Kapitel 7

Gewöhnliche Differenzialgleichungen

Eine Gleichung, in der Ableitungen einer gesuchte Funktionen auftreten, nennt man Differentialgleichung.

$$y'(t) = y + y^2$$

$$(y'(t))^2 = y(t) + 2$$

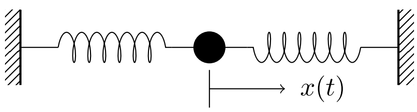
Hängt die gesuchte Funktion in der DGL nur von einer einzigen variablen ab, so spricht man von einer "gewöhnliche DGL".

Hängt hingegen die gesuchte Funktion von mehrere Variabeln ab, d.h. kommen partielle Ableitungen in der Differentialgleichung vor, so liegt eine "Partielle DGL" vor. Viele physikalische Prozesse lassen sich oft durch Differenzialgleichungen bescreiben.

Beispiel

1. Ein lineares Federpendel wird durch folgende DGL beschrieben

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -Kx \qquad \text{mit K = Federkonstante}$$



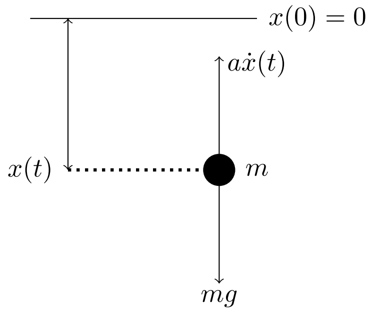
Unbekannt ist hier die Auslenkung x in Abhängigkeit von der Zeit t

2. Beim radioaktiven Zerfall, haben wir

$$\frac{df(t)}{dt} = -\alpha f \qquad f(0) = f_0$$

wobei $f(t)$ = die noch vorhandeden Masse eines Stoffes. Pro zeiteinheit zerfallende Masse ist proportional zur noch vorhandene Masse

3. Freier Fall mit Reibung



Sei m eine Massepunkt der Unter Einfluss der Schwerkraft fällt. Es kann auch ein Reibungskraft geben.

Die grösse der Reibungskraft ist proportional zur Geschwindigkeit. Dann ist, nach der zweiten Newtonische Gesetzt

$$m\ddot{x} = mg - a\dot{x} \qquad v = \frac{dx}{dt}$$

Beim Beispiel 2., haben wir schon letze Semester gesehen dass

$$\frac{df(t)}{dt} = -\alpha f$$

als eine Lösung $Ke^{-\alpha t}$, $K \in \mathbb{R}$, hat

$$f' = -\alpha f \Rightarrow \frac{f'}{f} = -\alpha$$

$$\int \frac{f'(t)}{f(t)} dt = -\int \alpha dt$$

$$\ln |f(t)| = -\alpha t + C$$

$$\Rightarrow f(t) = Ke^{-\alpha t} \text{ mit } K = e^C$$

Alle 3 Beispiele sind Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten.

7.1 Lineare DGL mit konstante Koeffizienten

Definition 7.1

Eine lineare Differentialgleichung $n-$ter Ordnung hat die Gestalt

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

mit $a_i(x), i = 0, \ldots, n-1, b(x)$ Funktionen.

Ist das so genannte Störfunktion $b(x)$ konstant gleich 0, so heisst die DGL homogen, andernfalls inhomogen. Im Falle $a_i(x) = a_i$ Konstanten, heisst die LDG, LDG mit Konstanten koeffizienten.

