

概
率
统
计

邱一航

520030910155

随机事件与概率

随机现象：无法预言，多种结果，大量试验下有统计规律性

随机实验：相同条件下可重复，无法预知，多种结果

随机试验中

随机事件：可能发生也可能不发生的事件。(A, B, C)

样本空间 $\Omega = \bigcup_i A_i$ (随机试验的所有直接结果全体组成的集合)

$\omega \in \Omega$

元素：样本点（基本事件）

任意随机事件 \rightarrow 样本空间的子集 $(A \subset \Omega)$

特殊情况：必然事件(Ω)，不可能事件(\emptyset)。

将随机事件
用集合描述
以便研究

e.g. $\{\text{死}3, \text{没死}\}$

$\{0, 1, \dots, +\infty\}$ 个人在教室里

$\{0, 1, \dots, \text{Max}\}$ 个人在教室里

$\{t \in (0, +\infty)\}$

• 关系与运算

$A \subset B \rightarrow A$ 的发生必定导致 B 的发生

$A \subset B, B \subset A \Rightarrow A = B$

维恩图配表

$A \cup B$ (A 和 B 的和事件) $\rightarrow A$ 和 B 两个事件至少有一个会发生的事件

$\bigcup_{i=1}^n A_i$ $\rightarrow A_1, \dots, A_n$ n 个事件。 $(n$ 可以为 ∞)

$A \cap B$ 或 AB (A 和 B 的积事件) $\rightarrow A$ 和 B 两个事件同时会发生的事件

$A_1, \dots, A_n, \text{及 } n=\infty$ 同理。

$A - B$ (A 和 B 的差事件) $\rightarrow A$ 发生同时 B 不发生的事件。

A 与 B 互不相容(互斥) $\leftarrow A \cap B = \emptyset$

A 和 B 不可能同时发生 互斥。

互斥 $\rightarrow A_1, \dots, A_n$ 两两互不相容 $\leftarrow A_i \cap A_j = \emptyset \quad (\forall \{i, j\} \subset \{1, 2, \dots, n\})$

A 与 B 相互对立(互逆) $\leftarrow A \cap B = \emptyset, A \cup B = \Omega$

A 和 B 不可能同时(不)发生 互逆。

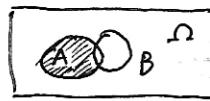
记 $B = \bar{A}$ 。称 B 为 A 的对立事件

“ A 不发生” “ A 发生”

(逆事件)

运算规律： 1) $\bar{\bar{A}} = A$ (重余律)

2) $A\bar{B} = A - B = A - AB$



3). ④ 交换律、结合律、分配律

4) De'Morgan 定律: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \bar{B}$ $\overline{A \bar{B}} = \bar{A} \cup \bar{B}$
(反演律)



A和B中 至少一个发生的逆事件

至多0个发生

都不发生

A和B都发生的逆事件

(至少2个)

至多1个发生

至少1个不发生

e.g. A: 通过 α B: 通过 β . C: 通过 γ

基本事件: $2^3 = 8$ ($ABC, \underbrace{\bar{A}BC, A\bar{B}C, AB\bar{C}}, \underbrace{\bar{A}\bar{B}C, A\bar{B}\bar{C}, \bar{A}BC, \bar{A}\bar{B}C}$)

不多于2项通过 $\overline{ABC} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$

• 古典概型

古典概型 $\left\{ \begin{array}{l} \text{基本事件总数有限} \\ \text{各基本事件等可能发生} \end{array} \right.$

$$P(A) = \frac{M}{N} \quad \begin{array}{l} M \text{ (A中包含的基本事件个数)} \\ N \text{ (基本事件总数)} \end{array}$$

要求：“均匀”

n 个不可分辨球， m 个可分辨盒。 (1) 最多1个球/盒。 指定的 k 个盒里都有球的概率

(2) 不限制盒中球数。 指定的 k 个盒里无球的概率。 (已知球的放法也可能会)

[解] (1) $\frac{C_{n-k}^{n-k}}{C_m^n}$



(2) 球 → 隔板法 $0 \cdots 0 | 0 \cdots 0 ||| 0 \cdots 0 | \cdots |$

↑ 分隔盒子 共 $n+m-1$ 个符号

只要确定0就确定一种放置方法 \rightarrow 样本空间大小 $|\Omega| = C_{n+m-1}^n$

不妨指定 k 个盒为前 k 个盒无球。即前(k 个)个位置全是“|”。空余位置 $n+m-k-1$

$$|A_2| = C_{n+m-k-1}^n$$

$$\therefore P(A_2) = \frac{C_{n+m-k-1}^n}{C_{n+m-1}^n}$$

□

注意：球不可分辨！因此 $m^n \leftarrow$ 是有问题的。

改: n 个球完全随机地放入 m 个盒. 求指定 k 个盒中无球的概率.

[解] 此为古典概型. 唯一可能的方式

此时基本事件是某个球落在某个盒中. $|\Omega| = m^n$ $|A_3| = (m-k)^n$

$$P(A_3) = \frac{(m-k)^n}{m^n}$$

每个球 m 种选择

□

易出问题 → 基本事件的设计

几何概型

几何概型 { 样本空间对应于有限空间 Ω .
 (ℓ, S, V, \dots) “有限”
样本点落在 Ω 内任何区域 G 的概率与 G 的测度成正比, 与其所处位置无关

$$P(A) = \frac{A \text{ 所对应区域的测度}}{\Omega \text{ 的测度}} \quad \rightarrow \text{“等可能性”}$$

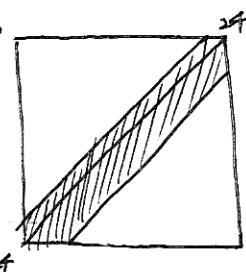
e.g. 甲乙两船彼此无通讯. 24h 内停靠某码头. 若两船分别需停靠 1h, 2h. 求一昼夜内任一船到达时需停靠.

[解] 甲到达: x , $0 \leq x < 24$; 乙到达: y , $0 \leq y < 24$.

$$\Omega = \{(x, y) \mid 0 \leq x < 24, 0 \leq y < 24\}$$

若有无数影响

等待现象: $y - 1 \leq x < y + 2$ $\left(\begin{array}{l} y = x \\ y > x: y \leq x+1 \\ y < x: y \geq x-2 \end{array} \right)$ (几何概型)



$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{S(\bar{A})}{S(\Omega)} = 1 - \frac{\frac{1}{2} \cdot (23^2 + 22^2)}{24^2}$$

□

e.8. Buffon 技针. 针为 l . 平行线无数条, 等距 a . $l < a$.

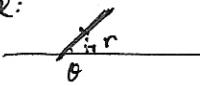
[解] $l < a \Rightarrow$ 针一定在某三条平行线范围内.

相交

可以改变这三条平行线的选取, 使针的中心最近的平行线恰为三条平行线中居中的那条

如何定位针? $\rightarrow (r, \theta)$

相交的判定:



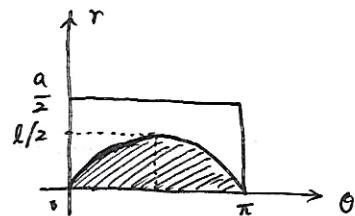
$$\frac{l}{2} \sin \theta \geq r$$

样本空间 $\Omega = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq \frac{a}{2}, 0 \leq \theta \leq \pi\}$

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{\frac{l}{2} \cdot \int_0^\pi \sin x dx}{\frac{a}{2} \cdot \pi} = \frac{2l}{a\pi}$$

随机试验

用于计算 π . (在含参数积分指出 π 的算法之前)



* 贝特朗悖论

• 频率与概率的统计定义

频率. 定义略

概率的统计定义 随机事件在重复的 n 次随机试验中出现 m 次. 若随 n 增大, $P(A) = \frac{m}{n}$ 在某个数值 p ($0 \leq p \leq 1$) 附近, 称 p 为概率(统计定义).

始终稳定

• 概率的公理化定义

$$0 \leq P^{(A)} \leq 1$$

发现三种模型下, 概率都满足:

$$P(\Omega) = 1$$

$$A_1, A_2, \dots \text{ 两两互不相容. } P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i)$$

概率的公理化定义

~~频率~~

设 E 是一系列随机试验, Ω 为其对应样本空间. 若存在映射 $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, (法则使对 E 中任一事件 A 赋予一个实数). 记为 $P(A)$. 假定:

$$(1) \forall A \subseteq \Omega. P(A) \geq 0 \quad (2) P(\Omega) = 1 \quad (3) \text{对 } A_1, A_2, \dots \text{ 两两互不相容事件. (无限个)}$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i)$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

推导得出性质: 1) $P(\emptyset) = 0$

2) 有限可加性: n 个 ($n < +\infty$) 两两互不相容事件

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

3) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

[证] (2) 可证.

4) $P(A - B) = P(A) - P(AB)$

[证] $P(A) = P[(A - AB) \cup AB] = P(A - AB) + P(AB)$

$$= P(A - B) + P(AB). \quad \square$$

5) $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

6) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

易证. 拆成两两互斥事件

7) 容斥原理: $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{l=1}^n \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_l \leq n} P\left(\bigcup_{i=1}^l A_{k_i}\right) \cdot (-1)^{l+1}$

e.g. 1, 2, ..., 9 中可重复地取出 n 个数 ($n \geq 2$). 求 n 次所取数的乘积为 10 倍数的概率.

[解] 原事件记为 A . A_1 : n 次取到数字中有偶数. A_2 : n 次取到数字中有 5.

则 $A = A_1 A_2$. $\bar{A} = \bar{A}_1 \bar{A}_2 = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2$

$$P(\bar{A}) = P(\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2) = P(\bar{A}_1) + P(\bar{A}_2) - P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) = \frac{5^n}{9^n} + \frac{8^n}{9^n} - \frac{4^n}{9^n}$$

$$\therefore P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \left(\frac{5}{9}\right)^n - \left(\frac{8}{9}\right)^n + \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

e.g. 配对问题. A_1, \dots, A_n . a_1, \dots, a_n 随机配对. 至少出现一对 (A_i, a_i) 的概率.

[解] 原事件记为 B . 记 B_i : A_i, a_i 配对的概率. 则有 $B = \bigcup_{i=1}^n B_i$

则 $P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right) = \sum_{i=1}^n P(B_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(B_i B_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(B_i B_j B_k) - \dots + (-1)^{n+1} P(B_1 \dots B_n)$

变为抽签问题

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} = C_n^2 \cdot \frac{1}{n(n-1)} + C_n^3 \cdot \frac{1}{n(n-1)(n-2)} \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n!} \\ &= 1 - \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n(n-1)} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n(n-1)(n-2)} - \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n!} \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \cdot \frac{1}{i!} \end{aligned}$$

e.g. 证明 $C_N^n = \sum_{k=s_1}^{s_2} C_M^k C_{N-M}^{n-k}$

其中 $s_1 = \max\{0, n-N+M\}$. $s_2 = \min\{n, M\}$.

