

Laplace

실험 1

PINN과 FDM/FEM을 통한 라플라스 문제 해결

문제 정의

1. 지배방정식

2차원 라플라스 방정식을 대상으로 한다.

$$\nabla^2 V(x, y) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

2. 물리적 영역

$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ 인 정사각형 영역 ($a = 1, b = 1$)

3. 경계 조건

하단, 좌측, 우측 ($y = 0, x = 0, x = a$) : $V = 0$

상단 ($y = b$) : $V = V_0 = 1.0$ (전위가 인가된 상태)

방법론

1. 해석적 해

변수 분리법을 이용한 무한 급수 해를 구현하여 비교 기준으로 삼음.

$$V(x, y) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4V_0}{n\pi \sinh(n\pi)} \sin(n\pi x) \sinh(n\pi y)$$

2. PINN 모델

네트워크

Input : (x, y) 좌표 2개

Hidden Layers : 3개의 층, 각 20개의 뉴런

Activation : Tanh (미분 가능하고 부드러운 함수 사용. SIREN을 사용하기엔, 너무 간단한 구조)

Output : V (전위) 1개

학습 데이터

도메인 내부 점: 1,000개 (무작위 샘플링)

경계 점: 800개 (4면 각 200개)

손실함수

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{PDE} + \mathcal{L}_{BC}$$

- 상세설명

\mathcal{L}_{PDE} : 자동 미분(Auto-grad)을 통해 구한 2계 도함수의 잔차 (Laplacian이 0이 되는지 확인).

\mathcal{L}_{BC} : 경계에서의 예측값과 실제 경계값(0 또는 V_0)의 차이.

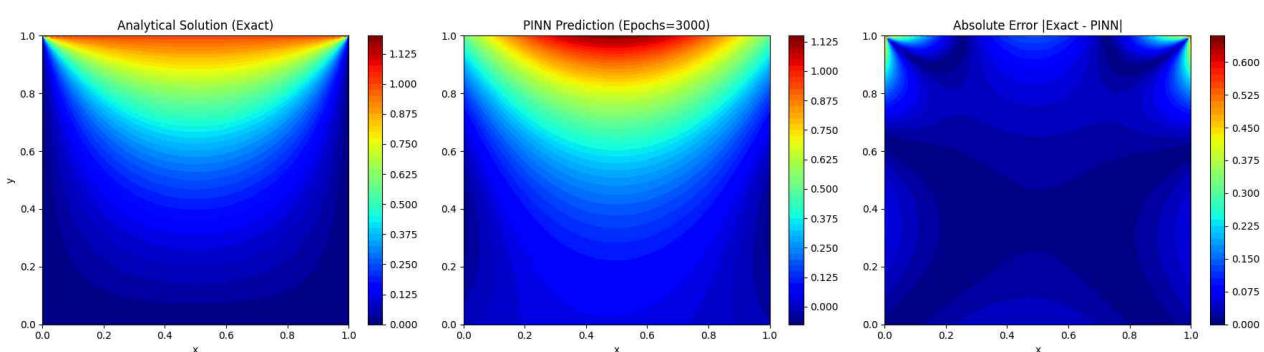
실험 설정

Optimizer : Adam

Learning Rate : 0.001

Epochs : 3,000회

결과



특히, 급전점의 외곽 부분에서 오차를 보인다.

이 오차를 제외하면, 전위가 상단($y = 1$)에서 가장 높고($V = 1$), 하단($y = 0$)으로 갈수록 0으로 수렴하는 Laplace 방정식의 확산 거동을 정확하게 학습하였다.

