Probability Theory and Mathematical Statistics 概率统计

Homework 0913/0916

邱一航 520030910155

9/13 周三

1-1. (1) 解: $\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

(2) 解: $\Omega = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

(3) 解: $\Omega = \{(t_1, t_2) \mid 0 \le t_1 < 24,\ 0 \le t_2 < 24\}$ 其中t_1, t_2分别表示两艘船的到达时刻

(4) 解: $\Omega = \{0, 1, 2, \cdots, n\}$

(5) 解: $\Omega = \{0, 1000, 2000, \cdots, 10\,000\,000\}$ □

1-2. 解: (1) $A\bar{B}\bar{C}$ (2) $AB\bar{C}$ (3) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ (4) $\overline{ABC}$ (5) $A \cup B \cup C$ □

1-7. 解: (1) 基本事件共有: $P_{10}^2 = 10 \times 9 = 90$ (个)

甲抽到选择题，乙抽到判断题包含的基本事件共有 $6 \times 4 = 24$ (个)

记该事件为A_1

$$P(A_1) = \frac{6 \times 4}{10 \times 9} = \frac{4}{15}.$$ □

(2) 记至少一人抽到选择题这一事件为 A_2.

该事件包含的基本事件共有 $90 - 4 \times 3 = 78$ 个

$$P(A_2) = \frac{78}{90} = \frac{13}{15}$$ □

1-8. 解: 样本空间共 C_n^k 个基本事件.

(1) 记这k张中没有一张有奖这一事件为A_1.

$$P(A_1) = \frac{C_{n-m}^k}{C_n^k}$$ □

(2) 记这k张中多于两张有奖这一事件为 A_2.

$\cancel{P(A_2)=}$

$$P(A_2)=\frac{C_n^k-C_{n-m}^k-mC_{n-m}^{k-1}-C_m^2C_{n-m}^{k-2}}{C_n^k}\qquad\square$$

1-10. 解：样本空间共 n^k 个基本事件

(1) $P(A)=\dfrac{P_n^k}{n^k}=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}=\dfrac{(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^{k-1}}$ $\square$

(2) $P(B)=\dfrac{C_k^r\cdot(n-1)^{k-r}}{n^k}$ $\square$

(3) $P(C)=\dfrac{\sum_{i=r}^{k}C_k^i(n-1)^{k-i}}{n^k}$ $\square$

1-11. 解：记甲在 9:00 ~ 9:05 到达为事件 A_0，在 9:05 ~ 9:10 到达为 A_1，……

在 9:15 ~ 9:20 到达为事件 A_3. 则 $P(A_i)=\frac{1}{4}$ $(i=0,1,2,3)$

记乙在 9:00 ~ 9:05 到达为事件 B_0，…… 在 9:15 ~ 9:20 到达为事件 B_3.

则 $P(B_i)=1/4$ $(i=0,1,2,3)$

(1) 此时甲乙同乘一班车可表示为 $A_0B_0\cup A_1B_1\cup A_2B_2\cup A_3B_3$.

$$P(A_0B_0\cup A_1B_1\cup A_2B_2\cup A_3B_3)=P(A_0)P(B_0)+P(A_1)P(B_1)+P(A_2)P(B_2)+P(A_3)P(B_3)=1/4\qquad\square$$

(2) 此时甲乙同乘一班车可表示为 $\overline{A_0B_2\cup A_2B_0\cup A_1B_3\cup A_3B_1}$

$$P(\overline{A_0B_2\cup A_2B_0\cup A_1B_3\cup A_3B_1})=1-P(A_0)P(B_2)-P(A_2)P(B_0)-P(A_1)P(B_3)-P(A_3)P(B_1)$$

$$=1-\frac{1}{16}\times4=\frac{3}{4}.\qquad\square$$

1-补充题1.

解：将第i次抽到的数字放进编号i的盒子. 样本空间共有 $N!$ 个基本事件.

第i次抽到 y_j $(j\in\{1,2,\cdots,N\})$ 这一事件包含的基本事件共有 $(N-1)!$ 个.

概率为 $\dfrac{(N-1)!}{N!}=1/N$. $\square$

9/17

1-6. 解: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) =$ [redacted] 0.625 □

$P(\bar{A}B) = P($[redacted]$\bar{A}B \cup AB) - P(AB) + P(\bar{A}B \cap AB)$

$= P(B) - P(AB) = 0.375$ □

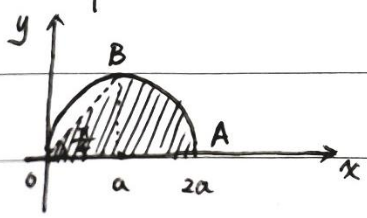
[redacted]

$P(\overline{AB}) = 1 - P(AB) = 0.875$ □

$(A \cup B)(\overline{AB})$ [redacted] $= (A\overline{AB}) \cup (B\overline{AB}) = (A - AB) \cup (B - AB)$

$\therefore P[(A \cup B)(\overline{AB})] = P(A) - P(AB) + P(B) - P(AB) = 0.5.$ □

1-12. 解: $O(0,0)$ $A(2a,0)$ $B(a,a)$, 则$\angle BOA = \frac{\pi}{4}$



记"原点到某点的连线与x轴夹角小于$\frac{\pi}{4}$"为事件A.

$$P(A) = \frac{S_{OBA}}{S_{半圆}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot a\cdot a + \frac{1}{4}\pi a^2}{\frac{1}{2}\pi a^2} = \frac{2+\pi}{2\pi}$$ □

1-15. 解: 记"4枚骰子点数中有2"为事件A, "4枚骰子点数各不相同"为事件B.

所求即 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$

$P(B) = \frac{P_6^4}{6^4}$ $P(AB) = \frac{C_4^1 P_5^3}{6^4}$ □

$\therefore P(A|B) = \frac{2}{3}$

-16. 解: (1) 记"前(k−1)个人没抽到特等奖"为事件A, "第k个人抽到特等奖"为事件B.

$P(B|A) = \frac{1}{n-k+1}$ □

(2) $P(B) = \frac{1}{n}$ □

(当且仅当 $A\cup B=\Omega$ 时取等)　　　　(当且仅当 $A\subseteq B$ 取等)

1-补充题周四-1. 解: $P(A\cup B)\leqslant 1$　　　$P(A\cup B)\geqslant \max\{P(A),P(B)\}=0.7$

$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$　　$\therefore$　$0.3\leqslant P(AB)\leqslant 0.6$

$\therefore$ $P(AB)$ 的最小值为 0.3 (当 $A\cup B=\Omega$ 时取到) □

最大值为 0.6 (当 $A\subseteq B$ 时 取到) □

1-补充题周四-2. 解: 所求为 $P(A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C)$

$$P(A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C)=P(A)+P(B)+P(C)-2P(AB)-2P(BC)-2P(AC)+5P(ABC)=\frac{3}{4}-0-\frac{1}{3}+0=\frac{5}{12}$$ □

1-补充题周四-3.

解: $$P(AB|\bar{C})=\frac{P(AB\bar{C})}{P(\bar{C})}=\frac{P(AB)-P(ABC)}{1-P(C)}=\frac{\frac{1}{2}-0}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}$$ □

($\because$ A 与 C 互不相容, $\therefore$ $AC=\varnothing$. $\therefore$ $ABC=\varnothing$. $\therefore$ $P(ABC)=0$)