \in [c, d]$  eine Folge mit  $\lim y_n = y_0$ .  $f$  bijektiv,  $\exists x_n, x_0 = f^{-1}(y_0)$ ,  $(x_n)$  beschränkt. Sei  $f^{-1}(y_{l(n)})$  eine beliebige konvergente Teilfolge und  $x$  deren Grenzwert

$$\lim f^{-1}(y_{l(n)}) = x$$



## KAPITEL 4. STETIGKEIT

$$f \text{ stetig} \Rightarrow \lim f(f^{-1}(y_{l(n)})) = f(f^{-1}(y_{l(n)})) = f(x)$$

aber

$$\lim f(f^{-1}(y_{l(n)})) = \lim y_{l(n)}$$

$$\Rightarrow \lim y_{l(n)} = f(x), y_n \text{ ist aber auch konvergent}$$

$$\Rightarrow \lim y_{l(n)} = f(x), \text{ aber } \lim y_n = y_0$$

$$\Rightarrow y_0 = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y_0) = x_0$$

$$\Rightarrow \text{Jede Teilfolge von } (x_0) \text{ hat denselben Häufungspunkt } x_0.$$

$$\Rightarrow \limsup x_n = x_0 = \liminf x_n, \text{ also } \lim f^{-1}(y_n) = \lim x_n = x_0 = f^{-1}(y_0) \Rightarrow f \text{ stetig}$$

■

### Korollar 4.22

Sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und streng monoton wachsend mit monotonem Limes

$$-\infty < c := \lim_{x \downarrow a} f(x) < \lim_{x \uparrow b} f(x) =: d < \infty$$

dann ist  $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$  bijektiv und  $f^{-1}$  ist stetig.

### Korollar 4.22

Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Die Potenzfunktion  $f(x) = x^n$  ist auf ganz  $\mathbb{R}$  stetig. Sie ist auf  $(0, \infty)$  streng monoton wachsend mit Bild  $(0, \infty)$ . Die Umkehrfunktion

$$(0, \infty) \rightarrow (0, \infty) \\ x \rightarrow \sqrt[n]{x}$$

ist stetig.

### Beweis

$$y^n - x^n = (y - x) \underbrace{(y^{n-1} + y^{n-2}x + \dots x^{n-1})}_{>0}$$

Für  $0 < x, y < \infty$ ,  $y^{n-1} + y^{n-2}x + \dots x^{n-1} > 0$ . Also folgt  $x < y \Rightarrow x^n < y^n$ , d.h.  $f$  streng monoton wachsend

■

### Satz 4.23

Die Funktion  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig, streng monoton wachsend mit

$$\text{Bild}(\exp) = \exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$$

#### Definition 4.24

Die Umkehrfunktion von  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  wird mit  $\log : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  bezeichnet

Dann

**Korollar 4.25**

$\log : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  hat folgende Eigenschaften

1. ist strikt monoton wachsend und stetig
2.  $\log(1) = 0$
3.  $\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$

**Beweis Satz 4.23**

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

ist absolut konvergent auf ganz  $\mathbb{R}$

1.

$$\exp(x) = \exp\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left(\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \geq 0$$

2. Falls  $x \geq 0$ , ist

$$\exp(x) > 1 > 0 \quad (\exp(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0)$$

3. Wegen

$$\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} \neq 0$$

$$\exp(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

d.h.

$$\exp(\mathbb{R}) \subset (0, \infty)$$

4.

$$\exp(y) - \exp(x) = \exp(x) [\exp(y - x) - 1]$$

Falls  $x < y$ , so ist  $\exp(y - x) > 1$  und somit  $\exp(y) > \exp(x)$  (da  $\exp(x) > 0$ ), d.h.  $\exp$  ist streng monoton wachsend.

5. Zur Stetigkeit: Sei  $x = x_0 + h$ ,  $0 < h < 1$

$$\exp(x) - \exp(x_0) = \exp(x_0) (\exp(h) - 1)$$

da

$$|\exp(h) - 1| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^k}{k!} \right| \leq \left| \sum_{k=1}^{\infty} |h^k| \right| = \frac{|h|}{1 - |h|} \rightarrow 0$$

Also für  $x = x_0 + h \rightarrow x_0$ ,  $\exp(x) - \exp(x_0) \rightarrow 0$  und die Funktion  $\exp$  ist stetig

$$\exp(x) \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow \infty) \quad \text{und} \quad \exp(x) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow -\infty)$$

do 3 and 4 belong together?? in your notes you gave number 3 to two different ones, page 166 bottom

■

$$\begin{aligned}\exp(\log(x)) &= x \\ \exp(\log(x) + \log(y)) &= \exp(\log(x)) \cdot \exp(\log(y)) \\ &= xy\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\log(x) + \log(y) = \log(xy)}$$

