Kapitel 9

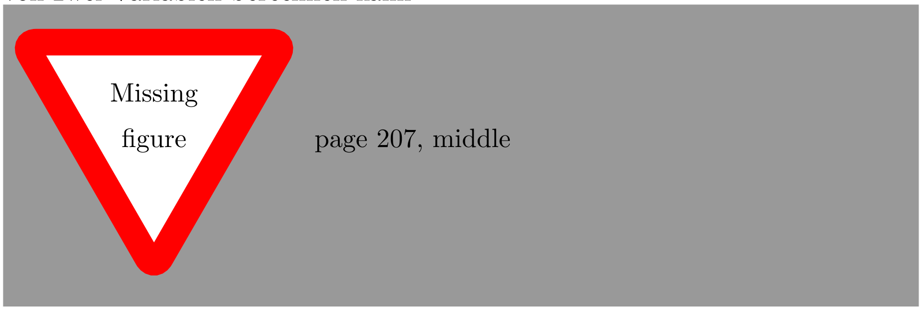
Integration in $\mathbb{R}^n$

Im Eindimensionalen hatten wir mit dem Integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

den Flächeninhalt unter dem Graphen von f berechnet. Wir suchen nach eine Verallgemeinerung mit der z.B. Volumen unter dem Graphen einer Funktion von zwei Variablen berechnen kann

can't understand word, page 207 middle



Erinnerung: Bestimmtes Riemann-Integral einen Funktion $f(x)$ über einem Interval $[a, b]$:

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

Das Integral I war als Grenzwert von Riemannscher Ober und Untersumme definiert (falls diese Grenzwert jeweils existieren und übereinstimmten).

Konstruktionsprinzip für Bereichsintegrale ist Analog. Aber die Definitionsbereich D ist komplizierter. Wir betrachten zunächst den Fall zweier Variabler, $n = 2$, und einen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}^2$ der Form

$$D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$$

d.h. D ist ein kompakter Quader (Rechteck). Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.

Definition 9.1

Mann nennt $Z = \{(x_0, x_1, \dots, x_n), (y_0, y_1, \dots, y_m)\}$ eine Zerlegung des Quaders $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ falls gilt

$$a_1 = x_0 < x_1 \cdots < x_n = b_1$$
$$a_2 = y_0 < y_1 \cdots < y_m = b_2$$

1. WHERE IS NUMBER 1??

2. Die Feinheit einer Zerlegung $Z \in Z(D)$ ist

$$\|Z\| := \max_{i,j} \{|x_{i+1} - x_i|, |y_{j+1} - y_j|\}$$

3. Für eine vorgegebene Zerlegung Z, nennt man die Mengen

$$Q_{ij} := [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$$

   die Teilquader der Zerlegung Z. Das Volumen des Teilquaders Q_{ij} ist

$$\mathrm{vol}(Q_{ij}) := (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$$

4. Für beliebige Punkte $\xi_{ij} \in Q_{ij}$ der Jeweiligen Teilquader nennt man

$$R_f(Z) := \sum_{i,j} f(\xi_{ij}) \,\mathrm{vol}(Q_i j)$$

   eine Riemannsche Summe zur Zerlegung Z

5. Analog zum Integral einer Variablen heissen für eine Zerlegung Z

$$U_f(Z) := \sum_{i,j} \inf_{\mathbb{X} \in Q_{ij}} f(\mathbb{X}) \,\mathrm{vol}(Q_i j)$$
$$O_f(Z) := \sum_{i,j} \sup_{\mathbb{X} \in Q_{ij}} f(\mathbb{X}) \,\mathrm{vol}(Q_i j)$$

   die Riemannsche Untersumme bzw. Riemannsche Obersumme con $f(x)$

Bemerkung 9.2

1. Es gilt

$$U_f(Z) \leq R_f(Z) \leq O_f(Z)$$

   d.h. eine Riemannsche Summe zur Zerlegung Z liegt stets zwischen der Unter und Obersumme dieser Zerlegung.

