

## 6. Cauchy 收敛原理

反常积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛  $\Leftrightarrow$  对任意给定的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $A_0 \geq a$ . 使得对任意  $A$ ,  $A' \geq A_0$  有  $|\int_A^{A'} f(x) dx| < \varepsilon$ .

## • 积分第二中值定理

**积分第二中值定理**  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积,  $g(x)$  在  $[a, b]$  上单调. 则存在  $\xi \in [a, b]$ .

$$\text{使 } \int_a^b f(x) g(x) dx = g(a) \int_a^\xi f(x) dx + g(b) \int_\xi^b f(x) dx$$

只证  $f(x)$  连续且  $g'$  在  $[a, b]$  上可积的情况.

[证] 记  $F(x) = \int_a^x f(x) dx$

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = \int_a^b g(x) dF(x) = \frac{\cancel{F(a)=0}}{F(x) g(x)} \Big|_a^b - \int_a^b F(x) g'(x) dx$$

$$= g(b) \int_a^b f(x) dx - \int_a^b F(x) g'(x) dx \quad ) \text{ 积分第一中值定理}$$

$$= g(b) \int_a^b f(x) dx - F(\xi) \int_a^\xi g'(x) dx$$

$$= g(b) \int_a^b f(x) dx - [g(b) - g(a)] \int_a^\xi f(x) dx$$

$$= g(a) \int_a^\xi f(x) dx + g(b) \int_\xi^b f(x) dx$$

## • Abel 判别法与 Dirichlet 判别法

**Abel 判别法**  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛,  $g(x)$  在  $[a, +\infty)$  上单调有界  $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) g(x) dx$  收敛

**Dirichlet 判别法**  $F(A) = \int_a^A f(x) dx$  在  $[a, +\infty)$  上有界,  $g(x)$  在  $[a, +\infty)$  上单调  
且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$

[证明] Abel 判别法.

设  $|g(x)| \leq G$  ( $\forall x \in [a, +\infty)$ )

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ 收敛} \xrightarrow{\text{Cauchy判别}} \exists A_0 \geq a. \text{ 对 } \forall A, A' \geq A_0 \text{ 有 } \left| \int_A^{A'} f(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2G}.$$

$$\left| \int_A^{A'} f(x) g(x) dx \right| \leq |g(A)| \cdot \left| \int_A^\xi f(x) dx \right| + |g(A')| \cdot \left| \int_\xi^{A'} f(x) dx \right|$$

$$\leq G \cdot \left| \int_A^\xi f(x) dx \right| + G \cdot \left| \int_\xi^{A'} f(x) dx \right|$$

$$< G \cdot \frac{\varepsilon}{2G} + G \cdot \frac{\varepsilon}{2G} = \varepsilon \quad (\because \xi \geq A \geq A_0)$$

Dirichlet 判别法.

$$\left| \int_A^{A'} f(x) g(x) dx \right| \leq |g(A)| \cdot \left| \int_A^\xi f(x) dx \right| + |g(A')| \cdot \left| \int_\xi^{A'} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

$\downarrow$  有界  $\downarrow$  有界

重要反常积分:  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \xrightarrow{\text{D判, 4X}} \left| \frac{\sin x}{x} \right| \geq \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1-\cos 2x}{2x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x} \xrightarrow{\text{4X}} \text{条件收敛}$

• 无界函数反常积分的收敛判别法

→ 无穷限反常积分.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx \quad (a \text{ 是瑕点}). \quad \text{令 } x = a + \frac{1}{u}.$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{1/(b-a)}^{1/\varepsilon} f(a + \frac{1}{u}) \frac{du}{u^2} = \int_{1/(b-a)}^{\infty} f(a + \frac{1}{u}) \frac{du}{u^2}.$$

负号放这里

蓝: 比较判别法

1. (Cauchy 判别法) 非负函数  $f(x) \in C[a, b]$ .  $a$  为瑕点.

若对  $\forall x > a$ .  $\exists M > 0$ ,  $q < 1$ .  $f(x) \leq \frac{M}{(x-a)^q}$  \*  $q$  积分可替换为任意收敛积分

$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx$  收敛

对  $\forall x > a$   $\exists N > 0$ ,  $q \geq 1$ .  $f(x) \geq \frac{N}{(x-a)^q}$   $\Rightarrow \int_a^b f(x) dx$  发散

2. (极限判别法)  $f(x) \in C[a, b]$ .  $f(x) \geq 0$ .

\*  $q$  积分 --- 任意发散积分

$$\lim_{x \rightarrow a^+} (x-a)^q f(x) = l$$

也可替换

1)  $0 < q < 1$ ,  $0 \leq l < +\infty$ .  $\int_a^b f(x) dx$  收敛

收敛/发散积分

2)  $q \geq 1$ ,  $0 < l \leq +\infty$ .  $\int_a^b f(x) dx$  发散.

3. 绝对收敛必收敛. 条件收敛

4. (Cauchy 收敛原理)

$\int_a^b f(x) dx$  收敛  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$ , 使对  $\forall \eta, \eta' \in (0, \delta)$ , 有:

$$\left| \int_{b-\eta}^{b-\eta'} f(x) dx \right| < \varepsilon. \quad (b \text{ 不是瑕点})$$

5. (Abel 判别法)  $\int_a^b f(x) dx$  收敛,  $g(x)$  在  $[a, b]$  上单调有界  $\Rightarrow \int_a^b f(x) g(x) dx$  收敛

(Dirichlet 判别法)  $F(\eta) = \int_a^{b-\eta} f(x) dx$  在  $(0, b-a]$  上有界,

$g(x)$  在  $[a, b]$  上单调且  $\lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = 0$ .

[定理]  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛,  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上一致连续. 则  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

[证] 反证. 存在  $\varepsilon_0 > 0$ .  $\forall x > a$ .  $\exists x_0 > x$ .  $|f(x_0)| \geq \varepsilon_0$ . 不妨设  $f(x_0) \geq \varepsilon_0 > 0$ .

一致连续. 对  $\frac{\varepsilon_0}{2} > 0$ .  $\exists \delta \in (0, 1]$ .  $\forall x', x'' > a$ . 使  $|x-x'| < \delta$ . 有  $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon_0}{2}$ .

对任意给定  $A_0 \geq a$ . 取  $x_0 = A_0 + 1$ . 对  $\forall x, |x-x_0| < \delta_0$  有  $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon_0}{2}$ .

取  $A = x_0 - \frac{\delta_0}{2}$ .  $A' = x_0 + \frac{\delta_0}{2}$ .  $A > A_0$ ,  $A' > A_0$ .  $\therefore f(x) > f(x_0) - \frac{\varepsilon_0}{2} \geq \frac{\varepsilon_0}{2} > 0$ .

且  $\left| \int_A^{A'} f(x) dx \right| = \left| \int_{x_0 - \frac{\delta_0}{2}}^{x_0 + \frac{\delta_0}{2}} f(x) dx \right| > \frac{\varepsilon_0}{2} \delta_0 > " \varepsilon "$

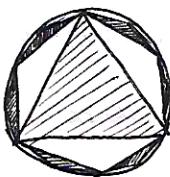
即  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  不收敛. 矛盾

## 数分Ⅱ. 级数, 多元积分

# 数学分析 II

## 数项级数

- 常数项级数



作圆内接正  $3 \times 2^n$  边形

$$S_0 = S_{\text{圆}}, \quad S_i = \text{比}(i-1) \text{ 增加的面积}.$$

$$S_{\text{圆}} = S_0 + S_1 + \dots + S_n + \dots$$

一个无穷数列  $\{u_n\}$ . 称  $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$  (无穷和) 为 常数项无穷级数.

又称 常数项级数

记作  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  或  $\sum u_n =: S$ .

$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$  称为数列  $\{u_n\}$  的部分和.

若  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  存在, 称无穷级数发散.

存在

收敛

级数收敛时. 余项  $r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$  则  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$

等比级数 / 几何级数:  $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$  ( $a \neq 0$ )

(i)  $|q| \neq 1$ .  $S_n = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ .

(i)  $|q| > 1$ .  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \text{DNE}$ . 发散无穷级数

(ii)  $|q| < 1$   $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1-q}$  无穷级数收敛  $\leftarrow q \neq 0$

(iii)  $|q| = 1$ .

(i)  $q = 1$ .  $S_n = na \rightarrow +\infty$  无穷级数发散

(ii)  $q = -1$ .  $S_n = \begin{cases} a & (n \text{ 奇}) \\ 0 & (n \text{ 偶}) \end{cases}$  无穷级数发散

综上 几何级数收敛.  $|q| < 1$   
发散  $|q| \geq 1$ .

- 级数收敛的必要条件

第一种判断级数发散的方法

$$\sum u_n \text{ 收敛} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

$\Leftrightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0 \Rightarrow \sum u_n \text{ 发散}$$

[注意] 调和级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散. 但  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

$$\arctan \frac{1}{2n^2} = \arctan \frac{1}{2n-1} - \arctan \frac{1}{2n+1} \\ \equiv \arctan(2n+1) - \arctan(2n-1)$$

$$(x = \arctan \frac{\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{2n-1} \cdot \frac{1}{2n+1} + 1} = \arctan \frac{(2n+1)-(2n-1)}{1+4n^2-1} \\ = \arctan \frac{2}{4n^2} = \text{左})$$

## • 无穷级数的性质

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = cS$ . (c为常数)

• 级数乘以非零常数后敛散性不变.

2.  $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ,  $\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = S \pm \sigma$

[注意] 发散之和未必发散.

e.g.  $u_n = (-1)^{2^n}$ ,  $v_n = (-1)^{2^{n+1}}$ ,  $u_n + v_n = 0$

e.g.  $u_n = \frac{1}{n}$ ,  $v_n = -\frac{1}{n+1}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) = 0.1$

3. 在级数前加上或减去有限项, 不会影响敛散性.  $\sum_{n=k}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n - \sum_{n=1}^{k-1} u_n$   
常数

4. 收敛级数加括号后所形成的级数仍收敛于原级数.

i.e.  $(u_1 + u_2) + (u_3) + \dots + (u_i + \dots + u_k) + \dots + (u_t) + \dots = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$

$S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ ,  $\sigma_n$  = 左边那个级数的部分和. 则  $\sigma_n$  是  $S_n$  的一个子列.

收敛数列必有收敛子列  $\longrightarrow$  收敛级数加括号后形成的级数收敛  
且极限相同  
收敛于原级数

[注意] 加括号后收敛, 原级数未必收敛.

e.g.  $(-1+1) + (-1+1) + \dots + (-1+1) + \dots = 0$ .

而  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$  必发散.

$(-1) + (+1-1) + \dots + (+1-1) + \dots = -1$

第二种判别级数发散的方法

加括号后收敛但收敛于不同级数,  
原级数发散

若数列发散, 其收敛子列收敛于不同极限  
有发散子列

第三种判别级数发散的方法  
加括号后有发散形式的  
级数发散

## • 柯西收敛原理

Cauchy 收敛原理  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛  $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, n > N$  时.

$$\forall p \in \mathbb{N}^+, |u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| < \varepsilon.$$

\* 本质:  $\{S_n\}$  的 Cauchy 收敛原理

$$|S_{n+p} - S_n|$$

e.g.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$   $\left| \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2} \right| \leq \frac{1}{n(n+1)} + \dots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \varepsilon$ .

## • 数列的上、下极限

**极限点** 有界数列  $\{x_n\}$ . 一个子列  $\{x_{n_k}\}$  使  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \xi$ . 称  $\xi$  为  $\{x_n\}$  的一个 极限点.

“ $\xi$ 是极限点” $\iff$ “ $\{x_n\}$ 组成的数集中落在 $\xi$ 的任意小邻域中的数都有无穷多个”  
 或：“ $\forall \varepsilon > 0$ ，存在 $\{x_n\}$ 中无穷多项属于 $\xi$ 的 $\varepsilon$ 邻域。”

记  $E = \left\{ \xi \mid \xi \text{ 是 } \{x_n\} \text{ 极限点} \right\}$ . \*自用符号:  $\left\{ \xi \right\}_{\{x_n\}}$ .

[定理]  $\sup E = \text{Max } E =: H$ ,  $\inf E = \text{Min } E =: h$ .

[证] ∵  $\{x_n\}$  有界, 故  $E$  有界    ∵  $\exists \varepsilon_k \in E$  ( $k=1, 2, \dots$ )     $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = H$ . (上确界定义)

取  $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$  ( $k=1, 2, \dots$ )，则在  $((\xi_i, s_i) + \varepsilon_i)$  中有  $\varepsilon_i = \frac{1}{k}$ 。

$$(不要求 \xi_i \neq \xi_j, i \neq j) \quad \text{不选取 } H - \varepsilon_k < \xi_k \leq H < H + \varepsilon_k$$

$\cup (\varepsilon_1, \varepsilon_1)$  中有无数项  $x_n$  ( ). 选一个记作  $x_0$

$\cup (\frac{q_1}{\varepsilon_2}, \varepsilon_2)$  中有无数项  $x_n \in (\frac{q_1}{\varepsilon_2}, \varepsilon_2)$ . 选 1 个记为  $x_{n_1}$ .

