Kapitel 1

Logik und Unterlagen

Im Laufendes Semester werden wir viele mathematische Beweise einführen. Heute werden wir uns mit der Mathematische Logik beschäftiges.

In Mathematik stossen wir uns auf gewisse Grundannahmen "Axiome", die wir als gegeben ansehen. Eine dieser Annahmen ist der

Satz von ausgeschlossenen Dritten

Eine zulässige mathematische Aussage ist entweder wahr oder falsch, jedoch nie beides zugleich.

Beispiel

1. $5 < 7$ Wahr
2. $4 < 2$ Falsch

In der wirklichen Welt ist es anders , z.B. "Mathematik ist schön", wahr oder falsch?

Mit Aussagen kann man "rechnen". Wir führen nun ein Paar geläufige Notationen der Logik ein:
Seien A, B Aussagen

- A und B wird mit $A \wedge B$ bezeichnet
- A oder B wird mit $A \vee B$ bezeichnet

Folgerung (eine wahre Implikation)

- Aus A folgt B wird mit $\Rightarrow$ bezeichnet
- Wenn A, dann auch B
- Die Negation der Aussage A wird mit $\neg A$ bezeichnet
- A ist equivalent zu B wird mit $A \Leftrightarrow B$ bezeichnet
- $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ A wahr genau dann, wenn B wahr ist.

Bemerkung

Die Folgerung ist transitiv. Wenn wir wissen, dass $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow C$, dann wissen wir dass $A \Rightarrow C$.

Prinzip des Mathematischen Beweises

Wir können ber eine Kette von Folgerungen

$$A \Rightarrow B \Rightarrow C \cdots \Rightarrow S$$

einen mathematischen “Satz” S aus einen Annahme A herleiten. (Ein Beweis ist eine Folge von Implikationen von Aussagen).

Kontraposition (Umkehrschluss)

$A \Rightarrow B$ ist gleichbedeutend mit $\neg B \Rightarrow \neg A$.
Falls $A \Rightarrow B$, so kann A nicht wahr sein wenn B falsch ist (weil A wahr wäre, würde B auch wahr sein).

1.1 Prinzip des Indirekten Beweises

Zum Beweis der Aussage $A \Rightarrow B$ genügt es die Aussage $\neg B \Rightarrow \neg A$ zu zeigen, oder: die Annahme $A \wedge \neg B$ zum Wiederspruch zu führen.

Indirekter Beweis

Man fügt $\neg B$ als Annahme hinzu und kommt nach einer Kette von erlaubten Schlüssen zu einer falschen Aussage.

Daraus schliesst man, dass die Zusatzannahme $\neg B$ nicht wahr ist.

Beispiel 1.1

- $A =$ ”jede natürliche Zahl n hat einen Nachfolger $n + 1$”
- $B =$ ”es gibt keine grösste natürliche Zahl”

Wir beweisen dass aus A folgt B. Nehmen wir an, dass A wahr und B falsch ist.

$\neg B =$ es gibt eine grösste natürliche zahl N_0'' d.h $N_0 > l$ für jedes $l \in \mathbb{N}$.

Mittels der Aussage A wissen wir dass N_0 einen Nachfolger $N_0 + 1$ hat. Dann $N_0 + 1 > N_0$. Dass ist ober ein Wiederspruch.

Definition 1.1
Eine Menge ist eine Zusammenfassung verschiedener Objekte zu einem Ganzen.
Die Objekte werden Elemente der Menge genannt.

Sei A eine Menge, dann wird "a ist element von A" mit "$a \in A$" bezeichnet. Seien A, B Mengen, dann wird "jedes Element von A ist ein Element von B" mit "$A \subset B$ bezeichnet, und man sagt "A ist in B enthalten" (oder A ist eine Teilmenge von B).

Falls zugleich $A \subset B$ und $B \subset A$ gilt, so sind A und B gleich und man schreibt $A = B$.

Beispiele 1.2

1. Die Menge $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ der natürlichen Zahlen.
2. Die leere Menge mit "$\varnothing$" bezeichnet. Sie ist in jeder Menge enthalten.
3. Die Menge $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ aller ganze Zahlen.
4. Meistens werden Mengen nicht durch die Liste ihre Elemente gegeben, sondern durch bestimmte Eigenschaften ihrer Elemente definiert

$$\mathbb{P} = \{2, 3, 4, 5, 7, 11, 13, \dots\}$$

die Menge aller Primzahlen $\mathbb{P} : \{p \in \mathbb{N} \mid \ p \text{ primzahl}\}$

1.2 Zwei Prinzipen

Wir werden die folgenden zwei Beweismethoden häufig benutzen.