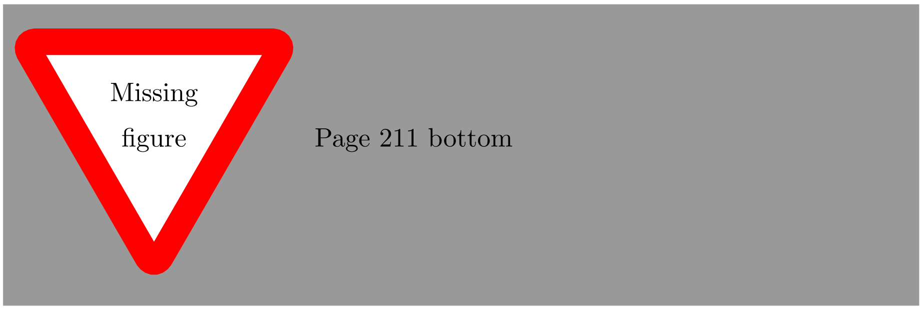
2. Entsteht eine Zerlegung Z_2 aus der Zerlegung Z_1 durch Hinzunahme wei-

terer zwischenpunkte x_i oder/und y_j so gilt

$$U_f(Z_2) \geq U_f(Z_1) \text{ und}$$
$$O_f(Z_2) \leq O_f(Z_1)$$

Für zwei beliebige Zerlegungen Z_1, Z_2 gilt stets

$$U_f(Z_1) \leq O_f(Z_2)$$



Definition 9.3

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ beschränkt

1. Riemannsche Unterintegral bsz. Riemannsche Oberintegral der Funktion $f(x)$ über D ist

$$U_f := \sup\{U_f(z) : z \in Z(D)\} := \int_{\underline{D}} f(x) d\mu$$

$$O_f := \inf\{O_f(z) : z \in Z(D)\} := \bar{\int_D} f(x) d\mu$$

2. Die Funktion $f(x)$ nennt man Riemann - integrierbar über D, falls Unter und Oberintegral übereinstimmen. Das Riemann Integral von $f(x)$ über D ist

$$\int_D f(x) d\mu = \bar{\int_D} f(x) d\mu = \int_{\underline{D}} f(x) d\mu$$

Bemerkung

In höheren Dimensionen, $n > 2$, ist die Vorgehensweise analog. Schreibweise: Für $n = 2$, $n = 3$

$$\int_D f(x, y)\, d\mu \text{ bzw. } \int_D f(x, y, z)\, d\mu$$

oder auch

$$\int_D f(x,y)\,dxdy \text{ bzw. } \int_D f(x,y,z)\,dxdydz$$

oder

$$\int_D f dxdy \text{ bzw. } \int_D f dxdydz$$

Satz 9.4 (Elementare Eigenschaften des Integrals)

1. Linearität: Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ beschränkt und R integrabel, $\beta, \alpha \in \mathbb{R}$. Dann sind αf, $f+g$ R - Integrabel

$$\int_D (\alpha f + \beta g)\,d\mu = \alpha \int_D f d\mu + \beta \int_D g d\mu$$

2. Monotonie: Gilt $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in D$, so folgt

$$\int_D f d\mu \leq \int_D g d\mu$$

3. Positivität: Gilt für alle $x \in D$, $f(x) \geq 0$ (d.h. $f(x)$ ist nichtnegativ), so folgt

$$\int_D f d\mu \geq 0$$

4. Abschätzung

$$\left| \int_D f(x) d\mu \right| \leq \sup_{x \in D} |f(x)| \operatorname{vol}(D)$$

5. Sind D_1, d_2, D Quader, $D = D_1 \cup D_2$ und $\operatorname{vol}(D_1 \cap D_2) = 0$, so ist f genau dann über D integrierbar, falls f über D_1 und über D_2 integrierbar ist und es gilt

$$\int_D f d\mu = \int_{D_1} f d\mu + \int_{D_2} f d\mu$$

(Gebietsadditivität)

9.1 Der Satz von Fubini

According to the notes it should be 9.2, which one is right??

