d.h. $f'(x_0)$ ist die Darstellung von $df(x_0)$

bzgl der Basis dx von $L(\mathbb{R};\mathbb{R})$;

(d) $f(x,y) = xe^y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist an jeder Stelle $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ differenzierbar und es

gilt $df(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$

$$= \left(e^{y_0}, x e^{y_0}\right)$$

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = \underbrace{f(x,y) - f(x_0,y)} + f(x_0,y) - f(x_0,y_0)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \eta)(y-y_0)$$

Nach dem MWS der DR, mit geeigneten Zwischenstellen $\xi = \xi(y)$ und η

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + R(x,y)$$

mit $R(x,y) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y)\right](x-x_0)$

$$+ \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\eta) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right](y-y_0)$$

Wegen die Stetigkeit der Funktionen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^y \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x e^y$$

können wir den "Fehler" $R(x,y)$ leicht abschätzen

$$\frac{|R(x,y)|}{|(x,y)-(x_0,y_0)|} \leq \sup_{\substack{|\xi - x_0| < |x-x_0| \\ |\eta - y_0| < |y-y_0|}} \left(|e^y - e^{y_0}| + |x_0| \, |e^{\eta} - e^{y_0}| \right)$$

Für $(x,y) \to (x_0,y_0)$, $(x,y) \neq (x_0,y_0)$: d.h es gilt

$$\frac{R(x,y)}{|(x,y)-(x_0,y_0)|} \to 0.$$

d.h es gilt

$$\frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}{|(x,y)-(x_0,y_0)|} \xrightarrow[(x,y)\to(x_0,y_0)]{} 0.$$

d.h $f(x,y)$ ist in (x_0,y_0) differenzierbar und

$$df(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \right)$$

e) Die funktion $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq 0,0 \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

ist in $(0,0)$ differenzierbar.

Wir haben schon gesehen dass $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

und $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Dann gilt

$$\frac{|R|}{\|(x,y)\|} = \frac{\left| f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0) \right|}{|x-0, y-0|}$$

$$= \frac{|f(x,y) - 0 - 0 - 0|}{|(x,y)|} = \frac{|f(x,y)|}{|(x,y)|}$$

Zum untersuchen ist

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|R((x,y),(0,0))|}{|(x,y)-(0,0)|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y)|}{|(x,y)|}$$

Mittels Polarkoordinaten ist dies noch einsichtiger.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y)|}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^4 \cos^3\theta \sin\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0} r^2 \cos^3\theta \sin\theta$$
$$= 0.$$

$\Rightarrow f$ in $(0,0)$ differenzierbar.

Gibt es eine Beziehung zwischen das Differential und der partielle Ableitungen?

(Bmk 7.1.1 Stm)

Satz 8.6. Sei $f: \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ differenzierbar an der Stelle $x_0 \in \Omega$. Dann existieren die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)$ $i=1,\dots,n$ und das Differential

$\Rightarrow$ kann $d_{x_0} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0)\right)$ dargestellt werden.

Beweis f an der Stelle x_0 differenzierbar

$$\Rightarrow f(x_0 + he_i) = f(x_0) + (d_{x_0} f)(he_i) + R(x_0 + he_i, x_0)$$

wobei $\lim_{h \to 0} \frac{R(x_0 + he_i, x_0)}{h} =$

$$\Leftrightarrow \lim \frac{f(x_0 + he_i) - f(x_0) - d_{x_0} f(he_i)}{h} = 0$$

$$\Rightarrow \lim \frac{f(x_0 + he_i) - f(x_0)}{h} = \lim \frac{h\, d_{x_0} f(e_i)}{h} = d_{x_0} f(e_i)$$

d.h. $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)$ existiert und $= d_{x_0} f(e_i)$

Da $(dx^i)_{i=1,\dots,n}$ die zur $(e_j)_{1 \le j \le n}$ duale Basis ist

$$\boxed{d_{x_0} f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)\, dx^i = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0), \dots \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0)\right)}$$

Bsp Die Funktion $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq 0,0 \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

ist in $(0,0)$ nicht differenzierbar. (f ist in $(0,0)$ nicht stetig.)

In der Tat:

Satz 8.7 Falls $f : \Omega \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ differenzierbar, ist sie in x_0 auch stetig.

Beweis: Folgt aus der Definition.

Defn 8.8 (Siehe Defn. 7.1-3) $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heisst von der Klasse C^1, ($f \in C^1(\Omega)$) falls f an jeder Stelle $x_0 \in \Omega$ und in jede Richtung e_i partielle differenzierbar ist und die Funktionen $x \to \frac{\partial f}{\partial x^i}(x)$ für jedes $1 \leq i \leq n$ auf Ω stetig sind.