[证] 即证 $1 = \frac{\sum_{k=s_1}^{s_2} C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$

即 "从 N 个球. 不放回地拿 n 个. N 个球中有 M 个红球, 其余白球. 其中 k 个是红球的概率为 $\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$ "

(拿出 k 球)

$$\text{另一方面. } k \leq M, k \leq n \rightarrow k \leq \min\{M, n\}$$

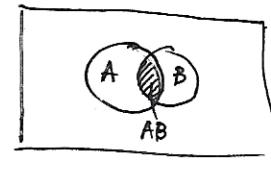
$$n-k \leq N-M \rightarrow k \geq \max\{0, n-N+M\}$$

□

条件概率

记 A 事件发生的条件下 B 发生的概率为 $P(B|A)$. 称为 **条件概率**

$$P(B|A) := \frac{P(AB)}{P(A)} \quad (P(A) > 0) \quad \text{易理解.}$$



[证明] ~~$P(AB) \geq 0 \Rightarrow P(B|A) \geq 0$~~ 下面证明 $P(\cdot|A)$ 是概率.

$$P(AB) \geq 0 \Rightarrow P(B|A) \geq 0.$$

$$P(A|A) = \frac{P(A)}{P(A)} = 1.$$

$$\text{一系列两两互斥事件 } B_1, B_2, \dots, B_\infty. \quad P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i | A\right) = \frac{P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)}{P(A)} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} P(B_i)}{P(A)} = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i|A)$$

∴ $P(\cdot|A)$ 拥有概率的一切性质

□

$$\text{注: } P(B|A) + P(B|\bar{A}) \neq 1. \quad P(A|B) + P(\bar{A}|B) = 1.$$

乘法公式

$$P(AB) = \underbrace{P(A) P(B|A)}_{\text{乘法公式}} = P(B) P(A|B) \quad (P(A) > 0, P(B) > 0)$$

乘法公式

$$\begin{aligned} n \text{ 个随机事件乘法公式: } P(A_1 A_2 \dots A_n) &= P(A_1 A_2 \dots A_{n-1}) P(A_n | A_1 A_2 \dots A_{n-1}) \\ &= P(A_1 \dots A_{n-2}) P(A_{n-1} | A_1 \dots A_{n-2}) P(A_n | A_1 \dots A_{n-1}) \\ &= P(A_1) P(A_2 | A_1) \dots P(A_n | A_1 \dots A_{n-1}) \\ &\quad \begin{matrix} A_1 & A_1 \text{ 条件下 } A_2 & A_1 \dots A_{n-1} \text{ 条件下 } A_n \\ & \vdots & \vdots \\ & A_1, A_2 \text{ 条件下 } A_3 & \end{matrix} \end{aligned}$$

e.g. 13个人5元, 13个人10元. 每人收5元. 不会遇到找不出零钱的概率

[解] 记第 i 个人来时不会找不出零钱的事件为 A_i : $A = A_1 A_2 \dots A_{13}$
(拿着10元)

$$P(A) = P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 A_2) \dots P(A_{13} | A_1 A_2 \dots A_{12})$$

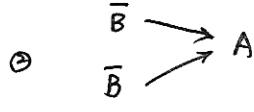
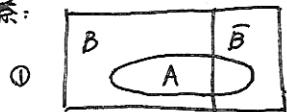
$$= \frac{13}{14} \cdot \frac{12}{13} \cdot \frac{11}{12} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{14}$$

$$\begin{matrix} \{0, 1, \dots, 13\} \uparrow & \{1, \dots, 13\} \uparrow \\ & = \{0, \dots, 12\} \\ & \text{只剩这些5元} \end{matrix}$$

□

全概率与 Bayes 公式

两种观察：



全概率公式

记 B_1, \dots, B_n 为样本空间 Ω 的一个划分，即 $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$ 且 $B_i B_j = \emptyset (\forall \{i, j\} \subseteq \{1, \dots, n\})$

则对任意事件 A 有 $P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i) P(A|B_i)$

对任意事件 A , $P(A) > 0$.

Bayes 公式

结果 $\xrightarrow{\text{跟着}} \text{条件}$

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i) P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^n P(B_j) P(A|B_j)} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

实际上只要 $A \subset \bigcup_{i=1}^n B_i$ 即可

不一定要是划分.

先验概率. 后验概率

↓

得到 A 发生信息

在 A 是否发生无信息的条件下

后进行修正和重新估计

对欲其发生原因 B_i 概率的事先估计

$$P(\square B_i)$$

$$P(B_i|A)$$

e.g. m 人传球. 第一次由甲传出给其他 $(m-1)$ 个人. 求第 n 次由甲传出的概率.

[解] P_i : 第 i 次由甲传出.

$$P_i = P_{i-1} \cdot 0 + \frac{1}{m-1} (1-P_{i-1}) = \frac{1}{m-1} (P_{i-1} + 1) \quad \dots \quad \square$$

事件独立性

相互独立

$$1) P(A|B) = P(A|\bar{B}) = P(B) \quad \text{则 } A, B \text{ 相互独立}$$

2) A 的发生不影响 B , 反之亦然.

即 $P(A) > 0$ 时 $P(B|A) = P(B)$

$P(B) > 0$ 时 $P(A|B) = P(A)$

(未考虑 Ω 和 \emptyset)

$$\xleftarrow{\text{即 } P(A) > 0 \text{ 且 } P(B) > 0} P(AB) = P(A)P(B)$$

性质



定义: 设 A, B 为两事件. 若 $P(AB) = P(A)P(B)$, 则称 A, B

性质3) 四对事件 $(A, B), (A, \bar{B}), (\bar{A}, B), (\bar{A}, \bar{B})$. 任一相互独立, 则其它三对也相互独立

互不相容事件 (非 \emptyset 和 Ω) 一定不能相互独立. \therefore 不行.

不可共存类~

[推广] 三元: 两两相互独立且三者彼此独立

$$\begin{cases} P(AB) = P(A)P(B) \\ P(AC) = P(A)P(C) \\ P(BC) = P(B)P(C) \\ P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \end{cases}$$

无不共存类~

相互独立的 n 个事件分成几组 (各组之间无交叉部分), 各组内随意运算所得事件彼此也相互独立.

e.g. $A_1, A_2, \dots, A_6 \Rightarrow A_1 \cap A_2 \cup \bar{A}_3 \cdot A_4 A_5 \cdot \bar{A}_6$ 相互也独立.

随机变量及其分布

• 随机变量

~~样本空间~~

E 为一随机事件, Ω 为其对应的样本空间, 若 $\forall \omega \in \Omega$ 按一定法则存在 $X(\omega) \in \mathbb{R}$ 与之对应, 则称 X 为随机变量.

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

(X 本身取值随机、不确定)

{ 离散型
非离散型 { 连续型随机变量
... }

符号: X, Y, Z 或 ξ, η, ζ

• 分布函数 (Cumulative Distribution Function)

设 X 为随机变量, 对每个实数 x , 随机事件 $\{X \leq x\}$ 的概率 $P(X \leq x) =: F(x)$. 称 $F(x)$.

* Notice: $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ $F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$

则有 $P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$

$$P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$$

$$P(X = x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} P(x_0 - \Delta x < X \leq x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} F(x_0) - F(x_0 - \Delta x) = F(x_0) - F(x_0^-)$$

↑
左极限

性质: (1) 单调不减; (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ 且 $F(+\infty) = 1$, $F(-\infty) = 0$.

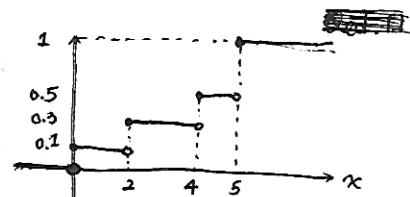
(3) 右连续. 即 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x) = F(x_0)$

[证明] $F(x_0 + \Delta x) = P(X \leq x_0 + \Delta x) = F(x_0) + P(x_0 < X \leq x_0 + \Delta x) = F(x_0) + \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} P(X = u) du$
 $P(X = u) \in [0, 1]$. $\therefore \Delta x \rightarrow 0^+$ 时, $\int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} P(X = u) du \geq 0$. $\therefore F(x_0 + \Delta x) \rightarrow F(x_0)$ ($\Delta x \rightarrow 0^+$) \square

e.g. $Z = \begin{cases} 5 & 50\% \\ 4 & 20\% \\ 2 & 20\% \\ 0 & 10\% \end{cases}$

~~样本~~

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 0.1 & (0 \leq x < 2) \\ 0.3 & (2 \leq x < 4) \\ 0.5 & (4 \leq x < 5) \\ 1 & (x \geq 5) \end{cases}$$



• 离散型随机变量

X 的取值有限个或可列无穷个. 称 X 离散型随机变量

常用描述: $\boxed{\text{分布律}}$ (概率分布) $P(X = x_k) =: p_k$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{非负} \\ \sum p_k = 1 \end{array} \right.$ $\xrightarrow{\text{可列个} \rightarrow \text{有限项级数}}$

$$P(X = x_k) = F(x_k) - F(x_k^-) = F(x_k) - F(x_{k-1}) \quad (\text{定义 } x_0 = -\infty)$$

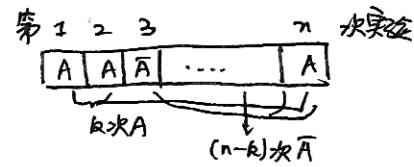
* 左极限也常写作 $F(x-0)$.

$$0-1 \text{ 分布} \quad \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline p & 1-p \end{array} \quad \text{有时分布律写作 } p^{1-k}(1-p)^k \quad (k \in \{0, 1\})$$

二项分布 \rightarrow 将一些事件视作相互独立、简化模型 (n 重 Bernoulli 试验模型)

n 重 Bernoulli 概率：相同独立的重复 n 次，每次都对事件 A 进行考察。 $P(A) = p, 0 < p < 1$

整个概率模型考察 A 在 n 次试验中发生次数的概率。



$$X = 0, 1, \dots, n$$

$$P(X=k) = p^k (1-p)^{n-k} \cdot C_n^k \quad (\text{二项分布})$$

$$\text{记作 } X \sim B(n, p)$$

Binomial
二项分布

e.g. 从甲和乙两组各抓一个人对抗。甲队员获胜概率 0.6。以下三种方案（均以胜出人数多的一组为胜）哪种对乙队有利？

- ① 各取三人； ② 各取五人； ③ 各取七人

乙获胜人数为 X 。

$$\text{[解]} \quad ① \quad P_{(2)} = P(X=2) + P(X=3) = 0.6^1 \cdot 0.4^2 \cdot C_3^2 + 0.6^2 \cdot 0.4^3 \cdot C_3^3 = 0.352$$

$$② \quad P_{(2)} = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) = C_5^3 \cdot 0.6^3 \cdot 0.4^2 + C_5^4 \cdot 0.6^4 \cdot 0.4^1 + C_5^5 \cdot 0.6^5 \cdot 0.4^0 = 0.317$$

$$③ \quad P_{(2)} = P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) + P(X=7) = \dots = 0.290$$

[另解] 比赛次数。

$$② \quad P_{(2)} = (0.4)^3 + C_3^2 (0.4)^3 \times 0.6 + C_4^2 (0.4)^3 \times 0.6^2 = 0.317$$

↑ ↑
前三次有2次乙胜 最终都是乙胜

e.g. 从 1~10 中有放回地抽取数字 (5 个)，将取出的数字从小到大排列，正中间是 4 的概率。

$$\text{[解]} \quad \text{记排序后的数字为 } X_1, X_2, X_3, X_4, X_5。 \quad \text{所求即 } P(X_3=4) = P(X_3 \leq 4) - P(X_3 \leq 3)$$

$(X_1 \leq X_2 \leq X_3 \leq X_4 \leq X_5)$

只要取出的数字有至少 3 个小于等于 4 即可

X : 抽取 5 个数字中 $\{\leq 4\}$ 发生的次数。 $X \sim B(5, \frac{4}{10})$

$$P(X_3 \leq 4) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) = C_5^3 \left(\frac{4}{10}\right)^3 \left(\frac{6}{10}\right)^2 + C_5^4 \left(\frac{4}{10}\right)^4 \left(\frac{6}{10}\right)^1 + C_5^5 \left(\frac{4}{10}\right)^5$$

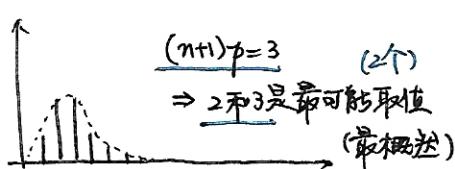
$$\xi: \quad \dots \quad \leq 3 \quad \dots \quad \xi \sim B(5, \frac{3}{10})$$

$$P(X_3 \leq 3) = P(\xi=3) + P(\xi=4) + P(\xi=5) = C_5^3 \quad \dots$$

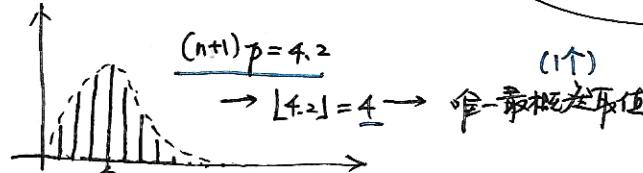
$$P(X_3=4) = \dots$$

二项分布取值情况

$$B(8, \frac{1}{3})$$



$$B(20, 0.2)$$



证明：考察 $\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)}$!

Poisson 分布

(泊松分布)

9:00-12:00 到来的客户数 X 的概率分布?