Wie kann man das R - Integral konkret berechnen? Der Satz von Fubini hilft uns.

Satz 9.5 (Satz von Fubini)

Sei $Q = [a,b] \times [c,d] \in \mathbb{R}^2$ und sei $f \in C^\circ(Q)$. Dann gilt

$$\int\limits_Q f d\mu = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\, dy \right) dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)\, dx \right) dy$$

d.h. das Integral von f über Q kann iterativ durch $1-$Dimensionale Integration bestimmt werden

Beispiel 9.6

1. Sei $f(x,y) = 2x + 2yx$, $Q = [0,1] \times [-2,2]$

$$\begin{aligned}\int\limits_Q f d\mu &= \int\limits_{-2}^2 \left(\int\limits_0^1 (2x + 2yx)\, dx \right) dy \\ &= \int\limits_{-2}^2 \left(x^2 + yx^2 \Big|_0^1 \right) dy \\ &= \int\limits_{-2}^2 (1+y)\, dy = y + \frac{y^2}{2}\Big|_{-2}^2 = 4\end{aligned}$$

<u>Oder:</u>

$$\begin{aligned}&\int\limits_0^1 \left(\int\limits_{-2}^2 (2x + 2yx)\, dy \right) dx \\ &= \int\limits_0^1 \left(2xy + y^2 x \Big|_{-2}^2 \right) dx \\ &= \int\limits_0^1 \left[(4x + 4x) - (-4x + 4x) \right] dx \\ &= \int\limits_0^1 8x dx = 4x^2 \Big|_0^1 = 4\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}&\int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} (e^x \sin y)\, dy dx \\ &= \int\limits_0^1 \left(-e^x \cos y \Big|_0^{2\pi} \right) dx \\ &= \int\limits_0^1 0 dx = 0\end{aligned}$$

Oder:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^1 e^x \sin y dx\right) dy \\
&= \int\limits_0^{2\pi}\left(\sin y e^x|_0^1\right) dy \\
&= \int\limits_0^{2\pi} (e-1)\sin y dy \\
&= -(e-1)\cos y|_0^{2\pi} = 0
\end{aligned}$$

Geometrische Dehnung

Not sure about the text size...

In der Skizze ergibt sch als Volumen der markierten Schicht bei festem x und sehr kleinen Dicke dx näherungswege das Volumen

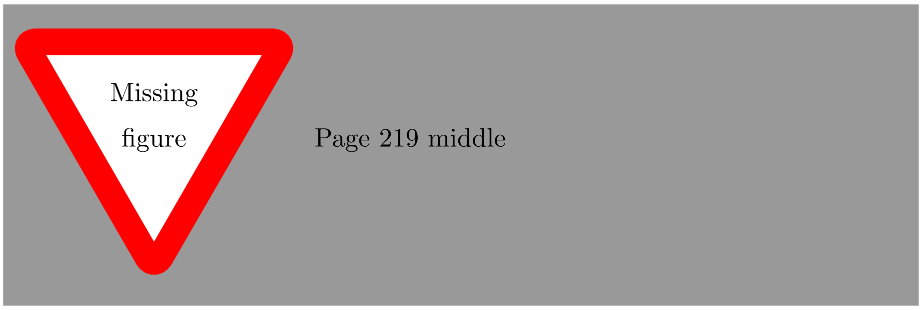
$$\left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right) dx$$

Das Aufaddieren sämtlicher Schichtvolumen entspricht gerader der Integration über die Variable x, d.h. für das gesuchte Volumen gilt

$$V = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right) dx$$

Bis jetzt können wir nur Integrale über achsenparallel rechteckige bzw. quaderförmige Bereiche berechnen.

Das reicht für viele praktische Aufgaben nicht aus. Meist ist der Integrationsbereich D krummling oder zumindest anders begrenzt



Die meisten praktischen Aufgaben lassen sich auf die Integration über sogenannte Normalbereiche zurückführen.

