数学分析

邱一航

数分I

集合与映射

数列极限

函数极限与连续函数

微分

微分中值定理

不定积分

定积分

反常积分

数项级数.

集合与映射 (9/14—9/16)

- 集合 (至今没有明确精准定义)

Cantor 发明

$\boxed{\text{罗素悖论}}$

通常定义1. 具有某种特定性质的事物的总体. $\boxed{\text{简称"集"}}$

空集 ϕ.

$\boxed{\text{元素}}$ $\boxed{\text{("元")}}$

记作 $a \in M$. (元素 $\in$ 集合)

不属于: $a \notin M$. 或 $a \overline{\in} M$

当 M 为数集时, 用 $\boxed{M^+}$ 表示排除 0 和负数后的集合.

表示方法: 列举法 $A=\{a_1, \cdots a_n\} = \{a_i\}_{i=1}^{n}$; $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\} = \{n\}$.

描述法 $\mathbb{Z} = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ 或 } -x \in \mathbb{N}^+\}$ $\quad \mathbb{Q} = \{x \mid x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^+, (p,q)=1\}$.

$\boxed{\text{邻域}}$

点的 δ 邻域: a 的 δ 邻域为 $U(a,\delta) = (a-\delta, a+\delta)$ $\quad \{x \mid |x-a| < \delta\}$

去心 δ 邻域 $\mathring{U}(a,\delta) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$

$\boxed{a: \text{中心}}$ $\quad \boxed{\delta: \text{半径}}$

$\boxed{\text{子集; 包含}}$ 有集合 A, B. $\forall x \in A$ 必有 $x \in B$. 则 $A \subset B$.

$\boxed{A \subset B \text{ 且 } B \subset A \Rightarrow A = B.}$

显然有 $A \subset A$. $A = A$. $\phi \subset A$. 传递性 (~~[illegible]~~) $A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$.

"包含"是一个序关系

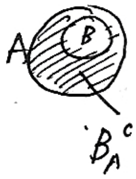
~~[illegible]~~.

$\boxed{\text{集合运算}}$ 并集 $A\cup B$. 交集 $A\cap B$.

差集 $A\setminus B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}$

余集: $= A\setminus B$ (其中 $B\subset A$)

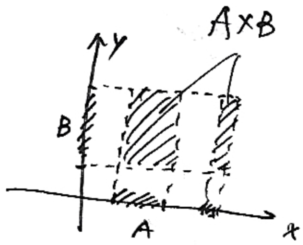
B_A^c ($\complement_A B$)



直积: $A\times B=\{(x,y)\mid x\in A,\ y\in B\}$

又称 笛卡尔乘积

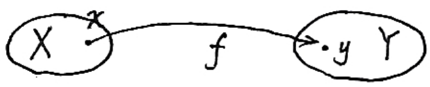
↑ 二元集合



$\mathbb{R}\times\mathbb{R}\xrightarrow{\text{记}}\mathbb{R}^2$ (整个平面) $\longrightarrow\mathbb{R}^3$: 整个空间

- 映射与函数

$\boxed{\text{映射}}$ 设 X、Y 为两个非空集合. 若存在一个对应规则 f, s.t. $\forall x\in X$, 有唯一确定的 $y\in Y$ 与之对应, 则称 f 为从 X 到 Y 的映射. 记作: $f: X\to Y$.



× 有多个 y 对应 — 集合映射.

y: x 在 f 下的像. 记作 $y=f(x)$

x: y 在 f 下的原像.

集合 X 为 f 的定义域. Y 的子集 $R_f=f(X)=\{f(x)\mid x\in X\}$ 为 f 的值域.

($\forall x\in X$!)

映射三要素 $\begin{cases}\text{定义域}\\ \text{对应规则}\\ \text{值域}\end{cases}$ 注意: x 的像 y 唯一, y 的原像不一定唯一

☆ 特别地, 称 f 为满射: 当 $f(X)=Y$.

f 为单射: $\forall x_1,x_2\in X$, $x_1\neq x_2$, 有 $f(x_1)\neq f(x_2)$

f 为双射或一一映射: f 为满射也为单射

☆ 映射又称算子.

$X(\neq\emptyset)\xrightarrow{f}Y$ (数集) f 称为 X 上的 $\boxed{\text{泛函}}$

$X(\neq\emptyset)\xrightarrow{f}X$ f 称为 X 上的 $\boxed{\text{变换}}$

X (数集或点集) $\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ 实函数

$X(\cdots\cdots)\xrightarrow{f}\mathbb{C}$ 复函数

- 有限集、无限集、可列集

$\boxed{\text{有限集}}$（元素个数有限）：可以和数列集合 $\{1,2,3,\cdots,n\}$ 建立一一对应关系的集合.
（n 为给定的非负整数）

$\boxed{\text{无限集}}$：不是有限集的集合.

✱ 可以与它的真子集建立一一对应关系的集合.

$\boxed{\text{可列集}}$：可以与自然序列 $\{1,2,3,\cdots\}$ 建立一一对应关系的集合.　　＊可以数一数的
（可数集）　~~若集合是无限集~~，"不可列集"或"不可数集".

定理 $\left\{\begin{array}{l}\boxed{\text{可列个可列集合的并集还是可列集.}}\\ \boxed{\text{有理数集合是可列集.}}\end{array}\right.$

证明：选取1个可列集合 a_1，可以作：

$a_{1,1}\quad a_{1,2}\quad a_{1,3}\quad\cdots$

同样地，其余集合可排列为

$$\begin{array}{cccc} a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots\\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

按照蓝线排列可形成一列.
故可列个可列集合的并集还是可列集

也可以

$$\begin{array}{ccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3}\\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{array}$$

证明：任一有理数可表示为 $\frac{p}{q}$.
p 的取值（$\mathbb{Z}$）是可列集.
q 的取值（$\mathbb{N}^{+}$）也是可列集
并集：可列集.

＊$\mathbb{Z}$ 是可列集：$0,1,-1,2,-2,3,-3,\cdots\cdots$

$\boxed{\text{无理数集合是不可列集；实数集合是不可列集}}$

- 函数

$\boxed{\text{函数}}$　设数集 $D\subset R$. 称 $f: D\to R$ 为函数

记 $y=f(x)$，$x\in D$ ← 定义域
y：因变量　x：自变量

$R_f=f(D)$：值域

函数图形：$C=\{(x,y)\mid y=f(x),\ x\in D\}$

$\boxed{\text{定义域}}$　使表达式或实际问题有意义的自变量集合.

$\boxed{\text{函数的几种特性}}$

$\boxed{\text{有界函数}}$：$\forall x\in D$. $\exists M>0$ 使 $|f(x)|\le M$. 称 $f(x)$.
$I\subset D$. … I　　- - -　　称 $f(x)$ 在 I 上有界

有界 $\Leftrightarrow$ 又有上界. 又有下界.

$\boxed{\text{单调性}}$　$\forall x_1,x_2\in I$.（$I\subset D$）. $x_1\le x_2$ 时　$f(x_1)\le f(x_2)$
称 $f(x)$ 为 I 上单调增函数

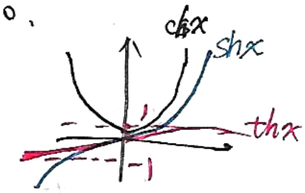
一般不说明时，"单调"
默认严格单调

若去掉等号（$x_1<x_2$ —— $f(x_1)<f(x_2)$）　严格单调增函数

$\boxed{\text{奇偶性}}$ 偶函数：$\forall x\in D$，且有 $-x\in D$，若 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$，

奇 $f(-x)=-f(x)$

若 $f(x)$ 在 $x=0$ 有定义，$f(x)$ 奇，必有 $f(0)=0$。



记 $y=f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=\mathrm{ch}\,x$ 双曲余弦

$y=f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=\mathrm{sh}\,x$ 双曲正弦

$\dfrac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\mathrm{th}\,x$ ~~双曲正弦~~

$\boxed{\text{周期性}}$ $\forall x\in D$，$\exists\, l>0$，$x\pm l\in D$，若 $f(x\pm l)=f(x)$ 则称 $f(x)$ 周期函数

称 l 为周期（一般为最小正周期）

周期函数不一定有最小正周期。如：$f(x)=\text{const}$。 Dirichelet：$f(x)=\begin{cases}0 & (x\notin \mathbb{Q})\\ 1 & (x\in\mathbb{Q})\end{cases}$

- 反函数与复合函数

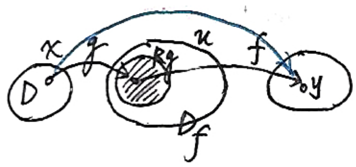
若 $f: D\to f(D)$ 为单射，则 $\exists$ 新映射 $f^{-1}: f(D)\to D$，使 $\forall y\in f(D)$，$f^{-1}(y)=x$，其中 $f(x)=y$。

则称 f^{-1} 为 f 的 $\boxed{\text{反函数}}$。

习惯上记 $y=f(x)$，$x\in D$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$，$x\in f(D)$

性质 $\begin{cases} y=f(x)\ \uparrow \text{或} \downarrow, \quad \text{则 } y=f^{-1}(x)\ \uparrow \text{或}\downarrow \\ y=f(x) \text{ 与 } y=f^{-1}(x) \text{ 关于直线 } y=x \text{ 对称。}\end{cases}$

$*\ P(a,b)\longrightarrow Q(b,a)$



$\boxed{\text{复合函数}}$：设有函数链 $y=f(u)$，$u\in D_f$，

$u=g(x)$，$x\in D$ $\boxed{\text{且 } R_g\subset D_f}$

则 $y=f[g(x)]$，$x\in D$ 称为 f 与 g 的 $\boxed{\text{复合函数}}$，u 称为 $\boxed{\text{中间变量}}$。

也可记作 $f\circ g(x)$。

- 初等函数

$\boxed{\text{基本初等函数}}$：常值(数)函数，幂函数 $(x^a, a\in\mathbb{R})$，指数函数 $(a^x,\ a>0 \text{且} a\neq 1)$

对数函数，三角，反三角。

$\boxed{\text{初等函数}}$：由常数及基本初等函数经过有限次四则运算和复合步骤构成并可用一个式子表示的函数，

如：$y=\begin{cases}x & (x\geq 0)\\ -x & (x<0)\end{cases}$ 即 $y=(x^2)^{\frac{1}{2}}$。

$\boxed{\text{非初等函数}}$：其它函数。

$\mathrm{sgn}\,x=\begin{cases}1 & (x>0)\\ 0 & (x=0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$

$y=[x]=n$, 当 $n\leqslant x<n+1$, $n\in\mathbb{Z}$

• 重要不等式

$$||a|-|b||\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$$

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\geqslant\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$$ (数归)

数列极限

• 实数系的连续性

实数. 有理数. 无理数. 最大数. 最小数

$\boxed{\text{上确界}}$: 一个集合的最小上界. $\boxed{\text{下确界}}$ ~ $\inf A$

$\beta=\sup A$ 被定义为如下的数:

(1) $\forall a\in A$, 有 $a\leqslant\sup A$; (是上界)

(2) $\forall\varepsilon>0$, $\exists a\in A$. s.t. $a>\sup A-\varepsilon$ (是最小)

$\boxed{\text{确界原理}}$: 非空有上(下)界的数集必有上(下)确界.

定理: 非空有界数列的上(下)确界唯一. (反证可证)

证明 → $x=[x]+\{x\}$. ——→ 依次取一个子集. ⇒ $\overline{\alpha_0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\cdots\cdots}=\beta$ 再证 β 是上(下)确界

• 数列

$\boxed{\text{数列}}$: 自变量取正整数的函数. 记作 $x_n=f(n)$. 或 $\{x_n\}$.

通项(一般项)

$\boxed{\text{数列极限}}$: $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}^*$. 使 $n>N$ 时总有 $|x_n-a|<\varepsilon$. 称 a (常数)

记作 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$. 或 $x_n\to a\ (n\to\infty)$

此时称 $\{x_n\}$ $\boxed{\text{收敛}}$.

否则称数列 $\boxed{\text{发散}}$

$a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon\quad(n>N)$

即 $x_n\in U(a,\varepsilon)\quad(n>N)$

* 不用找最小N, 随便抓个可以的 N 就好

- 收敛数列

1) 收敛数列极限唯一.

反证. 设$\{x_n\}$两个极限 a, b $(\alpha \neq \beta)$ 不妨设 $a<b$.

