§ 8.6 Vektorwertige Funktionen

Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $f = (f^i)_{1 \le i \le l} \; \Omega \to \mathbb{R}^l$

Defn 8.57 (8.6.1 stmue) ① Die Funktion $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ heisst an der Stelle $x_0 \in \Omega$ differenzierbar, falls jede Komponente f^i, $1 \le i \le l$ an der Stelle x_0 diff. ist.
Das Differential $df(x_0)$ hat die Gestalt

$$df(x_0) = \begin{pmatrix} df^1(x_0) \\ \vdots \\ df^n(x_0) \end{pmatrix}$$

② f heisst auf Ω diff. (bzw von der Klasse C^m, $m \ge 1$) falls jedes f^i diff. ist (bzw $f^i \in C^m(\Omega)$) $1 \le i \le l$.

Bmk 8.58 8.6.1 1) Bzgl der Standardbasis dx^j, $1 \le j \le n$ erhalten wir

$$df^i(x_0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x_0)\, dx^j = \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^1}(x_0), \ldots \frac{\partial f^i}{\partial x^n}(x_0) \right.$$

die Darstellung

$$df(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(x_0) & \frac{\partial f^1}{\partial x^2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n}(x_0) \\ \frac{\partial f^2}{\partial x^1}(x_0) & \frac{\partial f^2}{\partial x^2}(x_0) & & \frac{\partial f^2}{\partial x^n}(x_0) \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f^l}{\partial x^1}(x_0) & \frac{\partial f^l}{\partial x^2}(x_0) & & \frac{\partial f^l}{\partial x^n}(x_0) \end{pmatrix}_{l \times n}$$

Die $l \times n$ Matrix $df(x_0) = \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x_0) \right)_{1 \le i \le l,\ 1 \le j \le n}$

heisst Jacobi oder Funktionalmatrix von f an der Stelle x_0.

(2) Auch im vektorwertigen Fall ist die Funktion f genau dann differenzierbar in x_0, wenn eine lineare Abbildung $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ existiert mit

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0$$

Bsp 8.59 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ mit

$$df(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

Es gelten die üblichen Differentiationsregeln

Satz 8.60
(8.6.1 Skript) Sei $f, g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\ell$ an der Stelle $x_0 \in \Omega$ differenzierbar und $\alpha \in \mathbb{R}$.
Dann sind die Funktionen αf und $f+g$ sowie das Skalarprodukt von f und g an der Stelle x_0 diff. und

1) $d(\alpha f)(x_0) = \alpha\, df(x_0)$

2) $d(f+g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0)$

3) $d(f \cdot g)(x_0) = f(x_0) \cdot dg(x_0) + g(x_0) \cdot df(x_0)$

wobei $f(x_0) \cdot dg(x_0) = \sum_{i=1}^{\ell} f^i(x_0)\, dg^i(x_0)$ ...

Satz 8.61 (Kettenregel) Seien $g : \Omega \to \mathbb{R}^\ell$
(8.6.2 Skript) an der Stelle $x_0 \in \Omega$ und
$f : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^m$ an der Stelle $g(x_0)$
differenzierbar.

Dann ist die Funktion $f \circ g : \Omega \to \mathbb{R}^m$ an der Stelle x_0 differenzierbar, und

$$d(f \circ g)(x_0) = df(g(x_0)) \cdot dg(x_0).$$

<u>Bsp.</u> Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \to \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} \qquad df = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

$$(x,y,z) \to \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 \\ xyz \end{pmatrix} \qquad dg = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$$

$$(f \circ g) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

$$(x,y,z) \longrightarrow \begin{pmatrix} (x^2 + y^2 + z)^2 - (xyz)^2 \\ 2(x^2+y^2+z^2)(xyz) \end{pmatrix}$$

$$d(f \circ g)(x,y,z) = df(g(x,y,z)) \cdot (dg)(x,y,z)$$

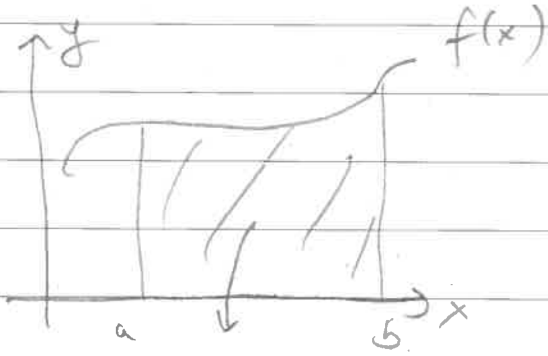
$$= \begin{pmatrix} 2(x^2+y^2+z^2) & -2xyz \\ 2xyz & 2(x^2+y^2+z^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4x(x^2+y^2+z^2) - 2xy^2z^2 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

