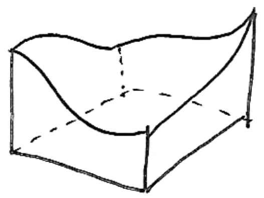
~~重积分~~

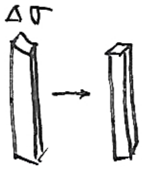
* $\boxed{\text{零边界区域}}$

重积分

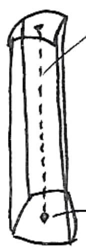
多元函数积分学 $\left\{\begin{array}{l}\text{重积分}\\ \text{曲线积分}\\ \text{曲面积分}\end{array}\right.$



求体积？ ⟶ 划分成一堆



$\Delta\sigma$



$z_i=f(\xi_i,\eta_i)$

(ξ_i,η_i)

$\Delta\sigma_i$

$\xrightarrow{\text{近似}}$

柱体

回忆：Darboux 和

$\boxed{\text{直径}}$ $\operatorname{diam}\Delta\sigma_i=\sup\limits_{P,Q\in\Delta\sigma_i}|\overrightarrow{PQ}|$

$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\operatorname{diam}\Delta\sigma_i\}$

$\Delta V_i=f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$

$$V=\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

$\boxed{\text{二重积分}}$ D 为 $\mathbb{R}^2$ 上零边界闭区域．$z=f(x,y)$ 在 D 上有界．将 D 用曲线网分成 n 个小区域 $\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots\Delta\sigma_n$（称为 D 的一个划分）．记 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\operatorname{diam}\Delta\sigma_i\}$．

每个 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 (ξ_i,η_i)．若 $\lambda\to0$ 时，$\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 的极限存在．且与区域的分法与 (ξ_i,η_i) 取法无关．称 $f(x,y)$ 在 D 上 $\boxed{\text{可积}}$，称此极限为 f 在 D 上的 $\boxed{\text{二重积分}}$．

记作 $$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

积分区域　面积元素　被积函数

$\boxed{\text{Darboux 大和}}$ $S=\sum\limits_{i=1}^n M_i\Delta\sigma_i$

$\boxed{\text{Darboux 小和}}$ $s=\sum\limits_{i=1}^n m_i\Delta\sigma_i$

[定理] 在零边界闭区域上连续 $\Rightarrow$ 可积

类似一元的 Darboux 和，有以下性质

1) 在已有划分 σ 上再添有限条曲线进一步划分．则 Darboux 大和不增，Darboux 小和不减．

2) $s\le I_*\le I^*\le S$．　$I^*=\inf\{S\}$　$I_*=\sup\{s\}$．

3) $f(x,y)$ 在 D 上可积 $\Leftrightarrow\lim\limits_{\lambda\to0}(S-s)=0$

$\Leftrightarrow\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^n\omega_i\Delta\sigma_i=0$

其中 $\omega_i=M_i-m_i$ 为 $\Delta\sigma_i$ 上 f 的 $\boxed{\text{振幅}}$．

此时 $\lim\limits_{\lambda\to0}S=\lim\limits_{\lambda\to0}s=\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma$

$\boxed{\text{多重积分}}$ Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 上零边界闭区域．

$u=f(x)$ 在 Ω 上有界．将 Ω 用曲面网分成 n 个小区域 $\Delta\Omega_1,\cdots\Delta\Omega_n$（称为 Ω 的一个划分）．

记 ΔV_i 为 $\Delta\Omega_i$ 的体积，记 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\operatorname{diam}\Delta\Omega_i\}$

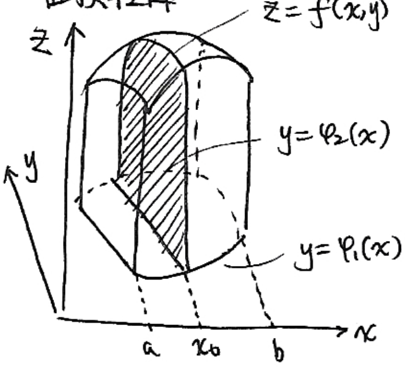
在每个 $\Delta\Omega_i$ 中任取一点 x_i．若 $\lambda\to0$ 时，$\sum\limits_{i=1}^n f(x_i)\Delta V_i$ 极限存在且与划分．x_i 取法无关．称 $f(x)$ 在 Ω 上可积．称极限为 f 在 Ω 上的 $\boxed{n\text{重积分}}$．

