

## Kapitel 2

# Reelle Zahlen, Euklidische Räume und Komplexe Zahlen

### 2.1 Elementare Zahlen

Natürliche Zahlen	$\mathbb{N}$	$=$	$\{0, 1, 2, \dots\}$	addieren und multiplizieren
	$\cap$			
Ganze Zahlen	$\mathbb{Z}$	$=$	$\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$	subtrahieren
	$\cap$			
Rationale Zahlen	$\mathbb{Q}$	$=$	$\left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$	dividieren

Viele Gleichungen haben keine Lösung in  $\mathbb{Q}$ .

#### Satz 2.1

Sei  $p \in \mathbb{N}$  eine Primzahl. Dann hat  $x^2 = p$  keine Lösung in  $\mathbb{Q}$ .

#### Beweis

Zur Erinnerung: Zwei natürlichen Zahlen  $a$  und  $b$  sind teilerfremd (oder relativ prim) wenn es keine natürliche Zahl ausser der Eins gibt, die beide Zahlen teilt.

$$\text{ggT}(a, b) = 1 \quad (\text{grösster gemeinsamer Teiler} = 1)$$

#### Indirekter Beweis

Wir nehmen an, dass es  $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$  gibt mit  $x^2 = p$ , wobei  $a, b$  teilerfremd und  $\geq 1$  sind. Dann gilt

$$a^2 = pb^2$$

woraus folgt, dass  $p$   $a$  teilt, also ist  $a = pk$ ,  $k \in \mathbb{N}$  und somit

$$a^2 = p^2 k^2 = pb^2 \Rightarrow pk^2 = b^2$$

woraus folgt, dass  $p$   $b$  teilt.

## 2.2 Die Reellen Zahlen

Wir werden jetzt das System von Axiomen beschreiben, das die Menge der reellen Zahlen “eindeutig” charakterisiert.

Die Menge  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen ist mit zwei Verknüpfungen “+” (Addition) und “ $\cdot$ ” (Multiplikation) versehen, sowie mit einer Ordnungsrelation  $\leq$ . Die Axiome werden wie folgt gruppiert:

1.  **$(\mathbb{R}, +, \cdot)$  ist ein Körper**

Es gibt zwei Operationen (zweistellige Verknüpfungen)

- $+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(a, b) \mapsto a + b$
- $\times: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(a, b) \mapsto a \cdot b$

und zwei ausgezeichnete Elemente 0 und 1 in  $\mathbb{R}$ , die folgende Eigenschaften haben:

Kommutativität	A1)	$x + y = y + x$
Assoziativität	A2)	$(x + y) + z = x + (y + z)$
Neutrales Element	A3)	$x + 0 = x = 0 + x$
Inverses Element	A4)	$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \text{ mit } x + y = 0 = y + x$
Kommutativität	M1)	$x \cdot y = y \cdot x$
Assoziativität	M2)	$(xy)z = x(yz)$
Neutrales Element	M3)	$x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$
Inverse Element	M4)	$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0 \exists y \in \mathbb{R} \text{ mit } xy = 1 = yx$

und die Multiplikation ist verträglich mit der Addition im Sinne des Distributivitätsgesetzes (D)

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x(y + z) = xy + xz$$

- $(\mathbb{R}, +)$  mit A1→A4 ist eine Abelsche Gruppe bezüglich der Addition.
- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  mit A1→A4, M1→M4 und D ist ein Zahlkörper.

### Bemerkung 2.2

Eine Menge  $G$ , versetzt mit Verknüpfung  $+$  und dem neutralen Element 0, die den obigen Eigenschaften A2→A4 genügt, heisst Gruppe.

Eine Menge  $K$  versetzt mit Verknüpfung  $+, \cdot$  und Elementen  $0 \neq 1$ , die den obigen Eigenschaften A1→A4, M1→M4, D genügt, heisst Körper.

### Folgerung 2.3

Seien  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

KAPITEL 2. REELLE ZAHLEN, EUKLIDISCHE RÄUME UND  
KOMPLEXE ZAHLEN

- |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |   |   |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| i) $a + b = a + c \Rightarrow b = c$ und 0 ist eindeutig, d.h. falls $z \in \mathbb{R}$ der<br>Eigenschaft $a + z = a \ \forall a \in \mathbb{R}$ genügt, so folgt $z = 0$ .<br><br>ii) $\forall a, b \in \mathbb{R}, \exists!$ (eindeutig bestimmtes) $x \in \mathbb{R} : a + x = b$ . Wir<br>schreiben $x = b - a$ und $0 - a = -a$ ist das additive Inverse zu<br>$a$ .<br><br>iii) $b - a = b + (-a)$<br><br>iv) $-(-a) = a$                                                          | } | A |
| v) Aus $ab = ac$ und $a \neq 0$ folgt $b = c$ . Das bzgl. der Multiplikation<br>neutrale Element 1 ist eindeutig, d.h. falls $x \in \mathbb{R}$ der Eigenschaft<br>$ax = a \ \forall a \in \mathbb{R}$ genügt, so folgt $x = 1$<br><br>vi) $\forall a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, \exists! x \in \mathbb{R} : ax = b$ . Wir schreiben $x = \frac{b}{a}$ und<br>$\frac{1}{a} = a^{-1}$ ist das multiplikative Inverse zu $a$ .<br><br>vii) Falls $a \neq 0 \Rightarrow (a^{-1})^{-1} = a$ | } | M |
- viii)  $\forall a \in \mathbb{R}, a \cdot 0 = 0$   
 ix) Falls  $ab = 0$ , dann folgt  $a = 0$  oder  $b = 0$