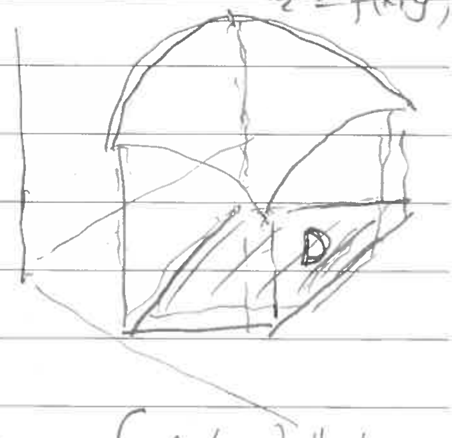
§ 9. Integration in $\mathbb{R}^N$.

Im Eindimensionalen hatten wir mit dem Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ den Flächeninhalt unter dem Graphen von f berechnet.

Wir suchen nach einer Verallgemeinerung mit der man z.B. Volumen unter dem Graphen einer Funktion von zwei Variablen berechnen kann.



$$\int_a^b f(x)\,dx$$



$$V = \int_D f(x,y)\,d\mu$$

<u>Erinnerung:</u> Bestimmtes Riemann-Integral einer Funktion $f(x)$ über einem Intervall $[a,b]$:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Das Integral I war als Grenzwert von Riemannscher Ober und Untersumme definiert (falls diese Grenzwert jeweils existieren und übereinstimmten).

Konstruktionsprinzip für Bereichsintegrale ist Analog. Aber der Definitionsbereich D ist komplizierter.

Wir betrachten zunächst den Fall zweier Variabler, $n=2$, und einen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}^2$ der Form

$$D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$$

D.h. D ist ein kompakter Quader (Rechteck)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.

Defn 9.1 Mann nennt $Z = \{(x_0, x_1 \dots x_n), (y_0, y_1 \dots y_m)\}$

eine Zerlegung des Quaders $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$

falls gilt $a_1 = x_0 < x_1 \dots < x_n = b_1$

$$a_2 = y_0 < y_1 \dots < y_m = b_2$$

mit $Z(D)$ wird die Menge der Zerlegungen von D bezeichnet

(2) Die Feinheit einer Zerlegung $Z \in Z(D)$ ist

$$\|Z\| := \max_{i,j} \{|x_{i+1} - x_i|, |y_{j+1} - y_j|\}$$

(3) Für eine vorgegebene Zerlegung Z, nennt man die Mengen

$$Q_{ij} := [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$$

die Teilquader der Zerlegung Z

Das Volumen des Teilquaders Q_{ij} ist

$$\mathrm{vol}(Q_{ij}) := (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$$

(4) Für beliebige Punkte $\xi_{\underline{j}} \in Q_{\underline{j}}$ der jeweiligen Teilquader nennt man

$$R_f(Z) := \sum_{i,\underline{j}} f(\xi_{\underline{j}}) \operatorname{vol}(Q_{\underline{j}})$$

eine Riemannsche Summe zur Zerlegung Z

(5) Analog zum Integral einer Variablen heissen für eine Zerlegung Z

$$U_f(Z) := \sum_{i,\underline{j}} \inf_{\underline{x} \in Q_{\underline{j}}} f(\underline{x}) \operatorname{vol}(Q_{\underline{j}})$$

$$O_f(Z) := \sum_{i,\underline{j}} \sup_{\underline{x} \in Q_{\underline{j}}} f(\underline{x}) \operatorname{vol}(Q_{\underline{j}})$$

die Riemannsche Untersumme bzw
" Obersumme von $f(x)$

Bmk 9.2 (1): Es gilt

$$U_f(Z) \leq R_f(Z) \leq O_f(Z)$$

d.h eine Riem. Summe zu Zerlegung Z liegt stets zwischen der Unter und Obersumme dieser Zerlegung.