In diesem Abschnitt betrachten wir DGL mit konstanten Koeffizienten. Eine DGL ist genau dann linear wenn alle Potenzen der gesuchte Funktion und deren Ableitung(en) nur mit Potenz 1 vorkommen. z.B.:

- $(y')^2 + y^2 = 1$ ist nicht linear
- $y' = 2xy$ ist linear
- $y' = \sqrt{y} + 1$ ist nicht linear
- $y'' + 2y' + x = 0$ ist linear

Zum nächst betrachten wir Homogene LDG mit konstanten Koeffizienten. Sei

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 = 0 \qquad \text{(H)}$$

wobei $a_i \in \mathbb{R}$ $i = 0, \ldots, n-1$

Definition 7.2

Das <u>charakteristische Polynom</u> der Gleichung (H) ist gegeben durch

$$p(t) := t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0$$

Lemma 7.3

Die Funktion $y(x) = e^{\lambda x}$ ist genau dann Lösung von (H) falls $p(\lambda) = 0$

Beweis

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

$$y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$$

$$y^j(x) = \lambda^j e^{\lambda x}$$

Also mit

$$= y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0 = (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0)e^x =$$

$$\Leftrightarrow \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0 = p(\lambda) = 0$$

Satz 7.4

Sei $p(\lambda) = \prod_{i=1}^{l} (\lambda - \lambda_i)^{m_i}$ mit $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $\lambda_i \neq \lambda_j (i \neq j)$. Dann ist jede Lösung der zugehörigen HDGL darstellbar als Linearkombination der n linear unabhängigen Funktionen $y_{ik}(x) = x^k e^{\lambda_i x}$, $1 \leq i \leq l$, $0 \leq k \leq m_i$.

Bemerkung 7.5

1. Falls die characteristischen Polynom n verschiedene reelle Nullstelle $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ besitzt, so bilden $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$ eine Basis des Vektorraums der Lösungen, das heisst für jede Lösung $y(x)$gibt es $c_1, c_2, \ldots, c_n$ so dass

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + c_n e^{\lambda_n x}$$

2. Sei λ eine $k-$fache reelle Nullstelle das charakteristisches polynoms. Dann sind

$$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \ldots, x^{k-1}e^{\lambda x}$$

k linear unabhängige Lösungen.

What ?? page 82 bottom

3. Sind $\lambda = \alpha + i\beta$, $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$, ein Paar konjugiert komplexer $k-$ fache nullstellen, so sind die Funktionen

$$\begin{array}{cc} e^{\alpha x} \cos(\beta x) & e^{\alpha x} \sin(\beta x) \\ \vdots & \vdots \\ x^{k-1} e^{\alpha x} \cos(\beta x) & x^{k-1} e^{\alpha x} \sin(\beta x) \end{array}$$

$2k$ linear unabhängige Lösungen der DGL

$$\left(e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x}\cos(\beta x) + ie^{\alpha x}\sin(\beta x)\right)$$

Beispiel 7.6

1.
$$y'' - y = 0$$
$$p(\lambda) = \lambda^2 - 1 = 0 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$
$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

2.
$$y'' + y = 0$$
$$p(\lambda) = \lambda^2 + 1 = (\lambda + 1)(\lambda - 1)$$
$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

3.
$$y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0$$
$$p(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0 = (\lambda^2 + 1)^2 = (\lambda - i)^2(\lambda + i)^2$$

Also, $\cos x, \sin x, x\cos x, x\sin x$ sind Lösungen.

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 x \cos x + c_3 \sin x + c_4 x \sin x$$

4.
$$y^{(4)} - y = 0$$
$$p(\lambda) = t^4 - 1 = (t^2 - 1)(t^2 + 1) = (t + 1)(t - 1)(t + i)(t - i)$$
$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \sin x + c_4 \cos x$$

5.
$$2y'' + 20y' + 48y = 0$$
$$p(\lambda) = 2\lambda^2 + 20\lambda + 48 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -4, -6$$

Die Lösung ist
$$y(x) = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{-6x}$$

7.2 Inhomogene DGL

Bisher haben wir nur Homogene Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten betrachtet. Sehr oft treten auch Zusatzterme in den Gleichung auf. Wir haben der Folgende Allgemeine Satz für die Lösungsstruktur linearer DGL