Definition 9.10

1. Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^2$ heisst ein Normalbereich bezüglich der $x-$achse bzw. bezüglich der $y-$Achse falls es stetige Funktionen g, h bzw. $\overline{g}, \overline{h}$ gibt mit

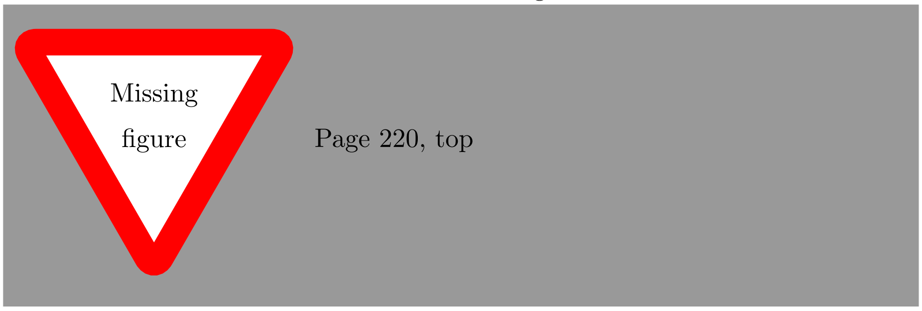
$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \text{ und } g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

   bzw.

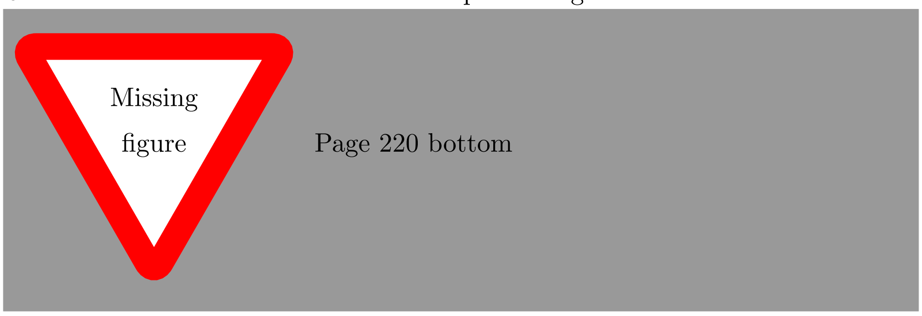
$$D = \left\{(x, y) \mid \overline{a} \leq x \leq \overline{b}, \text{ und } \overline{g}(x) \leq y \leq \overline{h}(x)\right\}$$

Beispiel

Kreise und Rechtecke sind Normalbereiche bzg. beider Achsen



Über Normalbereiche lässt sich sehr bequem integrieren



Die markierte Scheibe bei y =const. mit kleiner Dicke dx besitzt näherungsweise das Volumen

$$V(x) = \left(\int\limits_{g(x)}^{f(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

Nun braucht man $V(x)$ nur noch über $[a,b]$ zu integrieren

$$V = \int\limits_{a}^{b} \left(\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

Satz 9.11

1. Ist $f(x)$ stetig auf einem Normalbereich

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \text{ und } g(x) \leq y \leq h(x) \right\}$$

so gilt

$$\int\limits_{D} f(x)d\mu = \int\limits_{a}^{b} \left(\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

2. bzw. Falls

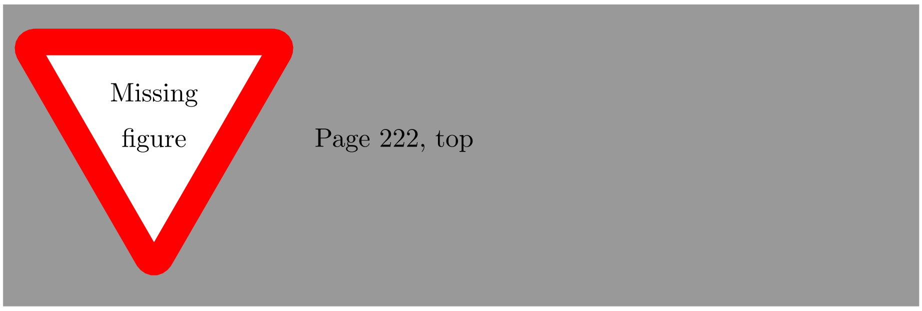
$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overline{a} \leq x \leq \overline{b}, \text{ und } \overline{g}(x) \leq y \leq \overline{h}(x) \right\}$$

