线性代数

邱一航
F2003802
520030910155

线性方程组．矩阵

- 线性方程组

$\boxed{数集}$: $\mathbb{N}$. $\mathbb{Z}$. $\mathbb{Q}$. $\mathbb{R}$. $\mathbb{C}$. 定义在数集上的运算: $+, -, \times, \div$ (四则运算)

$\boxed{数域}$: 若数集F对四则运算封闭. 且F中有0和1. 称F
(自己与自己运算)

$\boxed{线性方程组}$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

称为 $\overset{\text{方程个数}}{m}\times\underset{\text{未知数个数}}{n}$ 线性方程组

$(a_{ij}, b_i \in F)$　　　n元(n维)线性方程组

$\boxed{线性齐次方程组}$　$b_i=0$　$(1\le i\le m)$

$\boxed{线性非齐次方程组}$　$b_i\ne 0$　$(\exists i\in\{1,2,\cdots,m\})$

解.　解集

$\boxed{同解方程组}$: 解集相同~.　$\boxed{\text{* 无解} \longrightarrow \text{也是同解方程组}}$

特别地,
1×1矩阵
与数共同

矩阵.　阶梯形矩阵.(一般写作 A^*).　简化阶梯形矩阵 $\longrightarrow$ 主元所在列
其余元素$\boxed{必须为0}$

$\boxed{矩阵的初等变换}$　(1) $r_i\leftrightarrow r_j$.　(2) kr_i. $(k\ne 0)$　(3) r_j+kr_i　$(k\ne 0)$

(表示 $kr_i \xrightarrow{赋值} r_i$)　(表示 $r_j+kr_i\longrightarrow r_j$)

* 实际上对应3个初等矩阵

$$\mathrm{diag}(a_1, a_2, \cdots a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$$

- 增广矩阵

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \quad A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$m\times n$的线性方程组可记作　$AX=B$

引入$\boxed{增广矩阵}$概念　$\tilde{A}=(A, B) \xrightarrow{阶梯形} \tilde{A}^{(*)}=(A^{(*)}\ B^{(*)})$

$\tilde{A}^{(*)}$中有r个非零行.　$A^{(*)}$ 有 s个非零行

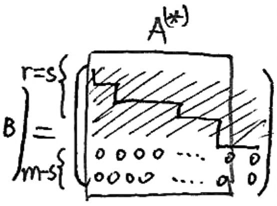
(1) $r=s$　有解

① $r=s=n$.　有唯一解

② $r=s<n$　有无数解

(2) $r>s$　无解.

$\tilde{A}^{(*)}_{r=s} = (A^{(*)}_{r=s}\ \ B) =$



推论：$m\times n$ 的线性齐次方程组 $\left(B=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\right)$ $\longrightarrow$ 有 $r=s$

$$\begin{cases} Ax=0 \text{ 有唯一解} \Leftrightarrow s=n & \text{（该解为零解）} \\ Ax=0 \text{ 有无数解} \Leftrightarrow s<n & \text{（有非零解）} \end{cases}$$

$m<n$ 则有无数解（仅对齐次成立）

- 矩阵

$A=(a_{ij})_{m\times n}$ （$a_{ij}\in\mathbb{F}$ 数域） 称A为矩阵

$\boxed{\text{矩阵的线性运算}}$

1) 数乘 $k\cdot A=(ka_{ij})_{m\times n}$ （$k\in\mathbb{F}$）

特别地，取 $k=-1$. 称 $(-a_{ij})_{m\times n}=-A$ 为 A 的 $\boxed{\text{负矩阵}}$

2) 加(减)法

A,B 同型 $(m\times n)$ $C=A\pm B=(a_{ij}\pm b_{ij})_{m\times n}$

$\begin{cases}\text{交换律}\\\text{结合律}\\\text{分配律}\end{cases}$ （移植自 $\mathbb{F}$）

$A+B=B+A$

$(A+B)+C=A+(B+C)$, $k(lA)=(kl)A=\cdots$

$k(A+B)=kA+kB$, $(k+l)A=kA+lA$

$A+O=O+A=A$

$A-A=O$ （O为与A同型的零矩阵）

$1\cdot A=O$

$\boxed{\text{矩阵乘法}}$

$ax=b$ $A=(a)_{1\times1}$ $X=(x)_{1\times1}$ $B=(b)_{1\times1}$ $AX=b=B=ax$

$a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1$ $A=(a_{11}\ \ a_{12})$ $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$

定义 $AX=(a_{11}\ \ a_{12})\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=a_{11}x_1+a_{12}x_2=b$

定义：$A=(a_{11}\ a_{12}\ \cdots\ a_{1n})$ $X=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$

$$AX=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i=b$$

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$

定义：$A=\begin{pmatrix}\boxed{a_{11}\ a_{12}\ \cdots\ a_{1n}}\\\vdots\qquad\vdots\\a_{m1}\ a_{m2}\ \cdots\ a_{mn}\end{pmatrix}_{m\times n}$ $x=\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{matrix}}\end{pmatrix}_{n\times1}$ $\xrightarrow{\Sigma}$ b_1

$b=\begin{pmatrix}b_1\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}_{m\times1}$ ← A第1行×x第1列之和

$$Ax=b$$

再推广. $A=(a_{ij})_{m\times n}$ $B=(b_{ij})_{n\times p}$ $(a_{ij}, b_{ij}\in \mathbb{F})$

$$C=A\cdot B=(c_{ij})_{m\times p}=\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)_{m\times p}$$

$\boxed{A\cdot B\neq B\cdot A}$ (甚至一般都不同型)

(一般情况下不满足交换律)

$\boxed{\text{可交换矩阵}}$: 若 $A\cdot B=B\cdot A$, 称 A 与 B. 显然 A,B 都是 $\boxed{\text{方阵}}$ $(n\times n)$ 且同型.

(1) $A=kE$ (与B同型的单位矩阵) $\begin{pmatrix} k & & \\ & k\ddots & \\ & & k \end{pmatrix}$

(2) $A=\mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots a_{nn})$ $B=\mathrm{diag}(b_{11}, b_{22}, \cdots b_{nn})$

$\boxed{\text{矩阵乘法性质}}$

矩阵 A, B, C. $k\in\mathbb{F}$.

(1) $A_{m\times n}\cdot O_{n\times s}=O_{m\times s}$

$O_{s\times m}A_{m\times n}=O_{s\times n}$

(2) $E_m\cdot A_{m\times n}=A_{m\times n}$

$A_{m\times n}\cdot E_n=A_{m\times n}$

但不能称 E_m 与 $A_{m\times n}$ 可交换 (两次维数不同)

(3) $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$ (乘法结合率)

证明: $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times p}$, $C=(c_{ij})_{p\times s}$ 令 $A\cdot(B\cdot C)=(d_{ij})_{m\times s}$

$(A\cdot B)\cdot C=(e_{ij})_{m\times s}$

$$d_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\left(\sum_{l=1}^{p}b_{kl}c_{lj}\right)=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(b_{k1}c_{1j}+b_{k2}c_{2j}+\cdots+b_{kp}c_{pj})$$

$$=a_{i1}(b_{11}\boxed{c_{1j}}+b_{12}c_{2j}+\cdots+b_{1p}c_{pj})+\cdots+a_{in}(b_{n1}\boxed{c_{1j}}+b_{n2}c_{2j}+\cdots+b_{np}c_{pj})$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{k1}\right)c_{1j}+\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{k2}\right)\cdot c_{2j}+\cdots+\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kp}\right)\cdot c_{pj}$$

$$=\sum_{l=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kl}\right)\cdot c_{lj}=e_{ij}$$

故 $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$

(4) $(kA)B=k(AB)=A\cdot(kB)$

(5) $A(B+C)=AB+AC$

$(B+C)\cdot A=BA+CA$

$\boxed{\text{矩阵的幂}}$ $A^k=\underbrace{A\cdot A\cdot\cdots\cdot A}_{k个}$ $(k\in\mathbb{N})$, 规定 $A^0=E_n$ (n为A阶数)

$(A\neq O)$

显然 A 是方阵

特别地，$E^m=E$；$A=diag(a_{11},\cdots a_{nn})$，$A^m(a_{11}^m,\cdots a_{nn}^m)$ ~~[illegible]~~

$\boxed{\text{幂的性质}}$ $\begin{cases} A^k\cdot A^l=A^{k+l} & (k,l\in\mathbb{N}) \\ (A^k)^l=A^{kl} & (k,l\in\mathbb{N}) \end{cases}$

当$A\cdot B=B\cdot A$时，有 $(A\cdot B)^k=(BA)^k=A^kB^k=B^kA^k$

$$\begin{aligned} & AB\cdot AB\cdot AB\cdot AB\cdot\cdots\cdot AB \\ = & A\cdot AB\ AB\ AB\ \cdots\ AB\cdot B \\ = & A\cdot A\cdot AB\ AB\ \cdots\ BBB \\ & \cdots \\ = & A\cdot A\cdot A\cdots\cdots\ AB\cdots\cdots B \end{aligned}$$

$\boxed{\text{矩阵多项式}}$ $f(x)=a_mx^m+\cdots+a_1x+a_0$ $(a_i\in\mathbb{F},\ i=0,1,2,\cdots,m)$

令A为方阵，E为与之同型的单位阵

则称 $f(A)=a_mA^m+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1A+a_0E$。

考虑A^0在$A=O$时无意义，写E.

二项式定理只能在()中内容可交换时展开

相乘了

$$\begin{pmatrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 0 & & \\ 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix} O \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{转置矩阵}}$ $A=(a_{ij})_{n\times m}$. 称$A^T=(a_{ji})_{m\times n}$.

$E^T=E$. $(\text{上三角})^T=\text{下三角}$. $diag^T=diag$

$$\begin{cases} (A^T)^T=A. \\ (B+C)^T=B^T+C^T \\ (kA)^T=kA^T \\ (AB)^T=B^TA^T \\ (A^m)^T=(A^T)^m \end{cases}$$

$(AB)^T$：A的行$\times B$的列 再T.
~~[illegible]~~
B^T行$\to B$的列 $\times$ $\underline{A\text{的行}}$ $\boxed{A^T\text{列}}$. 再T.

若A是对称阵，即$A^T=A$.
若A是反对称阵，即$A^T=-A$.

任意A可表示为对称阵与反对称阵的和. $A=\underbrace{\frac{A+A^T}{2}}^{\text{对称阵}}+\overbrace{\frac{A-A^T}{2}}^{\text{反对称阵}}$

唯一性?

$\boxed{迹}$：方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$. 称 $tr(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

trace

性质：$tr(A+B)=tr(A)+tr(B)$

$tr(kA)=k\cdot tr(A)$

$tr(AB)=tr(BA)$ $\rightsquigarrow$ $\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ik}b_{ki}=\sum_{\substack{k=1\\ \uparrow\\ i'}}^{n}\sum_{\substack{i=1\\ \uparrow\\ k'}}^{n} b_{ki}a_{ik}$

$tr(A^T)=tr(A)$

- 行列式

消元 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12} \\ (a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})x_2=a_{11}b_2-a_{21}b_1 \end{cases}$

记 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_{x_1}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$ $D_{x_2}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$

则 $x_1=\frac{D_{x_1}}{D}$，$x_2=\frac{D_{x_2}}{D}$ $(D\neq 0)$ ⟵ 唯一解

$\boxed{行列式}$：记 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ $|A|=|a_{ij}|_{n\times n}=det(A)$

$\boxed{代数余子式}$. $\boxed{余子式}$ 去掉矩阵中第i行第j列剩下的部分

记作 $(-1)^{i+j}M_{ij}=A_{ij}$ 记作 M_{ij}

$|A|=\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_{1i}\cdot(-1)^{1+i}M_{1i} \quad [a_{1i}\cdot A_{1i}] & (n\geq 2) \longleftarrow 对第一行展开 \\ a_{11} & (n=1) \end{cases}$

即 $M_{ik}=M'_{ik}$

相邻两行互换 直到 i行成为第1行，其余顺次后移（保证 M_{ik} 不变） 转置

可证 $|A|=\sum_{k=1}^{n} a_{1k}(-1)^{1+k}M_{1k}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+k}M_{ik}=\sum_{k=1}^{n} a_{kj}(-1)^{k+j}M_{kj}$

完全展开后为 $n!$ 项 n个数（不同行不同列）的积

$\boxed{|下三角|=\prod 主对角线=|上三角|}$ $|反下三角|=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod 次对角线$

$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \cdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}=a_{11}a_{22}(A_{11})_{22}=\cdots=a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1\,n-1}(A^{*}_{nn})$

$=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 也可数归.

