Assos $\big((a,b)(c,d)\big)(e,f) = (a,b)\big((c,d)(e,f)\big)$

Neutral Element $(1,0)(a,b) = (a,b)$

Komm. $(a,b)(c,d) = (c,d)(a,b)$

Inverses Element $\forall (a,b) \neq (0,0)$ in $\mathbb{R}^2$ $\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2$
mit $(a,b)(x,y) = (1,0)$

(zu verfieren $(x,y) = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$)

Distributivität $\big((a,b) + (c,d)\big)\cdot(e,f)$

$= (a,b)(e,f) + (c,d)(e,f)$

Def. 2.21 Der Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist $\mathbb{R}^2$ versehen mit "+", "$\cdot$", $0=(0,0)$ und $(1,0)=\mathbb{1}$

Bemerkung 2.22 $z^2+1=0$ hat in $\mathbb{C}$ eine Lösung.
nämlich ist $(0,1)(0,1) = (-1,0) = -(1,0) = \mathbb{1}$

Wir führen für $(0,1)$ die Bezeichnung das Symbol "i" ein
"i" heisst imaginäre Einheit.
Also ist $i^2 = -\mathbb{1}$. Jede komplexe Zahl $z = (x,y)$ lässt sich dann wie folgt darstellen:

$$z = (x,y) = (x,0) + (0,y) = x(1,0) + y(0,1)$$
$$= x \cdot \mathbb{1} + y \cdot i$$

In den Rechungen lässt man oft das $\mathbb{1}$ in $x\mathbb{1}$ fallen und schreibt $z = x + yi$

Defn 2.22 ① Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$

$\operatorname{Re} z := x$ heisst der Realteil und

$\operatorname{Im} z := y$ heisst der Imaginärteil.

② Die zu $z = x + iy$ konjugierte Zahl ist

$\overline{z} = x - iy$

③ Wir definieren die Norm von z als

$$\|z\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Satz 2.23 (I) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

(II) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$

(III) $z \cdot \overline{z} = \|z\|^2 \cdot \mathbb{1}$.

(IV) $\|z_1 z_2\| = \|z_1\| \|z_2\|$.

Beweis: Übung.

Abkürzung: $|z| := \|z\|$

Bemerkung 2.24 Wir können $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ "einbetten" mittels

$$\mathbb{R} \ni x \longrightarrow (x,0) \in \mathbb{C}$$

Sei $\mathbb{C}_0 = \{(x,y) \in \mathbb{C} \mid y=0\} = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$

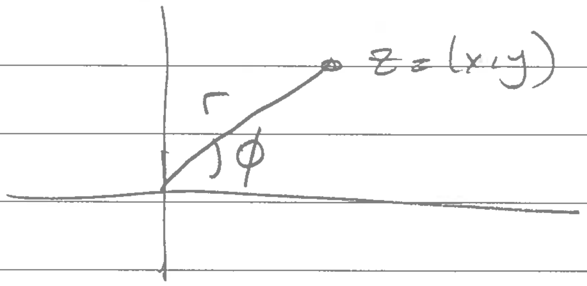
Der Abbildung
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}_0$$
$$x \longrightarrow (x,0)$$
ist eine Bijektion.

Diese Identifikation (von $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}_0$) ist verträglich mit den Operationen in $\mathbb{R}$ und in $\mathbb{C}$

d.h.