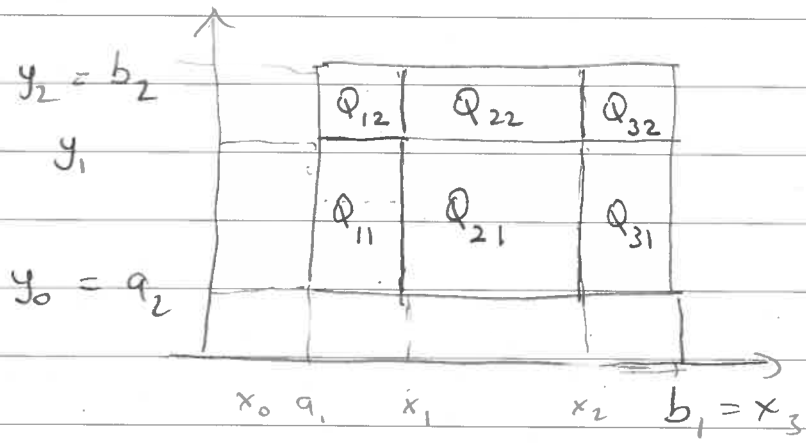
2) Entsteht eine Zerlegung Z_2 aus der Zerlegung Z_1 durch Hinzunahme weiterer Zwischenpunkte x_i oder/und y_j so gilt

$$U_f(Z_2) \geq U_f(Z_1) \quad \text{und}$$

$$O_f(Z_2) \leq O_f(Z_1)$$

Für zwei beliebige Zerlegungen Z_1, Z_2 gilt stets

$$U_f(Z_1) \leq O_f(Z_2).$$



Sei $f: D \to \mathbb{R}$ beschränkt (212)

Defn 9-3 ① Riemannsches UnterIntegral

bzw. Riemannsches OberIntegral der

Funktion $f(x)$ über D ist

$$U_f := \sup \{U_f(Z) : Z \in Z(D)\}$$

$$:= \underline{\int_D} f(x)\, d\mu$$

$$O_f := \operatorname{Inf} \{O_f(Z) : Z \in Z(D)\}$$

$$:= \overline{\int_D} f(x)\, d\mu$$

② Die Funktion $f(x)$ nennt man

Riemann-integrierbar über D, falls

Unter und Oberintegral übereinstimmen.

Das Riemann integral von $f(x)$ über D

ist $\displaystyle\int_D f(x)\,d\mu = \overline{\int_D} f(x)\,d\mu = \underline{\int_D} f(x)\,d\mu$

Bmk

In höheren Dimensionen, $n > 2$, ist die Vorgehensweise analog.

Schreibweise: Für $n = 2$, $n = 3$

$$\int_D f(x,y)\, d\mu \quad \text{bzw} \quad \int_D f(x,y,z)\, d\mu$$

oder auch $\int_D f(x,y)\, dx\, dy$ bzw $\int_D f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$

oder $\iint_D f\, dx\, dy$ bzw $\iiint_D f\, dx\, dy\, dz$

Satz 9.4 (Elementare Eigenschaften des Integrals).

(Stimme: Satz 9.1.2, 9.1.3, 9.1.4, 9.1.5)

① Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ beschränkt und R-integrabel, $\beta, \alpha \in \mathbb{R}$. Dann sind αf, $f+g$ R-integrabel

Linearität: $\int_D (\alpha f + \beta g)\, d\mu = \alpha \int_D f\, d\mu + \beta \int_D g\, d\mu$.

Monotonie:

(2) Gilt $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in D$, so folgt

$$\int_D f \, d\mu \leq \int_D g \, d\mu$$

(3) Positivität. Gilt für alle $x \in D$, $f(x) \geq 0$ (d.h. $f(x)$ ist nichtnegativ), so folgt

$$\int_D f \, d\mu \geq 0.$$

(4) Abschätzung

$$\left| \int_D f(x) \, d\mu \right| \leq \sup_{x \in D} |f(x)| \cdot \mathrm{vol}(D).$$

(5) Sind D_1, D_2, D Quader, $D = D_1 \cup D_2$ und $\mathrm{vol}(D_1 \cap D_2) = 0$, so ist f genau dann über D integrierbar, falls f über D_1 und über D_2 integrierbar ist und es gilt

$$\int_D f \, d\mu = \int_{D_1} f \, d\mu + \int_{D_2} f \, d\mu$$

(Gebietsadditivität)

§ 9.2 ~~Der~~ Satz von Fubini.

Wie kann man das R- Integral konkret berechnen?

Der Satz von Fubini hilft uns.