$\boxed{|A|=|A^T|}$

$\boxed{A\xrightarrow{i\leftrightarrow j}B. \quad |B|=-|A|}$ $\Rightarrow$ $r_i=r_j$ 时，$|A|=0$

$\boxed{A\xrightarrow{kr_i}B \quad |B|=k|A|}$ $\Rightarrow A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix}$，$|A|=k\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{vmatrix}$

$|kA|=k^n|A|$ ☆

$\Downarrow$

$r_i=0$，$|A|=0$ $\searrow$ $r_i=kr_j$ 时 $|A|=0$

$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

注意 $|A+B|\neq|A|+|B|$！

$\boxed{A \xrightarrow{r_j + k r_i} B}$. $|B| = |A| + |A_0| = \boxed{|A|}$

$\uparrow r_j$ $\uparrow k r_i$ 则 $r_i = r_j \to |A_0| = 0$

$$\begin{cases} i=j: & \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{j+k} M_{jk} = |A| \\ i \neq j: & \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{j+k} M_{jk} = 0 \end{cases}$$

$r_i = r_j$

（相当于用第j行替换了第i行 $\Rightarrow |A'| = 0$）

$\boxed{若A, B同阶. \quad |AB| = |A||B|}$

* 拉普拉斯定理

$$D = \sum_{i=1}^{t} M_i A_i$$（任意抽取k行元素，它们组成的全部k阶子式为 $M_1 \sim M_t$，$t = C_n^k$）

Vandermonde 行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j)$$

$$D \xrightarrow[\cdots\cdots \quad r_2 - x_1 r_1]{r_n - x_1(r_{n-1});\ r_{n-1} - x_1(r_{n-2});} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)\cdots(x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} = \cdots$$

$\boxed{逆}$：通常只对n阶方阵讨论．对方阵A，若存在同阶方阵B，使

$$A \cdot B = B \cdot A = E$$

则称B是A的逆矩阵，A可逆．　记 $B = A^{-1}$．A非奇异．A非退化

* 非方阵矩阵也有逆，但定义不同．

(1) 不是所有矩阵都可逆．　(2) 若A可逆，逆唯一．

* 设存在B, C都是A的逆

$C = C \cdot E = C \cdot A \cdot B = E \cdot B = B$ ✓

(3) 若A可逆．$|AB| = |BA| = |E| = 1$ 即 $|A| \cdot |B| = 1 \Rightarrow |A| \neq 0$　逆命题是否成立？

$\boxed{伴随矩阵}$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$　伴随矩阵 $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$

即代数余子式的转置矩阵

使 $A \cdot A^* = \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix}_{n \times n} = A^* \cdot A$．发现A与 A^* 可交换．

此时有 $\boxed{A \cdot A^* = A^* \cdot A = |A| \cdot E}$ 即 $|A| \cdot |A^*| = |A|^n$

若$|A|\neq 0$，则 $A\cdot\frac{A^*}{|A|}=\frac{A^*}{|A|}\cdot A=E$　即 $\frac{A^*}{|A|}$ 为 A的逆，A可逆

故有：$\boxed{|A|\neq 0 \iff A\text{ 可逆}}$

$$|A^*|=\begin{cases}|A|^{n-1}, & |A|\neq 0\\ 0, & |A|=0\end{cases}$$

即 $\boxed{|A^*|=|A|^{n-1}\ (n\geq 2,\ n\in N^+)}$

n=1时即为数字.

反证. $|A^*|\neq 0 \Rightarrow A^*$ 可逆

$$A=A\cdot E=A(A^*(A^*)^{-1})$$
$$=|A|\cdot E\cdot(A^*)^{-1}$$
$$=0$$

此时 $A^*=0$，$|A^*|=0$，矛盾

逆的简化定义：对方阵A，若存在B使 $A\cdot B=E$ 或 $B\cdot A=E$　称B为A的逆.

$|AB|=|E|=1 \Rightarrow |A|\neq 0 \Rightarrow$ A可逆 $\Rightarrow A^{-1}$ 存在

下证：B是A^{-1}，$B=E\cdot B=(A^{-1}\cdot A)\cdot B=A^{-1}\cdot E=A^{-1}$，得证

$$\boxed{\text{证明可逆}\begin{cases}|A|\neq 0\\ \text{凑出 } A\cdot\square=E \text{ 形式，直接求出 } A^{-1}.\end{cases}}$$

- 克拉默定理

$A_{n\times n}x=b$ 是一个n元线性方程组. $A=(a_{ij})_{n\times n}$　$x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$　$b=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$

若 $|A|=D\neq 0$，则 $Ax=b$ 有唯一解：

$\boxed{x_i=\frac{D_i}{D}}$，其中 $D_i=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1(i-1)}&b_1&a_{1(i+1)}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{n(i-1)}&b_n&a_{n(i+1)}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$

证明：$Ax=b$.　$A^{-1}\cdot A\cdot x=A^{-1}\cdot b$

$$x=A^{-1}\cdot b=\frac{A^*}{|A|}b$$

$$x=\frac{1}{D}A^*b=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\ \vdots&&&\\ A_{1n}&\cdots&&A_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

$$x_i=\frac{1}{D}(A_{1i}b_1+A_{2i}b_2+\cdots+A_{ni}b_n)$$

替换第i列

~~特别地，对 Ax=0 只有零解 (|A| ⇔ 只有零解)~~ ≠0

特别地，对 $Ax=0$ $\begin{cases}|A|\neq 0 \iff \text{只有零解}\\ |A|=0 \iff \text{有非零解}.\end{cases}$

- 逆的性质

$(A^{-1})^{-1} = A.$

若 A 可逆，则 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} \cdot A^{-1}$，$kA$ 可逆

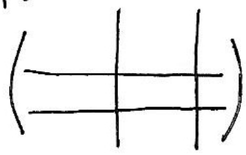
若 A.B 可逆　$(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$　$(AB \cdot B^{-1} A^{-1} = E)$

若 A 可逆　A^m 可逆．$(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$

若 A 可逆　A^T 可逆．$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

- 分块矩阵

~~*[illegible]~~

A= 　记小块为 $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13} \cdots \alpha_{33}$　记 $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$

显然加法和数乘仍成立　(A和B采用相同的分块法)

即　$(\alpha_{ij})_{m' \times n'} + (\beta_{ij})_{m' \times n'} = (\alpha_{ij} + \beta_{ij})_{m' \times n'}$

$kA_{m \times n} = k(\alpha_{ij})_{m' \times n'} = (k\alpha_{ij})_{m' \times n'}$

乘法：A行的分块法 ≡ B列的分块法　否则 α·β 没法乘．

$A = (\alpha_{ij})_{r \times s}$　$B = (\beta_{ij})_{s \times t}$　$A \cdot B = \left(\sum_{k=1}^{s} \alpha_{ik} \beta_{kj} \right)_{r \times t}$

$A = (A_{ij})_{r \times s}$　$A^T = (A_{ji}^T)_{s \times r}$

$\boxed{\text{分块对角矩阵}}$　$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$ 其中 A_i 是方阵，$|A_i| \neq 0$

则 $A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$ 是 A 的逆．

(类比 $[\mathrm{diag}(a_1, \cdots a_n)]^{-1} = \mathrm{diag}(a_1^{-1}, \cdots a_n^{-1})$]

$\boxed{\text{分块反对角矩阵}}$　$A = \begin{pmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \iddots & & \\ A_s & & & \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} 1 \\ \downarrow \\ s \end{matrix}$ 其中 A_i 是方阵，$|A_i| \neq 0$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} & & & A_s^{-1} \\ & & A_{s-1}^{-1} & \\ & \iddots & & \\ A_1^{-1} & & & \end{pmatrix}$ ←顺序改变 $\begin{matrix} s \\ \downarrow \\ 1 \end{matrix}$

- 初等变换

初等行变换	初等列变换
$r_i \leftrightarrow r_j$	$c_i \leftrightarrow c_j$
kr_i	kc_j
$r_j + kr_i$	$c_j + kc_i$

初等变换

$\boxed{\text{相抵}}$：矩阵 $A \xrightarrow[\text{初等变换}]{\text{有限次}}$ 矩阵 B. 称 A 与 B 相抵. 记作 $A \cong B$.

性质：(1) 反身性：$A \cong B$. (2) 对称性：$A \cong B$，则 $B \cong A$

(3) 传递性：$A \cong B$，$B \cong C$，则 $A \cong C$.

满足这三个条件的关系叫是等价关系，故"相抵"是一个等价关系.

$\boxed{\text{初等矩阵}}$：由 E_n 经一次初等变换得到的矩阵.

(1) $E_n \xrightarrow[\text{或 } c_i \leftrightarrow c_j]{r_i \leftrightarrow r_j}$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array} =: E(i,j)$$

$$\begin{array}{ccccc} & & \uparrow & \uparrow & \\ & & i & j & \end{array}$$

(2) $E_n \xrightarrow[\text{或 } kc_i]{kr_i}$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & k & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} =: E(i(k))$$

(3) $E_n \xrightarrow[\text{或 } c_i + kc_j]{r_j + kr_i}$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ j \rightarrow \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & k & \cdots & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} =: E(j, i(k))$$

$$\begin{array}{ccc} & \uparrow & \\ & i & \end{array}$$

初等矩阵均可逆. $\begin{cases} E(i,j)^{-1} = E(i,j) \\ E(i(k))^{-1} = E\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right) \\ E(j, i(k))^{-1} = E(j, i(-k)) \end{cases}$

定理：初等变换与矩阵乘法关系

对 $A_{m\times n}$ 进行

- 初等行变换 $\Leftrightarrow$ A 左乘一个 m 阶初等矩阵
- 初等列变换 $\Leftrightarrow$ A 右乘一个 n 阶初等矩阵

[证明] e.g. 记 $A_{m\times n} = (\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_n)_{1\times n}$ (分块写法) $\longrightarrow$ 证初等列变换等价于…

记 $A_{m\times n} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}_{m\times 1}$ (分块写法) $\longrightarrow$ 证初等行变换等价

定理：对任意矩阵 $A_{m\times n}$.

存在一系列 m 阶矩阵 $P_1, P_2, \cdots P_s$ 和 n 阶矩阵 $Q_1, Q_2, \cdots Q_t$.

使 $P_s \cdots P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ 称 $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ 为 A 的 $\boxed{\text{标准形}}$.

其中 r 为 A 化为阶梯形矩阵后非零行的个数

证明：$A \xrightarrow{\text{初等行变换}}$ 简化阶梯形矩阵 r_0 个非零行 $\xrightarrow{\text{初等列变换}} \underbrace{\begin{pmatrix} E_r & T_{r\times(n-r)} \\ O & O \end{pmatrix}}_{r=r_0} \xrightarrow{\text{第三种列变换}} \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ 即 $A \xrightarrow{\text{左乘}P_i}$ 简化阶梯形 $\xrightarrow{\text{右乘}Q_i} \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$

- 矩阵的秩

$\boxed{k阶子式}$ 对一个矩阵 $A_{m\times n}$. 任取k行k列 ($k\leq\min\{m,n\}$) 交叉处元素组成的k阶行列式, 称其行列式.

$\boxed{k阶子式是行列式!}$

$\boxed{秩}$ 对矩阵 $A_{m\times n}$. 若存在一个A的r阶子式不为0且所有(r+1)阶子式都为0, 称r为A的秩

显然标准形 $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ 的秩为r.　　秩即为矩阵中非零子式的最高阶

特别地, 零矩阵的秩是0.

性质
(1) A的秩唯一.
(2) $0\leq r(A)\leq\min\{m,n\}$
(3) 若 A_1 是A的部分矩阵, 则 $r(A_1)\leq r(A)$
(4) 若A的一个r阶子式不为0, 显然 $r(A)\geq r$; 若所有r阶子式都为0, 则 $r(A)<r$.
(5) $r(A^T)=r(A)$
(6) $r(kA)=\begin{cases} r(A) & k\neq 0 \\ 0 & k=0 \end{cases}$
(7) r(阶梯形) = 非零行个数.
(8) r(可逆矩阵) = n 【阶数】

$\boxed{满秩}$ 若 $r(A_{m\times n})=m$, 称A行满秩
若 $r(A_{m\times n})=n$, 称A列满秩
若 $r(A_{n\times n})=n$. 称A满秩.　　满秩 $\Longleftrightarrow$ 可逆、非奇异、非退化
　　($|A|\neq0$)　　($|A|\neq0$)
　　不满秩 $\Leftrightarrow$ 不可逆

$\boxed{初等变换不改变矩阵的秩.}$

$\boxed{定理}$ 任意 $m\times n$ 矩阵 $A_{m\times n}$, 存在m阶初等矩阵 $P_1,\cdots P_s$ 和 n阶初等矩阵 $Q_1,\cdots Q_t$
使 $P_sP_{s-1}\cdots P_1AQ_1Q_2\cdots Q_t=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$

$P_sP_{s-1}\cdots P_1A$ 为简化阶梯形矩阵

$r=r(A)$ 且该标准形唯一

$\boxed{推论}$ (1) 存在可逆矩阵 $P_{m\times m}$ 和 $Q_{n\times n}$ 使 $PAQ=\begin{pmatrix} E_{r(A)} & O \\ O & O \end{pmatrix}$

可逆矩阵之积仍可逆

(2) n阶方阵A可逆 $\Longleftrightarrow$ A的标准形为n阶单位矩阵 E_n.

$\Leftarrow$: $PAQ=E_n$, $A=P^{-1}Q^{-1}$. $|A|=|P^{-1}||Q^{-1}|\neq0$. ∴ A可逆

$\Rightarrow$: $r(A)=n$. ∴ 标准形为 E_n.

(3) n阶方阵A可逆 $\Leftrightarrow$ $A=P_1P_2\cdots P_k$, 其中 P_i 为初等矩阵.

$(A=P_1^{-1}\cdots P_s^{-1}Q_t^{-1}\cdots Q_1^{-1})$

(4) A_n 可逆，则 A 可只经过初等行(列)变换化为 E_n.

(5) 矩阵 $A_{m\times n}$，可逆矩阵：P_n, Q_n.

则 $r(PA)=r(A)=r(AQ)=r(PAQ)$ ⟵ 初等变换不改变秩

(6) $A\cong B \iff \exists P,Q.\ s.t.\ PAQ=B$

$\boxed{\text{定理}}$ $A_{m\times n}\in \mathbb{F}^{m\times n}$（即A中元素都来自数域 $\mathbb{F}$）

$Ax=b \xrightarrow{\text{初等行变换}} A_1x=b_1$，两者同解 $\quad (A\ b)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(A_1\ b_1)$

即 $P\cdot(A\ b)=(A_1\ b_1)$

$\therefore PA=A_1,\ Pb=b_1$.