so gilt

$$\int\limits_{D} f(x)d\mu = \int\limits_{\overline{a}}^{\overline{b}} \left(\int\limits_{\overline{g}(x)}^{\overline{h}(x)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

Beispiel 9.12

1. Sei $f(x,y) = x - y$



$$\begin{aligned}
\int\limits_D f d\mu &= \int\limits_{x=0}^{x=1} \int\limits_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} (x-y)\, dy dx \\
&= \int\limits_0^1 \left(xy - \frac{y^2}{2}\bigg|_0^{\sqrt{1-x^2}} \right) dx \\
&= \int\limits_0^1 \left(x\sqrt{1-x^2} - \frac{1-x^2}{2} \right) dx \\
&= \int\limits_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 1 - x^2 dx \\
&= \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$\int\limits_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx \quad \begin{aligned} u &= 1-x^2 \\ du &= -2x dx \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \sqrt{u} du = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\bigg|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\int\limits_D f d\mu = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

2. Sei D die durch die Gerade $g(x) = x+2$ und die Parabel $b(x) = 4-x^2$ begrenzte Gebiet

   missing content?? page 223 top

Schnittpunkte:

$$\begin{aligned}
x + 2 &= 4 - x^2 \\
x^2 + x - 2 &= 0 \\
(x-y)\,&(x+2)
\end{aligned}$$

Zu Berechnung des Doppelintegrals zerlegen wir das Gebiet in Streifen parallel zur $y-$Achse. Für festes x variiert y von $g(x) = x+2$ bis $h(x) =$

$4 - x^2$

$$\begin{aligned}
\int\limits_D x d\mu &= \int\limits_{-2}^{1} \left(\int\limits_{x+2}^{4-x^2} x dy \right) dx \\
&= \int\limits_{-1}^{2} x \left(4 - x^2 - x + 2\right) dx \\
&= \int\limits_{-1}^{2} \left(2x - x^3 - x^2\right) dx \\
&= x^2 - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^{2} \\
&= \left(4 - 4 - \frac{8}{3}\right) - \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) = -\frac{127}{36}
\end{aligned}$$

3. Sei D :

$$\int\limits_D f d\mu \underset{\substack{\downarrow \\ *}}{=} \int\limits_{-1}^{1} \left(\int\limits_{x=y^2}^{1} f dx \right) dy$$

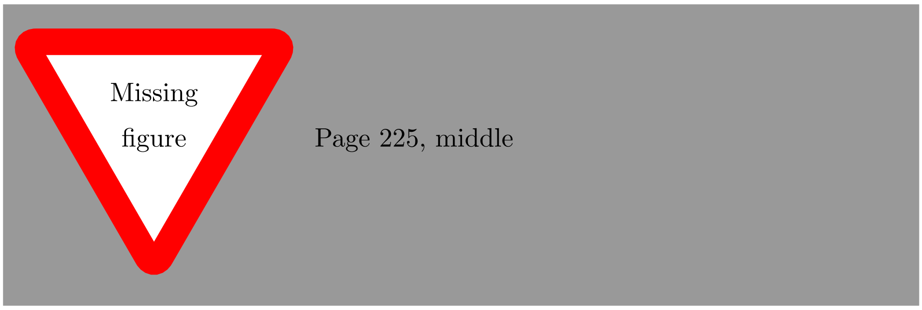
($*=$ Zerlegung des Gebietes in Streifen parallel zur $x-$achse)

oder mit Zerlegung in streifen parallel zur $y-$Achse

$$\int\limits_D f d\mu = \int\limits_{x=0}^{1} \left(\int\limits_{y=-\sqrt{x}}^{y=\sqrt{x}} f(x,y)\, dy \right) dx$$

Manchmal muss man D zerlegen.