Satz 9.5 (Satz von Fubini) Sei

(Struwe 9.2.1) $Q = [a,b] \times [c,d] \in \mathbb{R}^2$ und sei

$f \in C^0(Q)$. Dann gilt

$$\int_Q f \, d\mu = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) \, dy \right) dx$$

$$= \int_c^d \left(\int_a^b (f(x,y)) \, dx \right) dy .$$

d.h. das Integral von f über Q kann iterativ durch 1-dimensionale Integration bestimmt werden

Bsp 9.6 ① Sei $f(x,y) = 2x + 2yx$

$Q = [0,1] \times [-2,2]$.

$$\int_Q f\,d\mu = \int_{-2}^{2} \left(\int_0^1 (2x + 2yx)\,dx \right) dy$$

$$= \int_{-2}^{2} \left(x^2 + yx^2 \Big|_0^1 \right) dy = \int_{-2}^{2} (1+y)\,dy$$

$$= y + \frac{y^2}{2} \Big|_{-2}^{2} = 4.$$

oder $$\int_0^1 \left(\int_{-2}^{2} (2x + 2yx)\,dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(2xy + y^2 x \Big|_{-2}^{2} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left[(4x + 4x) - (-4x + 4x) \right] dx$$

$$= \int_0^1 8x\,dx = 4x^2 \Big|_0^1 = 4.$$

2) $\int_0^1 \int_0^{2\pi} (e^x \sin y)\, dy\, dx$

$= \int_0^1 \left(-e^x \cos y \Big|_0^{2\pi} \right) dx$

$= \int_0^1 0 \; dx = 0.$

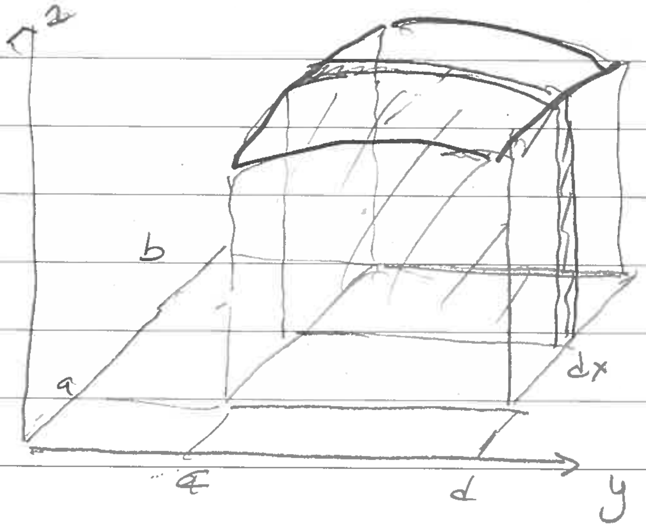
oder

$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 e^x \sin y \; dx \right) dy$

$= \int_0^{2\pi} \left(\sin y \; e^x \Big|_0^1 \right) dy = \int_0^{2\pi} (e-1) \sin y \; dy$

$= -(e-1) \cos y \Big|_0^{2\pi} = 0.$

Geometrische Deutung



In der Skizze ergibt sich als Volumen der markierten Schicht bei festem x und sehr kleiner Dicke dx näherungsweise das Volumen

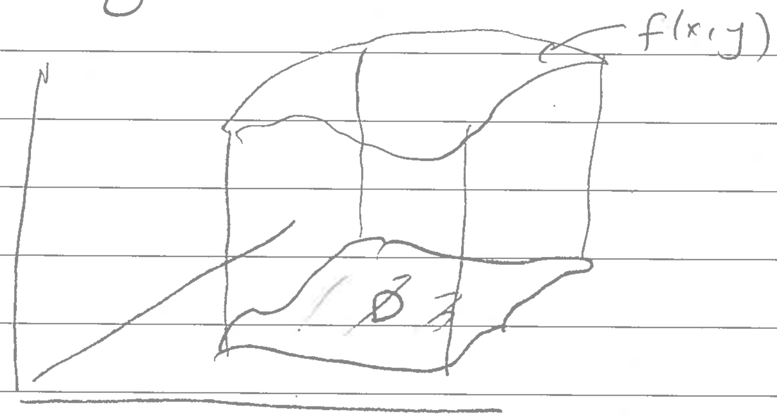
$$\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)\cdot dx$$

Das Aufaddieren sämtlicher Schichtvolumen entspricht gerade der Integration über die Variable x, d.h. für das gesuchte Volumen gilt

$$V = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx .$$

Bis jetzt können wir nur Integrale über achsenparallel rechteckige bzw quaderförmige Bereiche berechnen.

Das reicht für viele praktische Aufgaben nicht aus. Meist ist der Integrationsbereich D krummlinig oder zumindest anders begrenzt.



