WARNING!

READ CAREFULLY!

The following document has not been checked for mistakes, and although every effort possible has been made to ensure that the information in this document is correct, it might still contain some mistakes. The following document is given "as is", without any warranty whatsoever.

Kapitel 2

Reelle Zahlen, Euklidische Räume und Komplexe Zahlen

2.1 Elementare Zahlen

$$
\begin{array}{rccll}
\text{Natürliche Zahlen} & \mathbb{N} & = & \{0,1,2,\dots\} & \text{addieren und multiplizieren} \\
 & \cap & & & \\
\text{Ganze Zahlen} & \mathbb{Z} & = & \{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\} & \text{subtrahieren} \\
 & \cap & & & \\
\text{Rationale Zahlen} & \mathbb{Q} & = & \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p,q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\} & \text{dividieren}
\end{array}
$$

Viele Gleichungen haben keine Lösung in $\mathbb{Q}$.

Satz 2.1

Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Dann hat $x^2 = p$ keine Lösung in $\mathbb{Q}$.

Beweis

Zur Erinnerung: Zwei Natürlichen Zahlen a und b sind teilerfremd (oder relativ prim) wenn es keine natürliche Zahl ausser der Eins gibt, die beide Zahlen teilt.

$$ggT(a,b) = 1 \quad \text{(grösster gemeinsamer Teiler = 1)}$$

Indirekter Beweis

Wir nehmen an, dass es $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ gibt mit $x^2 = p$, wobei a, b teilerfremd und ≥ 1 sind. Dann gilt

$$a^2 = pb^2$$

woraus folgt, dass p a teilt, also ist $a = pk$, $k \in \mathbb{N}$ und somit

$$a^2 = p^2k^2 = pb^2 \Rightarrow pk^2 = b^2$$

woraus folgt, dass p b teilt.

■

2.2 Die Reellen Zahlen

Wir werden jetzt das System von Axiomen beschreiben, das die Menge der reellen Zahlen "eindeutig" charakterisiert.

Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist mit zwei Verknüpfungen "+" (Addition) und "·" (Multiplikation) versehen, sowie mit einer Ordnungsrelation $\leq$. Die Axiome werden wie folgt gruppiert:

1. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ **ist ein Körper**
   Es gibt zwei Operationen (zweistellige Verknüpfungen)

   - $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
     $(a, b) \mapsto a + b$
   - $\times : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
     $(a, b) \mapsto a \cdot b$

   und zwei ausgezeichnete Elemente 0 und 1 in $\mathbb{R}$, die folgende Eigenschaften haben:

Kommutativität	A1)	$x + y = y + x$
Assoziativität	A2)	$(x + y) + z = x + (y + z)$
Neutrales Element	A3)	$x + 0 = x = 0 + x$
Inverses Element	A4)	$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$ mit $x + y = 0 = y + x$
Komutativität	M1)	$x \cdot y = y \cdot x$
Assoziativität	M2)	$(xy)z = x(yz)$
Neutrales Element	M3)	$x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$
Inverse Element	M4)	$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0\ \exists y \in \mathbb{R}$ mit $xy = 1 = yx$

und die Multiplikation ist verträglich mit der Addition im Sinne des Distributivitätsgesetzes (D)

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x(y + z) = xy + xz$$

- $(\mathbb{R}, +)$ mit A1→A4 ist eine Abelsche Gruppe bezüglich der Addition.
- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ mit A1→A4, M1→M4 und D ist ein Zahlkörper.

Bemerkung 2.2

Eine Menge G, versetzt mit Verknüpfung + und dem neutralen Element 0, die den obigen Eigenschaften A2→A4 genügt, heisst Gruppe.

Eine Menge K versetzt mit Verknüpfung $+, \cdot$ und Elementen $0 \neq 1$, die den obigen Eigenschaften A1→A4, M1→M4, D genügt, heisst Körper.

Folgerung 2.3

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

i) $a+b=a+c \Rightarrow b=c$ und 0 ist eindeutig, d.h. falls $z \in \mathbb{R}$ der Eigenschaft $a+z=a\ \forall a \in \mathbb{R}$ genügt, so folgt $z=0$.

ii) $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $\exists!$ (eindeutig bestimmtes) $x \in \mathbb{R} : a+x=b$. Wir schreiben $x=b-a$ und $0-a=-a$ ist das additive Inverse zu a.

iii) $b-a=b+(-a)$

iv) $-(-a)=a$

A

v) Aus $ab=ac$ und $a \neq 0$ folgt $b=c$. Das bzgl. der Multiplikation neutrale Element 1 ist eindeutig, d.h. falls $x \in \mathbb{R}$ der Eigenschaft $ax=a\ \forall a \in \mathbb{R}$ genügt, so folgt $x=1$

vi) $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $\exists! x \in \mathbb{R} : ax=b$. Wir schreiben $x=\frac{b}{a}$ und $\frac{1}{a}=a^{-1}$ ist das multiplikative Inverse zu a.