取 $\varepsilon=\frac{b-a}{2}$. 则 $\exists N_1$ 使 $n>N_1$ 时 $|x_n-a|<\frac{b-a}{2}$

即 $x_n<\frac{a+b}{2}$

$\exists N_2$ 使 $n>N_2$ 时 $|x_n-b|<\frac{b-a}{2}$

即 $x_n>\frac{a+b}{2}$

取 $N=\max\{N_1, N_2\}$. $n>N$ 时. $\begin{cases} x_n<\frac{a+b}{2} \\ x_n>\frac{a+b}{2} \end{cases}$ 矛盾

2) 收敛数列必有界

3) 收敛数列具有 $\boxed{\text{保号性}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$. $a>0$ (<0) $\exists n\in\mathbb{N}^+$. 使 $n>N$ 时 有 $x_n>0$ (<0)

取 $\varepsilon=\frac{a}{2}$ 可证

推论: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$. $\exists n\in\mathbb{N}^+$, $x_n\geq 0$ (≤ 0). 则 $a\geq 0$ (≤ 0)

* 想想 $\frac{1}{n}$. 就算 $x_n>0$ a 也可能为 0

4) 夹逼性/夹挤性:

若 $y_n\leq x_n\leq z_n$ $(n=N, N+1, N+2, \cdots)(N\in\mathbb{N}^+)$

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$

- 无穷大量

证明: $a>1$. $k\in\mathbb{N}^+$. $\frac{n^k}{a^n}\longrightarrow 0$. $(n\to+\infty)$ ① 取 $\log$; ②

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n^k)^{\frac{1}{n}}}{a}\right)^n \sim \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^n = 0$$

证明: $a>1$. $\frac{a^n}{n!}\longrightarrow 0$ $(n\to+\infty)$

$$\frac{a^n}{n!}=\underbrace{\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{a}{[a]}}_{\text{常数 } c}\cdot\underbrace{\frac{a}{[a]+1}}_{<1}\cdot\cdots\frac{a}{n}$$

可用 $\varepsilon-\delta$ 证.

- $\boxed{\text{单调有界数列必有极限}}$ $\begin{cases} \uparrow. \text{ 有上界} \longrightarrow \text{上确界为极限} \\ \downarrow. \text{ 有下界} \longrightarrow \text{极限: 下确界} \end{cases}$

- $\boxed{\text{Stolz 定理}}$

设 $\{y_n\}$. 严格单调增的正无穷大量. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=a$ (a 可为有限量或 $\pm\infty$)

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=a$

- 收敛准则

单调有界数列必收敛。

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 单调增. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 单调减.

记 $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

$$\boxed{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n+1}<\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}$$

可考虑转化到 2' 去..

记 $\gamma=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$

欧拉常数

闭区间套定理 若 $\{[a_n,b_n]\}$ 满足 (1) $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$ $(n=1,2,3,\cdots)$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$

则 $\exists$ 唯一的 $\xi\in\mathbb{R}$ 属于所有的闭区间 $[a_n,b_n]$

且 $\xi=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$

子列: $n_1<n_2<\cdots<n_k<n_{k+1}<\cdots$ 且 $n_i\in\mathbb{N}^+$, 称 $x_{n_1},x_{n_2},\cdots,x_{n_k},\cdots$

记作 $\{x_{n_k}\}$.

性质
- 收敛数列的任一子数列收敛于同一极限(原数列极限).
- 数列有一发散子列, 则原数列发散
- 若数列有两个子数列收敛于不同极限, 则原数列发散
- 若数列的所有子列都收敛于同一极限, 则原数列收敛于同一极限.

Bolzano-Weierstrass 定理: 有界数列必有收敛子列。

判断极限不存在
- 一个 $\to\infty$ 的子列
- 两个收敛于不同极限的子列

Cauchy (收敛) 准则: 数列极限存在 $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}^+$ 使 $m,n>N$ 时 $|x_n-x_m|<\varepsilon$.

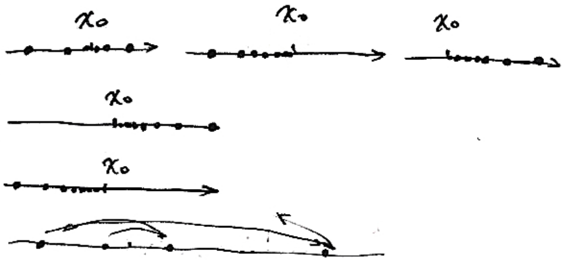
$\Rightarrow$ 显然

$\Leftarrow$: 有 $\{x_n\}$ 有界. 由 B-W. 必有收敛子列 $\Rightarrow$ 找到 lim. 再证 lim = 这个 lim

函数极限

- 函数极限

自变量变化过程的形式 $\begin{cases} x \to x_0 \\ x \to x_0^+ \\ x \to x_0^- \\ x \to \infty \\ x \to +\infty \\ x \to -\infty \end{cases}$



$\boxed{\text{函数极限}}$：若 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义，若 $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 为 $f(x)$ 在 $x \to x_0$ 的极限

即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 或 $f(x) \to A \quad (x \to x_0)$

即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Longleftrightarrow \forall \varepsilon>0,\ \exists \delta<0,\ x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$ 有 $|f(x)-A|<\varepsilon$

$\boxed{\text{保号性定理}}$：若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \underset{<0}{>0}$，则存在 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 使 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，$f(x) \underset{<0}{>0}$

推论：$\neq 0$ $\qquad \neq 0$

推论：若在 x_0 某去心邻域内 $f(x)\geq 0$ (>0) $\left(\begin{smallmatrix}\leq 0\\ <0\end{smallmatrix}\right)$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则 $A\geq 0$ (≤ 0)

* 如 $\lim\limits_{x\to 0} x^2$

$\boxed{\text{夹逼原理/夹挤准则}}$：当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，$g(x)\leq f(x)\leq h(x)$，且

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x) = \lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} h(x) = A \Rightarrow \lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x) = A$$

重要极限：$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

$S_{阴}$、$S_{扇}$、$S_{大\triangle}$
夹逼可得

- 无穷小量（记作 α）

两个/有限个无穷小量之和无穷小。 减法：$\beta\to(-\beta)$ 也是无穷小 * 无限个不正确（n 个 $\frac{1}{n}$）

有界函数与无穷小的乘积是无穷小。

- 函数极限运算法则

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$. 有 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A\pm B$

$\alpha\ \beta$ 无穷小. $f(x)=A+\alpha$，$g(x)=B+\beta$

$f(x)\pm g(x) = (A+\alpha)\pm(B+\beta) = (A\pm\beta)+(\alpha\pm\beta) = (A\pm B)\pm\gamma$

即 $\lim\limits_{x\to x_0}(\quad) = A\pm B$

推论：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$. $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$ 且 $f(x)\geq g(x)$，则 $A\geq B$ 保号性：令 $\varphi(x)=f(x)-g(x)$

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$. $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$. 有 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=AB$. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$

$$(A+\alpha)(B+\beta)=AB+\underbrace{A\beta+B\alpha+\alpha\beta}_{\gamma}$$

$$\gamma'=\frac{A+\alpha}{B+\beta}-\frac{A}{B}=\frac{B\alpha-A\beta}{B(B+\beta)}=\underbrace{\frac{1}{B(B+\beta)}}_{\text{有界函数/有限量}}\underbrace{(B\overset{\text{无限小}}{\alpha}-A\overset{\text{无限小}}{\beta})}_{\text{无穷小量}}$$ 为无穷小量

可推广至有限个函数乘积. $\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n$ (n为有限正整数)

- Heine定理 (海涅定理)

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Longleftrightarrow \forall\{x_n\}: x_n\ne x_0$, $f(x_n)$ 有定义, 且 $x_n\longrightarrow x_0\ (n\to\infty)$

有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$

必要性显然. 充分性: 反证

- 单侧极限

左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$ 右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$

$\Updownarrow$

$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 当 $x\in(x_0-\delta, x_0)$ 时 有 $|f(x)-A|<\varepsilon$; $x\in(x_0, x_0+\delta)$

$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\ne\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\Longrightarrow\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=DNE$.

- 极限定义的补充

$\forall\varepsilon>0$, $\exists X>0$, s.t. $|x|>X$, $|f(x)-A|<\varepsilon$ 则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$. 称 $y=A$ 为 $f(x)$ 的水平渐近线

$x>X$ $+\infty$ $y=A$

$x<-X$ $-\infty$ $y=A$

$\uparrow$

(不用取[illegible]了)

- 函数连续性

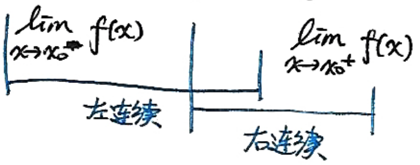
$\boxed{\text{在某点的连续性}}$：在 x_0 的某邻域上 $f(x)$ 有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，称 $f(x)$ 在 x_0 连续.

有理整函数：$P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续

有理分式函数：$R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 只要 $Q(x_0)\neq 0$ 都有定义. 在定义域上连续

增量写法：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \Longleftrightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)=f(x_0) \Longleftrightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$

$\Longleftrightarrow f(x_0^-)=f(x_0)=f(x_0^+)$



$\Longleftrightarrow \forall\, \varepsilon>0,\ \exists\, \delta>0$ 当 $|x-x_0|=|\Delta x|<\delta$ 时

有 $|f(x)-f(x_0)|=|\Delta y|<\varepsilon$

$\boxed{\text{连续函数的四则运算}}$（可用极限四则运算证明）

有限个函数经过有限次和、差、积、商（分母不为0）运算所得仍是在该点连续的函数

$\boxed{\text{间断点}}$：

称 x_0. 设 $f(x)$ 在 x_0 某去心邻域内有定义，当：

(1) $f(x)$ 在 x_0 处无定义

(2) $f(x)$ 在 x_0 处有定义 但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$

(3) $f(x)$ 在 x_0 处极限不存在

间断点分类
- (1) $f(x_0^-)\neq f(x_0^+)$. 都存在 —— 第一类间断点（跳跃点）
  - 跃度：$f(x_0^+)-f(x_0^-)$
- (2) $f(x_0^-)=\text{DNE}$ 或 $f(x_0^+)=\text{DNE}$.
  - ⟨1⟩ 若有一个为 ∞. —— 无穷间断点
  - ⟨2⟩ 若有一个振荡 —— 振荡间断点
  - ⟨3⟩ 其它
  - （以上）第二类间断点
- (3) $f(x_0^-)=f(x_0^+)$. 都存在.
  - 但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$
  - 或 $f(x_0)$ 无定义
  - 第三类间断点（可去间断点）

判断分类 → 看左右极限
- 有DNE → II
- $\neq$ → I
- $=$ → III.

$\boxed{\text{性质}}$ 连续单调递增(减)的反函数也连续单调递增(减).

（“单调递增”下分别注：严格）

复合函数的极限：设 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$. 且 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时，$\varphi(x)\neq a$.

$\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$. 则 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$

（证明：$\because \lim\limits_{u\to a}f(u)=A$. $\therefore \forall\varepsilon>0$, $\exists\eta>0$, $u\in\mathring{U}(a,\eta)$ 时. $|f(u)-A|<\varepsilon$.

$\because \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$. 对上述 $\eta>0$, $\exists\delta_2>0$, $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_2)$ 时, $0<|\varphi(x)-a|<\eta$ （$\because \varphi(x)\neq a$）

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. 当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，有 $u=\varphi(x)\in\mathring{U}(a,\eta)$

$\therefore |f[\varphi(x)]-A|=|f(u)-A|<\varepsilon$. 得证

$\boxed{\text{定理}}$ 连续函数的复合函数是连续的.

特别地，若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$. 则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(\varphi(x))=\lim\limits_{u\to\infty}f(u)=A$. 可证

$$\begin{cases}\text{Max}\{f,g\}=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|]\\ \text{Min}\{f,g\}=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|]\end{cases}$$

$\boxed{\text{初等函数的连续性}}$: 基本初等函数在定义域内连续 ⟶ 所有初等函数在定义域上都连续

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$, $=\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$ 令 $t=a^x-1$. 则 $=\frac{t}{\log_a(t+1)}$

即 $\boxed{\ln(1+x)\sim x,\ x\sim e^x-1}$ $(x\to 0)$

化到 $e^{\square}$ 的指数

$\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=\infty$. 则 $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0}[1+u(x)]^{v(x)}}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}v(x)\ln[1+u(x)]}$

"不定型"(1^∞)

$=e^{\lim\limits_{x\to x_0}v(x)u(x)\cdot\frac{\ln[1+u(x)]}{u(x)}}$

$\boxed{=e^{\lim\limits_{x\to x_0}v(x)u(x)}}$

- 无穷小的比较

$\boxed{\text{高(低)阶无穷小量}}$
$\boxed{\text{同阶/等价无穷小量}}$

设 α,β 是自变量同一变化过程中的无穷小.

① $\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$. β 是比 α 高阶的无穷小. $\beta=o(\alpha)$

$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\infty$. α 是比 β 低阶的无穷小. $\beta=o(\alpha)$

② $\lim\frac{\beta}{\alpha}=C\neq 0$. β 是 α 的同阶无穷小.（一阶无穷小） $\beta\sim\frac{\alpha}{C}$ * $\beta=O(\alpha)$ 后续具体讲解，有更多含义

特别地，$C=1$. β 是 α 的等价无穷小. $\beta\sim\alpha$

③ $\lim\frac{\beta}{\alpha^k}=C\neq 0$. $(k\in\mathbb{N}^*)$ β 是关于 α 的 k 阶无穷小. $\beta\sim\frac{\alpha^k}{C}$

$\boxed{\text{定理}}$ 1) $\alpha \sim \beta \iff \beta = \alpha + o(\alpha)$

证 $\lim(\frac{\alpha}{\beta} - 1) = 0$ 即可.

2) $\alpha \sim \alpha'$, $\beta \sim \beta'$, 且 $\lim \frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$.