113

核心：构造收敛于 H 的子列

$U(\xi_k, \varepsilon_k)$  中有无数项  $x_n$ . 选一个记作  $x_{n_1} \in U(\xi_k, \varepsilon_k)$

② 得到无穷数列  $\{x_{n_k}\}$ . 而  $|x_{n_k} - H| = |x_{n_k} - \frac{\varepsilon}{\sum k}| + |\frac{\varepsilon}{\sum k} - H| < \varepsilon_k + \varepsilon_k = \frac{2}{k}$ .

$$\text{If } \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = H, \quad \therefore H \in E. \quad \therefore H = \sup E = \text{Max } E \quad (\because \text{Max } E \leq \sup E)$$

**上极限** 定义  $H = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup x_n$

$$\boxed{\text{下极限}} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$$

$$[\text{定理}] \quad \{x_n\} \text{ 有界数列} \quad \{x_n\} \text{ 收敛} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

**极限点(推广定义)** 数列  $\{x_n\}$ . 存在一个子列  $\{x_{n_k}\}$  使  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \xi$  ( $-\infty \leq \xi \leq +\infty$ )  
称  $\xi$  为  $\{x_n\}$  的一个极限点.

其中  $\xi = +\infty$  ( $-\infty$ ) 是  $\{x_n\}$  极限点  $\Leftrightarrow \forall G > 0, \exists \{x_n\}$  中无穷项 使  $x_n > G$  ( $x_n < G$ ).

**定理**  $\{x_n\}$  有界数列.

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = H \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N \text{ 有 } x_n < H + \varepsilon \quad \leftarrow \text{有界且极限}\}$$

(ii)  $\{x_n\}$  中有无穷多项使  $x_n > H - \varepsilon$

(把  $H - \varepsilon < x_n < H + \varepsilon$  拆开来, 弱化一个条件)

[证明]  $\Rightarrow: \forall \varepsilon > 0$ , 在  $[H+\varepsilon, +\infty)$  中至少有有限项 ( $\because H$  是最大极限上)

设有限项中最大项为  $x_n$ . 取  $N=n_0$ . 满足(i)

$H$  是极限上.  $\therefore U(H, \varepsilon) (\forall \varepsilon > 0)$  有无穷多项. (反证法证  $H$  不是 Max.)

无穷多项满足  $x_n > H - \varepsilon$

$\Leftarrow:$  由(i).  $\forall \varepsilon > 0$ . 有  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \leq H + \varepsilon$ . 由  $\varepsilon$  任意性.  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \leq H$ .

由(ii).  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \geq H - \varepsilon$ . 由  $\varepsilon$  任意性  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \geq H$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = H.$$

□

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = h \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$  (i)  $\exists N \in \mathbb{N}^+$ ,  $n > N$  有  $x_n > h - \varepsilon$ .  
 (ii)  $\{x_n\}$  中有无穷多项使  $x_n < h + \varepsilon$ .

**定理**  $\{x_n\}, \{y_n\}$  是两数列:

$$(1) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

要求: 右侧不是待定型  $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ .

(\*) 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在. 可将 " $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ " 和 " $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ " 替换为 " $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ " 且全改"=".

[证]. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = H_x$ . ( $x \in \{x, y\}$ )  $\forall \varepsilon > 0$ .  $\exists N$  使  $n > N$ .  $x_n < H_x + \varepsilon$ .  $y_n < H_y + \varepsilon$

$$(1) \quad x_n + y_n < H_x + H_y + 2\varepsilon. \quad \therefore \limsup_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq H_x + H_y + 2\varepsilon (\varepsilon \rightarrow 0) \quad \square.$$

$$(2) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} y_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} [(x_n + y_n) - x_n] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) + \liminf_{n \rightarrow \infty} (-x_n).$$

$$\text{即 } \begin{cases} \limsup_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} y_n \end{cases} \Rightarrow \text{取等.} \quad \square$$

**定理**  $\{x_n\}, \{y_n\}$  是两数列

$$(1) \quad x_n \geq 0, y_n \geq 0. \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \liminf_{n \rightarrow \infty} y_n$$

要求: 右侧不是待定型  
 $\%/\%, \times/\infty$ .

(\*) 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ,  $0 < x < +\infty$ . 替换 " $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ ". " $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ " 为 " $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ " 且全改"=".

此处不要求  $y_n \geq 0$ . 注意证明时需同时考虑  $H_x - \varepsilon$  和  $H_x + \varepsilon$ . 取 Max

其它情况: 取相反数即可.

**正项级数** 若  $u_n \geq 0$ , 称  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ . (实际上是“非负项级数”)

**定理** 正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛  $\Rightarrow$  部分和序列  $\{S_n\}$  ( $n=1, 2, \dots$ ) 有界.

[证] “ $\rightarrow$ ”: 若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 则  $\{S_n\}$  收敛  $\Rightarrow$  收敛必有界

“ $\leftarrow$ ”:  $\because u_n \geq 0$ ,  $\therefore \{S_n\}$  ↑, 而  $\{S_n\}$  有界, 故  $\{S_n\}$  收敛.  $\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛

**比较判别法**  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  是两个正项级数

且存在  $N \in \mathbb{N}_+$ , 对一切  $n > N$  有  $u_n \leq k v_n$  (常数  $k > 0$ ).

1) 若弱级数  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  收敛, 则弱级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛.

2) 若弱级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散, 则弱级数  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  发散.

1) [证].  $v \sim S_n$  部分和  $u \sim s_n$  部分和.

$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  收敛  $\Leftrightarrow \{v_n\}$  有界.  $\therefore \{v_n\}$  有界. 又  $\{S_n\}$  ↑.  $\therefore \{S_n\}$  收敛  $\sum u$  收敛.

对比:  $p$ -积分 (无穷积分)  $\longleftrightarrow$   $p$ -级数

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^p} dx \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad (p > 0)$$

$\Leftrightarrow p \leq 1$  发散

$\Leftrightarrow p \leq 1$ .  $\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}$ . 调和级数发散. 发散

$\Leftrightarrow p > 1$  收敛

$$= \frac{1}{(p-1)} \cdot \frac{1}{a^{p-1}}$$

$\Leftrightarrow p > 1$ .  $n-1 < x \leq n$  时.  $\frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{x^p}$ .

$$\text{则 } \frac{1}{n^p} = \int_{n-1}^n \frac{1}{x^p} dx \leq \int_{n-1}^n \frac{1}{x^p} dx$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \leq 1 + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = L = \frac{1}{p-1} + 1$$

收敛

[完全一致]

反常积分的比较判别法

↑ 极限形式

$$\text{或: } \frac{1}{n^p} \leq \int_{n-1}^n \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1} \left( \frac{1}{(n-1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}} \right)$$

$$\text{而 } \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{1}{(n-1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}} \right) = 1 - \frac{1}{(n+1)^{p-1}} \text{ 收敛}$$

收敛

**比较判别法极限形式**

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ . 正项级数.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$

(1)  $0 < l < \infty$ . 级数同收敛. 同发散

(2)  $l = 0$ .  $\sum u_n$  收敛.  $\sum v_n$  收敛

(3)  $l = \infty$ .  $\sum v_n$  发散.  $\sum u_n$  发散

[证明] 用  $|l - \varepsilon| \leq \frac{u_n}{v_n} \leq |l + \varepsilon|$  即可.

可取  $v_n = \frac{1}{n^p} \rightarrow$  直接用结论

### 比值判别法 (D'Alembert 判别法)

(i)  $p < 1$ . 收敛

$\lim_{n \rightarrow \infty} = \bar{p}$ .  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} = p$ . 设  $\sum u_n$  为正项级数且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = p$ . 则: (ii)  $p > 1$  或  $p = \infty$ . 发散

[推广]

(i)  $\bar{p} < 1$  收敛

(ii)  $\bar{p} > 1$  或  $\bar{p} = \infty$ . 发散

[证] 利用  $p - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < p + \varepsilon$  证.  $p < 1 \rightarrow \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(p+\varepsilon)^k u_{N+k}}{\sum u_n} < \boxed{\quad}$  收敛.

$p > 1 \rightarrow \sum_{n=N}^{\infty} (p-\varepsilon)^k u_{N+k} > \boxed{\quad}$  发散.

注意:  $p=1 \rightarrow$  无法判断. 可能收敛 可能发散

e.g.  $p$ -级数

### 根值判别法 (Cauchy 判别法)

设  $\sum u_n$  为正项级数且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = p$ . 则 (i)  $p < 1$ . 级数收敛

(ii)  $p > 1$  或  $p = \infty$  级数发散

[证] 利用  $(p-\varepsilon)^n < u_n < (p+\varepsilon)^n$ . (取  $\varepsilon < |1-p|$ )

[推广]  $\lim_{n \rightarrow \infty} = \bar{p}$ .  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} = p$

(i)  $\bar{p} < 1$  收敛

(ii)  $\bar{p} > 1$  或  $\bar{p} = \infty$  发散

[注意]  $p=1$  依然无法判断

e.g.  $p$ -级数

比值变化更大, 根值变也更小  $\rightarrow$  D'Alembert 判别法范围  $\subset$  Cauchy 判别法  
Cauchy更敏锐

能用 D 判一定也能用 C 判. 原因:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$

e.g.  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \boxed{\quad} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{2^{2^n}} + \frac{1}{3^{2^n}} + \frac{1}{2^{3^n}} + \dots$ .

### Raabe 判别法

设  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  ( $x_n \neq 0$ ) 是正项级数.  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = p$ . 则

(1)  $p > 1$ .  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  收敛. (2)  $p < 1$ .  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  发散

[证明] 设  $s > t > 1$ .  $f(x) = 1 + sx - (1+x)^t$ . 则  $f(0) = 0$ .  $f'(0) = s - t > 0$

故  $\exists \delta > 0$ . 使  $x \in (0, \delta)$  时. 有  $1 + sx > (1+x)^t$  成立 ( $\because f(x) > 0$ )  $\rightarrow$  取  $\delta < \frac{1}{n}$

$p > 1$  时:  $\bullet p > s > t > 1$  (取  $s, t$ )  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = p > s > t$

对充分大  $n$  有  $\frac{x_n}{x_{n+1}} > 1 + \frac{s}{n} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^t = \frac{(n+1)^t}{n^t}$

则有  $x_n \cdot n^t > x_{n+1} \cdot (n+1)^t$ .

$\therefore \{n^t x_n\}$  从某一项开始  $\downarrow$ . 即  $n^t x_n \leq A \Rightarrow x_n \leq \frac{A}{n^t}$   $t > 1 \rightarrow p$ -~~级数~~ 收敛

故收敛

$p < 1$  时.  $\frac{x_n}{x_{n+1}} < 1 + \frac{1}{n}$ . (充分大  $n$ )  $= \frac{n+1}{n}$ . 则  $(n+1)x_{n+1} > nx_n$ .

$\{n x_n\}$  从某一项开始  $\uparrow$

即  $n x_n \geq A$ .  $x_n \geq \frac{A}{n}$ . (发散)

故发散

$$p=1: \text{e.g. } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \text{ 使 } \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = p = 1.$$

$q > 1$  收敛       $q \leq 1$  发散

### 积分判别法

$f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上有定义.  $f(x) \geq 0$ . 设  $f(x)$  在任意有限区间  $[a, A]$  上 Riemann 可积.

取一单调增且趋于  $+\infty$  的数列  $\{a_n\}$ :  $a = a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$

$$u_n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x) dx.$$

反常积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  与正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  同时收敛或同时发散于  $+\infty$ .

$$\text{且 } \int_a^{+\infty} f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x) dx.$$

特别地, 当  $f(x) \downarrow$ . 取  $a_n = n$ . 则反常积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  与正项级数  $\sum_{n=N}^{\infty} f(n)$ .  
 $(N = [a]+1)$  同时收敛或同时发散

[证] 设  $u_n$  部分和  $S_n$ .

$$\forall A > a. \exists n \text{ 使 } a_n \leq A < a_{n+1}. \text{ 则 } S_{n+1} \leq \int_a^A f(x) dx \leq s_n$$

$\{S_n\}$  收敛  $\rightarrow \lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(x) dx$  收敛且收敛于相同极限

$\{S_n\}$  发散  $\rightarrow \lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(x) dx$  发散

特别地, 取  $a_n = n$ . 当  $n \geq N = [a]+1$ .  $f(n+1) \leq u_n = \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n)$

故  $\sum_{n=N}^{\infty} f(n)$  与  $\sum_{n=N}^{\infty} u_n$  同敛散

从而  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  与  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  同敛散

[注意] 由反常积分收敛性  $\rightarrow$  级数收敛性 不需要  $f(x) \geq 0$  条件. 逆向不成立条件.

e.g.  $f(x) = \sin x$ .  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  发散. 取  $a_n = 2n\pi$ .  $u_n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x) dx = 0$  收敛

### 任意项级数



#### 级数的 Cauchy 收敛原理

级数  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  收敛  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+$  使

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_m| = \left| \sum_{i=n+1}^m x_i \right| < \varepsilon$$

对  $\forall m > n > N$  成立

$$\Leftrightarrow \dots \dots |x_{n+1} + \dots + x_{n+p}| < \varepsilon, \dots \dots$$

特别地, 取  $p=1$  ( $m=n+1$ ). 退化为“必要条件”:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

**Leibniz 级数 (交错级数)** 设  $u_n > 0$ .  $u_1 - u_2 + u_3 - \dots + (-1)^{n-1} u_n + \dots = \sum u_n$ .

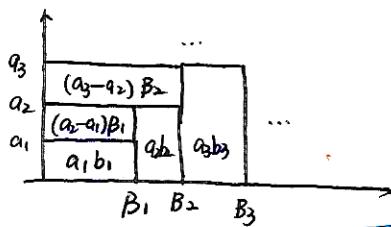
**Leibniz 判别法** 若交错级数满足条件: 1)  $|u_n| \geq |u_{n+1}|$ . 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ .

则  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$  收敛且  $S \leq u_1$ . 余项  $|r_n| \leq u_{n+1}$  ( $\forall n$ )

**Abel 变换**  $\{a_n\}, \{b_n\}$  是两数列. 记  $B_k = \sum_{i=1}^k b_i$  ( $k=1, 2, \dots$ )

$$\text{则 } \sum_{k=1}^p a_k b_k = a_1 B_1 + \sum_{k=2}^{p-1} (a_{k+1} - a_k) B_k$$

$$\begin{aligned} [\text{证}] \quad \sum_{k=1}^p a_k b_k &= a_1 B_1 + \sum_{k=2}^{p-1} a_k (B_k - B_{k-1}) = a_1 B_1 + \sum_{k=2}^p a_k B_k - \sum_{k=2}^p a_k B_{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{p-1} a_k B_k + a_p B_p - \sum_{k=1}^{p-1} a_{k+1} B_k = -\sum_{k=1}^{p-1} (a_{k+1} - a_k) B_k + a_p B_p \quad \square \end{aligned}$$



离散版本的分部积分

**Abel 引理** 设 (1)  $\{a_n\}$  单调数列. (2)  $\{B_k\}$ . ( $B_k = \sum_{i=1}^k b_i$ ,  $k=1, 2, \dots$ ) 有界.

即: 存在  $M > 0$ .  $\forall k$ . 成立  $|B_k| \leq M$

$$\text{则 } \left| \sum_{k=1}^p a_k b_k \right| \leq M (|a_1| + 2|a_p|)$$

$$[\text{证}] \quad \left| \sum_{k=1}^p a_k b_k \right| = a_p B_p - \sum_{k=1}^{p-1} (a_{k+1} - a_k) B_k \leq M|a_p| + M|a_1| + M|a_p| = M(|a_1| + 2|a_p|)$$

$$M|a_1| + M(a_p - a_1)$$

**Abel-Dirichlet 判别法(级数)** 若以下两个条件有一个能满足, 则  $\sum a_n b_n$  收敛:

(1) (Abel 判别法)  $\{a_n\}$  单调有界,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛

(2) (Dirichlet 判别法)  $\{a_n\}$  单调  $\rightarrow 0$ .  $\left\{ \sum_{k=1}^n b_k \right\}$  有界

\* 和反常积分类比:

(1)  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛  $\Rightarrow g(x)$  在  $[a, +\infty)$  上单调有界,

(2)  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  有界  $\Rightarrow g(x) \not\in [a, +\infty)$  上单调且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$

$$F(A) = \int_a^A f(x) dx \text{ 有界}$$

Abel 判别法适用范围是 Dirichlet 判别法适用范围的真子集.

**【证】** (1) 设  $|a_n| \leq M$ .  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛, 由 Cauchy 收敛原理,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists N$  使  $\forall n > N$ .  $\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k$  有界.

由 Abel 引理得:  $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| < \varepsilon (|a_{n+1}| + 2|a_{n+p}|) \leq 3M\varepsilon \rightarrow 0$ .

Cauchy 收敛原理, 得证

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .  $\forall \varepsilon > 0$ .  $\exists N$  使  $n > N$  时  $|a_n| < \varepsilon$ . 设  $\left| \sum_{k=1}^n b_k \right| \leq M$ . 令  $B_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k$  有界.

$$B_k = \left| \sum_{k=1}^{n+k} b_k - \sum_{k=1}^n b_k \right| \leq 2M. \rightarrow \text{Abel 引理: } \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| < 6M\varepsilon.$$

e.g.  $\sum (\sin nx) a_n$  收敛

$$x \neq 2k\pi \text{ 时有 } 2 \sin \frac{x}{2} \sum_{k=1}^n \sin kx = \frac{\text{和差化积}}{\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{2n+1}{2} x} \Rightarrow \left| \sum_{k=1}^n \sin kx \right| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|}$$

再用 Dirichlet 判别法

### 条件收敛与绝对收敛

**绝对收敛必收敛。** (三角不等式 + Cauchy 收敛) 逆向不可, e.g.  $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

$\sum x_n$  为任意项级数, 定义:

$$x_n^+ = \frac{|x_n| + x_n}{2} = \begin{cases} x_n, & x_n > 0 \\ 0, & x_n \leq 0 \end{cases} \quad (n=1, 2, \dots) \rightarrow \text{正项级数}$$

$$x_n^- = \frac{|x_n| - x_n}{2} = \begin{cases} -x_n, & x_n < 0 \\ 0, & x_n \geq 0 \end{cases} \quad (n=1, 2, \dots) \rightarrow \text{正项级数}$$

$$\text{有: } x_n = x_n^+ - x_n^-, \quad |x_n| = x_n^+ + x_n^- \quad (n=1, 2, \dots)$$

**定理**  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  绝对收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^-$  都收敛; ( $\because 0 \leq x_n^+ \leq |x_n|, 0 \leq x_n^- \leq |x_n|$ )

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  条件收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^-$  都发散到  $+\infty$ .

绝对收敛级数的性质:

1) 绝对收敛级数不因项位置改变而改变. 即 **加法交换律 (无限意义)**.

称收敛级数  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  的项重新排列得到的新级数  $\sum x'_n$  为  $\sum x_n$  的**更序级数**.

条件收敛不满足: e.g.  $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ .

[证明] ① 正项级数.

$$\sum_{k=1}^n x'_k \leq \sum_{k=1}^n x_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x'_n \text{ 收敛}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} x'_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

反之有

$$\sum_{k=1}^n x_k \leq \sum_{k=1}^n x'_k \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} x'_n$$

② 任意项级数.  $\sum x'_n^+ = \sum x_n^+$ .  $\sum x'_n^- = \sum x_n^-$

得  $\sum |x'_n|$  绝对收敛  $\Rightarrow \sum x'_n$  收敛且  $\sum x'_n = \sum x_n$

### Riemann 定理

$\sum x_n$  条件收敛.  $\forall a. -\infty \leq a \leq +\infty$

存在  $\sum x_n$  的更序级数  $\sum x'_n$  满足  $\sum x'_n = a$ .

更序级数

[证明] 利用  $\sum x_n^+$ ,  $\sum x_n^-$ . 条件收敛  $\rightarrow \sum x_n^+ < \infty$ ,  $\sum x_n^- < \infty$

一些正项  $\leftarrow$  必存在最小的  $n_1 \in \mathbb{N}^+$  使  $x_1^+ + \dots + x_{n_1}^+ > a$ .

一些负项  $\leftarrow$  必存在最小的  $m_1 \in \mathbb{N}^+$  使  $x_1^- + \dots + x_{m_1}^- - x_2^- - \dots - x_{n_1}^- < a$

一些正项  $\leftarrow$  必存在最小的  $n_2 \in \mathbb{N}^+$  使  $x_1^+ + \dots + x_{n_1}^+ + x_{n_1+1}^+ + \dots + x_{n_2}^+ - x_1^- - \dots - x_{n_1}^- > a$

$$\therefore x_n^+ = x_n$$

$$\therefore x_n^- = x_n$$

得  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  在一个更序级数  $\sum_{n=1}^{\infty} x'_n$ . 部分和在  $a+x_{n_1}^+$  与  $a-x_{n_1}^-$  之间摆动

$\sum x_n$  收敛  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^+ = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^- = 0$ . ( $\because x_n \rightarrow 0$ .  $0 \leq x_n^+(x_n^-) \leq |x_n| \rightarrow 0$ )

2) 绝对收敛级数的乘法

$\sum u_n$  与  $\sum v_n$  绝对收敛，其和为  $S$ . ①. 则对  $u_i, v_j$  按任意顺序排列得到的级数  $\sum w_n$  绝对收敛，且  $\sum w_n = S$  ②  
 $( \sum w_n = (a_1+a_2+\dots+a_n+\dots)(b_1+b_2+\dots+b_n+\dots) )$

(当时大概忘记补了)

多元微积分  
函数项级数

R: 几个定理互推

~~函数项级数~~

~~函数项级数~~

一列函数  $\{u_n(x)\}$ , ( $x \in [a, b]$ ).  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

处处可导但不连续:  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} (\cos 3^n x)$  (2, 3 可换为其它数) Weierstrass 函数

→ 导数:  $\left(\frac{3}{2}\right)^n \sin(3^n x)$

# 函数项级数

- 一致收敛

**点态收敛**: 数项级数意义上的收敛。

**收敛点**:  $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  在  $E \subset \mathbb{R}$  上有定义。对  $x_0 \in E$ , 若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$  收敛，称  $x_0$  为  $\sum u_n(x)$  的收敛点。

**收敛域**:  $D := \{x \in E \mid \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ 收敛}\}$

**和函数**:  $S: D \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x).$

称  $\sum u_n(x)$  点态收敛于  $S(x)$ .

另表述: 若  $\forall x \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists N(x, \varepsilon)$ . 使  $\forall n \geq N(x, \varepsilon)$ . 使  $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$   
称  $\sum u_n(x)$  点态收敛于  $S(x)$ .

常用反例: 1) 连续函数的极限不连续。

$$S_n(x) = x^n, (x \in (-1, 1]).$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \begin{cases} 1 & x=1 \\ 0 & x \in (-1, 1), \end{cases}$$

2)  $S_n(x) = 2^{-n} \cos(3^n x)$ .  
求导与取极限  
不可交换。  
 $S'_n(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^n (-\sin(3^n x))$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = 0 \rightarrow (\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x))' = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n(x) = \infty \text{ DNE.}$$

3) 积分与取极限不可交换。

把  $[0, 1]$  中有理数排成一列  $\{r_1, r_2, \dots\}$

$$S_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in \{r_1, \dots, r_n\} \\ 0 & x \in [0, 1] \setminus \{r_1, \dots, r_n\} \end{cases}$$

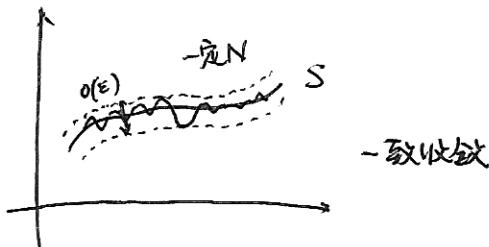
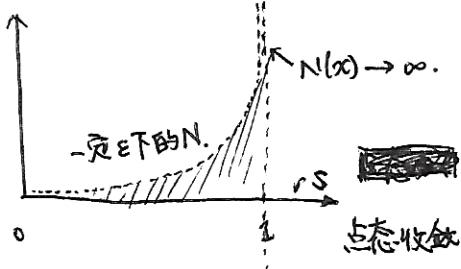
$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cup [0, 1] \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \cup [0, 1]. \end{cases}$$

Dirichlet 函数

黎曼可积  $\rightarrow$  黎曼不可积  
(有断点) (无界)

**一致收敛**: 若  $\forall x \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon)$  使  $\forall n \geq N(\varepsilon)$ . 成立  $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$ .  
称  $\sum u_n(x)$  一致收敛于  $S(x)$ . 即  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$  使  $\forall n \geq N, \forall x \in D, |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$ .

此时:  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \Rightarrow S(x) \stackrel{\text{def}}{\iff} S_n = \sum_{k=1}^n u_k \Rightarrow S.$



**内闭一致连续** 若  $\forall [a, b] \subset D, S_n \Rightarrow S$  (in  $[a, b]$ ). 称  $S_n$  在  $D$  上内闭一致收敛于  $S$ .

-致连续的等价描述:  $f, g$  定义在  $D$  上.  $\exists d(f, g) := \sup_{x \in D} |f(x) - g(x)|$ .

设  $\{S_n\}$  在  $D$  上点态收敛于  $S$ . 则  $\boxed{S_n \Rightarrow S \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d(S_n, S) = 0}$

**距离** 非负性. 对称性. 三角不等式

$$\begin{aligned} d: & \text{①非负: 显然. ②对称性: 显然. ③ } d(f, h) = \sup |f(x) - h(x)| \\ & = \sup |f(x) - g(x) + g(x) - h(x)| \\ & \leq \sup (|f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|) \\ & \leq \sup |f(x) - g(x)| + \sup |g(x) - h(x)| \\ & = d(f, g) + d(g, h) \end{aligned}$$

$S_n \Rightarrow S \Leftrightarrow \forall \text{ 点列 } \{x_n\} \text{ in } D, \lim_{n \rightarrow \infty} [S_n(x_n) - S(x_n)] = 0.$

[证明]  $\Leftarrow$ : 反证. 用于判断非一致收敛. 找一数列  $\{x_n\}$  使  $\lim_{n \rightarrow \infty} [S_n(x_n) - S(x_n)]$  或  $= \text{DNE}$ .

若  $S_n \not\Rightarrow S$ .  $\exists \varepsilon > 0$  使对  $\forall N$ .  $\exists n > N$  使  $|S_n(x) - S(x)| \geq \varepsilon$ .  
 取  $N=1$ . 找到这个  $n_1$  和对应的  $x_1$ . 记  $x_1 =: y_{n_1}, S_{n_1}$ .  
 $N=n_1, x_2 =: y_{n_2}, S_{n_2}, \dots$

得一数列  $\{x_n\}$ . 此时有  $|S_{n_k}(y_{n_k}) - S(y_{n_k})| \geq \varepsilon$ .