vii) Falls $a \neq 0 \Rightarrow \left(a^{-1}\right)^{-1}=a$

M

viii) $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \cdot 0 = 0$

ix) Falls $ab=0$, dann folgt $a=0$ oder $b=0$

Beweis 2.3

i) Sei $a+b=a+c$
A4 $\Rightarrow \exists y \in \mathbb{R} : a+y=0$
$a+b=a+c \Rightarrow y+(a+b)=y+(a+c)$
$\stackrel{A2}{\Rightarrow}(y+a)+b=(y+a)+c$
$\Rightarrow 0+b=0+c \stackrel{A3}{\Rightarrow} b=c$
Nehmen wir an, dass es $0' \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $x+0'=x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, d.h. es gibt ein zweites neutrales Element für $+$.

Dann $0+0'=0$ aber auch A3 $\Rightarrow 0+0=0 \Rightarrow 0+0'=0+0 \Rightarrow 0=0'$

ii) Seien $a,b \in \mathbb{R}$, und sei $y \in \mathbb{R}$ mit $a+y=0$. Definieren wir $x := y+b \Rightarrow a+x=a+(y+b)=(a+y)+b=0+b=b$
$\Rightarrow$ es gibt mindestens eine Lösung der Gleichung $a+x=b$. Von i) folgt, dass x eindeutig bestimmt ist $a+x=b=a+x' \Rightarrow x=x'$

iii) Seien $x=b-a$, $y=b+(-a)$. Wir wollen beweisen, dass $x=y$.

Aus i) wissen wir, dass $b-a$ eine Lösung von $a+x=b$

$$y+a=(b+(-a))+a=b+((-a)+a)=b+0=b$$

$\Rightarrow y$ ist auch eine Lösung.
Weil die Lösung von $a+x=b$ eindeutig bestimmt ist, folgt $y=x$.

iv)

v)

vi)

vii)

ASK FOR BEWEIS PAGE 27 TOP

viii) $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \cdot 0 = 0$
$a \cdot 0 = a(0+0) = a \cdot 0 + a \cdot 0 \Rightarrow a \cdot 0 = 0$

ix) $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ oder $b = 0$
Wir nehmen an: $a \neq 0$ mit multiplikativem Inversem a^{-1}, (a^{-1} existiert mittels M4). So folgt $b = 1 \cdot b = \left(a^{-1} \cdot a\right) b = a^{-1}(a \cdot b) = a^{-1} \cdot 0 = 0$

■

2. **Ordnungsaxiome $\leq$**
Auf $\mathbb{R}$ gibt es eine Relation $\leq$, genante Ordnung, die folgenden Eigenschaften genügt

(a) Reflexivität: $\forall x \in \mathbb{R}$: $x \leq x$

(b) Transitivität: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$: $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$

(c) Identität: $\forall x, y \in \mathbb{R}$: $(x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow x = y$

(d) Die Ordnung ist total: $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y$ gilt entweder $x \leq y$ oder $y \leq x$

Die Ordnung ist konsistent mit $+$, und $\cdot$

(a) $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z \qquad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$

(b) $x, y \geq 0 \Rightarrow xy \geq 0$

Mit $\leq$ hat man auch$\geq, <, >$. Wir verzichten auf eine Auflistung aller Folgerungen und beschränken uns auf einige wichtigen Folgerungen.

Folgerungen 2.4

i) $x \leq 0$ und $y \leq 0 \Rightarrow xy \geq 0$

ii) $x \leq 0$ und $y \geq 0 \Rightarrow xy \leq 0$

iii) $x \leq y$ und $z \geq 0 \Rightarrow xz \leq yz$

iv) $1 > 0$

v) $\forall x \in \mathbb{R} \qquad x^2 \geq 0$

vi) $0 < 1 < 2 < 3 < \ldots$

vii) $\forall x > 0 : x^{-1} > 0$

$\{$Annahme: $x^{-1} \leq 0$. Nach Multiplikation mit $x > 0$ folgt (mittels ii) $1 = x^{-1} \cdot x \leq 0 \cdot x = 0\}$

Bemerkung 2.5

$\leq$ auf $\mathbb{Q}$ genügt den obigen Eigenschaften. Die entscheidende weitere Eigenschaft von $\mathbb{R}$ ist die *Ordnungsvollständigkeit*.