极限运算的简化：(1) $\beta = o(\alpha)$ 则 $\alpha \pm \beta \sim \alpha$

(2) $\alpha \sim \alpha'$, $\beta \sim \beta'$ 且 $\boxed{\beta\text{与}\alpha\text{不等价}}$，则 $\alpha - \beta \sim \alpha' - \beta'$

且 $\lim \frac{\alpha - \beta}{\gamma} = \lim \frac{\alpha' - \beta'}{\gamma}$

常用于 α, β 同阶但不等价的情况

如 $\sin x - \frac{1}{3}\tan x \sim \frac{2}{3}x$

$\alpha + k\beta \sim \alpha' + k\beta'$

(3) $\underset{(x \to x_0)}{\alpha \sim \beta}$，且 $\varphi(x)$ 极限存在或有界 $(x \to x_0)$

则 $\lim \alpha\varphi(x) = \lim \beta\varphi(x)$

- 有限区间上连续函数的性质

在闭区间 / 有限个闭区间上连续的函数在该区间上有最大值和最小值.

有界性定理 有限闭区间上连续的函数在该区间上有界.

[证1] 反证. 闭区间套找到 ξ 附近邻域无界. 矛盾.

[证2] 反证. 则 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists x_n \in [a,b]$ s.t. $|f(x_n)| > n$　$\because \{x_n\}$ 有界

$\therefore \{x_n\}$ 必有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$　$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \in [a,b]$

则 $f(x_n) \to f(x_0)$　$(n \to \infty)$

而对 $\forall k \in \mathbb{N}^*$. $|f(x_{n_k})| > n_k$.

$k \to \infty$ 时 $n_k \to \infty$. 则 $|f(x_{n_k})| \to \infty$. $|f(x_0)| \to \infty$.

这与"$f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续"即"$f(x)$ 在 x_0 连续"矛盾.

最值定理 有限闭区间上连续的函数在该区间上必有最大. 最小值

[证]. 有界性定理知 有上(下)确界 $\alpha = \sup R_f$. $\beta = \inf R_f$.

只证最大值即为 $\sup R_f$.

取数列 $\{x_n\}$ 使 $\alpha - \frac{1}{n} < f(x_n) \le \alpha$. $(n \in \mathbb{N}^*)$　否则 $\sup R_f < \alpha$.

$\because x_n \in [\alpha, \beta]$. $\therefore \{x_n\}$ 有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$

设 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi$. 则由 $f(x)$ 连续 知 $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\xi)$

由 $\lim\limits_{k\to\infty}(\alpha - \frac{1}{n_k}) = \alpha$. $\therefore \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\xi) = \alpha$

$\therefore \operatorname{Max} R_f = f(\xi) = \alpha$. 即有最大值

零点定理 $f(x)$ 在有限闭区间 $[a,b]$ 上连续且 $f(a)f(b)<0$，则至少一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$.

* 下记 $f(x)\in C[a,b]$ 为 $f(x)$ 在有限闭区间 $[a,b]$ 上连续

[证] 用闭区间套定理.

令 $[a_1,b_1]=[a,b]$. 取 $[a,\frac{a+b}{2}]$ 和 $[\frac{a+b}{2},b]$ 两者之一为 $[a_2,b_2]$

使 $f(a_2)f(b_2)\leqslant 0$. (一定能找到这样的区间，否则 $f(a_1)f(b_1)>0$.)

取 $[a_2,\frac{a_2+b_2}{2}]$ 和 $[\frac{a_2+b_2}{2},b_2]$ 两者之一为 $[a_3,b_3]$ 使 $f(a_3)\cdot f(b_3)\leqslant 0$

……

得到 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$.

我们记 $\begin{cases} a_n'=a_n,\ b_n'=b_n & (f(a_n)\leqslant 0,\ f(b_n)\geqslant 0) \\ a_n'=b_n,\ b_n'=a_n & (f(a_n)\geqslant 0,\ f(b_n)\leqslant 0). \end{cases}$

记 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n'=\lim\limits_{n\to\infty}b_n'=\xi$，由 $f(x)\in C[a,b]$ $\therefore \lim\limits_{x\to\xi}f(x)=f(\xi)$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n')\leqslant 0$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n')\geqslant 0$ $\therefore f(\xi)\leqslant 0$ 且 $f(\xi)\geqslant 0$

$\therefore f(\xi)=0$

介值定理 $f(x)\in C[a,b]$. $f(a)=A$. $f(b)=B$. $A\neq B$

则对 A 与 B 之间的任一数 C，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使 $f(\xi)=C$.

$g(x)=f(x)-C$. 直接零点定理就证好了

[推论] 在闭区间上的连续函数必取得介于 Min 与 Max 之间的任意值.

常用方法：构造新函数（减一减，加一加）$\leftarrow$ "存在…使…=…"

$\varphi(x)=$ 左式 $-$ 右式. $\rightsquigarrow$ 零点定理.

- 无穷小定义的扩充

狭义同阶无穷小 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=C\neq 0$. 称 α 与 β

广义同阶无穷小 $0<m\leqslant\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|\leqslant M$. 称 α 与 β. （α 与 β 是自变量同一变化过程中的无穷小）

特别地，$\alpha=u(x)$，$\beta=v(x)$. 则可记作 $v(x)=O(u(x))$

- 一致连续性

$f(x)$ 在区间 I 上连续 $\Longleftrightarrow \forall x_0\in I,\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta(x_0)>0$, s.t. $|x-x_0|<\delta$ 时 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

连续性概念中，δ 与 ε, x_0 都有关.

一致连续性：对 $f(x)$, $x\in I$. 若 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 对 $\forall x_1,x_2\in I$, $|x_1-x_2|<\delta$ 时, $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

对区间才有定义

vs. 连续性：点/区间上定义

e.g. $f(x)=\frac{1}{x}$. $x\in(0,1]$. 不一致连续

$\boxed{\text{Cantor 定理}}$ 若 $f(x)\in C[a,b]$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续.

[证] 反证. 则 $\exists\, \varepsilon_0>0$, $\forall\, \delta>0$, $\exists\, n$ 使 $n=\left[\frac{1}{\delta}\right]+1$.

$\exists\, x_n', x_n''$ 使 $|x_n'-x_n''|<\frac{1}{n}<\delta$

但 $|f(x_n')-f(x_n'')|\geqslant \varepsilon_0$

$\because \{x_n''\}$ 是有界数列 $(\forall n,\ x_n\in[a,b])$ $\therefore$ 必存在收敛子列 $\{x_{n_k}''\}$

$\because |x_{n_k}'-x_{n_k}''|<\frac{1}{n_k}$ 可证 $\{x_{n_k}'\}$ 也收敛

$$\lim x_{n_k}'=\lim\left(x_{n_k}''+\underbrace{(x_{n_k}'-x_{n_k}'')}_{\downarrow\, 0}\right)=\lim x_{n_k}''=:x_0$$

$\therefore$ 则 $n_k\to\infty$. $|f(x_n')-f(x_n'')|\longrightarrow|f(x_0)-f(x_0)|=0\geqslant\varepsilon_0$.

矛盾.

$\boxed{\text{定理}}$ 若 $f(x)\in C(a,b)$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续 $\Longleftrightarrow$ $f(a+)$, $f(b-)$ 存在

微分

• 微分、导数

称 Δx 和 Δy 分别为自变量 x 与因变量 y 的 $\boxed{差分}$.
（线性主部）

$\boxed{可微}$：若 $f(x)$ 在 x_0 处增量 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=:\Delta y=\underline{A_{(x_0)}\Delta x}+o(\Delta x)$

$\Delta x\to 0$ 时：（其中 $A_{(x_0)}$ 为不依赖于 Δx 的常数但可以与 x_0 有关系数）

则称 $y=f(x)$ 在 x_0 可微，$A\Delta x$ 称为 $f(x)$ 在 x_0 的微分. 记作 dy 或 df.

$\boxed{可导}$：设 $f(x)$ 在 $U(x_0,\delta)$ 里有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在，

则称 $f(x)$ 在 x_0 处可导，称该极限为 $f(x)$ 在 x_0 的导数.

记作：$y'\big|_{x=x_0}$; $f'(x_0)$; $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$; $\dfrac{df(x)}{dx}\Big|_{x=x_0}$; $\dot{y}$; $\dot{f}(x_0)$

即 $y'\big|_{x=x_0}=f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

$\boxed{可微 \Leftrightarrow 可导}$ $\boxed{dy=f'(x_0)\Delta x}$

$\boxed{不可导}$ 若该极限不存在，则说函数在 x_0 不可导.

特别地，若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\infty$，也称 $f(x)$ 在 x_0 处导数无穷大.

若函数在开区间 I 上每点都可导，称该函数在 I 内可导. 导数值构成的新函数称为导函数

注意：$f'(x_0)=f'(x)\big|_{x=x_0}$

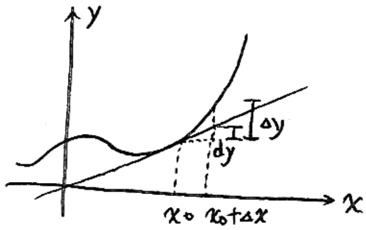
$$f'(x_0)=y'\big|_{x=x_0}=f'(x)\big|_{x=x_0}=\frac{df(x)}{dx}\Big|_{x=x_0}\neq\frac{df(x_0)}{dx}\leftarrow 常数!$$

注意到 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{dy}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{f'(x_0)\Delta x}=\dfrac{1}{f'(x_0)}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=1$ 故 $|\Delta x|\to 0$. $\Delta y\sim dy$.

所以 $|\Delta x|$ 很小时有 $\Delta y\approx dy$

e.g. $\sin\left(\frac{\pi}{10^5}+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{10^5}\cos\frac{\pi}{3}$ 但精度不高.

$\boxed{微分的几何意义}$ —— 切线纵坐标增量



$dy=f'(x_0)\Delta x=\tan\alpha\cdot\Delta x$ $\Delta x\to 0$. $\Delta y\to dy$.

特别地，令 $y=x$. 则 $\Delta y=\Delta x=:dx$

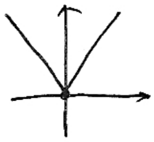
称 Δx 为自变量的微分，记作 dx.

则 $dy=f'(x_0)dx \Rightarrow f'(x_0)=\dfrac{dy}{dx}$ 故导数也称 微商

$\boxed{导数的物理意义}$ —— “速度” “变化率”

$\boxed{导数的几何意义}$ —— 切线的斜率

- 可导与连续的关系



可导一定连续，连续不一定可导.

$\boxed{\text{单侧导数}}$ 称 $f'_+(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 为 $f(x)$ 在 x_0 处右导数.

$f'_-(x_0)$ $\quad \Delta x\to0^-$ $\quad \Delta x\to0^-$ $\quad$ 左

$f'(x_0)$ 存在 $\rightleftarrows$ $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$ 且都存在.

$f'_{\pm}(x_0)$ 存在 $\Longrightarrow$ $f(x)$ 在 x_0 右连续
左

称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，若 $f(x)$ 在 (a,b) 上可导 且 $f'_+(a)$ 和 $f'_-(b)$ 都存在.

- 求导法则

若 $u(x)$、$v(x)$ 在 x_0 可导，则 $u(x)$ 与 $v(x)$ 的和、差、积、商（分母不为 0）在 x_0 都可导.

(1) $[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$ $\qquad$ 可推广至有限项

(2) $[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$ $\rightsquigarrow$ 每次选一个求导. $\quad$ e.g. $(uvw)'=u'vw+uv'w+uvw'$

(3) $\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$

$\star$ $\left[\frac{1}{v(x)}\right]'=-\frac{v'(x)}{v^2}$ $\uparrow$ 推出

$\boxed{\text{反函数求导}}$ 设 $y=f(x)$ 反函数是 $y=f^{-1}(x)$ 的反函数，$f^{-1}(x)$ 在 x 的某邻域内单调可导，且 $[f^{-1}(x)]'\neq0$

$$f'(x)=\frac{1}{[f^{-1}(x)]'} \qquad \text{或：} \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$\leftarrow$ 将 $f^{-1}(x)$ 写成 $x=f^{-1}(y)$

[证]. x 处给增量 $\Delta x\neq0$. 由单调性知 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)\neq0$.

$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}$ $\qquad$ 由连续性知 $\Delta x\to0$ 必有 $\Delta y\to0$

故 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta y\to0}\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta y\to0}\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{[f^{-1}(x)]'}$

[思考] "单调性" 可换为什么条件？

$f(x)$ 在 x_0 附近邻域内取不到 $f(x_0)$，在 x_0 处有上述结论

- 复合函数

$u=g(x)$ 在 x 处可导，$y=f(u)$ 在 $u=g(x)$ 处可导. 则 $y=f[g(x)]$ 在 x 可导

且 $\frac{dy}{dx}=f'(u)g'(x)$

[证] $y=f(u)$ 在 u 处可导，则 $\lim\limits_{\Delta u\to0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u)$ 即 $\Delta y=f'(u)\Delta u+\alpha\Delta u$ $\quad(\Delta u\to0,\ \alpha\to0)$

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}$ $(\Delta x\neq0)$ $\qquad$ (若 $\Delta u=0$，则 $\Delta y=0$)

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}\right]=f'(u)\,g'(x)$$

（$u=g(x)$为常函数时，$g'(x)=0$，也成立）

[推广] $y=f(u)$，$u=\varphi(v)$，$v=\psi(x)$ 　则 $y'=f'(u)\,\varphi'(v)\,\psi'(x)$

即：$\boxed{\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dv}\dfrac{dv}{dx}}$

CHAIN'S RULE 链式法则

注意：$\frac{df}{dx}$与$f'(\ )$可能不同.