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$
$$f(xy) = f(x)\,f(y).$$

Polarform. Als Polarkoordinaten in die Ebene führen wir (r,ϕ) ein:



$$x = r\cos\phi \qquad y = r\sin\phi$$

$$z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$$
$$r = |z|$$

Definition Wir definieren (nach Euler)

$$e^{i\phi} := \cos\phi + i\sin\phi.$$

$$z = re^{i\phi} = |z|e^{i\phi}$$

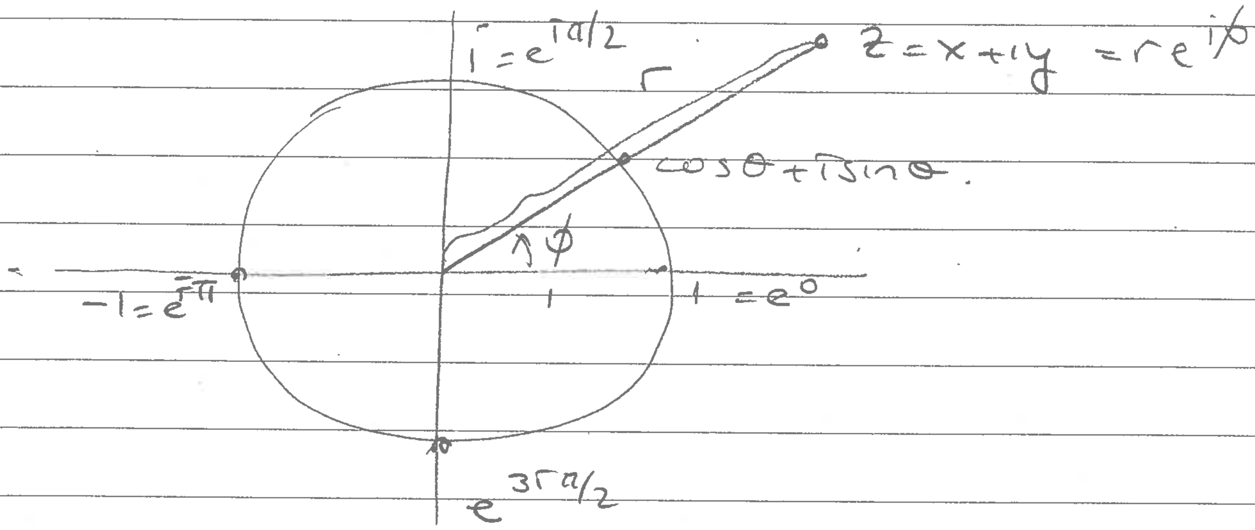
→ 46.

Aus

Die Additionstheoreme
$$\cos(\phi+\psi) = \cos\phi\cos\psi - \sin\phi\sin\psi$$
$$\sin(\phi+\psi) = \sin\phi\cos\psi + \cos\phi\sin\psi$$

In der Ebene $\mathbb{R}^2$ stehen uns neben den kartesischen Koordinaten x, y noch die Polarkoordinaten r, ϕ zur Verfügung.

Für beliebiges $z = x + iy \neq 0$



$r = |z|$

$\phi = \arg(z)$ – Das Argument von z

$$e^{i\phi} = 1 \iff \phi = 2k\pi$$

$$\cos\phi + i\sin\phi = 1 \iff \cos\phi = 1 \text{ und } \sin\phi = 0$$
$$\iff \phi = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$e^{i\theta} e^{i\phi} = (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\phi + i\sin\phi)$$
$$= \underbrace{\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi}_{\cos(\theta+\phi)} + i(\underbrace{\cos\theta\sin\phi + \sin\theta\cos\phi}_{\sin(\theta+\phi)})$$
$$= e^{i(\theta+\phi)}$$

folgt $e^{i\phi}e^{i\psi} = e^{i(\phi+\psi)}$

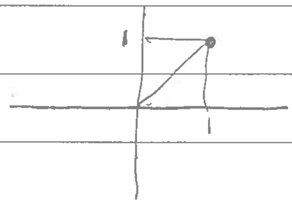
Somit folgt für $z = re^{i\theta}$ $w = s e^{i\phi} \in \mathbb{C}$

die einfache Darstellung $zw = rs e^{i(\theta+\phi)}$

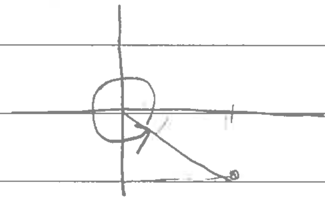
$z/w = (r/s)\, e^{i(\theta-\phi)}$

Die Polare Darstellung ist in Berechnungen sehr nützlich, insbesondere um das Produkt und die Division zu berechnen

