

Kapitel 9

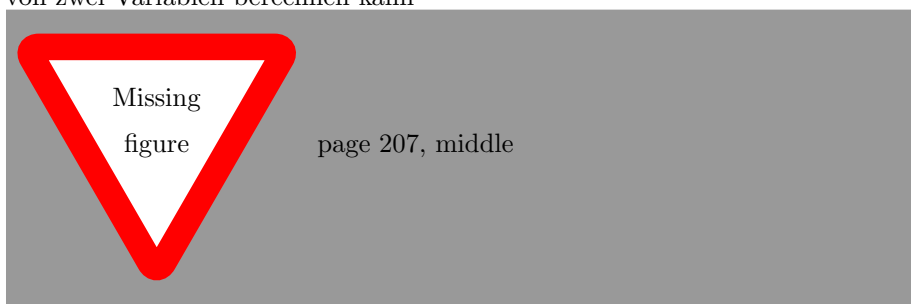
Integration in \mathbb{R}^n

Im Eindimensionalen hatten wir mit dem Integral

$$\int_a^b f(x) dx$$

den Flächeninhalt unter dem Graphen von f berechnet. Wir suchen nach eine Verallgemeinerung mit der z.B. Volumen unter dem Graphen einer Funktion von zwei Variablen berechnen kann

can't understand word,
page 207 middle



Erinnerung: Bestimmtes Riemann-Integral einer Funktion $f(x)$ über einem Intervall $[a, b]$:

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Das Integral I war als Grenzwert von Riemannscher Ober und Untersumme definiert (falls diese Grenzwert jeweils existieren und übereinstimmen).

Konstruktionsprinzip für Bereichsintegrale ist Analog. Aber der Definitionsbereich D ist komplizierter. Wir betrachten zunächst den Fall zweier Variabler, $n = 2$, und einen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}^2$ der Form

$$D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$$

d.h. D ist ein kompakter Quader (Rechteck). Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.

Definition 9.1

Mann nennt $Z = \{(x_0, x_1, \dots, x_n), (y_0, y_1, \dots, y_m)\}$ eine Zerlegung des Quaders $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ falls gilt

$$a_1 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b_1$$

$$a_2 = y_0 < y_1 < \dots < y_m = b_2$$

1. WHERE IS NUMBER 1??

2. Die Feinheit einer Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}(D)$ ist

$$\|Z\| := \max_{i,j} \{|x_{i+1} - x_i|, |y_{j+1} - y_j|\}$$

3. Für eine vorgegebene Zerlegung Z , nennt man die Mengen

$$Q_{ij} := [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$$

die Teilquader der Zerlegung Z . Das Volumen des Teilquaders Q_{ij} ist

$$\text{vol}(Q_{ij}) := (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$$

4. Für beliebige Punkte $\xi_{ij} \in Q_{ij}$ der Jeweiligen Teilquader nennt man

$$R_f(Z) := \sum_{i,j} f(\xi_{ij}) \text{vol}(Q_{ij})$$

eine Riemannsche Summe zur Zerlegung Z

5. Analog zum Integral einer Variablen heissen für eine Zerlegung Z

$$U_f(Z) := \sum_{i,j} \inf_{\mathbf{X} \in Q_{ij}} f(\mathbf{X}) \text{vol}(Q_{ij})$$

$$O_f(Z) := \sum_{i,j} \sup_{\mathbf{X} \in Q_{ij}} f(\mathbf{X}) \text{vol}(Q_{ij})$$

die Riemannsche Untersumme bzw. Riemannsche Obersumme von $f(x)$

Bemerkung 9.2

1. Es gilt

$$U_f(Z) \leq R_f(Z) \leq O_f(Z)$$

d.h. eine Riemannsche Summe zur Zerlegung Z liegt stets zwischen der Unter und Obersumme dieser Zerlegung.