1. Prinzip des Indirekten Beweises

Zum Beweis der Aussage $A \Rightarrow B$ genügt es die Aussage $\neg B \Rightarrow \neg A$ zu zeigen, oder, die Annahme $A \wedge \neg B$ zum Wiederspruch zu führen.

2. Prinzip der Vollständigen Induktion

Sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Behauptung $A(n)$ gegeben. Soll die Behauptung für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ bewiessen werden, so genügen dazu zwei Beweisschritte:

i) Der Beweis von $A(0)$

ii) Für jedes $n \in \mathbb{N}$, der Beweis von $A(n+1)$ unter der Voraussetzung, dass $A(n)$ gilt.

Oft gelten aber Behauptungen nicht von $n = 0$.
Soll die Gültigkeit von $A(n)$ für alle $n \geq m$ bewiesen werden so genügen wieder zwei Schritte:

i) Beweis von $A(m)$

ii) Für jedes $n \geq m$ impliziert $A(n)$ die Behauptung $A(n+1)$

Das Prinzip der Vollständigen Induktion ist genau wie ein Dominoeffekt.

Sie stellen alle Dominosteinen eine nach der andere. Falls der erste Dominostein fällt ($A(1)$ wahr) und falls wir die Dominosteine genug nah nebeneinander gestellt haben, so dass ein fallender Dominostein den nächsten trifft ($A(k) \Rightarrow A(k+1)$) dann wissen wir, dass alle Dominosteine fallen.

Beispiel 1.3 (Induktion)

1. Für alle $n \geq 1$ gilt:

   $$A(n): \quad 1 + 3 + 5 + \ldots (2n-1) = n^2$$

   Beweis mittels Vollständige Induktion

   i) $A(i)$ lautet $1 = 1^2$ und gilt.

   ii) Sei $n \geq 1$. Annahme: $A(n)$ gilt. Die Linke Seite der Identität $A(n+1)$ ist

   $$1 + 3 + \cdots + (2n-1) + (2n+1) = n^2 + (2n+1) = (n+1)^2$$

   womit $A(n+1)$ bewiesen ist.

2. Als zweite Beispiel der vollständigen Induktion beweisen wir den Fundamentalsatz von Euklid:

   Satz 1.4

   Jede natürliche Zahl $n \geq 2$ ist ein Produkt von Primzahlen, dass bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig ist. Wir werden uns hier nicht mit der Eindeutigkeit befassen.

   Beweis

   Sei $A(n)$ die Aussage: Jede natürliche Zahl m mit $2 \leq m \leq n$ ist ein Produkt von Primzahlen

   i) $A(2)$ gilt denn 2 ist Primzahl

   ii) Sei $n \geq 2$. Wir nehmen an, dass $A(n)$ gilt. Für $n+1$ gibt es zwei Möglichkeiten

      a) $n+1$ ist eine Primzahl und somit gilt $A(n+1)$

      b) $n+1$ ist keine Primzahl d.h. es gibt $2 \leq a \leq n$ die $n+1$ teilt. Dann ist $b := \frac{n+1}{a}$ auch ganz und zudem erfüllt $2 \leq b \leq n$. Aus $A(n)$ folgt, dass sowohl a wie b ein Produkt von Primzahlen sind. Somit ist auch $n+1 = ab$ ein Produkt von Primzahlen.

Satz 1.5

Die Menge $\mathbb{P}$ der Primzahlen ist unendlich.

Beweis

Nehmen wir das Gegenteil "$\mathbb{P}$ ist endlich" an, d.h. $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ in aufsteigender Folge; also $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, \dots$. Wir betrachten die Zahl $k = p_1 p_2 \dots p_i \dots p_m + 1$. Aus Satz 1.4 folgt, dass eine Primzahl p_i (aus der Liste $\{p_1, \dots, p_m\}$) existiert, mit p_i teilt k. Da p_i offensichtlich $p_1 p_2 \dots p_i \dots p_m$ teilt, folgt dass p_i $k - p_1 \dots p_m = 1$ teilt. Das ist ein Widerspruch.