## 4.6 Gleichmässige Stetigkeit

Sei  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion auf  $\Omega$ , d.h.

$$\forall x_0 \in \Omega, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$\left( \begin{array}{l} f \text{ ist nicht stetig auf} \\ \Omega \Leftrightarrow \exists x_0 \in \Omega, \exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in \Omega : |x - x_0| < \delta \text{ und } |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon \end{array} \right)$$

### Definition 4.24

Gleichmässig stetig:

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  heisst gleichmässig stetig, falls für jedes  $\varepsilon > 0$  es ein  $\delta > 0$  gibt, so dass  $\forall x, x_0 \in \Omega$

$$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Stetig:

$\forall x_0 \in \omega, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_{x_0, \varepsilon} > 0, \forall x \in \Omega:$

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Gleich stetig:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall x, x_0 \in \Omega:$

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Stetig:  $\delta$  ist abhängig von  $\varepsilon$  und  $x_0$ .

Gleichmässig stetig:  $\delta$  ist abhängig von  $\varepsilon$ , aber unabhängig von  $x_0$ .

### Beispiel 4.25

I)  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist nicht gleichmässig stetig

$$|\exp(x) - \exp(x_0)| = |\exp(x - x_0) - 1| \exp(x_0)$$

Falls  $x - x_0 = \pm\delta$ ,  $\delta \neq 0$  und  $x_0 \rightarrow \infty$  dann

$$|\exp(x) - \exp(x_0)| \rightarrow \infty$$

II)

$$\begin{aligned} f(x) : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow 2x + 5 \end{aligned}$$

Dann ist  $f$  gleichmässig stetig

**Beweis**

Sei  $\varepsilon > 0$ ,  $x_0, x \in \mathbb{R}$ . Dann

$$|f(x) - f(x_0)| = |2x + 5 - 2x_0 + 5| = 2|x - x_0|$$

$\Rightarrow$  Wenn wir  $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$  wählen, dann

$$|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

■

III)

$$\begin{aligned} f : \Omega &\rightarrow \Omega \quad \Omega = (0, \infty) \\ x &\rightarrow x^2 \end{aligned}$$

$f$  ist stetig, aber nicht gleichmässig stetig.

i)  $f$  stetig: Sei  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$

$$|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |(x - x_0)(x + x_0)|$$

Sei  $|x - x_0| < \varepsilon < 1$ . Dann,  $x < x_0 + 1 := a$ . Dann  $x, x_0 + 1 < a$

$$|x^2 - x_0^2| = |x - x_0||x + x_0| < 2a|x - x_0|$$

Wenn wir  $\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2a}\right)$  wählen, dann

$$|x - x_0^2| < 2a|x - x_0| \leq \varepsilon$$

**Bemerkung**

$f$  ist abhängig von  $\varepsilon$ , und  $a$  ist  $x_0 + 1$  abhängig von  $x_0$ .

ii)  $f$  ist nicht gleichmässig stetig, d.h.

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x_0 \in \Omega, \exists x \in \Omega : |x - x_0| < \delta \text{ und } |x^2 - x_0^2| \geq \varepsilon$$

Sei  $\varepsilon = 1$ ,  $\delta > 0$ ,  $x_0 = \frac{1}{\delta}$  und  $x = x_0 + \frac{\delta}{2}$ . Dann  $|x - x_0| < \frac{\delta}{2} < \delta$  aber

$$|x^2 - x_0^2| = \left| \left( \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2} \right)^2 - \frac{1}{\delta^2} \right| = 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1 = \varepsilon$$

IV)

$$\begin{aligned} f : \Omega &\rightarrow \Omega \quad \Omega = [0, 4] \\ x &\rightarrow x^2 \end{aligned}$$

Dann ist  $f$  gleichmässig stetig

## KAPITEL 4. STETIGKEIT

### Beweis

Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Sei  $x_0, x \in \Omega = [0, 4]$ ,  $0 \leq x, x_0 \leq 4 \Rightarrow 0 \leq x + x_0 \leq 8$

$$\begin{aligned} |x - x_0| < \delta &\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| \\ &= |x - x_0||x + x_0| \leq (4 + 4)\delta \end{aligned}$$

Sei  $\delta = \frac{\varepsilon}{8}$ , dann

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

■

V)

$$\begin{aligned} f : (0, \infty) &\rightarrow (0, \infty) \\ x &\rightarrow \sqrt{x} \end{aligned}$$

ist gleichmässig stetig auf  $(0, \infty)$

### Beweis

Ask for beweis! page 172 bottom

■

Wir haben gesehen, dass

$$\begin{aligned} f : (0, \infty) &\rightarrow (0, \infty) \\ x &\rightarrow x^2 \end{aligned}$$

nicht gleichmässig stetig ist, aber

$$\begin{aligned} f : [0, 4] &\rightarrow [0, 4] \\ x &\rightarrow x^2 \end{aligned}$$

ist gleichmässig stetig. Was ist der Unterschied?  $[0, 4]$  ist kompakt,  $(0, \infty)$  nicht.