실험2

PINN과 FDM/FEM을 통한 라플라스 문제 해결 + 4개의 예제

Case 1

1차원 전위 분포

문제 정의

1. 지배방정식 1차원 라플라스 방정식 (상미분 방정식 형태)

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 0$$

2. 물리적 영역

$0 \leq x \leq 5$ 인 1차원 선형 구간

3. 경계조건

시작점 ($x = 0$) : $V = 100\text{V}$

끝점 ($x = 5$) : $V = 0\text{V}$

방법론

1. 해석적 해

$$V(x) = -20x + 100 \text{ (선형 감소)}$$

2. PINN 모델

네트워크

Input : x 좌표 1개 (정규화 적용: $-1 \sim 1$ 범위로 스케일링)

Hidden Layers : 4개의 층, 각 64개의 뉴런

Activation : Tanh (고차 미분 가능)

Output : V (전위) 1개

손실함수

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{PDE} + 100 \cdot \mathcal{L}_{BC}$$

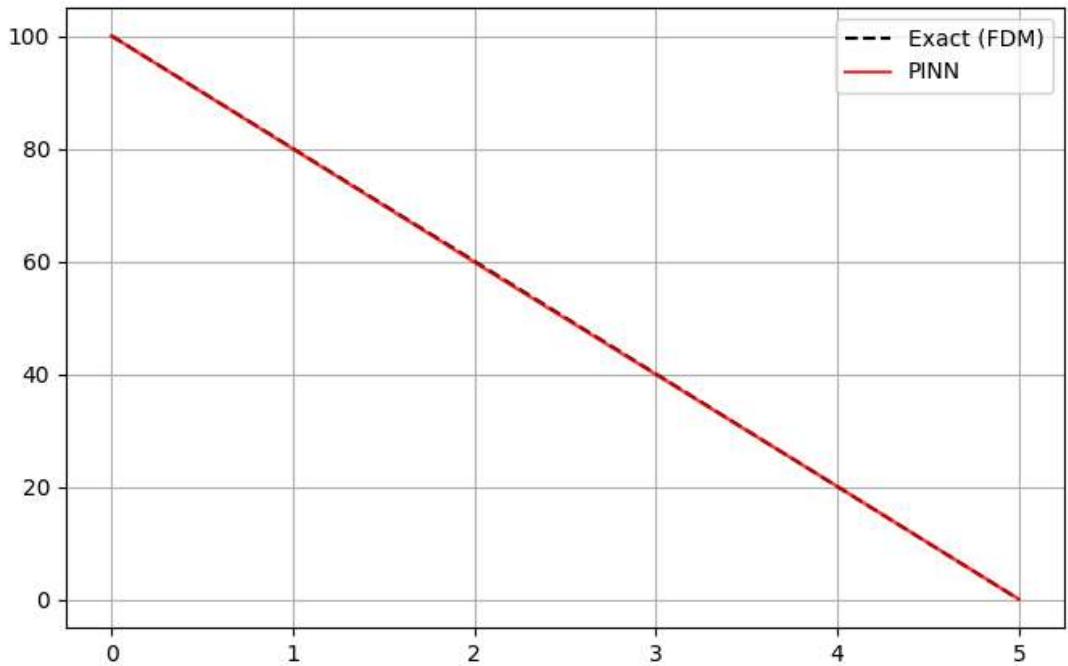
실험 설정

Optimizer : Adam (5,000회) + L-BFGS (2,000회)

Learning Rate : 1e-3 (Adam)

데이터 : 내부 점 10,000개, 경계 점 2개

결과



1차원 문제는 구조가 매우 단순하여 PINN이 해석적 해(점선)와 완전히 일치하는 직선을 그려내며, 오차가 거의 발생하지 않았다.