2. Entsteht eine Zerlegung Z_2 aus der Zerlegung Z_1 durch Hinzunahme wei-

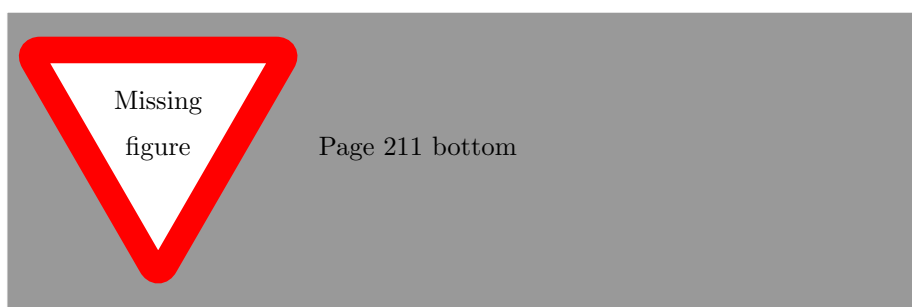
KAPITEL 9. INTEGRATION IN \mathbb{R}^n

terer Zwischenpunkte x_i oder/und y_j so gilt

$$U_f(Z_2) \geq U_f(Z_1) \quad \text{und} \\ O_f(Z_2) \leq O_f(Z_1)$$

Für zwei beliebige Zerlegungen Z_1, Z_2 gilt stets

$$U_f(Z_1) \leq O_f(Z_2)$$



Definition 9.3

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt

1. Riemannsche Unterintegral bzw. Riemannsche Oberintegral der Funktion $f(x)$ über D ist

$$U_f := \sup \{U_f(z) : z \in Z(D)\} := \int_{\underline{D}} f(x) d\mu$$

$$O_f := \inf \{O_f(z) : z \in Z(D)\} := \int_{\bar{D}} f(x) d\mu$$

2. Die Funktion $f(x)$ nennt man Riemann - integrierbar über D , falls Unter und Oberintegral übereinstimmen. Das Riemann Integral von $f(x)$ über D ist

$$\int_D f(x) d\mu = \int_{\bar{D}} f(x) d\mu = \int_{\underline{D}} f(x) d\mu$$

Bemerkung

In höheren Dimensionen, $n > 2$, ist die Vorgehensweise analog. Schreibweise:
Für $n = 2, n = 3$

$$\int_D f(x, y) d\mu \quad \text{bzw.} \quad \int_D f(x, y, z) d\mu$$

oder auch

$$\int_D f(x, y) \, dx dy \text{ bzw. } \int_D f(x, y, z) \, dx dy dz$$

oder

$$\int_D f \, dx dy \text{ bzw. } \int_D f \, dx dy dz$$

Satz 9.4 (Elementare Eigenschaften des Integrals)

1. Linearität: Seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und R integrierbar, $\beta, \alpha \in \mathbb{R}$. Dann sind $\alpha f, f + g$ R - Integrierbar

$$\int_D (\alpha f + \beta g) \, d\mu = \alpha \int_D f \, d\mu + \beta \int_D g \, d\mu$$

2. Monotonie: Gilt $f(x) \leq g(x), \forall x \in D$, so folgt

$$\int_D f \, d\mu \leq \int_D g \, d\mu$$

3. Positivität: Gilt für alle $x \in D, f(x) \geq 0$ (d.h. $f(x)$ ist nichtnegativ), so folgt

$$\int_D f \, d\mu \geq 0$$

4. Abschätzung

$$\left| \int_D f(x) \, d\mu \right| \leq \sup_{x \in D} |f(x)| \, \text{vol}(D)$$

5. Sind D_1, D_2, D Quader, $D = D_1 \cup D_2$ und $\text{vol}(D_1 \cap D_2) = 0$, so ist f genau dann über D integrierbar, falls f über D_1 und über D_2 integrierbar ist und es gilt

$$\int_D f \, d\mu = \int_{D_1} f \, d\mu + \int_{D_2} f \, d\mu$$

(Gebietsadditivität)

9.1 Der Satz von Fubini

According to the notes it should be 9.2, which one is right??

Wie kann man das R - Integral konkret berechnen? Der Satz von Fubini hilft uns.