如：$f'(u)$存在 　$f(\ln(\cos x))$的导数 $\frac{df}{dx}=f'(\ln(\cos x))\,(\ln(\cos x))'$ 　$\boxed{\left.\frac{df}{du}\right|_{u=\sim}}$

含义不同

要用导数必须有可导条件，只有连续考虑定义。e.g. $f(x)=(x-a)\varphi(x)$ 在a处导数：$\varphi(a)$ （在a处连续）

- 隐函数的导数

$\boxed{\text{隐函数}}$ 由$F(x,y)=0$可确定y是x的函数，称该函数.

$\boxed{\text{显函数}}$：用$y=f(x)$表示的函数

$\boxed{\text{隐函数求导}}$：$F(x,y)=0 \xrightarrow{\text{两边对}x\text{求导}} \frac{d}{dx}F(x,y)=0$ （含y'的方程）

$\boxed{\text{常用手段：显函数两边取对数化为隐式}}$ ~~[illegible]~~ ☆

e.g. $y=\left(\frac{a}{b}\right)^x\left(\frac{b}{x}\right)^a\left(\frac{x}{a}\right)^b \overset{\ln}{\Longrightarrow} y'=\ln\frac{a}{b}-\frac{a}{x}+\frac{b}{x}$

- 参数方程确定函数的导数

$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$ 可确定y与x的关系. 若$\varphi(t)$、$\psi(t)$可导 且 $[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2\neq 0$

（即不能同时为0）

则 $\varphi'(t)\neq 0$ 时有 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$

$\psi'(t)\neq 0$ 时有 $\frac{dx}{dy}=\frac{dx}{dt}\frac{dt}{dy}=\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}$

~~[illegible]~~

凑导数定义式：$\lim\frac{f(A)}{B}=\lim\frac{f(A)-f(A_0)}{A-A_0}\cdot\frac{A-A_0}{B}=f'(A_0)\cdot\lim\frac{A-A_0}{B}$. （$f(A_0)=0$）

重要函数举例 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$ 在$x=0$可导且连续 （$f'(0)=0$）

两边取对数 $\longrightarrow$ $(\ln y)'=\frac{1}{y}\cdot y'$ 　$\therefore y'=y(\ln y)'$

- 高阶导数与高阶微分

一阶微分的不变性：$dy = f'(u)\,du = \boxed{\overset{F'(x)}{f'(g(x))g'(x)}}\,dx$ 同一形式.

$\boxed{\text{二阶导数}}$ 若 $y=f(x)$ 的导数 $y'=f'(x)$ 可导. 称 $f'(x)$ 的导数.

记作 y'' 或 $\frac{d^2y}{dx^2}$. 或 $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$

$\boxed{n\text{阶导数}}$：类似.

记作 y''', $y^{(4)}$, $y^{(5)}$ …

$\frac{d^3y}{dx^3}$ $\frac{d^4y}{dx^4}$ $\frac{d^5y}{dx^5}$

$(e^{ax})^{(n)}=a^n e^{ax}$

$(\ln(1+x))^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$

$(\ln(1-x))^{(n)}=-\frac{(n-1)!}{(1-x)^n}$

$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

→ 找规律即可

$(e^{ax}\sin bx)^{(n)}=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{ax}\sin(bx+n\varphi)$. $\varphi=\arctan\frac{b}{a}$.

(求一阶导发现有 $a\sin bx+b\cos b\cdot x$ 形式，凑出辅助角)

$\boxed{\text{高阶导数运算法则}}$：

$(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$

$(Cu)^{(n)}=Cu^{(n)}$ (C为常数)

$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)}$
$+\cdots+uv^{(n)}$

(Leibniz公式，形式非常类似二项式展开)

$\sin^6x+\cos^6x=(\sin^2x)^3+(\cos^2x)^3=(\sin^2x+\cos^2x)(\sin^4x-\sin^2x\cos^2x+\cos^4x)$
$=(\sin^2x+\cos^2x)-3\sin^2x\cos^2x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos4x$

$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'}$. $\Rightarrow$ $\frac{d^2x}{dy^2}=\left(\frac{d}{dy}\left(\frac{dx}{dy}\right)\right)=\underline{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y'}\right)}\frac{dx}{dy}=-\frac{y''}{(y')^2}\cdot\frac{1}{y'}=-\frac{y''}{(y')^3}$

中值定理

- 微分中值定理

费马(Fermat)引理　若 $y=f(x)$ 在 $U(x_0)$ 有定义 且 $f(x)\leqslant f(x_0)$ $(\geqslant)$，$f'(x_0)$ 存在，则 $f'(x_0)=0$

从图上看很显然.

[证] $\forall x_0+\Delta x\in U(x_0)$. $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\leqslant 0$. $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$

而 $f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\geqslant 0$. $f'_+(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\leqslant 0$.

$\therefore f'(x_0)=f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=0$

罗尔(Rolle)定理　若 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. (a,b) 上可导. $f(a)=f(b)$
则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使 $f'(\xi)=0$

[证] $\because f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则存在 $\mu,\eta\in[a,b]$. 使 $f(\mu)=M$ $f(\eta)=m$
其中 M 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上最大值，m 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上最小值.

① $M=m$. 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为常函数. $f'(\xi)=0$ 对 $\forall\xi\in(a,b)$ 成立

② $M>m$. 则 $f(\eta)$ 和 $f(\mu)$ 至少有一个与 $f(a)$ 不等. 不妨设 $f(\eta)\neq f(a)$. 则 $f(\eta)\neq f(b)$
即存在 $\xi=\eta\in(a,b)$ 使 $f(\eta)=m$. 由Fermat引理：$f'(\xi)=0$

【缺失条件反例】

$f(x)=\begin{cases}x & (0\leqslant x<1)\\ 0 & (x=1)\end{cases}$　—连续性

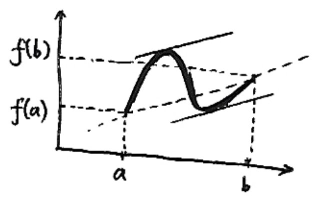
$f(x)=|x|$ $(x\in[-1,1])$　—可导性

$f(x)=x$ $(x\in[0,1])$　—两端相等

证解的唯一性 ⟶ 设有两根. 两根之间用Rolle定理

拉格朗日(Lagrange)定理　若 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. (a,b) 上可导
则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

[证] $f'(\xi)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0 \xleftarrow{\text{求导}} f(\xi)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\xi=0$



构造辅助函数 $\varphi(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$

在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 内可导.

$\varphi(a)=\dfrac{bf(a)-af(b)}{b-a}=\varphi(b)$　由Rolle定理知 至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使 $\varphi'(\xi)=0$

即：$f'(\xi)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$.

【Lagrange定理的有限增量形式】

令 $a=x_0$，$b=x_0+\Delta x$. 则 $\Delta y=f'(\underbrace{x_0+\theta\Delta x}_{\xi\in(a,b)})\Delta x$　$(0<\theta<1)$

[推论] $f(x)$ 在 $\overset{\text{开区间}}{I}$ 上有 $f'(x)\equiv 0 \iff f(x)$ 在 I 上为常函数　注意：I 为开区间　闭区间需要特判端点！

[证] $\forall x_1,x_2\in I$. $f(x_1)-f(x_2)=f'(\xi)(x_2-x_1)=0$　$(\xi\in(x_1,x_2))$.　反之显然.

Cauchy 中值定理 若 $f(x)$ 及 $F(x)$ 满足：在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，(a,b) 内 $F'(x)\neq 0$。

至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使 $\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$

[证] $F(b)-F(a)=F'(\eta)(b-a)\neq 0 \quad (a<\eta<b)$ 否则分母有危险

证 $\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}F'(\xi)-f'(\xi)=0$

构造 $\varphi(x)=\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}F(x)-f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续、(a,b) 上可导.

且 $\varphi(a)=\dfrac{f(b)F(a)-f(a)F(b)}{F(b)-F(a)}=\varphi(b)$

由 Rolle 定理知. 至少存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $\varphi'(\xi)=0$ 即原式.

$f(\xi)+f'(\xi)$? $\quad \dfrac{(e^{\xi}f(\xi))'}{e^{\xi}}$!

不能用 ξ 构造的方法求极限. 即用 $x\to0^+$. $\xi\to0^+$. $\lim f(\xi)=0 \not\Rightarrow \lim f(x)=0$

这是一个趋近0的特殊子列

其它子列 $\lim=A\neq0$ $\Big\}$ DNE.

所有趋近方式

函数单调性判断

$f(x)$ 在 $\boxed{\text{开区间}}$ I 内可导. $f'(x)>0.\ (<0)$ $\quad f(x)$ 在 I 内严格单调增(减)

$\geq 0\ \ (\leq 0)$ $\quad$ 单调增(减).

[证] $\forall x_1,x_2\in I$. $\quad f(x_1)-f(x_2)=f'(\xi)(x_1-x_2) \quad (\xi\in(x_1,x_2)\subseteq I)$

$\because f'(\xi)>0$ (<0) $\Rightarrow$ $f(x_1)-f(x_2)>0$ (<0)

反之不亦然：$f(x)=x^3$

确定单调区间 $\longrightarrow$ $f'(x)=0$. 分段. 逐区间判断

	$(-\infty,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	A	↘	B	↗

也可能导数不存在的点.

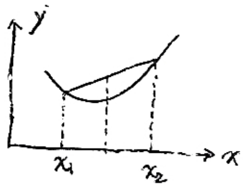
(可以不写这一过程)

• 曲线的凹凸与拐点

凹凸 $f(x)$ 在 I 上连续，$\forall x_1,x_2\in I$.

(1) 若恒有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$. 称 $f(x)$ 严格下凸(凹).

(2) $\qquad >$ $\qquad$ 严格上凸.



另一种定义：$\forall\ \lambda\in(0,1)$. $\quad f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)<\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$ 严格下凸

两种定义等价.

拐点 曲线上凸与下凸的分界点，两侧凸性相反。

判定凹凸的非定义方法：　若 $f(x)$ 在 I 上有二阶导数

(1) $f''(x)>0 \ (x\in I) \Rightarrow f(x)$ 在 I 内严格下凸.

(2) $f''(x)<0 \ (x\in I) \Rightarrow f(x)$ 在 I 内严格上凸.

$f''(x)=0$ 时：可能为拐点.

拐点判别法. $f''(x)=0$ 或 DNE, $f(x)$ 在 x_0 连续 且 $f''(x)$ 在 x_0 两侧异号
则 $(x_0, f(x_0))$ 是 $f(x)$ 的一个拐点.

- L'Hospital 法则

$\boxed{\text{不定型}}$ $\frac{0}{0}$ 型, $\frac{\infty}{\infty}$ 型.

$\boxed{\text{L'Hospital 法则}}$ 1. $\frac{0}{0}$ 型.

(1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} F(x)=0$

(2) $f(x)$ 与 $F(x)$ 在 $\mathring{U}(a)$ 内可导，且 $F'(x)\neq 0$

(3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在或为 ∞.

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$

$x\to a$ 可替换：$x\to a^+$, $x\to a^-$, $x\to\infty$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$
条件相应更改即可

[证] 设 $f(a)=F(a)=0$. 在 $\mathring{U}(a)$ 内任取 $x\neq a$. 则 $f(x)$, $F(x)$ 在 x, a 为端点的区间上满足 Cauchy 定理的三个条件.

故 $\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{F(x)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$ （ξ 在 x, a 之间）

$\therefore \lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}\overset{(3)}{=\!=}\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$

注意：只有 $\frac{0}{0}$ 型才能继续 L'Hospital. ！（非不定型不得使用）

2. $\frac{\infty}{\infty}$ 型 $\xrightarrow{\text{转化}}$ $\frac{0}{0}$ 型.

(1) $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=\lim\limits_{x\to a}|F(x)|=0$

(2) $f(x)$ 与 $F(x)$ 在 $\mathring{U}(a)$ 可导. 且 $F'(x)\neq 0$

(3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在或为 ∞

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$

* 本质为 $\frac{*}{\infty}$ 型.