Satz 7.7

Die allgemeine Lösung einer inhomogenen DGL
$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b(x)$$
ist die Summe einer "spezielle" Lösung der inhomogenen DGL und der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen DGL
$$\underbrace{y_A(x)}_{\substack{\text{Allgemeine Losung}\\ \text{der inhomogene DGL}}} = \underbrace{y_S(x)}_{\substack{\text{Spezielle Losung}\\ \text{der inhomogene DGL}}} + \underbrace{y_{AH}(x)}_{\substack{\text{Allgemeine Losung}\\ \text{der Homogene DGL}}}$$

Beispiel
$$y'' + y = \sin x$$
Um diese inhomogene DGL zu lösen, benötigen wir die allgemeine Lösung der zugehörigen homogene DGL $y'' + y = 0$
$$p(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow y_{AH}(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$$
Nun wird noch eine spezielle Lösung der inhomogene DGL $y'' + y = \sin x$ benötigt. Wir verifizieren dass $y(x) = -\frac{1}{2}x\cos x$ eine derartige Lösung ist
$$y'(x) = -\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}x \sin x$$
$$y''(x) = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}x\cos x = \sin x + \frac{1}{2}x\cos x$$
$$y''(x) + y(x) = \sin x + \frac{1}{2}x\cos x - \frac{1}{2}x\cos x = \sin x$$
Die allgemeine Lösung der inhomogenes DGL ist damit
$$y(x) = \underbrace{-\frac{1}{2}x\cos x}_{\substack{\text{Spezielle Losung}\\ \text{der inhomogene DGL}}} + \underbrace{c_1 \sin x + c_2 \cos x}_{\substack{\text{Allgemeine Losung}\\ \text{der Homogene DGL}}}$$

Bemerkung

Man kann als Speziell Lösung der inhomogenes DGL auch

$$y(x) = -\frac{1}{2}x\cos x + 5\sin x$$

wählen. Dann gilt auch hier $y'' + y = \sin x$. Die allgemeine Lösung der inhomogenes DGL

$$y(x) = \underbrace{-\frac{1}{2}x\cos x + 5\sin x}_{\substack{\text{Spezielle Lösung} \\ \text{inhomogenes DGL}}} + \underbrace{k_1 \sin x + k_2 \cos x}_{\substack{\text{Allgemeine Lösung} \\ \text{homogenes DGL}}}$$

Sie unterscheidet sich nicht von der Lösung

$$y(x) = -\frac{1}{2}x\cos x + c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

$$c_1 = 5 + k$$

Frage:

Wie kann man eine spezielle Lösung finden?

Antwort:

Zur Lösung der inhomogenes DGL kann man in vielen Fällen einen so genannte "Ansatz vom Typ der rechten Seite" wählen. Hier geht man davon aus, dass die Lösung die gleiche Gestalt wie die Störfunktion haben wird.

z.B.: ist die Störfunktion ein Polynom, so nimmt man an, dass die spezielle Lösung auch ein polynom sein wird. Ist die Störfunktion ein exponentialfunktion so nimmt man an, dass die Lösung auch ein exponentialfunktion sein wird.

Beispiel 7.8

1. Wir betrachten die DGL

$$y'' + y' - 6y = 3e^{-4x}$$

Die Zugehörige homogenes DGL

$$y'' + y' - 6y = 0$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = 2, -3$$

Die Allgemeine Lösung der Homogenes DGL ist

$$y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x}$$

Zur Lösung der inhomogenes DGL verwenden wir einen "Ansatz vom Typ der Rechten Seite", gehen also davon aus, dass die spezielle Lösung der inhomogenes DGL die ähnliche Gestalt hat (als die Störfunktion)

$$y_s(x) = Ke^{-4x}$$

Für die Ableitungen des Ansatzes haben wir

$$y_s'(x) = -4Ke^{-4x}$$
$$y_s''(x) = 16Ke^{-4x}$$

Eingesetzt in die homogenes DGL ergibt sich

$$y'' + y' - 6y = 16Ke^{-4x} - 4Ke^{-4x} - 6Ke^{-4x} = 6Ke^{-4x} = 3e^{-4x}$$

Also $6K = 3 \Rightarrow K = \frac{1}{2}$. Damit ist $y_s(x) = \frac{1}{2}e^{-4x}$ und die allgemeine Lösung der DGL

$$y(x) = \frac{1}{2}e^{-4x} + c_1e^{-3x} + c_2e^{2x} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