Bsp. ① $z = 1+i = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$



$$w = \sqrt{3} - i = 2e^{i11\pi/6} = 2e^{-i\pi/6}$$



$$\frac{(\sqrt{3}-i)^3}{(1+i)^2} = \frac{w^3}{z^4} = \frac{8e^{-i\pi/2}}{4e^{i\pi}} = 2e^{-\frac{3\pi}{2}i} = 2e^{\frac{i\pi}{2}} = 2i$$

② Die Polarform ist auch sehr nützlich um die Wurzel einer Komplexen Zahl zu berechnen.

Sei $w \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, wir möchten die Gleichung $z^n = w$ lösen

$w = |w|e^{i\theta}$

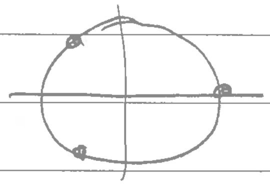
$$z^n = w = |w|e^{i\theta} = |w|e^{i(\theta+2\pi k)} \Rightarrow z = |w|^{1/n}\, e^{i\frac{\theta+2\pi k}{n}}$$

$= |w|$

<u>Bsp.</u> $z^3 = 1 \Rightarrow z^3 = \left(e^{2\pi i k}\right)^{1/3}$

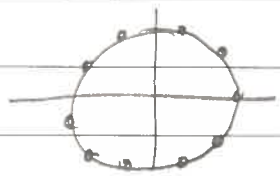
$\in \{ e^{i\pi \frac{2k}{3}} : k = 0, 1, 2 \}$

$= \{ 1, e^{2i\pi/3}, e^{4\pi i/3} \}$



Allgemein Formel der Einheitswurzeln

$z = \{ e^{\frac{i 2\pi k}{n}} : k = 0, 1, \dots, n-1 \}$.



<u>Bemerkung</u> ① Es gibt <u>keine</u> mit den Körperoperationen verträgliche Ordnung von $\mathbb{C}$.

② Hingegen ist $\mathbb{C}$ im Unterschied zu $\mathbb{R}$ algebraisch vollständig.
Nicht nur die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hat in $\mathbb{C}$ eine Lösung, sondern es gilt der

<u>Fundamental Satz der Algebra</u> Jedes Polynom
$p(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$
vom Grad $n \geq 1$ hat in $\mathbb{C}$ genau n Nullstellen

~~§~~ Kapitel 3. Folgen und Reihen

(Der Limes Begriff).

§ 3.1 Folgen, allgemeines

Defn 3.1 Eine Folge reeler Zahlen ist eine Abbildung $a : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ wobei wir ~~das~~ Bild von $n \geq 1$ mit a_n (statt $a(n)$) bezeichnen.

Eine Folge wird dann meistens mit $(a_n)_{n \geq 1}$, daher mit der geordneten Bildmenge bezeichnet.

Folgen können auf verschiedene Arten gegeben sein.

Bsp. 3.2 (1) $a_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$

(2) $a_1 = 0.9$, $a_2 = 0.99$, ..., $a_n = 0.\underbrace{99\ldots9}_{n}$

(3) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ $n \geq 1$

(4) (Rekursiv) Sei $d > 0$ ein reeler Zahl

$a_1 = 1$, $a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{d}{a_n}\right)$, $n \geq 1$

z.B. $d = 2$, $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{3}{2}$, $a_3 = \frac{17}{12}$, $a_4 = \ldots$

(5) Fibonacci Zahlen $a_1 = 1$, $a_2 = 2$

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \forall n \geq 2.$$

Defn 3.3 Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ heisst **beschränkt** falls die Teilmenge

$\{a_n : n \geq 1\} \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt ist.

d.h Es gibt $C \in \mathbb{R}$ $(C \geq 0)$ so dass

$$|a_n| \leq C \quad \forall n \geq 1.$$

§ 3.2. Grenzwert oder Limes einer Folge

Ein Zentraler Begriff.!