[证] $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(x_0)+f(x_0)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(x_0)}{F(x)-F(x_0)}\cdot\frac{\overset{\to\infty}{F(x)-F(x_0)}}{\underset{\to\infty}{F(x)}}+\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x_0)\leftarrow\text{有限值}}{F(x)\leftarrow\infty}\Big\}0$

$=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(x_0)}{F(x)-F(x_0)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}\overset{(3)}{=\!=}\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}.$

$\boxed{\text{不定型的转化}}$

$$\infty-\infty \xrightarrow{\text{通分}} \frac{0}{0} \text{ 或 } \frac{\infty}{\infty}$$

$$0\cdot\infty \xrightarrow{\text{倒数}} \frac{0}{0} \text{ 或 } \frac{\infty}{\infty} \qquad \text{e.g. } \boxed{0}\cdot\infty \longrightarrow \frac{\infty}{\frac{1}{\boxed{\infty}}} \text{ 或 } \frac{\boxed{0}}{0}.$$

$\uparrow$ 对数

$$0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0 \qquad \text{e.g. } 0^{\boxed{0}} = e^{\boxed{0}\ln 0} \longrightarrow \text{“}0\cdot\infty\text{型”}$$

- Taylor 展开

一个图象逐渐逼近原曲线的过程 $\longrightarrow$ Taylor 公式的建立

$p_n(x_0)=f(x_0)$. $p_n'(x_0)=f'(x_0)$ ... $p_n^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0)$

令 $p_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n$

$\Rightarrow$ ~~Taylor展开~~ $p_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$

余项? $R_n(x_0)=R_n'(x_0)=\cdots=R_n^{(n)}(x_0)=0$

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{R_n(x)-R_n(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}-0}\overset{\text{中值}}{=}\frac{R_n'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n}=\frac{R_n'(\xi_1)-R_n'(x_0)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n-0}\overset{\text{中值}}{=}\frac{R_n''(\xi_2)}{(n+1)n(\xi_2-x_0)^{n-1}}$$

$$=\cdots=\frac{R_n^{(n)}(\xi_n)-R_n^{(n)}(x_0)}{(n+1)\cdots2(\xi_n-x_0)-0}\overset{\text{中值}}{=}\frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

$\because p_n^{(n+1)}(x)=0 \quad \therefore R_n^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)$

$\Rightarrow R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ （ξ在x_0与x之间）

在 $U(x_0,\delta)$ 内 $|f^{(n+1)}(x)|\le M$ 时 可算出“误差”（余项） $|R_n(x)|\le\frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}$

Taylor 中值定理

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

n阶Taylor公式

需要n+1阶导数存在

x在满足条件下可任意取

$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ （ξ在x_0与x之间）

$\uparrow$ Lagrange 余项

特别地，$\boxed{x\to x_0}$: $R_n(x)=o[(x-x_0)^n]$

$\uparrow$ Peano 余项

只要f(x)在x_0处有直到n阶的导数，带Peano余项的Taylor公式成立。

特例： 1) $n=0$： $f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)$ （ξ~） ~ Lagrange 中值定理

2) $n=1$： $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)$ （ξ~） ~ 二阶导判凸性

$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ 微分形式

3) $x_0=0$. 记 $\xi=\theta x$ $(0<\theta<1)$.

$$\boxed{f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}}_{\text{余项}}}$$

Maclaurin 公式

- 初等函数的 Maclaurin 公式

$(0<\theta<1)$

(1) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \boxed{R_n(x)}$

$\quad \longrightarrow \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1} \;/\; o(x^n)$

(2) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \boxed{R_{2n}(x)} = \frac{(-1)^n \sin(\theta x)}{(2n+1)!}x^{2n+1}$

(3) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \boxed{R_{2m+1}(x)} = \frac{(-1)^{m+1}\cos(\theta x)}{(2m+2)!}\cdot x^{2m+2}$

(4) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \boxed{R_n(x)}$

$\quad \boxed{R_n(x)} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$

(5) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \boxed{R_n(x)}$

$(x>-1)$

$\quad \longrightarrow \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}}$

- Taylor 展开的应用

$f(x)$ 在 x_0 某邻域有 $n+2$ 阶导数存在，则 $(n+1)$ 次 Taylor 多项式的导数恰为 $f'(x)$ 的 n 次 Taylor 多项式.

应用：求极限.

除法的情况：有 $o()$，不能直接除

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)\Big(1 \overset{-\text{“}y\text{”}}{\boxed{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)}}\Big)^{-1}$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)\left(1 + \underbrace{\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right)}_{\text{小量}} + \underbrace{\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right)^2}_{\text{小量}} + o(x^5)\right)$$

$$(1+x)^{-1} = 1 - x - \frac{-1\cdot(-2)}{2!}x^2 - \frac{-1(-2)(-3)}{3!}x^3 - \cdots$$
$$= 1 - x - x^2 - x^3 - \cdots$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right) + \left(x - \frac{x^3}{6}\right)\frac{x^2}{2} + x\cdot\frac{5x^4}{24} + o(x^5)$$

证明题看见二阶导 $\longrightarrow$ Taylor 展开（带 Lagrange 余项）

曲线渐近线

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (ax+b) = 0. \text{ 或 } \lim_{x\to-\infty} f(x) - (ax+b) = 0$$

当 $a=0$ 时称为水平渐近线. 否则称为斜渐近线.

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)-(ax+b)}{x} = 0 \text{ 或 } \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)-(ax+b)}{x} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \text{ 或 } \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}} \Rightarrow b = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (-\infty)}} [f(x) - ax]$$

$x\to a^+(a^-)$. $f(x)\to+\infty(-\infty)$. 称 $x=a$ 为垂直渐近线

- 极值点

设 $f(x)$ 在 x_0 点某一邻域有定义 且 $f(x)$ 在 x_0 处连续

(1) 若存在 $\delta>0$ 使 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,\ x_0)$ 与 $(x_0,\ x_0+\delta)$ 上可导.

$$\underset{U^-(x_0,\delta)}{\overset{\parallel}{(x_0-\delta,\ x_0)}} \qquad \underset{U^+(x_0,\delta)}{\overset{\parallel}{(x_0,\ x_0+\delta)}}$$

(i) 若在 $U^-(x_0,\delta)$ 上 $f'(x)\geq 0$, 在 $U^+(x_0,\delta)$ 上 $f'(x)\leq 0$. 则 x_0 是 $f(x)$ 极大值点

$(\leq)$ $(\geq)$ (极小)

(2) 设 $f'(x_0)=0$ 且 $f(x)$ 在 x_0 点二阶可导

(i) 若 $f''(x_0)<0$, 则 x_0 是极大值点.

[记忆] $\underset{0}{f''(x_0) \wedge} \longrightarrow \wedge$ 极大值 $\qquad \underset{0}{f''(x_0) \vee} \longrightarrow \vee$ 极小值

[证] $f''(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}<0$

故 $\Delta x>0$: $f'(x_0+\Delta x)<f'(x_0)=0$

<0: $f'(x_0+\Delta x)>f'(x_0)=0$ $\Rightarrow$ [redacted] (1).

- 微分方程

$p'(t)=\lambda p(t)+\mu$ 即 $\dfrac{dp}{dt}=\lambda p+\mu$

写成微分形式: $dp=(\lambda p+\mu)\,dt$

$\mu=0$ 时: $\dfrac{dp}{p}=\lambda\, dt \longrightarrow \ln p=\lambda t+c$

$\therefore p=c_1 e^{\lambda t} \xrightarrow{\text{初始条件}} c_1=\boxed{}$.

[redacted]:

不定积分

- 不定积分

若在 I 上定义的两个函数 $F(x)$, $f(x)$ 满足: $F'(x)=f(x)$ 或 $dF(x)=f(x)\,dx$

称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的 $\boxed{\text{原函数}}$

显然 $f(x)$ 的原函数不唯一.

$\boxed{\text{不定积分}}$: 称 $f(x)$ 在 I 上原函数全体为 $f(x)$ 在 I 上不定积分, 记作 $\int \underbrace{f(x)\,dx}_{\text{被积表达式}}$

$f(x)$ — 被积函数 ; dx — 积分变量

$\int$ — 拉长版的 "S" (Sum) 积分号

若 $F'(x)=f(x)$

则 $\int f(x)\,dx = F(x)+C$ (任意常数)

$\boxed{\text{不定积分的运算法则}}$

1) $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx \quad (k\neq 0)$

2) $\int [f(x)\pm g(x)]dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$ ⟶ 推广: 有限个函数相加减

3) $\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x)$ 即 $d[\int f(x)\,dx] = f(x)\,dx$

4) $\int F'(x)\,dx = F(x)+C$. 即 $\int dF(x) = F(x)+C$

基本积分表

$\int k\,dx = kx+C$

$$\int x^{\mu}dx = \begin{cases} \frac{1}{\mu+1}x^{\mu+1}+C & (\mu\neq -1) \\ \ln|x|+C \quad (\mu=-1) & (~~特~~, x<0 时 [\ln|x|]'=[\ln(-x)]'=\frac{1}{x}) \end{cases}$$

$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$ 或 $-\operatorname{arccot} x + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$ 或 $-\arccos x + C$

……

$\int \sec x\tan x\,dx = \sec x + C$

$\int \csc x\cot x\,dx = -\csc x + C$

- 换元法

<1> $F'(u)=f(u)$. $u=\varphi(x)$ 可导. 则 $dF[\varphi(x)] = f[\varphi(x)]\varphi'(x)\,dx$

$$\int f[\varphi(x)]\underbrace{\boxed{\varphi'(x)\,dx}}_{d\varphi(x)} \xrightarrow{\text{第一类换元法}} \int f(u)\,du$$

<2> 第二类换元法: $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$. 令 $x=a\sin t$. $(t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}).)$

则 $\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t \quad dx=a\cos t\,dt$

原式 $= a^2(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4})+C = a^2(\frac{t}{2}+\frac{\sin t\cos t}{2})+C = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C$

- 分部积分法

$$(uv)'=u'v+uv' \Rightarrow uv=\int u'v\,dx+\int uv'\,dx$$

$$\therefore \int uv'dx = uv-\int u'v\,dx \quad 即 \int u\,dv = uv-\int v\,du$$

- 有理函数的积分

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$$

$m\leq n$ 时：$R(x)$ 假分式； $m>n$ 时，$R(x)$ 真分式.

$$R(x)= 多项式 + \boxed{真分式}$$

$\downarrow$

若干个分式之和. 称这些分式为部分分式.

$$部分分式 \begin{cases} \dfrac{A}{(x-a)^k} \\ \dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} \end{cases} \quad (k\in N^+,\ p^2-4q<0)$$

[引理] 首系数为1的实系数多项式 Q 在实数范围内有唯一的因式分解.

$$Q(x)=(x-a)^{\alpha}\cdots(x-b)^{\beta}(x^2+px+q)^{\mu}\cdots(x^2+rx+s)^{\nu}.$$

[定理] 若 $R=\frac{P}{Q}$ 为真分式，其分母 Q 有形如引理中的因式分解.

则 $R=\frac{P}{Q}$ 在实数范围内有唯一的部分分式分解.

$$R(x)=\sum_{j=1}^{\alpha}\frac{A_j}{(x-a)^j}+\cdots+\sum_{j=1}^{\beta}\frac{B_j}{(x-b)^j}+\sum_{j=1}^{\mu}\frac{2K_jx+L_j}{(x^2+px+q)^j}+\cdots+\sum_{j=1}^{\nu}\frac{2M_j+N_j}{(x^2+rx+s)^j}$$

1. $\int\frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a|+C$

2. $\int\frac{A}{(x-a)^n}dx=\frac{A}{1-n}(x-a)^{1-n}+C \quad (n\neq 1)$

3. $\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$

4. $\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx$

3、4：变分子为 $\frac{M}{2}\underline{(2x+p)}+N-\frac{Mp}{2} \quad (\because (x^2+px+q)'=2x+p)$

$$3\longrightarrow \int\frac{\frac{M}{2}}{x^2+px+q}d(x^2+px+q)+\int\frac{\theta}{\underline{x^2+px+q}}d\underbrace{\left(x+\frac{p}{2}\right)}_{u} \quad \int\frac{du}{u^2+\varphi^2}=\arctan\frac{u}{\varphi}+C$$

✓

$\hookrightarrow u^2+\varphi^2 \longrightarrow$ 转为 $\frac{1}{t^2+1}$ 形式 $\Rightarrow \boxed{\text{arctan}}$

$$4\longrightarrow \int\frac{\frac{M}{2}}{(x^2+px+q)^n}d(x^2+px+q)+\int\frac{\theta}{(x^2+px+q)^n}d\left(x+\frac{p}{2}\right)$$

✓

$$\downarrow$$

$$\theta\int\frac{du}{(u^2+\varphi^2)^n}$$

$$I_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{1}{a^2}\int\frac{x^2+a^2-x^2}{(x^2+a^2)^n}dx=\frac{I_{n-1}}{a^2}+\frac{1}{a^2}\int\frac{-x^2}{(x^2+a^2)^n}dx=\frac{I_{n-1}}{a^2}+\frac{1}{2a^2(n-1)}\int x\,d\left[\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\right]$$

$$=\frac{I_{n-1}}{a^2}+\frac{1}{2a^2(n-1)}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}-\frac{I_{n-1}}{2a^2(n-1)} \longrightarrow 递推关系可求$$

$$\left(I_1=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C\right)$$

所以 所有有理函数的积分可求.

[redacted] $\int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{x^4+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx$

$$= \frac{1}{2}\frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2} - \frac{1}{2}\frac{d(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-2}$$

裂项 $\cancel{(x+\frac{1}{x}+\sqrt{2})(x+\frac{1}{x}-\sqrt{2})}$

$x=0$?
一个点不影响. $x>0$. $x<0$ 分析
不注重这个细节

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right| + C$$

• 可化为有理函数的函数积分.