$\boxed{\text{定理}}$ 判定 $Ax=b$ 解的情况.

① 有解 $\iff r(A)=r(\tilde{A})$

② 有唯一解 $\iff r(A)=r(\tilde{A})=n$

③ 有无穷解 $\iff r(A)=r(\tilde{A})<n$

④ 无解 $\iff r(A)\neq r(\tilde{A})\ \ (r(A)<r(\tilde{A}))$

取 $b=0$ ⟶ 齐次线性

① 有唯一解 $\quad r(A)=n$

② 无穷解 $\quad r(A)<n$

③ 方程个数 $m<n$

$\iff r(A)\le m<n$

$\iff$ 有无穷解

- 矩阵逆的另一种求解方式

设 A 可逆，$A=P_1P_2\cdots P_k$，其中 P_i 为初等矩阵，则 $\underbrace{(P_1P_2\cdots P_k)^{-1}}_{=A^{-1}}\cdot A=E$.

则 $(A\ E)$ 进行 $(P_1\cdots P_k)^{-1}(A\ E)=(E\ \ (P_1\cdots P_k)^{-1})=(E\ A^{-1})$

因为 $(P_1\cdots P_k)^{-1}$ 仍是初等矩阵，该过程即：

$(A\ E)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(E\ B)$，则 $B=A^{-1}$. 左乘 A^{-1}

类似可知：$\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等列变换}}\begin{pmatrix}E\\B\end{pmatrix}$，则 $B=A^{-1}$. 右乘 A^{-1}

注意做行变换时不能忘记把 E 中部分也变换

- 矩阵方程组

线性方程组 $Ax=b$. $\xrightarrow{\text{类比}}$ 矩阵方程组 $A_{m\times n}X_{n\times p}=B_{m\times p}$

特别地，有 $A_{n\times n}X_{n\times p}=B_{n\times p}$，$X'_{p\times n}A_{n\times n}=B_{p\times n}$

解：$x=A^{-1}b$

解：$X=A^{-1}B$. $\quad X'=BA^{-1}$

我们可以用 $(A\ \ B)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(E\ \ X)$ 求解.

$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等列变换}}\begin{pmatrix}E\\X'\end{pmatrix}$

- 分块矩阵的初等变换

对 $A_{m\times n} = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix}_{s\times t}$ 有如下初等变换:

(1) $i \leftrightarrow j$ 交换 =: $r_i \leftrightarrow r_j$ 或 $c_i \leftrightarrow c_j$ $\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} E_{n_1} & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & E_{n_{i-1}} & & & & \\ & & & O & \cdots & E_{n_i} & \\ & & & \vdots & E_{n_{i+1}} \ddots E_{n_{j-1}} & \vdots & \\ & & & E_{n_j} & \cdots & O & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & E_{n_{s\text{或}t}} \end{pmatrix}$ 左乘或右乘

(2) 用适当阶数的 $\boxed{\text{可逆矩阵}}$ P 左/右乘 A的第i行或列

=: $P\cdot r_i$ 或 $P\cdot c_i$ $\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} E_{n_1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & E_{n_{i-1}} & & & \\ & & & P & & \\ & & & & E_{n_{i+1}} & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & E_{n_{s\text{或}t}} \end{pmatrix}$ 左乘或右乘

不要求"可逆"

(3) 用适当阶数的 $\boxed{\text{矩阵}}$ P 左/右乘 A的第j行(列)加到第i行(列)

=: $r_j + P\cdot r_i$ 或 $c_i + P\cdot c_j$ $\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} E_{n_1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & E_{n_i} & & & \\ & & \vdots & \ddots & & \\ & & P & \cdots & E_{n_j} & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & E_{n_{s\text{或}t}} \end{pmatrix}$ 左乘或右乘

列 ×A的i行

把 $P\times r_j$ 加上了.

* P 第j行　　第i列

分块矩阵的初等矩阵. 也可逆

向量

- n维向量

$\boxed{n维向量}$：称 $(a_1, a_2, \cdots a_n)$ 和 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$． 称 a_i 为 i 分量． $a_i \in \mathbb{R}$．实向量

$a_i \in \mathbb{C}$ 复向量

$(a_i \in \mathbb{F})$

$\boxed{行向量}$： $(a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n)_{1\times n} =: \alpha \in \mathbb{R}^n$

$\boxed{列向量}$： $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_{n\times 1} =: \alpha \in \mathbb{R}^n$

零向量、负向量，所有矩阵运算依然成立，略去．

$$\underset{\downarrow}{A}x = b \qquad\qquad x^T A^T = b^T$$

$$(\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b \qquad (x_1 \ x_2 \cdots x_n)\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = b^T$$

$$\therefore \underbrace{x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = b \Longleftrightarrow x_1\alpha_1^T + x_2\alpha_2^T + \cdots + x_n\alpha_n^T = b^T}_{同一线性方程组的不同表示}$$

- 线性表示

$\boxed{线性表示}$ $\alpha_1, \cdots \alpha_i, \cdots \alpha_m \in \mathbb{R}^n$（$n$维向量）．$\beta \in \mathbb{R}^n$．

若存在 $k_1, \cdots k_m \in \mathbb{R}$ 使 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m$

称 β 为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m$ 的线性组合．或 β 能用 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m$ 线性表示．

称 $k_1, k_2, \cdots k_m$ 为组合系数

$\boxed{单位向量}$ 取单位矩阵 E_n 的第 i 列(行)，得 $\varepsilon_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ← 第i行(列)

任意 $\alpha = \sum_{i=1}^{n} k_i \varepsilon_i$．

一组单位向量 ～ 一组"基"

$\boxed{定理}$ β 能被 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m$ 线性表示 $\Longleftrightarrow$ $A = (\alpha_1 \ \alpha_2 \cdots \alpha_m)$，$Ax = \beta$ 有解

[推论] β 能被 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m$ 线性表示 $\Longleftrightarrow r(A) = r(\tilde{A}) = r(A, \beta)$

唯一线性表示 $\Longleftrightarrow r(A) = r(\tilde{A}) = m$．

不唯一 $\Longleftrightarrow$ $< m$

不能 $\Longleftrightarrow r(A) \neq r(\tilde{A})$

- 向量组的等价

(I) $\alpha_1, \cdots \alpha_s$ (II) $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t$

若(I)中每个向量都能由(II)线性表示．称(I)能由(II)线性表示．

(I)与(II)能相互线性表示 $\Longleftrightarrow$ (I)与(II)等价

$\beta_1,\cdots\beta_t$ 能被 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$ 线性表示 $\Leftrightarrow r(\overset{A}{\alpha_1\cdots\alpha_s}) = r(\alpha_1\cdots\alpha_s\,\beta_1\cdots\beta_t)$

相当于每个增广矩阵凑一起

$r(A)=r(A\ \beta_1)$

$r(A)=r(A\ \beta_2)$

$r(A)=r(A\ \beta_1\ \beta_2)$

否则 $r(A\ \beta_1\ \beta_2)=r(A)+1$. ($\because r(A\beta_1)=r(A)$)

则 $r(A\ \beta_2)=r(A)+1$. 矛盾.

- 线性相关与线性无关

$\boxed{\text{线性相关}}$: 存在 $k_1,\cdots k_m$ ($k_1^2+k_2^2+\cdots+k_m^2\neq 0$) 使 $0=\sum_{i=1}^{m}k_i\alpha_i$. 称 $\alpha_1\cdots\alpha_m$ 线性相关

不全为0.　　($\alpha_i\in\mathbb{R}^n$)

$\boxed{\text{线性无关}}$: $\sum_{i=1}^{m}k_i\alpha_i=0$ 当且仅当 $\sum_{i=1}^{m}k_i^2=0$. 称 $\alpha_i\cdots\alpha_m$.

线性相关 $\Leftrightarrow$ (有非零解. 无穷解) $\Leftrightarrow r(A)<m$

线性无关 $\Leftrightarrow$ (只有零解) $\Leftrightarrow$ $r(A)=m$

$Ax=0$.　($A=(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m)$)

[推论] $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m\in\mathbb{R}^n$. $A=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\cdots\alpha_m)_{n\times m}$　$Ax=0$.

线性相关 $\Leftrightarrow r(A)<m$.　有无穷解

线性无关 $\Leftrightarrow r(A)=m$　唯一零解

特别地, 若 $m=n$.　线性相关 $\Leftrightarrow r(A)<n \Leftrightarrow |A|=0 \Leftrightarrow A$不可逆

线性~~相~~无关 $\Leftrightarrow r(A)=n \Leftrightarrow |A|\neq 0 \Leftrightarrow A$可逆

若 $m>n$.　线性相关.　(未知数>方程)

[命题] 线性相关的部分向量组所在向量组线性相关.

$\boxed{\text{逆否命题}}$: 线性无关向量组的任一部分向量组线性无关.

有零向量 $\Rightarrow$ 线性相关

线性无关 $\Rightarrow$ 无零向量

一个向量组线性相关 $\Leftrightarrow \exists\,\alpha_i$ 能被向量组内其它向量线性表示.

[命题] $\gamma_i=\begin{pmatrix}\alpha_i\\ \beta_i\end{pmatrix}$　$\alpha_1,\cdots\alpha_s\in\mathbb{R}^n$.　$\beta_1,\cdots\beta_s\in\mathbb{R}^m$　$\gamma_1\cdots\gamma_s\in\mathbb{R}^{n+m}$.

γ 线性相关 $\Rightarrow$ α线性相关 且 β 线性相关

[证] $k_1\gamma_1+\cdots+k_s\gamma_s=0 \Rightarrow k_1\begin{matrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{matrix}+\cdots+k_s\begin{matrix}\alpha_s\\ \beta_s\end{matrix}=\begin{matrix}0\\ 0\end{matrix}$ (√)

α或β 线性无关 $\Rightarrow$ γ 线性无关

称 $\alpha_1,\cdots\alpha_s$ 为 $\gamma_1\cdots\gamma_s$ 的截短向量, $\gamma_1,\cdots\gamma_s$ 为 $\alpha_1\cdots\alpha_s$ 的接长向量.

[推论] $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ 线性无关. $\alpha_i=\begin{pmatrix}a_{i1}\\ \vdots\\ a_{in}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$

则 $\begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & \cdots & * \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \\ * & * & \cdots & * \end{pmatrix}$ 依然线性无关.

[证] $\xrightarrow{\text{初等行变换}}$ $\gamma_{1-s}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_m \\ * & * & * & \cdots & * \\ * & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & * & \cdots & * \end{pmatrix}$

即: 保持m个n维向量分量相对位置不变的任何(m+k)维向量 依然线性无关

[证]. 方程数↑, 解空间↓

本来就只有零解 ⟶ 仍然只有零解

[逆否] $\alpha_1,\dots\alpha_m$ 线性相关.

取其中k维分量组成的向量组依然线性相关

[命题]. $\alpha_1,\dots\alpha_m$ 线性无关 ($\alpha_i\in\mathbb{R}^n$)

$\beta_1,\dots\beta_s$ 可由 $\alpha_1,\dots\alpha_m$ 线性表示.

则 $(\beta_1,\dots\beta_s)=(\alpha_1\cdots\alpha_m)A_{m\times s}$

则 $\beta_1\cdots\beta_s$ 线性相关 $\Leftrightarrow r(A)<s$

无关 $\Leftrightarrow$ $=s$

[证] $(\beta_1,\dots\beta_s)x=0$

即 $\underbrace{(\alpha_1,\dots\alpha_m)}_{\text{无关}}\underbrace{Ax}_{y}=0$ $\Rightarrow y=Ax=0$

$\therefore r(A)<s \Leftrightarrow$ 非零解 $\Leftrightarrow$ 线性相关

$r(A)=s \Leftrightarrow$ 唯一零解 $\Leftrightarrow$ 线性无关

[定理] $\alpha_1,\dots\alpha_m$ $+$. $\alpha_1,\dots\alpha_m,\beta$ $\not+$ 则 $\beta=Lrp(\alpha_1,\dots\alpha_m)$ 且表示系数唯一

[Pf.] $k_1\alpha_1+\dots+k_m\alpha_m+k\beta=0$ 反证可得 $k\neq0$ ⇒ 线性表示

① $\begin{cases}k_1\alpha_1+\dots+k_m\alpha_m=\beta\\ l_1\alpha_1+\dots+l_m\alpha_m=\beta\end{cases}\Rightarrow(\alpha_1\cdots\alpha_m)\begin{pmatrix}k_1-l_1\\ \vdots\\ k_m-l_m\end{pmatrix}=0$ $\because\alpha +$. $\therefore k_i=l_i$ ⇒唯一

② $A=(\alpha_1\cdots\alpha_m)$ $r(A)=m$.

$Ax=\beta$ $r(\bar{A})=m$. ⇒唯一解

- 向量组的秩

$\boxed{\text{极大线性无关组}}$ (I) $\alpha_1,\dots\alpha_m$

(II) $\alpha_{i1},\dots\alpha_{ir}$ 是(I)的部分向量组. 满足:

1) $\alpha_{i1},\dots\alpha_{ir}$ 线性无关

2) (I)可由(II)线性表示.

称(II)是(I)的极大线性无关组.

* 若 $\alpha_i\in\mathbb{R}^n$, 则有 $r\leq n$. ← 显然

(I)与(II)等价

若极大线性无关组不唯一, 则(I)与(II)等价.

[定理] (Ⅰ): $\alpha_1, \cdots \alpha_s$ (Ⅱ) $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t$.