Defn 3.4 Eine Folge $(a_n) \geq 1$ konvergiert gegen a wann

für jedes $\varepsilon > 0$ ein Index $N(\varepsilon) \geq 1$ gibt so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N(\varepsilon).$$

Defn 3.4 (Version 2) Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$ falls für jedes $\varepsilon > 0$, die Menge der Indizen $n \geq 1$ für welcher $a_n \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ endlich ist.

$$\left(\forall \varepsilon > 0, \quad \#\{n \in \mathbb{N} \ a_n \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\} < \infty. \right)$$

<u>Equivalenz beider Definitionen</u>

(2) $\Rightarrow$ (1) Sei für $\varepsilon > 0$

$$M(\varepsilon) := \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\}$$

$$= \{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - a| \geq \varepsilon\}.$$

Da $M(\varepsilon)$ endlich ist, ist es nach oben beschränkt. Es gibt also $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass $\forall n \in M(\varepsilon) \quad n \leq N(\varepsilon) - 1$

Insbesondere gilt $\forall n \geq N(\varepsilon)$, $n \notin M(\varepsilon)$ und daher $|a_n - a| < \varepsilon$.

(1) $\Rightarrow$ (2) $M(\varepsilon) = \{n : |a_n - a| \geq \varepsilon\} \subset [0, N(\varepsilon) - 1]$
Also Endlich.

$\boxtimes$

Falls die Eigenschaften in Defn 3.4 zutrifft dann schreibt man

$$a = \lim_{n \to \infty} a_n.$$

oder $$a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} a.$$

Die Zahl a nennt sich <u>Grenzwert</u> oder <u>Limes der Folge</u> $(a_n)_{n\geq 1}$.

Eine Folge heisst <u>konvergent</u> falls sie einen Limes besitzt, andernfalls heisst sie <u>divergent</u>.

<u>Bemerkung 3.5</u> (1) Falls $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert ist der Limes eindeutig bestimmt

<u>Beweis</u>: Übung?

Seien a und b Grenzwerte von $(a_n)_{n\geq}$

Sei $\varepsilon = \left|\frac{b-a}{3}\right| > 0$

Dann gibt es N_1, N_2 so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N_1$$

$$|a_n - b| < \varepsilon \quad \forall n > N_2$$

Also $\forall n \geq \max\{N_1, N_2\}$

$$|a-b| = |(a - a_n) + (a_n - b)| < 2\varepsilon = \frac{2}{3}|b-a|$$

↯ Widerspruch

Def 3.4: (Version 1)

Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert gegen a falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein Index $N(\varepsilon) \geq 1$ existiert so dass