1) 分成很多 (N 个) 区间, 每个区间来 0 个人 / 1 个人. 否则再分. $\rightarrow N^+$ 个区间

2) 各个区间内客户数相互独立

3) 每个区间出现 1 个客户的概率与区间长度成正比. 不妨设为 $\frac{\lambda}{N}$. 入为常数 λ 客户数

这三个小时的平均

$$X_N \sim B(N, \frac{\lambda}{N}) \quad P(X_N=k) = C_N^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P(X_N=k) = \lim_{N \rightarrow \infty} C_N^k \left(\frac{\lambda}{N}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1. \quad \text{因此 } \{\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}\} \text{ 可作为分布律.} \\ (k=0, 1, 2, \dots)$$

因此, 称 $P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =: P(\lambda)$ 为 Poisson 分布. 记作 $X \sim P(\lambda)$

Poisson 定理 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda$. 则对固定的 k 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$
(二项分布推到极限成为 Poisson 分布) $(k=0, 1, 2, \dots)$

[证明] 记 $np_n =: \lambda_n$.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdot \frac{\lambda_n^k}{k!} \left[\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda_n}}\right]^{\lambda_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 \cdot \frac{\lambda_n^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_n} \cdot 1 = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \end{aligned}$$

应用: 若 $X \sim B(n, p)$, n 较大, p 较小, $np = \lambda$ 适中时. 认为近似 Poisson 分布.

即 $C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \approx e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ 书中附录 $\lambda: 0.1 \sim 10$.

e.g. 宇宙飞船. 宇宙粒子进舱概率分布: $X \sim P(\lambda)$. 粒子落到重要部位的概率为 p . 求落到重要部位的粒子数概率分布.

[解] 记落到 ... 粒子数为 Y . $Y=m | X=k \sim B(k, p)$

$$\begin{aligned} \text{全概率公式} \quad P(Y=m) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) P(Y=m | X=k) \\ &= \sum_{k=m}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} C_k^m p^m (1-p)^{k-m} \\ &= \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{m! (k-m)!}{m! (k-m)!} e^{-\lambda} (1-p)^{k-m} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^m}{m!} \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{[\lambda (1-p)]^{k-m}}{(k-m)!} = \frac{\lambda^m p^m}{m!} e^{\lambda (1-p)} e^{-\lambda} \end{aligned}$$

$$= \frac{\lambda^m p^m}{m!} e^{-p\lambda} = \frac{(\lambda p)^m}{m!} e^{-p\lambda} \quad \text{也是 Poisson 分布}$$

即 $Y \sim P(p\lambda)$

* 巴斯卡分布 (负二项分布)

重复射击目标，直到命中r次所需的射击次数X.

$$P(X=k) = C_{k-1}^{r-1} p^{r-1} (1-p)^{k-r} \cdot p = C_{k-1}^{r-1} p^r (1-p)^{k-r}. \quad \text{特别地, } r=1 \text{ 称几何分布}$$

$$(1-p)^{k-1} \cdot p$$

超几何分布 与 二项分布 的关系: $a+b \rightarrow \infty$. $\frac{a}{a+b} \rightarrow p$. 此时“放不放回”影响不大.

(有放回地拿球) (无放回地拿球)

$$\frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} \rightarrow C_a^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

(超几何分布)

• 连续型随机变量

频率直方图: 高度是频率/区间长度! \rightarrow 为了让面积是频率.

概率密度函数.

连续型随机变量

X: 随机变量. F(x): 分布函数. 若 $\exists f(x)$ s.t. $F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$

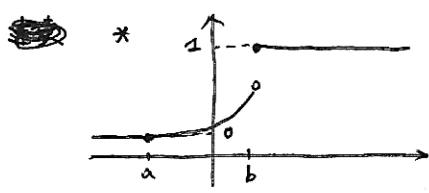
则称 X.

概率密度

$$\downarrow$$

$$(-\infty < u < +\infty)$$

处处连续、几乎处处可导



随机变量取值连续. $[a, b]$

但不是连续型随机变量! (找不到概率密度函数)

注意: $f(x)$ 不唯一. e.g. $f_1(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ 和 $f_2(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1. \end{array} \right. \rightarrow \text{可作为概率密度.}$$

概率密度 ≠ 概率. 概率 = $\int_{[x_0, x_1]} \text{概率密度} \cdot \text{微元}! \text{ (面积!)}$ $f(x_0) \Delta x \doteq P(x_0 < X \leq x_0 + \Delta x)$ ($\Delta x \rightarrow 0$)

$$P(x=a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int_{a-\Delta x}^a f(u) du = 0.$$

不可能事件 $\overline{\text{X}}$ 概率为 0

$$\text{e.g. } f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$x=\frac{1}{2}$: 不是不可能事件

$x \neq \frac{1}{2}$: 不是必然事件.

$x=2$: 不可能事件

$\overline{\text{X}}$: 必然事件.

$x \in \mathbb{R}$:

均匀分布: 概率密度是常数. Uniform Distribution

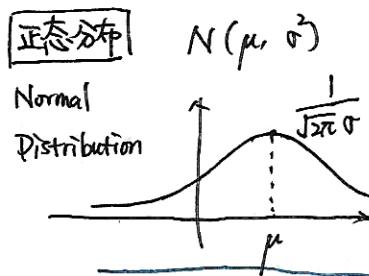
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \text{ (可取不等)} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

记作 $X \sim U(a, b)$.

指数分布: Exponential Distribution.

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0, & (x \leq 0) \\ 1 - e^{-\lambda x}, & (x \geq 0) \end{cases}$$

与 Poisson 分布的关系



$$P(X \leq x) = P(X \geq 2\mu - x) \quad \text{对称性}$$

~~P(X < x) = P(X > 2\mu - x)~~ 标准正态分布 $P_0(y)$ 分布函数 $y = \frac{x-\mu}{\sigma}$

$$P_n(|X| \leq x) = P_n(-x \leq X \leq x) = 2P(X \leq x) - 1.$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$= 2\Phi(x)$$

特别地, $X^* \sim N(0, 1)$

Std Normal Distribution

分布函数记作 $\Phi(x)$.

* 若 $f(\mu+x) = f(\mu-x)$

其对称性质类似 $N(\mu, \sigma^2)$

* $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$ 没有对应的初等函数 ~ 借助 $\Phi(x)$ 查表.

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \quad F(\mu+\sigma x) = \Phi(x)$$

$$* 3\sigma \text{原理: } |x-\mu| < 3\sigma$$

$$\Rightarrow P_N(-3 < X^* < 3)$$

$$= 0.9974$$

从已知概率分布推得相关事件概率分布.

离散型: 简单 对应的加一加完事. → 分布列
(或积分)

连续型: 需要概率密度描述.

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(f(X) \leq y) = P(X \leq f^{-1}(y)) \quad \leftarrow \text{分布函数.}$$

* 概率密度: 保留原函数的积分形式. 或直接对分布函数求导

$$\text{e.g. } Y = aX + b, \quad X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Y \sim N(a\mu + b, \underline{\sigma^2})$$

我们要求正态分布中的“ σ ”
 σ^2 / a^2

$$Y = f(X), \quad f \text{ 单调} \quad \text{e.g. } Y = 1 - e^{-\lambda X}, \quad X \sim E(\lambda), \quad Y \sim \text{均匀分布}(0, 1) \\ \text{分布函数.} \quad = U(0, 1)$$

定理

若 $Y = F_X(x)$, $\rightarrow Y \sim U(0, 1)$.

→ Monte-Carlo 仿真算法

定理 已知 $X: f_X(x)$. $g(x)$ 为 \mathbb{R} 上严格单调可导函数. $Y = g(X)$

则 Y 的概率密度为 $f_Y(y) = \begin{cases} |h'(y)| f_X(h(y)) & \alpha < y < \beta \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

其中 $h(y) = g^{-1}(y)$. $\{\alpha, \beta\} = \{g(-\infty), g(+\infty)\}$.

证明:

多维随机变量及其分布

二维随机变量及其分布函数

二维随机变量

Ω : 随机试验样本空间 $\forall \omega \in \Omega$, 存在 $(X(\omega), Y(\omega))$ 与之对应 $\in \mathbb{R}^2$.

称 (X, Y) ,

向量. 故也称二维随机向量.

分布函数

$$F_{X,Y}(x,y) := P(X \leq x, Y \leq y) := P[(X \leq x) \cap (Y \leq y)]$$

↑ 这是个记号!

称二维随机变量 (X, Y) 的联合分布函数.

* $0 \leq F(x, y) \leq 1$, $F(+\infty, +\infty) = 1$, $F(-\infty, -\infty) = 0$. $F(x, -\infty) = 0$. (x 可取 $+\infty$!)

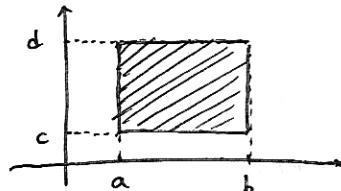
$$F(-\infty, y) = 0$$

~~(y 可取 $+\infty$!)~~

* 对 x, y 都单调不减 (需固定一个, 对单变量单调不减)

* 对 x, y 单变量右连续 (----- 右连续)

* $\forall a < b, c < d$.



$$P(a < X \leq b, c < Y \leq d)$$

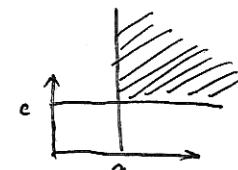
$$= F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c) \geq 0.$$



↙ 不满足第四
条性质!

满足以上四条性质的函数能作为二维随机变量的联合分布函数.

* $P(X > a, Y > c) = 1 + F(a, c) - F(a, +\infty) - F(+\infty, c)$
 $\neq 1 - F(a, c)$ *



边缘分布

$$F_X(x) = P(X \leq x) = F(x, +\infty) := \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y) \quad \text{称 } X \text{ 的边缘分布函数}$$

e.g. $F(x, y) = A(B + \arctan \frac{x}{2})(C + \arctan \frac{y}{2})$ 是联合分布函数

- (1) A, B, C. (2) F_X, F_Y . (3) $P(X > 2)$.

[解] $F(+\infty, +\infty) = A(B + \frac{\pi}{2})(C + \frac{\pi}{2}) = 1$.

(1) $F(-\infty, -\infty) = A(B - \frac{\pi}{2})(C - \frac{\pi}{2}) = 0$

$F(+\infty, -\infty) = A(B + \frac{\pi}{2})(C - \frac{\pi}{2}) = 0$

$F(-\infty, +\infty) = A(B - \frac{\pi}{2})(C + \frac{\pi}{2}) = 0$

* 实际上, 题已告知是联合分布函数. 列三个就行, 不用一一验证性质.

(3) $P(X > 2) = 1 - F_X(2) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

(2) $F_X(x) = F(x, +\infty)$

$$= \frac{1}{\pi} (\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{x}{2})$$

$F_Y(y) = F(+\infty, y)$

$$= \frac{1}{\pi} (\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{y}{2})$$

二维离散型随机变量

$$(X, Y) \in \{(x_i, y_j), i, j = 1, 2, \dots\}$$

$$P(X=x_i, Y=y_j) = p_{ij} \quad \text{分布列/分布律} \sim \text{联合分布表}$$

性质: 1) $p_{ij} \geq 0 \quad \forall i, \forall j$ 2) $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$.

P_{ij}	X				$P_{\cdot j} = \sum_i p_{ij}$	由联合分布函数确定 联合分布列
	x_1	\dots	x_i	\dots		
y_1	p_{11}	\dots	p_{1i}	\dots	$p_{y(1)}$	
\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	\vdots	
y_j	p_{j1}	\dots	p_{ji}	\dots	$p_{y(j)}$	
\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	\vdots	
$P_{\cdot i} = \sum_j p_{ij}$	$p_{x(1)}$	\dots	$p_{x(i)}$	\dots	$\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$	
		边缘分布				

e.g. 仨球, 偏盖. X: 落入1盒 Y: 落入2盒球数. 等可能落入. 求 (1) 联合分布律, 边缘分布律.

仨 球数

$$(2) P(X=Y), P(Y>X), (3) F(x, y)$$

[解]

		X				1
		0	1	2	3	
Y	0	$\frac{1}{27}$	$C_3^1/27$	$C_3^2/27$	$C_3^3/27$	
	1	$\frac{3}{27}$	$6/27$	$3/27$	0	
	2	$3/27$	$3/27$	0	0	
3	$1/27$	0	0	0		
		...				