Satz 8.9 (siehe Satz 7.1.1).

Sei $f \in C^1(\Omega)$. Dann ist f an jeder Stelle $x_0 \in \Omega$ differenzierbar.

Beweis: Für $n=3$.
Seien $x = (x^1, x^2, x^3)$, $x_0 = (x_0^1, x_0^2, x_0^3)$

Dann ist

$$f(x) - f(x_0) = \{f(x^1, x^2, x^3) - f(x^1, x^2, x_0^3)\}$$
$$+ \{f(x^1, x^2, x_0^3) - f(x^1, x_0^2, x_0^3)\}$$
$$+ \{f(x^1, x_0^2, x_0^3) - f(x_0^1, x_0^2, x_0^3)\}.$$

Nach dem MWS der DR gilt:

$$f(x^1, x_0^2, x_0^3) - f(x_0^1, x_0^2, x_0^3) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(\xi^1, x_0^2, x_0^3)(x^1 - x_0^1)$$

wobei ξ^1 zwischen x_0^1 und x^1 liegt.

Analog: $f(x^1, x^2, x_0^3) - f(x^1, x_0^2, x_0^3)$

$$= \frac{\partial f}{\partial x^2}(x^1, \xi^2, x_0^3)\,(x^2 - x_0^2)$$

wobei $\xi^2 \in (x_0^2, x^2)$

und $f(x^1, x^2, x^3) - f(x^1, x^2, x_0^3)$

$$= \frac{\partial f}{\partial x^3}(x^1, x^2, \xi^3)\,(x^3 - x_0^3)$$

Eingesetz in dem Ausdrucke für $f(x) - f(x_0)$ ergibt:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(\xi^1, x_0^2, x_0^3)\,(x^1 - x_0^1) +$$

$$\frac{\partial f}{\partial x^2}(x^1, \xi^2, x_0^3)\,(x^2 - x_0^2) +$$

$$\frac{\partial f}{\partial x^3}(x^1, x^2, \xi^3)\,(x^3 - x_0^3)$$

Also $f(x) - f(x_0) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1, x_0^2, x_0^3)\,(x^i - x_0^i) + R(x_0, x)$

Wobei

$$R(x_0, x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(\xi^1, x_0^2, x_0^2) - \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \right)(x^1 -$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial x^2}(x^1, \xi^2, x_0^3) - \frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \right)(x^2 - x_0^2)$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial x^3}(x^1, x^2, \xi^3) - \frac{\partial f}{\partial x^3}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \right)(x^3 - x_0^3)$$

Also

$$|R(x, x_0)| < |x - x_0| \underbrace{\left\{ \|(\quad)\| + \|(\quad)\| + \|(\quad)\| \right\}}_{\to 0 \text{ mit } x \to x_0}$$

weil $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ stetig sind.

Also

$\lim \frac{R(x, x_0)}{|x - x_0|} = 0$ und $f(x)$ ist differenzierbar.

∎

<u>Bsp 8.10</u> (Bsp 7.1,5 Struwe).

Polynome auf $\mathbb{R}^n$ sind von Klasse C^1.

Für jedes Multiindex $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$

definieren wir die Monomialfunktion

$$x^\alpha := (x^0)^{\alpha_0} (x^1)^{\alpha_1} \cdots (x^n)^{\alpha_n}$$

Ein polynom von Grad $\leq N$ ist dann gegeben durch

$$p(x) = \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha x^\alpha$$

wobei $|\alpha| = \alpha_0 + \dots + \alpha_n$.

Zusammenfassung & Vorgehensweise bei Untersuchung auf Differenzierbarkeit und wichtige Sätze

① f total differenzierbar, wenn die Partielle Ableitungen stetig sind.

$f \in C^1 \Rightarrow f$ differenzierbar.

Satz 8-9 - Siehe Satz 7-1-1-

② f differenzierbar in $x_0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0)$ existiert

und $d_{x_0} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0)\right)$

Satz 8-6, Siehe Bmk 7-1-1.

③ Untersuchung auf Differenzierbarkeit

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad x = x_0$

- Ist f in x_0 stetig?

Nein: f nicht diff.

Ja: Ist f in x_0 partielle diff.?

