上 海 交 通 大 学 试 卷（A卷）

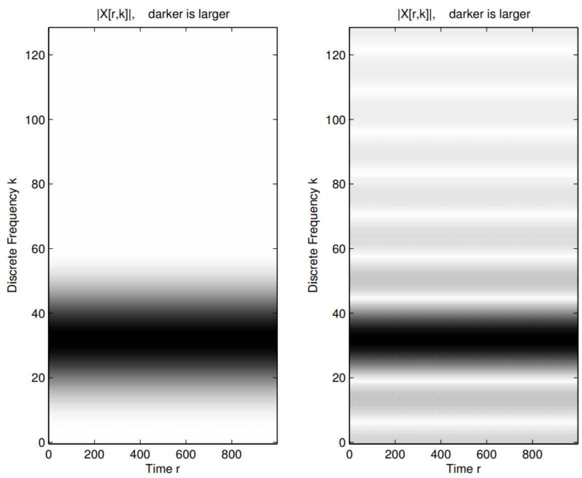
(2021至 2022学年 第 2 学期)

班级号 ____________ 学号 ____________ 姓名 ________

课程名称 AI2619 数字信号与图像处理 成绩 ________

本次考试总计7题，共100分。

1. (15%) 已知一输入余弦信号$x(t) = \cos(\omega t)$。我们使用采样间隔$T = 2$秒对其进行采样，并获得其对应的离散序列$x[n]$, $n = 0, ..., 9999$。进而通过计算$x[n]$的短时傅里叶变换$X[r, k]$来分析其时频特性。其中，窗长L设为20，步长R为10，DFT的长度N为256。我们使用两种不同的窗函数（矩形窗和Hamming窗）来计算短时傅里叶变换，所得到的$|X[r, k]|$, $k = 0, 1, ..., 128$如下图所示。**注：深色代表数值大，浅色代表数值小。**



(a). 请问哪张图使用了矩形窗进行计算，哪张使用了Hamming窗？请解释判断的依据。

(b). 请估算出上图中的余弦信号的频率ω。注：可以有误差，但需要给出详细的估算步骤。

(c). 请问满足上图的频率ω是否唯一？如果是，请给出理由。如果不是，请给出所有可能的ω。

提示：

- 短时傅里叶变换的公式由下式给出，

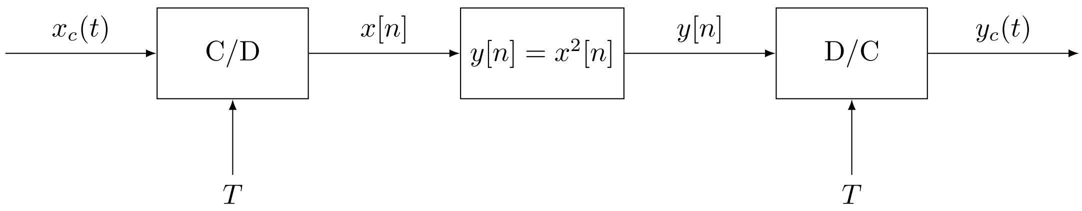
$$x[rR, k] = \sum_{m=0}^{L-1} x[rR + m]w[m]e^{-j2\pi km/N}$$

我承诺，我将严格遵守考试纪律。

承诺人：________

题号										
得分										
批阅人(流水阅卷教师签名处)										

2. (10%) 现有一信号处理系统如下图所示。其中，C/D转换器和D/C转换器均为理想器件。假定输入信号为$x_c(t) = A\cos(30\pi t)$且采样频率$f = 1/T = 40$ Hz。