**Beweis 2.3**

- (a) Sei  $a + b = a + c$   
 $A4 \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R} : a + y = 0$   
 $a + b = a + c \Rightarrow y + (a + b) = y + (a + c)$   
 $\xRightarrow{A2} (y + a) + b = (y + a) + c$   
 $\Rightarrow 0 + b = 0 + c \xRightarrow{A3} b = c$   
 Nehmen wir an, dass es  $0' \in \mathbb{R}$  gibt, so dass  $x + 0' = x, \forall x \in \mathbb{R}$ , d.h.  
 es gibt ein zweites neutrales Element für +.

Dann  $0 + 0' = 0$  aber auch  $A3 \Rightarrow 0 + 0 = 0 \Rightarrow 0 + 0' = 0 + 0 \Rightarrow 0 = 0'$

- (b) Seien  $a, b \in \mathbb{R}$ , und sei  $y \in \mathbb{R}$  mit  $a + y = 0$ . Definieren wir  $x :=$   
 $y + b \Rightarrow a + x = a + (y + b) = (a + y) + b = 0 + b = b$   
 $\Rightarrow$  es gibt mindestens eine Lösung der Gleichung  $a + x = b$ . Von i)  
 folgt, dass  $x$  eindeutig bestimmt ist  $a + x = b = a + x' \Rightarrow x = x'$
- (c) Seien  $x = b - a, y = b + (-a)$ . Wir wollen beweisen, dass  $x = y$ .

Aus i) wissen wir, dass  $b - a$  eine Lösung von  $a + x = b$

$$y + a = (b + (-a)) + a = b + ((-a) + a) = b + 0 = b$$

$\Rightarrow y$  ist auch eine Lösung.

Weil die Lösung von  $a + x = b$  eindeutig bestimmt ist, folgt  $y = x$ .

- (d)  
(e)  
(f)

(g)

(h)  $\forall a \in \mathbb{R}, a \cdot 0 = 0$

$$a \cdot 0 = a(0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0 \Rightarrow a \cdot 0 = 0$$

(i)  $ab = 0 \Rightarrow a = 0$  oder  $b = 0$

Wir nehmen an:  $a \neq 0$  mit multiplikativem Inversem  $a^{-1}$ , ( $a^{-1}$  existiert mittels M4). So folgt  $b = 1 \cdot b = (a^{-1} \cdot a) b = a^{-1}(a \cdot b) = a^{-1} \cdot 0 = 0$

## 2. Ordnungssaxiome $\leq$

Auf  $\mathbb{R}$  gibt es eine Relation  $\leq$ , genannte Ordnung, die folgenden Eigenschaften genügt

(a) Reflexivität:  $\forall x \in \mathbb{R}: x \leq x$

(b) Transitivität:  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$

(c) Identität:  $\forall x, y \in \mathbb{R}: (x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow x = y$

(d) Die Ordnung ist total:  $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y$  gilt entweder  $x \leq y$  oder  $y \leq x$

Die Ordnung ist konsistent mit  $+$ , und  $\cdot$ .

(a)  $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$

(b)  $x, y \geq 0 \Rightarrow xy \geq 0$

Mit  $\leq$  hat man auch  $\geq, <, >$ . Wir verzichten auf eine Auflistung aller Folgerungen und beschränken uns auf einige wichtigen Folgerungen.

### Folgerungen 2.4

i)  $x \leq 0$  und  $y \leq 0 \Rightarrow xy \geq 0$

ii)  $x \leq 0$  und  $y \geq 0 \Rightarrow xy \leq 0$

iii)  $x \leq y$  und  $z \geq 0 \Rightarrow xz \leq yz$

iv)  $1 > 0$

v)  $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0$

vi)  $0 < 1 < 2 < 3 < \dots$

vii)  $\forall x > 0: x^{-1} > 0$

{Annahme:  $x^{-1} \leq 0$ . Nach Multiplikation mit  $x > 0$  folgt (mittels ii)  $1 = x^{-1} \cdot x \leq 0 \cdot x = 0$ }

### Bemerkung 2.5

$\leq$  auf  $\mathbb{Q}$  genügt den obigen Eigenschaften. Die entscheidende weitere Eigenschaft von  $\mathbb{R}$  ist die *Ordnungsvollständigkeit*.