重积分存在定理

若 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则可积

若 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上除去有限个点或有限条光滑曲线外都连续，则可积

曲顶柱体



$$V = \iint_D f(x,y)\, d\sigma = \int_a^b A(x)\,dx$$

$$= \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx \triangleq \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$$

可以选择先对 x 积或先对 y 积；看怎样方便

三重积分

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dv \overset{1}{=} \iint_D dx\,dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

$$\overset{2}{=} \int_a^b dz \iint_{D_z} f(x,y,z)\,dx\,dy$$

$$\overset{3}{=} \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

注意对称性

[e.g.] $$\iiint_\Omega \frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\,dv = 0$$ （因为关于 z 是奇函数）

$(\Omega: x^2+y^2+z^2 \le 1)$

- 换元法

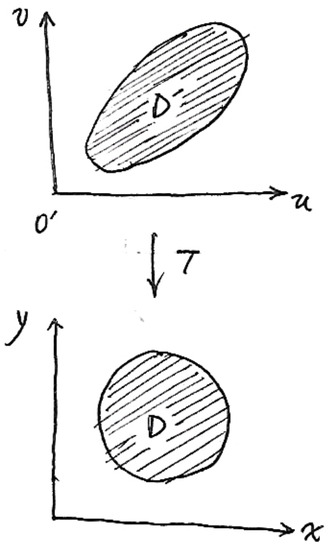
二重积分换元法 设 $f(x,y)$ 在闭域 D 上连续，变换 $T: D' \to D$.

$$T: \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \quad (u,v) \in D'$$

满足 (1) $x(u,v)$, $y(u,v)$ 在 D' 上一阶偏导连续；

(2) 在 D' 上 Jacobi 行列式 $J(u,v) = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$.

(3) 变换 $T: D' \to D$ 是一一对应的.

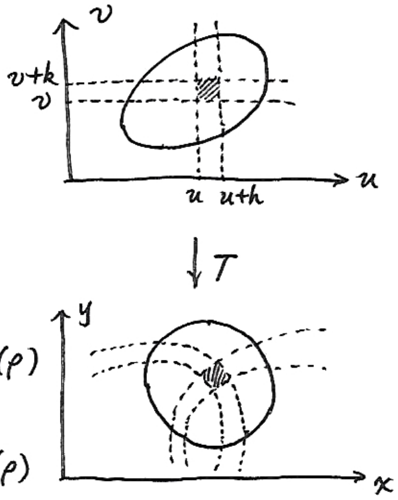


则有 $$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f(x(u,v), y(u,v))\,|J(u,v)|\,du\,dv$$

[证明] 由定理条件知 T 可逆（∵ 一一对应）

在 $u0'v$ 上取一小矩形（划分整个区域 D'）.

顶点：(u,v) $(u+h,v)$ $(u+h,v+k)$ $(u,v+k)$



变换T后得到曲边四边形. h 和 $k\to 0$ 时可视为四边形.

设对应顶点 (x_1,y_1) (x_2,y_2) (x_3,y_3) (x_4,y_4)

令 $\rho=\sqrt{h^2+k^2}$. $\quad x_2-x_1=x(u+h,v)-x(u,v)=\left.\dfrac{\partial x}{\partial u}\right|_{(u,v)}h+o(\rho)$

$$x_4-x_1=x(u,v+k)-x(u,v)=\left.\frac{\partial x}{\partial v}\right|_{(u,v)}k+o(\rho)$$

同理，知：$y_2-y_1=\left.\dfrac{\partial y}{\partial u}\right|_{(u,v)}h+o(\rho)$. $\quad y_4-y_1=\left.\dfrac{\partial y}{\partial v}\right|_{(u,v)}k+o(\rho)$.