补充: 取  $n \in \mathbb{N} \setminus \{n_1, n_2, \dots\}$ . 或者  $\lim_{n \rightarrow \infty} [S_n(x_n) - S(x_n)] \geq \varepsilon > 0$ .  
 或者  $\lim = \text{DNE}$ . 一定不为 0.  $\square$

## 一致收敛的判别法与性质

### 1) 连续性保持.

$$\begin{cases} S_n \Rightarrow S \text{ in } [a, b] \\ S_n \in C[a, b] \end{cases} \Rightarrow S \in C[a, b].$$

$$\begin{aligned} [\text{证}] |S(x_0+h) - S(x_0)| &\leq |S(x_0+h) - S_n(x_0+h)| + |S_n(x_0+h) - S_n(x_0)| + |S_n(x_0) - S(x_0)| \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon \end{aligned}$$

$\square$

## 2) Cauchy 收敛原理

$$S_n \xrightarrow{in D} S \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N. \forall m > n > N \text{ 有: } \forall x \in D \text{ 有 } |S_n(x) - S_m(x)| < \varepsilon.$$

[证]  $\Rightarrow:$   $\Leftarrow:$   $\forall x \in D$ . 则  $\{S_n(x)\}$  是 Cauchy 列.  $\exists \xi(x) \in \mathbb{R}$  s.t.  $S_n(x) \rightarrow \xi(x)$  ( $n \rightarrow \infty$ )  
令  $S_\infty(x) = \xi(x)$ .

由  $\forall \varepsilon > 0, \exists N. \forall n > N$  有  $\forall x \in D$  有  $|S_m(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ .  
 $\forall m \rightarrow \infty$ . 则  $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ .  $\square$

## [推论] Cauchy 收敛原理 (常数项级数)

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \xrightarrow{in D} S \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0. \exists N. \forall n > N \forall p \in \mathbb{N}^*. \text{ 有 } \forall x \in D \text{ 有 } \left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon.$$

## 3) Weierstrass 比较判别法

若  $\{u_n(x)\} (x \in D)$  满足:  $|u_n(x)| \leq a_n \in \mathbb{R}$  且  $\sum a_n$  收敛 ( $< +\infty$ )  $\Rightarrow \sum u_n$  -致收敛  
( $\forall x \in D$ )

## 4) Abel-Dirichlet 判别法

若满足下列条件之一, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$  收敛.

(1) (Abel)  $\{u_n(x)\}$  (关于  $n$ ) 单调且在  $D$  上一致有界.  $\sum v_n(x)$  在  $D$  上一致收敛.

(2) (Dirichlet)  $\{u_n(x)\}$  (关于  $n$ ) 单调且  $u_n(x) \xrightarrow{in D} 0$ .  $\{\sum v_n(x)\}$  一致有界

类比: 常数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  ( $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}. \forall x \in D$  有  $|\sum b_n(x)| \leq M$ )

(Abel)  $a_n$  单调有界.  $\sum b_n$  收敛

(Dirichlet)  $a_n$  单调  $\rightarrow 0$ .  $\{\sum b_n\}$  有界. ( $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}. |\sum b_n| < M$ )

反常积分  $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$

(Abel)  $f(x)$  单调有界.  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  收敛.

(Dirichlet)  $f(x)$  单调  $\rightarrow 0$  ( $x \rightarrow \infty$ )

$G(x) = \int_a^{+\infty} g(x) dx$  有界  
[ $a, +\infty$ ] 上

[证明] (核心: 常数项级数版本的 Abel 引理)  $\leftarrow$  高散版本的 分部积分.

$$\begin{aligned} & \left| u_1(x)v_1(x) + u_2(x)v_2(x) + \dots + u_n(x)v_n(x) \right| \quad \text{记 } V_n(x) = v_1(x) + \dots + v_n(x). \\ & \sum_{k=1}^n u_k(x)v_k(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x) (V_k - V_{k-1}) = \sum_{k=1}^n u_k(x)V_k(x) - \sum_{k=1}^{n-1} u_{k+1}(x)V_k(x) \\ & = \sum_{k=1}^{n-1} (u_k - u_{k+1})V_k + u_n(x)V_n(x) \end{aligned}$$

$$\therefore \left| \sum_{k=1}^n u_k(x) v_k(x) \right| \leq \sum_{k=1}^{n-1} |u_k(x) - u_{k+1}(x)| |v_k| + \|u_n\| |v_n|.$$

$$\rightarrow \text{Abel: } |\dots| \leq \frac{2M(x)}{\epsilon} \left( \|u_n(x)\| + \|u_{n+1}(x)\| \right)$$

**欧拉 (Euler) 恒等式**

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}$$

$$e^{i\pi} = -1$$

Trick.  $\sum_{i=1}^N \left| \cos nx \right| \leq \left| \sum_{i=1}^N \frac{\sin((n+\frac{1}{2})\pi) - \sin((n-\frac{1}{2})\pi)}{2 \sin \frac{\pi}{2}} \right| = \left| \frac{\sin(N+\frac{1}{2})\pi - \sin(\frac{1}{2}\pi)}{2 \sin \frac{\pi}{2}} \right| < \left| \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2}} \right|$

**性质**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_a^b \frac{dx}{S_n(x)} \stackrel{?}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{dx}{S_n(x)}$$

**连续性定理**:  $S_n(x) \in C[a, b]$  ( $\forall n$ ) 且  $S_n \xrightarrow{in [a, b]} S$ . 则  $S \in C[a, b]$ .

[证明]  $\forall x_0 \in [a, b]$ . 由  $S_n(x) \in C[a, b]$  知  $\boxed{\quad}$

$\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  使  $\forall x, x' \in [a, b]$  有  $|S_n(x) - S_n(x')| < \epsilon$ .

另一方面, 由  $S_n \xrightarrow{in [a, b]} S$  知:

$\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists N \in \mathbb{N}^*$  使  $\forall n > N$ , 有  $\sup_{[a, b]} |S_n(x) - S(x)| < \epsilon$ .

则:  $\forall \epsilon > 0$ ,  ~~$\exists N_1 \in \mathbb{N}^*$  使  $n > N_1$  有  $\frac{1}{n} < \delta$~~ .

取  $\Delta x < \delta$ . 则有  $|S(x_0 + \Delta x) - S(x_0)| = |S(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0 + \Delta x) + S_n(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0) + S_n(x_0) - S(x)| < 3\epsilon$ .

.. 连续.

□

[推论]  $S_n(x) \in C[a, b]$  ( $\forall n$ ) 且  $S_n$  在  $(a, b)$  上内闭一致收敛于  $S(x)$ .

则  $S \in C(a, b)$ .

[证]. 在  $[a+\eta, b-\eta]$  上 (致) 连续  $\Rightarrow \checkmark$ .

**极限与积分可交换**:  $S_n(x) \in R[a, b]$  ( $\forall n$ ). 且  $S_n \xrightarrow{in [a, b]} S$  则  $S \in R[a, b]$   
(Riemann 积分保持性) 黎曼可积

[证明]. 由  $S_n \xrightarrow{in [a, b]} S$  知:  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists N_1 \in \mathbb{N}^*$  使  $\forall n > N_1$ , 有  $\sup_{x \in [a, b]} |S_n(x) - S(x)| < \epsilon$ .

由  $S_{N_0}(x) \in R[a, b]$   $\exists \text{分割} \pi: a = x_0 < x_1 < \dots < x_p = b$ .

使  $\sum_{i=1}^p c_i^{S_n(x)} (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^p \sup_{y \in [x_{i-1}, x_i]} |S_n(x) - S_n(y)| (x_i - x_{i-1}) < \epsilon$ .

对  $S(x)$  使用同一划分  $\pi$ .

$$\begin{aligned}
 \text{则 } \sum_{i=1}^p w_i^{S(x)} (x_i - x_{i-1}) &= \sum_{i=1}^p \sup_{[x_{i-1}, x_i]} S(x) - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} S(x) |(x_i - x_{i-1})| \\
 &\leq \sum_{i=1}^p (x_i - x_{i-1}) \left( \sup_{[x_{i-1}, x_i]} S(x) - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} S(x) \right) \\
 &= \sum_{i=1}^p \sup_{x, y \in [x_{i-1}, x_i]} |S(x) - S(y)| (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^p \sup_{x, y \in [x_{i-1}, x_i]} (x_i - x_{i-1}) \left( |S(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - S_n(y)| \right. \\
 &\quad \left. + |S_n(y) - S(y)| \right) \\
 &\leq \sum_{i=1}^p \left( \sup |S(x) - S_n(x)| + \sup |S_n(x) - S_n(y)| + \sup |S(y) - S_n(y)| \right) (x_i - x_{i-1}) \\
 &< \sum_{i=1}^p (\varepsilon + w_i^{S(x)} + \varepsilon) (x_i - x_{i-1}) = 2\varepsilon (b-a) + \varepsilon.
 \end{aligned}$$

$\therefore S \in R[a, b]$ .

□

[推论]  $S_n(x) \in R[a, b]$  ( $\forall n$ ) 且  $S_n \xrightarrow{\text{in } [a, b]} S$  则  $\int_a^b S(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b S_n(x) dx$ .

[证].  $\left| \int_a^b S_n(x) dx - \underbrace{\int_a^b S(x) dx}_{S(x) \in R[a, b]} \right| \leq \int_a^b |S_n(x) - S(x)| dx < \varepsilon (b-a)$ . □

故有定义

[推论].  $\forall u_n(x) \in R[a, b]$  ( $\forall n$ ).  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{[a, b]} S(x)$ .  $\text{且} \left( \partial \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx \right)$

②  $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(v) dv \xrightarrow{[a, b]} \int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} u_n(v) dv$

### 极限与微分可交换

$S_n \in C[a, b]$ . ( $\forall n$ ). ( $\text{即 } S_n \in C[a, b] \text{ 且 } S'_n \in C[a, b]$ ).

且 (1)  $\forall x \in [a, b]$ .  $\bullet S_n(x) \rightarrow S(x)$  ← 条件放宽  
(2)  $S'_n \xrightarrow{\text{in } [a, b]} r$

则:  $S \in C[a, b]$ . 且  $S'(x) = r(x)$ . ( $\text{即 } \frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} S_n(x)$ )

[证] ~~待完成~~

$\bullet S_n(x) = S_n(x_0) + \int_{x_0}^x S'_n(u) du$ . 取  $n \rightarrow \infty$  得  $S(x) = S(x_0) + \int_{x_0}^x r(u) du$

显然  $r$  连续 ( $\because S'_n$  连续)

$\therefore S \in C[a, b]$  且  $S'(x) = r(x)$ . (取  $x_0 \rightarrow x$ )  $\left( \int_{x_0}^x \lim_{n \rightarrow \infty} S'_n(u) du = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x S'_n(u) du \right)$

[注意] 以上三者均为 充分条件

(实际实数函数改变积分定义后, 要求  $|f_n(x)| < g(x)$  ( $n \neq \forall x \in [a, b]$ ) 且  $\int_a^b g(x) dx < +\infty$  即可)

← 的反例:  $S_n(x) = \frac{mx}{1+n^2x}$  ( $x \in [0, 1]$ )  $\not\rightarrow 0$  ( $\text{取 } x_n = \frac{1}{n}$ ) ~~待完成~~

该函数满足前两个性质。微分可交换反例： $f_n(x) = \int_0^x s_n(u) du$  即可。



**Dini 定理**  $s_n(x) \xrightarrow{[a,b]} s(x)$ . 且

(1)  $s_n \in C[a,b]$  ( $\forall n$ ). (2)  $s \in C[a,b]$  (3)  $\forall x \in [a,b]$ ,  $\{s_n(x)\}$  关于  $x$  单调

则  $s_n \xrightarrow{[a,b]} s$ .

$\Rightarrow$  Cantor 定理 证明 一致连续性

[证明] 反证。

$\exists \varepsilon_0 > 0$ .  $\forall N$ .  $\exists n > N$  使  $\exists x \in [a,b]$  成立  $|s_n(x) - s(x)| > \varepsilon_0$

取  $N=1$ , 得  $n_1$ . 取  $N=n_1$ . 得  $n_2$  ...

得到数列  $\{x_k\}$ . 使  $|s_{n_k}(x_k) - s(x_k)| > \varepsilon_0$

$\because \{x_k\}$  有界. 必有收敛子列  $\{x'_k\}$ .  $\lim_{k \rightarrow \infty} x'_k =: x_0$ .

对应的  $\{s_{n_k}\}$  为  $\{s'_k\}$ .

$\because s_n \in C[a,b]$  ( $\forall n$ ), 则  $\forall \varepsilon > 0$ .  $\exists K$  使  $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$  有  $|s_K(x) - s_K(x_0)| < \varepsilon$

因  $s_i(x_0) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} s(x_0)$   $\exists N_0$  使  $|s_{N_0}(x_0) - s(x_0)| < \varepsilon$ .

另一方面,  $s_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} s(x)$  为:  $\exists K_1$ ,  $k \geq K_1$  使  $|s_{N_0}(x_k) - s(x_k)| < \varepsilon$ .