Teilbarkeit

Formale Definition

Eine Ganze Zahl a teilt eine ganze Zahl b genau dann, wenn es eine ganze Zahl n gibt, für die $an = b$ ist.

Man sagt dann (Synonyme)	Man schreibt
a teilt b	$a \mid b$
a ist Teiler von b	
b ist teilbar durch a	
b ist Vielfaches von a	

Eigenschaften der Teilbarkeit

- Gilt $a \mid b$ und $b \mid c$, so folgt $a \mid c$
- Für $k \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ gilt: $a \mid b \Longleftrightarrow ka \mid kc$
- $a \mid b$ und $c \mid d \Rightarrow ac \mid bd$
- $a \mid b$ und $a \mid c \Rightarrow a \mid kb + lc$, für alle $l, k \in \mathbb{Z}$

1. $k = (p_1 p_2 \dots p_i \dots p_m) + 1$
   Es gibt eine Primzahl p_i dass k teilt. $p_i \mid k$ mittels Satz 1.4.
2. Sei $b = p_1 p_2 \dots p_i \dots p_m$ = produkt aller Primzahlen. Sei $a = p_i$, $n = p_1 p_2 p_{i-1} p_{i+1} \dots p_m$. Dann $b = an$. Dass heisst a ist Teiler von b, d.h. $p_i \mid (p_1 \dots p_m)$
3. $p_i \mid k$ und $p_i \mid (p_1 \dots p_m) \Rightarrow p_i \mid k - (p_1 \dots p_m) = 1$.
   So erhalten wir einen Wiederspruch

Bemerkung

Letztes mal haben wir gesagt, dass jedes Element von A ist auch Element von B $(\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B)$ mit $A \subset B$ bezeichnet wird. Wir sagen auch A ist in B enthalten oder A ist Teilmenge von B. Falls $A \subset B$ und eine Element $b \in B$ gibt mit $b \notin A$ sagen wir A ist eine "eigentliche Teilmenge" von B. Manchmal schreiben wir $A \underset{\neq}{\subset} B$ in diesem Fall.

Es gibt viele Bücher mit der folgenden Notation: jedes Element von A ist ein Element von B wird mit $A \subseteq B$ bezeichnet. Und wenn $A \subseteq B$ und $A \neq B$ dann benutzen sie $A \subset B$ statt $A \underset{\neq}{\subset} B$. $A = B$ falls $x \in A \Leftrightarrow x \in B$.

Satz

$A = B \Leftrightarrow A \subset B$ und $B \subset A$

Beweis

Annahme: $A = B$. Falls $x \in A$, dann mittels $A = B$, $x \in B$ gilt, damit gilt $A \subset B$ und falls $x \in B$, dann $x \in A$ gilt (mittels $A = B$) damit gilt $B \subset A$.

Wir haben bewiesen dass $A = B \Rightarrow A \subset B$ und $B \subset A$. Zunächst nehmen wir an dass $A \subset B$ und $B \subset A$. Wir möchten zeigen dass $A = B$.

Sei $x \in A$, mittels $A \subset B$, haben wir $x \in B$ somit $x \in A \Rightarrow x \in B$. $(*)$

Sei $x \in B$, mittels $B \subset A$, haben wir $x \in A$ somit $x \in B \Rightarrow x \in A$. $(**)$

$(*)$ und $(**)$ $\Rightarrow A = B$ per Definition.

1.3 Mengeoperationen

Zunächst erinnern wir kurz an die Definitionen der elementaren Operationen auf Mengen.

Seien A und B Mengen. Wir können dann daraus folgende Mengen bilden:

- Die Vereinigung: $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
- Der Durchschnitt: $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
- Die Differenz: $A \backslash B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
- Symmetrische Differenz: $A \bigtriangleup B = (A \backslash B) \cap (B \backslash A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Wir haben dann folgende Eignschaften

Satz 1.6

Seien A, B, C Mengen.