2.

$$y'' + y' - 6y = 50 \sin x$$

Wählen wir als "Ansatz vom Typ der rechten Seite"

$$y_s(x) = K_1 \sin x + K_2 \cos x$$
$$y_s'(x) = K_1 \cos x - K_2 \sin x$$
$$y''_s(x) = -K_1 \sin x - K_2 \cos x$$
$$y''+y'-6y = -K_1 \sin x - K_2 \cos x + K_1 \cos x - K_2 \sin x + 6K_1 \sin x + 6K_2 \cos x$$
$$= (-7K_1 - K_2) \sin x + (-7K_2 + K_1) \cos x$$
$$= 50 \sin x$$
$$\Rightarrow -7K_2 + K_1 = 0 \Rightarrow K_1 = 7K_2$$
$$-7K_1 - K_2 = 50 \Rightarrow -49K_2 - K_2 = 50$$
$$\Rightarrow K_2 = -1, K_1 = -7$$
$$y_s(x) = -7 \sin x - \cos x$$

Damit ist die allgemeine Lösung der inhomogenes DGL

$$y(x) = -7 \sin x - \cos x + c_1e^{-3x} + c_2e^{2x}$$

Ein problem ergibt sich, wenn als Störfunktion eine Lösung der homogenes DGL erscheint:

3.

$$y'' + y' - 6y = e^{2x}$$

"Der Ansatz vom Typ der rechten Seite"

$$y(x) = Ke^{2x}$$

führt nicht weiter da dieser Ansatz eingesetzt in homogenes DGL 0 ergeben muss und nicht e^{2x}. Wir führen nun der Ansatz

$$y(x) = Kxe^{2x}$$

$$y'(x) = Ke^{2x} + 2Kxe^{2x}$$

$$y''(x) = 2Ke^{2x} + 2Ke^{2x} + 4Kxe^{2x}$$

$$y'' + y' - 6y = 4Kxe^{2x} + 4Kxe^{2x} + Ke^{2x} + 2Kxe^{2x} - 6Kxe^{2x}$$

$$= 5Ke^{2x} = 10e^{2x}$$

$$\Rightarrow K = 2$$

Der Ansatz führte also auf die Lösung

$$y_s(x) = 2xe^{2x}$$

Insgesamt:

$$y(x) = 2xe^{2x} + c_1e^{-3x} + c_2e^{2x} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

3.

$$y'' + y = \sin x$$

$$y_H = c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

Für die Spezielle Lösung zu finden, wählen wir den Ansatz vom Typ der rechten Seite

$$y_s(x) = x\,(K_1 \sin x + K_2 \cos x)$$

$$y_s'(x) = (K_1 \sin x + K_2 \cos x) + x\,(K_1 \cos x - K_2 \sin x)$$

$$y''_s(x) = K_1 \cos x - K_2 \sin x + K_1 \cos x - K_2 \sin x + x\,(-K_1 \sin x - K_2 \cos x)$$

Eingesetzt in die DGL ergibt sich

$$y''_s(x) + y(x) = 2K_1 \cos x - 2K_2 - x(K_1 \sin x + K_2 \cos x) + x(K_1 \sin x + K_2 \cos x)$$

$$= 2K_1 \cos x - 2K_2 \sin x = \sin x$$

$$\Rightarrow 2K_1 = 0, -2K_2 = 1 \Rightarrow K_1 = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y_s(x) = -\frac{1}{2} x \cos x$$

$$y_A = -\frac{1}{2} x \cos x + c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

Zur Lösung der Inhomogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, kann man einen “Ansatz vom Typ der rechten Seite” wählen. Die Idee ist dass die Lösungsfunktion und Störfunktion ähnlich sind.