1) 简单无理函数 $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})dx$ 换元 即可化为有理函数

$\sqrt[n]{ax+b}$!! 一般有: $u \longrightarrow x = \frac{u^n-b}{a}$ $\quad dx = \frac{nu^{n-1}}{a}du$

$\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$

!! $u \longrightarrow x = \frac{du^n-b}{a-cu^n} = -\frac{d}{c} + \frac{\frac{ad}{c}-b}{a-cu^n}$ $\quad dx = \cdots du$

$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}, \sqrt[m]{ax+b})dx.$ $\quad u := \sqrt[[m,n]]{ax+b}.$

2) 三角有理函数 $\int R(\sin x, \cos x)dx \xrightarrow{u=\tan\frac{x}{2}}$ 万能公式.

更好的方法: 直接三角函数化来化去

* 辅助角公式: 若分母二次 $\longrightarrow$ 化为 $\cos^2(\ )$ $\longrightarrow \tan(\ )+c$

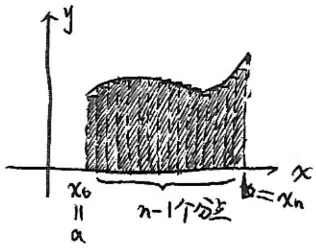
* 上下同乘 sin/cos. 化 d(sin). d(cos)

* $u^4+1 = (u^4+2u^2+1)-2u^2.$ $\longleftarrow$ 配方

* $\int \frac{dx}{\sqrt{\tan x}}$

定积分

- 定积分



任取 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<b=x_n$

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

在 $[x_i, x_{i+1}]$ 上任取 ξ_i $\quad h_i = f(\xi_i)$

$S_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i f(\xi_i) \qquad \lambda = \max\{\Delta x_i\}$

$S = \lim \cdots\cdots$

$\boxed{\text{定积分}}$ $f(x) \in \mathrm{Func}[a,b]$. 若对 $[a,b]$ 的任一种分法 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$.

令 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, 任取 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

当 $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\} \longrightarrow 0$ 时, $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \longrightarrow I$, I 为确定极限.

称 I 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分. 记作 $\int_a^b f(x)\,dx$.

即 $\int_a^b f(x)\,dx := \lim\limits_{\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}\to 0} \left(\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right)$. 称 $f(x)$ (Riemman-) 可积.

- Darboux 和

记 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上上下确界为 M 和 m, 即 $m \le f(x) \le M$.

记 $M_i = \sup |f(x)|$, $x \in [x_{i-1}, x_i]$

$m_i = \inf |f(x)|$. $x \in [x_{i-1}, x_i]$

$\overline{S}(P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ ———— Darbonx 上和, Darbonx 大和

$\underline{S}(P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$ ———— Darbonx 下和, Darbonx 小和

则 $\underline{S}(P) \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \le \overline{S}(P)$

[引理] 若在原划分中加入新的划分, 则 $\overline{S}(P)$ 不增, $\underline{S}(P)$ 不减. (1)

[证明] 只要证明在原划分中再增加一个划分点时, 大和不增, 小和不减 即可.

记原划分为 P, 增加新的分点 $x' \in [x_{i-1}, x_i]$, 得到新划分 P'.

记 $f(x)$ 在 $[x_{i-1}, x']$ 和 $[x', x_i]$ 上的上确界为 M_i', M_i''. 有:

$$M_i' \le M_i, \quad M_i'' \le M_i$$

则
$$\begin{aligned}
\overline{S}(P') &= \sum_{j=1}^{i-1} M_j\Delta x_j + M_i'(x'-x_{i-1}) + M_i''(x_i - x') + \sum_{j=i}^{n} M_j \Delta x_j \\
&\le \sum_{j=1}^{i-1} M_j\Delta x_j + M_i(x' - x_{i-1} + x_i - x') + \sum_{j=i}^{n} M_j\Delta x_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} M_j\Delta x_j = \overline{S}(P)
\end{aligned}$$

小和同理. 有 $\underline{S}(P') \ge \underline{S}(P)$.

$\square$

[引理] 对任意 $\overline{S}(P_1)\in\overline{\mathbb{S}}$, $\underline{S}(P_2)\in\underline{\mathbb{S}}$、恒有 $m(b-a)\le\underline{S}(P_2)\le\overline{S}(P_1)\le M(b-a)$

（即：所有 Darboux 大和都大于等于任意 Darboux 小和） (2)

[证明] $\underline{S}(P_2)=\sum\limits_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i\ \ge\ \sum\limits_{i=1}^{n}m\Delta x_i\ =m(b-a)$

$$\overline{S}(P_1)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i\le\sum_{i=1}^{n}M\Delta x_i=M(b-a)$$

$$\underline{S}(P_2)\le\underline{S}(P_2\cup P_1)\le\overline{S}(P_1\cup P_2)\le\overline{S}(P_1)$$ （由引理1知）. □

$\boxed{\text{[引理3]（Darboux定理）}}$

对任意在 $[a,b]$ 上有界的函数 $f(x)$，恒有 $\lim\limits_{\lambda\to0}\overline{S}(P)=L$，$\lim\limits_{\lambda\to0}\underline{S}(P)=l$.

（其中 $L,l\ne$ DNE 且 $L,l\ne(\pm)\infty$）

$$L=\inf\{\overline{S}(P)\mid\overline{S}(P)\in\overline{\mathbb{S}}\}$$
$$l=\sup\{\underline{S}(P)\mid\underline{S}(P)\in\underline{\mathbb{S}}\}$$

[证明] $\forall\varepsilon>0$，$\exists\ \overline{S}(P')\in\overline{\mathbb{S}}$，则有 $0\le\overline{S}(P')-L<\frac{\varepsilon}{2}$

（否则 $L+\frac{\varepsilon}{2}$ 也是 $\overline{\mathbb{S}}$ 的下界，此时 L 必不为下确界，矛盾）

设 P' 划分为：$a=x_0'<x_1'<x_2'<\cdots<x_p'=b$.

取 $\delta=\min\left\{\Delta x_1',\Delta x_2',\cdots,\Delta x_p',\ \dfrac{\varepsilon}{2(p-1)(M-m)}\right\}$

对任意满足 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}(\Delta x_i)<\delta$ 的划分 P：$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$

在 $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ 中插入 $\{x_j'\}_{j=0}^{p}$，得新划分 $P^*=P\cup P'$.

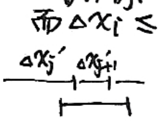
由引理1. $\overline{S}(P^*)-\overline{S}(P')\le0$ （可将 P^* 视为往 P' 里加分点）

对划分 P 的区间 $[x_{i-1},x_i]$，有两种情况：

(1) (x_{i-1},x_i) 中无新插入分点. 则该区间在 $\overline{S}(P^*)$ 和 $\overline{S}(P)$ 中的项都是 $M_i\Delta x_i$，差和. 对 $\overline{S}(P)-\overline{S}(P^*)$ 无贡献

(2) (x_{i-1},x_i) 中有新插入分点. 这样的区间最多 $(p-1)$ 个.

$\forall i,\forall j$，而 $\Delta x_i\le\lambda<\delta\le\Delta x_j'$ $(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,p)$，则在每个这样的区间中只有1个新插入的分点.



（否则 $\Delta x_j'<\Delta x_i$，矛盾）

$$\overset{M\ \text{放大}}{M_i}(x_i-x_{i-1})-\Big[M_i'(x_j'-x_{i-1})+\overset{\boxed{\text{缩小到}m}}{M_i''}(x_i-x_j')\Big]$$
$$\le(M-m)(x_i-x_{i-1})<(M-m)\delta$$

于是 $0\le\overline{S}(P)-\overline{S}(P^*)<(p-1)(M-m)\delta\le\frac{\varepsilon}{2}$.

则 $$0\le\overline{S}(P)-L=\underset{\frac{\varepsilon}{2}}{\underset{\wedge}{\left[\overline{S}(P)-\overline{S}(P^*)\right]}}+\underset{0}{\underset{\wedge}{\left[\overline{S}(P^*)-\overline{S}(P')\right]}}+\underset{\frac{\varepsilon}{2}}{\underset{\wedge}{\left[\overline{S}(P')-L\right]}}$$
$$<\frac{\varepsilon}{2}+0+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

$\therefore\lim\limits_{\lambda\to0}\overline{S}(P)=L$.

对 Darboux 小和，同理. □

[定理]. 有界 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积 $\Leftrightarrow$ 对任意划分 P, $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}(\Delta x_i)\longrightarrow 0$ 时,

有 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\overline{S}(P)=L=l=\lim\limits_{\lambda\to 0}\underline{S}(P)$.

[证明] 由极限定义. $\forall\varepsilon>0$. $\exists\delta>0$ 使对任意划分 P: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$

和任意点 ξ_i, $\xi_i\in(x_{i-1},x_i)$

若 $f(x)$ (有界) 可积.

当 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}(\Delta x_i)<\delta$ 时, 有 $0\cancel{\le|\overline{S}(P)-\underline{S}(P)|<\frac{\varepsilon}{2}}$.

其中 $I:=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$ $\quad 0\le\left|\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i-I\right|<\frac{\varepsilon}{2}$.

充分性显然. $\underline{S}(P)\le\left(\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\right)\le\overline{S}(P)$

则 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\overline{S}(P)=L=l=\lim\limits_{\lambda\to 0}\underline{S}(P)$ 时, $I=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i=L$.
(可积)

必要性. 取 ξ_i' 是 $[x_{i-1},x_i]$ 满足:

$$0\le M_i-f(\xi_i')<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\quad\text{的数.}$$

$$\left(M_i=\sup_{[x_{i-1},x_i]}f(x)\right)$$

则 $\left|\overline{S}(P)-\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i')\Delta x_i\right|=\sum\limits_{i=1}^n\left(M_i-f(\xi_i')\right)\Delta x_i<\sum\limits_{i=1}^n\frac{\varepsilon\Delta x_i}{2(b-a)}=\frac{\varepsilon}{2}$

$$\left|\overline{S}(P)-\left(I:=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\right)\right|\le\left|\overline{S}(P)-\sum_{i=1}^n f(\xi_i')\Delta x_i\right|+\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i')\Delta x_i-I\right|$$
$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

则 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\overline{S}(P)=I$.

同理可证 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\underline{S}(P)=I=\lim\limits_{\lambda\to 0}\overline{S}(P)$. □

[定理'] 记 $\omega_i=M_i-m_i$ 为 $f(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上的振幅.

则 有界 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积 $\Leftrightarrow$ 对任意划分. $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}(\Delta x_i)\longrightarrow 0$ 时.

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n\omega_i\Delta x_i=0.$$

[推论] 闭区间上连续函数必可积.

[证明] $f\in C[a,b]\Leftrightarrow f\in C^*[a,b]$ (一致连续)

$\forall\varepsilon>0$. $\exists\delta$ 使 $|x'-x''|<\frac{\varepsilon}{b-a}$. $\quad(x',x''\in[a,b])$

$$|\omega_i|=|M_i-m_i|=M_i-m_i<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

$$\Rightarrow\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n\omega_i\Delta x_i<\varepsilon.\quad\checkmark$$

[推论] 闭区间上单调函数必可积.

[定理'] 有界$f(x)$在$[a,b]$可积 $\Leftrightarrow$ 对任意给定的$\varepsilon>0$，$\exists P$使 $\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon$.

[证明] Darboux定理中的证明实际上是：只要$\exists P'$使 $0\leqslant \bar{S}(P')-L<\frac{\varepsilon}{2}$.

对任意P使 $\lambda=\max\limits_{1\leq i\leq n}(\Delta x_i)<\delta$ 都有 $0\leqslant \bar{S}(P)-L<\varepsilon$. $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(\omega_i\Delta x_i)_P<2\varepsilon'$

令$\varepsilon'=\frac{1}{2}\varepsilon \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(\omega_i\Delta x_i)_P<\varepsilon$. ∎

(对小和也有类似结论)

[推论] 闭区间上只有有限个不连续点的有界函数可积.

"跃度"$\longrightarrow$最大$M-m$. 可找出划分$\longrightarrow <\varepsilon$.

- 定积分性质 (前提：所列定积分都存在)

1) 规定 $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx \Rightarrow \int_a^a f(x)dx=0$.

2) $\int_a^b dx=b-a$

3) $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$ (k为常数)

4) $\int_a^b[f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$.

[证] 左$=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[f(\xi_i)\pm g(\xi_i)]\Delta x_i=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\pm\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}g(\xi_i)\Delta x_i=$右

5) $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

[证] <1> $a<c<b$. 在划分时可永远取c为一个分点. $\sum\limits_{[a,b]}f(\xi_i)\Delta x_i=\sum\limits_{[a,c]}f(\xi_i)\Delta x_i+\sum\limits_{[c,b]}f(\xi_i)\Delta x_i \xrightarrow{\lambda\to 0}$ 原式.

<2> $a<b<c$. $\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx \Rightarrow \int_a^b f(x)dx=-\int_b^c f(x)dx+\int_a^c f(x)dx$

$=$右.