(Ⅰ)可被(Ⅱ)线性表示 且 $s > t$. 则(Ⅰ)线性相关

[Pf.] $(\alpha_1, \cdots \alpha_s) = (\beta_1, \cdots \beta_t) A_{t\times s}$.

$A_{t\times s} x = 0$ $r(A) \leq t < s$. ~ 非零解. 无穷解

$\therefore (\alpha_1, \cdots \alpha_s) x' = 0$

$\Rightarrow (\beta_1 \cdots \beta_t) \underline{A_{t\times s}} x' = 0$ (*)

存在非零 x 使 $Ax=0$ 使 (*) 成立.

$\therefore$ (Ⅰ) 线性相关

[推论1] (Ⅰ) $+$. 且 (Ⅰ) $=$ Lrp(Ⅱ) $\Rightarrow s \leq t$

[推论2] (Ⅰ) $+$. (Ⅱ) $+$. (Ⅰ)$\Leftrightarrow$(Ⅱ) $\Rightarrow s = t$

$\boxed{\text{向量组的秩}}$ 向量组: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m$ 存在极大线性无关组, 定义其中向量个数为 $r(\alpha_1, \cdots \alpha_m)$

$\alpha_{1\sim m}$ $+$ $\Leftrightarrow$ $r(\alpha_{1\sim m}) = m$

$\alpha_{1\sim m}$ $\not+$ $\Leftrightarrow$ $r(\alpha_{1\sim m}) < m$

$(\alpha_{1\sim m} \Leftrightarrow \beta_{1\sim s})$ $\Leftrightarrow$ $r(\alpha_{1\sim m}) = r(\beta_{1\sim s})$

r(Ⅰ)$=r$. (Ⅰ)中任意 r 个向量($+$). 都是极大线性无关组

$\alpha_{1\sim s} =$ Lrp $(\beta_{1\sim t})$ $\Leftrightarrow$ $r(\alpha_{1\sim s}) \leq r(\beta_{1\sim t})$

取极大$+$组.

与矩阵秩的关系:

[定理] $A_{m\times n} = (\alpha_1 \cdots \alpha_n) = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$

则 $r(\alpha_{1\sim n}) = r(\beta_{1\sim m}) = r(A)$

[证明] 先证 $r(A)=r$ 时, A 中有 r 个向量 $+$ (取 $D_r \neq 0$ 对应的 r 列). 记作 α

再证 $\forall \gamma_j$. $\gamma_j =$ Lrp (α)

(α) $+$ (α, γ_j) $\not+$ $\Rightarrow \gamma_j =$ Lrp (α)

按原序排列

$\boxed{\text{线性方程组解的结构}}$

$Ax = 0$ 若 $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_s$ 是解. 则 $\sum_{i=1}^{s} k_i \eta_i$ 也是解

设 $\eta_1, \cdots \eta_p$ 是 $Ax=0$ 的一组解.

已知 $\eta_{1\sim p}$ $+$. $Ax=0$ 的任意解可由 $\eta_{1\sim p}$ 线性表示.

称 $\eta_{1\sim p}$ 为 $Ax=0$ 的 $\boxed{\text{基础解系}}$. (显然是解系的一个极大 $+$ 组)

$A_{m\times n}x_{n\times 1}=0$

$\eta_{1\sim p}$ ~ 自由未知数（自由变量） 共 $(n-r)$ 个、不唯一

$\to \mathbb{R}^{n-r}$ 的一组线性无关的接长向量.

[定理] $A_{m\times n}$. $r(A)=r<n$.

$Ax=0$. 存在一个由 $(n-r)$ 个无关的解向量 $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-r}$ 构成的基础解系.

$\tilde{\eta}=\sum_{i=1}^{n-r}k_i\eta_i$ 是 $Ax=0$ 的任一解.

[证] 先化为简化阶梯形矩阵

$A\longrightarrow\begin{pmatrix}E_r & * \\ 0 & 0\end{pmatrix}=:R.$ 则 $Rx=0$ 与 $Ax=0$ 同解

即 $\begin{pmatrix}x_1 & & & c_{1(r+1)}x_{r+1}+\cdots+c_{1n}x_n \\ & \ddots & & \vdots \\ & & x_r & c_{r(r+1)}x_{r+1}+\cdots+c_{rn}x_n \\ 0 & & & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}$ 确定 $x_{r+1}\sim x_n\longrightarrow$ 得 $x_1\sim x_r$

e.g. 取 $\begin{pmatrix}x_{r+1}\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_{r-1} \\ x_r \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-c_{1(r+1)}\\ \vdots \\ -c_{r(r+1)} \\ 1 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}$

记 $\eta_i=\begin{pmatrix}\xi_{i\,(r\times 1)}\\ \mu_{i\,((n-r)\times 1)}\end{pmatrix}$. $\because \mu_{1\sim n-r}$ 线性无关 $\therefore$ 其接长向量无关

$\therefore \tilde{\eta}\longrightarrow$ 一个解 即 $\eta_{i\sim(n-r)}$ 无关.

再证：$Ax=0$ 任一解可被 $\eta_1, \cdots \eta_{n-r}$ l.r.p.

记 $\eta=(d_1, \cdots d_n\ k_1, \cdots k_{n-r})^T\in\mathbb{R}^n$. $A\eta=0$.

取 $\tilde{\eta}=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}$

$\eta-\tilde{\eta}=\begin{pmatrix}l_1\\ \vdots \\ l_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}=:l$ 也满足 $\begin{matrix}Al=0\\ Rl=0\end{matrix}$ $\Rightarrow l_i=0\ (1\le i\le r)$

即 $\eta-\tilde{\eta}=0$. $\therefore \eta=\tilde{\eta}$. QED. □

[求解基础解系]

$A\longrightarrow\begin{pmatrix}E_r & A_0\\ 0 & 0\end{pmatrix}x=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. $\xrightarrow{\text{代入 }E_{n-r}\text{ 对应解}}$ $\Rightarrow\begin{pmatrix}-A_0\\ E_{n-r}\end{pmatrix}$ 的列为基础解系.

求 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 公共解 $\longrightarrow\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}x=0$.

$\boxed{\text{非齐次线性方程组解的结构}}$

$Ax=0. \longrightarrow \eta$

$Ax=\beta$ 若有两个解 $\gamma_1, \gamma_2\Rightarrow A(\underbrace{\gamma_2-\gamma_1}_{\text{"}x\text{"}})=0$.

故：能找到一个 $Ax=\beta$ 的解 γ_0.

则 $Ax=\beta$ 的任一解可表示为 $\gamma=\gamma_0+\eta$.

[定理] $A_{m\times n}$. $Ax=\beta$. $r(A)=r(A,\beta)=r$

$\eta_1\sim\eta_{(n-r)}$ 是 $Ax=0$ 的一个基础解系

记 γ_0 为 $Ax=\beta$ 的一个特解，则 $\gamma=\gamma_0+\sum_{i=1}^{n-r}k_i\eta_i$ 是 $Ax=\beta$ 的通解.

找特解: $(A\ \ \beta)\longrightarrow\begin{pmatrix}E_r & A_0 & \beta_0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ $\qquad\begin{pmatrix}\beta_0\\ 0\end{pmatrix}$ 是特解

↑ 剩余

$-A_0$ 是 $Ax=0$ 的一组基础解系 $\longrightarrow$ 看成 η

另理解: $\begin{pmatrix}E_r & A_0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_0\\ 0\end{pmatrix}$. 其解与 $Ax=\beta$ 同解.

线性空间与线性变换

- 线性空间

$\boxed{\text{线性空间}}$ $V\neq\phi$. $\mathbb{F}$是一个数域. 对V中元素定义加法运算"+",

使 $\forall\alpha,\beta\in V$ 有唯一的一个元素 $\underset{\in V}{\delta}$ 与 α,β 对应

称 δ 为α与β的和, 记作 $\delta=\alpha+\beta$. $\in V$

对V中元素定义 $\underset{\substack{\uparrow\\ \text{数乘}}}{\text{纯量乘法}}$, 使 $\forall\alpha\in V$, $\forall k\in\mathbb{F}$, 有唯一的一个元素 $\eta\in V$ 与α, k对应

记作 $\eta=k\alpha$. $\in V$

且满足以下性质:

[性质] (1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ (满足交换律)

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$ (满足结合律)

(3) 存在零元 0: $\alpha+0=\alpha$

(4) 存在负元: $\forall\alpha\exists\beta(\alpha+\beta=0)$. β为α的负元 ⇒ 性质: 唯一

(5) $1\cdot\alpha=\alpha$ (单位数仍保持性质)

(6) $k(l\alpha)=l(k\alpha)=(kl)\alpha$ (满足结合律)

(7) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$

(8) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$ (满足两种分配律)

则称V为数域$\mathbb{F}$上的线性空间.

特别地, 当$\mathbb{F}=\mathbb{R}$时, 称V为实线性空间.

e.g. $\mathbb{R}^n$ 是实线性空间. (定义"+"为向量加法, "*"为数乘)

n维实(数)向量空间

$\mathbb{R}^n$ 不是复线性空间.

$\mathbb{C}^n$ 是实线性空间 (定义"+"为向量加法, "*"为数乘)

$\mathbb{C}^n$ 是复线性空间.

$\mathbb{F}^n$ 是$\mathbb{F}$上的线性空间 ("+"为向量加法, "*"为数乘) ($\because\mathbb{F}$对四则运算封闭)

$\mathbb{R}^{m\times n}$ 是实线性空间. (定义"+"为矩阵乘法, "*"为数乘)

实(数)矩阵空间

[a,b]上全体连续函数 关于 函数加法与数和函数乘法 构成实线性空间. 记作 $\mathbb{C}[a,b]$.

$\mathbb{C}$ 构成实线性空间. (关于复数加法 和 实数与复数乘法)

$\mathbb{C}$ 构成复线性空间. (关于复数加法 和 复数乘法)

$\mathbb{F}$上全体一元多项式 关于多项式加法 和 数与多项式乘法 构成$\mathbb{F}$上线性空间. 记作 $\mathbb{F}[x]$. 不超过n次 $(\leq n)$ → $\mathbb{F}[x]_n$.

[a,b]上全体n次可微函数 关于函数加法与数和函数乘法 构成实线性空间. 记作 $\mathbb{D}^{(n)}[a,b]$

$\boxed{\text{线性空间性质}}$ V 是 $\mathbb{F}$ 上线性空间

(1) 零元唯一．记作 0.

(2) α 的负元唯一．记作 $-\alpha$.

(3) $\forall \alpha\in V$. $0\cdot\alpha = 0\in V$. $(-1)\cdot\alpha = -\alpha\in V$

(4) $\forall k\in\mathbb{F}$. $k\cdot 0 = 0\in V$.

(5) 若 $k\cdot\alpha = 0\in V$. $k\in\mathbb{F}$. $\alpha\in V$. 则 $k=0$ 或 $\alpha=0$.

- 线性子空间

$\boxed{\text{线性子空间}}$ W 是 V 的非空真子集．

$\underline{W\text{关于 }V\text{在 }\mathbb{F}\text{上定义的加法、纯量乘法 在 }\mathbb{F}\text{上构成线性空间}}$.

称 W 为 V 的线性子空间．简称"子空间".

即 W 对 V 定义的加法与纯量乘法 $\underline{\text{封闭}}$.

- 基

元素！未必是向量！

[redacted] 线性空间 V. $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m\in V$. V 在 $\mathbb{F}$ 上是线性空间．

线性相(无)关 的推广

$\exists$ 一组不全为零的 $k_1,\cdots k_m$ 使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$.

称 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m$ $\boxed{\text{线性相关}}$.

$\nexists$ ———————— ———————— $\boxed{\text{线性无关}}$.

极大线性无关组 $\sim$ 基

[向量空间] [线性空间]

$\boxed{\text{基}}$: 线性空间 V. 若存在 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m$ 满足:

(1) $\alpha_{1\sim m}$ 无

(2) $\forall\alpha\in V$ 可被 $\alpha_1,\cdots\alpha_m$ 线性表示．称 $\alpha_1,\cdots\alpha_m$ 是 V 的一组基．

$\boxed{\text{维数}}$: $\dim V = m$ (基中元素的个数) 特别地, $\dim\{0\}=0$ (没有基)

e.g. $\dim\mathbb{R}^{2\times2} = 4$ $\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$

$\dim\mathbb{R}^{m\times n} = m\times n$

[redacted]

$\dim\mathbb{F}[x]_n = n+1$ $(x^n, x^{n-1}, \cdots x, 1)$

$\dim C[a,b]$ 为无限 (任意次数多项式都在，还有三角函数)

$\boxed{\text{坐标}}$: 类似向量空间 (解空间)

[redacted]

$\forall\alpha\in V$, $\alpha_{1\sim n}$ 是一组基．

存在唯一的 $k_1,\cdots k_n$ 使 $\alpha = k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n$.

$= (\alpha_1\cdots\alpha_n)\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}$ $(k_i\in\mathbb{F})$

称 $x=\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}$ 为 α 在 V 中的坐标. 同一组基下, x 唯一. $(x\in\mathbb{F}^n)$
基改变, x 改变.

选定一组基, 则存在 α $(\alpha\in V)$ 到 x $(x\in\mathbb{F}^n)$ 的一一对应关系.

$\boxed{\text{同构映射}}$ 若 V, V' 同是 $\mathbb{F}$ 上的线性空间. 存在 V 到 V' 的一一对应关系 σ. 满足:

① $\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$ $(\alpha,\beta\in V)$

② $\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)$

称 σ 为从 V 到 V' 的同构映射.

此时考察 V' 即可获知有关 V 的性质. ⟶ "同构".

显然坐标就是从 V 到 $\mathbb{F}^{\dim V}$ 的一个同构映射.