Störfunktion	Ansatz für Lösung $y_s(x)$
$P_n(x)$	$Q_n(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$
Ke^{ax}	Ke^{ax}
$A \sin bx$ $A \cos bx$	$K_1 \sin bx + K_2 \cos bx$
$Ae^{\alpha x} \sin \beta x$ $Be^{\alpha x} \cos \beta x$	$K_1 e^{\alpha x} \sin \beta x + K_2 e^{\alpha x} \cos \beta x$
$P_n(x) e^{\alpha x} \sin \beta x$	$e^{\alpha x}[R_n(x) \sin \beta x + S_n(x) \cos \beta x]$

wobei P_n, Q_n, S_n, R_n Polynome von Grad n sind.

Bemerkung 7.9

1. Liegt eine Linearkombination der Störfunktion vor, so hat man auch als Ansatz eine entsprechende Linearkombination zu wählen. Dies ist Superpositionsprinzip

   end of this list?

   Beispiel

   Die DGL $y'' + y' - 6y = 50 \sin x$ hat die spezielle Lösung

   $$y_s(x) = -7 \sin x - \cos x$$

   und die DGL $y'' + y' - 6y = 10e^{2x}$ hat die spezielle Lösung

   $$y_s(x) = 2xe^{2x}$$

   Die DGL $y'' + y' - 6y = 50 \sin x + 10e^{2x}$ hat die spezielle Lösung

   $$y_s(x) = -7 \sin x - \cos x + 2xe^{2x}$$

   Die allgemenine Lösung

   $$y(x) = -7 \sin x - \cos x + 2xe^{2x} + c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x}$$

   Superpositionsprinzip:

   Ist $y_1(c)$ eine spezielle Lösung der L. Differentialgleichung

   $$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0(x) y = b_1(x)$$

   und $y_2(x)$ eine spezielle Lösung der LDGL

   $$y^n(x) + \cdots + a_0(x) y = b_2(x)$$

dann ist $y_1(x) + y_2(x)$ eine Spezielle Lösung der DGL

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0(x)y = b_1(x) + b_2(x)$$

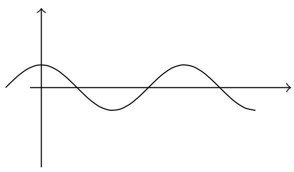
2. Falls $\lambda = \alpha + i\beta$ (β kann null sein) eine $m-$fache Nullstelle der characteristichen Polynoms von (Resonanzfall)

$$(H) \qquad y^n(x) + a_n y^{(n-1)} + \cdots + a_0 = 0$$

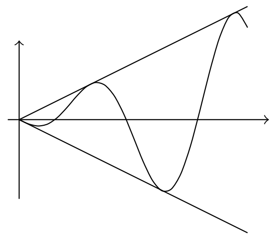
so muss man den Ansatz für $y_s(x)$mit dem Faktor x^m multiplizieren.

Beispiel

$y'' + y = \sin x$ hat die spezielle Lösung $y_s = -\frac{1}{2}x\cos x$



$\cos x$



$-\frac{1}{2}x\cos x$

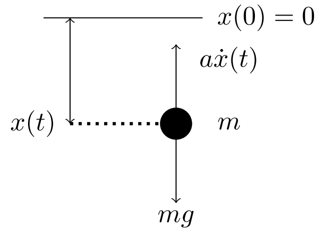
Zusatzbedingungen einer DGL. Anfangs und Randbedingungen

Die in der allgemeinen Lösung einer DGL $n-$ter Ordnung auftretenden parameter lassen sich durch Zusatzbedingungen festlegen. Physikalische sinnvolle Zusatzbedingungen werden meist in der Form von Anfangsbedingungen oder Randbedingungen vorgegeben.