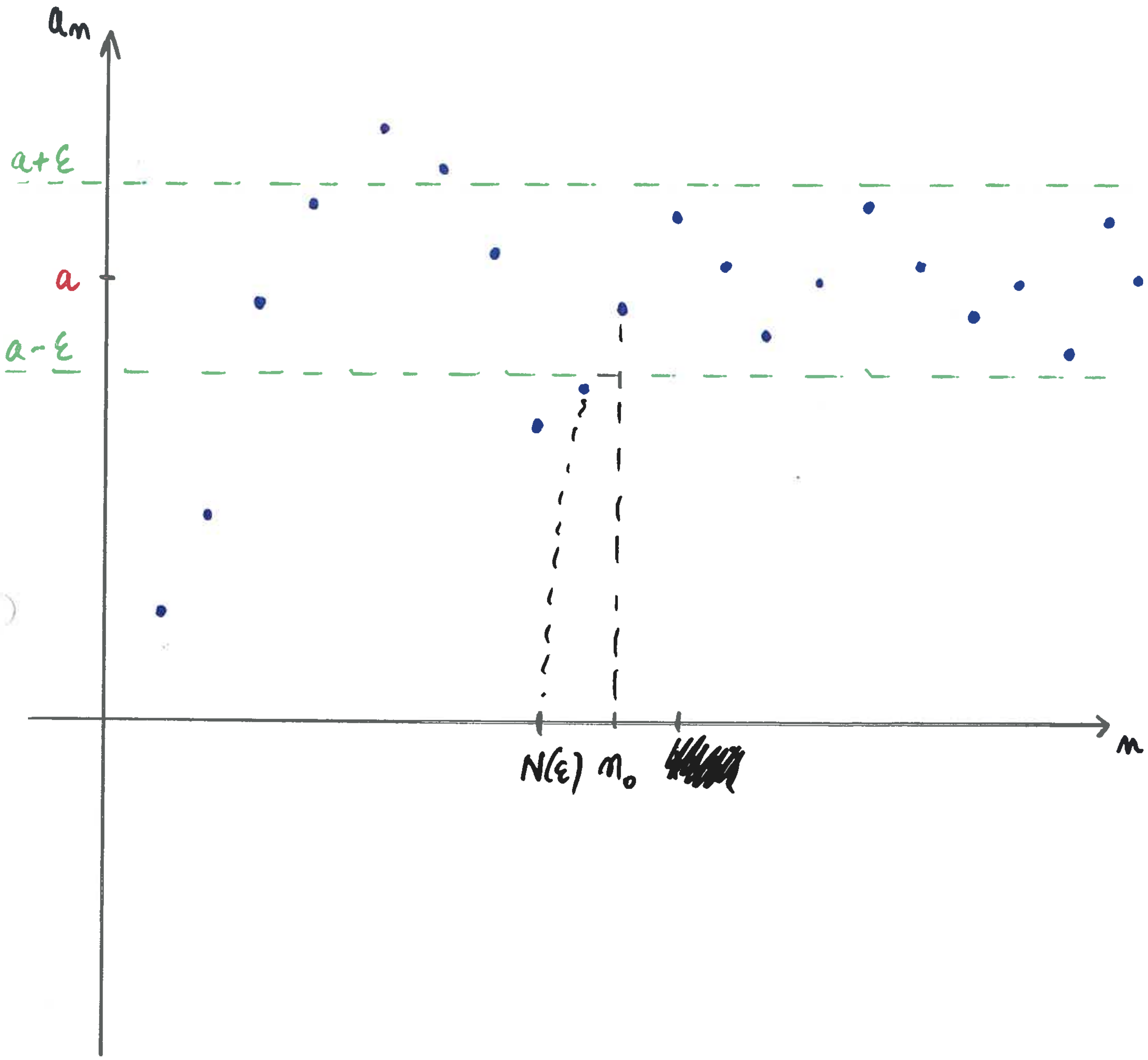
$$|a_n - a| < \varepsilon \,, \qquad \forall n > N(\varepsilon) \,.$$

Def 3.4: (Version 2)

Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert gegen a falls für jedes $\varepsilon > 0$ die Menge der Indizen $n \geq 1$ für welcher

$$a_n \notin (a - \varepsilon \,, a + \varepsilon)$$

endlich ist.



Binomischen Lehrsatz

Für beliebige Zahlen a, b und $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k}$$

Bemerkung 3.5 (2) Falls $(a_n)_{n\geq 1}$ konv. ist, $\{a_n : n \geq 1\}$ beschränkt:

Sei $\varepsilon = 1$, $\lim a_n = a$ und N_0 mit

$$|a_n - a| \leq 1 \quad \forall n > N_0$$

Dann ist $\forall n$ $|a_n| \leq \max\{|a|+1, |a_j|_{1\leq j\leq N_0}\}$

Beispiel 3.6. (1) Sei $a_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$

Dann gilt $\lim a_n = 0$.