Case 2

2차원 비대칭 전위 분포

문제 정의

1. 지배방정식

2차원 라플라스 방정식

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

2. 물리적 영역

$$0 \leq x \leq 4, \quad -1 \leq y \leq 1 \text{ (가로:세로 = 2:1 비율의 직사각형)}$$

3. 경계조건

좌측 ($x = 0$) : $V = 100V$ (고전위 인가)

우측 ($x = 4$), 상단($y = 1$), 하단($y = -1$) : $V = 0V$ (접지)

방법론

PINN 모델(Case 1과 동일 구조)

네트워크 : Input (x, y) 2개 \rightarrow 4 Layers \times 64 Neurons \rightarrow Output V

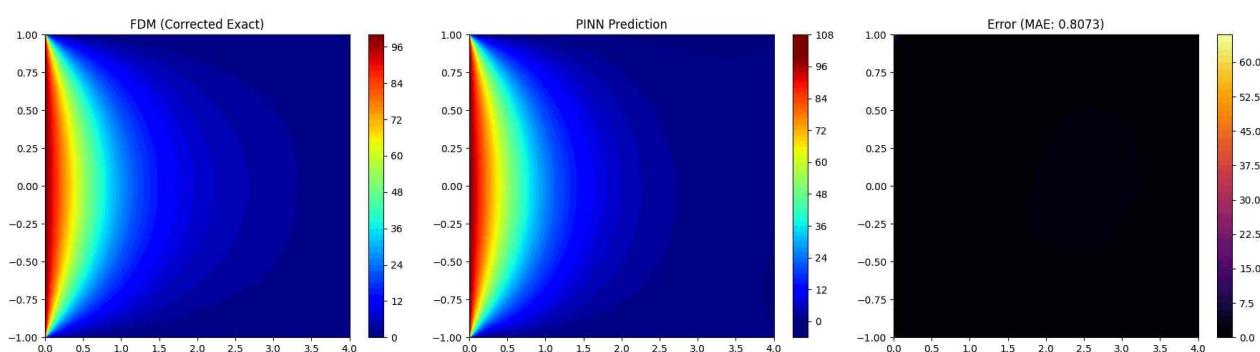
입력 정규화 : 입력 좌표를 $[-1, 1]$ 로 매핑하여 학습 안정성 확보

실험 설정

Optimizer : Adam (5,000회) \rightarrow L-BFGS (2,000회, Fine-tuning)

데이터 : 내부 점 10,000개, 경계 점 4,000개 (모서리 불연속점 회피를 위한 ϵ 처리 적용)

결과



Final MAE: 0.80732

좌측 벽면(100V)에서 시작된 전위가 우측(0V)으로 갈수록 지수적으로 감소하며 퍼져나가는 확산 거동을 보인다.

좌측 상/하단 모서리($(0, 1)$, $(0, -1)$)는 100V와 0V가 만나는 불연속 지점이므로 오차가 가장 크게 발생하기 쉬우나, 전반적인 물리적 거동은 FDM 결과와 일치한다.

Case 3

2차원 대칭 전위 분포

문제 정의

1. 지배방정식

2차원 라플라스 방정식 ($\nabla^2 V = 0$)