3. **Ordnungsvollständigkeit - Vollständigkeitsaxiome**

   Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ nicht leere Teilmengen von $\mathbb{R}$, so dass $a \leq b$ für alle $a \in A, b \in B$. Dann gibt es $c \in \mathbb{R}$ mit $a \leq c \leq b \quad \forall a \in A, b \in B$

Bemerkung 2.6

Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ erfüllen diese Eigenschaften nicht!

Seien

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0, x^2 \leq 2\}$$

$$B = \{y \in \mathbb{Q} \mid y \geq 0, y^2 \geq 2\}$$

Dann gilt $a \leq b \; \forall a \in A \; b \in B$. Aber ein $c \in \mathbb{Q}$, mit $a \leq c \leq b$ würde dann $c^2 = 2$ erfüllen! In Satz 2.1 haben wir gesehen dass $x^2 = p$ keine Lösung in $\mathbb{Q}$ hat.

Wir definieren jetzt für $x, y \in \mathbb{R}$

$$\max\{x, y\} = \begin{cases} x \text{ falls } y \leq x \\ y \text{ falls } x \leq y \end{cases}$$

Insbesondere ist der Absolutbetrag einer Zahl $x \in \mathbb{R}, |x|$

$$|x| : \max\{x, -x\}$$

Für diesen gilt folgender wichtiger Satz

Satz 2.7

i) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Dreiecksungleichung)
ii) $|xy| = |x||y|$

Beweis 2.7

i) $x \leq |x|, -x \leq |x|$
   $y \leq |y|, -y \leq |y|$
   und $x + y \leq |x| + |y|, -(x + y) \leq |x| + |y|$
   woraus $|x + y| \leq |x| + |y|$ folgt
ii) ASK FOR BEWEIS

ASK FOR BEWEIS

$\blacksquare$

Satz (Youngsche Ungleichung)

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ gilt $2|ab| \leq \delta a^2 + \frac{b^2}{\delta}$

2.3 Infimum und Supremum

Im Zusammenhang mit der Ordnung führen wir einige wichtige Definitionen ein:

Definition 2.8

Sei $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge

a) $\mathbb{X}$ ist nach oben beschränkt, falls es $c \in \mathbb{R}$ gibt, mit $x \leq c, \forall x \in X$. Jedes derartige c heisst eine obere Schranke für $\mathbb{X}$.

b) $\mathbb{X}$ ist nach unten beschränkt, falls es $c \in \mathbb{R}$ gibt, mit $x \geq c$, $\forall x \in X$. Jedes derartige c heisst untere Schranke für $\mathbb{X}$.

c) X ist beschränkt, falls sie nach oben und unten beschränkt ist.

d) Ein Element $a \in \mathbb{X}$ ist ein maximales Element (oder Maximum) von $\mathbb{X}$ falls $x \leq a$, $\forall x \in \mathbb{X}$. Falls ein Maximum (bzw. Minimum) existiert, wird es mit $\max \mathbb{X}$ ($\min \mathbb{X}$) bezeichnet. Falls $\mathbb{X}$ keine obere Schranke hat, ist $\mathbb{X}$ nach oben unbeschränkt (analog für untere Schranke).

Beispiel 2.9

1. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ ist nach oben unbeschränkt. A ist nach unten beschränkt. Jedes $a \in \mathbb{R}, a \leq 0$ ist eine untere Schranke.

2. $B = [0, 1]$ ist nach oben und nach unten beschränkt.

   - 0 ist ein Minimum von B
   - 1 ist ein Maximum von B

3. $C = [0, 1)$ ist nach oben und nach unten beschränkt, $0 = \min(A)$. C hat kein Maximum.

Folgender Satz ist von zentraler Bedeutung und eine Folgerung des Ordnungsvollständigkeitsaxioms.

Satz 2.10

i) Jede nicht leere, nach oben beschränkte Teilmenge $A \subset B$ besitzt eine kleinste obere Schranke c. Die kleinste obere Schranke c ist eindeutig bestimmt, heisst Supremum von A und wird mit $\sup A$ bezeichnet.

ii) Jede nicht leere, nach unten beschränkt Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ besitzt eine grösste untere Schranke d, heisst Infimum von A und wird mit $\inf A$ bezeichnet.

Beweis

i) Sei $\varnothing \neq A \subset B$ nach oben beschränkt. Sei $B := \{b \in \mathbb{R} \mid b \text{ ist eine obere Schranke für } A\}$. Es folgt $B \neq \varnothing$ und $a \leq b$, $\forall a \in A$ $b \in B$

Mit dem Ordnungsvollständigkeitsaxiom folgt die Existenz einer Zahl $c \in \mathbb{R}$ mit $a \leq c \leq b \ \forall a \in A, \, b \in B$.