- Sei $\varepsilon > 0$. Dann $\frac{1}{\varepsilon} > 0$. Sei $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \geq 1$ mit $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ (Archimedische Eigenschaft Satz 2.13).

Dann gilt für all $n \geq n_0$, $\frac{1}{\varepsilon} < n_0 \leq n$

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0$$

$\square$

(54)

(2) Sei $0<q<1$ und $a_n := q^n$, $n \geq 1$
Dann gilt $\lim a_n = 0$.
(a_n konvergiert gegen 0).

<u>Beweis:</u> Zu beweisen

$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N_0 = N_0(\varepsilon) \in N$

$\forall n \geq N_0 : q^n < \varepsilon$.

Die Idee ist zu zeigen dass $\frac{1}{q^n}$ sehr Gross wird und deswegen q^n sehr klein wird.

Setzen wir $\frac{1}{q} = 1+\delta$ mit $\delta > 0$ $\left(q<1 \Rightarrow \frac{1}{q} > 1\right)$

$$\frac{1}{q^n} = \left(\frac{1}{q}\right)^n = (1+\delta)^n = 1 + n\delta + \binom{n}{2}\delta^2 + \dots + \delta^n$$

$$\geq 1 + n\delta > n\delta \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

also $0 < q^n < \frac{1}{n\delta} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Sei jetzt $\varepsilon > 0$, wähle $N_0 = N_0(\varepsilon)$ mit $\frac{1}{\varepsilon\delta} < N_0$

$\Rightarrow \frac{1}{N_0\delta} < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall n > N_0 \quad 0 < q^n \leq \frac{1}{n\delta} < \frac{1}{N_0\delta} < \varepsilon$ ☒

3 $a_n = \sqrt[n]{n}$, $\lim a_n = 1$.

Klar: $n \geq 1$ also $\sqrt[n]{n} \geq 1$.

Gegeben ein $\varepsilon > 0$, wollen wir n so gross wählen, dass

$$\sqrt[n]{n} - 1 < \varepsilon$$

d.h. $n < (1+\varepsilon)^n$.

Wir entwickeln

$$(1+\varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \binom{n}{2}\varepsilon^2 + \cdots + \varepsilon^n$$

ε is klein aber fixiert.

Für n sehr gross wird $1+n\varepsilon$ nie grosser als n sein. Wir versuchen unsere Glück mit

$\binom{n}{2}\varepsilon^2$ term

$$\binom{n}{2}\varepsilon^2 = \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2$$

Wir benützen also $(1+\varepsilon)^n \geq \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2$

16

Wir wollen n so wählen dass

$$\frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 > n$$

d.h. $n-1 > \frac{2}{\varepsilon^2}$ oder $n > 1 + \frac{2}{\varepsilon^2}$

Setzen wir $N_0 := \left(1+\frac{2}{\varepsilon^2}\right) + 1$

Dann gilt für $\forall n > N_0$

$$(1+\varepsilon)^n > n \geq 1$$

$$\Rightarrow 1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1+\varepsilon$$

$$\Rightarrow -\varepsilon < 0 \leq \sqrt[n]{n} - 1 \leq \varepsilon \Rightarrow |\sqrt[n]{n}-1| < \varepsilon$$

$$\forall n > N_0$$

4 Nicht alle Folgen sind konvergent. Es gibt zwei verschiedene Verhältnissen einer divergenten Folge

(A) $a_n = (-1)^n \Rightarrow \{1, -1, \ldots\}$ beschränkt aber nicht konvergent

(B) $a_n = n$ unbeschränkt, divergent.