Die meisten praktischen Aufgaben lassen sich auf die Integration über sogenannte Normalbereiche zurückführen.

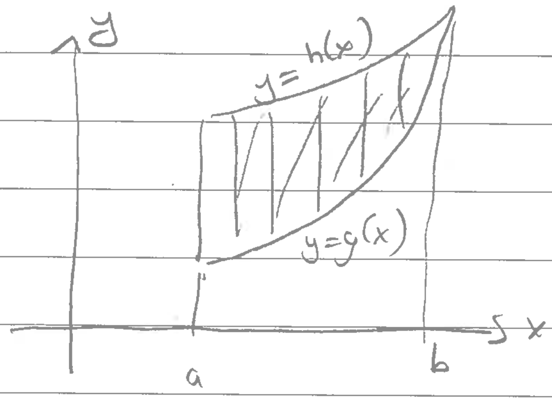
Defn 9.10 ① Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^2$ heisst ein Normalbereich bezüglich der x-achse bzw bezüglich der y-Achse falls es stetige Funktionen g, h bzw $\bar{g}, \bar{h}$ gibt mit

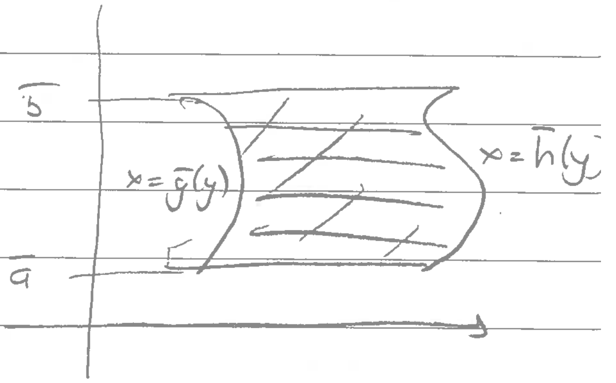
$$D = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b \text{, und } g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

bzw

$$D = \{(x,y) \mid \bar{a} \leq y \leq \bar{b} \text{ und } \bar{g}(y) \leq x \leq \bar{h}(y)\}$$

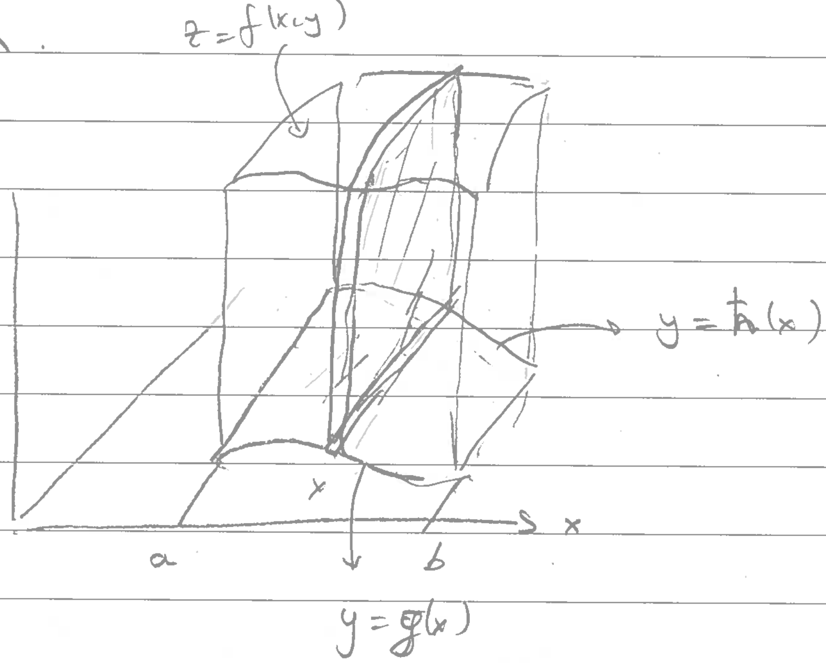
Bsp. Kreise und Rechtecke sind Normalbereiche bzg beider Achsen.





Normalbereich bzg x-achse   y-achse.

Über Normalbereiche läßt sich sehr bequem integrieren.