Satz 9.5 (Satz von Fubini)

Sei $Q = [a, b] \times [c, d] \in \mathbb{R}^2$ und sei $f \in C^0(Q)$. Dann gilt

$$\int_Q f d\mu = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

d.h. das Integral von f über Q kann iterativ durch 1-Dimensionale Integration bestimmt werden

Beispiel 9.6

1. Sei $f(x, y) = 2x + 2yx$, $Q = [0, 1] \times [-2, 2]$

$$\begin{aligned} \int_Q f d\mu &= \int_{-2}^2 \left(\int_0^1 (2x + 2yx) dx \right) dy \\ &= \int_{-2}^2 \left(x^2 + yx^2 \Big|_0^1 \right) dy \\ &= \int_{-2}^2 (1 + y) dy = y + \frac{y^2}{2} \Big|_{-2}^2 = 4 \end{aligned}$$

Oder:

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \left(\int_{-2}^2 (2x + 2yx) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(2xy + y^2x \Big|_{-2}^2 \right) dx \\ &= \int_0^1 [(4x + 4x) - (-4x + 4x)] dx \\ &= \int_0^1 8x dx = 4x^2 \Big|_0^1 = 4 \end{aligned}$$

- 2.

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \int_0^{2\pi} (e^x \sin y) dy dx \\ &= \int_0^1 \left(-e^x \cos y \Big|_0^{2\pi} \right) dx \\ &= \int_0^1 0 dx = 0 \end{aligned}$$

Oder:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 e^x \sin y dx \right) dy \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\sin y e^x \Big|_0^1 \right) dy \\
 &= \int_0^{2\pi} (e - 1) \sin y dy \\
 &= - (e - 1) \cos y \Big|_0^{2\pi} = 0
 \end{aligned}$$

Geometrische Dehnung

Not sure about the text size...



In der Skizze ergibt sich als Volumen der markierten Schicht bei festem x und sehr kleinen Dicke dx näherungsweise das Volumen

$$\left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

Das Aufaddieren sämtlicher Schichtvolumen entspricht gerade der Integration über die Variable x , d.h. für das gesuchte Volumen gilt

$$V = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

Bis jetzt können wir nur Integrale über achsenparallel rechteckige bzw. quaderförmige Bereiche berechnen.

Das reicht für viele praktische Aufgaben nicht aus. Meist ist der Integrationsbereich D krummlinig oder zumindest anders begrenzt



Die meisten praktischen Aufgaben lassen sich auf die Integration über sogenannte Normalbereiche zurückführen.

Definition 9.10

1. Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^2$ heisst ein Normalbereich bezüglich der x -achse bzw. bezüglich der y -Achse falls es stetige Funktionen g, h bzw. \bar{g}, \bar{h} gibt mit

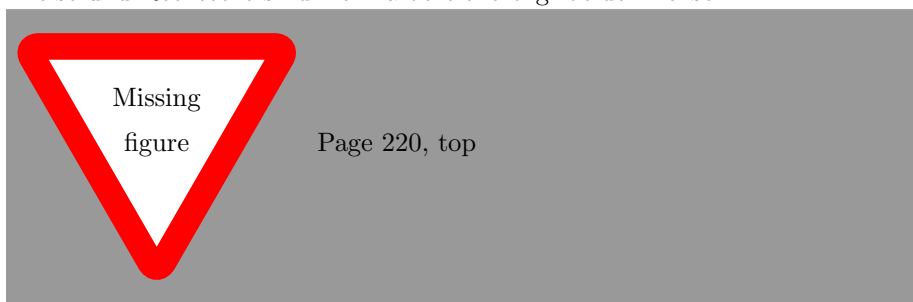
$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \text{ und } g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

bzw.

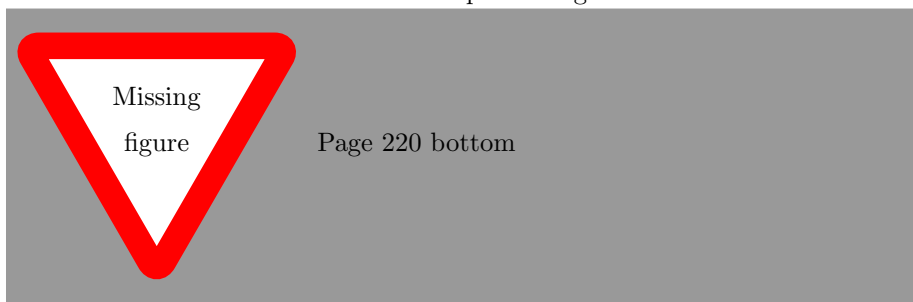
$$D = \{(x, y) \mid \bar{a} \leq x \leq \bar{b}, \text{ und } \bar{g}(x) \leq y \leq \bar{h}(x)\}$$