②

边缘分布你加一加就好. 因为

① 古典概率模型

$$\textcircled{2} \quad P(X=i, Y=j) = \underbrace{P(X=i)}_{\text{二项分布}} \underbrace{P(Y=j|X=i)}_{\text{X, Y分布一致}}$$

X, Y分布一致

称 X, Y 同分布

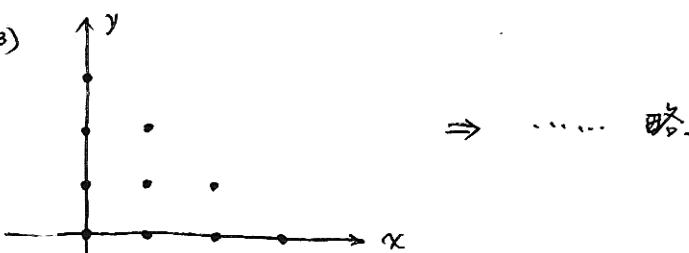
v.s. X, Y 相互独立. ($X=x$ 则 $Y=y$)

$$\begin{aligned} &= C_3^i \left(\frac{1}{3}\right)^i \left(\frac{2}{3}\right)^{3-i} \cdot C_{3-i}^j \left(\frac{1}{2}\right)^j \left(\frac{1}{2}\right)^{3-j} \\ &= C_3^i \cdot \frac{2^{3-i}}{3^3} \cdot C_{3-i}^j \cdot \frac{1}{2^{3-j}} \\ &= \frac{C_3^i C_{3-i}^j}{3^3} \end{aligned}$$

$$(2) P(X=Y) = \frac{1}{27} + \frac{6}{27} = \frac{7}{27}.$$

$$P(Y>X) = \frac{3}{27} + \frac{3}{27} + \frac{3}{27} + \frac{1}{27} = \frac{10}{27}$$

(3)



□

* 边缘分布一样时, 联合分布依然有多种不同可能

二维连续型随机变量

设二维随机变量 $X, Y \dots \dots F(x, y)$

存在非负可积函数 $f(x, y)$ s.t. $F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv$

称 联合概率密度

性质: $f(x, y) \geq 0, \forall x, y$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) du dv = 1.$$

$$P(\text{点})=0, \quad P(\text{直线})=0, \quad P(\text{可求长曲线})=0.$$

边缘概率分布: $F_X(x) = F(x, +\infty) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) du dv = \int_{-\infty}^x du \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) dv \right] = f_X(u)$

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

y同理略.

均匀分布

面积 A.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{A}, & (x, y) \in G \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad : \quad X, Y \sim U(G)$$

* 当 G 是边平行于坐标轴的矩形时, 其边缘分布依然均匀分布.

* G 无限小时, 未作! e.g.



二维正态分布

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right]}$$

vs 一维正态: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$



~~二维正态分布的矩阵形式~~

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \exp \left[-\frac{1}{2} (x-\mu)^T \Sigma^{-1} (x-\mu) \right]$$

记作 $\bullet (X, Y) \sim U(\mu_1, \sigma_1^2; \mu_2, \sigma_2^2; \rho)$. $|\rho| \leq 1$ (Σ 是 n 阶正定矩阵)

n 维正态分布的矩阵形式: $f(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \exp \left[-\frac{1}{2} (x-\mu)^T \Sigma^{-1} (x-\mu) \right]$

对二维的情况即: $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$

e.g. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx :_0 = \sqrt{\iint e^{-(x^2+y^2)} dx dy} = \sqrt{\pi}.$

$$\textcircled{2} = \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{x^2}{2 \cdot \frac{1}{2}}} dx = \sqrt{\pi}$$

边缘分布: $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(\frac{(y-\mu_2)}{\sigma_2} - \rho \frac{(x-\mu_1)}{\sigma_1} \right)^2 + \left(\frac{(x-\mu_1)}{\sigma_1} - \rho \frac{(y-\mu_2)}{\sigma_2} \right)^2 \right]$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_2^2} \left(y - (\mu_2 + \rho \frac{\sigma_2(x-\mu_1)}{\sigma_1}) \right)^2} dy}_{\text{II}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

也是正态分布.

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

$$e.g. f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} (1 + \sin xy) \rightarrow \text{边缘分布也正态}$$

• 随机变量的条件分布

离散型二维随机变量的条件分布：对应条件下的值在联合分布中加一加 \rightarrow \sum .

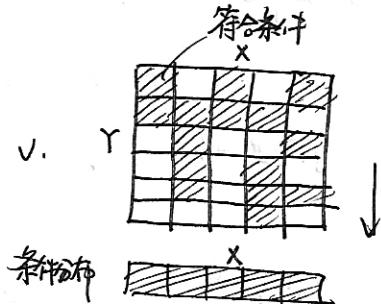
$$P(Y=y_j | X=x_i) \geq 0, \quad \sum_{j=1}^n P(Y=y_j | X=x_i) = 1.$$

连续型二维随机变量的条件分布

记号： $f_{Y|X}(y|x)$: $X=x$ 条件下Y的条件概率密度

\uparrow 固定，但 x 只有在有分布处才有意义
 \uparrow 自变量

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dy} = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} > 0 \text{ 才有意义}$$



正态分布的条件分布

$$X|Y=y \sim N(\mu_1 + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (y - \mu_2), \sigma_1^2(1-\rho^2))$$

• 随机变量的独立性

$$P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x) P(Y \leq y) \quad \text{即 } F(x,y) = F_X(x) F_Y(y).$$

$$\Leftrightarrow P\{X \in D_1\} \{Y \in D_2\} = P(X \in D_1) P(Y \in D_2).$$

$$\textcircled{2} \text{ 二维正态分布 } (X, Y) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2; \mu_2, \sigma_2^2; \rho) \quad \underline{\rho=0} \sim \text{相互独立}$$

• 多维随机变量函数的分布

离散型：显然，列表！

$$X \sim B(n_1, p), \quad Y \sim B(n_2, p), \quad X, Y \text{ 相互独立} \quad \text{则 } X+Y \sim B(n_1+n_2, p)$$

$$X \sim P(\lambda_1), \quad Y \sim P(\lambda_2), \quad X, Y \text{ 相互独立} \quad X+Y \sim P(\lambda_1+\lambda_2)$$

连续型：概率密度 ~~函数~~ $f(x, y)$

$$e.g. Z = X+Y.$$

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(X+Y \leq z) = \iint_{x+y \leq z} f(x,y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} f(x,y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^z f(x, v-x) dv = \int_{-\infty}^z \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, v-x) dx \right] dv \end{aligned}$$

$$\therefore f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx$$

$$\text{类似可得: } f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y) dy$$

$(z=x+y)$

$$\text{若 } X, Y \text{ 相互独立, 则 } f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx =: f_X * f_Y(z)$$

卷积!

$$ax+by+c=z \Rightarrow f_Z(z) = \frac{1}{|b|} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, \frac{z-at-c}{b}) dt$$

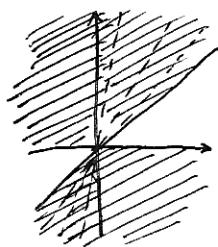
$$= \frac{1}{|b|} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\frac{z-bt-c}{a}, t) dt$$

$$X_1, \dots, X_n \text{ 相互独立. } X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2) \Rightarrow \sum X_i \sim N(\sum \mu_i, \sum \sigma_i^2)$$

(p=0) 线性函数 $\sim N(\text{线性}\mu_i, \text{线性}\sigma_i^2)$

$$(X, Y) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2; \mu_2, \sigma_2^2; \rho) \Rightarrow X+Y \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)$$

商的分布: $f(x, y) \quad Z = X/Y.$



$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P\left(\frac{X}{Y} \leq z\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{zy} f(x, y) dx + \int_{-\infty}^0 dy \int_{zy}^{+\infty} f(x, y) dx$$

$$dx = d(yz) = y dz$$

$$= \int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^z f(zy, y) dz \cdot y + \int_{-\infty}^0 dy \int_z^{+\infty} f(zy, y) \cdot y dz$$

$$= \int_{-\infty}^z dz \int_0^{+\infty} f(zy, y) y dy + \int_{-\infty}^z dz \int_{-\infty}^0 f(zy, y) (-y) dy$$

$$= \int_{-\infty}^z dz \int_0^{+\infty} f(zy, y) |y| dy$$

$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(zy, y) |y| dy$

$$Z' = Y/X.$$

$$f_{Z'}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, zx) |x| dx$$

$$Z = X^2 + Y^2$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f(\sqrt{z} \cos \theta, \sqrt{z} \sin \theta) d\theta. & z \geq 0 \end{cases}$$

(极坐标)

若 $X_i \sim N(0, 1)$. 则 $Z = \sum X_i^2$ 服从 χ^2 分布

$$T(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} z^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{z}{2}} & z \geq 0 \end{cases}$$

自由度为n的 χ^2 分布

$$\text{极值分布: } F_{\max}(u) = P(\text{Max} \leq u) = F(u, u)$$

$$F_{\min}(v) = 1 - P(X > v, Y > v) = \dots$$

若 X_1, \dots, X_n 相互独立. $X_i \sim F_i(x), i=1, 2, \dots, n$

$$M = \max \{X_1, \dots, X_n\} \quad N = \min \{X_1, \dots, X_n\}$$
$$F_M(z) = P(X_1 \leq z, \dots, X_n \leq z)$$
$$= F_1(z) F_2(z) \dots F_n(z)$$

$$F_N(z) = 1 - P(X_1 > z, \dots, X_n > z) = 1 - (1 - F_1(z))(1 - F_2(z)) \dots (1 - F_n(z))$$

即: $F_M(z) = \prod F_i(z)$ $F_N(z) = 1 - \prod (1 - F_i(z))$

随机变量的数字特征

· 数学期望

离散型随机变量: $P(X=x_i) = p_i, i=1, 2, \dots$ 若 $\sum_{i=1}^{+\infty} x_i p_i$ 绝对收敛.

称其和为X的数学期望. 记作 $E(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i p_i$.

(考虑到有限情况: $E(X) = \sum_{i \in I} x_i p_i$)

连续型随机变量: 密度函数为 $f(x)$. 若广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ 绝对收敛

则称其为X的数学期望. 记作 $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$.

e.g. Cauchy 分布: $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. 其广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)} dx$ 发散
数学期望不存在. ($\int_{-N^2}^{N^2} \dots$ 和 $\int_{-N^2}^N \dots N \rightarrow +\infty$)

随机变量函数的数学期望.

$g(x)$ 离散. 离散型: 若 $\sum_{i \in I} g(x_i) p_i$ 绝对收敛. $=: E(g(X))$

随机型: 若 $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$ 绝对收敛. $=: E(g(X))$.

二维随机变量.

$E(g(X, Y)) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} g(x_i, y_j) p_{ij}$ (若存在)

$E(g(X, Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy$ (若存在)

$E X^k$ $E |X|^k$ $E(X - E X)^k$ 特别地, $D X = E(X - E X)^2$ 称方差.
 k 阶原点矩 k 阶绝对原点矩 k 阶中心矩
($\mu = E X$)

$E(X^k + Y^l)$ $E((X - E X)^k (Y - E Y)^l)$ $k=l=1$ 时: $k+l$ 阶混合原点矩 二阶...
 $k+l$ 阶混合原点矩 $k+l$ 阶混合中心矩 $k+l \dots$ 中心矩 称二阶....
即 协方差.

$E \frac{(X - E X)(Y - E Y)}{\sqrt{D X} \sqrt{D Y}}$: 相关系数.

数学期望的性质: 1) $E \text{Const} = \text{Const}$

4) X, Y 相互独立 $\Rightarrow E(XY) = (EX)(EY)$

2) $E aX = a EX$

5) $P(X \geq a) = 1 \Rightarrow EX \geq a$

3) $E(\mu X + \eta Y) = \mu EX + \eta EY$

6) $P(X \leq b) = 1 \Rightarrow EX \leq b$.

↑

3条线性性

3) 证明: 以连续型为例. 只证 $E(X+Y) = E(X)+E(Y)$.

$$E(X+Y) = \iint x f(x,y) dx dy + \iint y f(x,y) dx dy = \iint (x+y) f(x,y) dx dy = E(X+Y)$$

4) 证明: 连续型. $E(XY) = \iint xy f(x,y) dx dy = \iint xy f_X(x) f_Y(y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) x dx \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y) y dy$

$$= (E(X))(E(Y))$$

e.g. $E(XY) = E(X)E(Y)$ 但不独立: $(X, Y) \sim U(D)$. \checkmark $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$.

e.g. n 个球放入 n 个 $V=\infty$ 的盒子. 求空着盒子数 X 的数学期望.