Durch Vorgabe von derartigen Bedingungen eliminiert man die Parameter aus der allgemeinen Lösung der DGL und erhält damit eine partikuläre Lösung.

Beispiel 7.10

Freifall mit Reibung



$m\ddot{x} = mg - a\dot{x}$. Anfangsbedingungen: $x(0) = 0; v(0) = \dot{x}(0) = 0$

$$mx''(t) + ax'(t) = mg$$

$$(H) \qquad mx''(t) + ax'(t) = 0$$

$$p(\lambda) = m\lambda^2 + a\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0, \lambda = -\frac{a}{m}$$

$$x_h(t) = c_1 + c_2 e^{-\frac{a}{m}t}$$

Für die spezielle Lösung, wählen wir als Ansatz $x_s(t) = kt$

$$\left(\begin{array}{l} b(t) = mg = \text{ konstant, aber } e^{0\cdot t} = 1 = \text{ konstant} \\ \text{ist eine Lösung der } (H) \end{array} \right)$$

$$x'(t) = k \qquad x''(t) = 0$$

$$mx''(t) + ax'(t) = ak = mg \Rightarrow k = \frac{mg}{a}$$

Allgemeine Lösung

$$x(t) = x_h(t) + x_s(t) = c_1 + c_2 e^{-\frac{a}{m}t} + \frac{mg}{a}t$$

Anfangsbedingungen

$$x(0) = 0 = c_1 + c_2 = 0$$

$$x'(t) = c_2\left(-\frac{a}{m}\right)e^{-\frac{a}{m}t} + \frac{mg}{a} = 0$$

$$x'(0) = 0 \Rightarrow c_2\left(-\frac{a}{m}\right) + \frac{mg}{a} = 0$$

$$c_2 = \frac{m^2 g}{a^2} \qquad c_1 = -\frac{m^2 g}{a^2}$$

$$\Rightarrow x(t) = -\frac{m^2 g}{a^2} + \frac{m^2 g}{a^2} e^{-\frac{a}{m}t} + \frac{mg}{a}t$$

$$x(t) = \frac{mg}{a}t - \frac{m^2 g}{a^2}\left[1 - e^{-\frac{a}{m}t}\right]$$

Eine partikuläre Lösung einer DGL $n-$ter Ordnung

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) + \cdots + a_0 y(x) = b(x)$$

kann man aus der allgemeine Lösung

$$y(x) = y(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

der DGL erhalten

- Durch die Vorgabe von Anfangsbedingungen

$$y(x_0) = A_0$$

$$y'(x_0) = A_1$$

$$y^{(n-1)}(x_0) = A_n$$

(Funktionswert und weitere Ableitungen bis zur $(n-1)-$ten an einer speziellen stelle x_0.

- Durch die Vorgabe von Randbedingungen

$$y(x_1) = B_1, y(x_2) = B_2, \ldots, y(x_n) = B_n$$

  Funktionswerte an n verschiedene Stellen

Beispiel 7.11

Lineares Federpendel:

$$mx''(t) + K_1 x = 0, \omega^2 = \frac{K}{m}$$
$$x''(t) + \omega^2 x = 0 \qquad (H)$$
$$p(\lambda) : \lambda^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm \omega i$$

Homogene Lösung: $x_h(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$ Wenn wir den folgenden Zusatzbedingungen haben

(i) $x(0) = 1, x'(0) = 2\omega$

$$x'(t) = -c_1 \omega \sin \omega t + c_2 \omega \cos \omega t$$

$$x(0) = 1 \Rightarrow c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = c_1 = 1$$
$$x'(0) = 2\omega \Rightarrow -c_1 \omega \sin 0 + c_2 \omega \cos 0 = 2\omega$$
$$\Rightarrow \omega c_2 = 2\omega \Rightarrow c_2 = 2$$
$$\Rightarrow x_p(t) = \cos \omega t + 2 \sin \omega t$$