4. Bestimme $\int\limits_D xdxdy$ wobei D von $y^2 = 4x$ und $y = 2x - 4$ begrenzt wird.



Schnittpunkte P_1, P_2:

$$\begin{aligned} 4x = y^2 &= (2x-4)^2 \\ &\Rightarrow (2x-4)^2 = 4x \ldots \\ &\Rightarrow x = 1 \text{ und } x = 4 \\ P_1 = (1,-2) & \qquad P_2 = (4,4) \end{aligned}$$

Zerlegung des Gebiets in Streifen parallel zur $y-$Achse

$$\int\limits_D x d\mu = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} x dy \right) dx + \int\limits_1^4 \left(\int\limits_{y=2x-4}^{2\sqrt{x}} x dy \right) dx = \ldots = 14.4$$

Wenn wir Aussen nach y integrieren, brauchen wir keine Unterteilung

$$\begin{aligned} \int\limits_D x d\mu &= \int\limits_{y=-2}^{y=4} \left(\int\limits_{y=\frac{y^2}{4}}^{\frac{y}{2}+2} x dx \right) dy \\ &= \int\limits_{-2}^{4} \left(\frac{x^2}{2} \Big|_{\frac{y^2}{4}}^{\frac{y}{2}+2} \right) dy \\ &= \frac{1}{2} \int\limits_{-2}^{4} \left(\left(\frac{y}{2} + 2 \right)^2 - \frac{y^4}{16} \right) dy \end{aligned}$$

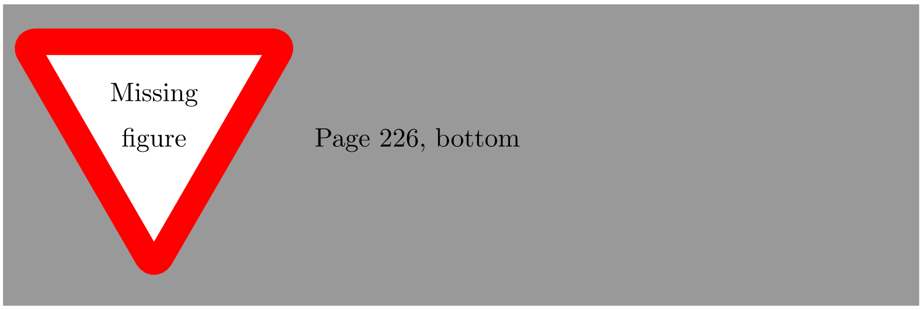
Bemerkung 9.13

1. Das Integral

$$A = \int\limits_D 1 d\mu$$

ergibt die Fläche von D. Für einen Normal bereich bzg. der $x-$Achse erhalten wir daraus die bekannte Formel

$$A = \int\limits_a^b \int\limits_{g(x)}^{h(x)} 1 dy dx = \int\limits_a^b (h(x) - g(x)) \, dx$$



2. Interpretiert man $\rho(x, y)$ als ortabhängige Flächendichte, so erhält man mit
$$m = \int_D \rho(x, y)\, d\mu$$
die Masse von D

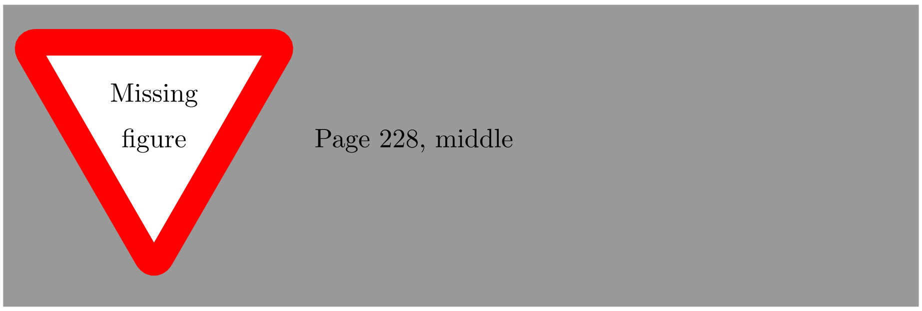
Definition 9.14

Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^3$ heisst Normalbereich, falls es eine Darstellung
$$D = \left\{ (x, y, z) \in R^3 \middle| a \leq x \leq b; g(x) < y < h(x); \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y) \right\}$$
gibt.