Bsp. 3.7. Seien $p \in \mathbb{N}$, $0 < q < 1$

Dann gilt $\lim_{n\to\infty} n^p q^n = 0$

d.h. Exponentialfunktionen wächst schneller als jede Potenz
(Wenn x genügend Gross ist, $a^x > x^b$)

Beweis: Der Trick ist folgender

$$n^p q^n = \left(n^{p/n} q\right)^n = \left(\left(\sqrt[n]{n}\right)^p \left(q^{1/p}\right)^p\right)^n$$

Wir werden Bsp 3.6 (2), (3) benützen

(d.h. $\lim \sqrt[n]{n} = 1$ $\quad \lim r^n = 0$, ~~0<~~ $r < 1$)

Da $\lim \sqrt[n]{n} = 1$, $\forall \eta > 0$, $\exists N_0(\eta)$;

$$\sqrt[n]{n} < 1 + \eta, \quad n > N_0(\eta)$$

wir wählen $\eta > 0$ so dass $q^{1/p} = \frac{1}{(1+\eta)^2}$

Dann, $\sqrt[n]{n} \cdot q^{1/p} \leq \frac{(1+\eta)}{(1+\eta)^2} = \frac{1}{1+\eta}$ $\quad \forall n > N_0(\eta)$

Wobei $\forall n > N_0(\eta)$

$$a_n = \left(\sqrt[p]{n}\, q^{1/p}\right)^{pn} < r^n \quad \text{mit}$$

$$r := \left(\frac{1}{1+\eta}\right)^p, \quad r < 1$$

Sei jetzt $\varepsilon > 0$,

Da $\lim r^n = 0$, $\exists\, N_1 = N_1(\varepsilon)$;

$\forall n > N_1(\varepsilon)$, $r^n < \varepsilon$

For $n > \max\{N_0(\eta), N_1(\varepsilon)\}$.

$$a_n < r^n < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim a_n = \lim n^p q^n = 0.$$

§ 3.3 Konvergenzkriterien

Mit konvergenten Folgen kann man "rechnen" wie folgender Satz zeigt

Satz 3.8 Seien $(a_n)_{n\geq 1}$ und $(b_n)_{n\geq 1}$ konvergente Folgen mit

$$\lim a_n = a, \qquad \lim b_n = b$$

(i) Die Folge $(a_n + b_n)_{n\geq 1}$ konvergiert und

$$\lim (a_n + b_n) = a + b$$

(ii) Die Folge $(a_n b_n)_{n\geq 1}$ konv. und

$$\lim a_n b_n = ab$$

(iii) Falls $b \neq 0$ und $b_n \neq 0 \ \forall n \geq 1$ gilt

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$$

(iv) Falls $a_n \leq b_n$ folgt $a \leq b$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$, es gibt $N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)$ so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon, \qquad \forall n > N_1(\varepsilon)$$

$$|b_n - b| < \varepsilon, \qquad \forall n > N_2(\varepsilon)$$

i) Für $n \geq \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$ gilt

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$$
$$< 2\varepsilon.$$

Da dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt, folgt auch

$\forall n > \max\{N_1(\frac{\varepsilon}{2}), N_2(\frac{\varepsilon}{2})\} =: N(\varepsilon)$ gilt

$|a_n + b_n - (a+b)| < \varepsilon$.

(ii) Sei C eine Schranke für $\{|b_n| : n \geq 1\}$

(Bemerkung 35: Falls $(a_n)_{n\geq 1}$ konv. ist, $\{a_n : n \geq 1\}$ beschränkt)

Für $N_1(\varepsilon)$, $N_2(\varepsilon)$ wie oben, folgt

$\forall n \geq \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a b_n + a b_n - ab|$$
$$= |b_n(a_n - a) + a(b_n - b)|$$
$$\leq \varepsilon |b_n| + |a|\varepsilon \leq \varepsilon(C + |a|)$$

Also folgt $\forall n \geq N(\varepsilon) := \max\left(N_1\left(\frac{\varepsilon}{C + |a|}\right), N_2\left(\frac{\varepsilon}{|C| + |a|}\right)\right)$

dass $|a_n b_n - ab| < \varepsilon$.