1. $A \cap B = B \cap A$; $A \cup B = B \cup A$
   $A \cap \emptyset = \emptyset$; $A \cup \emptyset = A$

   Bemerkung

   - $\cup$ verhaltet sich wie $+$
   - $\cap$ verhaltet sich wie Multiplikation
   - $\emptyset$ verhaltet sich wie das Nullelement

2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
   $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

3. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

Beweis

Einerseits gilt

$$(A \cup B) \cap C = \{x \in X : x \in A \cup B\} \wedge \{x \in X : x \in C\}$$

Andererseits $(A \cap C) \cup (B \cap C) = \{x \in X : x \in A \cap C\} \vee \{x \in X : x \in B \cap C\}$.
Daraus folgt

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap C &\subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C) \\ (A \cap C) \cup (B \cap C) &\subseteq (A \cup B) \cap C \end{aligned}$$

und somit sind die zwei Mengen gleich.

Definition 1.7
Das Kartesische Produkt $A \times B$ der Mengen A, B ist die Menge der geordneten Paare (a, b) wobei $a \in A, b \in B$

Beispiel

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(a, b) : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$. Falls $\mathbb{Z}$ als "eindimensionalen" Gebilde dargestellt wird

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}$$

so wird $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ als "zweidimensionalen" Gebilde dargestellt

$$\begin{array}{ccccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ (1,0) & (1,1) & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ (0,0) & (0,1) & (0,2) & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}$$

Um die Operationen auf mehrere Mengen zu Verallgemeinern sind die folgenden Quantoren nützlich $(*)$

1. $\forall$ "Für alle" (Allquantor)
2. $\exists$ "Es gibt" (Existenzquantor)
3. $\exists!$ "Es gibt genau ein"

Sei nun I eine beliebige Menge (I=Indexmenge) und sei für alle $i \in I$ eine Menge A_i gegeben. Dann:

- $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I, x \in A_i\}$. Vereinigung besteht aus den Elementen x, für welche eine $i \in I$ gibt so dass x zu A_i gehört.
- $\bigcap\limits_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I, x \in A_i\}$. Durchschnitt.

Wir können noch das Kartesische Produkt endlich vieler Mengen $A_1 \dots A_n$ definieren:

$$A_1 \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i = \{(x_1 \dots x_n) \mid x_i \in A_i\}$$

Satz 1.8

Seien $A_1 \dots A_k \subset X,\ k \in \mathbb{N}$. Es gilt

1. $$\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{k} {A_i}^c$$

2. $$\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{k} {A_i}^c$$

Beweis

$$\begin{aligned}\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right)^c &= \left\{x \in X : x \notin \bigcap_{i=1}^{k} A_i\right\} = \{x \in X \exists i \in \{1, \dots, k\} : x \notin A_i\} \\ &= \bigcup_{i=1}^{k} \{x \in X : x \notin A_i\} = \bigcup_{i=1}^{k} A_i^c\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)^c &= \left\{x \in X : x \notin \bigcup_{i=1}^{k} A_i\right\} = \{x \in X \forall i \in \{1, \dots, k\} : x \notin A_i\} \\ &= \bigcap_{i=1}^{k} \{x \in X : x \notin A_i\} = \bigcap_{i=1}^{k} A_i^c\end{aligned}$$

(Siehe Analysis Serie 1, 1. Semester, Aufgabe 2.e)

($*$) Wir haben gesehen dass wir manchmal eine Aussage verneinen müssen. Deshalb müssen wir lernen wie man Aussage mit Quantoren verneinen kann.

$$\neg\left(\forall n : A(n)\right) \Leftrightarrow \left(\exists n : \neg A(n)\right)$$

$$\neg\left(\exists n : A(n)\right) \Leftrightarrow \left(\forall n : \neg A(n)\right)$$

$$\neg\left(\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0\right) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} : x^2 < 0$$

1.4 Abbildungen

Seien X, Y Mengen.

Definition 1.9

Eine Funktion oder Abbildung $f : X \to Y$ der Menge X in die Menge Y ist eine Vorschrift (ein Gesetz) die (das) jedem Element $x \in A$ genau ein Element $y = f(x) \in Y$ zuordnet.