Die markierte Scheibe bei $x = \text{const}$ mit kleiner Dicke dx besitzt näherungsweise das Volumen

$$V(x) = \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

Nun braucht man $V(x)$ nur noch über $[a,b]$ zu integrieren

$$V = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy \right) dx .$$

<u>Satz 9.11</u> ① Ist $f(x)$ stetig auf einem Normalbereich

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b \text{ und } g(x) \le y \le h(x) \}$$

so gilt

$$\int_D f(x)\,d\mu = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

② bzw. Falls

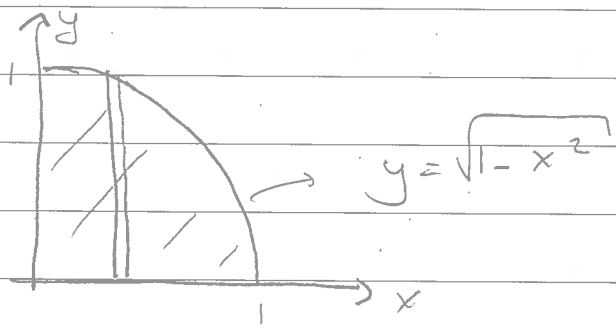
$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{a} \le y \le \bar{b},\ \bar{g}(y) \le x \le \bar{h}(y) \}$$

so gilt

$$\int_D f\,d\mu = \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \left(\int_{\bar{g}(y)}^{\bar{h}(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

Bsp 9.12. ① Sei $f(x,y) = x-y$

$D =$



$$\int_D f\,d\mu = \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} (x-y)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \left(xy - \frac{y^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(x\sqrt{1-x^2} - \frac{1-x^2}{2} \right) dx = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx - \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^1 1-x^2\,d}_{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}}$$

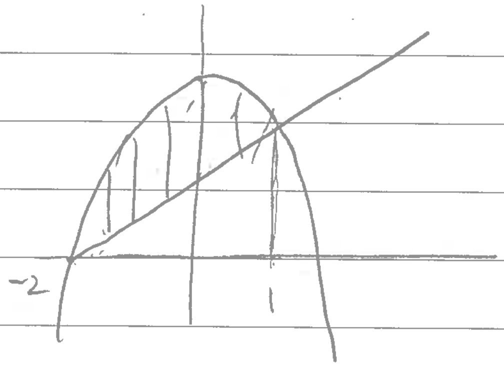
$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx \qquad u = 1-x^2, \quad du = -2x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{u}\,du = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2u^{3/2}}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\int_D f\,d\mu = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

223

(2) Sei D die durch die Gerade $g(x) = x+2$ und die Parabel $h(x) = 4-x^2$ begrenzte Gebiet



$$\int_D x \, d\mu$$

Schnittpunkte: $x+2 = 4-x^2$

$x^2 + x - 2 = 0$

$(x-1)(x+2)$

Zur Berechnung des Doppelintegrals zerlegen wir das Gebiet in Streifen parallel zur y-Achse.
Für festes x variiert y von $g(x) = x+2$ bis $h(x) = 4-x^2$

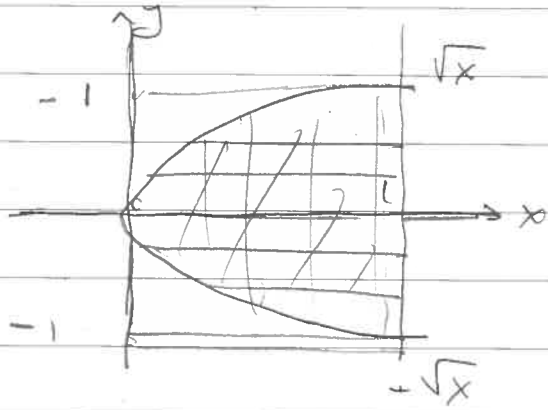
$$\int_D x \, d\mu = \int_{-2}^{1} \left(\int_{x+2}^{4-x^2} x \, dy \right) dx$$

$$= \int_{-1}^{2} x \left(4-x^2 - x+2 \right) dx$$

$$= \int_{-1}^{2} \left(2x - x^3 - x^2\right) dx = x^2 - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^{2}$$

$$= \left(4 - 4 - 8/3\right) - \left(1 - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{3}\right) = \ldots$$