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

$$\begin{array}{c|c} x_i = 0 & 1 \\ \hline 1 - \frac{n-1}{n} & \frac{1}{n} \end{array}$$

$$EX = \sum EX_i = \sum \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$
$$= \frac{(n-1)^n}{n^{n-1}}$$

• 方差

“距离”. 因绝对值不好处理.

~~若~~ $(E(X-EX)^2)$ 存在, $\checkmark = D(X) = D(X)$. 称方差. 也记作 $Var(X)$

Deviation Variance

称 $\sqrt{D(X)}$ 为标准差. 衡量取值偏离的情况.

离散型 $D(X) = \sum_{i \in I} (x_i - EX)^2 p_i$
↑ 单位²

连续型: $D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - EX)^2 f(x) dx$

$D(X) = E(X^2) - (EX)^2$ 证明: $D(X) = E((X-EX)^2) = E(X^2 - 2X \cdot EX + (EX)^2) = E(X^2) - 2EX \cdot EX + (EX)^2$
 $= E(X^2) - E^2(X).$

e.g. $X \sim P(\lambda)$. $EX = \lambda$.

$$D(X) = E(X^2) - \lambda^2 = E(X^2 - X) + E(X) - \lambda^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-2)!} + \lambda - \lambda^2 = \lambda^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-2} e^{-\lambda}}{(k-2)!} + \lambda - \lambda^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

e.g. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $EX = \mu$.

$$D(X) = E(X^2) - E^2(X) = \sigma^2$$

e.g. 几何分布. $EX = \frac{1}{p}$. $D(X) = E(X^2) - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}$

$$P(X=k) = p(1-p)^{k-1}.$$

$$= \frac{p(1-p)}{p^2}$$

方差性质: $D(\text{const}) = 0$

$$D(X + \text{const}) = D(X)$$

$$D(aX) = a^2 D(X)$$

$$D(X \pm Y) = E((X \pm Y - (EX \pm EY))^2)$$

$$= E((X-EX)^2 + (Y-EY)^2 \pm 2(X-EX)(Y-EY))$$

~~D(X+Y)~~

$$= D(X) + D(Y) \pm 2 \text{Cov}(X, Y)$$

协方差

$\text{Cov}(X, Y)$

[证明] $\text{Cov}(X, Y) := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)) = \mathbb{E}(XY - Y\mathbb{E}X - X\mathbb{E}Y + \mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}Y)$
 $= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y - \mathbb{E}Y\mathbb{E}X + \mathbb{E}X\mathbb{E}Y = \mathbb{E}(XY) - (\mathbb{E}X)(\mathbb{E}Y)$

因此. X, Y 相互独立 $\Rightarrow \text{Cov}(X, Y) = 0 \Rightarrow \mathbb{D}(X+Y) = \mathbb{D}X + \mathbb{D}Y = \mathbb{D}(X+Y)$.

$\mathbb{D}(X) \leq \mathbb{E}((X-c)^2)$. $\forall c$. \Leftrightarrow 当且仅当 $c = \mathbb{E}X$ 取等.

[证]. $\mathbb{E}((X-c)^2) = \mathbb{E}((X-\mathbb{E}X+\mathbb{E}X-c)^2)$

~~$\mathbb{E}((X-c)^2) = (X-\mathbb{D}X)^2 +$~~

即得.

常用期望与方差

		$\mathbb{E}X$	$\mathbb{D}X$
0-1 分布.	$P(X=1) = p$.	p	$p(1-p)$
$B(n, p)$	$P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ $k=1, 2, \dots, n$	np	$np(1-p)$
$P(\lambda)$	$P(X=k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ $k=0, 1, 2, \dots$	λ	λ
几何分布	$P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$ $0 < p < 1, k=0, 1, 2, \dots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
$U(a, b)$	/	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$E(\lambda)$	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} (x > 0)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
$N(\mu, \sigma^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2

标准化随机变量: $\mathbb{D}(X) > 0$, 称 $X^* = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{\mathbb{D}(X)}}$. \rightarrow 无量纲数. 可用于平行对比

协方差

$\text{Cov}(X, Y) := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)) = \mathbb{E}(XY) - (\mathbb{E}X)(\mathbb{E}Y) = \pm \frac{1}{2} [\mathbb{D}(X+Y) - \mathbb{D}(X) - \mathbb{D}(Y)]$

相关系数: 去除量纲 (标准化).

$$\rho_{xy} = \text{P}(x, y) := \mathbb{E}\left(\frac{(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)}{\sqrt{\mathbb{D}X} \sqrt{\mathbb{D}Y}}\right) = \text{Cov}(X^*, Y^*) = \mathbb{E}(X^* Y^*)$$

$$= \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbb{D}X} \sqrt{\mathbb{D}Y}}$$

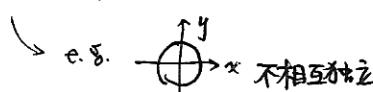
$\rho_{xy} = 0$: 不相关

$|\rho_{xy}| = 1$: 完全相关.

$0 < |\rho_{xy}| < 1$: 部分线性相关

(不线性相关)

(完全线性相关)



e.g. 不相互独立

$$\mathbb{D}(X+Y) = \mathbb{D}X + \mathbb{D}Y \Leftrightarrow \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \Leftrightarrow \text{Cov}(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X, Y \text{ 不相关}$$

e.g. $(X, Y) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2; \mu_2, \sigma_2^2; \rho) \Rightarrow \text{Cov}(X, Y) = \rho\sigma_1\sigma_2$

$\rho=0 \Rightarrow X, Y \text{ 相互独立且不相关. 或者线性无关. 或者无线性关系. } \underline{\text{没有部分相关情况}}$

协方差性质 $\text{cov}(aX, bY) = ab \text{cov}(X, Y)$

$$\text{cov}(X+Y, Z) = \text{cov}(X, Z) + \text{cov}(Y, Z)$$

$$\text{cov}(X, X) = \mathbb{D}(X)$$

$$|\text{cov}(X, Y)|^2 \leq \mathbb{D}(X)\mathbb{D}(Y)$$

Cauchy-Schwarz 不等式

(当且仅当 t_0 s.t. $P(Y - E(Y) = t_0(X - E(X))) = 1$. 即 X, Y 完全相关即 $|\rho_{XY}| = 1$)

$$\Rightarrow \text{as } |\rho_{XY}| \leq 1$$

协方差矩阵

$$C = \begin{pmatrix} \text{cov}(x_1, x_1) & \text{cov}(x_1, x_2) & \dots & \text{cov}(x_1, x_n) \\ \text{cov}(x_2, x_1) & \text{cov}(x_2, x_2) & \dots & \text{cov}(x_2, x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(x_n, x_1) & \text{cov}(x_n, x_2) & \dots & \text{cov}(x_n, x_n) \end{pmatrix} \quad \text{where } \text{cov}(x_i, x_i) = \mathbb{D}x_i$$

e.g. n 维正态分布

$$\mathbf{x} = (x_1 \dots x_n)^T$$

协方差矩阵 Σ

$$\mathbf{x} \sim N(\mathbb{E}\mathbf{x}, \Sigma)$$

$$\mathbb{E}\mathbf{x} = (\mathbb{E}x_1 \dots \mathbb{E}x_n)^T$$

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbb{E}\mathbf{x})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mathbb{E}\mathbf{x})}$$

Chebyshov 不等式与大数定律

- Chebyshov 不等式

$\text{设 } \mathbb{E}X = \mu, \text{ } D(X) = \sigma^2. \text{ 则 } \forall \varepsilon > 0, \quad P(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$

$$P(|X - \mu| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

[证明] $P(|X - \mu| \geq \varepsilon) = \int_{|x-\mu| \geq \varepsilon} 1 \cdot f(x) dx \leq \int_{|x-\mu| \geq \varepsilon} \left| \frac{x-\mu}{\varepsilon} \right|^2 f(x) dx = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{|x-\mu| \geq \varepsilon} (x-\mu)^2 f(x) dx$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}. \quad \square$$

E.8. X, Y 在 $[0, 1]$ 中随机取两个数. 估计 $P(0 < \min\{X, Y\} - \mathbb{E}\min\{X, Y\} \leq \frac{1}{3})$ 并求其真值.

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

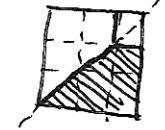
$$\mathbb{E}\min\{X, Y\} = \iint_{[0,1]^2} \min\{x, y\} dx dy = 2 \int_0^1 x dy dx = \frac{1}{3}.$$

$$\mathbb{E}\min^2\{X, Y\} = \dots = \frac{1}{6}. \quad D\min\{X, Y\} = \frac{1}{18}.$$

$$\text{估计: } P^* = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{9}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{真值: } P(0 < \min\{X, Y\} \leq \frac{1}{3}) = \iint_{[0,1]^2} \min\{x, y\} dx dy$$

$$= 2 \int_0^{\frac{1}{3}} x dx \int_0^x dy + 2 \int_{\frac{1}{3}}^1 x dx \int_x^1 dy = \frac{8}{9}.$$



- 依概率收敛.

设 $Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$ 是一列随机变量, X 是一个随机变量. 对 $\forall \varepsilon > 0$. 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|Y_n - X| \geq \varepsilon) = 0$. 称~

记作 $Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} X$. (X 可以是常数)

- Bernoulli 大数定律

n_A 是 n 次独立重复试验中事件 A 发生的次数. p 是每次试验中 A 发生的~~概率~~概率.

则有 $Y_n = \frac{n_A}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} p$. (可用 Chebyshov 证明)

随机变量序列服从大数定律: 若 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 具有以下性质, 则称.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\mathbb{E}X_k)\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

- Chebyshov 大数定律:

随机变量序列 X_1, \dots, X_n 两两不相关, 方差存在且有共同上界. 即

$$\mathbb{E}X_k = \mu_k, \quad D(X_k) = \sigma_k^2 \leq \sigma^2 \quad (k=1, 2, \dots).$$

则该序列服从大数定律.

"两两不相关" 可替为 $\frac{1}{n^2} D\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. (Chebyshov 不等式证)

Khantchane 大数定律

X_1, \dots, X_n 相互独立且同分布. 若 $E(X_i) = \mu$ 存在.

$$\text{则 } \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \mu.$$

[推论] 若 k 阶原点矩 ($E(X_i^k)$) 存在 则 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k^k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \mu_k$

e.g. 可用 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{X_i^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \frac{1}{2} \int_1^3 e^{x^2} dx$ (若 $X_i \sim U(1, 3)$). 来求 $\int_1^3 e^{x^2} dx$.