## KAPITEL 2. REELLE ZAHLEN, EUKLIDISCHE RÄUME UND KOMPLEXE ZAHLEN

### 3. Ordnungsvollständigkeit - Vollständigkeitsaxiome

Seien  $A, B \subset \mathbb{R}$  nicht leere Teilmengen von  $\mathbb{R}$ , so dass  $a \leq b$  für alle  $a \in A, b \in B$ . Dann gibt es  $c \in \mathbb{R}$  mit  $a \leq c \leq b \quad \forall a \in A, b \in B$

#### Bemerkung 2.6

Die rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  erfüllen diese Eigenschaften nicht!

Seien

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0, x^2 \leq 2\}$$

$$B = \{y \in \mathbb{Q} \mid y \geq 0, y^2 \geq 2\}$$

Dann gilt  $a \leq b \quad \forall a \in A, b \in B$ . Aber ein  $c \in \mathbb{Q}$ , mit  $a \leq c \leq b$  würde dann  $c^2 = 2$  erfüllen! In Satz 2.1 haben wir gesehen dass  $x^2 = p$  keine Lösung in  $\mathbb{Q}$  hat.

Wir definieren jetzt für  $x, y \in \mathbb{R}$

$$\max\{x, y\} = \begin{cases} x & \text{falls } y \leq x \\ y & \text{falls } x \leq y \end{cases}$$

Insbesondere ist der Absolutbetrag einer Zahl  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|x|$

$$|x| := \max\{x, -x\}$$

Für diesen gilt folgender wichtiger Satz

#### Satz 2.7

- i)  $|x + y| \leq |x| + |y|$  (Dreiecksungleichung)
- ii)  $|xy| = |x||y|$

#### Beweis 2.7

- i)  $x \leq |x|, -x \leq |x|$   
 $y \leq |y|, -y \leq |y|$   
und  $x + y \leq |x| + |y|, -(x + y) \leq |x| + |y|$   
woraus  $|x + y| \leq |x| + |y|$  folgt

ii) ASK FOR BEWEIS

ASK FOR BEWEIS

#### Satz (Youngsche Ungleichung)

Für alle  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $\delta > 0$  gilt  $2|ab| \leq \delta a^2 + \frac{b^2}{\delta}$

## 2.3 Infimum und Supremum

Im Zusammenhang mit der Ordnung führen wir einige wichtige Definitionen ein:

### Definition 2.8

Sei  $X \subset \mathbb{R}$  eine Teilmenge

- a)  $X$  ist nach oben beschränkt, falls es  $c \in \mathbb{R}$  gibt, mit  $x \leq c, \forall x \in X$ . Jedes derartige  $c$  heisst eine obere Schranke für  $X$ .
- b)  $X$  ist nach unten beschränkt, falls es  $c \in \mathbb{R}$  gibt, mit  $x \geq c, \forall x \in X$ . Jedes derartige  $c$  heisst untere Schranke für  $X$ .
- c)  $X$  ist beschränkt, falls sie nach oben und unten beschränkt ist.
- d) Ein Element  $a \in X$  ist ein maximales Element (oder Maximum) von  $X$  falls  $x \leq a, \forall x \in X$ . Falls ein Maximum (bzw. Minimum) existiert, wird es mit  $\max X$  ( $\min X$ ) bezeichnet. Falls  $X$  keine obere Schranke hat, ist  $X$  nach oben unbeschränkt (analog für untere Schranke).

### Beispiel 2.9

1.  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$  ist nach oben unbeschränkt.  $A$  ist nach unten beschränkt. Jedes  $a \in \mathbb{R}, a \leq 0$  ist eine untere Schranke.
2.  $B = [0, 1]$  ist nach oben und nach unten beschränkt.
  - 0 ist ein Minimum von  $B$
  - 1 ist ein Maximum von  $B$
3.  $C = [0, 1)$  ist nach oben und nach unten beschränkt,  $0 = \min(A)$ .  $C$  hat kein Maximum.

Folgender Satz ist von zentraler Bedeutung und eine Folgerung des Ordnungsvollständigkeitsaxioms.

### Satz 2.10

- i) Jede nicht leere, nach oben beschränkte Teilmenge  $A \subset \mathbb{R}$  besitzt eine kleinste obere Schranke  $c$ . Die kleinste obere Schranke  $c$  ist eindeutig bestimmt, heisst Supremum von  $A$  und wird mit  $\sup A$  bezeichnet.
- ii) Jede nicht leere, nach unten beschränkte Teilmenge  $A \subset \mathbb{R}$  besitzt eine grösste untere Schranke  $d$ , heisst Infimum von  $A$  und wird mit  $\inf A$  bezeichnet.

### Beweis

- i) Sei  $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$  nach oben beschränkt. Sei  $B := \{b \in \mathbb{R} \mid b \text{ ist eine obere Schranke für } A\}$ . Es folgt  $B \neq \emptyset$  und  $a \leq b, \forall a \in A, b \in B$

## KAPITEL 2. REELLE ZAHLEN, EUKLIDISCHE RÄUME UND KOMPLEXE ZAHLEN

Mit dem Ordnungsvollständigkeitsaxiom folgt die Existenz einer Zahl  $c \in \mathbb{R}$  mit  $a \leq c \leq b \forall a \in A, b \in B$ .