Nein: Nicht diff

Ja: Ist $\frac{\partial f}{\partial x^1}$ stetig

nein (A)

135-2

A

Ja : Sind $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ stetig in einer Umgebung von x_0

Ja : f ist diff. (Satz 8.9)

Nein : B

ist

B $\lim \dfrac{f(x)-f(x_0) - \sum \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)(x^i - x_0^i)}{|x - x_0|} = 0$

Ja : f ist diff. nach defn.

Nein : f ist nicht diff.

§8.2 Differentiationsregeln

Ganz analog zum eindimensionalen Fall gelten folgende Differentiationsregeln.

Satz 8.11 (Struwe Satz 7.2.1)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, sowie $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in \Omega$ differenzierbar. Dann gilt

1) $d(f+g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0)$

2) $d(fg)(x_0) = g(x_0)\,df(x_0) + f(x_0)\,dg(x_0)$

3) Falls $g(x_0) \neq 0$

$$d\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \frac{g(x_0)\,df(x_0) - f(x_0)\,dg(x_0)}{\left(g(x_0)\right)^2}.$$

Beweis ist der selbe wie im Dim=1.

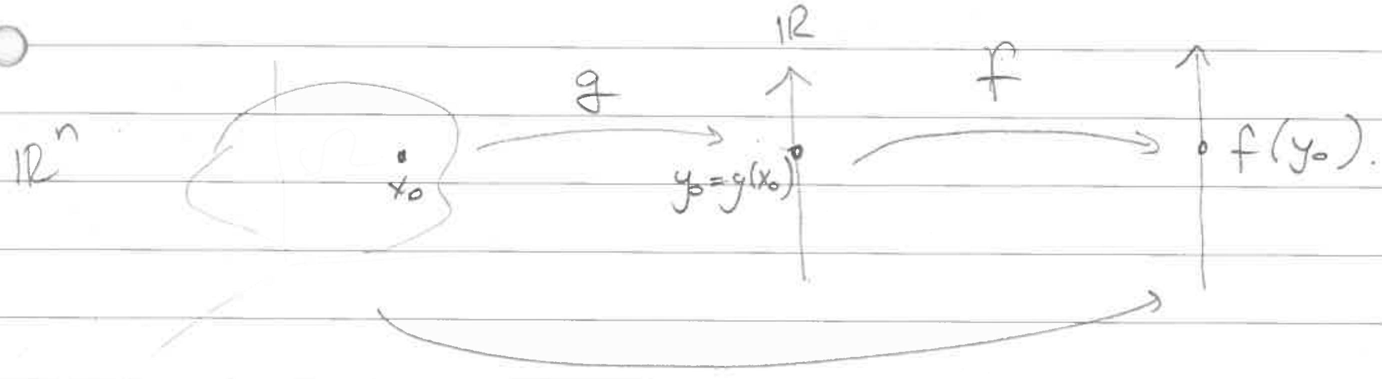
Für die Kettenregeln gibt es mehrere Variationen.

(Satz 7.2.2_Struve)

Satz 8.12 (Kettenregel, 1. Version)

Sei $g : \Omega \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ differenzierbar sowie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Stelle $g(x_0) \in \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt

$$d(f \circ g)(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot dg(x_0)$$



$(f \circ g)(x_0)$

Beweis: g an der Stelle x_0 differenzierbar

$$\Rightarrow \quad g(x) - g(x_0) \overset{(A)}{=} dg(x_0)(x - x_0) + R_g(x, x_0)$$

mit $\dfrac{R_g(x, x_0)}{|x - x_0|} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$. $\Rightarrow \dfrac{g(x) - g(x_0)}{|x - x_0|} \underset{(B)}{\leq} C = \max\left\{\dfrac{\partial g}{\partial x^i}(x_0)\right\}$

f in $g(x_0)$ differenzierbar

$$f(g(x)) - f(g(x_0)) \overset{(C)}{=} f'(g(x_0))\,[g(x) - g(x_0)] + R_f(g(x), g(x_0))$$

Woraus folgt:

$$f(g(x))-f(g(x_0)) = f'(g(x_0))\left[dg(x_0)(x-x_0) + R_g(x,x_0)\right] + R_f\big(g(x_0),g(x)\big)$$

Aus (B) folgt

$$\frac{R_f\big(g(x_0),g(x)\big)}{x-x_0} = \underbrace{\underbrace{\frac{R_f\big(g(x_0),g(x)\big)}{|g(x)-g(x_0)|}}_{\downarrow\, 0} \cdot \underbrace{\frac{|g(x)-g(x_0)|}{|x-x_0|}}_{\overset{(B)}{\leq} C}}_{\downarrow\, 0}.$$

d.h.