Es gibt verschiedene wichtige Objekte die in Zusammenhang mit einem Abbildung auftreten

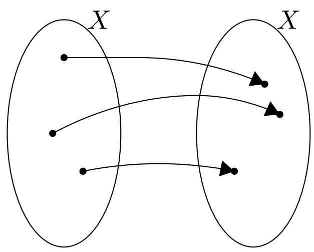
$$X = \text{ Definitionsbereich von } f$$

$$Y = \text{ Die Zielmenge}$$

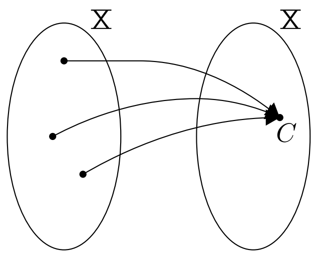
$$f(x) = \{f(x) \mid x \in X\} \text{ ist das sog. Bild oder die Bildmenge von } f$$

Beispiel 1.10

1. (Identität) Für jede Menge $\mathbb{X}$, ist $id_X : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ definiert durch $id_{\mathbb{X}}(x) = x, \forall x \in X$



2. (Konstante) Sei X Menge und $c \in \mathbb{X}$. Die konstante Abbildung mit wert c ist $f(x) = c, \forall x \in \mathbb{X}$



3. Seien X, Y Mengen. Dann sind
$$pr_x : \begin{array}{l} X \times Y \to X \\ (x,y) \to x \end{array} \qquad pr_y : \begin{array}{l} X \times Y \to Y \\ (x,y) \to y \end{array}$$
die Projektionen auf dem ersten respektiv zweiten Faktoren.

4. $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$
$x \to \sin x$

5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to x^2 + x$

Definition 1.11
Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung

1. f heisst injektiv falls auf $f(x_1) = f(x_2)$ stets $x_1 = x_2$ folgt, falls jeder $y <\in Y$ höchstens ein Urbild hat.
2. f heisst surjektiv falls für jedes $y \in Y$ ein $x \in X$ gibt mit $f(x) = y$
$$\forall y \in Y, \exists x \in X : f(x) = y$$
wenn jedes Element $y \in Y$ mindestens ein Urbild hat.
3. f heisst bijektiv falls f injektiv und surjektiv ist, d.h. falls jedes $y \in Y$ genau ein Urbild hat.

Pages from 17.1 to 17.4 seem repetition, ask to be sure (document week2)

Beispiel 1.12

WRONG POSITION!!

1. $id_X : X \to X$ bijektive.
2. Eine konstante Abbildung $f : X \to X, x \to c$ ist
   - bijektive $\Leftrightarrow$ X $= \{c\}$
   - surjektive $\Leftrightarrow$ X $= \{c\}$
3. Die Projektionen
   - $pr_x : X \times Y \to X$
   - $pr_y : X \times Y \to Y$

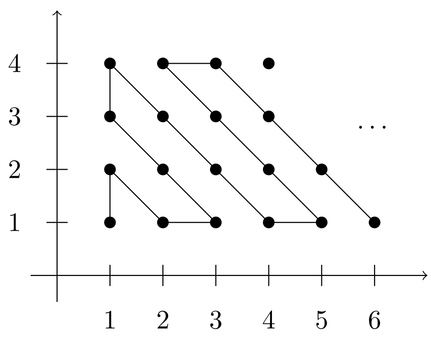
   sind stets surjektive.
4. $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$
   $x \to \sin x$
   Surjektiv, nicht injektiv

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   $x \to x^2$
   Nicht surjektiv
   Nicht injektiv
2. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
   $n \to 2n$
   ist Injektive. $f(\mathbb{N})$ ist die Menge aller geraden Zahlen
3. Eine Menge A hat n Elemente falls es eine bijektive $f : \{1, \ldots, n\} \to A$ gibt. Die Zahl n wird dann die Kardinalität von A genannt und mit bezeichnet, gelegentlich auch mit $\#A$ bezeichnet

unreadeable, page 18

Definition Kardinalität
Wir sagen zwei Mengen X und Y sind gleichmächtig falls eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$ gibt.