3 Set D:



$$\int_D f \, d\mu = \int_{-1}^{1} \left(\int_{x=y^2}^{1} f \, dx \right) dy$$

Zerlegung des Gebiets in Streifen parallel zur x-achse

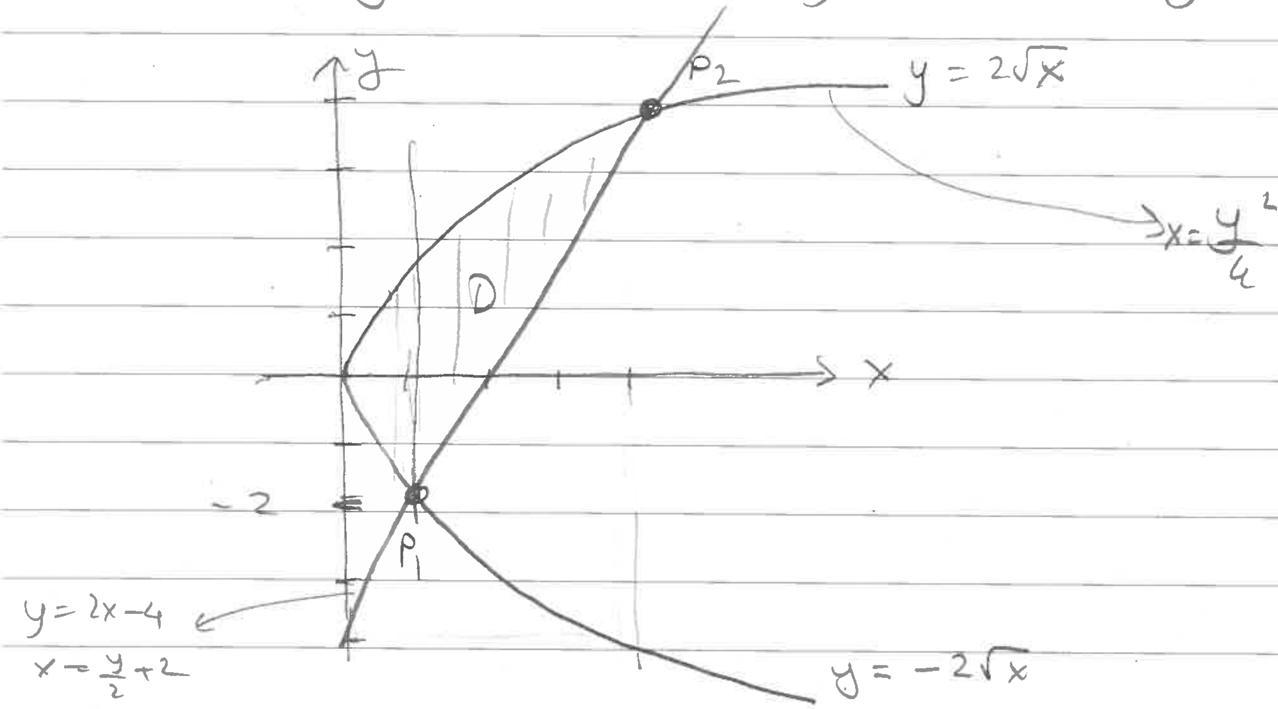
oder mit Zerlegung in Streifen parallel zur y-Achse

$$\int_D f \, d\mu = \int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=-\sqrt{x}}^{y=\sqrt{x}} f(x,y) \, dy \right) dx$$

Manchmal muss man D zerlegen.

(4) Bestimme $\int_D x \, dx dy$ wobei D

von $y^2 = 4x$ und $y = 2x - 4$ begrenzt wird.



Schnittpunkte P_1; P_2: $\quad 4x = y^2 = (2x-4)^2$

$\Rightarrow (2x-4)^2 = 4x \quad \ldots$

$\Rightarrow \quad x = 1$ und $x = 4$.

$P_1 = (1, -2) \qquad P_2 = (4, 4)$

Zerlegung des Gebiets in Streifen parallel zur y-Achse

$$\int_D x \, d\mu = \int_0^1 \left(\int_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} x \, dy \right) dx + \int_1^4 \left(\int_{y=2x-4}^{2\sqrt{x}} x \, dy \right) dx$$

$\ldots = 14.4$.

Wenn wir aussen nach y integrieren, brauchen wir keine Unterteilung

$$\int_D x \, d\mu = \int_{y=-2}^{y=4} \left(\int_{x=y^2/4}^{y/2+2} x \, dx \right) dy$$

$$= \int_{-2}^{4} \left(\frac{x^2}{2} \Big|_{y^2/4}^{y/2+2} \right) dy = \frac{1}{2} \int_{-2}^{4} \left(\left(\frac{y}{2}+2\right)^2 - \frac{y^4}{16} \right) dy$$