$h,k\to 0$ 时. 四边形(曲边) $\to$ ▱. $\quad \Delta\sigma\approx\left|\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_4}\right|=\left\|\begin{matrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_4-x_1 & y_4-y_1\end{matrix}\right\|$

$$\doteq\left\|\begin{matrix}\frac{\partial x}{\partial u}h & \frac{\partial y}{\partial u}k\\ \frac{\partial x}{\partial v}h & \frac{\partial y}{\partial v}k\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{matrix}\right\|hk$$

即：$\Delta\sigma=\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\underset{\Delta u\Delta v}{}=\left|J(u,v)\right|dudv$

因此 $\iint_D f(x,y)\underbrace{dxdy}_{\Delta\sigma}=\iint_{D'}f(x(u,v),y(u,v))\left|J(u,v)\right|dudv.$

常用坐标变换：$\begin{cases} u=x+y,\ v=x-y \quad 把\ |x|+|y|\le a \overset{变换}{\Longrightarrow}\begin{cases}-a\le u\le a\\ -a\le v\le a\end{cases} \quad \left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\dfrac{1}{2}. \\ 极坐标\ (r\sin\theta,\ r\cos\theta) \quad \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r\end{cases}$

边界：圆/椭圆 常用

三重积分换元法

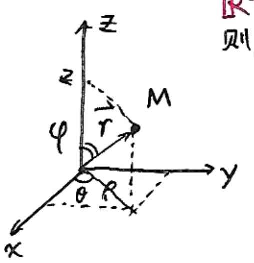
$\mathbb{R}^3\to[0,+\infty)\times[0,2\pi]\times(-\infty,+\infty)$

柱坐标 $(x,y,z)\to(\rho,\theta,z)$ $\quad \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,z)}=\rho.$ $\quad$ 即 $dv=\rho\,d\rho\,d\theta\,dz$

球坐标 $(x,y,z)\to(r,\theta,\varphi)$

$\mathbb{R}^3\to[0,+\infty)\times[0,2\pi]\times[0,\pi]$

则 $\rho=r\sin\varphi$



此时 $\begin{cases}z=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\sin\theta\\ x=r\sin\varphi\cos\theta\end{cases}$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}=\begin{vmatrix}\sin\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta\\ \sin\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\sin\theta\\ \cos\varphi & 0 & -r\sin\varphi\end{vmatrix}$$

等价

$$=r^2\sin\varphi$$

$dv=r^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta$

$\left.\begin{matrix}r固定\sim球面\\ \theta固定\sim半平面\\ \varphi固定\sim锥面\end{matrix}\right\}$ 边界是这些时可尝试球坐标系

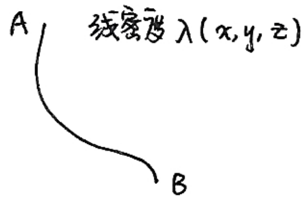
$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz=\iiint_{\Omega^\circ}f(r\sin\varphi\cos\theta,\ r\sin\varphi\sin\theta,\ r\cos\varphi)\,r^2\sin\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

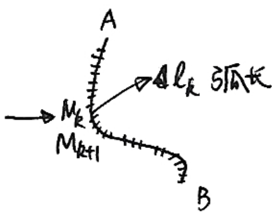
$$I = \iiint_\Omega (x+y+z)^2\,dv = \iiint_\Omega \Big(x^2+y^2+z^2 + \underbrace{2xy+2yz+2xz}_{\substack{\downarrow \text{对称性} \\ 0.}}\Big)\,dv$$

· 反常积分： 滚.

曲线积分，曲面积分

- 曲线积分（第一类）





在 $M_k M_{k+1}$ 上取 (ξ_k, η_k, ζ_k)

得：$l = \lim\limits_{L\to 0} \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta l_i$

其中 $L = \max\limits_{1\le i\le p}\{\Delta l_i\}$

$\boxed{\text{曲线积分}}$ Γ 是空间中一条有限长的光滑曲线，$f(x,y,z)$ 是定义在 Γ 上的有界函数，

↓ 一直到某阶导数都存在，看具体要求

若对 Γ 的任意分割 II 和对每小段的任意取点，$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta S_k$ 都存在。

$(\lambda = \max\limits_{1\le k\le n}\Delta S_k)$，称该极限为 $f(x,y,z)$ 在 Γ 上 $\boxed{\text{对弧长的曲线积分}}$

即 $\boxed{\text{第一类曲线积分}}$

记作：$\int_\Gamma f(x,y,z)\,ds := \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta S_k. \quad \left(\lambda = \max\limits_{1\le k\le n}\Delta S_k\right)$

* 若 Γ 是闭曲线，则记作 $\oint_\Gamma f(x,y,z)\,ds$.