2. 물리적 영역

$$0 \leq x \leq 4, \quad -1 \leq y \leq 1$$

3. 경계조건

좌측 ($x = 0$) : $V = 10V$

우측 ($x = 4$) : $V = 10V$

상단 ($y = 1$), 하단 ($y = -1$) : $V = 0V$

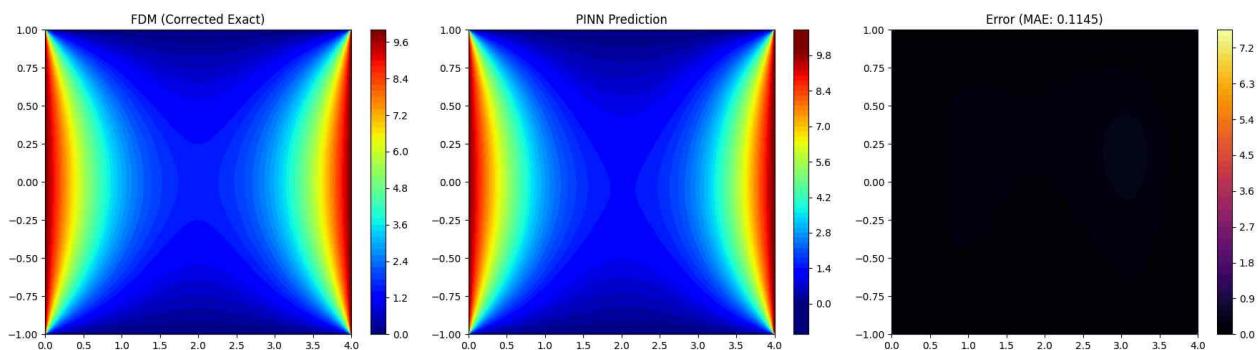
방법론

양쪽 끝에서 전압을 가하고 위아래로 빠져나가는 구조로, 도메인 중앙($x = 2, y = 0$)에서 안장점 (Saddle Point) 형태의 전위 분포가 형성됨.

실험 설정

Case 2와 동일 (Adam + L-BFGS 하이브리드 학습)

결과



Final MAE: 0.11453

좌우 대칭적인 전위 분포를 보이며 올바른 결과 도출 성공.

중앙부($x = 2$)에서는 좌우의 10V 영향이 만나 전위가 가장 낮아지는 지점이 형성되지만, 상하단(0V)보다는 높은 전위를 유지함.

PINN이 대칭성을 별도의 제약 조건 없이 데이터만으로 학습했는지를 검증 성공.

Case 4

2차원 복합 경계 조건

문제 정의

1. 지배방정식

2차원 라플라스 방정식 ($\nabla^2 V = 0$)

2. 물리적 영역

$$0 \leq x \leq 4, \quad -1 \leq y \leq 1$$

3. 경계조건

좌측 ($x = 0$) : $V = 20V$

우측 ($x = 4$) : $V = 10V$

상단 ($y = 1$) : $V = -10V$

하단 ($y = -1$) : $V = -5V$

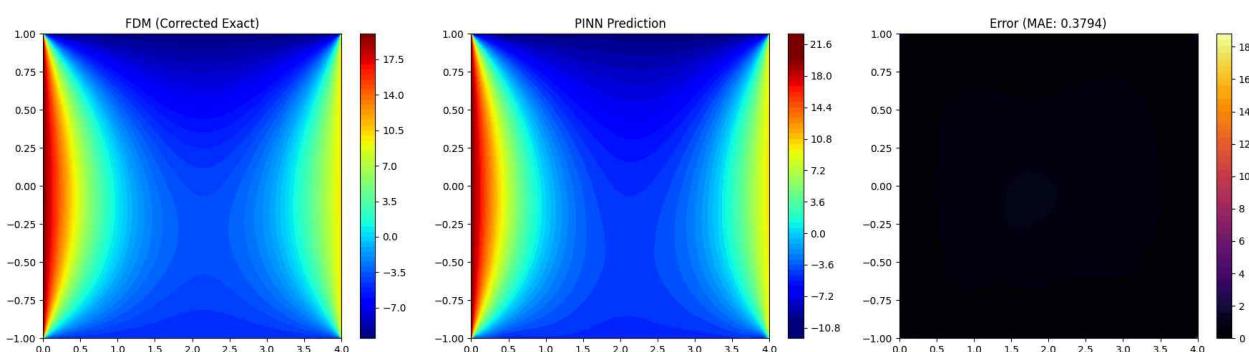
방법론

양수(+)와 음수(-) 전위가 공존하여 도메인 내부에서 $V = 0$ 이 되는 등전위선(Zero-potential line)이 형성됨. 그라디언트(기울기)의 변화가 가장 복잡함.

실험 설정

Case 2와 동일 (Adam + L-BFGS 하이브리드 학습)

결과



Final MAE: 0.37943

단순 확산이 아니라, 전위가 높은 곳(20V)에서 낮은 곳(-10V)으로 흐르는 복잡한 유선

추가

왜 저번 실험에선 결과가 성공적이지 않았는가.

그것은 FDM 코드를 만들 때 오류가 있었고, 그걸 잡지 못했기 때문이다.