中心极限定理

$$\sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{以分布收敛}} N(n\mu; n\sigma^2) \xrightarrow{\text{标准化}} N(0, 1)$$

$$\text{即: } \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - n\mu)}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{以分布收敛}} N(0, 1)$$

若 X_1, \dots, X_n 是相互独立且同分布. 同时也有

且 $E(X_k) = \mu$, $D(X_k) = \sigma^2$
期望存在 方差存在

$$\text{即: } P\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - n\mu)}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq x\right) \rightarrow \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{以分布收敛}} \text{正态分布 (}n \rightarrow \infty\text{)}$$

$$N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

标准化后形式一致

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma \sqrt{n}} \leq x\right) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

e.g. 用标准正态分布表示. $X_i \sim E(5)$. n 很大. $P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \frac{1}{5}\right| < \varepsilon\right)$

$$\text{解: } \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \sim N\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{25n}\right) \quad \Rightarrow P(\dots) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{1}{25n}}}\right) - \Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{1}{25n}}}\right) = 2\Phi(5\varepsilon\sqrt{h}) - 1. \quad \square$$

DeMoivre-Laplace 中心极限定理

$$Y_n \sim B(n, p) \quad (\text{即: } Y_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad X_i = \begin{cases} 1 & \text{A} \\ 0 & \bar{A} \end{cases}, \quad P(A) = p) \quad 0 < p < 1. \quad \text{对任意 } x \in$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x\right) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

$$\text{即: } \frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0, 1). \quad Y_n \sim N(np, np(1-p))$$

问题: N. 连续分布. 二项分布: 离散分布

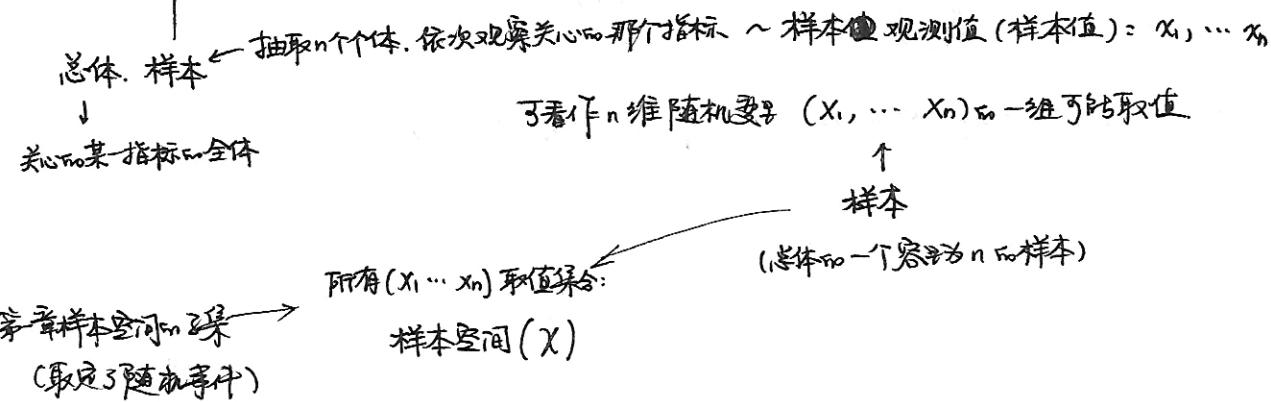
$$P(Y_n = x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \exp\left[-\frac{(x-np)^2}{2np(1-p)}\right]$$

$$\frac{C_n^k p^k (1-p)^{n-k}}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \approx$$

$$\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} e^{-\frac{(x-np)^2}{2np(1-p)}} dx$$

- 2) $n < 10$: 直接算
- 2) n 较大, p 较小 ($n \gg \lambda \gg p$). Poisson 分布近似
 $(1-p)$ $\frac{np}{\lambda}$ 这个
- 3) n 较大, $0.1 < p < 0.9$ 时 或 $n > 100$. $\frac{p \approx 0.1}{p > 0.9}$: 正态分布近似

数理统计



简单随机样本： (x_1, \dots, x_n) 是来自 X 的样本。 x_1, \dots, x_n 相互独立且与 X 同分布。

若 $X = f(x)$. 则 $f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i)$

统计量 $g(x_1, \dots, x_n)$ 是 n 元函数（无未知参数） $\rightarrow g(x_1, \dots, x_n)$ 统计量 <一定是随机变量>
如 μ 和 σ^2 给定一个样本值就能求出值

常用统计量： $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ 样本均值 vs. $\mathbb{E}X$ (期望/总体均值)

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2 \quad \text{样本方差}$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2} \quad \text{样本标准差}$$

$$M_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k \quad \text{样本 } k \text{ 阶原点矩}$$

$$\tilde{S}^2 := CM_k := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^k \quad \text{样本的上阶中心矩}$$

vs. DX

vs. $\mathbb{E}X^k$

vs. $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2$

顺序统计量： (x_1, \dots, x_n) 样本的样本值为 (x_1, \dots, x_n) . 若排序后为 $x_1^* \leq x_2^* \leq \dots \leq x_n^*$.

定义 随机变量 $X_{(k)} = x_k^*$ (第 k 小的值). $k=1, 2, \dots, n$

显然 $X_{(1)} = \min_{1 \leq k \leq n} \{X_k\}$. $X_{(n)} = \max_{1 \leq k \leq n} \{X_k\}$. 称 $X_{(n)} - X_{(1)}$ 为 极差.

$$\tilde{X} := \begin{cases} X_{(\frac{n+1}{2})} & . \quad n \text{ 为奇} \\ \frac{1}{2}(X_{(\frac{n}{2})} + X_{(\frac{n}{2}+1)}) & n \text{ 为偶} \end{cases} \quad \text{为中位数.}$$

统计量性质： X_i 简单样本. $\mathbb{E}X = \mu$. $DX = \sigma^2$

$$\mathbb{E}(\bar{X}) = \mu. \quad D(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$(\text{证: } \mathbb{E}\bar{X} = \frac{1}{n} \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) \quad D\bar{X} = \frac{1}{n^2} D \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) = \frac{\sigma^2}{n})$$

$$\rightarrow \underline{\mathbb{E}(S^2) = \sigma^2}$$

$$\begin{aligned} [\text{证}] \quad \mathbb{E}S^2 &= \mathbb{E} \left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2 \right) = \frac{1}{n-1} \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^n (x_i^2 + \bar{X}^2 - 2\bar{X}x_i) \right) = \frac{1}{n-1} \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 + n\bar{X}^2 - 2\bar{X} \cdot n\bar{X} \right) \\ &= \frac{1}{n-1} \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{X}^2 \right) = \frac{1}{n-1} \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right) \end{aligned}$$

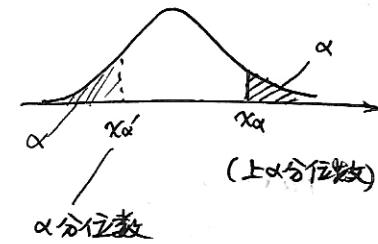
$$= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i^2) - \frac{n}{n-1} \mathbb{E}(\bar{X}^2) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\mathbb{D}X_i + \mathbb{E}^2 X_i) - \frac{n}{n-1} (\mathbb{D}\bar{X} + \mathbb{E}^2 \bar{X})$$

$$= \frac{1}{n-1} (n\sigma^2 + n\mu^2) - \frac{n}{n-1} \left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 \right) = \frac{n-1}{n-1} \sigma^2 = \sigma^2 \rightarrow \text{因此称 } S^2 \text{ 为样本方差.}$$

$$M_k \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P} \mathbb{E}(X^k) \quad (\text{若存在})$$

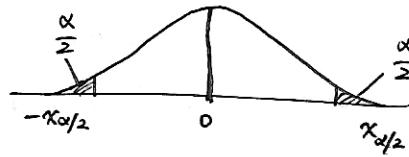
上侧 α 分位数: 若 $P(X > x_\alpha) = \alpha$, 称 x_α 为 X 所服从分布的 α .

α 分位数: 若 $P(X < x_\alpha) = \alpha$, 称 x_α 为 $-$.



双侧 α 分位数: 若 X 的概率密度函数为偶函数.

$\forall \alpha$. $P(|X| > x_{\alpha/2}) = \alpha$, 称 $x_{\alpha/2}$ 为 X 所服从分布的双侧 α 分位数.



标准正态分布的上 α 分位数

$$\Phi(u_{0.95}) = 0.05. \quad -u_\alpha = u_{1-\alpha}$$

$$P(|X| > u_\alpha) = \min \{2\alpha, 1\}.$$

• 抽样分布

χ^2 分布: X_1, \dots, X_n 独立且与 X 同分布, 都服从从 $N(0, 1)$

(卡方分布) 称 $\sum_{i=1}^n X_i^2$ 服从分布为自由度 n 的 χ^2 分布. 即 $\sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi^2(n)$

$$\chi^2: f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} T(\frac{n}{2})} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad T(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

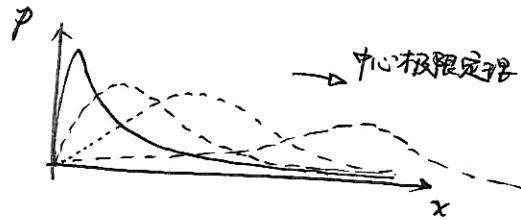
$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n).$$

简单样本.

$$\mathbb{E}(\chi^2(n)) = n. \quad \mathbb{D}(\chi^2(n)) = 2n \quad ; \quad X_1 \sim \chi^2(n_1), X_2 \sim \chi^2(n_2), \text{ 相互独立.}$$

$$\mathbb{E} \left[\frac{1}{n} (\mathbb{D}X_i + \mathbb{E}^2 X_i) \right] \uparrow \quad \text{求 } \mathbb{E} X_i^4 - \mathbb{E}^2 X_i^2 \quad (\text{用正态分布算}) \quad X_1 + X_2 \sim \chi^2(n_1 + n_2).$$

$$X_{1-\alpha} = -X_\alpha$$



t 分布: $X \sim N(0, 1)$, $Y \sim \chi^2(n)$, X, Y 相互独立

$$T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$$

$$T \sim T(n)$$

自由度为 n 的 T 分布

$$-t_{1-\alpha}(n) = t_\alpha(n)$$

$$f_n(t) \text{ 是偶函数.} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$F\text{分布} \quad X \sim \chi^2(m), \quad Y \sim \chi^2(n) \quad X, Y \text{ 相互独立.} \quad F = \frac{X/m}{Y/n}.$$

记 $F \sim F(m, n)$.

性质: $\frac{1}{F} \sim F(n, m)$. $n \rightarrow \infty, \quad X \rightarrow 1$. (非分布)

$$F_\alpha = \frac{1}{F_{1-\alpha}} \quad (\text{可用分布函数来证明})$$

证明: $F_\alpha(1, n) = [t_{1-\alpha/2}(n)]^2$

[证] $X \sim N(0, I), \quad Y \sim \chi^2(n). \quad T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}, \quad T^2 = \frac{X^2}{Y/n} \xleftarrow{\text{自由度为 } 1 \text{ 的 } \chi^2 \text{ 分布}} \sim F(1, n)$

$$\alpha = P(|T| > t_{\alpha/2}(n))$$

$$= P(T^2 > t_{\alpha/2}^2(n)) \quad \text{[]} = P(F > t_{\alpha/2}^2(n))$$

而 $t_{\alpha/2} = \frac{1}{2} t_{1-\alpha/2}$ $\therefore F_\alpha(1, n) = [t_{\alpha/2}^2(n)] = [\frac{1}{2} t_{1-\alpha/2}(n)]^2$

$F \sim F(m, m), \quad P(F > 1) = \frac{1}{2}$

正态总体的抽样分布

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. (X_1, \dots, X_n) 是 X 的简单样本, 则

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1). \quad \text{即 } \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \quad \text{即 } \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1). \quad \text{感性理解: 有线性关系 } \sum_{i=1}^n \frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} = 0.$$

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \text{ 与 } \bar{X} \text{ 相互独立} \quad \text{自由度下降 1.}$$

[证] $\sum_i \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2(n). \quad (\because \frac{X_i - \mu}{\sigma} \text{ 相互独立})$

[引理] X_1, \dots, X_n 相互独立且 $X_i \sim N(0, 1)$, $i = 1, 2, \dots, n$. 矩阵 C 是正交矩阵. ($CC^T = C^TC = E$).

$$(Y_1, \dots, Y_n)^T = C(X_1, \dots, X_n)^T. \quad \text{则 (1) } Y_1, \dots, Y_n \text{ 相互独立且 } Y_i \sim N(0, 1)$$

$$(2) Y_i \text{ 与 } \sum_{j \neq i} Y_j^2 \text{ 相互独立.}$$

$$h(y) = Cy$$

[证] $(X_1, \dots, X_n)^T = C^{-1}(Y_1, \dots, Y_n)^T. \quad J = \begin{vmatrix} \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \end{vmatrix} = |C^{-1}| = \pm 1 =: |h'(y)|$
Jacobi 行列式

$$f_X(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{2}x^T x} \quad \left\{ \begin{array}{l} Y^T Y = x^T C^T C x = x^T x \\ \parallel \end{array} \right.$$

$$f_Y(y_1, \dots, y_n) = f_X(c^{-1}(y_1, \dots, y_n)^T) \cdot |h'(y)| = f_X(c^{-1}(y_1, \dots, y_n)^T) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{2}y^T y}$$

$\dots = (f_{Y_i}(y))^n \rightarrow Y_1, \dots, Y_n$ 相互独立. 且 $Y_i \sim N(0, 1)$

求 f_{Y_i}

$$\text{令 } Y_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1) \quad \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_i Y_i \sim N(0, n) \xrightarrow{\text{标准化}} \frac{\bar{Y}_i + \dots + \bar{Y}_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \bar{Y} = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}.$$

$$\text{构造正交变换} \quad Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} = \tilde{C} \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ c_{21} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \text{ s.t. } \tilde{C}^T \tilde{C} = \tilde{C} \tilde{C}^T E$$

$$Z_1 = \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

$$\begin{aligned} Z_2^2 + \dots + Z_n^2 &= (Z_1^2 + \dots + Z_n^2) - Z_1^2 = Z^T Z - Z_1^2 = y^T y - Z_1^2 = Y_1^2 + \dots + Y_n^2 - \left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 - \left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \end{aligned}$$

(左侧是 $(n-1)$ 个服从 $N(0, 1)$ 的随机变量)

Z_1, Z_2, \dots, Z_n 相互独立 $\Rightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ 与 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ 相互独立 $\Rightarrow \bar{X}$ 与 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ 相互独立 \square

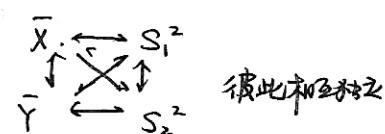
~~$$\text{考虑到 } \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1), \quad \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1). \Rightarrow t\text{ 分布: } \frac{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$~~

因此. X 总体方差已知 \Rightarrow ~~用~~ 用 $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$

未知 \Rightarrow 用 $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$
样本标准差.