Es ist klar, dass c eine obere Schranke für A ist. Also $c \in B$. Da $c \leq b$ $\forall b \in B$, ist c die kleinste obere Schranke für A. Hiermit ist c eindeutig bestimmt.

(Seien c und c' zwei Suprema von A, c ist die kleinste obere Schranke und c' ist eine obere Schranke $\Rightarrow c \leq c'$. Das gleiche Argument mit c,c' vertauscht liefert $c' \leq c$)

ii) Sei A eine nach unten beschränkte, nicht leere Menge. Sei $-A := \{-x \mid x \in A\}$ die Menge der additiven Inversen von A. Dann $-A \neq \varnothing$ und nach oben beschränkt. i) $\Rightarrow \exists s = \sup(-A) \Rightarrow -s$ ist das Infimum von A

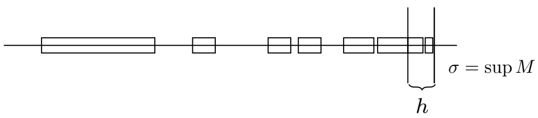
Korollar 2.11

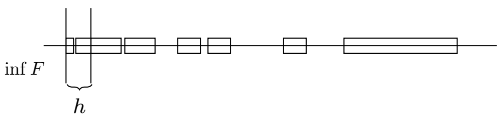
1. Falls $E \subset F$ und F nach oben beschränkt ist, gilt $\sup E \leq \sup F$
2. Falls $E \subset F$ und F nach unten beschränkt ist, gilt $\inf F \leq \inf E$
3. Falls $\forall x \in E$, $\forall y \in F$ gilt $x \leq y$, dann folgt $\sup E \leq \inf F$
4. Seien $E, F \neq \varnothing, \quad E, F \subset \mathbb{R}, \quad h \in \mathbb{R}, \quad h > 0$

   (i) Falls E ein Supremum besitzt $\Rightarrow \exists x \in E$ mit $x > \sup E - h$

   (ii) Falls E ein Infimum besitzt $\Rightarrow \exists y \in$: $y < \inf E + h$.

   Das Supremum, $\sup \mathbb{X} = \sigma$ der Menge $\mathbb{X}$ ist folgendermassen charakterisiert: Es gibt in $\mathbb{X}$ keine Zahlen $> \sigma$; aber für jede Toleranz $h > 0$ gibt es in $\mathbb{X}$ Zahlen $> \sigma - h$





   Es gibt in $\mathbb{X}$ keine Zahlen $< \inf \mathbb{X}$; aber für jede Toleranz $h > 0$ gibt es in $\mathbb{X}$ Zahlen $< \inf \mathbb{X} + h$

   (iii) Sei $E + F = \{e + f : e \in E, f \in F\}$. Falls E und F ein Supremum besitzen $\Rightarrow E+F$ besitzt ein Supremum und $\sup(E+F) = \sup(E) + \sup(F)$. (Analog mit Infimum)

Beweis

Ask for full Beweis!!

Beispiel

1. $E = (-\infty, 2) \subset F(-\infty, 4]$
   $\sup E = 2, \sup F = 4 = \max F$
   E hat kein Maximum
   $\sup E \leq \sup F$

2. $G : [4, 5) \subset H = (3, 6)$
   $\min G = \inf G = 4 \geq \inf H = 3$

3. $K = (3, \infty)$, $E = (-\infty, 2)$
   $\forall x \in E$, $y \in K$ gilt $x \leq y$
   $2 = \sup E \leq 3 = \inf K$

4. $A\{\sin x \mid x \in \mathbb{R}\}$
   $\inf A = -1 = \min A$
   $\sup A = 1 = \max A$

5. $A = \{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Wir werden sehen, dass A nach unten und nach oben beschränkt ist.
   $\inf A = \min A = 2$
   $\sup A = 2.718 \cdots =: e$ (die Eulersche Zahl per Vereinbarung)

Für nach oben unbeschränkte Mengen $A \neq \varnothing$ setzen wir $\sup A = \infty$. Analog für nach unten unbeschränkte Menge $\varnothing \neq A$ setzen wir $\inf A = -\infty$.
Der folgende Satz zeigt, wie die Ordnungsvollständigkeit von $\mathbb{R}$ die Lösbarkeit gewisser Gleichungen in $\mathbb{R}$ garantiert.

Satz 2.12

Für jedes $x > 0$ gibt es genau ein $y > 0$ mit $y^2 = x$. Diese Lösung wird mit $\sqrt{x}$ bezeichnet.