Es ist klar, dass  $c$  eine obere Schranke für  $A$  ist. Also  $c \in B$ . Da  $c \leq b \forall b \in B$ , ist  $c$  die kleinste obere Schranke für  $A$ . Hiermit ist  $c$  eindeutig bestimmt.

(Seien  $c$  und  $c'$  zwei Suprema von  $A$ ,  $c$  ist die kleinste obere Schranke und  $c'$  ist eine obere Schranke  $\Rightarrow c \leq c'$ . Das gleiche Argument mit  $c, c'$  vertauscht liefert  $c' \leq c$ )

- ii) Sei  $A$  eine nach unten beschränkte, nicht leere Menge. Sei  $-A := \{-x \mid x \in A\}$  die Menge der additiven Inversen von  $A$ . Dann  $-A \neq \emptyset$  und nach oben beschränkt. i)  $\Rightarrow \exists s = \sup(-A) \Rightarrow -s$  ist das Infimum von  $A$

### Korollar 2.11

1. Falls  $E \subset F$  und  $F$  nach oben beschränkt ist, gilt  $\sup E \leq \sup F$
2. Falls  $E \subset F$  und  $F$  nach unten beschränkt ist, gilt  $\inf F \leq \inf E$
3. Falls  $\forall x \in E, \forall y \in F$  gilt  $x \leq y$ , dann folgt  $\sup E \leq \inf F$
4. Seien  $E, F \neq \emptyset, E, F \subset \mathbb{R}, h \in \mathbb{R}, h > 0$ 
  - (i) Falls  $E$  ein Supremum besitzt  $\Rightarrow \exists x \in E$  mit  $x > \sup E - h$
  - (ii) Falls  $E$  ein Infimum besitzt  $\Rightarrow \exists y \in E: y < \inf E + h$ .

Das Supremum,  $\sup X = \sigma$  der Menge  $X$  ist folgendermassen charakterisiert: Es gibt in  $X$  keine Zahlen  $> \sigma$ ; aber für jede Toleranz  $h > 0$  gibt es in  $X$  Zahlen  $> \sigma - h$



Es gibt in  $X$  keine Zahlen  $< \inf X$ ; aber für jede Toleranz  $h > 0$  gibt es in  $X$  Zahlen  $< \inf X + h$

- (iii) Sei  $E + F = \{e + f : e \in E, f \in F\}$ . Falls  $E$  und  $F$  ein Supremum besitzen  $\Rightarrow E + F$  besitzt ein Supremum und  $\sup(E + F) = \sup(E) + \sup(F)$ . (Analog mit Infimum)

### Beweis

Ask for full Beweis!!

**Beispiel**

1.  $E = (-\infty, 2) \subset F = (-\infty, 4]$   
 $\sup E = 2, \sup F = 4 = \max F$   
 $E$  hat kein Maximum  
 $\sup E \leq \sup F$
2.  $G : [4, 5) \subset H = (3, 6)$   
 $\min G = \inf G = 4 \geq \inf H = 3$
3.  $K = (3, \infty), E = (-\infty, 2)$   
 $\forall x \in E, y \in K$  gilt  $x \leq y$   
 $2 = \sup E \leq 3 = \inf K$
4.  $A = \{\sin x \mid x \in \mathbb{R}\}$   
 $\inf A = -1 = \min A$   
 $\sup A = 1 = \max A$
5.  $A = \{(1 + \frac{1}{n})^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Wir werden sehen, dass  $A$  nach unten und nach oben beschränkt ist.  
 $\inf A = \min A = 2$   
 $\sup A = 2.718 \dots =: e$  (die Eulersche Zahl per Vereinbarung)

Für nach oben unbeschränkte Mengen  $A \neq \emptyset$  setzen wir  $\sup A = \infty$ . Analog für nach unten unbeschränkte Menge  $\emptyset \neq A$  setzen wir  $\inf A = -\infty$ . Der folgende Satz zeigt, wie die Ordnungsvollständigkeit von  $\mathbb{R}$  die Lösbarkeit gewisser Gleichungen in  $\mathbb{R}$  garantiert.

**Satz 2.12**

Für jedes  $x > 0$  gibt es genau ein  $y > 0$  mit  $y^2 = x$ . Diese Lösung wird mit  $\sqrt{x}$  bezeichnet.

(Im Allgemeinen: Für jedes  $x > 0$  und  $n \geq 1, n \in \mathbb{R}$  gibt es genau ein  $y > 0$  mit  $y^n = x$ . Diese Lösung wird mit  $\sqrt[n]{x}$  bezeichnet)

**Beweis**

Sei  $x > 1$ , und  $A := \{z \in \mathbb{R} \mid z > 0 \text{ mit } z^2 \leq x\}$ . Dann ist  $A$  nach oben beschränkt und  $A \neq \emptyset$  (da mindestens  $1 \in A$ ).

$\Rightarrow A$  besitzt ein Supremum.