(a). 请分别画出$x_c(t)$，$x[n]$，$y[n]$和$y_c(t)$的频谱，并清楚地标注频谱分量的位置和高度。

(b). 请问本系统输出的$y_c(t)$等于多少？是否等于$x_c^2(t)$？并解释为什么。

提示：

- 傅里叶变换的公式由下式给出，

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt$$

- 离散时间傅里叶变换的公式由下式给出，

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-j\omega k}$$

3. (15%) 考虑一幅大小为256×256、具有32级灰度（$0\sim31$共32级）的二维灰度图像$f(x,y)$。该图像的灰度值由下式给出

$$f(x,y)=\begin{cases}29 & 0\le x,y\le 11\\ 30 & 12\le x\le 15, 0\le y\le 15\text{或}0\le x\le 15, 12\le y\le 15\\ 31 & \text{其他位置}\end{cases}$$

(a). 请在下面的方框中画出$f(x,y)$的草图（不需要严格按照比例，需要时标出坐标就可以），并对其视觉效果（主要是强度）进行**简单**的评价。

(b). 请计算并画出$f(x,y)$的直方图。

(c). 请对$f(x,y)$进行全局的直方图均衡化，写出均衡化后的结果。(均衡化结果四舍五入)

(d). 请对$f(x,y)$进行局部的直方图均衡化，写出均衡化后的结果。特别地，我们在操作时将整张图片从原点开始分割成若干个互不重叠的、大小为16×16的图像块，来进行直方图均衡。

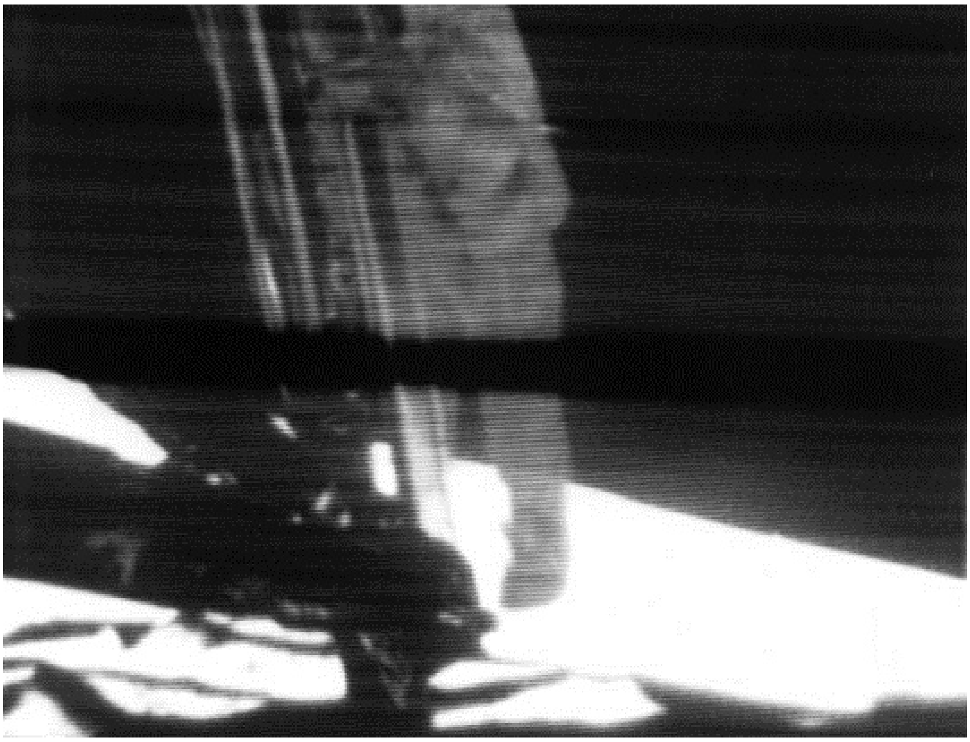
(e). 请对上述两种方法所得到的结果进行简单的对比和评价。

提示：

- 离散图像的直方图均衡化由下式给出，

$$s_k=T(r_k)=(L-1)\sum_{j=0}^{k}p_j(r_j)$$

4. (15%) 慢扫描电视（slow scanning television，简写作SSTV）是一种使用无线电波来传输图像信息的一种技术。在人类早期探索太空的过程中，曾经被广泛用作视频实时回传的方法。下图是阿波罗11号于1969年7月20日登月时发送回NASA的照片。