(Im Allgemeinen: Für jedes $x > 0$ und $n \geq 1$, $n \in \mathbb{R}$ gibt es genau ein $y > 0$ mit $y^n = 0$. Diese Lösung wird mit $\sqrt[n]{x}$ bezeichnet)

Beweis

Sei $x > 1$, und $A := \{z \in \mathbb{R} \mid z > 0 \text{ mit } z^2 \leq x\}$. Dann ist A nach oben beschränkt und $A \neq \varnothing$ (da mindestens $1 \in A$).
$\Rightarrow A$ besitzt ein Supremum.
Sei $y := \sup A$. Wir zeigen, dass $y^2 = x$

- Schritt 1: Annahme $y^2 < x$.
  Sei $0 \leq h \leq 1$. Wir nehmen an:

$$\begin{aligned}(y+h)^2 &= y^2 + 2hy + h^2 \\ &= y^2 + h(2y + h) \\ &\leq y^2 + h(2y + 1) \\ &= y^2 + h\left((y+1)^2 - y^2\right)\end{aligned}$$

Weil $y^2 < x$ ist, $\frac{x-y^2}{(y+1)^2-y^2} > 0$ und daher gibt es $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$, $h \leq \frac{x-y^2}{(y+1)^2-y^2}$ (sei $h = \min\{1, \frac{x-y^2}{2x+1}\}$)

Für solche h gilt

$$(y+h)^2 \leq y^2 + \left(\frac{x-y^2}{(y+1)^2-y^2}\right)\left((y+1)^2-y^2\right) = x$$

Also $y+h \in A$ und $y+h > y$. Ein Widerspruch: y ist eine obere Schranke für A, d.h., $z < y \; \forall z$
$\Rightarrow y^2 \geq x$ Analog beweist man $y^2 \leq x$

- Schritt 2: Annahme $y^2 > x$
  Sei $h = \frac{y^2-x}{2y} \neq 0$

  $$(y-h)^2 = y^2 - 2hy + h^2 > y^2 - 2hy = y^2 - (y^2 - x) = x$$

  $\Rightarrow y - h$ ist eine obere Schranke für A

  $\big(\forall z \in A, z^2 \leq x$. Da $(y-h)^2 > x$ ist, $(y-h)^2 > x \geq z^2$. Damit $y - h > z, \forall z \in A\big)$

  Aber $y - h < y$, Widerspruch zur Minimalität von y.

Falls $0 < x < 1$, dann $\frac{1}{x} > 1$
$\Rightarrow \exists u \in \mathbb{R}$, mit $u^2 = \frac{1}{x}$
Somit $\frac{1}{u^2} = \left(\frac{1}{u}\right)^2 = x$ und $y = \frac{1}{u}$ ist eine Lösung von $y^2 = x$.

Zum Abschluss dieses Themas erwähnen wir noch eine wichtige Eigenschaft der reellen Zahlen

Satz 2.13 (Archimedische Eigenschaft)

Zu jeder Zahl $0 < b \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b < n$.

Beweis (Indirekt)

Andernfalls gibt es $b \in \mathbb{R}$ mit $n \leq b$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$(\neg \exists n \in \mathbb{N} : b < n) \;=\; (\forall n \in \mathbb{N} : b \geq n)$$

Dann ist b eine obere Schranke für $\mathbb{N}$ und es existiert $c = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$. Mit $n \in \mathbb{N}$ ist jedoch auch $n + 1 \in \mathbb{N}$.
Also: $n + 1 \leq c$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Somit folgt $n \leq c - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ein Widerspruch zur Minimalität von c.

Korollar 2.14

1. Seien $x > 0$ und $y \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann gibt es $n \in \mathbb{Z}$ mit $y < nx$
2. Falls $x, y, a \in \mathbb{R}$ die Ungleichheiten $a \leq x \leq a + \frac{y}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ erfüllen, ist $x = a$.

Beweis

1. ASK FOR BEWEIS

Ask for beweis

2. $a < x \Rightarrow x - a > 0$
   $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n(x-a) > y$
   $\Rightarrow x > a + \frac{y}{n}$ Widerspruch

Wir wissen, dass gewisse Gleichungen in $\mathbb{R}$ lösbar sind: z.B. $y^2 = a$, $\forall a > 0$. Aber man kann nicht alle Gleichugen in $\mathbb{R}$ lösen, z.B. $x^2 + 1 = 0$. Da für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, dass $x^2 > 0$, ist $x^2 = -1$ nicht lösbar. Um eine Lösung für diese Gleichung zu finden, müssen wir die komplexen Zahlen betrachten.

Zuerst werden wir die Euklidischen Räume $\mathbb{R}^n$ einführen

2.4 Euklidische Räume

Mit der Mengentheorie können wir das kartesische Produkt zweier Mengen bilden; es lässt sich ohne Schwierigkeiten zu endlichen Familien $A_1, \ldots, A_n$ verallgemeinern, nämlich

$$A_1 \times \cdots \times A_n := \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in A_i\}$$

ist die Menge der geordneten $n-$Tupel von Elementen aus $A_1, \ldots, A_n$.