Sei  $y := \sup A$ . Wir zeigen, dass  $y^2 = x$

- Schritt 1: Annahme  $y^2 < x$ .  
 Sei  $0 \leq h \leq 1$ . Wir nehmen an:

$$\begin{aligned}
 (y+h)^2 &= y^2 + 2hy + h^2 \\
 &= y^2 + h(2y+h) \\
 &\leq y^2 + h(2y+1) \\
 &= y^2 + h((y+1)^2 - y^2)
 \end{aligned}$$



## KAPITEL 2. REELLE ZAHLEN, EUKLIDISCHE RÄUME UND KOMPLEXE ZAHLEN

Weil  $y^2 < x$  ist,  $\frac{x-y^2}{(y+1)^2-y^2} > 0$  und daher gibt es  $h \in \mathbb{R}$ ,  $h > 0$ ,  
 $h \leq \frac{x-y^2}{(y+1)^2-y^2}$  (sei  $h = \min\{1, \frac{x-y^2}{2x+1}\}$ )

Für solche  $h$  gilt

$$(y+h)^2 \leq y^2 + \left( \frac{x-y^2}{(y+1)^2-y^2} \right) ((y+1)^2 - y^2) = x$$

Also  $y+h \in A$  und  $y+h > y$ . Ein Widerspruch:  $y$  ist eine obere Schranke für  $A$ , d.h.,  $z < y \forall z$   
 $\Rightarrow y^2 \geq x$  Analog beweist man  $y^2 \leq x$

- Schritt 2: Annahme  $y^2 > x$   
 Sei  $h = \frac{y^2-x}{2y} \neq 0$

$$(y-h)^2 = y^2 - 2hy + h^2 > y^2 - 2hy = y^2 - (y^2 - x) = x$$

$\Rightarrow y-h$  ist eine obere Schranke für  $A$

( $\forall z \in A, z^2 \leq x$ . Da  $(y-h)^2 > x$  ist,  $(y-h)^2 > x \geq z^2$ . Damit  $y-h > z, \forall z \in A$ )

Aber  $y-h < y$ , Widerspruch zur Minimalität von  $y$ .

Falls  $0 < x < 1$ , dann  $\frac{1}{x} > 1$   
 $\Rightarrow \exists u \in \mathbb{R}$ , mit  $u^2 = \frac{1}{x}$

Somit  $\frac{1}{u^2} = \left(\frac{1}{u}\right)^2 = x$  und  $y = \frac{1}{u}$  ist eine Lösung von  $y^2 = x$ .

Zum Abschluss dieses Themas erwähnen wir noch eine wichtige Eigenschaft der reellen Zahlen

### Satz 2.13 (Archimedische Eigenschaft)

Zu jeder Zahl  $0 < b \in \mathbb{R}$  gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $b < n$ .

### Beweis (Indirekt)

Andernfalls gibt es  $b \in \mathbb{R}$  mit  $n \leq b, \forall n \in \mathbb{N}$

$$(\neg \exists n \in \mathbb{N} : b < n) = (\forall n \in \mathbb{N} : b \geq n)$$

Dann ist  $b$  eine obere Schranke für  $\mathbb{N}$  und es existiert  $c = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$ . Mit  $n \in \mathbb{N}$  ist jedoch auch  $n+1 \in \mathbb{N}$ .

Also:  $n+1 \leq c, \forall n \in \mathbb{N}$ . Somit folgt  $n \leq c-1, \forall n \in \mathbb{N}$  ein Widerspruch zur Minimalität von  $c$ .

### Korollar 2.14

1. Seien  $x > 0$  und  $y \in \mathbb{R}$  gegeben. Dann gibt es  $n \in \mathbb{Z}$  mit  $y < nx$
2. Falls  $x, y, a \in \mathbb{R}$  die Ungleichheiten  $a \leq x \leq a + \frac{y}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$  erfüllen, ist  $x = a$ .

### Beweis

#### 1. ASK FOR BEWEIS

Ask for beweis

2.  $a < x \Rightarrow x - a > 0$   
 $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n(x - a) > y$   
 $\Rightarrow x > a + \frac{y}{n}$  Widerspruch

Wir wissen, dass gewisse Gleichungen in  $\mathbb{R}$  lösbar sind: z.B.  $y^2 = a$ ,  $\forall a > 0$ . Aber man kann nicht alle Gleichungen in  $\mathbb{R}$  lösen, z.B.  $x^2 + 1 = 0$ . Da für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt, dass  $x^2 > 0$ , ist  $x^2 = -1$  nicht lösbar. Um eine Lösung für diese Gleichung zu finden, müssen wir die komplexen Zahlen betrachten.

Zuerst werden wir die Euklidischen Räume  $\mathbb{R}^n$  einführen

## 2.4 Euklidische Räume

Mit der Mengentheorie können wir das kartesische Produkt zweier Mengen bilden; es lässt sich ohne Schwierigkeiten zu endlichen Familien  $A_1, \dots, A_n$  verallgemeinern, nämlich

$$A_1 \times \dots \times A_n := \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in A_i\}$$

ist die Menge der geordneten  $n$ -Tupel von Elementen aus  $A_1, \dots, A_n$ .