由单侧性: 取  $j > \max\{K, N_0\}$ .  $|s_k(x_j) - s(x_j)| < |s_{N_0}(x_k) - s(x_k)| < \varepsilon$ .

$\Rightarrow |s_j(x_j) - s(x_j)| < \varepsilon_0$ . (取  $\varepsilon = \dots \varepsilon_0$ )

矛盾

## · 紧级数

**紧级数**: 形如  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$  称为紧级数。  $\rightarrow$  事实上, Taylor 展开就是一个紧级数  
(若  $f \in C^\infty$  且  $R_n \rightarrow 0$ )

方便起见, 讨论  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

由数项级数和 Cauchy 判别法.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n||x|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} |x| \sqrt[n]{|a_n|} \begin{cases} > 1 & \text{绝对收敛} \\ < 1 & \text{发散} \end{cases}$$

**收敛半径**  $R := \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$

收敛域:  $\in \begin{cases} (-R, R) \\ [-R, R) \\ (-R, R] \\ [-R, R] \end{cases}$

**Cauchy - Hadamard 定理**

对  $\sum a_n x^n$ . 当  $|x| < R$  时 绝对收敛  
当  $|x| > R$  时 发散

注意  $x = \pm R$  要特别处理。

**d'Alembert 判别法** 对  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ . 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = A$ . 则  $\sum a_n x^n$  收敛半径为  $\frac{1}{A}$ .

**Stirling 公式**  $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left( \frac{n}{e} \right)^n$

**Abel 第一定理** 若  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在  $x = \xi (\neq 0)$  处收敛, 则它在区间  $(-\lvert \xi \rvert, \lvert \xi \rvert)$  中绝对收敛.

若  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在  $x = \eta$  处发散, 则它在  $\lvert x \rvert > \lvert \eta \rvert$  均发散.

[证]  $\lvert x \rvert < \lvert \xi \rvert$  时.  $\sum \lvert a_n x^n \rvert = \sum \lvert a_n \xi^n \rvert \left| \frac{x}{\xi} \right|^n < M \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x}{\xi} \right|^n < +\infty$ .

( $\because \sum a_n \xi^n$  收敛  $\Rightarrow a_n \xi^n$  有界)

□

**Abel 第二定理** 设  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  收敛半径为  $R$ , 则

(i)  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在  $(-R, R)$  上内闭一致收敛.

(即  $\forall [a, b] \subset (-R, R)$ , 有  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在  $[a, b]$  上一致收敛)

(ii) 若  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在  $x = R$  处收敛,  $\forall [a, b] \subset (-R, R)$  有 ...

(iii)  $\dots -R \quad -[-R, R] \text{ 有 } \dots$

(iv)  $R, -R \quad \text{在 } [-R, R] \text{ 上一致收敛}$

简言之: 级数在包含于收敛域任意闭区间上一致收敛.

[证] ① 证明(i).  $[a, b] \subset (-R, R)$ . 取  $\xi = \max\{|a|, |b|\}$ .  $\exists \varepsilon > 0$  s.t.  $\xi + \varepsilon < R$ .

则有  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (\xi + \varepsilon)^n$  收敛  $\xrightarrow{\text{Abel-I}} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \left| \frac{x}{\xi} \right|^n$  收敛

由比较判别法知:  $\sum a_n x^n$  在  $[a, b]$  上一致收敛  
(Weierstrass)

② 证明(ii). 只需证  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在  $[-R, R]$  上一致收敛

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left( \frac{x}{R} \right)^n$ .  $\because \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$  单调有界,  $\left( \frac{x}{R} \right)^n$  一致收敛

由 Abel 判别法知.  $\sum a_n x^n$  一致收敛.

**幂级数性质**

□

1) 连续性:  $\sum a_n x^n$  收敛半径  $R$ . 则和函数  $\sum a_n x^n \in C(-R, R)$ .

若  $\sum a_n x^n$  在  $x = R$  (或  $-R$ ) 处收敛, 则  $\sum a_n x^n$  在  $R$  (或  $-R$ ) 处左 (右) 连续.

2) 逐项积分:  $a, b$  为  $\sum a_n x^n$  收敛域中任意两点.

则  $\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n dx$

$\frac{1}{n+1}$  提供可积的  
收敛

特别地, 取  $a=0$ ,  $b=x$ . 有  $\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n du = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n u^n du = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$

↑ 收敛半径一样! ↑  
但收敛区间可能扩大

3) 逐项求导:  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  收敛半径为  $R$ , 则在  $(-R, R)$  上可以逐项求导.

$$\text{即 } \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

↑ 收敛半径不变, 但收敛域可能减少 ( $n \geq 1$ )

\* 实际上, 上述结论对有限和无条件成立.

e.g.  $\left[ \sum \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \right] \xrightarrow{\text{求导}} (-1, 1)$      $\left[ \sum (-1)^{n-1} x^{n-1} \right] \xrightarrow{\text{积分}} (-1, 1)$

$\left[ \sum \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1} \right] \xrightarrow[\text{[-1, 1]}]{\text{求导}} \xrightarrow{\text{积分}} \left[ \sum (-1)^{n-1} x^{2n-2} \right]$

[例] 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{a} + \frac{2}{a^2} + \cdots + \frac{n}{a^n} \right)$  ( $a > 1$ ).

[解]  $\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n \left( \frac{1}{a} \right)^n$ . 得解.

### · 幂级数展开

**Taylor 级数** 若  $f(x) \in D^\infty$  in  $U(x_0, S)$ . 称  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$ .

特别: Taylor 展开  $f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$   
 ↑ 有理形式!  $\quad \parallel \quad (\xi \in (x, x_0))$   
 $\quad \quad \quad R_n(x)$

(要求:  $f(x) \in D^{n+1}$  in  $U(x_0, S)$ )

特别地,  $x_0 = 0$  称为 **Maclaurin 展开**.

**Maclaurin 级数**  $x_0 = 0$  时的形式.

**定理**  $f(x) \in D^\infty$ . 则  $f(x)$  能在  $U(x_0)$  内展开为 Taylor 级数  $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ .

**证明** 当  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$  令  $\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$ . 则  $f(x) = S_{n+1}(x) + R_n(x)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x) - S_{n+1}(x)] = 0 \quad (\text{if } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+1}(x))$$

**定理**  $f(x) \in D^\infty$ . 则  $f(x)$  能展开为  $x$  的幂级数, 则展开式唯一; 即 Maclaurin 级数.

**证明**  $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots, \quad x \in (-R, R) \quad a_0 = f(0)$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots$$

$$a_1 = f'(0)$$

$$f''(x) = 2! a_2 + \cdots + n(n-1) a_n x^{n-2} + \cdots$$

$$a_2 = \frac{f''(0)}{2!}$$

$$\dots \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

直接 MacLaurin 级数：写完，求  $R$ ，看看  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ ？

# Euclid 空间上的极限与连续

一维空间极限  $\xrightarrow{\text{推广}}$  高维空间极限

$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \rightarrow$  高维空间

**欧氏空间** (线代 Reprise)

引入内积  $\langle x, y \rangle$  (-般令  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ )

若内积满足: (1) (正定性)  $\langle x, x \rangle \geq 0$ . 且  $\langle x, x \rangle = 0$  iff.  $x = 0$ .

(2) (对称性)  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

(3) (线性性)  $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$

\* 复数空间内: 共轭线性性

则称该空间为 欧氏空间.

**内积性质** (Schwarz 不等式)  $\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$ .

特别地, 在空间为  $\mathbb{R}^n$  时, 内积的一般定义必满足这三个条件. (三个条件成为性质)

(2) (三角不等式)  $|x-z| \leq |x-y| + |y-z|$

**距离**: 满足 (1) (正定性)  $|x-y| \geq 0$  且  $|x-y| = 0$  iff.  $x=y$ . (2) (对称性)  $|x, y| = |y, x|$

**(欧氏) 距离**  $\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2} =: \rho(x, y)$  或  $\|x-y\|$ .

特别地,  $y=0$  时,  $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$ .

$n=1, 2, 3$  时  $\|x\|$  也写作  $|x|$ .

**趋于** 当  $\mathbb{R}^n$  中变元  $x$  与定元  $\alpha$  满足:  $\|x-\alpha\| \rightarrow 0$ . 称  $x$  趋于  $\alpha$ . 记作  $x \rightarrow \alpha$ .

即:  $x \rightarrow \alpha \Leftrightarrow x_k \rightarrow a_k$  (令  $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$ )  
 $(\forall k \in \{1, 2, \dots, n\})$

**$\delta$  邻域**  $\mathbb{R}^n$  中点  $\alpha$  的  $\delta$  邻域为:  $U(\alpha, \delta) = \{x \mid x \in \mathbb{R}^n, \|x - \alpha\| < \delta\}$

圆邻域

都可以

**方邻域**  $U(p_0, \delta) = \{(x_1, \dots, x_n) \mid |x_1 - x_{10}| < \delta, |x_2 - x_{20}| < \delta, \dots, |x_n - x_{n0}| < \delta\}$ .

无大区别

[Schwarz 不等式证明]

$$\langle \lambda x + y, \lambda x + y \rangle = \lambda^2 \langle x, x \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \geq 0. \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R})$$

$$\begin{array}{l} \lambda \text{ 有解} \\ (\lambda \in \mathbb{R}) \end{array} \quad \Delta = (2\langle x, y \rangle)^2 - 4 \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \leq 0$$

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ \Delta = 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle.$$

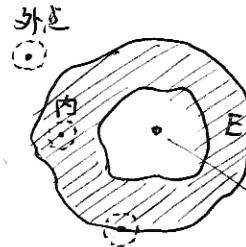
□

**点** 点  $P$ . 点集  $E$ . 均在  $\mathbb{R}^n$  空间中

**内点** 存在  $P$  的某邻域  $U(P, \delta) \subset E$ .  $P$  为  $E$  的内点.

**外点** 存在  $P$  的某邻域  $U(P, \delta) \cap E = \emptyset$ .  $P$  为  $E$  的外点.

**边界点** 任意  $P$  的邻域  $U(P, \delta)$  既包含  $E$  中内点也包含  $E$  的外点.  
 $P$  为  $E$  的边界点.



这个是  
也是  $E$  的  
一部分  
(边界点)

**聚点** 任意  $P$  的去心邻域  $\dot{U}(P, \delta)$  内总有  $E$  中的点. 则  $P$  是  $E$  的聚点.

[ 内点集合  $E_{in}$ . 边界点  $P_b$ . 外点集合  $E_{out}$  则有  $E_{in} \subset E$ .  $E_{out} \cap E = \emptyset$ .  
 $P_b$  可以  $\in E$  也可以  $\notin E$ . 聚点  $P_c$  可以  $\in E$  也可以  $\notin E$  ]

**导集**  $E$  的聚点的集合.

[ 定理 ]  $x$  是  $E$  的聚点  $\Leftrightarrow \exists \{x_k\}$  满足  $x_k \in E$ ,  $x_k \neq x$  ( $k=1, 2, \dots$ ) 使  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$ .

**区域** 这集  $E$ .  $E$  的内点集合:  $E^\circ$ .  $E$  的边界点集合:  $\partial E$ . 称为**边界**.  
( $E$ )

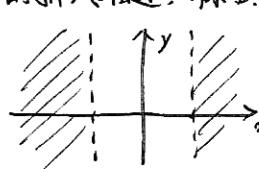
**开集**  $E = \dot{E}$ . 称  $E$

**闭包**  $\bar{E}^\circ = E \cup E'$   
 $\uparrow E$  的聚点集合

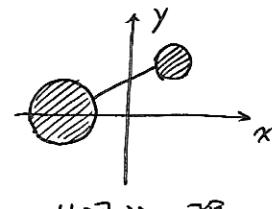
**闭集** 定义 ①  $E \supseteq \partial E$ . 称  $E$ . 定义 包含了  $E$  中的所有聚点. ← 其他定义

**连通 / 道路连通** 任意  $D$  中两点用一完全属于  $D$  的折线相连. 称  $D$ .

**开区域** 连通的开集.



**闭区域** 开区域及其边界.



整个空间和空集既是开域也是闭域.

非开域, 开集

非闭域, 闭集

**有界域** 对  $\forall D$ ,  $\exists K > 0$ , 使  $\forall P \in D$ , 与某定点  $A$  满足  $|AP| \leq K$ . 则称  $D$ .

**无界域**

**补集**  $\mathbb{R}^n \setminus E =: E^c$ .

**De Morgan's Law**  $(\bigcup_{\alpha} S_{\alpha})^c = \bigcap_{\alpha} S_{\alpha}^c$ ;  $(\bigcap_{\alpha} S_{\alpha})^c = \bigcup_{\alpha} S_{\alpha}^c$ .  $\alpha \Rightarrow$  可以无穷并/交

$\alpha$ : 任意指标, 甚至可以不可数无穷多个集交/并.

**定理** 任意一组开集的并集是开集; 任意一组闭集的交集是闭集.

有限个开集的交集是开集; 有限个闭集的并集是闭集.

**开覆盖**  $S \subset \mathbb{R}^n$ . 若  $\mathbb{R}^n$  中的一组开集  $\{U_{\alpha}\}$  满足  $\bigcup_{\alpha} U_{\alpha} = S$ . 称  $\{U_{\alpha}\}$  为  $S$  的一个开覆盖.