对两个正态总体的抽样分布.

X, Y 独立. 取 $(X_1, \dots, X_n), (Y_1, \dots, Y_m)$ 两个样本 (简单样本).
 $\begin{cases} \sim \\ \sim \end{cases} N(\mu_1, \sigma_1^2) \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$



$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \sim N(0, 1).$$

$$\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{(m-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(n+m-2)$$

当 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ 时. $\bar{X} \sim$

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{m}}} / \sqrt{\frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{(n+m-2)\sigma^2}} = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sqrt{\frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2}} \sim t(n+m-2)$$

参数估计

- 频率替代法 (点估计)

$\hat{\theta}$: 估计值 \rightarrow 选不同参数有不同估计值.

- 矩法估计 (点估计)

用样本 k 阶矩作为总体 k 阶矩估计量.

\leftarrow Khintchine 大数定律推论

e.g. $E(X) = \mu \approx \bar{X} = \hat{\mu}$

$$E(X^2) = \mu^2 + \sigma^2 \approx \frac{1}{n} \sum_i X_i^2 \Rightarrow \begin{cases} \hat{\mu} = \bar{X} \\ \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_i (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n} \sum_i X_i^2 - n\bar{X}^2 \end{cases}$$

普遍形式:

$$E(X) = \mu_1(\theta_1, \dots, \theta_k) \approx \frac{1}{n} \sum_i X_i = \bar{X}$$

$$E(X^2) = \mu_2(\theta_1, \dots, \theta_k) \approx \frac{1}{n} \sum_i X_i^2$$

\vdots

$$E(X^k) = \mu_k(\theta_1, \dots, \theta_k) \approx \frac{1}{n} \sum_i X_i^k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{\theta}_1(X_1, \dots, X_n) \\ \vdots \\ \hat{\theta}_k(X_1, \dots, X_n) \end{cases}$$

随机变量

代入 X_1, \dots, X_n

$$\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_k \text{ 矩估计值}$$

问题: 1) 不同分布对应的 k 阶矩估计值一样; 2) 可能不唯一. e.g. $\begin{cases} \hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}} \\ \hat{\lambda} = \sqrt{1/CM_2} \end{cases} \leftarrow$ 一般选择阶

- 点估计的最大似然估计法

使一次试验就出现的事件有较大概率的参数作为估计.

即使 $P(X_1=x_1, X_2=x_2, \dots, X_n=x_n)$ 达到最大的参数

$= \dots = L(\theta, x) \Rightarrow$ 即 $\ln L(\theta)$ 最大 $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_k$: 最大似然估计值
Likelihood.

最大似然函数

离散型: $L = \prod_i P(x_i; \theta_1, \dots, \theta_k)$.

连续型: $L = \prod_i f(x_i; \theta_1, \dots, \theta_k)$

最大似然估计的不变性: 设 $\hat{\theta}$ 是 θ 的最大似然估计值.

若 $u(\theta)$ 是 θ 的函数, 具有单值反函数 $\theta = \theta(u)$.

则 $u(\hat{\theta})$ 是 $u(\theta)$ 的最大似然估计值. 对应形式为 \dots 量.

V.S. 矩法估计: 不具有不变性

评估标准

无偏性

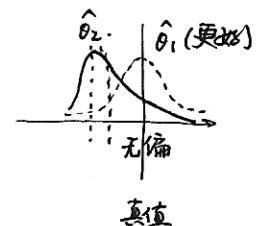
记 (X_1, \dots, X_n) 为总体 X 的样本, θ 是总体 X 的一个参数. $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ 是 θ 的估计量.

若 $E(\hat{\theta})$ 存在且 $E(\hat{\theta}) = \theta$, 称 $\hat{\theta}$ 具有 无偏性.

结论: ① $\mu_k = E(X^k)$, $\mu = E(X)$, $\sigma^2 = D(X)$. 简单样本.

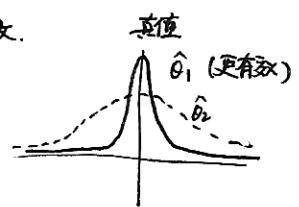
1) \bar{X} 是 μ 的无偏估计量; 2) $M_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$ 是 μ_k 的无偏估计量;

3) $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 是 σ^2 的无偏估计量.



无偏校正: e.g. 最大似然. $E(\hat{\sigma}^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2 \rightarrow$ 校正为 $\frac{n}{n-1} \hat{\sigma}^2$. 本节: 期望的线性性

有效性 若 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 都是无偏估计量且 $D(\hat{\theta}_1) < D(\hat{\theta}_2)$, 则 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 更有效.



相合性(一致性) 设 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ 是 θ 的估计量.

若 $\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta$, 称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的一致性估计量.

若 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量且 $\lim_{n \rightarrow \infty} D(\hat{\theta}) = 0$, 则 $\hat{\theta}$ 是 θ 的一致性估计量.

Rao-Cramer 不等式

$\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量.

$$\text{则 } D(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{n E\left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln p(X, \theta)\right)^2\right]} =: I(\theta)$$

↑ 概率分布 { 离散: 分布列
连续: 概率密度 }

若存在 $\hat{\theta}$ 使 $D(\hat{\theta}) = I(\theta)$, 称 $\hat{\theta}$ 为(最)有效估计

区间估计

该值(落点)是随机

找一个能使包含待估参数的概率为一定值的区间.
(含有)

↑
置信度(可信度)

↓
注: 落在 vs 含有

↑
区间是随机

正态总体区间估计 — 常用: $\Phi(1.96) = 0.9750$ 即 $Z_{0.025} = 1.96$

② 含有平均值 μ 的概率达到 $(1-\alpha)$ 的区间: $(\bar{X} - \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2}, \bar{X} + \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2})$ — 均值的置信区间

$$P\left(\left|\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right| < Z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha \Rightarrow \dots \rightarrow$$

极轴量 ←

注: 待估参数 θ 的有效估计不一定存在!

① 含待估参数且不含其它未知参数

② 服从已知分布

使用 $(-\bar{u}_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{u}_{\frac{\alpha}{2}})$ 而非 $(-\bar{u}_{\alpha/2}, \bar{u}_{\alpha/2})$? $\rightarrow (-\bar{u}_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{u}_{\frac{\alpha}{2}})$ 的区间长度最短

(是最短的置信区间)

置信区间: θ : 待估参数 X_1, \dots, X_n 为样本. 构造 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ $\Theta = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ 使 $P(g(\hat{\theta}_1, X_1, \dots, X_n) \leq g(\hat{\theta}_2, X_1, \dots, X_n)) \geq 1 - \alpha$

~~使 $P(\hat{\theta}_1 < \hat{\theta}_2) = 1 - \alpha$~~

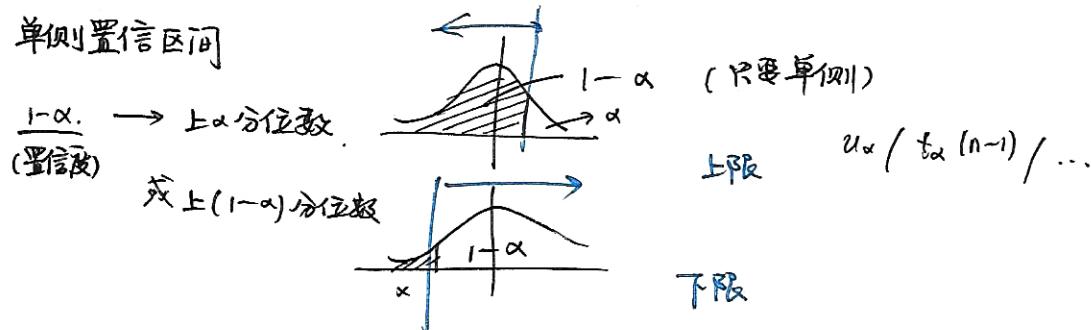
称 Θ .

一般在确定 α 后选最小置信区间. (提高精度 $\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1$)

枢轴量: 一般选取有效估计量. 若不存在近似.

σ^2 置信区间: 枢轴量 $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 取决于 μ 是否已知. 一般用 $\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}$ ($n \rightarrow \infty, \rightarrow$ 对称)

单侧置信区间



两个正态总体的置信区间

一般要求相互独立. 置信度 $1 - \alpha$.

$$\text{① } \sigma_1^2, \sigma_2^2 \text{ 已知. 枢轴量 } \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \sim N(0, 1)$$

$$\text{② } \sigma_1^2, \sigma_2^2 \text{ 未知. } \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma. \text{ 枢轴量 } \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) \frac{(n-1)s_1^2 + (m-1)s_2^2}{n+m-2}}} \sim t(n+m-2)$$

③ σ_1^2, σ_2^2 未知. $n, m > 50$. 近似正态

$$\text{枢轴量 } \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n} + \frac{s_2^2}{m}}} \sim N(0, 1)$$

④ $n=m$. σ_1^2, σ_2^2 未知.

$$\text{枢轴量 } \frac{\bar{Z} - (\mu_1 - \mu_2)}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

新总体: $\bar{X} - \bar{Y} \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

$$S = \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} (Z_i - \bar{Z})^2 / (n-1)}$$

⑥ $\mu_1 - \mu_2$ 未知. $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间

$$\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n-1, m-1).$$



$$\frac{(m-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(m-1)$$

$$\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$F = \frac{\chi^2/n}{\chi^2/m}$$

• 非正态总体

中心极限定理. $n \rightarrow \infty$. $\rightarrow N$

假设检验

原假设(原设)、备择假设

$$\mu = \mu_0$$

记作 H_0

$$\mu \neq \mu_0$$

记作 H_1

检验统计量:

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

$\sim N(0, 1)$ 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$



如何认定原假设是否正确? —— 分位数 (一个统一标准)

$$P\left(\left|\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > u_{\alpha/2}\right) = \alpha \Rightarrow \left|\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > u_{\alpha/2} : \boxed{\text{拒绝域}} \rightarrow \text{拒绝 } H_0.$$

小概率原理: 认为小概率事件基本不发生

$$\leq u_{\alpha/2} : \boxed{\text{接受域}}$$

“符合” ~ 双侧检验

“不小于” ~ 单侧检验

$$\begin{array}{c} \xleftarrow{\quad} \bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \xrightarrow{\quad} \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \quad \xrightarrow{\quad} \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \quad \xrightarrow{\quad} \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \\ \xleftarrow{\quad} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1) \quad \xrightarrow{\quad} N(0, 1) \quad \xrightarrow{\quad} t(n-1) \quad \xrightarrow{\quad} \chi^2(n-1) \\ \left\{ \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -u_\alpha \right\} \subset \left\{ \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < -u_\alpha \right\} \end{array}$$

① 假设 ② 检验统计量 ③ 区间 ④ 接受/拒绝

	认为 H_0 真	认为 H_0 假	
H_0 真	✓	弃真(概率: $\{ \alpha \}$ “ $\mu = \mu_0$ ” =: H_0)	$\alpha \downarrow$. 真 \downarrow 纳伪 \uparrow
H_0 假	纳伪 (β)	✓ “ $\mu \neq \mu_0$ ” =: H_0)	$\beta \uparrow$ $n \uparrow$ \downarrow \downarrow

目的: 让两类错误和概率都尽可能小

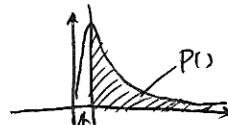
p值检验法

样本 $\rightarrow u_0$

① U 检验: $P(|U| > u_0) = \underline{\quad}$ $> \alpha$: 接受
 $< \alpha$: 拒绝

② χ^2/t 检验: $P(\text{检验统计量} > t_0 \text{ 或 } \chi^2_0) = 2P(\text{检验} \sim > t_0 / \chi^2_0)$