$\boxed{\text{基变换}}$ $\dim V=n$. V 是 $\mathbb{F}$ 上线性空间. 存在 $\alpha_{1\sim n}$, $\beta_{1\sim n}$ 都是 V 的基.

则 $(\alpha_1\cdots\alpha_n)=(\beta_1\cdots\beta_n)\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\ c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ c_{n1}&c_{n2}&\cdots&c_{nn}\end{pmatrix}$ $(c_{ij}\in\mathbb{F})$

其中 $\alpha_i=(\beta_1\cdots\beta_n)\begin{pmatrix}c_{1i}\\ c_{2i}\\ \vdots\\ c_{ni}\end{pmatrix}$

则 $(\alpha_1\cdots\alpha_n)=(\beta_1\cdots\beta_n)\cdot\underline{C}$ (C 是过渡矩阵) 为 $\beta_{1\sim n}$ 到 $\alpha_{1\sim n}$ 的基变换公式

$(\beta_1\cdots\beta_n)=(\alpha_1\cdots\alpha_n)C^{-1}$
($\alpha_{1\sim n}$ 到 $\beta_{1\sim n}$ 的基变换公式)

[定理] 若 α 在基 $\alpha_{1\sim n}$ 中坐标为 x, 在基 $\beta_{1\sim n}$ 中坐标为 y.

$\alpha=(\alpha_1\cdots\alpha_n)x=(\beta_1\cdots\beta_n)Cx=(\beta_1\cdots\beta_n)y$

$\boxed{\text{坐标变换}}$ $\therefore$ $\boxed{y=Cx}$ ($\because$ 任意 α 在一组基下表示方式唯一)

或 $\boxed{x=C^{-1}y}$

* C 为什么可逆?

$\alpha_{1\sim n}$ 和 $\beta_{1\sim n}$ 都是基. $\alpha_{1\sim n}=Lrp(\beta_{1\sim n})$

故 $r(\alpha)=n$. $r(\beta)=n$. $r(C)\le n$
~~$r(\alpha)=r(\beta C)\ge r(\beta)+r(C)$~~
$r(\alpha)=r(\beta\cdot C)\le r(C)$ $\Rightarrow r(C)\ge n$

$\rightarrow r(C)=n \Leftrightarrow$ 可逆.

- 欧氏空间

$\boxed{\text{度量}}$: 一个数. 向量的距离. 夹角. 长度等.

$\boxed{\text{欧氏空间}}$ V是$\mathbb{R}$上线性空间. $\forall \alpha, \beta \in V$, 有唯一的实数与之对应, 记作$(\alpha, \beta)$.

若对应关系满足:

(1) 对称性 $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$ $(\forall \alpha, \beta \in V)$

(2) 线性性 $(k\alpha + l\beta, \gamma) = (k\alpha, \gamma) + (l\beta, \gamma) = k(\alpha, \gamma) + l(\beta, \gamma)$

$(\forall k, l \in \mathbb{R}, \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in V)$

(3) 正定性: $(\alpha, \alpha) \geq 0$ 且 $(\alpha, \alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$.

称(α, β)为α与β的$\boxed{\text{内积}}$. 定义了内积的实线性空间称为$\boxed{\text{Euclid空间}}$.

(广义)向量

$\boxed{\text{长度}}$ $|\alpha| = \sqrt{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{R}$. $\quad (\forall \alpha \in V, \ V \in \mathrm{Euc}(\mathbb{R}))$

若$|\alpha| = 1$, 称α为V的$\boxed{\text{单位向量}}$.

e.g. $\varepsilon_1, \cdots \varepsilon_n$ 是$\mathbb{R}^n$的单位向量. $(\sqrt{2}/2 \ \ \sqrt{2}/2)^T$ 是$\mathbb{R}^2$的单位向量.

实际上, $\forall \alpha \in V$, $(\alpha \neq 0)$ $\beta = [redacted]\dfrac{\alpha}{|\alpha|}$ 是V的单位向量. $\longleftarrow$ $\boxed{\text{单位化}}$

$\boxed{\text{长度的性质}}$

$V \in \mathrm{Euc}(\mathbb{R})$. $\alpha, \beta \in V$. $k \in \mathbb{R}$

(1) $|\alpha| \geq 0$. $|\alpha| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$

(2) $|k\alpha| = |k||\alpha|$

(3) (Cauchy – Schwarz不等式) $|(\alpha, \beta)| \leq |\alpha| \cdot |\beta|$

$|(\alpha, \beta)| = |\alpha| \cdot |\beta|$ 当且仅当 α, β 线性相关, 即 $\exists x$ 使 $\alpha = x\beta$ $(x \in \mathbb{R})$

[证] ① $\alpha \neq$ [redacted] $x\beta$ $(\forall x \in \mathbb{R})$时. 显然$\alpha \neq 0$.

$u = t\alpha - \beta \in V$. $(\forall t \in \mathbb{R})$ $(u, u) \geq 0$ 即 $(t\alpha - \beta, t\alpha - \beta) \geq 0$

$\therefore t^2(\alpha, \alpha) - 2t(\alpha, \beta) + (\beta, \beta) \geq 0$ $(\forall t \in \mathbb{R})$

$\Delta \leq 0 \Rightarrow [-2(\alpha, \beta)]^2 - 4(\alpha, \alpha)(\beta, \beta) \leq 0$ 即 $(\alpha, \beta)^2 \leq (\alpha, \alpha)(\beta, \beta)$

$\therefore |(\alpha, \beta)| \leq |\alpha||\beta|$.

② $\alpha = x\beta$时. $(x \in \mathbb{R})$.

$|(\alpha, \beta)| = |x(\beta, \beta)| = |x||\beta|^2 = (|x||\beta|) \cdot |\beta| = |\alpha||\beta|$. □

☆ 取$V = \mathbb{R}^n$. $(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n a_i b_i$. $\alpha = (a_i)^T$. $\beta = (b_i)^T$. $\longrightarrow$ Cauchy不等式

☆ 取$V = (\mathbb{R} \to \mathbb{R})$ $(\alpha, \beta) = \int_a^b f(x) g(x)\, dx$ $\longrightarrow$ Schwarz不等式

$\boxed{\text{夹角}}$ $V \in \mathrm{Euc}(\mathbb{R})$. $\alpha, \beta \in V$.

$\theta = \langle \alpha, \beta \rangle = \arccos \dfrac{(\alpha, \beta)}{|\alpha||\beta|}$ 称为α与β的夹角.

特别地, $\dfrac{(\alpha, \beta)}{|\alpha||\beta|} = 0$. 有$\langle \alpha, \beta \rangle = 90°$ 即 $\alpha \perp \beta$. 称α与β $\boxed{\text{正交}}$.

$\boxed{\text{正交向量组}}$ 设$\alpha_{1\sim s}$为V中一组$\boxed{\text{非零}}$向量, $1 \leq i \neq j \leq s$ 恒有 $\alpha_i \perp \alpha_j$. 即 $(\alpha_i, \alpha_j) = 0$.

称$\alpha_{1\sim s}$为V的一个正交向量组. (0在其中无意义)

$\boxed{\text{距离}}$ $d(\alpha,\beta)=|\alpha-\beta|$.

- 正交基

$\boxed{\text{正交基}}$ $V\in Euc\,\mathbb{R}$. ~~dim V=n~~ 若 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n$ 正交向量组, 则线性无关. $\longrightarrow$ 取内积可证.

若 $\dim V=n$ $\quad\varepsilon_1,\cdots\varepsilon_n$ 构成 V 的一组正交基. $\quad\dim V>n$ —— 子空间正交基

特别地, $|\varepsilon_i|=1$. 称 $\varepsilon_{1\sim n}$ 为 V 的$\boxed{\text{标准正交基}}$

$\boxed{\text{度量矩阵}}$. $V\in Euc\,\mathbb{R}$. $\varepsilon_1,\cdots\varepsilon_n$ 为一组正交基 (即 $\dim V=n$)

$$\alpha=\underbrace{(\varepsilon_1\ \cdots\ \varepsilon_n)}_{=E^*}\underbrace{\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}}_{=a\in\mathbb{R}^n}.\quad \beta=\underbrace{(\varepsilon_1\ \cdots\ \varepsilon_n)}_{=E^*}\underbrace{\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}}_{=b\in\mathbb{R}^n}$$

则 $(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ib_j(\varepsilon_i,\varepsilon_j)$.

而 $\underline{(\alpha,\beta)=\beta^T\alpha}$ $\xrightarrow[\text{反正同构}]{\text{考虑}\mathbb{R}^n}$ $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$. $\beta=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$ $\quad(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$

$=(b_1\cdots b_n)\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$

一般定义内积为 ~~[illegible]~~ 这个

$$=(E^*b)^T(E^*a)$$

$$=b^TE^{*T}E^*a=(b_1\cdots b_n)\underbrace{\begin{pmatrix}(\varepsilon_1,\varepsilon_1)&(\varepsilon_1,\varepsilon_2)&\cdots\cdots&(\varepsilon_1,\varepsilon_n)\\(\varepsilon_2,\varepsilon_1)&(\varepsilon_2,\varepsilon_2)&\cdots\cdots&(\varepsilon_2,\varepsilon_n)\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\(\varepsilon_n,\varepsilon_1)&(\varepsilon_n,\varepsilon_2)&\cdots\cdots&(\varepsilon_n,\varepsilon_n)\end{pmatrix}}_{\text{度量矩阵 (对称矩阵)}}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$$

正交基 ~ 度量矩阵为对角矩阵.

标准正交基 ~ 度量矩阵为单位阵.

$\boxed{\text{正交化}}$ $\beta_1=\alpha_1$

$\beta_2=\alpha_2+k\beta_1\Rightarrow(\beta_1,\beta_2)=(\alpha_2,\beta_1)+k(\beta_1,\beta_1)=0\ \Rightarrow\beta_2=\alpha_1-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\alpha_2$

$\cdots\cdots$

施密特正交化

$$\beta_1=\alpha_1$$
$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1.$$
$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2.$$
$$\vdots$$
$$\beta_s=\alpha_s-\frac{(\alpha_s,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\cdots-\frac{(\alpha_s,\beta_{s-1})}{(\beta_{s-1},\beta_{s-1})}\beta_{s-1}.$$

$\boxed{\text{单位化}}$ $\eta_i=\dfrac{\beta_i}{|\beta_i|}$. $\Rightarrow\eta_{1\sim s}$: 标准正交基

$\mathcal{L}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s)=\mathcal{L}(\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_s)$ $\quad\alpha_{1\sim s}$ 和 $\beta_{1\sim s}$ 都是该空间的基

由 $\alpha_{1\sim s}$ 到 $\beta_{1\sim s}$ 的过渡矩阵: $(\beta_1,\cdots\beta_s)=(\alpha_1,\cdots\alpha_s)\begin{pmatrix}1&-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}&\cdots&-\frac{(\alpha_s,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\\0&1&&\vdots\\ \vdots&\vdots&\ddots&-\frac{(\alpha_s,\beta_{s-1})}{(\beta_{s-1},\beta_{s-1})}\\0&\cdots&0&1\end{pmatrix}$ $\leftarrow$ 过渡矩阵是上三角矩阵

- 正交矩阵

$\boxed{\text{正交矩阵}}$ 定义1.(性质2) $\alpha_{1\sim n}\in\mathbb{R}^n$. $\alpha_{1\sim n}$ 正交且标准.

$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n)$ 是正交矩阵.

一定是方阵

定义2.(性质1) $\alpha_{1\sim n}\in\mathbb{R}^n$. 使 $(\alpha_i,\alpha_j)=\begin{cases}0 & (i\neq j)\\ 1 & (i=j).\end{cases}$

$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n)$ 是正交矩阵.

性质3. 一般定义内积 $(\alpha,\beta)=\beta^T\alpha$.

故 A为正交阵 $\Longleftrightarrow$ $A^TA=E$ (即 $\begin{pmatrix}\alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n\\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n\\ & & \ddots & \\ \alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n\end{pmatrix}=E$)

$\Updownarrow$

A^T 是 A^{-1} $\Leftrightarrow$ $AA^T=E$ (可逆)

$\Updownarrow$

$|A|=|A|^{-1}$ $\Leftrightarrow$ $|A|=\pm1$

性质4. A为正交阵 $\Rightarrow$ A^{-1} 为正交阵 $\Rightarrow A^*$ 为正交阵

$A^{-1}\downarrow(A^T)$ $A^*\downarrow(A^T)$

$$(A^{-1})^TA^{-1}=(A^T)^{-1}A^{-1}=(AA^T)^{-1}=E^{-1}=E$$

$$(A^*)^TA^*=|A|^2(A^{-1})^TA^{-1}=E.$$

性质5. A,B为正交阵 $\Rightarrow$ AB为正交阵

$$(AB)^T(AB)=B^TA^TAB=B^TB=E.$$

- 线性变换

$\boxed{\text{线性变换}}$ V是$\mathbb{F}$上线性空间. $\mathscr{A}: V\longrightarrow V$ 是一个映射. 满足: 称$\mathscr{A}$为变换

(1) $\mathscr{A}(\alpha+\beta)=\mathscr{A}(\alpha)+\mathscr{A}(\beta)$

(2) $\mathscr{A}(k\alpha)=k\mathscr{A}(\alpha)$ 称 $\mathscr{A}$ $\boxed{\text{线性变换}}$.

对比同构: V, V′同是$\mathbb{F}$上线性空间. $\sigma: V\longrightarrow V'$. $\boxed{\text{一一对应}}$

(1) $\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$

(2) $\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)$ 称 σ $\boxed{\text{同构映射}}$

线性变换是特殊的同构映射. (✗) 零变换就不是同构映射.