**紧集**  $S$  的任意一个开覆盖  $\{U_{\alpha}\}$  中总存在一个有限子覆盖 (即存在  $\{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^p$  (有限个开集),  $U_{\alpha_i} \subset \{U_{\alpha}\}$ ,  
满足  $\bigcup_{i=1}^p U_{\alpha_i} = S$ ). 称  $S$ .

Heine-Borel 定理  $\mathbb{R}^n$  上点集  $S$  是紧集  $\Leftrightarrow S$  是有界闭集

$\Rightarrow$ : 当  $S$  是紧集时, 显然  $\{U(x_i, 1) \subset \mathbb{R}^2 \mid x_i \in S\}$  是一个开覆盖, 则存在  $S$  的有限子覆盖, 即存在  $x_1, \dots, x_p$  使  $S \subseteq \bigcup_{i=1}^p U(x_i, 1)$ . 有限开覆盖的并有界, 则  $S$  有界.

反证  $S$  是闭集, 该存在  $S$  的聚点  $\alpha \notin S$ , 则有开集  $U_n = \{x \mid |x - \alpha| > \frac{1}{n}\}$   $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = \mathbb{R}^2 \setminus \{\alpha\} \supset S$ .  
 $\because \alpha$  是  $S$  的聚点, 取  $\delta = \frac{1}{n}$  可得  $\{x_n\}$ , 使  $x_n \neq \alpha$  且  $x_n \in S$ . 则任意  $U_i$  中只有有限个  $\{x_n\}$  中的点,  
即不存在  $S$  的有限子覆盖, 矛盾 ( $S$  是紧集)

$\Leftarrow$ : 反证.

Cantor 闭区域套定理

\* 列紧集

# 多元函数微分学

## • 偏导数

**偏导数** 若  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  在点  $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$  的某邻域内有  $\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_{10}, \dots, x_{i0} + \Delta x_i, \dots, x_{n0}) - f(x_{10}, \dots, x_{n0})}{\Delta x_i}$

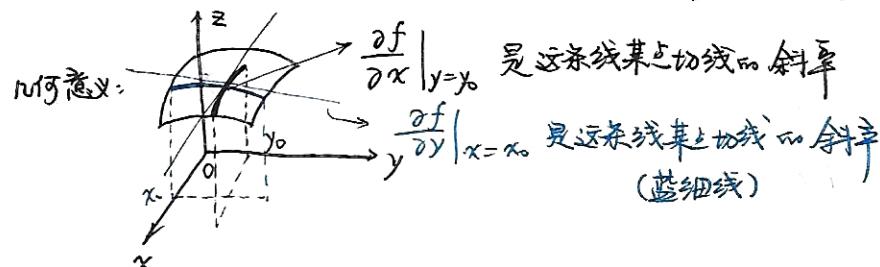
存在, 则称  $f$  在  $(x_{10}, \dots, x_{n0})$  对  $x_{i0}$  的偏导数. 记为  $\frac{\partial y}{\partial x_i} \Big|_{(x_{10}, \dots, x_{n0})}$  或  $\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{(x_{10}, \dots, x_{n0})}$

即固定除  $x_i$  外的一切自变量, 只改变  $x_i$ .

\* 有时也记作  $y_{x_i} \Big|_{(x_{10}, \dots, x_{n0})}$ ,  $f_{x_i} \Big|_{(x_{10}, \dots, x_{n0})}$ ,

$f'_i \Big|_{(x_{10}, \dots, x_{n0})}$ .

若在  $D$  中每一点处都有对  $x_i$  偏导数存在, 则称 **偏导函数**. 记为  $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ,  $y_{x_i}$ ,  $f_{x_i}$ ,  $f'_i$ .



\* 各偏导数存在的点未必连续.

$$\text{e.g. } z = f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & , x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & , x^2+y^2=0 \end{cases}$$

在  $(0,0)$  处不连续

$$\text{而 } \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(0,0)} = \frac{1}{x}(0) = 0 = \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(0,0)}$$

**方向导数** 若  $y = f(x, y, z)$  在  $(x_0, y_0, z_0)$  处沿方向  $\vec{l}$  (方向角:  $\alpha, \beta, \gamma$ ) 存在下列极限:

$$\lim_{P \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{P} = \lim_{P \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)}{P} = : \frac{\partial f}{\partial \vec{l}}$$

$$(\text{其中: } P = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}, \Delta x = P \cos \alpha, \Delta y = P \cos \beta, \Delta z = P \cos \gamma)$$

称  $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}$  为  $f(x, y, z)$  在  $(x_0, y_0, z_0)$  处沿方向  $\vec{l}$  的方向导数

$$* \text{ 取 } \vec{l} = \vec{i}, \text{ 则 } \frac{\partial f}{\partial \vec{i}} = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \vec{l} = -\vec{i} \text{ 则 } \frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = -\frac{\partial f}{\partial x}$$

**全微分** 若  $y = f(x_1, \dots, x_n)$  在  $D$  的内点  $(x_1, \dots, x_n)$  处全增量  $\Delta y = f(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, \dots, x_n)$  可表示为  $\Delta y = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_n \Delta x_n + o(P)$

( $A_i$  相对于  $\Delta x_i$  来说为常量, 可与  $x_1, \dots, x_n$  有关)

$$(P = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2})$$

线性主部称  $f$  在该点的全微分.

$$\text{记作: } dy = df = A_1 dx_1 + \dots + A_n dx_n$$

函数可微: ..... (略)

$$\text{函数可微时有 } \lim_{\substack{\Delta x_i \rightarrow 0 \\ (1 \leq i \leq n)}} \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[ (A_1 \Delta x_1 + \dots + A_n \Delta x_n) + o(\rho) \right] = 0.$$

$$\text{得: } \lim_{\substack{\Delta x_i \rightarrow 0 \\ (1 \leq i \leq n)}} f(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n) = f(x_1, \dots, x_n) \quad \text{即 } [f \text{ 连续}]$$

因此有:  $y = f(x_1, \dots, x_n)$  在  $(x_1, \dots, x_n)$  可微  $\Rightarrow f$  连续

可导 — 不一定连续

函数可微  $\xrightarrow{\text{偏导数存在}} \text{偏导数存在}$

函数可微  $\xrightarrow{\text{偏导数存在}} \text{偏导数连续}$

**定理**  $f(x, y)$  在  $(x, y)$  处可微, 则  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \neq \text{DNE}$  且  $df = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y$ .

[证明]  $Af = A \Delta x + B \Delta y + o(\rho)$  取  $\Delta y = 0$ ,  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} Af = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} A \Delta x = \frac{\partial f}{\partial x}$ . 对  $\Delta y$  同理.  $\square$

**逆向反例**

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2+y^2=0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(x+\Delta x)(y+\Delta y) - xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{(x\Delta x+y\Delta y)(1-xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \\ \Delta z &= \frac{(x+\Delta x)(y+\Delta y)}{\sqrt{(x+\Delta x)^2+(y+\Delta y)^2}} - \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

**定理**  $f(x, y), \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$  在  $(x, y)$  处连续, 则  $f$  在该点可微.

[证明]

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) - f(x, y+\Delta y) + f(x, y) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta_1 \Delta x, y+\Delta y) \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+\theta_2 \Delta y) \Delta y \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{一元函数} \\ \text{微分中值定理} \end{array} \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \alpha \right) \Delta x + \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + \beta \right) \Delta y \\ &\quad \uparrow \quad \uparrow \\ &\alpha = \frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta_1 \Delta x, y+\Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \quad \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0}} \beta = 0. \\ &\downarrow \text{连续.} \quad \text{则} \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \alpha = 0 \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \Delta y + \underline{\alpha \Delta x + \beta \Delta y} = o(\rho) \\ &\quad A \Delta x + B \Delta y + o(\rho) \end{aligned}$$

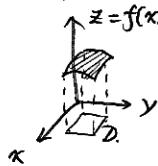
**定理** 若  $f(x, y, z)$  在  $(x, y, z)$  处可微, 则在该点沿任意方向  $\vec{l}$  的方向导数存在.

$$\text{且有 } \frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma \quad \text{其中 } \alpha, \beta, \gamma \text{ 为 } \vec{l} \text{ 的方向角.}$$

## • 多元函数

**[ $n$ 元函数]**: 非空点集  $D \subset \mathbb{R}^n$ , 映射  $f: D \mapsto \mathbb{R}$ . 记为  $f(x_1, \dots, x_n)$ , 或  $f(P)$ ,  $P \in D$ .

二元函数图象为 **[空间曲面]**



三元函数图象  $\in \mathbb{R}^4$

↑  
定义域

**[多元函数的极限]**  $f(P)$ ,  $P \in D \subset \mathbb{R}^n$ .  $P_0$  是  $D$  的一个聚点. 设  $D$  为开集.

若存在  $A \in \mathbb{R}$  (常数),  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$ . 对  $\forall P \in D \cap \bar{U}(P_0, \delta)$  都有  $|f(P) - A| < \varepsilon$ . 称  $A$  为  $f(P)$  在  $P \rightarrow P_0$  时的极限.

记作:  $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A$ . 或  $\text{若 } r_P = |PP_0| = \sqrt{(x_1 - x_{01})^2 + \dots + (x_n - x_{0n})^2}$

称: **[ $n$ 重极限]**

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = A.$$

$$= \lim_{x_1 \rightarrow x_{01}, \dots, x_n \rightarrow x_{0n}} f(x_1, \dots, x_n) = A$$

当  $P$  以不同方式  $\rightarrow P_0$  时 极限不同或不存在, 则该点极限不存在.

**[常用趋近方式]**  $y = kx$ ;  $y = x^\alpha \pm x^\beta$  → 把分母去掉

\*  $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \neq \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$

累次极限

若以下极限存在, 则三者相等:  
一个存在推不出其它.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$$

e.g.  $\frac{xy}{x^2+y^2}$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0$$

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$  不存在 (取  $y = kx$ )

二次极限

e.g.  $f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}, & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases}$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$$

而  $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$  和  $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$  不存在 (第一个  $\lim$  不存在)

**[定理]** 若  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A$  且  $x \neq x_0$  时存在  $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \varphi(x)$ .

则  $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A$ .

其中  $x, y$  互换. 可互换.

## • 多元函数的连续性

若  $n$  元函数  $f(P)$  定义在  $D$  上. 聚点  $P_0 \in D$ . 若存在  $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0)$

称  $f$  在  $P_0$  处连续.

一切多元初等函数连续.

闭域上多元连续函数有与一元函数类似性质：

$f(P)$  在有界闭域  $D$  上连续，则

(1)  $\exists K > 0$ , 使  $|f(P)| \leq K$ ,  $P \in D$

列紧集  $\Rightarrow f(K)$   
由  $\downarrow$   
 $\Rightarrow$  有界性定理  $\rightarrow$  可证  $K$  紧集  $\Rightarrow f(K)$  有界

(2)  $f(P)$  在  $D$  上必有 Max, min

(最值定理)

有界性

(3)  $\forall \mu \in [m, M] \quad \exists Q \in D$  使  $f(Q) = \mu$ . (介值定理)

(4)\*  $f(P)$  在  $D$  上一致连续

[证] 使用 Heine-Borel Thm. 是紧集  $\rightarrow$  有限开覆盖  $U(x_1, \delta_1) \dots U(x_n, \delta_n)$

取  $\delta = \frac{1}{2} \min \{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ .  $\rightarrow \forall P \in D \cap \dot{U}(x, \delta) \quad |f(P)| < \varepsilon$ .

~~一致连续~~  $\forall (x, x'')$  有  $|x'' - x'| < \delta$ .

若  $x' \in U(x_p, \frac{\delta_p}{2})$ . 则  $|x'' - x_p| \leq |x'' - x'| + |x' - x_p| < \delta_p$ .

$\Rightarrow |f(x') - f(x'')| \leq |f(x'') - f(x_p)| + |f(x') - f(x_p)| < 2\varepsilon$ .

方法：归结有理化.

**向量值函数**

设  $D \subset \mathbb{R}^n$ , 则  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto z = (z_1, \dots, z_m)$$

称为 多元  $m$  维向量值函数 (多元函数组). 若  $z = f(x)$  ( $x \in D$ )

$z_i = f_i(x)$  称为  $f$  的第  $i$  个分量函数 (坐标函数)

**极限**  $D$  是  $\mathbb{R}^n$  上开集.  $f(x): D \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $A \in \mathbb{R}^m$ .

$\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  使  $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$  时 成立  $|f(x) - A| < \varepsilon$ .

称  $A$  为  $x \rightarrow x_0$  时  $f$  的极限.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ .

**连续**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

$\Updownarrow$

每个分量连续

数  
学  
分  
析  
II

丘B-航

520030910155

John

[证明] 可微, 则  $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = \rho \left( \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma \right) + o(\rho)$

$$\text{则 } \frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\rho} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma$$

令  $\vec{G} = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$   $\vec{l} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$   $\rightarrow \vec{G}$  表示  $f$  变化率最大的方向

$$\text{则有 } \frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \vec{G} \cdot \vec{l} = |\vec{G}| \cos \langle \vec{G}, \vec{l} \rangle \quad (\because \|\vec{l}\| = 1)$$

**梯度** 定义  $\vec{G} = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$  称为  $f$  在  $P(x, y, z)$  处的梯度 (gradient)

记作  $\text{grad } f(P)$  或  $\nabla f(P)$ .  
"Nabla"

其中  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$  为一个算子.