도메인 크기를 PINN의 절반의 크기로 했기 때문에 발생한 오류이며, 이번에 나온 성공적인 결과를 통해서 PINN의 유효성을 다시한번 증명해 내었다.

poisson

총 3개의 Case를 한 번에 정리

PINN과 FDM(SOR)을 통한 푸아송 문제 해결

문제 정의

1. 지배방정식

소스 항(Source Term) S 가 포함된 2차원 푸아송 방정식

$$\nabla^2 V(x, y) = -S(x, y)$$

2. 물리적 영역 및 소스 조건

Case 1 (Constant Source): $0 \leq x, y \leq 5, S = 10$

Case 2 (Variable Source, 1st Quad): $0 \leq x, y \leq 5, S = xy$

Case 3 (Quadrupole Source, Full Domain): $-5 \leq x, y \leq 5, S = xy$

3. 경계조건

모든 케이스에 대해 영역의 4면 경계에서 전위는 접지 상태이다.

$$V_{boundary} = 0$$

방법론

1. 수치해석적 해 (Ground Truth)

기준의 느린 Jacobi 방식 대신, SOR(Successive Over-Relaxation) 기법을 적용한 고정밀 FDM Solver를 구축하여 비교 기준으로 삼았다.
($\omega = 1.5$ 적용)

2. PINN 모델

네트워크

Input : (x, y) 좌표 2개

Hidden Layers : 7개의 층, 각 64개의 뉴런 (라플라스 실험보다 깊게 구성)

Activation : Tanh

Output : V (전위) 1개

손실함수

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{PDE} + \mathcal{L}_{BC}$$

- 상세설명

\mathcal{L}_{PDE} : 자동 미분을 통해 구한 라플라시안 값과 소스 항의 차이 ($\nabla^2 V + S = 0$).

\mathcal{L}_{BC} : 경계에서의 예측값과 실제 값(0)의 차이.

실험 설정

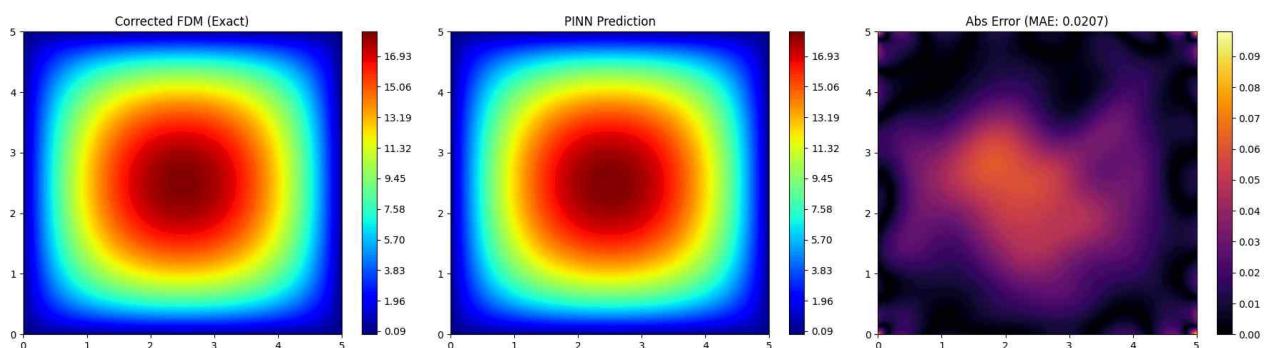
Optimizer : Adam (5,000회) + L-BFGS (3,000회, 정밀 보정)