(III) Wegen (II) genügt es, den Fall $a = a_n = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ zu betrachten.

$$|b_n| = |b_n - b + b| \geq |b| - |b_n - b| \geq |b| - \varepsilon$$

Sei $0 < \varepsilon < \frac{|b|}{2}$, dann gilt $|b_n| > \frac{|b|}{2}$, $\forall n > n_0(\varepsilon)$

Es folgt, $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b_n - b}{b_n b}\right| < \frac{2}{|b|^2} |b_n - b|$

$$\leq \frac{2}{|b|^2} \varepsilon \quad \forall n > n_0(\varepsilon)$$

Also folgt $\forall n > N(\varepsilon) := n_0\left(\frac{\varepsilon |b|^2}{2}\right)$

dass $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| < \varepsilon$.

(IV) (Indirekter Beweis) Falls $a > b$, $a - b > 0$

Sei $\varepsilon := \frac{a-b}{2} > 0$, $2\varepsilon = b - a$

$\Rightarrow$ $b - \varepsilon = a + \varepsilon$

$b_n \to b \Rightarrow$
$b_n < b + \varepsilon \quad \forall n > n_0(\varepsilon)$

$a_n \to a \Rightarrow \quad -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < a_n \quad \forall n > n_0(\varepsilon)$

Aber denn die Ungleichung

$$b_n < b + \varepsilon = a - \varepsilon < a_n \quad \forall n \geq n_0$$

im Wiederspruch zur Annahme $a_n \leq b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\blacksquare$.

Es ist nicht unbedingt nötig, den ganzen Beweis zu führen um zu wissen dass eine Folge konvergent ist.

Es gibt Folgen deren Konvergenz, durch eine Strukturelle Eigenschaft gesichert ist ohne dass man den Limes apriori kennen muss.

Folgender Satz illustriert dieses, er benutzt die Vollständigkeitsaxiom.

<u>Satz 3.9</u> (Monotone Konvergenz)

(1) Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine monoton wachsende beschränkte Folge. Dann ist sie konvergent und es gilt zudem

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \sup \{a_n : n \geq 1\}.$$

(II) Sei $(b_n)_{n\geq 1}$ eine monotone fallende beschränkte Folge. Dann ist es konvergent und es gilt zudem:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \inf \{ b_n \mid n \geq 1 \}$$

Defn 3.10 Monotone wachsend:

$$a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \geq 1$$

Monotone fallend $b_{n+1} \leq b_n \quad \forall n \geq 1$.

Beweis (3.9) (i) $a_1 \leq a_2 \leq \dots$ und

$\{a_n : n \geq 1\}$ nach oben beschränkt

$\Longrightarrow \exists\, c$ mit $a_n \leq c \quad \forall n \geq 1$.

Sei nach Satz 2.9 (Jede nach oben beschränkte Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ besitzt ein kleinste obere Schranke)

$a := \sup \{ a_n : n \geq 1 \}$ die kleinste obere Schranke.

Wir behaupten dass: $a = \lim_{n \to \infty} a_n$.

Sei $\varepsilon > 0$, dann ist $a - \varepsilon$ keine obere Schranke und deswegen gibt es $n(\varepsilon) \geq 1$ mit $a_{n(\varepsilon)} > a - \varepsilon$.

Aus Monotonität folgt

$$a_n > a_{n(\varepsilon)} > a - \varepsilon \quad \forall n > n(\varepsilon)$$

und folgt somit

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > n(\varepsilon).$$

(II) Ähnlich. $\blacksquare$

Sätze 3.8, 3.9 haben vielfältige Anwendungen die wir durch einige Beispiele illustrieren.

Bsp 3.10 1) Sei $a_n = \dfrac{3n^6 + 11n^4 - 1}{2n^6 - 7n^3 + n}$

$$= \frac{3 + \frac{11}{n^2} - \frac{1}{n^6}}{2 - \frac{7}{n^3} + \frac{1}{n^5}} \longrightarrow \frac{3}{2}$$