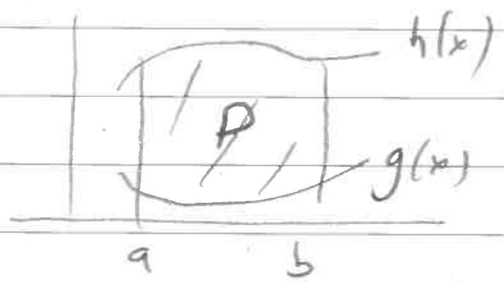
- - - -

Bmk 9.13 ① Das Integral

$$A = \int_D 1 \, d\mu \quad \text{ergibt die Fläche von } D.$$

Für einen Normalbereich bzg der x-Achse erhalten wir daraus die bekannte Formel

$$A = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} 1 \, dy \, dx = \int_a^b \left(h(x) - g(x) \right) dx$$



② Interpretiert man $\rho(x,y)$ als ortsabhängige Flächendichte, so erhält man mit

$$m = \int_D \rho(x,y)\,d\mu$$ die Masse von D.

Def. 9.14 Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^3$ heisst Normalbereich, falls es eine Darstellung

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b;\ g(x) < y < h(x);$$
$$\text{und } \varphi(x,y) \leq z \leq \psi(x,y)\}$$

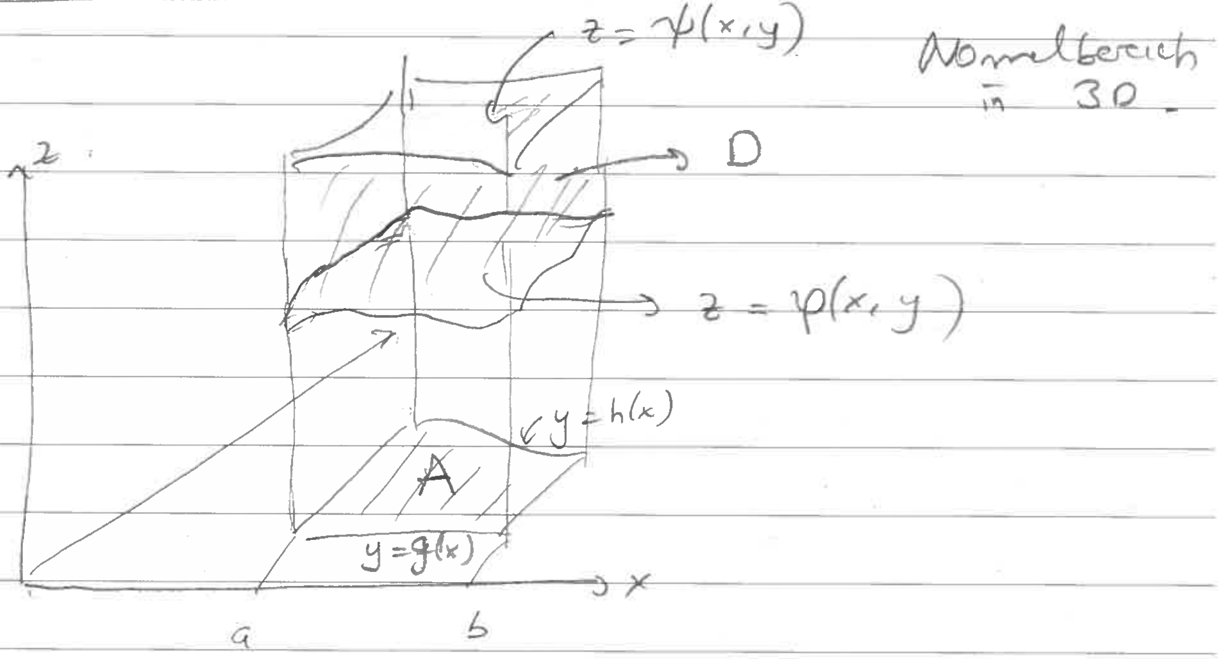
gibt.

(Vertauscht man die Rollen von $x, y,$ ~~und~~ z so entstehen weitere Mengen, die auch Normalbereiche genannt werden.

Satz 9-15 Sei $D \subset \mathbb{R}^3$ ein Normalbereich mit Darstellung wie oben, und $f: D \to \mathbb{R}$ stetig.

Dann gilt

$$\int_D f \, d\mu = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z) \, dz \, dy \, dx$$



$z = \varphi(x,y)$ und $z = \psi(x,y)$ stellen die "Grund" und Deckelfläche von D dar.

Der Normalbereich A ist die senkrechte Projektion von D in die x-y Ebene. Dessen "Grund" und "Deckelkurve" sind durch $y = g(x)$ und $y = h(x)$ gegeben.