$$f(g(x)) - f(g(x_0)) = \big(f'(g(x_0))\cdot dg(x_0)\big)(x-x_0) + R_{f\circ g}(x,x_0)$$

wobei

$$R_{f\circ g}(x,x_0) = f'(g(x_0))\,R_g(x,x_0) + R_f\big(g(x_0),g(x)\big)$$

und

$$\frac{R_{f\circ g}(x,x_0)}{x-x_0} = \underbrace{\frac{f'(g(x_0))\,R_g(x,x_0)}{|x-x_0|}}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{\frac{R_f\big(g(x_0),g(x)\big)}{x-x_0}}_{\downarrow\, 0}$$

Bsp 8.13 Sei $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$h(x,y) = e^{xy}$$

$h = f \circ g$ wobei $g(x,y) = xy$, $f(t) = e^t$

Dann ist einerseits

$$dh(x,y) = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}\right) = \left(y e^{xy}, x e^{xy}\right)$$

andeseits nach Kettenregel

$$dh(x,y) = d(f \circ g)' = f'(g(x,y)) \cdot dg(x,y)$$

$$= e^{xy} \cdot (y, x)$$

$$= \left(y e^{xy}, x e^{xy}\right)$$

Für die nächste Kettenregel führen wir folgende Definition ein.

Def 8.14 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ und
$f = (f_1, \dots, f_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung

Dann ist f an der Stelle $x_0 \in \Omega$ differenzierbar falls jede Komponentenfunktion f_i an der Stelle x_0 differenzierbar ist. Wir definieren in diesem Fall

$$f'(x_0) := \left(f_1'(x_0), f_2'(x_0), \dots, f_n'(x_0)\right)$$

Bemerkung 8.15. $f'(x_0)$ kann als Geschwindigkeitsvektor im Punkt $f(x_0)$ aufgefasst werden.

Satz 8.16 (Kettenregel 2. Version) (Satz 7.23) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ Stme. Sei $g: I \to \Omega$, $t \to (g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t))$ an der Stelle $t_0 \in I$ differenzierbar sowie $f: \Omega \to \mathbb{R}$ an der Stelle $g(t_0)$ diff.

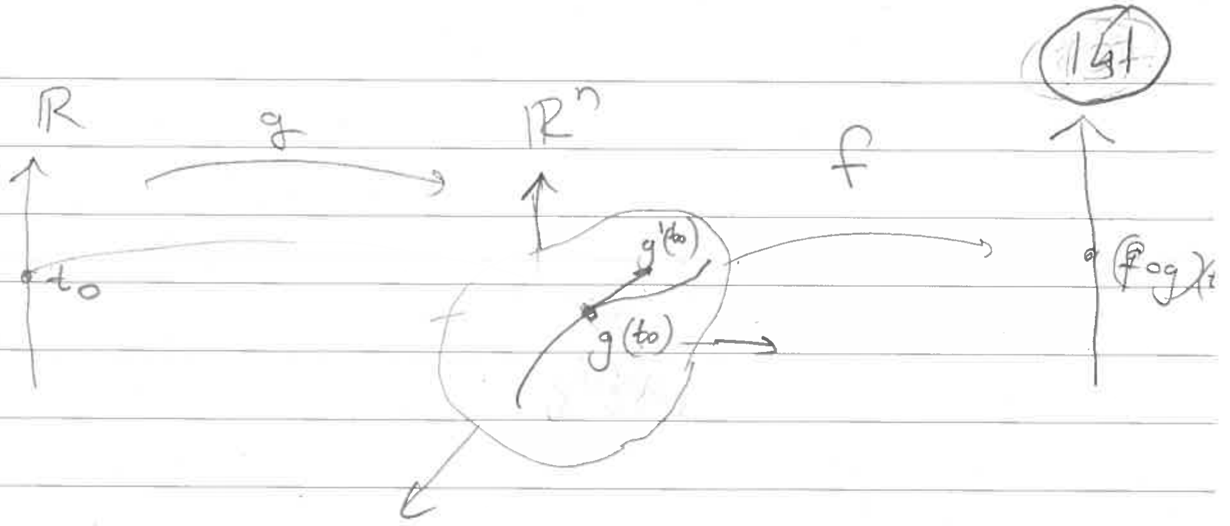
Dann gilt:

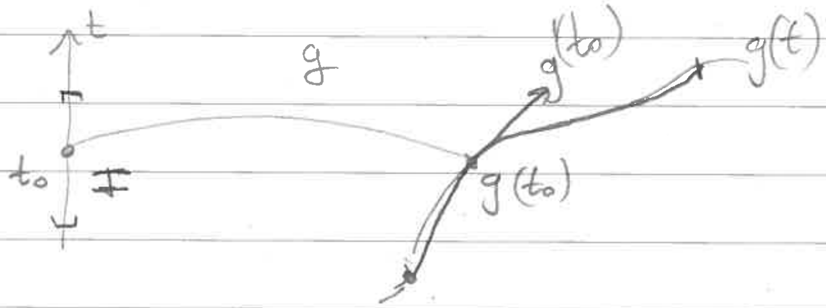
$$\frac{d}{dt}(f \circ g)(t_0) = df(g(t_0)) \circ g'(t_0)$$

$$d(f \circ g)(t_0) = df(g(t_0))\, dg(t_0)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x^1}(g(t_0)) \cdot \frac{dg_1}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial x^2}(g(t_0)) \frac{dg_2}{dt}(t_0)$$

$$+ \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(g(t_0)) \cdot \frac{dg_n}{dt}(t_0)$$





<u>Bsp. 8.17.</u> Die vier Grundrechenarten sind differenzierbare Funktionen von zwei Variablen.

Insbesondere gilt:

$$a: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \to x+y$$

$$da(x,y) = \left(\frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial a}{\partial y}\right) = (1,1)$$

$$m: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad dm(x,y) = (y,x)$$
$$(x,y) \to x \cdot y$$

Setzt man diese beiden Funktionen in die obige Kettenregel ~~ein~~ ein, so erhält man die aus der Analysis I bekannte Summen und Produktregel: $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad t \to (g_1(t), g_2(t))$

$$\frac{d}{dt}(g_1 + g_2) = \frac{d}{dt}(a \circ g) = (1,1)\left(\frac{dg_1}{dt}, \frac{dg_2}{dt}\right)$$

$$= 1 \cdot \frac{dg_1}{dt} + 1 \cdot \frac{dg_2}{dt}$$

und

$$\frac{d}{dt}(g_1 g_2) = \frac{d}{dt}(m \circ g) = \left(\left(\frac{d}{dx} m\right)(g(t))\right) \cdot \left(\frac{dg}{dt}\right)$$

$$= (g_2(t), g_1(t)) \cdot \left(\frac{dg_1}{dt}, \frac{dg_2}{dt}\right)$$

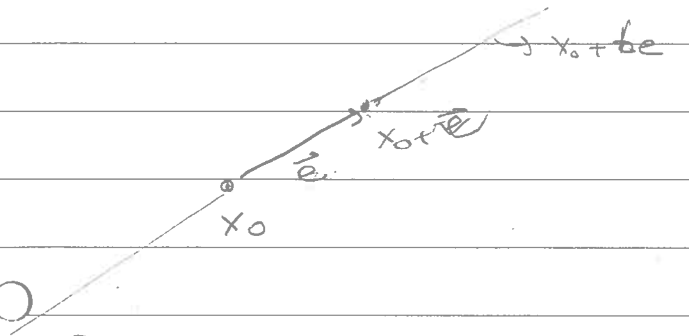
$$= \frac{dg_1}{dt} \cdot g_2(t) + \frac{dg_2}{dt} \cdot g_1(t)$$

(Bsp 7.2.2(i) : Struve)

Bsp. 8.18 Richtungsableitungen

Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ differenzierbar an der Stelle $x_0 \in \Omega$ und sei $e \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, mit $|e| = 1$.

Betrachte die Gerade $g(t) = x_0 + te$, $t \in \mathbb{R}$ durch x_0 mit Richtungsvektor



$$\frac{dg}{dt}(t_0) = e \quad \forall t_0 \in \mathbb{R}$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$
$$t \to x_0 + te$$

Dann ist die Funktion $f \circ g$ in einer Umgebung von $t_0 = 0$ definiert und nach Kettenregel $f \circ g$ an der Stelle $t_0 = 0$ differenzierbar mit

$$\frac{d}{dt}(f \circ g)(0) = df(g(0)) \frac{dg}{dt}(0)$$

$$= df(x_0)(e) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) \cdot e^i$$

$e = (e^1, \dots, e^n)$

und wir Richtungsableitung von f in Richtung e genannt, $\partial_e f(x_0)$ bezeichnet.

Insbesondere gilt für $e = e_i$

$$\partial_{e_i} f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) = df(x_0)(e_i)$$

Geometrisch die Richtungsableitung von f in Richtung e ist genau die Steigung der Tangente zur die Schnittkurve falls wir den Graph von f mit einer zur Ebene xy senkrecht Ebene durch $x_0 + te$ schneiden