$f(x,y,z)$ 连续，则曲线积分存在

性质：$\int_\Gamma (\alpha f + \beta g)\,ds = \alpha\int_\Gamma f\,ds + \beta\int_\Gamma g\,ds$

$\int_\Gamma f\,ds = \int_{\Gamma_1} f\,ds + \int_{\Gamma_2} f\,ds \quad (\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2)$

$\int_\Gamma f\,ds \ge \int_\Gamma g\,ds \Leftarrow f \ge g$

$\int_\Gamma ds =$ 弧长.

曲线积分计算 $\xrightarrow{\text{转化}}$ 定积分计算

光滑～ 一阶导连续

$\boxed{\text{定理}}$ $f(x,y)$ 是定义在光滑曲线弧 L：$x = \varphi(t)$，$y = \psi(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$ 上连续函数

则 $\int_L f(x,y)\,ds$ 存在 且 $\int_L f(x,y)\,ds = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t), \psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$

> 定积分与曲线积分区别？
>
> 定积分 ds 可以 $\begin{matrix}>0\\<0\end{matrix}$. 曲线积分 ds 必须 >0.

→ $\boxed{\text{要求：}\beta \ge \alpha}$

[证明] 左 $= \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k,)\Delta S_k = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\varphi(\tau_k), \eta(\tau_k))\Delta S_k$

$\Delta S_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$ 其中：$(\tau_k \in (t_{k-1}, t_k)$

$= \sqrt{\varphi'^2(\tau_k') + \psi'(\tau_k')}\,\Delta t_k$ （中值定理）

分点对应的参数值

于是有 $\int_L f(x,y)\,ds = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f[\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k)]\sqrt{\varphi'^2(\tau_k')+\psi'^2(\tau_k')}\,\Delta t_k$

$\downarrow \tau_k \to \tau_k'$. 逐项连续

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f[\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k)]\sqrt{\varphi'^2(\tau_k)+\psi'^2(\tau_k)}\,\Delta t_k$$

$$= \int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt \qquad \square$$

$ds>0 \Rightarrow \underline{dt>0} \Rightarrow \beta \geq \alpha$ 必须满足.

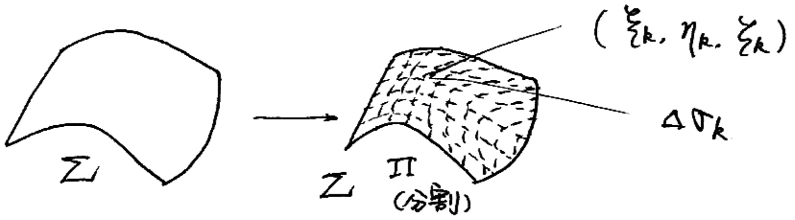
* $ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = \sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}(t)\,dt$ <u>相当于换元法</u>

* 取 $t=x$ 时, 有形式 $\int_L f(x,y)\,ds = \int_{x_1}^{x_2} f(x,y(x))\sqrt{1+y'^2_{(x)}}\,dx$

极坐标情况下. $\int_L f(x,y)\,ds = \int_\alpha^\beta f(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)\sqrt{\rho^2+\rho'^2_{(\theta)}}\,d\theta$

Trick: $\oint_L x^2\,ds = \frac{1}{3}\oint_L (x^2+y^2+z^2)\,ds \leftarrow$ 如果有对称性.

- 曲面积分(第一类)



$\boxed{\text{曲面积分}}$ 设 Σ 为光滑曲面, $f(x,y,z)$ 为 Σ 上有界函数, 若对 Σ 做任意分割 Π 和局部区域上任意取点, 有 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta\sigma_k =: \iint\limits_\Sigma f(x,y,z)\,d\sigma$. $\lambda=\max\limits_{1\leq k\leq n}\operatorname{diam}(\Delta\sigma_k)$

$\boxed{\text{第一类曲面积分}}$

性质: $f(x,y,z)$ 连续. (Σ 上). 则 $\iint_\Sigma f(x,y,z)\,d\sigma$ 存在

$\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$ (都光滑) $\quad \iint_\Sigma f\,d\sigma = \iint_{\Sigma_1} f\,d\sigma + \iint_{\Sigma_2} f\,d\sigma$ 线性性. 保号性 也成立

$\boxed{\text{定理}}$ $f(x,y,z)$ ~~[illegible]~~ 为光滑 Σ 上连续函数. $\Sigma: z(x,y)=0$. $(x,y)\in D_{xy}$.