6) 若$f(x)\geq 0$. ($x\in[a,b]$) 则 $\int_a^b f(x)dx\geq 0$. (保号性/保序性)

$\Rightarrow f(x)\geq g(x)$ ($x\in[a,b]$) $\int_a^b f(x)dx\geq\int_a^b g(x)dx$

$\Rightarrow \left|\int_a^b f(x)dx\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|dx$ ($a<b$) [证] $-|f(x)|\leqslant f(x)\leqslant|f(x)|\longrightarrow$ ✓

☆: $|f(x)|$可积，$f(x)$未必可积. $f(x)=\begin{cases}1 & (x\in\mathbb{Q})\\ -1 & (x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\end{cases}$

7) $M=\max\limits_{[a,b]}f(x)$, $m=\min\limits_{[a,b]}f(x)$. $m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)dx\leqslant M(b-a)$ ($a<b$)

- 积分中值定理

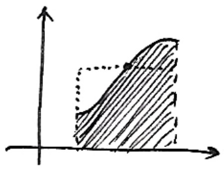
$\boxed{\text{若} f(x)\in C[a,b]，\text{则至少存在一点} \xi\in[a,b] \text{使} \int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)}$

[证] $m=\underset{[a,b]}{\mathrm{Min}}\, f(x)$，$M=\underset{[a,b]}{\mathrm{Max}}\, f(x)$，则 $m\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\leq M$

由介值定理，存在 $\xi\in[a,b]$ 使 $f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$
(连续函数)

[注] 可把 $f(\xi)=\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$ 理解为平均值.

(面积相等)



$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}=\frac{1}{b-a}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\frac{b-a}{n}=\frac{1}{n}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \longleftarrow \text{平均值!}$$

若 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上都可积.
$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号
则 $\exists\, \eta\in[m,M]$ (m, M: $f(x)$ min, Max)
使 $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \eta\int_a^b g(x)\,dx$

- Hölder 不等式

$f(x), g(x)\in C[a,b]$ 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\ (p,q>0)$

则 $$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{1/q}$$

- 积分上限的函数及其导数

$\boxed{\text{定理1}}$ $f(x)\in C[a,b]$，变上限函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数. 称其为 $\boxed{\text{变上限函数}}$.

引理. $f(x)$ 可积 $\Rightarrow \int_a^x f(t)\,dt$ 连续.

[证] $\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt \leq M\cdot\Delta x$

$\Delta x\to 0$. $\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt\to 0$. 连续

[证] $\forall x, x+h\in[a,b]$

$$\frac{\Phi(x+h)-\Phi(h)}{h}=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \overset{\text{中值}}{=} f(\xi) \quad (\xi\in[x,x+h])$$

[注] $\frac{d}{dx}\int_x^b f(t)\,dt=-f(x)$

$\frac{d}{dx}\int_a^{\varphi(x)} f(t)\,dt = f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)$

$\frac{d}{dx}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\,dt=\frac{d}{dx}\left[\int_a^{\varphi(x)} f(t)\,dt+\int_{\psi(x)}^{a} f(t)\,dt\right]$.

- 其它一些不等式

$\boxed{\text{Schwartz 不等式}}$ $\left[\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right]^2\leq\int_a^b f^2(x)\,dx\cdot\int_a^b g^2(x)\,dx$

[证] $\forall t$. $\int_a^b [tf(x)+g(x)]^2\,dx\geq 0 \rightarrow \Delta\leq 0 \rightarrow \checkmark$

- 微积分基本定理：Newton-Leibniz 公式

$\boxed{\text{Newton-Lebnitz 公式 / 微积分基本定理}}$ 设 $f(x)\in C[a,b]$，$F(x)$ 在 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数.
则 $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) =: F(x)\Big|_a^b$ 或 $[F(x)]_a^b$.

[证] 由前面的定理1. $\int_a^x f(x)\,dx$ 是 $f(x)$ 的一个原函数. 记 $F(x)=\int_a^x f(x)dx+C$

令 $x=a$. 得：$C=F(a)$. 故 $\int_a^x f(x)\,dx = F(x)-F(a)$

令 $x=b$. 得：$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$. □

注意：$\Phi'(x)=f(x)$，$\Phi(x)$ 未必是原函数！(可能在有些点处无定义)

$\downarrow$ 瑕点

e.g. $\int_0^2 \frac{(x-1)^2+1}{(x-1)^2+x^2(x-2)^2}\,dx$.

[解] 分母长得像 $\square^2+\Delta^2$. 看看 $\left(\arctan\frac{x(x-2)}{x-1}\right)' = \frac{(x-1)^2+1}{(x-1)^2+x^2(x-2)^2}$. ✓.

注意到 $\arctan\frac{x(x-2)}{x-1}$ 在 $x=1$ 处无定义.

$$F(x)=\begin{cases}\arctan\frac{x(x-2)}{x-1} & (x\in[0,1))\\ \frac{\pi}{2} \quad \text{—— } x\to1^- & (x=1)\end{cases}$$

$\longleftarrow$ 只有在这个点特别赋值 对积分无影响（面积）

$$\tilde{F}(x)=\begin{cases}-\frac{\pi}{2} \quad \text{—— } x\to1^+ & x=1\\ \arctan\frac{x(x-2)}{x-1} & x\in(1,2]\end{cases}$$

赋值需让 $F(x)$ 连续
一般考虑单边极限（保证单边极限）

$$\int_0^2 原 = \int_0^1 原 + \int_1^2 原 = F(x)\Big|_0^1 + \tilde{F}(x)\Big|_1^2 = \frac{\pi}{2}-0+0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi$$

- 定积分的换元积分法与分部积分法

$\boxed{\text{定理1}}$ $f(x)\in C[a,b]$. 单值函数 $x=\varphi(t)$ 满足：

1) $\varphi(t)\in C[\alpha,\beta]$. $\varphi(\alpha)=a$. $\varphi(\beta)=b$.

2) 在 $[\alpha,\beta]$ 上 $a\leq\varphi(t)\leq b$.

则 $\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$

$[\beta,\alpha]$
$[\beta,\alpha]$ 也成立
仍然 $\int_\alpha^\beta$

[证] 显然两边都连续，故都可积.（实际上不定积分存在 即 原函数存在）

设 $F(x)$ 是一个原函数. $F(\varphi(t))$ 是 $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ 的原函数.

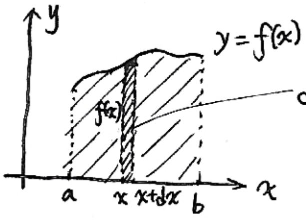
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) = F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha)) = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

[推论] $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\,d(\varphi(u)) = \int_a^b f(x)\,dx$

$\boxed{\text{定理2}}$ $\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$

- 定积分求解面积

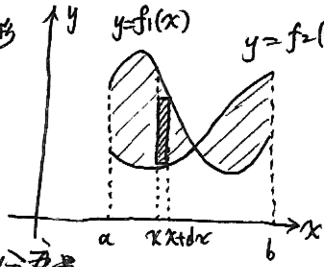
1) 平面图形面积：直角坐标



曲边梯形 $\xrightarrow{\text{近似}}$ 矩形

$dA = f(x)\,dx$.

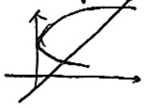
$A = \int_a^b f(x)\,dx$



$dA = |f_1(x) - f_2(x)|\,dx$

$A = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|\,dx$

可取 x 为积分变量，也可取 y 为积分变量. ← 怎么简便怎么来

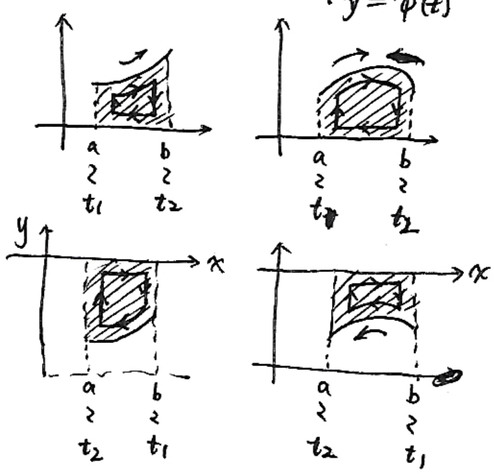
如  → dx：两段　dy：✓ 简便

$\boxed{\text{微元法}}$

(1) 局部量微分表达式：$dU = f(x)\,dx$
（近似值）

(2) 积分得精确值　$U = \int_a^b f(x)\,dx$

含参数方程：曲边梯形由 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 给出时，按 $\boxed{\text{顺时针方向}}$ 确定起终点 t_1, t_2



$dA = \psi(t)\,d(\varphi(t))$

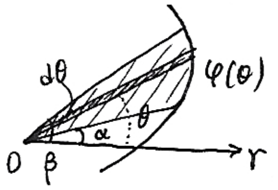
$A = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt$

e.g. 椭圆.

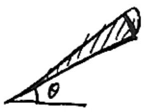
取1个象限算. $\times 4 \to \pi ab$

2) 平面图形面积：极坐标

$\varphi(\theta) \in C[\alpha, \beta]$ 且 $\varphi(\theta) \geq 0$.



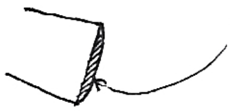
$[\alpha, \beta]$ 上取 $[\theta, \theta + d\theta]$.



$dA = \frac{1}{2}\varphi^2(\theta)\,d\theta$

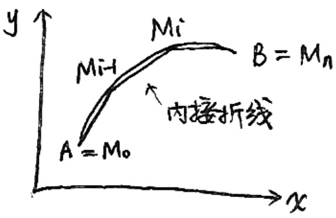
曲边扇形 $\xrightarrow{\text{近似}}$ 扇形

不用三角形？→ 有不可高阶无穷小的余量



$A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \varphi^2(\theta)\,d\theta$

3) 平面曲线弧长



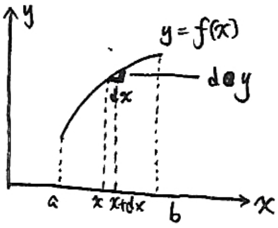
$\lambda = \text{Max}$ 折线段最大边长 $\to 0$. 折线长度 → 确定极限 I.

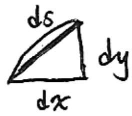
称 I 为 $\overset{\frown}{AB}$ 弧长.

即 $s = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} |M_i M_{i-1}|$

称此曲线弧 $\boxed{\text{可求长的}}$.

[定理] 光滑曲线弧都是可求长的.



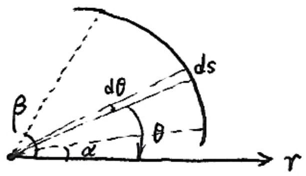


$$s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{1+y'^2}\,dx$$ —— 弧微分

$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$ $(\alpha\le t\le\beta)$ $\quad ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt$

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt$$

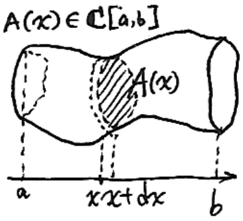


可把 $r,\theta\to x,y$ $\quad(x=r(\theta)\cos\theta,\ y=r(\theta)\sin\theta)$

$$ds=\sqrt{r^2(\theta)+[r'(\theta)]^2}\,d\theta.\qquad s=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\theta)+[r'(\theta)]^2}\,d\theta.$$

4) 已知平行截面面积函数的立体体积.

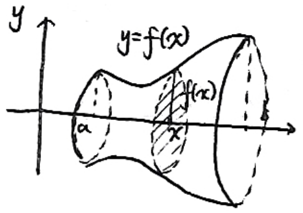
$A(x)\in C[a,b]$



$$dV=A(x)\,dx$$

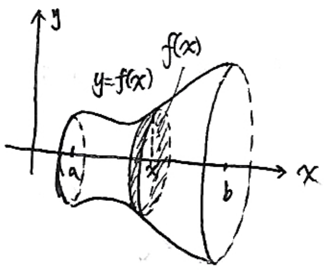
$$V=\int_a^b A(x)\,dx$$

旋转体体积



$$V=\int_a^b\pi[f(x)]^2dx$$

5) 旋转体侧面积



$[x,x+dx]$ 上圆台侧面积. $\quad dS=2\pi y\,ds$

$$=2\pi f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$

注意: $dS\ne 2\pi y\,dx$ 不是线性主部

参数方程: $S=\int_\alpha^\beta 2\pi\psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}\ \overset{x=a\tan u}{=\!=\!=}\ \int\frac{\sec^2u}{\sec^3u}\,du=\int\cos u\,du=\sin u+C=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}+C\qquad\left(\tan u=\frac{x}{a}\right)$$

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}=\frac{1}{a^2}\int\frac{a^2dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}=\frac{1}{a^2}\int\frac{(x^2+a^2)-x^2}{(x^2+a^2)^{3/2}}dx=\frac{1}{a^2}\left(\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}-\int x\,d(x^2+a^2)^{-1/2}\right)$$

$$=\frac{1}{a^2}\left(\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}-\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}+C$$

反常积分

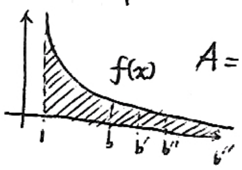
常义积分 $\begin{cases} \text{积分(上下)限有限} \\ \text{被积函数有界} \end{cases}$

↓ 推广

广义积分（反常积分）$\begin{cases} \text{无穷限} \\ \text{无界函数} \end{cases}$

~~无穷限的反常积分~~

- 无穷限的反常积分.