(ii) Mit Randbedingungen: $x(0) = 1$, $x\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) = 1$

$$x(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = c_1 = 1$$
$$x\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) = c_1 \cos \frac{\pi}{2} + c_2 \sin \frac{\pi}{2} = c_2 = 1$$

Also $x_p(t) = \cos \omega t + \sin \omega t$

7.3 Lineare DGL erster Ordnung (mit allgemeinen koeffizienten)

Die LDGL hat allgemeine Form

$$y'(x) = a(x)y + b(x)$$

$b(x)$ - inhomogene Term.

Und $y'(x) = a(x)y$ ist die zugehörige homogene Gleichung.

Lösung von $y'(x) = a(x)y$:

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = a(x)$$

d.h. $(\ln y(x))' = a(x)$. Sei $A(x)$ eine Stammfunktion von $a(x)$, so ist

$$\ln y(x) = A(x) + c$$

Also $y(x) = e^{A(x)} \cdot e^c = Ke^{A(x)}$

Satz 7.12

Die allgemeine Lösung von $y' = ay$ ist $y(x) = Ke^{A(x)}$ wobei $K \in \mathbb{R}$ und $A'(x) = a(x)$

Beispiel

$$xy' - 2y = 0$$

$$y' = \frac{2}{x}y \Rightarrow a(x) = \frac{2}{x}, A(x) = 2\ln|x| = \ln x^2$$

$$e^{A(x)} = e^{\ln x^2} = x^2$$

$$\Rightarrow \text{ Lösung von } y'(x) = \frac{2}{x}y \Rightarrow y(x) = Kx^2$$

Jetzt suchen wir eine spezielle Lösung von $y' = a(x)y + b(x)$

Ansatz

$y = uv$ wobei u, v Funktionen sind. Dann ist

$$y' = u'v + uv'$$

und

$$a(x)y + b(x) = ay + b = u'v + uv'$$

$$a(uv) + b = u'v + uv'$$

$$\Rightarrow u'v + u[v' - av] = b$$

Jetzt wählen wit v so dass

$$v' - av = 0$$

, d.h.

$$v = e^{A(x)}$$

Dann ist $u'v = b$ d.h. $u' = be^{-A(x)}$ d.h. u ist eine Stammfunktion von $be^{-A(x)}$

Satz 7.13

Seien $A(x)$ eine Stammfunktion von $a(x)$ und $U(x)$ ein Stammfunktion von $be^{-A(x)}$. Dann ist $y(x) = e^{A(x)}.\, U$ Lösung von $y' = a(x)y + b(x)$

Korollar 7.14

Die Allgemeine Lösung von LDGL $y' = ay+b$ ist durch $y(x) = e^{A(x)} \int b(x)e^{-A(x)}dx + Ke^{A(x)}$ gegeben wobei $K \in \mathbb{R}$, $A(x)$ eine Stammfunktion von $a(x)$

Beispiel 7.15

1.
$$xy' - 2y = 2x^4$$
$$\Rightarrow y' = \underbrace{\frac{2}{x}}_{a(x)} y + \underbrace{2x^3}_{b(x)}$$
$$A(x) = 2\ln|x| = \ln x^2$$
$$Ke^{A(x)} = Kx^2 \text{ ist die Lösung von homogene DGL } y' = ay$$

Wir bestimmen jetzt die Stammfunktion von

$$b(x) \cdot e^{-A(x)} = 2x^3 e^{-\ln(x)^2} = 2x^3 x^{-2} = 2x$$
$$2\frac{x^3}{x^2} = 2x$$

Also ein Stammfunktion von $b(x)e^{-Ax}$ ist $\int 2xdx = x^2$ und $x^2 e^{A(x)} = x^4$. Somit ist die Allgemeine Lösung

$$y(x) = x^4 + Kx^2$$

2.
$$y' = 4x + 5y - 3$$
$$y' - \underbrace{5}_{a} y = \underbrace{4x - 3}_{b}$$

LDGL mit konstanten koeffizienten. Störfunktion ist $4x - 3$.