Learning Rate : 0.001

Data Points : 내부 점 10,000개, 경계 점 4,000개

결과

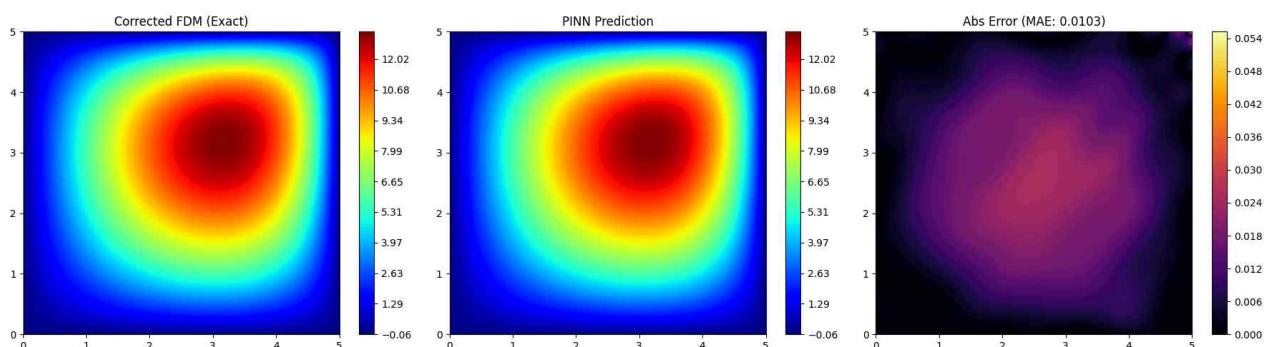
Case 1



Final MAE: 0.0207

도메인 전체에 균일한 전하($S = 10$)가 분포하여, 중앙부가 가장 높고 가장자리로 갈수록 낮아지는 대칭적인 둠(Dome) 형태의 전위 분포를 보인다.

Case 2

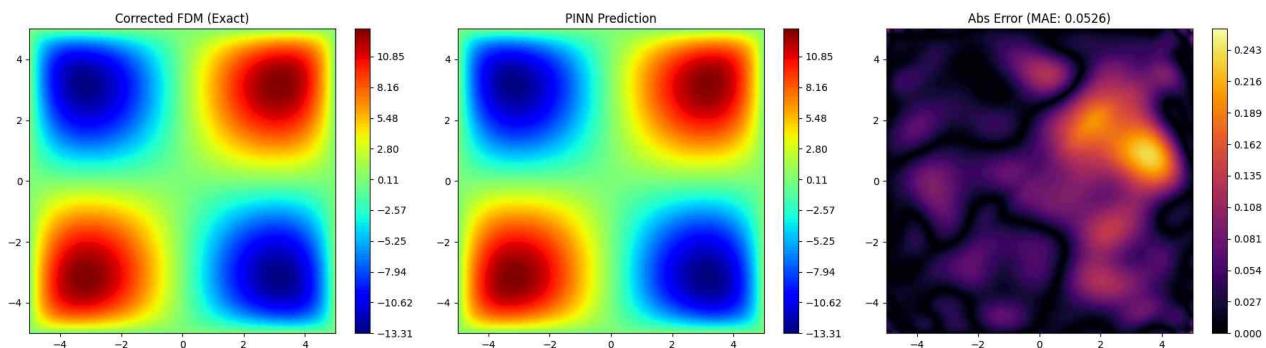


Final MAE: 0.0103

$S = xy$ 이고 $x, y > 0$ 인 영역이므로, 소스 항이 우측 상단((5, 5))으로 갈수록 커진다.

이에 따라 전위의 피크(Peak)가 중앙이 아닌 우측 상단으로 치우친 비대칭적인 융기 형태를 정확히 예측하였다.

Case 3



Final MAE: 0.0526

원점((0, 0))을 중심으로 4개의 사분면을 모두 포함한다.

$S = xy$ 에 따라 1, 3사분면($xy > 0$)은 양의 전위(Red), 2, 4사분면($xy < 0$)은 음의 전위(Blue)를 가지는 체커보드(Quadrupole) 형태의 복잡한 분포를 보인다.

결론

엄청나게 적은 오차로 안정적으로 푸아송 방정식에 대한 수치해석을 성공하였다.

최종결론

PINN은 Laplace 방성직, poisson 방정식 해석에 대해서 충분한 가능성을 보여준다.