Für beliebige  $n \geq 1$  betrachten wir  $\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n\text{-mal}}$  und untersuchen dessen Struktur. Auf  $\mathbb{R}^n$  haben wir zwei Verknüpfungen

1.  $+: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  Addition.  

$$\left( \underbrace{(x_1, \dots, x_n)}_x, \underbrace{(y_1, \dots, y_n)}_y \right) \rightarrow \underbrace{(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)}_{\text{Komponentenweise Addition}}$$
Dann ist  $(\mathbb{R}^n, +)$  eine Abelsche Gruppe, mit  $0 := (0, \dots, 0)$  als neutrales Element

2.  $\cdot: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  Skalarmultiplikation.  
 $(\lambda, x) \rightarrow \lambda \cdot x := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$ . Dann gelten die folgende Eigenschaften:  
 $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(a) Distributivität:  $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

(b) Distributivität:  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

(c) Assoziativität:  $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

(d) Neutralelement:  $1 \cdot x = x$

### Definition 2.15

Eine Menge  $\mathbb{V}$  mit  $+, \cdot$  und  $0 \in \mathbb{V}$ , so dass  $(\mathbb{V}, +)$  eine Abelsche Gruppe mit neutralem Element 0 ist und zudem (a)-(d) gelten, nennt sich einen Vektorraum über dem Körper  $\mathbb{R}$  und seine Elemente heißen Vektoren.

## KAPITEL 2. REELLE ZAHLEN, EUKLIDISCHE RÄUME UND KOMPLEXE ZAHLEN

Also ist  $\mathbb{R}^n$  ein Vektorraum. In der linearen Algebra führt man dann Begriffe wie Basis usw. ein. Die Standardbasis von  $\mathbb{R}^n$  ist die Menge  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  wobei  $e_i := \{0, \dots, 0, 1, \dots, 0\}$ .

Jeder Vektor  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  besitzt eine eindeutige Darstellung  $x = \sum x_i e_i$  bezüglich der Standardbasis.

### Definition 2.16

1. Das Skalarprodukt zweier Vektoren  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$  ist die durch

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

definierte reelle Zahl

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

2. Falls  $\langle x, y \rangle = 0$  heißen  $x$  und  $y$  senkrecht (orthogonal) aufeinander.  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  besitzt folgende Eigenschaften

- (a) Symmetrie:  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- (b) Linearität:  $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle$
- (c) Positivität:  $\langle x, x \rangle \geq 0$  mit Gleichheit genau dann, wenn  $x = 0$

### Definition 2.17

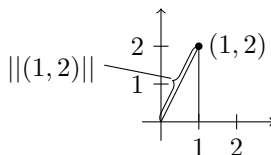
Die Norm  $\|x\|$  eines Vektors ist:

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

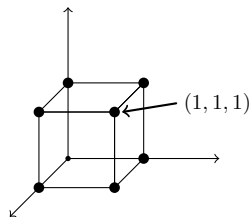
und wird oft als Länge interpretiert.

### Beispiel 2.18

- $\|(1, 2)\| = \sqrt{1 + 4}$



- $\|(1, 1, 1)\| = \sqrt{3}$



- $\|e_i\| = 1, \langle e_i, e_j \rangle = 0. e_i \perp e_j$   
 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  ist eine orthonormale Basis. Die Vektoren einer orthogonalen Basis sind orthogonal zueinander und normiert (die Länge ist gleich 1).

Die erste wichtige Eigenschaft des Skalarprodukts ist

**Satz 2.19 (Cauchy-Schwarz)**

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$  gilt  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$  und

$|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\| \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : x = \lambda y \Leftrightarrow$  die Vektoren sind parallel zueinander

Die Euklidische Norm hat die Eigenschaften

**Satz 2.20**

- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$  (Homogenität)
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (Dreiecksungleichung)

**Beweis**

ASK FOR BEWEIS

- ASK FOR BEWEIS

•

$$\begin{aligned}
 \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\
 &= \langle x, x + y \rangle + \langle y, x + y \rangle \\
 &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\
 &= \langle x, x \rangle + 2 \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\
 &\leq \|x\|^2 + 2 |\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \\
 &\leq \|x\|^2 + 2 \|y\| \|x\| + \|x\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2
 \end{aligned}$$

## 2.5 Die Komplexen Zahlen

Da für alle  $x \in \mathbb{R}$   $x^2 \geq 0$  gilt, gibt es  $\sqrt{-1}$  nicht als reelle Zahl. Seit dem 18. Jahrhundert haben Mathematiker mit Ausdrücken wie  $a + b\sqrt{-1}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  gerechnet und auf sie die in  $\mathbb{R}$  geltenden Rechenregeln angewandt, z.B.

$$(1 + 2\sqrt{-1})(1 - 2\sqrt{-1}) = 1^2 - 2^2(\sqrt{-1})^2 = 5$$

Allgemein:

$$\begin{aligned}(a + b\sqrt{-1})(c + d\sqrt{-1}) &= ac + ad\sqrt{-1} + bc\sqrt{-1} + bd\sqrt{-1} \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)\sqrt{-1}\end{aligned}$$

Das Problem hier ist, dass  $\sqrt{-1}$  keinen präzisen mathematischen Sinn hat und dass deshalb auch nicht klar ist, was “+” in “ $a + b\sqrt{-1}$ ” bedeuten soll.