则 $\iint_\Sigma f(x,y,z)\,d\sigma$ 存在 且等于 $\iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2{}_{(x,y)}+z_y^2(x,y)}\,dxdy$.

[证] $\iint_\Sigma f(x,y,z)\,d\sigma = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta\sigma_k. = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,z(\xi_k,\eta_k))\Delta\sigma_k$

$$\Delta\sigma_k = \iint_D \sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}\,dxdy \overset{\text{中值}}{=\!=\!=} \sqrt{1+z_x^2(\xi_k',\eta_k')+z_y^2(\xi_k',\eta_k')}\,\Delta x\Delta y$$

$$\therefore \iint_\Sigma f(x,y,z)\,d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,z(\xi_k,\eta_k))\sqrt{1+z_x^2(\xi_k',\eta_k')+z_y^2(\xi_k',\eta_k')}\,\Delta x\Delta y$$

$$= \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, z(\xi_k,\eta_k)) \sqrt{1+z_x^2(\xi_k,\eta_k)+z_y^2(\xi_k,\eta_k)}\ \Delta x\Delta y$$

$$= \iint_D f(x,y,z(x,y)) \sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}\ dxdy. \qquad \square$$

也可视作坐标变换

重心公式 $\dfrac{\oiint_\Sigma x\,dS}{\oiint_\Sigma dS} = x_c = \bar{x}$

e.g. $\oiint_\Sigma (x^2+y^2)\,dS$. $\Sigma: x^2+y^2+z^2 = 2(x+y+z)$

$= \frac{2}{3}\oiint_\Sigma (x^2+y^2+z^2)\,dS$ 对称性 $(x^2 . y^2 . z^2)$

$= \frac{4}{3}\oiint_\Sigma (x+y+z)\,dS$

$= 4\oiint_\Sigma x\,dS$ 对称性 $(x . y . z)$

$= 4\bar{x}\oiint_\Sigma dS$ 重心

$= 4\cdot 4\pi(\sqrt{3})^2 = 48\pi$
球面

讨论一般情况：$\Sigma: \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$ $(u,v)\in D$. 即 $\vec{r} = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}$

设 Jacobi 矩阵 $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v)} = J = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}$. 满秩.

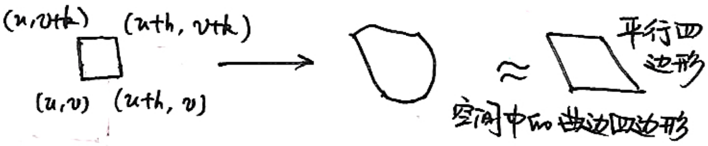
[对比] 二重积分换元法！

[先验知识] 两个三元向量的叉乘. $\vec{a}\times\vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right)$$

$$= \left(\left|\frac{\partial(a,b)}{\partial(y,z)}\right|, -\left|\frac{\partial(a,b)}{\partial(x,z)}\right|, \left|\frac{\partial(a,b)}{\partial(x,y)}\right| \right)$$

类似二重积分换元法.



$x_2 - x_1 = \left.\dfrac{\partial x}{\partial u}\right|_{(u,v)} h + o(\rho)$ $\rho = \sqrt{h^2+k^2}$

$x_4 - x_1 = \left.\dfrac{\partial x}{\partial v}\right|_{(u,v)} k + o(\rho)$

$y_2 - y_1 = \left.\dfrac{\partial y}{\partial u}\right|_{(u,v)} h + o(\rho)$. $y_4 - y_1 = \left.\dfrac{\partial y}{\partial v}\right|_{(u,v)} k + o(\rho)$

$z_2 - z_1 = \left.\dfrac{\partial z}{\partial u}\right|_{(u,v)} h + o(\rho)$ $z_4 - z_1 = \left.\dfrac{\partial z}{\partial v}\right|_{(u,v)} k + o(\rho)$

$h\to 0.\ k\to 0$ $|\Delta\sigma| = \left\|\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_4}\right\| = \left\| \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \right\| = \left\|\vec{r}_u(u,v)\times\vec{r}_v(u,v)\right\| hk$

$= \left\|\vec{r}_u(u,v)\times\vec{r}_v(u,v)\right\| \Delta u\Delta v$

于是有：

$\boxed{\text{定理}}$ Σ 的面积 $S=\iint\limits_D \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$ 称 E,F,G 为曲面的 $\boxed{\text{Gauss 系数}}$.