此时, 称 $\mathscr{A}(\alpha)$ 为 α 在 $\mathscr{A}$ 下的像.

1) $\mathscr{A}v=v$. $\mathscr{A}$ 是 $\boxed{\text{恒等变换}}$

2) $\mathscr{A}v=kv.^{(k\neq0)}$ $\mathscr{A}$ 是 $\boxed{\text{数乘变换}}$

3) $\mathscr{A}v=0$ $\mathscr{A}$ 是 $\boxed{\text{零变换}}$. 记为 $\mathcal{O}v=0$ $(\forall v\in V)$

特殊地，$V=\mathbb{F}^{n\times n}$. P为可逆n阶方阵. $\mathcal{A}: V\longrightarrow V$.

$\mathcal{A}(A)=P^{-1}AP$ 称 $\mathcal{A}$ 是 $\boxed{\text{相似变换}}$.

若能找到P使 $\mathcal{A}(A)=B$. 称A与B相似.

$V=\mathbb{F}^{n\times n}$. P为可逆n阶方阵. $\mathcal{A}: V\longrightarrow V$.

$\mathcal{A}(A)=P^{T}AP$. 称 $\mathcal{A}$ 为 $\boxed{\text{合同变换}}$.

若能找到P使 $\mathcal{A}(A)=B$. 称A与B合同.

$\boxed{\text{值域与核}}$ $\mathcal{A}: \underset{\text{定义域}}{V}\longrightarrow \underset{\text{陪域}}{V}$.

$Im(\mathcal{A})=\{\mathcal{A}(\xi) \mid \xi\in V\}$ 称为 $\boxed{\text{值域}}$ 或 $\boxed{\text{像空间}}$.

$Ker(\mathcal{A})=\{\xi\in V \mid \mathcal{A}(\xi)=0\}$ 称为 $\boxed{\text{核}}$ 或 $\boxed{\text{零空间}}$.

$\boxed{\text{线性变换的秩}}$ $r(\mathcal{A})=\dim(Im(\mathcal{A}))$.

$\boxed{\text{线性变换的零度}}$ $r(Ker(\mathcal{A}))=\dim(Ker(\mathcal{A}))$.

一般求值域时，找它的基 ← 从原空间(陪域)的基中 着手

$\alpha=k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+k_3\varepsilon_2 \in V$.

$\mathcal{A}(\alpha)=k_1\mathcal{A}(\varepsilon_1)+k_2\mathcal{A}(\varepsilon_2)+k_3\mathcal{A}(\varepsilon_3)$

基 → 所有无限个向量.

极大无关组: 值域的基

其中变为0的就不用管了 取线性无关的

故值域为 $\mathcal{L}(\mathcal{A}(\varepsilon_1),\mathcal{A}(\varepsilon_2))$.

$r(\mathcal{A})=2$

核是由 ε_3 张成的空间.

$Ker(\mathcal{A})=\mathcal{L}(\varepsilon_3)$
$=\{k\varepsilon_3 \mid k\in\mathbb{R}\}$.

$r(Ker(\mathcal{A}))=1$

[性质] $r(\mathcal{A})+r(Ker(\mathcal{A}))=\dim V$.
定理

$\boxed{\text{线性变换的运算}}$ V是$\mathbb{F}$上线性空间. $k\in\mathbb{F}$. $\mathcal{A}$与$\mathcal{B}$是两个V上的线性变换.

$(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\alpha)=\mathcal{A}\alpha+\mathcal{B}\alpha$. $\forall\alpha\in V$ —— 线性变换$\mathcal{A}$与$\mathcal{B}$的和

$(k\mathcal{A})(\alpha)=k(\mathcal{A}\alpha)$ $\forall\alpha\in V$ —— k与线性变换$\mathcal{A}$的纯量乘积

$(\mathcal{A}\mathcal{B})(\alpha)=\mathcal{A}(\mathcal{B}\alpha)$ $\forall\alpha\in V$.

$(\mathcal{B}\mathcal{A})(\alpha)=\mathcal{B}(\mathcal{A}\alpha)$ $\forall\alpha\in V$.

} $\mathcal{A}$与$\mathcal{B}$的积.

[定理] $\mathcal{A},\mathcal{B}$是线性变换 $\Rightarrow$ $\mathcal{A}+\mathcal{B}$, $k\mathcal{A}$, $\mathcal{A}\mathcal{B}$是线性变换

注意到. "零元" 0α 存在. 单位纯量 1 存在.

$(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\alpha)=(\mathcal{B}+\mathcal{A})(\alpha)$ $((\mathcal{A}+\mathcal{B})+\mathcal{C})(\alpha)=(\mathcal{A}+(\mathcal{B}+\mathcal{C}))(\alpha)$

负元存在

$(kl\mathcal{A})(\alpha)=k(l\mathcal{A}(\alpha))=l(k\mathcal{A}(\alpha))=(kl)\mathcal{A}(\alpha)$

$(k(\mathcal{A}+\mathcal{B}))(\alpha)=(k\mathcal{A}+k\mathcal{B})(\alpha)$

$((k+l)\mathcal{A})(\alpha)=(k\mathcal{A}+l\mathcal{A})(\alpha)$

故 V上的所有线性变换组成的空间是数域$\mathbb{F}$上的线性空间.

[性质] (1) $\mathcal{A}(0)=0$. $\mathcal{A}(-\alpha)=-\mathcal{A}(\alpha)$

$(\because \mathcal{A}\alpha+\mathcal{A}(-\alpha)=\mathcal{A}0=0.)$

(2) $\forall \alpha_1,\cdots \alpha_m\in V.\ k_1,\cdots k_m\in \mathbb{F}.$

$$\mathcal{A}(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m)=\mathcal{A}\left((\alpha_1\sim\alpha_m)\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_m\end{pmatrix}\right).$$

$$=k_1\mathcal{A}(\alpha_1)+k_2\mathcal{A}(\alpha_2)+\cdots+k_m\mathcal{A}(\alpha_m)$$

$$=((\mathcal{A}(\alpha_1),\mathcal{A}(\alpha_2),\cdots\ \mathcal{A}(\alpha_m))\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_m\end{pmatrix} \longleftarrow$$ 线性关系保持不变

[(2)推论] 相关 $:\alpha_{1\sim m}\Longrightarrow$ 相关 $:\mathcal{A}(\alpha_{1\sim m})$.

数乘变换. 一一对应的线性变换: $+\Rightarrow+\mathcal{A}$.

- 线性变换的矩阵

$\boxed{\text{给定基下的矩阵}}$. n维空间(线性) V. 一组基 $\varepsilon_{1\sim n}$

$\mathcal{A}(\varepsilon_1)=a_{11}\varepsilon_1+\cdots+a_{n1}\varepsilon_n$

$\cdots$ 坐标唯一 $\Rightarrow (a_{ij})_{n\times n}$ 唯一

$\mathcal{A}(\varepsilon_n)=a_{n1}\varepsilon_1+\cdots+a_{nn}\varepsilon_n$ 一一对应 $\Rightarrow$ 同构映射. $V\sim\mathbb{R}^{n}$ ($\mathbb{F}^{n}$)

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$ 称为 $\mathcal{A}$ 在 $\varepsilon_1,\cdots\varepsilon_n$ 下的矩阵

本身可以看成 $\mathcal{A}$ 的另一种表达形式, 即"变换"本身.

在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n$ 下: A 与 $\mathcal{A}$ $\underset{(\text{双射})}{\underline{\text{一一对应}}}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{A}$空间 $\sim \mathbb{F}^{n\times n}$. [同构]

(下上线性变换构成的空间)

即: $\mathcal{A}(\varepsilon_1,\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n):=(\mathcal{A}\varepsilon_1,\mathcal{A}\varepsilon_2,\cdots\ \mathcal{A}\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\cdots\ \varepsilon_n)A$

证明: A 与 $\mathcal{A}$ 之间存在同构映射.

[Pf.] 1) 先证明是双射 $\begin{cases}\text{单射}\\ \text{满射}\end{cases}$

2) $\sigma(\mathcal{A}+\mathcal{B})=\sigma(\mathcal{A})+\sigma(\mathcal{B})$

$\sigma(k\mathcal{A})=k\sigma(\mathcal{A})$ □

$\boxed{\text{基变换时线性变换对应矩阵的关系}}$

一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n\in V$. $\mathcal{A}$在该组基下矩阵为 A

一组基 $\eta_1,\eta_2,\cdots\eta_n\in V$ $\mathcal{A}$在该组基下矩阵为 B.

从 $\varepsilon_{1\sim n}$ 到 $\eta_{1\sim n}$ 过渡矩阵为 C. 则 $B=C^{-1}AC$.

[证] $\mathcal{A}(\eta_1,\cdots\eta_n)=\mathcal{A}((\varepsilon_1,\cdots\varepsilon_n)C) \overset{\mathcal{A}(\sum k_i\varepsilon_i)=\sum\mathcal{A}(k_i\varepsilon_i)=\sum k_i\mathcal{A}(\varepsilon_i)}{=\!=\!=} \mathcal{A}(\varepsilon_1,\cdots\varepsilon_n)C$

$=(\varepsilon_1,\cdots\varepsilon_n)AC=(\eta_1,\eta_2,\cdots\eta_n)C^{-1}AC$

$=(\eta_1,\cdots\eta_n)B$

$\therefore B=C^{-1}AC$

矩阵相似对角化

- 特征值与特征向量

$A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. 若存在 $\lambda \in \mathbb{F}$, $x \in \mathbb{F}^{n}$ 且 $x \neq 0$. 且 $Ax = \lambda x$

则称 λ 为 A 的 $\boxed{\text{特征值}}$. x 是 A $\boxed{\text{对应于 } \lambda \text{ 的特征向量}}$.

注意到 若 λ, x_0 满足 $Ax_0 = \lambda x_0$, 则 $A(kx_0) = \lambda(kx_0)$. 在 $k \neq 0$ 时, kx_0 也是A对应于λ的特征向量.

e.g. E 特征值为1. $\forall x \neq 0$ 是E 对应于1 的特征向量.

$A = \mathrm{diag}(a_{11}, \cdots a_{ii}, \cdots a_{nn})$ $\quad Ax = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 \\ a_{22}x_2 \\ \vdots \\ a_{nn}x_n \end{pmatrix} = \lambda x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$.

考虑一般情况: $\lambda_1 = a_{11}$ 对应于 λ_1 的特征向量: $(1, 0, \cdots 0)^T$

$\lambda_2 = a_{22}$ 对应于 λ_2 的特征向量: $(0, 1, \cdots 0)^T$

$\cdots$

$\lambda_n = a_{nn}$ 对应于 λ_n 的特征向量: $(0, 0, \cdots, 1)^T$

对角线上元素是其特征值

$\boxed{\text{求解任意 } n \text{ 阶方阵的特征值与对应的特征向量}}$

$Ax = \lambda x \iff (A - \lambda E)x = 0. \quad (x \neq 0)$

即 x_0 是 $(A-\lambda E)x = 0$ 的非零解. $\iff r(A-\lambda E) < n$

$\iff |A - \lambda E| = 0$

A的1个特征值 λ_0 是 $|A-\lambda E| = 0$ 的根. (λ为变量)

考虑到 $|\lambda E - A| =$ $|A - \lambda E| =: |B| = \sum (-1)^{\tau(m_1 m_2 \cdots m_n)} b_{1m_1} b_{2m_2} \cdots b_{nm_n}$

肯定包括主对角线乘积. 则 $f(\lambda) = |A + \lambda E| = \lambda^n + \cdots\cdots + C_n = 0$

有n个根 ⇝ 对应n个特征值(未去重)

代数学基本定理: n次多项式有n个解(复数域)

A的特征多项式 $f(\lambda)$ ← $|\lambda E - A| =$

A的特征方程

1) $|A - \lambda E| =: f(\lambda) = 0 \longrightarrow$ 解出特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_s$

在复数域内, $f(\lambda) = \prod_{i=1}^{s} (\lambda - \lambda_i)^{p_i}$ ← $\boxed{\text{代数重数}}$ ← 重根的处理

其中 $p_1 + p_2 + \cdots + p_s = n$

2) 对每个 λ_i, 求 $(A - \lambda_i E)x = 0$ 的非零解 —— 基础解系中有 r_i 个向量 ($\dim V_{\lambda_i} = r_i$)

$\boxed{\text{几何重数}}$

定理: $\boxed{1 \leq \text{几何重数} \leq \text{代数重数}}$

$\dim\{\text{解空间}\}$

~ 两者可以不相等! 取决于 $r(A-\lambda E)$.

e.g. $(\lambda+2)\begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 0 & \lambda+3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

特别地, 当 $p_i = 1$, 称 λ_i 为 $\boxed{\text{单特征值}}$, 则 A的对应于λ_i 线性无关的特征向量有且仅有1个

(此时 $r_i = 1$. $\longrightarrow$ 任意2个都线性相关)

e.g. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}_{n\times n}$. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}=a$. 则 A 的 1 个特征值为 a.

1个对应于 a 的特征向量: $\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}$.

是否也有其它特征值? $\longrightarrow$ 考虑 a 是几重特征值.

性质

1. $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ 未掌握

$\prod_{i=1}^{n}\lambda_i = |A|$

[证明] $0=|\lambda E-A|$

$=(\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})\cdots(\lambda-a_{nn})+\cdots\cdots$

$=\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots\cdots$

为什么其它项不含有 λ^{n-1} 出来?

我们知道 $|B|=\sum_{k_1\cdots k_n}(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)} b_{1k_1}b_{2k_2}\cdots b_{nk_n}$. $k_1\cdots k_n$ 是全排列.