### Satz 4.26

Sei  $K \subset \mathbb{R}^d$  kompakt und  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig. Dann ist  $f$  gleichmässig stetig.

### Beweis (Indirekt)

Sonst gibt es  $\varepsilon > 0$ , so dass für jedes  $\delta > 0$  Punkte  $x, y \in K$  gibt mit

$$\|x - y\| < \delta \quad |f(x) - f(y)| > \varepsilon$$

Sei  $\forall k \geq 1$ , mit  $\delta = \frac{1}{k}$ , ein Paar  $(x_k, y_k)$  gewählt, so dass

$$|x_k - y_k| < \frac{1}{k} \quad \text{und} \quad |f(x_k) - f(y_k)| > \varepsilon$$

Da  $k$  kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge  $x_{l(k)} \rightarrow z$ . Aus  $|x_k - y_k| < \frac{1}{k}$  folgt dass  $y_{l(k)} \rightarrow z$ . Sei nun  $k_0$  so dass

$$\|f(x_{l(k_0)}) - f(z)\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall k > k_0$$

$f$  stetig

Dann folgt  $\forall k > k_0$ :

$$\|f(y_{l(k_0)}) - f(z)\| \geq \left| \underbrace{f(y_{l(k)}) - f(x_{l(k)})}_{>\varepsilon} - \underbrace{f(x_{l(k)}) - f(z)}_{<\varepsilon/2} \right| \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

■

## 4.7 Punktweise und Gleichmässige Konvergenz

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $f, f_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$

### Definition 4.28

$(f_k)_{k \geq 1}$  konvergiert punktweise gegen  $f$ , falls  $\forall x \in \Omega$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x)$$

$\forall x \in \Omega, \forall \varepsilon > 0, \exists k_{\varepsilon, x}$  s.d.  $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall k > k_{\varepsilon, x}$ . Es stellt sich die Frage, ob  $f$  stetig ist, falls alle  $(f_k)_{k \geq 1}$  stetig sind.

### Beispiel 4.30

Sei  $f_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f_k(x) = x^k, k \geq 1$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 \leq x < 1 : \lim_{k \rightarrow \infty} x^k &= 0 \\ x = 1 : \lim_{k \rightarrow \infty} x^k &= 1 \end{aligned}$$

Also konvergiert  $(f_k)$  punktweise gegen

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

Insbesondere ist  $f(x)$  nicht stetig.

### Beispiel

$$f_n(x) = \frac{nx^2 + 1}{nx + 1}, \Omega = [0, 1]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx^2 + 1}{nx + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 + \frac{1}{n}}{x + \frac{1}{n}} = \frac{x^2}{x} = x$$

## KAPITEL 4. STETIGKEIT

$f_n(x) \rightarrow f(x) = x$  und  $f(x) = x$  ist stetig

$$|f_n(x) - x| = \left| \frac{nx^2 + 1}{nx + 1} - x \right| = \left| \frac{1 - x}{nx + 1} \right| \leq \frac{1 + |x|}{|nx + 1|} \leq \frac{3}{1 + n}$$

Da  $x \in [1, 2]$ ,  $|nx + 1| \geq n + 1$  und  $1 + |x| \leq 3$

$$\frac{3}{1 + n} \leq \varepsilon \Rightarrow \frac{3}{\varepsilon} - 1 \leq n$$

d.h.  $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon$  s.d. für  $n > N_\varepsilon = \frac{3}{\varepsilon} - 1$

$$|f_n(x) - x| < \varepsilon \quad \forall x \in [1, 2]$$

$N_\varepsilon$  hängt nur von  $\varepsilon$  ab und nicht von  $x \in [1, 2]$ .

### Definition 4.29

$(f_k)$  konvergiert gleichmässig gegen  $f$ , falls

$$\sup_{x \in \Omega} \|f_k(x) - f(x)\| \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$$

d.h.  $\forall \varepsilon > 0, \exists k_\varepsilon$ , so dass  $\forall k > k_\varepsilon$