Das Problem wird wie folgt gelöst:

Als Modell von “ $a + b\sqrt{-1}$ ”,  $\mathbb{C}$ , nehmen wir  $\mathbb{R}^2$ . Wir kennen bereits die Addition von Vektoren und das neutrale Element  $0 = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ . Wir definieren dann die Multiplikation

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\rightarrow x \cdot y\end{aligned}$$

wobei  $x \cdot y = (ac - bd, ad + bc)$ ,  $x = (a, b)$ ,  $y = (c, d)$ . Dann erfüllen “+” und “.” folgende Eigenschaften:

- Assoziativität:  $((a, b)(c, d))(e, f) = (a, b)((c, d)(e, f))$
- Neutrales Element:  $(1, 0)(a, b) = (a, b)$
- Kommutativ:  $(a, b)(c, d) = (c, d)(a, b)$
- Inverses Element  $\forall (a, b) \neq (0, 0)$  in  $\mathbb{R}^2$   $\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2$  mit  $(a, b)(x, y) = (1, 0)$
- Distributivität:  $((a, b) + (c, d)) \cdot (e, f) = (a, b)(e, f) + (c, d)(e, f)$

### Definition 2.21

Der Körper der komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  ist  $\mathbb{R}^2$  versehen mit “+”, “.”,  $0 = (0, 0)$  und  $(1, 0) = 1$

### Bemerkung 2.22

$z^2 + 1 = 0$  hat in  $\mathbb{C}$  eine Lösung. Nämlich ist  $(0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -(1, 0) = -1$ . Wir führen für  $(0, 1)$  die Bezeichnung “ $i$ ” ein, welches imaginäre Einheit heisst.

Also ist  $i^2 = -1$ . Jede komplexe Zahl  $z = (x, y)$  lässt sich dann wie folgt darstellen:

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x \cdot 1 + y \cdot i$$

In den Rechnungen lässt man oft das 1 in  $x \cdot 1$  fallen und schreibt  $z = x + yi$

**Definition 2.22**

1. Sei  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ 
  - $\operatorname{Re} z := x$  heisst der Realteil
  - $\operatorname{Im} z := y$  heisst der Imaginärteil
2. Die zu:  $z = x + iy$  konjugierte Zahl ist  $\bar{z} = x - iy$
3. Wir definieren die Norm von  $z$  als  $\|z\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

**Satz 2.23**

- (i)  $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- (ii)  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
- (iii)  $z \cdot \bar{z} = \|z\|^2 \cdot 1$
- (iv)  $\|z_1 \cdot z_2\| = \|z_1\| \cdot \|z_2\|$

**Beweis**

ASK FOR BEWEIS

ASK FOR BEWEIS

**Abkürzung**

$$|z| := \|z\|$$

**Bemerkung 2.24**

Wir können  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{C}$  “einbetten” mittels  $\mathbb{R} \ni x \rightarrow (x, 0) \in \mathbb{C}$ . Sei  $\mathbb{C}_0 = \{(x, y) \in \mathbb{C} \mid y = 0\} = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ . Die Abbildung  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}_0, x \rightarrow (x, 0)$  ist eine Bijektion.

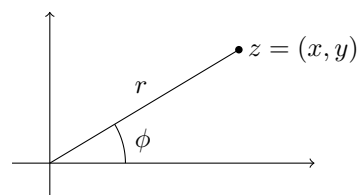
Diese Identifikation von  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}_0$  ist verträglich mit den Operationen in  $\mathbb{R}$  und in  $\mathbb{C}$ , d.h.

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

**Polarform**

Als Polarkoordinaten in der Ebene führen wir  $(r, \phi)$  ein



$$x = r \cos \phi \quad y = r \sin \phi$$

$$z = r (\cos \phi + i \sin \phi)$$

$$r = |z|$$

## KAPITEL 2. REELLE ZAHLEN, EUKLIDISCHE RÄUME UND KOMPLEXE ZAHLEN

### Definition

Wir definieren (nach Euler)