(a). 上图中有着明显的横向条纹结构，请问该结构的频谱是什么样的？（即求该结构的二维傅里叶变换）

(b). 请设计一种方法能够在不影响图片其他信息的情况下，去除横向条纹。

(c). 除此之外，已知该图片在拍摄过程中还受到了光学退化的影响。假设该退化可由高斯模糊和加性噪声来进行建模，即

$$g(x,y) = f(x,y) * h(x,y) + n(x,y) \tag{1}$$

其中，$f(x,y)$为退化前的图像，$g(x,y)$为退化后的图像，$h(x,y)$为退化核而$n(x,y)$为加性噪声。试问该退化过程是否可以使用逆滤波（广义逆滤波，可以包含各种形式）来进行复原。如果可以，请给出逆滤波的表达式；如果不可以，请给出理由。

5. (15%) 快速傅里叶变换(FFT)是一种计算DFT的高效算法。

(a). 请简要写出(I)FFT的算法思想、(II)算法复杂度及(III)推导过程。特别地，请说明FFT是利用了DFT中的哪一条（或几条）性质从而达到了简化算法复杂度的目的。

(b). 请画出使用FFT算法计算$x[n] = \{x_0, x_1, ..., x_7\}$的8点DFT的信号流图。注：信号流图的输入需按顺序排列，也就是按照$x[0]$到$x[7]$依次排列。

(c). 在上一问中所获得的信号流图中，始于$x[7]$而止于$X[2]$的路径有多少条？请问该结论是否有一般性并说明理由？（即，是否每个$x[n]$与$X[k]$之间均有这么多条路径？）

6. (15%) 试考虑如下的一个数字滤波器，它的传输函数由下式给出，

$$H(z)=\frac{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})}{(1-1.25z)(1-\frac{1}{4}z)}$$

(a). 请通过填空或者选择的方法完成下面这句话

这是一个_____阶_____（A. 线性相位 B. 非线性相位）_____（A. FIR B. IIR）_____（A. 低通 B. 高通 C. 带通 D. 带阻 E. 全通）滤波器。

(b). 请画出该滤波器的零极点图。

(c). 请问该滤波器是否能分解为一个最小相位系统和一个全通系统级联的形式？若可以，请分别写出对应系统的传输函数。若不能，请写明理由。

(d). 请问为什么我们要把一个滤波器分解为一个最小相位系统和一个全通系统级联的形式？

(e). 请分别画出该滤波器的幅度-频率响应、相位-频率响应和群延时，并标注出必要的细节。

7. (20%) 已知两个长度为4的序列$x[n]$和$h[n]$，其定义如下，

$$\begin{aligned} x[n] &= \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right), \quad && n = 0,1,2,3. \\ h[n] &= 2^n, && n = 0,1,2,3. \end{aligned}$$

(a). 计算序列$x[n]$的4点DFT;

(b). 计算序列$h[n]$的4点DFT;

(c). 请根据定义直接计算$x[n]$和$h[n]$的4点循环卷积$y_c[n] = x[n]④h[n]$和线性卷积$y_l = x[n] * h[n]$;

(d). 请利用卷积定理重新计算(c)中的$y_c[n]$和$y_l[n]$，并写出完整的步骤;

(e). 我们知道增加DFT计算时的点数相当于提高所得到的频谱的数字分辨率。假设我们现在保持原序列$x[n]$和$h[n]$的长度不变，但在应用卷积定理时改变DFT计算的点数为8。试问此时对应的循环卷积的点数是多少，并解释该循环卷积在时域上是怎么操作的。注：可使用代数或画图形式说明。

提示：

- N点DFT的定义由下式给出，

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \tag{2}$$

- 卷积定理,

$$y[n] = x[n] Ⓝ h[n] = \mathrm{DFT}^{-1}\left\{\mathrm{DFT}_N\{x\} \cdot \mathrm{DFT}_N\{h\}\right\} \tag{3}$$