HDGL:
$$y' - 5y = 0$$
$$\frac{y'}{y} = 5$$
$$\ln y(x) = 5x + c$$
$$y_h(x) = Ke^{5x} \text{ Hom. Lösung}$$
$$A(x) = 5x$$

Spez. Lösung: Sei $U(x)$ stammfunktion von $(4x - 3)e^{-5x}$. Dann ist die spezielle Lösung

$$e^{5x} U(x) = e^{5x} \int (4x - 3)e^{-5x} dx$$
$$\int \underbrace{(4x - 3)}_{u} \underbrace{e^{-5x}}_{v'} dx$$
$$\overset{P.I.}{=} (4x - 3)\frac{e^{-5x}}{-5} + \frac{4}{5}\int e^{-5x} dx$$

$$= \left[\left(\frac{4x-3}{-5}\right) - \frac{4}{25}\right] e^{-5x}$$

$$= \left(\frac{-4x}{-5} + \frac{11}{25}\right) e^{-5x}$$

$$\Rightarrow \text{ Spezielle Lösung: } y_s(x) = e^{5x} \cdot U(x) = \frac{-4x}{5} + \frac{11}{25}$$

Allgemeine Lösung:

$$y(x) = Ke^{5x} - \frac{4x}{5} + \frac{11}{25}$$

7.4 Separierbare DGL

Definition 7.16

Eine separierbare DGL ist eine der Form

$$y' = f(x)g(y)$$

Ein einfaches Verfahren, so genannte "separation der Variablen" lässt sich anwenden, wenn die DGL separierbar ist. Der "trick": Wir trennen die Terme voneinander und dann integrieren. Dabei ist es hilfreich $y' = \frac{dy}{dx}$ zu schreiben und formel dy bzw. dx als Zähler bzw. Nenner des Bruches aufzufassen

Beispiel 7.17

1.
$$y' = 2xy$$

$$\tfrac{dy}{dx} = 2xy \quad \Rightarrow \quad \tfrac{dy}{y} = 2xdx$$

$$\downarrow$$

trennen formel x bzw y - Terme

Jetzt Integrieren wir auf beiden Seiten

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2xdx$$

$$\ln|y| = x^2 + c$$

Da wir an der Lösung y interessiert sind und nicht am Logarithmus davon, wenden wir die Exponentialfunktion an

$$|y| = e^{x^2+c} = e^c e^{x^2}$$

Links und rechts stehen nur positive Grösse. Wenn wir aber auf der Rechten Seite nicht nur positive konstante $e^c > 0$ zulassen, sondern irgendwelche Konstanten $K \in \mathbb{R}$ so erhalten wir

$$y(x) = Ke^{x^2}$$

2.
$$y' = 1 + y^2 \text{ ist separierbar}$$
$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int dx$$
$$\Rightarrow \arctan y = x + c \Leftrightarrow y = \tan(x+c)$$

Bemerkung 7.18

$y' = f(x)g(x)$ hat die Konstante Lösungen $y = y_0$ für alle y_0 mit $g(y_0) = 0$. Der fall $g(y) = 0$ muss gesondert betrachtet werden.

3.
$$|x|, |y| < 1, y' = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$$

hat keine Konstante Lösungen

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\Rightarrow \arcsin y = \arcsin x + c$$
$$y = \sin[\arcsin x + c]$$
$$= x \cos c \pm \sqrt{1-x^2} \sin c$$
$$= ax + b\sqrt{1-x^2}$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a^2 + b^2 = 1$. Rückeinsetzen in die DGL liefert die Zusatzbedingung

$$y' = a - \frac{bx}{\sqrt{1-x^2}} > 0, \qquad (1 + y^2 > 0)$$