$$e^{i\phi} := \cos \phi + i \sin \phi$$

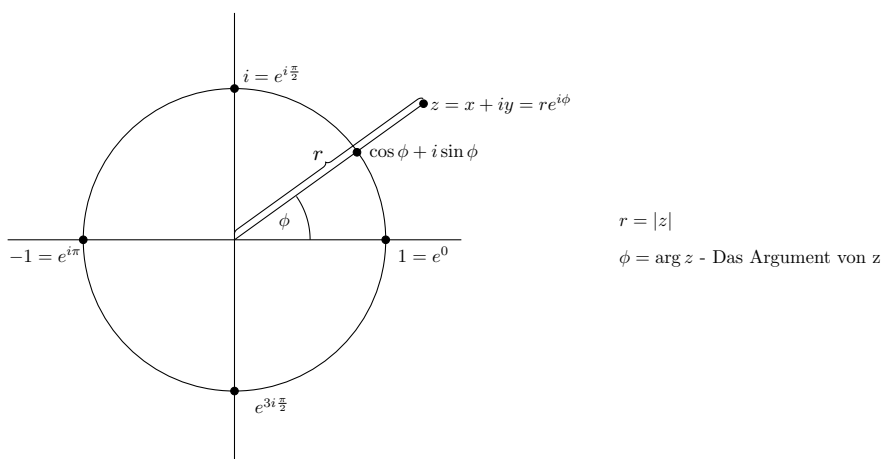
$$z = re^{i\phi} = |z|e^{i\phi}$$

Where does the definition end??

In der Ebene  $\mathbb{R}^2$  stehen uns neben den kartesischen Koordinaten  $x, y$  noch die Polarkoordinaten  $r, \phi$  zur Verfügung. Es gelten die folgenden Additionstheoreme:

- $\cos(\phi + \psi) = \cos \phi \cos \psi - \sin \psi \sin \phi$
- $\sin(\phi + \psi) = \sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \psi$

Für beliebiges  $z = x + iy \neq 0$  gilt also:



$$e^{i\phi} = 1 \Leftrightarrow \phi = 2k\pi$$

$$\cos \phi + i \sin \phi = 1 \Leftrightarrow \cos \phi = 1 \text{ und } \sin \phi = 0$$

$$\Leftrightarrow \phi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} e^{i\theta} \cdot e^{i\phi} &= (\cos \theta + i \sin \theta) (\cos \phi + i \sin \phi) \\ &= \underbrace{\cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi}_{\cos(\theta+\phi)} + i \underbrace{(\cos \theta \sin \phi + \sin \theta \cos \phi)}_{\sin(\theta+\phi)} \\ &= e^{i(\theta+\phi)} \end{aligned}$$

Es folgt somit  $e^{i\phi} e^{i\psi} = e^{i(\phi+\psi)}$ .

Somit folgt für  $z = re^{i\theta}$ ,  $\omega = se^{i\phi} \in \mathbb{C}$  die einfache Darstellung  $z\omega = rse^{i(\theta+\phi)}$ ,

$$\frac{z}{\omega} = \left(\frac{r}{s}\right) e^{i(\theta-\phi)}$$

## KAPITEL 2. REELLE ZAHLEN, EUKLIDISCHE RÄUME UND KOMPLEXE ZAHLEN

Die polare Darstellung ist in Berechnungen sehr nützlich, insbesondere um das Produkt und den Quotienten zu berechnen

### Beispiel

$$\begin{aligned}z &= 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \\ \omega &= \sqrt{3} - i = 2e^{-i\frac{\pi}{6}} \\ \frac{(\sqrt{3} - i)^3}{(1 + i)^2} &= \frac{\omega^3}{z^4} = \frac{8e^{-i\frac{\pi}{2}}}{4e^{i\pi}} = 2e^{-\frac{3\pi}{2}i} = 2e^{\frac{\pi}{2}i} = 2i\end{aligned}$$

Die Polarform ist auch sehr nützlich um die Wurzel einer komplexen Zahl zu berechnen. Sei  $\omega \in \mathbb{C}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Wir möchten die Gleichung  $z^n = \omega$  lösen.

$$\begin{aligned}\omega &= |\omega|e^{i\phi} \\ z^n = \omega &= |\omega|e^{i\theta} = |\omega|e^{i(\theta+2k\pi)} \\ \Rightarrow z &= |\omega|^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{(\theta+2k\pi)}{n}}\end{aligned}$$

### Beispiel

$$z^3 = 1 \Rightarrow z = (e^{2\pi ik})^{\frac{1}{3}} \in \{e^{i\pi \frac{2k}{3}} : k = 0, 1, 2\} = \{1, e^{2i\frac{\pi}{3}}, e^{4i\frac{\pi}{3}}\}$$

Allgemeine Formel der  $n$ -ten Einheitswurzel  $z = \{e^{i\frac{2\pi k}{n}} : k = 0, 1, \dots, n-1\}$

### Bemerkung

1. Es gibt keine mit den Körperoperationen verträgliche Ordnung in  $\mathbb{C}$ .
2. Hingegen ist  $\mathbb{C}$  im Unterschied zu  $\mathbb{R}$  algebraisch vollständig. Nicht nur die Gleichung  $x^2 + 1 = 0$  hat in  $\mathbb{C}$  eine Lösung, sondern es gilt der Fundamentalsatz der Algebra. Er sagt, dass jedes Polynom  $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$  vom Grad  $n \geq 1$  in  $\mathbb{C}$  genau  $n$  Nullstellen hat.