Beispiel

Kreise und Rechtecke sind Normalbereiche bzg. beider Achsen



Über Normalbereiche lässt sich sehr bequem integrieren



Die markierte Scheibe bei $y = \text{const.}$ mit kleiner Dicke dx besitzt näherungsweise das Volumen

$$V(x) = \left(\int_{g(x)}^{f(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

Nun braucht man $V(x)$ nur noch über $[a, b]$ zu integrieren

$$V = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

Satz 9.11

1. Ist $f(x)$ stetig auf einem Normalbereich

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \text{ und } g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

so gilt

$$\int_D f(x) d\mu = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

2. bzw. Falls

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{a} \leq x \leq \bar{b}, \text{ und } \bar{g}(x) \leq y \leq \bar{h}(x)\}$$

so gilt

$$\int_D f(x) d\mu = \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \left(\int_{\bar{g}(x)}^{\bar{h}(x)} f(x, y) dx \right) dy$$

Beispiel 9.12

1. Sei $f(x, y) = x - y$

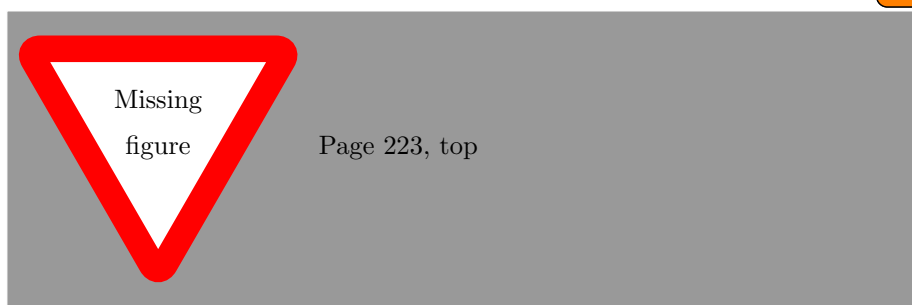


$$\begin{aligned}
 \int_D f d\mu &= \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} (x-y) dy dx \\
 &= \int_0^1 \left(xy - \frac{y^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} \right) dx \\
 &= \int_0^1 \left(x\sqrt{1-x^2} - \frac{1-x^2}{2} \right) dx \\
 &= \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx - \frac{1}{2} \int_0^1 1-x^2 dx \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx & \quad \begin{array}{l} u = 1-x^2 \\ du = -2x dx \end{array} \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{u} du = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \\
 \int_D f d\mu &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0
 \end{aligned}$$

2. Sei D die durch die Gerade $g(x) = x + 2$ und die Parabel $b(x) = 4 - x^2$ begrenzte Gebiet

missing content?? page 223 top



Schnittpunkte:

$$\begin{aligned}
 x + 2 &= 4 - x^2 \\
 x^2 + x - 2 &= 0 \\
 (x - y)(x + 2) &
 \end{aligned}$$

Zu Berechnung des Doppelintegrals zerlegen wir das Gebiet in Streifen parallel zur y -Achse. Für festes x variiert y von $g(x) = x + 2$ bis $h(x) =$

$$4 - x^2$$

$$\begin{aligned} \int_D x d\mu &= \int_{-2}^1 \left(\int_{x+2}^{4-x^2} x dy \right) dx \\ &= \int_{-1}^2 x (4 - x^2 - x + 2) dx \\ &= \int_{-1}^2 (2x - x^3 - x^2) dx \\ &= x^2 - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^2 \\ &= \left(4 - 4 - \frac{8}{3} \right) - \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \right) = -\frac{127}{36} \end{aligned}$$

3. Sei D :



$$\int_D f d\mu \underset{\substack{\downarrow \\ *}}{=} \int_{-1}^1 \left(\int_{x=y^2}^1 f dx \right) dy$$

(* = Zerlegung des Gebietes in Streifen parallel zur x -Achse)

oder mit Zerlegung in streifen parallel zur y -Achse

$$\int_D f d\mu = \int_{x=0}^1 \left(\int_{y=-\sqrt{x}}^{y=\sqrt{x}} f(x, y) dy \right) dx$$

Manchmal muss man D zerlegen.