其中 $E=\vec{r_u}\cdot\vec{r_u}$，$F=\vec{r_u}\cdot\vec{r_v}$ $G=\vec{r_v}\cdot\vec{r_v}$.

$E=x_u^2+y_u^2+z_u^2$. $F=x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v$. $G=x_v^2+y_v^2+z_v^2$.

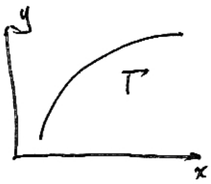
[证明] 略、不要求

特殊地，$z=f(x,y)\Rightarrow\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}$ 退化为前面证明的形式.

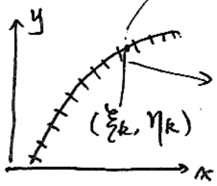
特别地，对 $H(x,y,z)=0$

$$\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{1+\left(-\frac{H_x}{H_z}\right)^2+\left(-\frac{H_y}{H_z}\right)^2}=\frac{\|\nabla H\|}{|H_z|}$$

- 第二类曲线积分



$\vec{F}=(P(x,y),Q(x,y))$ 变力沿 Γ 做功？



$\leftarrow\!\!\rightarrow$ 直线做功

$\Delta W_k=\vec{F}(\xi_k,\eta_k)\cdot\Delta\vec{r}$

$$W=\lim_{\lambda\to0}\sum_{k=1}^{n}\left[P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k+Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\right]$$

$\boxed{\text{第二类曲线积分}}$ Γ 为 xOy 平面内由 A 到 B 的 $\boxed{\text{有向}}$ 光滑弧，Γ 上定义有向量函数 $\vec{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$. 若对 Γ 的任意划分 Π 和局部任意取点，

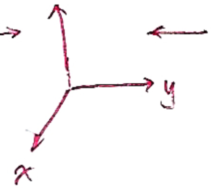
$$\lim_{\lambda\to0}\sum_{k=1}^{n}\left[P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k+Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\right] \text{都存在}. =: \int_\Gamma \vec{F}\cdot\vec{ds} =: \int_\Gamma P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$$

称之为 $\vec{F}$ 在有向曲线弧 Γ 上的 $\boxed{\text{对坐标的曲线积分}}$ (第二类曲线积分)

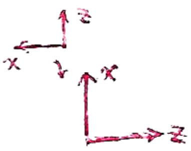
曲线(I)：无向. $\longleftrightarrow$ 曲线(II)：有向

n元函数 向量值函数

注意：



右边看 (y正向看)



(z~x 坐标系)

特别地，$Q\equiv0\longrightarrow\int_\Gamma P(x,y)\,dx$ 对 x 曲线积分

左边看 (y负向看)

(x~z 坐标系)

$\boxed{\text{性质}}$：(1) 若 $\Gamma=\sum_{i=1}^{k}\Gamma_i$ $\int_\Gamma\vec{F}\cdot\vec{ds}=\sum_{i=1}^{k}\int_{\Gamma_i}\vec{F}\cdot\vec{ds}$

(2) $\Gamma^-=-\Gamma$ (反向) $\int_{\Gamma^-}\vec{F}\cdot\vec{ds}=-\int_\Gamma\vec{F}\cdot\vec{ds}$

(3) $\int_\Gamma(\alpha\vec{F}+\beta\vec{G})\cdot\vec{ds}=\alpha\int_\Gamma\vec{F}\cdot\vec{ds}+\beta\int_\Gamma\vec{G}\cdot\vec{ds}$

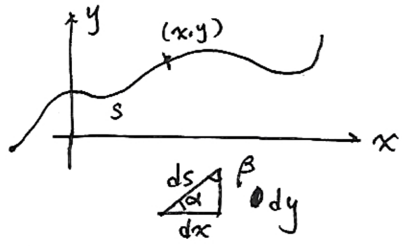
$\boxed{\text{定理}}$ $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在有向光滑弧 $\Gamma:\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$ $t:\alpha\to\beta$ 上有定义且连续

则 $\int_\Gamma P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$ 存在 且等于

$$\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\,dt$$

两类曲线积分的关联?