Für beliebige $n \geq 1$ betrachten wir $\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n-\text{mal}}$ und untersuchen dessen Struktur. Auf $\mathbb{R}^n$ haben wir zwei Verknüpfungen

1. $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Addition.
   $\left(\underbrace{(x_1, \ldots, x_n)}_{x}, \underbrace{(y_1, \ldots, y_n)}_{y}\right) \to \underbrace{(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)}_{\text{Komponentenweise Addition}}$. Dann ist $(\mathbb{R}^n, +)$ eine Abelsche Gruppe, mit $0 := (0, \ldots, 0)$ aln neutrales Element

2. $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Skalarmultiplikation.
   $(\lambda, x) \to \lambda \cdot x := (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$. Dann gelten die folgende Eigenschaften: $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

   (a) Distributivität: $(\alpha + \beta)\, x = \alpha x + \beta x$
   (b) Distributivität: $\alpha\,(x + y) = \alpha x + \alpha y$
   (c) Assoziativität: $(\alpha\beta)\, x = \alpha\,(\beta x)$
   (d) Neutralelement: $1 \cdot x = x$

Definition 2.15
Eine Menge $\mathbb{V}$ mit $+, \cdot$ und $0 \in \mathbb{V}$, so dass $(\mathbb{V}, +)$ eine Abelsche Gruppe mit neutralem Element 0 ist und zudem (a)-(d) gelten, nennt sich einen Vektorraum über dem Körper $\mathbb{R}$ und seine Elemente heissen Vektoren.

Also ist $\mathbb{R}^n$ ein Vektorraum. In der linearen Algebra führt man dann Begriffe wie Basis usw. ein. Die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ ist die Menge $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ wobei $e_i := \{0, \ldots, 0, 1, \ldots, 0\}$.

Jeder Vektor $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$ besitzt eine eindeutige Darstellung $x = \sum x_i e_i$ bezüglich der Standardbasis.

Definition 2.16

1. Das Skalarprodukt zweier Vektoren $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$ ist die durch
$$< x, y > := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$
definierte reelle Zahl
$< \cdot, \cdot > = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
2. Falls $< x, y > = 0$ heissen x und y senkrecht (orthogonal) aufeinander. $< \cdot, \cdot >$ besitzt folgende Eigenschaften
   (a) Symmetrie: $< x, y > = < y, x >$
   (b) Linearität: $< x, \alpha y + \beta z > = \alpha < x, y > + \beta < x, z >$
   (c) Positivität: $< x, x > \geq 0$ mit Gleicheit genau dann, wenn $x = 0$

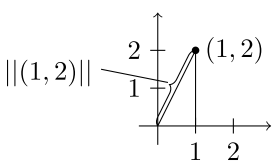
Definition 2.17
Die Norm $\|x\|$ eines Vektors ist:

$$\|x\| := \sqrt{< x, x >} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

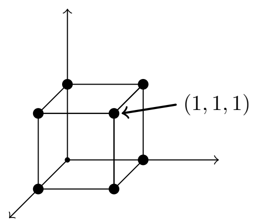
und wird oft als Länge interpretiert.

Beispiel 2.18

- $\|(1, 2)\| = \sqrt{1 + 4}$



- $\|(1, 1, 1)\| = \sqrt{3}$



- $\|e_i\| = 1$, $< e_i, e_j >= 0$. $e_i \perp e_j$
  $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ ist eine orthonormale Basis. Die Vektoren einer orthogonalen Basis sind orthogonal zueinander und normiert (die Länge ist gleich 1).

Die erste wichtige Eigenschaft des Skalaprodukts ist

Satz 2.19 (Cauchy-Schwarz)

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt $|< x, y >| \le \|x\|\|y\|$ und

$|< x, y >| = \|x\|\|y\| \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : x = \lambda y \Leftrightarrow$ die Vektoren sind parallel zueinander

Die Euklidische Norm hat die Eigenschaften

Satz 2.20

- $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ (Homogenität)
- $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung)

Beweis

ASK FOR BEWEIS

- ASK FOR BEWEIS
- $$\|x + y\|^2 =< x + y, x + y >$$
  $$=< x, x + y > + < y, x + y >$$
  $$< x, x > + < x, y > + < y, x > + < y, y >$$
  $$< x, x > +2 < x, y > + < y, y >$$
  $$\le \|x\|^2 + 2| < x, y > | + \|y\|^2$$
  $$\le \|x\|^2 + 2\|y\|\|x\| + \|x\|^2 = (||x||\,||y||)^2$$