(Vertauscht man die Rollen von x, y und z so entstehen weitere Mengen, die auch Normalbereiche genannt werden.)

Satz 9.15

Sei $D \subset \mathbb{R}^3$ ein Normalbereich mit Darstellung wie oben, und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt
$$\int_D f d\mu = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z)\, dz dy dx$$



$z = \varphi(x, y)$ und $z = \psi(x, y)$ stellen die “Grund” und Deckelfläche von D dar.

Der Normalbereich A ist die Senkrechte Projektion von D in die $x-y$ Ebene. Dessen “Grund” und “Deckelkurve” sind durch $y = g(x)$ und $y = h(x)$ gegeben.

Bemerkung 9.16

Das Integral

$$V = \int_D 1 d\mu \text{ für } D \subset \mathbb{R}^3$$

ergibt das Volumen von D. Für einen Normalbereich

$$D = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x), \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$$

erhält man

$$V = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} 1 dz dy dx = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} \psi(x, y) - \varphi(x, y)\, dy dx$$

9.2 Substitutionsregel

Häufig sind kartesische koordinaten für die Berechnung von Integralen eher ungeeignet. z.B. wenn man symmetrien bezüglich gewisser Punkte oder Achsen nutzen will.

Wir behandeln als nächstes Variablentransformationen vom Typ $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und verallgemeinern die 1.Dim Substitutionsregel:

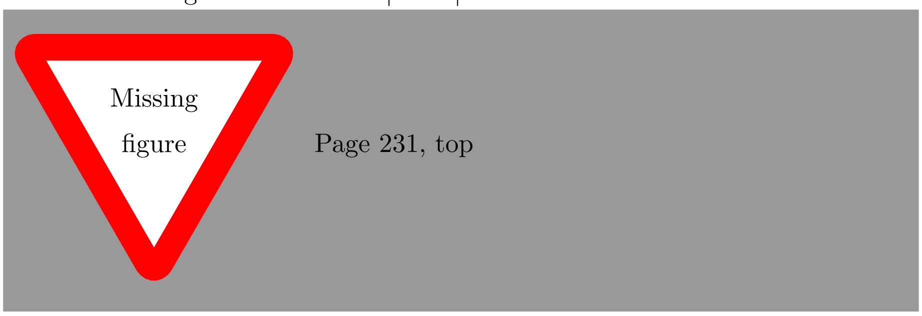
$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt$$

mit f stetig, $x = \varphi(t)$ $\varphi : [a, b] \to I$ stetig differenzierbar, $I =$ Interval. Zunächst erinnern wir uns an die Lineare Algebra:

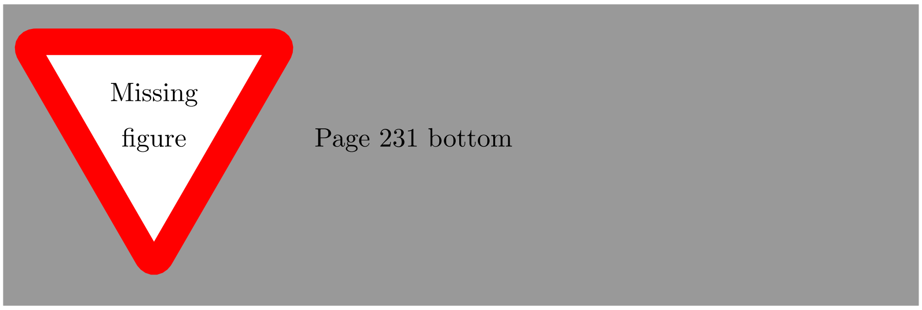
Das Bild des Einheitsquadrats/würfels unter der linearen Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ \vec{x} &\to A\vec{x} \qquad A \in \mathbb{R}^{n \times n} \end{aligned}$$