$$\forall x \in \Omega : \|f_k(x) - f(x)\| < \varepsilon$$

### Beispiel 4.30

Seien  $(a_k)_{k \geq 1} \in \mathbb{C}$

$$p(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

mit Konvergenzradius

$$\rho := \frac{1}{\limsup \sqrt[k]{|a_k|}} \leq \infty$$

Sei  $\rho > 0$ , und  $0 \leq r < \rho$ . Dann konvergiert die Folge

$$p_n(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

gleichmässig auf  $\overline{B_r(0)}$  gegen  $p(z)$

**Beweis**

Sei  $z \in \overline{B_r(0)}$  und  $r < s < \rho$

$$\begin{aligned}
 |p(z) - p_n(z)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k \right| \\
 &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| r^k \\
 &= \sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k) \left| \frac{r}{s} \right|^k s^k \\
 &\stackrel{(*)}{\leq} \left( \frac{r}{s} \right)^{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| s^k \\
 &\leq \left( \frac{r}{s} \right)^{n+1} C_s
 \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
 C_s &:= \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| s^k < \infty \\
 \Rightarrow |p(z) - p_n(z)| &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0
 \end{aligned}$$

mit

$$(*) \quad \left| \frac{r}{s} \right| < 1, k > n+1 \Rightarrow \left( \frac{r}{s} \right)^k < \left( \frac{r}{s} \right)^{n+1}$$

■

Die Bedeutung dieses Konvergenzbegriffs ist

**Satz 4.31**

Seien  $f_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass  $f_k$  gleichmässig gegen  $f$  konvergiert. Dann ist  $f$  stetig.

**Korollar 4.32**

Potenzreihen sind stetig im Inneren ihres Konvergenzkreises.

**Beweis**

Folgt aus Satz 4.31 und Beispiel 4.30

■

**Beweis 4.31**

Sei  $x_0 \in \Omega$ , und  $(x_n)_{n>1}$  eine Folge in  $\Omega$  mit Grenzwert  $x_0$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Wir wählen ein  $k$ , so dass

$$\sup_{x \in \Omega} |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$$



## KAPITEL 4. STETIGKEIT

Da  $f_k$  stetig ist, sei nun  $N \geq 1$  mit

$$|f_k(x_n) - f_k(x)| \leq \varepsilon \quad \forall n > N$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \|f(x_n) - f(x_0)\| &= |f(x_n) - f_k(x_n) + f_k(x_n) + f_k(x_0) - f_k(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x_n) - f_k(x_n)| + |f_k(x_n) - f_k(x_0)| + |f_k(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq 3\varepsilon \end{aligned}$$

■

Eine natürliche Frage ist, was sind die “einfachsten” Funktionen, mit denen man alle stetigen Funktionen gleichmässig approximieren kann?

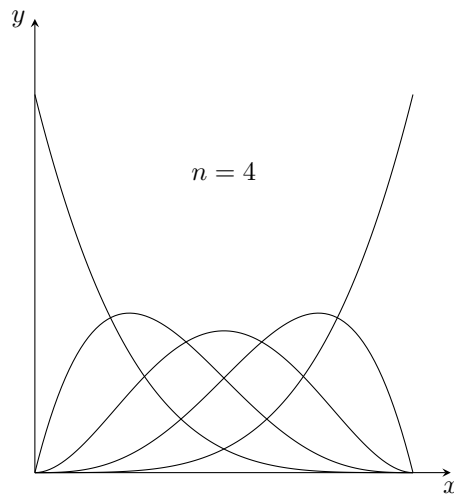
Es gibt einen sehr allgemeinen Satz von Stone - Weierstrass, der insbesondere ein Kriterium für Funktionen auf kompakten Teilmengen von  $\mathbb{R}^d$  gibt.

### Satz von Weierstrass

Man kann jede stetige Funktion auf einem kompakten Intervall durch Polynome approximieren.

Ein explizites Approximationsverfahren für auf  $[0, 1]$  stetige Funktionen mittels Polynomen wurde von S. Bernstein gefunden (1911). Sei

$$B_{i,n}(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}, 0 \leq i \leq n$$



Dieses Polynom bildet eine Basis für den Vektorraum der Polynome von Grad  $= n$ . Sei  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , dann ist

$$B_n(f)(x) := \sum_{i=0}^n B_{i,n}(x) f\left(\frac{i}{n}\right)$$

**Satz (Bernstein)**

Sei  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann konvergiert die Folge  $B_n(f)(x)_{n \geq 1}$  gleichmässig gegen  $f$ .

Can't read word, page  
182 middle

Mit den Bernstein-Polynomen kann man eine Bezierkurve  $n$ -ten Grades zu gegebenen  $n + 1$  Bezierpunkten  $P_0, \dots, P_n$  definieren. Die Bezierkurve stellt ein wichtiges Werkzeug in der Vektorgrafik dar..

Seien z.B.  $P_0, \dots, P_n$   $n$ -Kontrollpunkte in der Ebene. Dann ist die parametrische Kurve

$$t \rightarrow \sum_{i=1}^n B_{i,n}(t) P_i$$

die Bezierkurve. Diese Kurve liegt immer in der konvexen Hülle des Kontrollpolygons.