2.5 Die Komplexen Zahlen

Da für alle $x \in \mathbb{R}$ $x^2 \geq 0$ gilt, gibt es $\sqrt{-1}$ nicht als reelle Zahl. Seit dem 18. Jahrhundert haben Mathematiker mit Ausdrücken wie $a + b\sqrt{-1}$, $a, b \in \mathbb{R}$ gerechnet und auf sie die in $\mathbb{R}$ geltenden Rechnenregeln angewandt, z.B.

$$\left(1 + 2\sqrt{-1}\right)\left(1 - 2\sqrt{-1}\right) = 1^2 - 2^2\left(\sqrt{-1}\right)^2 = 5$$

Allgemein:

$$\begin{aligned}\left(a + b\sqrt{-1}\right)\left(c + d\sqrt{-1}\right) &= ac + ad\sqrt{-1} + bc\sqrt{-1} + bd\sqrt{-1} \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)\sqrt{-1}\end{aligned}$$

Das Problem hier ist, dass $\sqrt{-1}$ keinen präzisen mathematisches Sinn hat und dass deshalb auch nicht klar ist, was "+" in "$a + b\sqrt{-1}$" bedeuten soll.

Das Problem wird wie folgt gelöst:

Als Modell von "$a + b\sqrt{-1}$", $\mathbb{C}$, nehmen wir $\mathbb{R}^2$. Wir kennen bereits die Addition von Vektoren und das neutrale Element $0 = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$. Wir definieren dann die Multiplikation

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\to x \cdot y\end{aligned}$$

wobei $x \cdot y = (ac - bd, ad + bc)$, $x = (a, b)$, $y = (c, d)$. Dann erfüllen "+" und "·" folgende Eigenschaften:

- Assoziativität: $((a, b)(c, d))\,(e, f) = (a, b)\,((c, d)(e, f))$
- Neutrales Element: $(1, 0)(a, b) = (a, b)$
- Kommutativ: $(a, b)(c, d) = (c, d)(a, b)$
- Inverses Element $\forall (a, b) \neq (0, 0)$ in $\mathbb{R}^2$ $\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $(a, b)(x, y) = (1, 0)$
- Distributivität: $((a, b) + (c, d)) \cdot (e, f) = (a, b)(e, f) + (c, d)(e, f)$

Definition 2.21
Der Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist $\mathbb{R}^2$ versehen mit "+","·", $0 = (0, 0)$ und $(1, 0) = 1$

Bemerkung 2.22

$z^2 + 1 = 0$ hat in $\mathbb{C}$ eine Lösung. Nämlich ist $(0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -(1, 0) = -1$. Wir führen für $(0, 1)$ die Bezeichnung "i" ein, welches imaginäre Einheit heisst.

Also ist $i^2 = -1$. Jede komplexe Zahl $z = (x, y)$ lässt sich dann wie folgt darstellen:

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x \cdot 1 + y \cdot i$$

In den Rechnungen lässt man oft das 1 in $x \cdot 1$ fallen und schreibt $z = x + yi$

Definition 2.22

1. Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$
   - Re $z := x$ heisst der Realteil
   - Im $z := y$ heisst der Imaginärteil
2. Die zu: $z = x + iy$ konjugierte Zahl ist $\overline{z} = x - iy$
3. Wir definieren die Norm von z als $\|z\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Satz 2.23

(i) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

(ii) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

(iii) $z \cdot \overline{z} = \|z\|^2 \cdot 1$

(iv) $\|z_1 \cdot z_2\| = \|z_1\| \cdot \|z_2\|$

Beweis

ASK FOR BEWEIS
ASK FOR BEWEIS

Abkürzung

$|z| := \|z\|$

Bemerkung 2.24

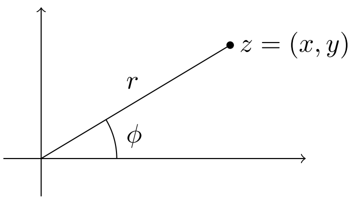
Wir können $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ "einbetten" mittels $\mathbb{R} \ni x \to (x, 0) \in \mathbb{C}$. Sei $\mathbb{C}_0 = \{(x, y) \in \mathbb{C} \mid y = 0\} = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}_0$, $x \to (x, 0)$ist eine Bijektion.

Diese Identifikation von $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}_0$ ist verträglich mit den Operationen in $\mathbb{R}$ und in $\mathbb{C}$, d.h.