ist ein Parallelogram mit Fläche $|\det A|$



Dies bleibt wahr, wenn man zur affin-linearen Abbildung $\Phi(\vec{x}) = A\vec{a} + \vec{b}$ betrachtet es kommt ja nur ein Verschiebung zu



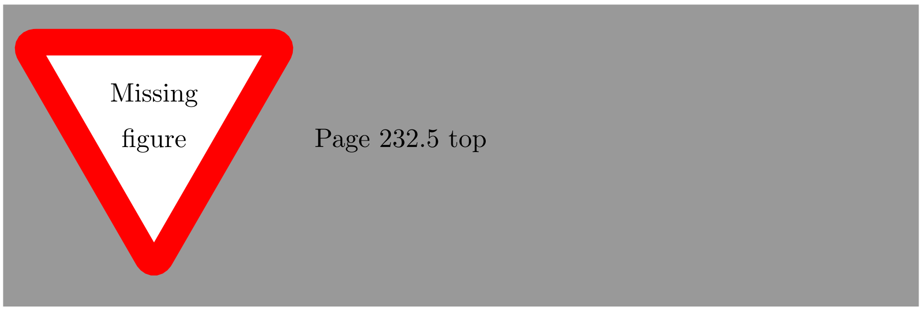
Nun, betrachten wir eine differenzierbare nichtlineare Transformation $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Dann gilt zumindest nahe eines festen Punktes $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$\Phi(x) \approx \Phi(x_0) + d\Phi(x_0)(\vec{x} - \vec{x_0})$$

Die rechte Seite stellt gerade eine Abbildung vom Typ $A\vec{x} + \vec{b}$ der wobei die Jacobi Matrix $d\Phi(x_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ die Rolle von A (und $\Phi(x_0)$ von $\vec{b}$) übernimmt. Damit ist der lokale Flächenverzerrungsfaktor von Φ gegeben durch $|\det d\Phi(x_0)|$ d.h. den Betrag der Jacobi oder Funktionaldeterminante. Die Lokale Flächenverzerrung muss bei der Substitution in Integralen berücksichtigt werden und zwar in der Form

$$\text{“}d\vec{x} = |\det d\Phi(\vec{y})|\, d\vec{y}\,\text{”}, \text{ falls } \vec{x} = \Phi(y)$$

Geometrische Darstellung in $\mathbb{R}^2$



Die Flächen der einander entsprechenden markierten Vierecke unterscheiden sich gerade um den Faktor $|\det d\Phi(x_1)|$ bzw. $|\det d\Phi(x_2)|$

Substitutionsregel

Satz 9.17

Sei $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi : U \to V$ bijektiv, stetig diff., $\det d\Phi(\vec{y}) \neq 0\ \forall \vec{y} \in U$, sowie $f : V \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt

$$\int_V f(\vec{x})\, d\mu(\vec{x}) = \int_{\Phi(U)=V} f(\Phi(\vec{y}))\, |\det d\phi(y)| d\mu$$

Beispiel 9.18

1. Berechne $\iiint\limits_V d\mu$, wobei

$$\underset{\text{Kugeloktanten}}{\underset{\downarrow}{\mathrm{V}}} \qquad = \left\{ (x,y,z)^t \middle| x^2+y^2+z^2 \leq 1, x,y,z \geq WHAT \right\}$$

Es ist einfacher in Kugelkoordinaten zu berechnen

chopped content, page 233 middle to bottom

$$\Phi\left(r,\theta,\psi\right) = \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\psi \\ r\sin\theta\cos\psi \\ r\sin\psi \end{pmatrix}$$