Mit dem ersten Contorschen Diagonalverfahren kann man die Rationalen zahlen abzählen, d.h.$\mathbb{Q}$ und $\mathbb{N}$ sind gleichmächtig



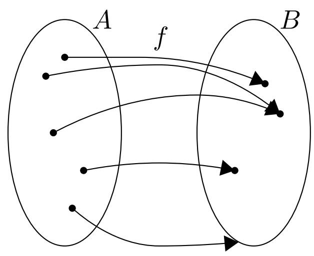
1.5 Dedekind Schubladen Prinzip

Sei $f : A \to B$ eine beliebige Abbildung zwischen endliche Mengen. Falls $|B| < |A|$ dann ist f nicht injektiv, d.h. es gibt $b \in B$ und $a_1, a_2 \in A$ mit

Is this supposed to be a new chapter?? page 19

i) $a_1 \neq a_2$

ii) $f(a_1) = f(a_2) = b$



$$3 = |B| < 5 = |A|$$

Mit Abbildungen kann man “operieren”. Die wichstige Operation ist die Verkettung (oder komposition) zweier Abbildungen.

Definition

Abbildungen $f : X \to, g : Y \to Z$ kann man miteinander ausführen. Dies ergibt eine neue Abbildung

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

$$F := g \circ f : X \to Z, x \to g\left(f(x)\right)$$

Zwei Funktionen f und g können verkettet werden wenn der Wertebereich der ersten Funktion mit dem Definitionsbereich der zweiten Funktion übereinstimmt.

$$\text{Man Sagt} \begin{cases} g \text{ nach } f \text{ oder} \\ g \text{ komponiert mit } f \\ g \circ f \end{cases}$$

Zu Beachten: In dieser Notation steht die zuerst angewandte Abbildung rechts; das heisst bei $g \circ f$ wird zuerst die Funktion f angewandt und dann die Funktion g.

?neu?, page 19.2 top

- Die Identische Abbildung verhölt sich bei der Komposition , für eine Funktion

$$f : X \to Y \text{ gilt also}$$

$$f \circ id_X = f = id_Y \circ Y$$

  wobei

$$id_X : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$$

$$x \to x$$

$$id_Y : Y \to Y$$

$$y \to y$$

- Die Komposition von Funktionen ist associativ, d.h. für Funktionen f, g, h gilt

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

- Aber die Komposition von Funktionen ist im Allgemeinen nicht kommutativ!

$$f \circ g \neq g \circ f$$

  Zum Beispiel:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \to x^2$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \to x + 1$$

$$f \circ g = f\,(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$g \circ f = g\,(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1$$

1.6 Die Inverse Abbildung (Umkehrfunktion)

Sei $f : X \to Y$ eine bijektiven Funktion.

Die Inverse Funktion $g : Y \to X$, einer bijektiven Funktion $f : X \to Y$ ist die Funktion, die jedem Element y der Zielmenge seien eindeutig bestimmtes Urbildelement zuweist. (bei bijektiven Funktionen hat die Urbildmenge jedes Element y genau ein Element).

$g(y) := x$, eindeutig definierte $x \in \mathrm{X}$, mit $f(x) = y$. Dann ist definitionsgemäss $(g \circ f)(x) = x$, d.h. $g \circ f : id_{\mathrm{X}}$. Die Eindeutig definierte Abbildung g wird (auch) mit f^{-1} bezeichnet und Inverse von f genannt.

Für $f \circ f^{-1}$: Sei $y \in Y$ und sei x mit $f(x) = y$. Dann ist $\left(f \circ f^{-1}\right)(y) = f\left(f^{-1}(y)\right) = f(x) = y$

$$f \circ f^{-1} = id_Y$$

Beispiel

1.
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to 2x + 3$$

   bijektive
   Umkehrfunktion ist gegeben durch
$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to \frac{x-3}{2}$$

2. Sei $\mathbb{R}^+ = [0, \infty]$ die Menge der nichtnegativen reelen Zahlen und
$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$
   mit
$$x \to x^2$$
   Dann ist f bijektive und die Umkehrfunktion
$$f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$
   ist gegeben durch
$$x \to \sqrt{x}$$

Verallgemenerungen Falls $f : X \to Y$ injektive ist, kann man die Umkehrabbildung
$$f^{-1} : f(\mathbb{X}) \to \mathbb{X}$$
definieren. Das heisst, die Funktion f^{-1} erfüllt: wenn $f(x) = y$, dann $f^{-1}(y) = x$

Vorsicht: $f^{-1} \circ f = id_{\mathbb{X}}$ aber $f \circ f^{-1} = id_{f(\mathbb{X})}$ und $f \circ f^{-1} = id_Y$ genau dann wenn $f(X) = Y$, d.h. f bijektive ist.