确定 $(n-1)$ 个, 最后 1 个也确定

如果其中 1 个 b_{ik_i} 不含 λ. 则至少涉及两个 $\longrightarrow$ 至少 2 项不含 λ

(只有对角线上元素有 λ).

另一方面, $-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$ 是 λ^{n-1} 的系数 (韦达定理) 则 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = tr(A)$ □

取 $\lambda=0$. 得常数项 $=|-A|=(-1)^n|A|$

另一方面, 由韦达定理, 常数项 $=\prod_{i=1}^{n}(-1)\lambda_i = (-1)^n\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$

($\because$ 多项式即: $(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$)

故 $\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=|A|$. □

2. A 特征值 λ = A^T 特征值 λ'. (但对应于 λ 的特征向量不同!)

3. A 特征值 λ. 1个对应于 λ 的特征向量 x

A^{-1}	λ^{-1}	x	.	A^*	$\|A\|\lambda^{-1}$	x.
kA	$k\lambda$	x				
A^k	λ^k	x				
$g(A)$ 多项式	$g(\lambda)$	x				

不同特征值对应特征向量的关系

$A_{n\times n}$ 不同的特征值为 $\lambda_1,\cdots\lambda_s$, 取对应于 λ_i 的 1 个特征向量 α_i

则 $\alpha_1,\cdots\alpha_s$ 线性无关.

[证明]. ~~反证 设存在不全为0的 $k_1, k_2, \cdots k_s$ 使 $\sum k_i\alpha_i=0$~~

$\sum_{i=1}^{s}k_i\alpha_i=0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{s}Ak_i\alpha_i=0$ 即 $\sum_{i=1}^{s}\lambda_ik_i\alpha_i=0$

类似地, 我们得到 $\begin{cases}\sum_{i=1}^{s}k_i\alpha_i=0\\ \sum_{i=1}^{s}k_i\lambda_i\alpha_i=0\\ \cdots\\ \sum_{i=1}^{s}k_i\lambda_i^{s-1}\alpha_i=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \underset{n\times s}{(k_1\alpha_1 \ \cdots \ k_s\alpha_s)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{s-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{s-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_s & \lambda_s^2 & \cdots & \lambda_s^{s-1} \end{pmatrix}_{s\times s}}_{\parallel} = O_{n\times s}$$

V^T，V是范德蒙行 $\longrightarrow |V^T| = \prod_{i<j}(\lambda_i-\lambda_j) \neq 0$.

两边同乘 $(V^T)^{-1}$

$$\Leftrightarrow (k_1\alpha_1 \ \cdots \ k_s\alpha_s)_{n\times s} = O_{n\times s}\,(V^T)^{-1}_{s\times s} = O_{n\times s}.$$

$$\Leftrightarrow k_i\alpha_i = 0 \ (\forall\, 1\le i\le s) \Leftrightarrow k_i = 0 \ (\forall\, 1\le i\le s)$$

$(\because \alpha_i \neq 0)$

$\therefore \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 线性无关 □

【推论】$A_{n\times n}$ 的不同特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_s$ $(s\le n)$. 代数重数依次为 $t_1, \cdots t_s$.

对应于 λ_i 的线性无关的特征向量最多 r_i 个. r_i为几何重数. $r_i \le t_i$

取一组含r_i个线性无关向量的对应于λ_i的特征向量: $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots \alpha_{ir_i}$.

则 $\alpha_{11}, \cdots \alpha_{1r_1}, \alpha_{21}, \cdots \alpha_{2r_2}, \cdots \alpha_{s1} \cdots \alpha_{sr_s}$ 也线性无关.

[证明] $\sum_{j=1}^{r_1} k_{1j}\alpha_{1j} + \sum_{j=1}^{r_2} k_{2j}\alpha_{2j} + \cdots + \sum_{j=1}^{r_s} k_{sj}\alpha_{sj} = 0.$

记 $\beta_i = \sum_{j=1}^{r_i} k_{ij}\alpha_{ij}$. 则 $\beta_1 + \cdots + \beta_s = 0$. 且 β_i是一个对应于λ_i的特征向量.

设存在 $\beta_i \neq 0$. 则至少存在j, $i\neq j$ 使 $\beta_j \neq 0$ (否则 $\sum \beta_k \neq 0$).

记所有使 $\beta_i \neq 0$ 的 i 为 $u_1, u_2, \cdots u_m$. $(m\le s)$

则 $\beta_{u_1} + \cdots + \beta_{u_m} = 0$, 即 $\beta_{u_1}, \cdots \beta_{u_m}$ 线性相关. 矛盾.

$\therefore \forall\, 1\le i\le s$, $\beta_i = 0$. 而 $\alpha_{i1}, \cdots \alpha_{ir_i}$ 线性无关. $\therefore \forall i \forall j$. $k_{ij} = 0$.

$\therefore \alpha_{11}, \cdots \alpha_{1r_1}, \alpha_{21}, \cdots \alpha_{2r_2}, \cdots \alpha_{s1} \cdots \alpha_{sr_s}$ 线性无关 □

- 相似矩阵

$\boxed{\text{相似矩阵}}$ 相似变换 $\mathcal{A}: V \longrightarrow V$, $V = F^{n\times n}$. P是可逆n阶矩阵.

$$\mathcal{A}(A) = P^{-1}AP =: B.$$

当$\mathcal{A}(A)=B$时, 称A与B相似. 记作 $A\sim B$ (只要能找到1个P即可)

~~特别地. 若能找到一个可逆n阶矩阵P 使 $\mathcal{A}(A)=P^{-1}AP=A$,~~

1) 反身性: 取$P=E$. $A=E^{-1}AE$. 即 $A\sim A$

2) 对称性: 若 $B=P^{-1}AP$. 记 $Q=P^{-1}$. 则 $B=QAQ^{-1}$ $\therefore Q^{-1}BQ=A$

即 $A\sim B \Rightarrow B\sim A$

3) 传递性: 若 $B=P^{-1}AP$, $C=Q^{-1}BQ$. 则 $C=Q^{-1}(P^{-1}AP)Q = (PQ)^{-1}A(PQ)$

即 $A\sim B$, $B\sim C \Rightarrow A\sim C$.

所以相似关系是等价关系.

$\boxed{\text{相似矩阵的性质}}$ $A\sim B$. 即: $B=P^{-1}AP$

$\boxed{\text{1) A与B有相同的特征值和特征多项式.}}$

$|\lambda E-B|=0 \Leftrightarrow |\lambda E-P^{-1}AP|=0 \Leftrightarrow |\lambda P^{-1}EP-P^{-1}AP|=0$

$\Leftrightarrow |P^{-1}(\lambda E-A)P|=0 \Leftrightarrow |P^{-1}||\lambda E-A||P|=0 \Leftrightarrow |P^{-1}||P||\lambda E-A|=0$

$\Leftrightarrow |\lambda E-A|=0$.

实际上. $|\lambda E-B|=|P^{-1}(\lambda E-A)P|=|\lambda E-A|$

即 $f_B(\lambda)=f_A(\lambda)$

2)	$tr(A)=tr(B)$. $\quad |A|=|B|$
3)	A可逆 $\Leftrightarrow$ B可逆
4)	$A^T\sim B^T$, $\quad kA\sim kB$. $\quad g(A)\sim g(B)$

5) $A_1\sim B_1$, $A_2\sim B_2$ 且 $B_1=P^{-1}A_1P$. $\quad B_2=P^{-1}A_2P$.

则 $A_1+A_2\sim B_1+B_2$

$A_1A_2\sim B_1B_2$

[证] 加法略. $\quad B_1B_2=P^{-1}A_1(PP^{-1})A_2P=P^{-1}A_1A_2P$. $\therefore A_1A_2\sim B_1B_2$

- 分块矩阵的特征值

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & & & \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{nn}\end{pmatrix}_{(\Sigma r_i)\times(\Sigma r_i)} \qquad (A_{ii})_{r_i\times r_i}.$$

$$0=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda E_{r_1}-A_{11} & & & \\ & \lambda E_{r_2}-A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda E_{r_n}-A_{nn}\end{vmatrix}=|\lambda E_{r_1}-A_{11}|\cdots|\lambda E_{r_n}-A_{nn}|$$

$$=\prod_{i=1}^{n} f_{ii}(\lambda)$$

$\therefore$ A的特征值是所有分块特征值的并集

6) $A=\begin{bmatrix}A_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & A_{nn}\end{bmatrix}$. $\quad B=\begin{bmatrix}B_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & B_{nn}\end{bmatrix}$. $\quad (A_{ii})_{r_i\times r_i}$. $(B_{ii})_{r_i\times r_i}$. $A_{ii}\sim B_{ii}$ 且 $P_i^{-1}A_{ii}P_i=B_{ii}$.

则 $A\sim B$. $\quad P^{-1}AP=B$. 其中 $P=\begin{bmatrix}P_1 & & \\ & \ddots & \\ & & P_n\end{bmatrix}$

- 矩阵对角化

[定理]*. $A=(a_{ij})_{n\times n}\in\mathbb{C}^{n\times n}$. 存在 $B\in\mathbb{C}^{n\times n}$ (上三角矩阵) 使 $B\sim A$.

~~[struck]~~ 但上三角矩阵还不够"简单" $\longrightarrow$ 最好能找到对角矩阵.

(接后页). 则 $AX=X\Lambda$.

若 $r(X)=n$. 则 $A=X\Lambda X^{-1}$. 即 $A\sim\Lambda$. 相似于对角矩阵.

若A有n个特征值(不去重)：$\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$. 对应于$\lambda_i$的特征向量为$x_i$.

若可以找到一组线性无关的x_i.

则 $A(x_1, \cdots x_n) = (\lambda x_1, \cdots \lambda x_n) = \underset{X}{\underset{\|}{(x_1, \cdots x_n)}} \underset{\Lambda}{\underset{\|}{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}}}$. ⟶ 后续见前页

称 A $\boxed{\text{可对角化}}$

$\boxed{\text{定理}}$ $\boxed{A \in \mathbb{C}^{n\times n}.\ \text{则 A 相似于对角阵} \Leftrightarrow \text{A 有 } n \text{ 个线性无关的特征向量.}}$

$\Leftarrow$：上面证了. $\Rightarrow$：$P^{-1}AP = \Lambda$. 则 $AP = P\Lambda$. 故P就是n个特向组成的矩阵.

1) A有n个不同特征值. $\Leftrightarrow$ A 可对角化

※ (可以为0)

2) $\underline{\sum \text{代数重数} = \sum \text{几何重数} = n}$ $\Leftrightarrow$ A 可对角化

$\Updownarrow$

$\forall i$ 代数重数 = 几何重数.

设 λ_1 几何 = 代数重数 $= r_1$. r_1个线性无关特征向量 $x_{11}, x_{12}, \cdots x_{1r_1}$

λ_2 $= r_2$ r_2 $x_{21}, x_{22}, \cdots x_{2r_2}$

$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$

λ_s $= r_s$ r_s $x_{s1}, x_{s2}, \cdots x_{sr_s}$

$$AX = X\Lambda \Rightarrow \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 E_{r_1} & & & \\ & \lambda_2 E_{r_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s E_{r_s} \end{pmatrix}.$$

调换顺序 ⟶ 对应着写λ_j就行.

$\boxed{r(A) = 1 \Leftrightarrow A = \alpha\beta^T_{(\alpha,\beta\neq 0)}}$

[证] $\Leftarrow$： $r(A) \leq r(\alpha) = 1$. $A \neq 0$. $r(A) \geq 1$. $\underline{r(A) = 1}$.

$\Rightarrow$：任意2阶子式都为0. ~~[illegible]~~ $\begin{vmatrix} a_{ik} & a_{il} \\ a_{jk} & a_{jl} \end{vmatrix} = 0$

$a_{ik}a_{jl} - a_{il}a_{jk} = 0$.

全不为0 $\Rightarrow$ $\dfrac{a_{ik}}{a_{il}} = \dfrac{a_{jk}}{a_{jl}}$ $\Rightarrow$ 两列对应成比例. 为0时也保持"比例"

(实际上. a_{ik}

$f(x) = (x - aE)(x - bE)$

$f(A) = 0 \Leftrightarrow A \sim \Lambda$.

• 实对称矩阵的特征值与特征向量

实对称矩阵 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. $A^T=A$.

复对称矩阵 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$. $A^H := \overline{(A^T)}$ "共轭转置" $=A$. → 对称

$\boxed{\text{[性质1.]}\quad A\in\mathbb{R}^{n\times n}.\ A^T=A \Rightarrow \lambda(A)\in\mathbb{R}}$ 即证 $\overline{\lambda(A)}=\lambda(A)$.

[证] $A\alpha=\lambda\alpha \Rightarrow \overline{A\alpha}=\overline{\lambda\alpha}=\bar\lambda\bar\alpha$. $(\alpha\neq0\Rightarrow|\alpha|\neq0)$

(α可能为复向量)

$$\bar\alpha^T A\alpha=\lambda\bar\alpha^T\alpha=\lambda|\alpha|^2$$

$$\bar\alpha^T A\alpha=\bar\alpha^T A^T\alpha=(A\bar\alpha)^T\alpha=(\overline{A\alpha})^T\alpha$$

$$=(\bar\lambda\bar\alpha)^T\alpha=\bar\lambda(\bar\alpha)^T\alpha=\bar\lambda\cdot|\alpha|^2$$

∴ $\lambda=\bar\lambda$ (∵ $|\alpha|\neq0$)

[性质2.] 实对称矩阵属于不同特征值的特征向量正交.