$A = \lim\limits_{b \to +\infty} \int_1^b f(x)\,dx$

$\boxed{\text{无穷(限反常)积分}}$ 1. $f(x) \in C[a,+\infty)$. 取 $b>a$. 若 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ 存在.

称 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx := \lim\limits_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx$.

称 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ $\boxed{\text{收敛}}$ 或 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上可积.

若极限不存在，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ $\boxed{\text{发散}}$ 或 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上不可积.

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\,dx + \lim\limits_{b\to+\infty}\int_b^c f(x)\,dx$

（c为任意取定的常数）

只要有一个极限不存在，即称 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$. $\boxed{\text{发散}}$.

注意：若出现 $\infty-\infty$，则发散.（并非不定型）

无穷积分也称为 $\boxed{\text{第一类反常积分}}$.

引入记号 $F(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$. $F(-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$. （$F(x)$为原函数）

则：$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a)$

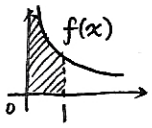
$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{b} = F(b) - F(-\infty)$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = F(+\infty) - F(-\infty)$

于是我们得到了无穷积分的 $\boxed{\text{Newton-Leibniz 公式}}$.

使用前提：积分 $\boxed{\text{不发散}}$

- 无界函数的反常积分



$A=\int_0^1 f(x)\,dx=?$ $\lim\limits_{b\to 0}\int_b^1 f(x)\,dx$.

$\boxed{\text{无界函数的反常积分}}$ 1. $f(x)\in C(a,b]$，且 $f(x)$ 在点 a 右邻域无界.

(瑕积分)

取 $\varepsilon>0$. 若 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$ 存在，

则 $\int_a^b f(x)\,dx := \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的反常积分.

此时称 $\int_a^b f(x)\,dx$ $\boxed{\text{收敛}}$ 或 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上可积.

若极限不存在. 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 发散 或 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上不可积.

2. 对 $f(x)\in C[a,b)$ 且 $f(x)$ 在点 b 左邻域无界. 类似.

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon\to 0^-}\int_{a}^{b+\varepsilon} f(x)\,dx. \text{ 或 } \underline{\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx}$$

3. 若 $f(x)\in C[a,c)\cup(c,b]$. $(a<c<b)$. 且 $f(x)$ 在点 c 邻域内无界

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx.$$

无界函数积分 (瑕积分) 也称为 $\boxed{\text{第二类反常积分}}$. 无界点称作 $\boxed{\text{瑕点 (奇点)}}$.

※ 有限个第一类间断点 ⟶ 那是常义积分.

有无穷间断点 才需 第二类反常积分.

原函数符号回顾: $F(b^-)=\lim\limits_{x\to b^-}F(x)$. $F(b^+)=\lim\limits_{x\to b^+}F(x)$

若 b 为瑕点. $\int_a^b f(x)\,dx = F(b^-)-F(a)$

若 a 为瑕点 $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a^+)$

若 a,b 均瑕点. $\int_a^b f(x)\,dx = F(b^-)-F(a^+)$ ← 实际上考虑到 $F(b^-)=F(b)$. $F(a)=F(a^+)$

连续函数 $\boxed{\text{区间}}$ 上 积分都可这一形式

1) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$. $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 有定义. → $\int_a^\infty f(x)\,dx$ 收敛? $\left(\times,\ f(x)=\frac{1}{x}\right)$

2) $\int_a^\infty f(x)\,dx$ 收敛 → $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$? / $f(x)$ 在 $[a,\infty)$ 上有界? $(\times,\times)$

[反例] $f(x)=\begin{cases} n+1 & x\in\left[n,\ n+\frac{1}{n(n+1)^2}\right] \\ 0 & x\in\left(n+\frac{1}{n(n+1)^2},\ n+1\right) \end{cases}$ $(n=1,2,\cdots)$ $f(x)\geq 0$ 且无界

3) $\int_a^\infty f(x)\,dx$ 收敛 且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$. 则 $A=0$ (√)

~~4) $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛. 则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$ (×) (e.g. $f(x)=x\sin x^4$. → Dirichlet 知收敛~~

- 两个重要的反常积分

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\begin{cases}+\infty & ,p\le 1\\ \dfrac{1}{(p-1)a^{p-1}} & ,p>1\end{cases}\qquad (a>0)\qquad \boxed{\text{“}p\text{积分”}}$$

$$\int_a^{b}\frac{dx}{(x-a)^q}=\int_a^{b}\frac{dx}{(b-x)^q}=\begin{cases}+\infty & ,q\ge 1\\ \dfrac{(b-a)^{1-q}}{1-q} & ,q<1\end{cases}\qquad \boxed{\text{带瑕点的}p\text{积分}}$$

- 换元

第一类反常积分 第二类反常积分

$$\int_a^{\infty}f(x)\,dx\xrightarrow{t=\frac{1}{x}}\int_0^{\frac{1}{a}}\frac{1}{t^2}f(t)\,dt\longrightarrow\int_0^{b}g(t)\,dt,\quad g(t)=\frac{f(t)}{t^2}$$

$$\int_1^{+\infty}g(u)\,du\longleftarrow-\int_1^{+\infty}\left(-\frac{1}{u^2}\right)f\left(b-\frac{b-a}{u}\right)du\xleftarrow{u=\frac{b-a}{b-x}}\int_a^{b}f(x)\,dx\quad(b\text{是瑕点})$$

$$g(u)=\frac{1}{u^2}f\left(b-\frac{b-a}{u}\right)$$

注意：同时包括两类反常积分时，应划分区间！

- Cauchy 主值

我们知道 $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x\,dx$ 发散.

但考虑 $\int_{-A}^{A}\sin x\,dx=\int_{-A}^{0}\sin x\,dx+\int_{0}^{A}\sin x\,dx=\cos 0-\underline{\cos(-A)+\cos A}-\cos 0$

$-\cos A+\cos A$ 与A无关.

$A\to\infty$. 则 $\int_{-A}^{A}\sin x\,dx$ 仍收敛

$\boxed{\text{Cauchy 主值}}$

$$(cpv)\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a}f(x)\,dx$$

$$(cpv)\int_a^{b}f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_a^{c-\varepsilon}f(x)\,dx+\int_{c+\varepsilon}^{b}f(x)\,dx\right)$$

(c为瑕点，$a<c<b$). 通常反常积分一个不收敛即发散

注意：主值意义下反常积分存在 $\not\Leftrightarrow$ 反常积分收敛

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)}=\int_0^{1}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)}+\int_1^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+a^n)}=\int_0^{1}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)}+\int_1^{0}-\frac{1}{t^2}\frac{1}{(1+\frac{1}{t^2})(1+\frac{1}{t^a})}dt$$

$$=\int_0^{1}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)}+\int_0^{1}\frac{x^a}{(x^2+1)(x^a+1)}dx=\int_0^{1}\frac{1}{x^2+1}=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

- 无穷限反常积分的收敛判别法

1. $f(x)\in C[a,+\infty)$. $f(x)\ge 0$ ---------→ $\int_a^{b}f(x)\,dx$ 随b↑而↑. 在$(a,+\infty)$上↑

若 $F(x)=\int_a^{x}f(u)\,du$ 在$[a,+\infty)$上有上界 ·······→ 单调有界数列必有极限(必收敛)

则反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$ 收敛

2. $f(x)\in C[a,+\infty)$. 对充分大的 x 有 $0\le f(x)\le g(x)$.

则 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散

[证]. 设 $x\in[X,+\infty)$ 时有 $0\le f(x)\le g(x)$. $\rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx = \underbrace{\int_a^X f(x)dx}_{const} + \int_X^{+\infty} f(x)dx$.

(也可: 不失一般性, 设 $x\in[a,+\infty)$ 时 $0\le f(x)\le g(x)$)

若 $\int_X^{+\infty} g(x)dx$ 收敛. 则 $0\le\int_X^t f(x)dx \le \int_X^t g(x)dx \longrightarrow$ 有上界 $\longrightarrow 1 \longrightarrow$ 收敛

若 $\int_X^{+\infty} f(x)dx$ 发散. $\int_X^t g(x)dx \ge \int_X^t f(x)dx$

$t\to\infty$. $\int_X^t f(x)dx \longrightarrow +\infty$. 故 $\int_X^t g(x)dx \longrightarrow +\infty$. 发散.

$(\because f(x)\ge 0)$

3. (Cauchy 判别法) 　　蓝: 比较判别法

设非负函数 $f(x)\in C[a,+\infty)$. $(a>0)$ 　　* p 积分可替换为任意收敛积分

1) 若存在 $M>0$, $p>1$. 对充分大的 x 有 $f(x)\le\frac{M}{x^p}$ 始终成立, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛.

2) 若存在 $N>0$. $p\le 1$. 对充分大的 x 有 $f(x)\ge\frac{N}{x^p}$ 始终成立, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

4. (极限判别法) 　　* p 积分可替换为任意发散积分

设 $f(x)\in C[a,+\infty)$, $f(x)\ge 0$. 满足 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x) = l$.

则有: 1) $p>1$, $0\le l<+\infty$. 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛. $- - - \to$ $M=l+\varepsilon$.

2) $p\le 1$, $0<l\le+\infty$. 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散. $- - - \to$ $N=l-\varepsilon.>0$.

$N=X>0\ (l=\infty)$

3) ※ 实际上在通过 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ 来判断 $f(x)$ 与 $g(x)$ 大小关系.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{1/x^p}$ 刻画了 $f(x)\longrightarrow 0$ 的速度
$\to 0$

5. 若 $f(x)\in C[a,+\infty)$, $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛. 则反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛

[证] $\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+|f(x)|]$. 　$0\le\varphi(x)\le|f(x)|$. $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ 收敛

$\int_a^{+\infty} f(x)dx = 2\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx - \int_a^{+\infty}|f(x)|dx$. 收敛

$\boxed{\text{绝对收敛}}$. $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛且 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛. 称 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

$\boxed{\text{条件收敛}}$ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛 但 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 发散. 称 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

5 的另一表述: $\boxed{\text{绝对收敛必收敛.}}$

6. $\boxed{\text{Cauchy 收敛原理}}$

反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ 对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $A_0 \geq a$，使得对任意 A，$A' \geq A_0$ 有 $\left|\int_A^{A'} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$。

- 积分第二中值定理

$\boxed{\text{积分第二中值定理}}$ $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调，则存在 $\xi \in [a,b]$，使

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,dx + g(b)\int_{\xi}^b f(x)\,dx$$

只证 $f(x)$ 连续且 g' 在 $[a,b]$ 上可积的情况。

[证] 记 $F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dF(x) = \overset{\because F(a)=0}{F(x)g(x)\Big|_a^b} - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx$$

$$= g(b)\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx$$

积分第一中值定理

$$= g(b)\int_a^b f(x)\,dx - F(\xi)\int_a^b g'(x)\,dx$$

$$= g(b)\int_a^b f(x)\,dx - [g(b)-g(a)]\int_a^{\xi} f(x)\,dx$$

$$= g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,dx + g(b)\int_{\xi}^b f(x)\,dx$$

- Abel 判别法与 Dirichlet 判别法

$\boxed{\text{Abel 判别法}}$ $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛，$g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调有界 $\Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ 收敛

$\boxed{\text{Dirichlet 判别法}}$ $F(A) = \int_a^A f(x)\,dx$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界，$g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调且 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$

[证明] Abel 判别法。 设 $|g(x)| \leq G$ $(x\in[a,+\infty))$

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx \text{ 收敛} \xrightarrow{\text{Cauchy 收敛}} \exists A_0 \geq a,\ 对 \forall A, A' \geq A_0 有 \left|\int_A^{A'} f(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2G}.$$

$$\left|\int_A^{A'} f(x)g(x)\,dx\right| \leq |g(A)|\cdot\left|\int_A^{\xi} f(x)\,dx\right| + |g(A')|\left|\int_{\xi}^{A'} f(x)\,dx\right|$$

$$\leq G\cdot\left|\int_A^{\xi} f(x)\,dx\right| + G\cdot\left|\int_{\xi}^{A'} f(x)\,dx\right|$$

$$< G\cdot\frac{\varepsilon}{2G} + G\cdot\frac{\varepsilon}{2G} = \varepsilon \quad (\because \xi \geq A \geq A_0)$$

Dirichlet 判别法。

$$\left|\int_A^{A'} f(x)g(x)\,dx\right| \leq \underbrace{|g(A)|}_{\downarrow\, 0}\cdot\underbrace{\left|\int_A^{\xi} f(x)\,dx\right|}_{有界} + \underbrace{|g(A')|}_{\downarrow\, 0}\underbrace{\left|\int_{\xi}^{A'} f(x)\,dx\right|}_{有界} < \varepsilon.$$

重要反常积分：$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ ← D判. 收 → $\boxed{\text{条件收敛}}$

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \geq \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1-\cos 2x}{2x} = \underset{(发)}{\frac{1}{2x}} - \underset{(收)}{\overset{D判}{\frac{\cos 2x}{2x}}}$$