4. Bestimme $\int_D x dx dy$ wobei D von $y^2 = 4x$ und $y = 2x - 4$ begrenzt wird.



Schnittpunkte P_1, P_2 :

$$\begin{aligned} 4x &= y^2 = (2x - 4)^2 \\ \Rightarrow (2x - 4)^2 &= 4x \dots \\ \Rightarrow x &= 1 \text{ und } x = 4 \\ P_1 &= (1, -2) \quad P_2 = (4, 4) \end{aligned}$$

Zerlegung des Gebiets in Streifen parallel zur y -Achse

$$\int_D x d\mu = \int_0^1 \left(\int_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} x dy \right) dx + \int_1^4 \left(\int_{y=2x-4}^{2\sqrt{x}} x dy \right) dx = \dots = 14.4$$

Wenn wir Aussen nach y integrieren, brauchen wir keine Unterteilung

$$\begin{aligned} \int_D x d\mu &= \int_{y=-2}^{y=4} \left(\int_{x=\frac{y^2}{4}}^{\frac{y}{2}+2} x dx \right) dy \\ &= \int_{-2}^4 \left(\frac{x^2}{2} \Big|_{\frac{y^2}{4}}^{\frac{y}{2}+2} \right) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^4 \left(\left(\frac{y}{2} + 2 \right)^2 - \frac{y^2}{16} \right) dy \end{aligned}$$

Bemerkung 9.13

1. Das Integral

$$A = \int_D 1 d\mu$$

ergibt die Fläche von D . Für einen Normal bereich bzg. der x -Achse erhalten wir daraus die bekannte Formel

$$A = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} 1 dy dx = \int_a^b (h(x) - g(x)) dx$$



2. Interpretiert man $\rho(x, y)$ als ortabhängige Flächendichte, so erhält man mit

$$m = \int_D \rho(x, y) d\mu$$

die Masse von D

Definition 9.14

Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^3$ heisst Normalbereich, falls es eine Darstellung

$$D = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b; g(x) < y < h(x); \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y) \}$$

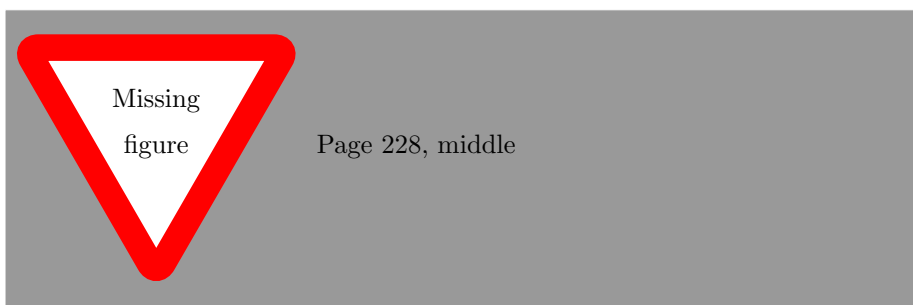
gibt.

(Vertauscht man die Rollen von x, y und z so entstehen weitere Mengen, die auch Normalbereiche genannt werden.)

Satz 9.15

Sei $D \subset \mathbb{R}^3$ ein Normalbereich mit Darstellung wie oben, und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt

$$\int_D f d\mu = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z) dz dy dx$$



$z = \varphi(x, y)$ und $z = \psi(x, y)$ stellen die “Grund” und Deckelfläche von D dar.

Der Normalbereich A ist die Senkrechte Projektion von D in die $x-y$ Ebene. Dessen “Grund” und “Deckelkurve” sind durch $y = g(x)$ und $y = h(x)$ gegeben.