Probability Theory and Mathematical Statistics 概率统计

Homework 1220-1223

邱一航 520030910155

12/22

8-1. 解: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$. $(\sigma^2 = 1.2)$ $(\mu_0 = 30)$

检验统计量: $\dfrac{\bar{X} - 30}{\sqrt{1.2}/\sqrt{6}} \sim N(0,1)$

拒绝域: $\left|\dfrac{\bar{X} - 30}{\sqrt{1.2}/\sqrt{6}}\right| > u_{\alpha/2} = 1.96$ 即 $\bar{X} > 30.88$ 或 $\bar{X} < 29.12$

计算得 $\bar{x} = 31.11$ 在拒绝域 $\therefore$ 拒绝 H_0

认为这批建筑用砖抗断强度与以往生产的砖抗断强度有显著差异 □

8-3. 解: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\sigma^2 = 40^2$. $H_0: \mu \geq \mu_0 = 10100$. $H_1: \mu < \mu_0$

检验统计量: $\dfrac{\bar{X} - 10100}{40/\sqrt{100}} \sim N(0,1)$ 单侧检验

拒绝域: $\dfrac{\bar{X} - 10100}{40/\sqrt{100}} < u_{1-\alpha} = -u_\alpha$ $\Rightarrow$ $\bar{X} < 10092.16$

$\bar{x} = 10000$ 在拒绝域 $\therefore$ 拒绝 H_0

认为这批显像管不合格 □

8-4. 解: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. σ 未知. $H_0: \mu = 0$ (不改变血压) $H_1: \mu \neq 0$

检验统计量: $\dfrac{\bar{X}}{S/\sqrt{n}} = \dfrac{\bar{X}}{\sqrt{17.66}/\sqrt{10}} \sim t(9)$

拒绝域: $\left|\dfrac{\bar{X}}{\sqrt{17.66}/\sqrt{10}}\right| > t_{\alpha/2}(9)$ $\Rightarrow$ $\bar{X} > 3.01$

$\bar{x} = 3.1$ 在拒绝域 $\therefore$ 拒绝 H_0

$\therefore$ 该药物会[redacted]改变血压 □

8-5. 解: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. σ 未知 $H_0: \mu \geq \mu_0 = 0.5\%$ $H_1: \mu < \mu_0$

检验统计量: $\dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \dfrac{\bar{X} - 0.5\%}{0.037\%/\sqrt{10}} \sim t(9)$ 单侧检验

拒绝域: $\dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} < t_{1-\alpha}(9) = -t_\alpha(9)$ $\Rightarrow$ $\bar{X} < 0.479\%$

$\bar{x} = 0.452\%$ 在拒绝域 $\therefore$ 拒绝 H_0

即认为该溶液水分含量显著小于 0.5% □

8-6. 解: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ σ未知 $H_0: \mu \le \mu_0 = 19400$ $H_1: \mu > \mu_0$

检验统计量: $\frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - 19400}{\sqrt{195600}/\sqrt{36}} \sim t(35)$ 单侧检验

拒绝域: $\frac{\bar{X} - 19400}{\sqrt{195600}/\sqrt{36}} > t_\alpha(35) \Rightarrow \bar{X} > 19525.$

$\bar{x} = 20100$ 在拒绝域 $\therefore$ 拒绝H_0

即 该地区房价上涨显著 □

8-7. 解: (1) 检验统计量: $\frac{\sum_{i=1}^{9}(X_i - \mu)^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(9)$ 其中 $\sigma_0^2 = 48$ 单侧检验

$\frac{\sum_{i=1}^{9}(X_i - \mu)^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_\alpha(9)$ 为拒绝域 $\Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{9}(X_i - 60)^2}{48} > 16.919$

$\because \frac{\sum_{i=1}^{9}(x_i - 60)^2}{48} \approx 12.3 < 16.919$ 在接受域 $\therefore$ 接受H_0 即 $\sigma^2 \le 48$ □

(2) μ未知. 检验统计量: $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$

拒绝域: $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_\alpha(8)$ 计算得: $s^2 = 71.03$

$\because \frac{(n-1)s^2}{48} \approx 11.84 < 15.507 = \chi^2_\alpha(8)$ 在接受域 $\therefore$ 接受H_0 即 $\sigma^2 \le 48$ □

8-8. 解: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ未知. $H_0: \sigma^2 = 1.2^2.$ $H_1: \sigma^2 \ne 1.2$

检验统计量: $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$ 其中 $\sigma_0 = 1.2$, $n = 15$

拒绝域: $\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right\} \cup \left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\right\}$

$\Rightarrow S^2 > 2.687$ 或 $S^2 < 0.5790$. 计算得 $s^2 = 2.1^2$ 在拒绝域

$\therefore$ 拒绝 H_0 认为纱的均匀度有显著变化 □

8-9. 解: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ μ未知 $H_0: \sigma^2 \le 0.3^2$ $H_1: \sigma^2 > 0.3^2$

检验统计量: $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$ 其中 $\sigma_0 = 0.3$, $n = 9$

拒绝域: $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_\alpha(n-1) \Rightarrow S^2 > 0.174$