若在左端点: $\underline{\quad} 2(1 - P(\quad))$



考察的实际上是太小的拒绝域。

一些期末复习

• 古典概型 (排列组合题)

概率公理化定义 (虽然感觉不会考到):

E 是一系列随机试验, Ω 为其对应样本空间. 若存在映射 $P: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ s.t.

$$(1) \boxed{\text{ }} \quad \forall A \subseteq \Omega. \quad P(A) \geq 0 \quad (2) \quad P(\Omega) = 1.$$

$$(3) \text{ 对两两互不相容 } A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots \text{ 事件} \quad \text{有 } P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

称 $P(A)$.

$$\text{容斥原理. 略: } P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{l=1}^n \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_l \leq n} P\left(\bigcap_{i=1}^l A_{k_i}\right) (-1)^{l+1}$$

• 条件概率与 Bayes 公式 与事件独立性

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \quad \Leftrightarrow \text{乘法公式: } P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B) \\ \text{A条件下B发生} \quad (P(A) > 0) \quad (P(A) > 0, P(B) > 0)$$

全概率公式: 记 B_1, \dots, B_n 为 Ω 的一个划分. 即 $\{B_i\}_{i=1}^n \subseteq \Omega$, $B_i \cap B_j = \emptyset$. 且 $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$.

$$\Updownarrow \text{对任意事件A, 有 } P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i) P(A|B_i)$$

$$\text{Bayes 公式} \quad P(B_i|A) = \frac{P(B_i) P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^n P(B_j) P(A|B_j)} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (P(B_i) > 0)$$

* $P(A)$: 先验概率. $P(A|B)$: 后验概率

$$\text{事件独立性: } P(AB) = P(A)P(B) \Leftrightarrow P(A|\bar{B}) = P(A|B) = P(A) \quad \boxed{\text{ }}$$

• 随机变量与分布与期望与方差

连续型/离散型

二维随机变量

联合分布 $F(X, Y)$. 联合概率密度 $f_{X,Y}(x, y)$

边缘分布 $F_X(x) = P(X \leq x) = F(x, +\infty) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y)$
(画图或显卷3)

$$\star F(+\infty, +\infty) = 1. \quad F(-\infty, -\infty) = F(-\infty, +\infty) = F(+\infty, -\infty) = 0.$$

边缘概率密度: $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dy$

$$\star \text{条件分布: } f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy} = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$$

从已知概率分布推相关事件概率分布: 已知 $f_X(x)$. $g(x)$ 上严格单调可导. $Y = g(X)$

$$\text{则 } f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y)) \Big| (g^{-1})'(y) \Big| & \alpha < y < \beta \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\{\alpha, \beta\} = \{g(-\infty), g(+\infty)\}$$

二维：从已知概率分布推相关事件概率分布 → 从分布函数下手.

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx \quad (\text{以一维连续为例})$$

$$\mathbb{D}X = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}X)^2)$$

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y))$$

$$P_{XY} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbb{D}X} \sqrt{\mathbb{D}Y}} = \mathbb{E} \frac{(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)}{\sqrt{\mathbb{D}X} \sqrt{\mathbb{D}Y}}$$

$$\text{期望} : \mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}X \quad \mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$$

$$\text{方差} : \mathbb{D}(aX) = a^2 \mathbb{D}X$$

$$\text{协方差} : \text{cov}(aX, bY) = ab \text{cov}(X, Y)$$

相关系数

$$\text{期望: 相互独立时 } \mathbb{E}(XY) = (\mathbb{E}X)(\mathbb{E}Y)$$

$$\text{始终有 } \mathbb{D}X = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2$$

$$\text{方差: } \mathbb{D}(X \pm Y) = \mathbb{D}(X) + \mathbb{D}(Y) + 2 \text{cov}(X, Y)$$

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - (\mathbb{E}X)(\mathbb{E}Y).$$

$$\text{不相关. } \text{cov}(X, Y) = 0. \text{ 即 } P_{XY} = 0$$

※ 独立
↔

$$* \text{估计用上: } \mathbb{D}(X) \leq \mathbb{E}((X - c)^2)$$

$$= : \text{iff. } c = \mathbb{E}X$$

常用分布及其期望与方差

		$\mathbb{E}X$	$\mathbb{D}X$
离散型	0-1分布	$P(X=1) = p$ $P(X=0) = 1-p$	p $p(1-p)$
	二项分布 $B(n, p)$	$P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ $p \in (0, 1) \quad k=0, 1, 2, \dots, n$	np $np(1-p)$
Poisson分布 $P(\lambda)$	$P(X=k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ $\lambda > 0 \quad k=0, 1, 2, \dots$	λ λ	
几何分布	$P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$ $0 < p < 1, \quad k=0, 1, 2, \dots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
均匀分布 $U(a, b)$	$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in (a, b) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
指数分布 $E(\lambda)$	$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
连续型	正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$	μ	σ^2
	卡方分布 $\chi^2(n)$	n	$2n$
	t分布* $t(n)$	0 (显然)	$\frac{n}{n-2}$ (应该不会考到)
	F分布* $F(m, n)$	$\frac{n}{n-2}$	$\frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$ (不考对吧)

$$\boxed{\text{Poisson定理}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda$$

$$\text{对固定 } k \text{ 有 } \lim_{n \rightarrow \infty} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

即二项分布推到极限为 Poisson 分布.

* 转动惯量(草)

线性函数也是正态分布.

二维正态的边缘分布也是正态分布.

$$X_i \sim N(0, 1)$$

$$\sum_{i=1}^n X_i^2 \rightarrow \chi^2(n)$$

$$\frac{N(0, 1)}{\sqrt{\frac{\chi^2(n)}{n}}} = t(n)$$

$$\frac{\chi^2(m)/m}{\chi^2(n)/n} = F(m, n)$$

常用 Trick: ① 一些积分化为常用分布的概率/方差/期望/ ~~期望~~ / 平方期望

$$\text{e.g. } \int_0^\infty \frac{x^2}{\theta} e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}\theta} e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}} dx = \mathbb{E}(Y^2) = D(Y) + \mathbb{E}^2(Y) = \theta^2 + 0 = \theta^2$$

$$\int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^\infty x^2 \underbrace{\lambda e^{-\lambda x}}_{E(\lambda)} dx = \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}(Y^2) = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} \right) = \frac{2}{\lambda^3}$$

* 注意凑出的可能是平方的期望而非方差!

2) 随手了就看分布函数/画图

$$\text{e.g. } F_{\max}(x) = P(\max\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \leq x) = \underbrace{F(x, x, \dots, x)}_{n\uparrow}$$

若 X_1, \dots, X_n 相互独立
且同分布 F_X $[F_X(x)]^n$

• Chebyshov 不等式与大数定律与中心极限定理

$$\text{Chebyshov 不等式. } \mathbb{E}X = \mu, D(X) = \sigma^2, \forall \varepsilon > 0, P(|X - \mu| \geq \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

$$P(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

依概率收敛 $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - \mu| \geq \varepsilon) = 0.$ $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} Y$ (随机变量. 可以是常数)

* Bernoulli 大数定律 $\frac{n_A}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{概率}} p_A.$ <感觉没太用>

随机变量序列 $\{X_n\}$ 服从大数定律 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k)\right| < \varepsilon\right) = 1$

Chebyshov 大数定律: X_1, \dots, X_n 两两不相关^[1]. 方差存在且有共同上界

$$\text{即 } \mathbb{E}X_k = \mu_k, D(X_k) \leq \sigma^2$$

则 $\{X_n\}$ 服从大数定律

[1] 可改为

$$\frac{1}{n^2} D\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

可用 Chebyshov 证

Khintchine 大数定律: X_1, \dots, X_n 相互独立且同分布 (i.i.d.)

$$\mathbb{E}(X_i) = \mu, \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \mu.$$

$$[\text{推论}] \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k^t \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \mu_t := \mathbb{E}(X_1^t) (\text{若存在})$$

中心极限定理: 万物皆正态

$$\text{若 } \{X_i\} \text{ i.i.d. } \mathbb{E}X = \mu, D(X) = \sigma^2, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - n\mu)}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(0, 1) \quad \text{即} \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - n\mu)}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq x\right) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

↑
* $\sum_{i=1}^n X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$ 标准化

* DeMoivre-Laplace 中心极限定理：二项分布无穷或正态

$$Y_n \sim B(n, p) = \sum_{i=1}^n X_i \quad 0 < p < 1. \quad \frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{\text{近似}} N(0, 1)$$

① $n < 10$ 二项分布直接用

② n 较大 $n > \lambda = np >> p$. Poisson 分布

③ n 较大 $< 100 \rightarrow 0.1 < p < 0.9$

$> 100 \rightarrow p < 0.1$ 或 $p > 0.9$ 正态分布.

• 数理统计与参数估计与假设检验

简单随机样本 X_1, \dots, X_n 与 X i.i.d. $\mathbb{E}X = \mu$. $D(X) = \sigma^2$. 统计量. 样本观测值.

样本均值 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$

样本方差

* 样本 k 阶原点矩 $M_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$

中心 $CM_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^k$

$\mathbb{E}\bar{X} = \mu$.

$\mathbb{E}S^2 = \sigma^2$

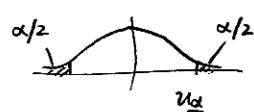
* $M_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X^k)$.

顺序统计量 $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ 且 $\{X_{(1)}, \dots, X_{(n)}\} = \{X_1, \dots, X_n\}$

$\min_{1 \leq k \leq n} \{X_k\}$ $\max_{1 \leq k \leq n} \{X_k\}$

上 α 分位数

* 双侧 α 分位数 (要求 $f_X(x)$ 偶函数)



χ^2 分布. t 分布. F 分布 (上页)

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$. (X_1, \dots, X_n) 是简单样本.

则 $\begin{cases} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1) \text{ 即 } \bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \\ \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \text{ 即 } \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1) \end{cases}$
 \bar{X} 与 S^2 相互独立

1) * 频率替代法

点估计

2) 矩法估计 $\mathbb{E}(X^k) = \mu_k(\theta_1, \dots, \theta_n)$

一般选最低阶含 θ

$$\begin{aligned} \bar{X}^{(k=1)} &= \mu_k(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_n) \Rightarrow \begin{cases} \hat{\theta}_1 = \dots \\ \vdots \\ \hat{\theta}_n = \dots \end{cases} \end{aligned}$$

3) 最大似然估计.

最大似然函数 $L(\theta) = \prod_i^P f(x_i, \theta_1, \dots, \theta_n)$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

(使 L 最大)

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0$$

无偏性: $\mathbb{E}(\hat{\theta}) = \theta$. \leftarrow 无偏修正 (乘常数使 $\mathbb{E}(k\hat{\theta}) = \theta$)

有效性: 无偏 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$. $D(\hat{\theta}_1) < D(\hat{\theta}_2)$. $\hat{\theta}_1$ 更有效

* 相合性(一致性): $\hat{\theta} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \theta$. (对无偏: $\lim_{n \rightarrow \infty} D(\hat{\theta}) = 0$)

区间估计

μ . σ 已知 $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$

σ 未知 $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

置信度 $(1-\alpha)$

σ μ 已知 $\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$

μ 未知 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

两个正态分布 (不差对吧)

假设检验

检验统计量

μ . σ 已知 $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$

σ 未知 $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

检验水平
(显著性水平)

α

σ μ 已知 $\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$

μ 未知 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

对估计的参数而言
“中心附近”

区间估计 — $P(\text{枢轴量} \in \text{置信区间}) = 1 - \alpha \Rightarrow \text{推置信区间}$

假设检验 — 1) 零假设与备择假设 $H_0: \dots H_1: \dots$

2) 检验统计量: $\square \sim ? (\dots)$

3) 拒绝域: $P(\text{检验统计量} \in \text{拒绝域}) = \alpha \Rightarrow \text{推拒绝域}$

对检验统计量
“边缘的那些”

4) 检验统计量的样本观测值

判断 接受 / 拒绝 H_0

补充: 两个正态分布总体

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$$

$$\frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \sim F(n_1, n_2)$$

* 若 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ 未知

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$$

$$\frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \sim F(n_1, n_2)$$