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$
$$f(xy) = f(x)f(y)$$

Polarform

Als Polarkoordinaten in der Ebene führen wir (r, ϕ) ein



$$x = r\cos\phi \qquad y = r\sin\phi$$
$$z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$$
$$r = |z|$$

Definition

Wir definieren (nach Euler)

$$e^{i\phi} := \cos\phi + i\sin\phi$$

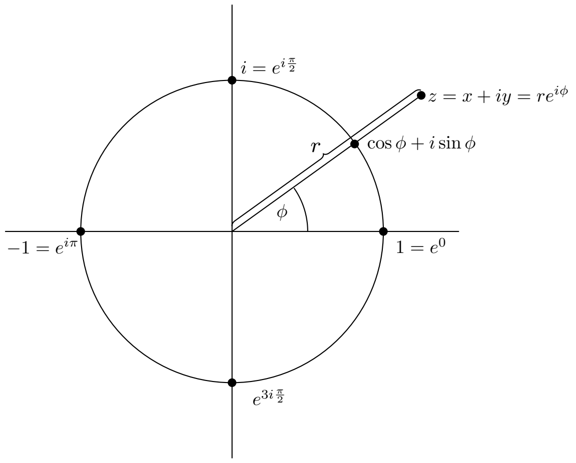
$$z = re^{i\phi} = |z|e^{i\phi}$$

Where does the definition end??

In der Ebene $\mathbb{R}^2$ stehen uns neben den kartesischen Koordinaten x, y noch die Polarkoordinaten r, ϕ zur Verfügung. Es gelten die folgenden Additionstheoreme:

- $\cos(\phi + \psi) = \cos\phi\cos\psi - \sin\psi\sin\phi$
- $\sin(\phi + \psi) = \sin\phi\cos\psi + \cos\phi\sin\psi$

Für beliebiges $z = x + iy \neq 0$ gilt also:



$r = |z|$

$\phi = \arg z$ - Das Argument von z

$$e^{i\phi} = 1 \Leftrightarrow \phi = 2k\pi$$

$$\cos\phi + i\sin\phi = 1 \Leftrightarrow \cos\phi = 1 \text{ und } \sin\phi = 0$$

$$\Leftrightarrow \phi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$e^{i\theta} \cdot e^{i\phi} = (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\phi + i\sin\phi)$$

$$= \underbrace{\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi}_{\cos(\theta+\phi)} + i\underbrace{(\cos\theta\sin\phi + \sin\theta\cos\phi)}_{\sin(\theta+\phi)}$$

$$= e^{i(\theta+\phi)}$$

Es folgt somit $e^{i\phi}e^{i\psi} = e^{i(\phi+\psi)}$.

Somit folgt für $z = re^{i\theta}$, $\omega = se^{i\phi} \in \mathbb{C}$ die einfache Darstellung $z\omega = rse^{i(\theta+\phi)}$,

$$\frac{z}{\omega} = \left(\frac{r}{s}\right)e^{i(\theta-\phi)}$$

Die polare Darstellung ist in Berechnungen sehr nützlich, insbesondere um das Produkt und den Quotienten zu berechnen

Beispiel

$$z = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$
$$\omega = \sqrt{3} - i = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$$
$$\frac{\left(\sqrt{3}-i\right)^3}{(1+i)^2} = \frac{\omega^3}{z^4} = \frac{8e^{-i\frac{\pi}{2}}}{4e^{i\pi}} = 2e^{-\frac{3\pi}{2}i} = 2e^{\frac{\pi}{2}i} = 2i$$

Die Polarform ist auch sehr nützlich um die Wurzel einer komplexen Zahl zu berechnen. Sei $\omega \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Wir möchten die Gleichung $z^n = \omega$ lösen.

$$\omega = |\omega|e^{i\phi}$$
$$z^n = \omega = |\omega|e^{i\theta} = |\omega|e^{i(\theta+2k\pi}$$
$$\Rightarrow z = |\omega|^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{(\theta+2k\pi)}{n}}$$

Beispiel

$$z^3 = 1 \Rightarrow z = \left(e^{2\pi ik}\right)^{\frac{1}{3}} \in \{e^{i\pi\frac{2k}{3}} : k = 0, 1, 2\} = \{1, e^{2i\frac{\pi}{3}}, e^{4i\frac{\pi}{3}}\}$$

Allgemeine Formel der n-ten Einheitswurzel $z = \{e^{i\frac{2\pi k}{n}} : k = 0, 1, \ldots, n-1\}$

Bemerkung

1. Es gibt keine mit den Körperoperationen verträgliche Ordnung in $\mathbb{C}$.
2. Hingegen ist $\mathbb{C}$ im Untershied zu $\mathbb{R}$ algebraisch vollständig. Nicht nur die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hat in $\mathbb{C}$ eine Lösung, sondern es gilt der Fundamentalsatz der Algebra. Er sagt, dass jedes Polynom $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$ vom Grad $n \geq 1$ in $\mathbb{C}$ genau n Nullstellen hat.