而样本方差 $s^2 = 0.55$ 在拒绝域 $\therefore$ 拒绝H_0 即 认为出售产品存在质量问题 □

补充题1. 解: $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 先考察直径均值. $H_0: \mu=\mu_0$ $H_1: \mu\neq\mu_0$

σ已知. 检验统计量. $\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

计算得 $\bar{x}=3.86$ $s^2=0.1975$ 观测值: $\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}=4.11=: u_0$

$P\left(\left|\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right|>u_0\right)<2(1-\Phi(3.09))=0.002<\alpha=0.05$ ∴拒绝H_0

再考察方差. $H_0': \sigma_0\leq 0.1$ $H_1': \sigma_0>0.1$

μ已知. 检验统计量 $\dfrac{\sum_{i=1}^{25}(X_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(25)$

计算得 $\chi_0^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{25}(X_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2}=64.3$ 为观测值

$P\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{25}(X_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2}>\chi_0^2\right)<0.005$ ∴拒绝H_0'

综上: 不能认为车轴直径均值和方差满足要求 □

补充题2. 解: $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 先考察平均工作时间: $H_0: \mu\geq\mu_0$ $H_1: \mu<\mu_0$

σ已知. 检验统计量: $\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

计算得: $\bar{x}=43.4$ 观测值: $\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}=-1.8681=: u_0$

$P\left(\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}<u_0\right)=P\left(\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}>-u_0\right)>1-\Phi(1.87)=0.0307>\alpha=0.01$

∴接受H_0

再考察方差 $H_0': \sigma=\sigma_0$ $H_1': \sigma\neq\sigma_0$

μ已知. 检验统计量 $\dfrac{\sum_{i=1}^{5}(X_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(5)$

计算得 观测值 $\dfrac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2}=7.6751=:\chi_0^2$

$P\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{5}(X_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2}>\chi_0^2\right)>0.25>\alpha=0.01$ ∴接受H_0'

综上: 认为平均工作时间与工作时间的标准差满足要求 □

选做题 (12/23)

8-10\#. 解: $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ $X-Y\sim N(\mu_1-\mu_2,\sigma^2)$ σ^2未知

$H_0: \mu_1-\mu_2=0$. $H_1: \mu_1-\mu_2\neq 0$

检验统计量: $\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$, $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left((X_i-Y_i)-(\bar{X}-\bar{Y})\right)^2$

拒绝域: $\left|\dfrac{\bar{x}-\bar{y}-0}{S/\sqrt{n}}\right|>t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

计算得 $\frac{\bar{x}-\bar{y}-0}{s/\sqrt{n}}=\frac{2.33-0.57}{3.1893/\sqrt{10}}=1.76<t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\approx 2.262$

在接受域 ∴ 接受H_0 即 认为两种药物疗效没有显著差异 □

8-12*. 解: (1) $X\sim N(\mu_1,\sigma^2)$ $Y\sim N(\mu_2,\sigma^2)$ ∴ $X-Y\sim N(\mu_1-\mu_2,\sigma^2)$

σ 未知. $H_0: \mu_1-\mu_2=0$ $H_1: \mu_1-\mu_2\neq 0$

检验统计量: $\frac{\bar{X}-\bar{Y}-0}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$

拒绝域: $\left|\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\right|>t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$ 其中 $n_1=n_2=8$ $\alpha=0.05$

即 $\left|\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{7S_1^2+7S_2^2}{14}}\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}}\right|>t_{\frac{\alpha}{2}}(14)=2.145$

计算得 $\bar{x}=20.4$ $\bar{y}=19.4$ $S_1^2=0.8857$ $S_2^2=0.8286$

$\left|\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\frac{S_1^2+S_2^2}{2}}\sqrt{\frac{1}{4}}}\right|=2.160>2.145$ 在拒绝域 ∴ 拒绝H_0

即 认为平均断裂力不相等 □

(2) $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ $X-Y\sim N(\mu_1-\mu_2,\sigma^2)$

σ_1. σ_2. σ 未知 $H_0: \mu_1-\mu_2=0$ $H_1: \mu_1-\mu_2\neq 0$

检验统计量: $\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}((X_i-Y_i)-(\bar{X}-\bar{Y}))^2/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

拒绝域: $\left|\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\frac{1}{7}\sum_{i=1}^{8}((X_i-Y_i)-(\bar{X}-\bar{Y}))^2/\sqrt{8}}\right|>t_{\frac{\alpha}{2}}(7)=2.365$

计算得: $\left|\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\frac{1}{7}\sum_{i=1}^{8}((x_i-y_i)-(\bar{x}-\bar{y}))^2/\sqrt{8}}\right|=3.852>2.365$ 在拒绝域 ∴ 拒绝H_0

即认为平均断裂力不相等 □

(3) $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$. $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$. $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

μ_1, μ_2 未知. 检验统计量: $\frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$. 其中 $n_1 = n_2 = 8$

拒绝域: $\left\{\frac{S_1^2}{S_2^2} < F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)\right\} \cup \left\{\frac{S_1^2}{S_2^2} > F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)\right\}$

其中 $F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1) = F_{0.025}(7,7) = 4.99$, $F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1) = \frac{1}{4.99} \approx 0.20$

计算得 $\frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{0.8857}{0.8286} \approx 1.0689 < 4.99$ 接受 H_0

认为两种温度下断裂力方差相等. □