此时有  $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \text{grad } f \cdot \vec{e}_l = \nabla f \cdot \vec{e}_l$  即梯度在  $\vec{l}$  方向上的投影.

**运算法则:** (1)  $\nabla c = \vec{0}$  (2)  $\nabla (cu) = c \nabla u$  (3)  $\nabla (u \pm v) = \nabla u \pm \nabla v$   
 (4)  $\nabla (uv) = u \nabla v + v \nabla u$  (5)  $\nabla (u/v) = \frac{v \nabla u - u \nabla v}{v^2}$   
 (6)  $\nabla f(u) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{-元函数!}}}{f'(u)} \nabla u$

**高阶偏导**  $z = f(x, y)$ .  $\frac{\partial z}{\partial x} = f_x(x, y)$ .  $\frac{\partial z}{\partial y} = f_y(x, y)$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{yx}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{xy}(x, y) \quad \begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ \text{不常用} & \text{先求后来} \end{matrix}$$

\*一般中间这一步只用于  $f_{xy} = f_{yx}$  时.

$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$  : 未必 (-般相等, 但有反例)

**反例**  $z = \begin{cases} xy \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2+y^2=0 \end{cases} =: f(x, y)$  \* 此时偏导不连续, 不能将  $y=0$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{(0,0)} = f_{xy}^{(0,0)} = \frac{\partial}{\partial y} \left( y \cdot \frac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2} \right)_{(0,0)} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f_x(0, \Delta y) - f_x(0, 0)}{\Delta y} \xrightarrow{\text{直接代入做}} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-(\Delta y)^5}{(\Delta y)^4} = -1$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{(0,0)} = f_{yx}^{(0,0)} = \frac{\partial}{\partial x} \left( y \cdot \frac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2} \right)_{(0,0)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f_y(\Delta x, 0) - f_y(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^5}{(\Delta x)^4} = 1$$

不相等

[定理] (一般只有理论证明要用) 若  $f_{xy}(x, y)$ ,  $f_{yx}(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  处连续.

则  $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$

[推广] 对  $n$  元多次偏导也有这一结论

[对比]  $\frac{\partial f}{\partial x}$  vs  $\frac{\partial f}{\partial l}$

既差  $\frac{\partial f}{\partial l}$  取  $\vec{l} = \vec{i}$   $\frac{\partial f}{\partial x}$ . 是否可认为  $\frac{\partial f}{\partial l}$  是  $\frac{\partial f}{\partial x}$  推广形式?

不可.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, \dots) - f(x, \dots)}{\Delta x}$$

↑  
从两侧逼近

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \lim_{P \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, \dots) - f(x, \dots)}{P} = \lim_{|\Delta x| \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, \dots) - f(x, \dots)}{|\Delta x|}$$

$P = \sqrt{(\Delta x)^2} = |\Delta x|$

只从一侧逼近

且有  $\frac{\partial f}{\partial l} \stackrel{\text{取 } \vec{l} = -\vec{i}}{=} -\frac{\partial f}{\partial x}$ .

高阶微分

$$d^k z = d(d^k z) \quad \text{其中 } z = f(x, y)$$

对自变量  $x, y$  恒有  $d^2 x = d(dx) = 0$ ,  $d^2 y = d(dy) = 0$ .

$$\begin{aligned} d^2 z &= d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) d^2 x + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) d^2 y \\ &= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dy\right) dx + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy\right) dy \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 \end{aligned}$$

则有  $d^k z = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y}\right)^k z \quad [\text{数学归纳法}]$

运算:  $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^p = \frac{\partial^p}{\partial x^p} ; \quad \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^p \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^q = \frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial y^q}$

$$d^k u = \left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + dx_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + dx_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k u \quad (k=1, 2, \dots)$$

向量值函数的导数

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$x \rightarrow y = f(x)$$

1) 若  $f_i$  在  $x^0$  均可偏导, 称  $f$  在  $x^0$  可导.

3) 若存在只与  $x^0$  有关, 与  $\Delta x$  无关的矩阵  $A$ , 使在  $x^0$

附近成立

$$\Delta y = f(x^0 + \Delta x) - f(x^0) = A \Delta x + o(\Delta x)$$

其中  $\Delta x = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)^T$ ,  $o(\Delta x)$  是高阶.

$$\|o(\Delta x)\| = o(\|\Delta x\|)$$

称  $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0)\right)_{m \times n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x^0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x^0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x^0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x^0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x^0) \end{pmatrix}$

为  $f$  在  $x^0$  的导数或 Jacobi 矩阵. 记作  $f'(x^0)$  或  $Df(x^0)$  或  $J_f(x^0)$

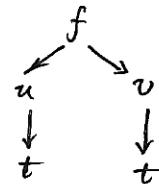
2)  $f$  分量偏导在  $x^0$  连续  $\Leftrightarrow f$  导数在  $x^0$  连续

则称  $f$  在  $x^0$  可微. 称  $A \Delta x$  ( $A \Delta x$ ) 为  $f$  在  $x^0$  的微分. 记作  $dy = A dx$ .

• 多元复合函数的求导法则

若  $u = \varphi(t)$ ,  $v = \psi(t)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial u}$  和  $\frac{\partial f}{\partial v}$  连续. 在点  $t$  可导. 则  $\frac{df(u, v)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{dv}{dt}$

[证明]  $df = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv$  (由连续偏导数知:  $f$  可微)



$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\Delta u}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\Delta v}{\Delta t} + o(\rho)$$

$$\Delta f = f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v)$$

□

设增量  $\Delta t$ .  $\rightarrow$  增量  $\Delta u, \Delta v$ .  $\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\Delta u}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\Delta v}{\Delta t} + o(\rho)$

(其中:  $\rho = \sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2}$ ) 令  $\Delta t \rightarrow 0$ . 有  $\Delta u \rightarrow 0, \Delta v \rightarrow 0$

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} \rightarrow \frac{du}{dt}, \quad \frac{\Delta v}{\Delta t} \rightarrow \frac{dv}{dt}, \quad \frac{o(\rho)}{\Delta t} = \frac{o(\rho)}{\rho} \sqrt{\left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)^2} \rightarrow 0$$

$$\therefore \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{dv}{dt}$$

□

[推广] 1) 中间变量  $\geq 2$ .  $z = f(u, v, w)$ .  $u = \varphi(t), v = \psi(t), w = \omega(t)$ . 都可微

$z \begin{cases} u \rightarrow t \\ v \rightarrow t \\ w \rightarrow t \end{cases} \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{dv}{dt} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{dw}{dt} = f'_1 \varphi' + f'_2 \psi' + f'_3 \omega'$

2) 中间变量是多元函数.  $z = f(u, v)$ .  $u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y)$  都可微

$z \begin{cases} u \begin{cases} x \\ y \end{cases} \\ v \begin{cases} x \\ y \end{cases} \end{cases} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = f'_1 \varphi'_1 + f'_2 \psi'_1 \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = f'_1 \varphi'_2 + f'_2 \psi'_2$

$$z = f(x, v). \quad v = \psi(x, y) \quad \text{都可微.}$$

$$z = f \begin{cases} x \\ v \end{cases} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = f'_1 + f'_2 \psi'_1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = f'_2 \psi'_2$$

注意:  $\frac{\partial z}{\partial x}$  与  $\frac{\partial f}{\partial x}$  在此处不同.

$\frac{\partial z}{\partial x}$  表示  $z = f(x, \psi(x, y))$  固定  $y$ . 对  $x$  求导

$\frac{\partial f}{\partial x}$  表示  $f(x, v)$  固定  $v$ . 对  $x$  求导

[注意] 偏导数连续不可退化为“偏导数存在”!

[反例]  $z = f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$  取  $\begin{cases} x = u = t \\ y = v = t \end{cases}$  则  $\frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{(0,0)} = 0, \frac{\partial f}{\partial v} \Big|_{(0,0)} = 0$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{t}{2} \right) = \frac{1}{2}. \quad \text{而 } \frac{1}{2} \neq 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1$$

□

• 多元复合函数的全微分

$z = f(u, v)$ ,  $u = \varphi(x, y)$ ,  $v = \psi(x, y)$  都可微 则  $\bar{z} = f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$  的全微分为

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv \\ &= \underbrace{\frac{\partial z}{\partial u} \left( \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right)}_{\frac{\partial z}{\partial x}} + \underbrace{\frac{\partial z}{\partial v} \left( \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right)}_{\frac{\partial z}{\partial y}} \\ &= \left( \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right) \end{aligned}$$

“形式不变性”

可利用全微分形式不变性求偏导.

$$\begin{aligned} z &= e^u \sin v, \quad u = xy, \quad v = x+y \Rightarrow dz = \dots du + \dots dv = \dots d(xy) + \dots d(x+y) \\ &\quad = \underbrace{\frac{\partial z}{\partial x} dx}_{\text{xxx}} + \underbrace{\frac{\partial z}{\partial y} dy}_{\text{xxx}} \end{aligned}$$

对向量值函数:  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ .  $g$  在  $x^0 \in D_g$  可导. 且  $f$  在  $y^0 = g(x^0)$  可微.  $\bar{z} = f(g(x^0))$ .

$$\text{则 } \frac{\partial \bar{z}}{\partial x_i}(x^0) = \frac{\partial \bar{z}}{\partial y_1}(y^0) \frac{\partial y_1}{\partial x_i}(x^0) + \dots + \frac{\partial \bar{z}}{\partial y_m}(y^0) \frac{\partial y_m}{\partial x_i}(x^0)$$

$$\begin{aligned} \text{即: } & \left( \frac{\partial \bar{z}}{\partial x_1}(x^0), \frac{\partial \bar{z}}{\partial x_2}(x^0), \dots, \frac{\partial \bar{z}}{\partial x_n}(x^0) \right) \\ &= \left( \frac{\partial \bar{z}}{\partial y_1}(y^0), \frac{\partial \bar{z}}{\partial y_2}(y^0), \dots, \frac{\partial \bar{z}}{\partial y_m}(y^0) \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1}(x^0) & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n}(x^0) \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1}(x^0) & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n}(x^0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1}(x^0) & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n}(x^0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

• 二元函数的 Taylor 公式

$$\text{记算子: } \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f = hf_x + kf_y. \quad \left( h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f = (hf_{xx} + hkf_{xy} + khf_{yx} + k^2 f_{yy})$$

$$(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})^2$$

要求:  $f_{xy} = f_{yx}$  即两者连续

[定理] 若  $f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  的某一邻域  $U$  中连续且  $(n+1)$  阶偏导数都连续  
当  $(x_0+h, y_0+k) \in U$  时.

$$\begin{aligned} \text{则有 } f(x_0+h, y_0+k) &= f(x_0, y_0) + \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x_0, y_0) + \dots \\ &\quad + \frac{1}{n!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(x_0, y_0) + \frac{1}{(n+1)!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) \end{aligned}$$

$\theta \in (0, 1)$

[证明] 记  $\varphi(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk)$   $t \in [0,1]$  依述在  $U$  中

$$\varphi'(t) = h \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + th, y_0 + tk) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + th, y_0 + tk)$$

$$\varphi'(0) = h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$$\text{而 } \varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \varphi''(0) + \dots + \varphi^n(0) + R_{n+1}(0)$$

$$\text{其中 } \varphi^{(n)}(0) = \left( h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} \right)^{(n)} f(x_0, y_0)$$

$$\begin{aligned} \text{④ } R_{n+1}(0) &= \left( h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} \right)^{n+1} f(x_0 + th, y_0 + tk) \\ &= \varphi^{n+1}(0) \end{aligned}$$

□

取  $n=0$ . 有 Lagrange 中值定理:  $f(x_0 + th, y_0 + tk) = h \frac{\partial}{\partial x} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + k \frac{\partial}{\partial y} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$   
 $f(x_0 + y_0) +$

当  $\frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial}{\partial y} f \equiv 0$  时  $f \equiv \text{const.}$

[推广至  $n$  元]: Taylor 公式  $f(x_{10} + h_1, x_{20} + h_2, \dots, x_{n0} + h_n)$

$$= f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) + \left( h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right) f(x_{10}, \dots, x_{n0})$$

$$+ \dots + \frac{1}{m!} \left( h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^m f(x_{10}, \dots, x_{n0})$$

$$+ \frac{1}{(m+1)!} \left( h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{m+1} f(x_{10} + \theta h_1, \dots, x_{n0} + \theta h_n) \quad \theta \in (0,1)$$

$$\subseteq R_{m+1}$$

其  $m=0$  即 Lagrange 中值定理:

$$f(x_{10} + h_1, \dots, x_{n0} + h_n) - f(x_{10}, \dots, x_{n0}) = \left( h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right) f(x_{10} + \theta h_1, \dots, x_{n0} + \theta h_n) \quad \theta \in (0,1)$$

## • 隐函数

[定理]  $F(x, y)$  在  $P(x_0, y_0)$  某一邻域内满足: ① 具有连续偏导; ②  $F(x_0, y_0) = 0$ ; ③  $F_y(x_0, y_0) \neq 0$

**存在定理** 则  $F(x, y) = 0$  在  $P$  的某邻域内可唯一确定一个单值连续函数  $y = f(x)$ .

且满足: ①  $y_0 = f(x_0)$  ② 有连续导数  $\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$  (隐函数求导公式)

[隐函数求导公式]  $y = f(x)$  已知是隐函数.