[证] $\cancel{\alpha_2^TA\alpha_1=\alpha_2^T\lambda_1\alpha_1=\lambda_1(\alpha_2^T\alpha_1)}$ $A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1$. $A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2$ $(\lambda_1\neq\lambda_2)$

$\cancel{\alpha_1^TA\alpha_2=\alpha_1^T\lambda_2\alpha_2=\lambda_2(\alpha_1^T\alpha_2)}$

$$\alpha_1^TA\alpha_2=\alpha_1^T\lambda_2\alpha_2=\lambda_2(\alpha_1^T\alpha_2)$$

$$\alpha_1^TA\alpha_2=\alpha_1^TA^T\alpha_2=(A\alpha_1)^T\alpha_2=(\lambda_1\alpha_1)^T\alpha_2=\lambda_1(\alpha_1^T\alpha_2)$$

∵ $\lambda_1\neq\lambda_2$. ∴ $\alpha_1^T\alpha_2=0$. 即 $(\alpha_2,\alpha_1)=0$. ∴ $\alpha_1\perp\alpha_2$

[定理] $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. $A^T=A$. 一定存在正交矩阵 $(Q^TQ=E)$
使 $Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots\lambda_n)$

[证] 归纳. $n=1$. 数. 成立 $(Q=1)$

设 $n=k-1$ 成立

$n=k$时. 取α_1为A的一个实特征向量 → 单位化.

再取$(k-1)$个与α_1线性无关的向量.

施密特正交化: $\alpha_1,\beta_2,\cdots\beta_n$.

$Q_1=(\alpha_1,\beta_2,\cdots\beta_n)$ 是正交矩阵

$\alpha_1^TA\beta_i=(A\alpha_1)^T\beta_i$
$=\lambda\alpha_1^T\beta_i=0$

$$Q_1^{-1}AQ_1=Q_1^TAQ_1=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \beta_2^T\\ \vdots\\ \beta_n^T\end{pmatrix}A(\alpha_1\ \beta_2\cdots\beta_n)=\left(\begin{array}{c|c}\lambda_1 & 0\\ \hline 0 & B_1\end{array}\right)$$

其中 B_1 必为实对称矩阵. $(\beta_i^TA\alpha_1=\lambda_1\beta_i^T\alpha_1=0.)$

B_1可对角化. 设 $Q_2^TB_1Q_2=\Lambda$.

$Q=Q_1Q_2\Rightarrow(Q_1Q_2)^{-1}AQ_1Q_2=\Lambda$.

将实对称矩阵对角化

1. 求特征值.
2. 依次找特征向量. 同一特征值的多个线性无关特征向量要正交化 还要单位化

放一起 → Q.

实二次型

- 二次型

$\boxed{(n元)二次型}$：称含 n 个变量 $x_1, \cdots x_n$ 的二次齐次函数. 所有项的次数都是2

复二次型

$\boxed{实二次型}$

$$f(x_1, \cdots x_n) = b_{11}x_1^2 + \underline{b_{12}x_1x_2} + b_{13}x_1x_3 + \cdots + b_{1n}x_1x_n$$

("$b_{121}x_1x_2 + b_{122}x_2x_1$")

$$+ b_{22}x_2^2 + b_{23}x_2x_3 + \cdots + b_{2n}x_2x_n$$

$$+ \cdots$$

$$+ b_{nn}x_n^2$$

只含平方项：标准二次型

其中：$a_{ii}=0$ 或 ±1：规范二次型（先是标准）

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \leftarrow$$

$$= b_{11}x_1^2 + \frac{1}{2}b_{12}x_1x_2 + \frac{1}{2}b_{13}x_1x_3 + \cdots + \frac{1}{2}b_{1n}x_1x_n$$

$$+ \frac{1}{2}b_{12}x_2x_1 + b_{22}x_2^2 + \frac{1}{2}b_{23}x_2x_3 + \cdots + \frac{1}{2}b_{2n}x_2x_n$$

$$+ \frac{1}{2}b_{13}x_3x_1 + \frac{1}{2}b_{23}x_3x_2 + \cdots$$

$$\vdots$$

$$+ \frac{1}{2}b_{1n}x_nx_1 + \frac{1}{2}b_{2n}x_nx_2 + \cdots + b_{nn}x_n^2$$

($a_{ij}=a_{ji}$ 实对称矩阵)

$$A = A^T$$

$$= x^T A x. \qquad x = (x_1, \cdots x_n)^T$$

因此 实二次型 与 实对称矩阵 一一对应.

一定可以对角化 $\leftarrow$ A 被称为 $\boxed{实二次型矩阵}$.

$\boxed{实二次型的秩}$ $r(f) = r(A)$.

$\boxed{非奇异(非退化)线性替换}$ $x = Py$. P为可逆矩阵.

本质：坐标变换 $P \overset{对应}{\sim}$ 线性变换 P

则 $f(x) = x^TAx$.

$$f(Py) = y^T \underbrace{P^TAP}_{\Lambda} y = y^T\Lambda y.$$

如果取P为使A相似对角阵的正交矩阵

因此给定一个实二次型，都可将其化为标准二次型

且新二次型矩阵与原矩阵合同且相似.

$$B = (b_{ij})_{n\times n}. \quad b_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a_{ii}}} & (i=j,\ a_{ii}\neq 0) \\ 0 & (i=j,\ a_{ii}=0) \\ 0 & (i\neq j) \end{cases} \Rightarrow B^TAB = (c_{ij})_{n\times n}. \quad c_{ij} = \pm1 / 0$$

再调一调顺序（一个初等矩阵 R）$\Rightarrow R^TB^T\Lambda BR = \begin{pmatrix} E_r & & \\ & -E_p & \\ & & 0 \end{pmatrix}$. $(x = PBRz)$

故 标准二次型可经合同变换变为规范二次型

- 实二次型转化为规范二次型

① 找正交矩阵Q对角化实二次型矩阵. 再将标准二次型化规范二次型

② 配方法 $\begin{cases} 加一项减一项 \\ x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \end{cases}$ $\to$ 产生平方项

有平方项 / 正常配方

无平方项

标准二次型

* 结果不唯一

• 惯性定理

虽然只要 $a_{ii}=\pm1$ 或0，$a_{ij}=0\ (i\neq j)$ 就可以称为规范二次型.

但我们这里认为 $f(x)=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_r^2-x_{r+1}^2-\cdots-x_p^2\quad(p\leq n)$ 为规范二次型.

由此一来，有

$\boxed{\text{惯性定理}}$ 任何实二次型必存在非奇异线性替换化二次型为规范标准型.
且规范标准型是唯一的.

规范标准型 $\begin{pmatrix} E_r & & \\ & -E_{p-r} & \\ & & O_{(n-p)\times(n-p)} \end{pmatrix}$. 显然有 $\underbrace{r}_{\boxed{\text{正惯性指数}}}+\underbrace{p-r}_{\boxed{\text{负惯性指数}}}=p=r(f)$

记 $f(x)=x^TAx$. 正惯性指数 p. 负惯性指数 q. $\boxed{\text{符号差}}$: $p-q$.

1) $\exists x_1$ 使 $x_1^TAx_1>0 \Rightarrow p>0$ （即$\exists y_1$ 使 $y_1^T\begin{pmatrix} E_p & & \\ & -E_q & \\ & & 0\end{pmatrix}y_1>0$）

2) $\exists x_2$ 使 $x_2^TAx_2<0 \Rightarrow q>0$

3) $\exists x_0$ 使 $x_0^TAx_0=0$. （$\because \exists y_0=(\underbrace{1,0,0,\cdots 0}_{p个},\underbrace{1,0,0\cdots 0}_{q个},\underbrace{0\cdots 0}_{n-p-q个})^T$ 使 $y_0^TP^TAPy_0=0$.
$x_0=Py_0$ 即可.）

$x\neq0$. 可逆变换P. $x=Py \Rightarrow y\neq 0$.

$A\sim E_{n\times n}$: 所有特征值均为正.

$x^TAx=$ $y^TEy=y^Ty>0$. $(y\neq0)$ A: $\boxed{\text{正定矩阵}}$ ↑ $\boxed{\text{正定二次型}}$ $p=n$

$A\sim -E_{n\times n}$: 所有特征值均为负

$x^TAx=y^T(-E)y=-y^Ty<0\quad(y\neq0)$ $\boxed{\text{负定二次型}}$ $q=n$

不定且可逆 $A\sim\begin{pmatrix}E_p & \\ & -E_q\end{pmatrix}$: 存在$x_1$. x_2 $x_1^TAx_1>0$. $x_2^TAx_2<0$ $\boxed{\text{不定二次型}}$ $p+q=n$ $(p\neq0,q\neq0)$

不定且不可逆 $A\sim diag(E_p,-E_q,0)$ $x_3\rightarrow x_3^TAx_3=0$ $p+q<n$ $(p\neq0,q\neq0)$

$A\sim\begin{pmatrix}E_p & \\ & 0\end{pmatrix}$: $x^TAx\geq0$ （可以 $0_{0\times0}$）包括正定~ $\boxed{\text{半正定二次型}}$ $q=0$. $p<n$

$A\sim\begin{pmatrix}-E_q & \\ & 0\end{pmatrix}$: $x^TAx\leq0$ （可以 $0_{0\times0}$）包括负定~ $\boxed{\text{半负定二次型}}$ $p=0$. $q<n$

非奇异线性替换 ⟶ 秩. 负(正)(零) 惯性指数不变.

[合同] $B=P^TAP$

* 特征值只有在正交变换时不变

vs [相似] 秩. 特征值. p. q. $n-r$ 都不变 ⟵ 更强 $B=P^{-1}AP$

n阶实对称矩阵A 正定 $\Leftrightarrow$ $0\notin\{\lambda\}_A$ $\Leftrightarrow$ $p_A=n$ $\Leftrightarrow$ $A=P^TP$ $\Leftrightarrow$ 存在M. $r(M)=n$.

且$\lambda\in\{\lambda_A\}$ $\lambda>0$ $A=M^TM$

判断正定矩阵：1) 用定义　　e.g. A, B 正定 $\longrightarrow A+B$ 正定

2) 化二次型为标准型.（正交矩阵 / 配方 / 初等变换）

$\uparrow$

左乘是行变换、右乘是列变换

对应初等矩阵之积 $\longrightarrow$ 可逆！

- 顺序主子式

$\boxed{\text{顺序主子式}}$ 令 $A=(a_{ij})_{n\times n}$　称行列式 $|a_{ij}|_{k\times k}$ $(1\le k\le n)$ 为 A 的顺序主子式

$\boxed{\text{定理}}$ 实二次矩阵 A 正定（实二次型 f 正定）$\Longleftrightarrow$ A 的所有顺序主子式全大于 0.

[证明] $\Rightarrow$：记 $x=(x_1\cdots x_k\ 0\cdots 0)^T=\begin{pmatrix}\tilde{x}\\0\end{pmatrix}$　（$\exists i$. $x_i\ne 0$）

$$A=\begin{pmatrix}(a_{ij})_{k\times k} & (a_{i,k+j})_{k\times(n-k)}\\ (a_{k+i,j})_{(n-k)\times k} & (a_{k+i,k+j})_{(n-k)\times(n-k)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tilde{A}_k & B\\ C & D\end{pmatrix}$$

$$f(x_1,\cdots x_k,0\cdots 0)=(\tilde{x}^T,\ 0^T)\begin{pmatrix}\tilde{A}_k & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{x}\\0\end{pmatrix}=\tilde{x}^T\tilde{A}_k\tilde{x}>0.$$

任意非零.

$\therefore \tilde{A}_k$ 是正定阵 $\Rightarrow |\tilde{A}_k|>0$.

$\Leftarrow$：数学归纳法.

1阶：成立.（1阶就是数　$x^TAx=Ax^2>0$）

设对 $n-1$ 阶成立. 即 A_{n-1} 正定.

$$\text{记 } A=\left(\begin{array}{c|c}A_{n-1} & \alpha\\ \hline \alpha^T & a_{nn}\end{array}\right)\xrightarrow{\text{初等变换}}\begin{pmatrix}A_{n-1} & 0\\ 0 & a_{nn}-\alpha^TA_{n-1}^{-1}\alpha\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}E & 0\\ -\alpha^TA_{n-1}^{-1} & 1\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}A_{n-1} & \alpha\\ \alpha & a_{nn}\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}E & 0\\ -\alpha^TA_{n-1}^{-1} & 1\end{pmatrix}}_{=:P}$$

则 $|A|=|A_{n-1}|(a_{nn}-\alpha^TA_{n-1}^{-1}\alpha)>0$.（$\because A$ 所有顺序主子式大于 0）

$\therefore a_{nn}-\alpha^TA_{n-1}^{-1}\alpha>0$.

$$\forall x=\begin{pmatrix}\beta_{(n-1)\times 1}\\ x_n\end{pmatrix}\ne 0.\quad \text{则 } x^TP^TAPx=x^T\begin{pmatrix}A_{n-1} & 0\\ 0 & a_{nn}-\alpha^TA_{n-1}^{-1}\alpha\end{pmatrix}x$$

$$=\beta^TA\beta+(a_{nn}-\alpha^TA_{n-1}^{-1}\alpha)x_n^2>0.$$

$\therefore P^TAP$ 正定. $\longrightarrow$ A 正定（惯性定理）

$\square$

巧用内积. $B^TBx=0$ 与 $Bx=0$ 同解. $\leftarrow$ 显然

$\rightarrow$: $x^TB^TBx=0$ 即 $(Bx,Bx)=0 \Leftrightarrow Bx=0$

$x\neq 0 \Rightarrow x^TB^TBx\neq 0$ 即 $(Bx,Bx)\neq 0$