可以用这一公式求



则  $F(x, f(x)) = 0$  对  $x$  求导  $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$

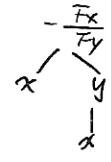
也可直接隐函数对  $x$  求导

再重新整理得到

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F_x}{F_y}$$

□

[推广] 若  $F$  的二阶偏导也连续:  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{F_x}{F_y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{F_x}{F_y} \right) \cdot \frac{dy}{dx}$   
 $= -\frac{F_{xx}F_y - F_xF_{xy} + F_{xy}F_y y' - F_xF_{yy}y'}{F_y^2}$



[定理]  $F(x, y, z)$  满足: ① 在  $P(x_0, y_0, z_0)$  某邻域内偏导连续. ②  $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ . ③  $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ .

则在  $(x_0, y_0, z_0)$  某一邻域内可唯一确定一个单值连续函数  $f(x, y) = z$ , 且满足:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

[证明]  $F(x, y, f(x, y)) = 0 \xrightarrow{\text{对 } x \text{ 偏导}} F_x + F_z \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \text{对 } y \text{ 同理. } \square$

\* 也可用全微分不变来求 ~~z~~ 隐函数的导数. e.g.  $dF = \dots dx + \dots dy$

方程组的情形:

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{如何求 } u = \varphi(x, y) \\ u = \varphi(x, y) ? \end{matrix} \quad J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}$$

线性无关

Jacobi 行列式 (雅各比行列式)

[定理]  $F(x, y, u, v), G(x, y, u, v)$  满足: ① 在  $P(x_0, y_0, u_0, v_0)$  某邻域内偏导连续 ②  $\begin{cases} F(P) = 0 \\ G(P) = 0 \end{cases}$

③  $\left| \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} \right|_P \neq 0$ . 则  $(x_0, y_0, u_0, v_0)$  某一邻域内可唯一确定一组满足条件  $u_0 = u(x_0, y_0)$ .

$v_0 = v(x_0, y_0)$  单值连续函数  $u_0 = f(x, y), v = g(x, y) \quad (x, y) \in V$

$$\text{且满足: } \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)} = -\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\begin{vmatrix} F_y & F_v \\ G_y & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_y \\ G_u & G_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$$

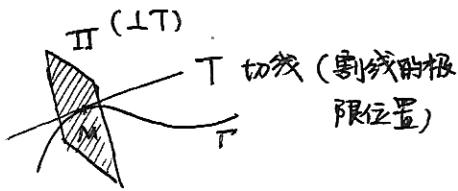
$$\begin{cases} F(x, y, f(x, y), g(x, y)) = 0 \\ G(x, y, f(x, y), g(x, y)) = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} F_x + F_u \frac{\partial u}{\partial x} + F_v \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ G_x + G_u \frac{\partial u}{\partial x} + G_v \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{matrix}$$

$$\text{由线代知识可推得 } \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$$

\* 但一般计算似乎还是直接求个导直接算比较快.

• 几何中的应用

1) 空间曲线的切线与法平面



$$M(\varphi(t_0), \psi(t_0), \omega(t_0)) \text{ 则 } \vec{f}'(t_0) = (\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0)) \Rightarrow II, T.$$

$$\text{切线方程 } T: \frac{x - x_0}{\varphi'(t_0)} = \frac{y - y_0}{\psi'(t_0)} = \frac{z - z_0}{\omega'(t_0)}$$

当  $\theta' = 0$  时, 该项退化为  $\alpha = \alpha_0$ . ( $\theta \in \{\varphi, \psi, \omega\}$ ,  $\alpha \in \{x, y, z\}$ )

$$\text{法平面方程: } II: \varphi'(t_0)(x - x_0) + \psi'(t_0)(y - y_0) + \omega'(t_0)(z - z_0) = 0$$

且 $\theta = \varphi \rightarrow \alpha = x$
$\theta = \psi \rightarrow \alpha = y$ . 下同)
$\theta = \omega \rightarrow \alpha = z$

特别地, 取  $t = x$ . 则  $\varphi(t) = x$ . 即  $f'(x) = (1, \psi'(x), \omega'(x))$ .  $\rightarrow T/II$ .

■ 曲线为一般式  $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \psi(x) \\ z = \omega(x) \end{cases}$

$$\text{此时 } \vec{f}'(x_0) = \left( 1, -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, z)} \Big|_M, -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, x)} \Big|_M \right)$$

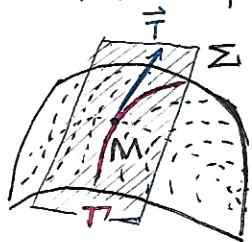
$$\Rightarrow \vec{T}^* = \left( \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \Big|_M, \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)} \Big|_M, \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} \Big|_M \right)$$

则切线有  $\frac{x - x_0}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \Big|_M} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)} \Big|_M} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} \Big|_M}$  形式

法平面有  $\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \Big|_M (x - x_0) + \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)} \Big|_M (y - y_0) + \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} \Big|_M (z - z_0) = 0$  形式

即  $\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ F_x(M) & F_y(M) & F_z(M) \\ G_x(M) & G_y(M) & G_z(M) \end{vmatrix} = 0$ . □

2) 空间曲面的切平面与法线



$$\text{光滑曲面 } \Sigma: F(x, y, z) = 0$$

$M(x_0, y_0, z_0)$ . 过  $M$  任一光滑曲线  $\Gamma: (x, y, z) = (\varphi(t), \psi(t), \omega(t))$

且  $t = t_0$  对应  $M$

$$\varphi', \omega', \psi' \text{ 不全为 } 0 \text{ 时, } \Gamma \text{ 切线为 } \frac{x - x_0}{\varphi'(t_0)} = \frac{y - y_0}{\psi'(t_0)} = \frac{z - z_0}{\omega'(t_0)}.$$

下证:  $\Sigma$  上过  $M$  的任意曲线  $\Gamma$  在  $M$  处的切线都在同一平面内.

[证明]  $\Gamma \subseteq \Sigma$ . 则有  $F(\varphi(t), \psi(t), \omega(t)) \equiv 0$ .  $\frac{t=t_0}{\text{求导}} F_x \Big|_M \varphi'(t_0) + F_y \Big|_M \psi'(t_0) + F_z \Big|_M \omega'(t_0) = 0$

令  $\vec{n} = (F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0))$ ,

有  $\vec{n} \cdot \vec{T} = 0$  ( $\Rightarrow (\forall \Gamma)$ ) 因此  $\vec{n}$  即为法线向量! ( $\forall \Gamma, \vec{T} \perp \vec{n}$ )

切平面:  $F_x|_M(x-x_0) + F_y|_M(y-y_0) + F_z|_M(z-z_0) = 0$

法线:  $\frac{x-x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y-y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z-z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$

□

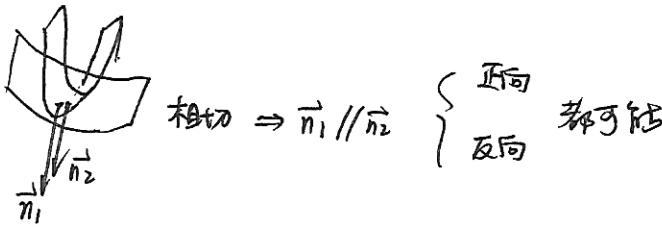
特别地, 若:  $\Sigma: z = f(x, y) \Rightarrow$  令  $F(x, y, z) = f(x, y) - z \Rightarrow \vec{n} = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1)$

$$z - z_0 = f_x|_M(x-x_0) + f_y|_M(y-y_0). \quad \frac{x-x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y-y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z-z_0}{-1}$$

□

为积分方便, 引入 方向余弦.  $\alpha, \beta, \gamma$  表示  $\vec{n}$  的方向角. 规定方向向上即  $\gamma$  为锐角

则有  $\cos \alpha = -\frac{f_x}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}}, \cos \beta = -\frac{f_y}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}}, \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}}$ .



## • 多元函数的极值

**极大值** 若  $\exists = f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  某邻域内有  $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ . 则称  $f$  在该点取得极大值

**极小值**

↑

≥

小



[定理] (必要条件) 若  $\exists = f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  偏导存在, 且取得极值.

则  $f_x'(x_0, y_0) = 0, f_y'(x_0, y_0) = 0$

[证]

$f(x_0, y_0)$  在  $(x_0, y_0)$  也取到极值  
 $f(x, y_0)$

[定理] (充分条件) 若  $\exists = f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  某邻域内有一阶和二阶连续偏导数. 且  $f_{xx}(x_0, y_0) = 0, f_{yy}(x_0, y_0) = 0$

$$f_{xy}(x_0, y_0) = 0$$

令  $A = f_{xx}(x_0, y_0), B = f_{xy}(x_0, y_0), C = f_{yy}(x_0, y_0)$

1)  $AC - B^2 > 0$ . 具有极值  $\begin{cases} A & \\ \circ & \\ \end{cases} \begin{cases} A & \\ \circ & \\ \end{cases}$   
极大值 极小值

2)  $AC - B^2 < 0$  无极值

3)  $AC = B^2$  不确定

$$[证] 联想到 Taylor 展开: f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} (h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}) f(x_0, y_0) + \dots + \frac{1}{n!} (h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})^n f(x_0, y_0)$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!} (h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})^{n+1} f(x_0+\theta h, y_0+\theta k)$$

展开至 1 阶. 代入  $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ .

$$\text{则: } \Delta z = \frac{1}{2} (f_{xx}(x_0, y_0) h^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0) hk + f_{yy}(x_0, y_0) k^2)$$

$$\text{而 } f_{xx}(x_0+\theta h, y_0+\theta k) = A + \alpha \quad (h \rightarrow 0, k \rightarrow 0 \text{ 时有 } \alpha \rightarrow 0)$$

$$f_{xy}(x_0+\theta h, y_0+\theta k) = B + \beta \quad (h \rightarrow 0, k \rightarrow 0 \text{ 时有 } \beta \rightarrow 0)$$

$$f_{yy}(x_0+\theta h, y_0+\theta k) = C + \gamma \quad (h \rightarrow 0, k \rightarrow 0 \text{ 时有 } \gamma \rightarrow 0)$$

$$\text{此时: } \Delta z = \frac{1}{2} (Ah^2 + 2Bhk + Ch^2) + \frac{1}{2} (\alpha h^2 + 2\beta hk + \gamma k^2) \xrightarrow{\substack{\parallel \\ o(\rho^2)}} \frac{\alpha h^2 + 2\beta hk + \gamma k^2}{h^2 + k^2} \leq \max(\alpha, \gamma) + \beta. \quad \checkmark o(\rho)$$

因此  $|h|/|k|$  很小时,  $\Delta z$  正负号可由  $Ah^2 + 2Bhk + Ch^2$  确定.

(1) 当  $AC - B^2 > 0$ . (~~且~~)  $\rightarrow$  显然  $A \neq 0$  且  $AC$  同号

$$\text{此时 } Ah^2 + 2Bhk + Ch^2 = \frac{1}{A} (A^2 h^2 + 2ABhk + B^2 k^2 + (AC - B^2) k^2) = \frac{1}{A} ((Ah+Bk)^2 + (AC - B^2) k^2)$$

$$\text{故 } A > 0 \text{ 时 } Ah^2 + 2Bhk + Ch^2 > 0 \xrightarrow{>0} \text{ 极小值}$$

$$A < 0 \text{ 时 } Ah^2 + 2Bhk + Ch^2 < 0 \xrightarrow{\text{极大值}}$$

□

\* 也可直接用二次函数图像.  $AC - B^2 > 0$  时,  $\Delta z$  保持同号.  $A > 0$  时  $\Delta z > 0$ .  $A < 0$ ,  $\Delta z < 0$   
(极小) (极大)

(2) 当  $AC - B^2 < 0$  时.

[1]  $A \neq 0$ . ( $C \neq 0$  时其价不单独再说). 有  $Ah^2 + 2Bhk + Ch^2 = \frac{1}{A} ((Ah+Bk)^2 + (AC - B^2) k^2)$

$(x, y)$  沿  $A(x-x_0) + B(y-y_0) = 0$  接近  $(x_0, y_0)$  时.  $Ah+Bk=0 \Rightarrow \Delta z < 0$ .

$(x, y)$  沿  $y-y_0 = 0$  接近  $(x_0, y_0)$  时. 有  $k=0 \Rightarrow \Delta z > 0$ .

$\therefore \Delta z$  有正有负

\* 也可直接用二次函数图像

[2]  $A=C=0$ . 不妨设  $B>0$ . 则  $Ah^2 + 2Bhk + Ch^2 = 2Bhk$ .  $\begin{cases} h, k \text{ 同号} \Rightarrow \Delta z > 0 \\ h, k \text{ 异号} \Rightarrow \Delta z < 0 \end{cases}$

$\therefore \Delta z$  有正有负

□

(3) 当  $AC - B^2 = 0$  时

$$\begin{cases} A \neq 0, C \neq 0 \\ A = 0 = C \end{cases} \quad Ah^2 + 2Bhk + Ch^2 = \frac{1}{A} (Ah+Bk)^2$$

$$A = 0 = C \quad Ah^2 + 2Bhk + Ch^2 = 0. \quad \text{此时 } \Delta z \text{ 符号由 } o(\rho^2) \text{ 决定. 不能确定}$$

□

先利用  $f_x=0, f_y=0$  求得驻点  $\rightarrow$  再用上述定理判别