选定以弧长为参数的参数方程. $\Gamma:\begin{cases}x=x(s)\\ y=y(s)\end{cases}$ $0\to l$ $(0\leqslant s\leqslant l)$



Γ 切向量方向余弦: $\cos\alpha=\dfrac{dx}{ds}$. $\cos\beta=\dfrac{dy}{ds}$

则 $\int_{\Gamma\,(0\to l)} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy = \int_0^l P(x,y)\cos\alpha\,ds+Q(x,y)\cos\beta\,ds$

第二类 $= \int_0^l (P\cos\alpha+Q\cos\beta)\,ds = \int_L (P\cos\alpha+Q\cos\beta)\,ds$

第一类

记 $\vec{A}=(P,Q)$ $\vec{\tau}=(\cos\alpha,\cos\beta)$. $\vec{ds}=(dx,dy)$ 则有 $\int_\Gamma \vec{A}\cdot\vec{ds} = \int_L \vec{A}\cdot\vec{\tau}\,ds$

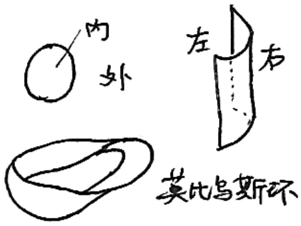
第二类 第一类

同理, 对空间亦有该式成立.

此后 $\int_\Gamma$ 表示第二类. $\int_L$ 表示第一类

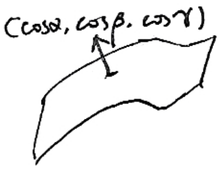
$\downarrow$ 有向 $\downarrow$ 无向

- 第二类曲面积分.

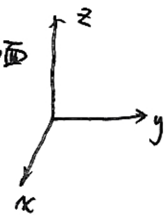


曲面 $\begin{cases}\text{双侧曲面}\\ \text{单侧曲面}\end{cases}$

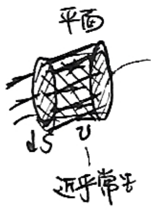
指定侧的曲面称 $\boxed{\text{有向曲面}}$. 记方向余弦为 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$



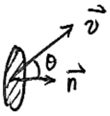
$\cos\alpha$	$\cos\beta$	$\cos\gamma$	封闭曲面
>0 前	>0 右	>0 上	外
<0 后	<0 左	<0 下	内

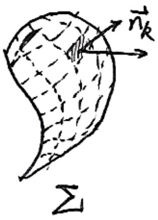


稳流不可压缩流体的速度场 $\vec{v}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$. 单位时间流经 Σ 的流量 Φ.



$\Phi=S|\vec{v}|\cos\theta$
$=S\vec{n}\cdot\vec{v}$





$\vec{n}_k\,d\sigma$

$\vec{v}(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)$

$\Delta\Phi=\vec{v}(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\cdot\vec{n}_k\,\Delta\sigma$

$\Phi^*=\sum_k \vec{v}\cdot\vec{n}_k\,\Delta\sigma$

Σ $\Phi=\lim_{\lambda\to0}\sum_{k=1}^{n}(\vec{v}(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\cdot\vec{n}_k\,\Delta\sigma)$

~~(其中 $\Delta X_k=\cos\alpha_k$, $\Delta y_k=\cos\beta_k$, $\Delta z_k=\cos\gamma_k$) $=\lim_{\lambda\to0}\sum_{k=1}^{n}(P\Delta x_k+Q\Delta y_k+R\Delta z_k)$~~

$\vec{n}_k = (\cos\alpha_k, \cos\beta_k, \cos\gamma_k)$. 则 $\Phi = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}\left[P(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\cos\alpha_k + Q(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\cos\beta_k + R(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\cos\gamma_k\right]\Delta S_k$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left(P\,(\Delta S_k)_{yz} + Q\,(\Delta S_k)_{xz} + R\,(\Delta S_k)_{xy}\right)(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)$$

$\boxed{\text{第二类曲面积分}}$ ~~设~~光滑有向曲面 Σ 上定义有向量场 $\vec{A} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$

若对 Σ 的任意分割与局部任意取点，下列极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz} + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx} + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}\right]$$

都存在，称之 $\boxed{\text{对坐标的曲面积分}}$. $=: \iint_\Sigma P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy$

对 y, z 曲面积分

记 $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 则 $=: \iint_\Sigma \vec{A}\cdot d\vec{S}$

$d\vec{S} = \vec{n}\,dS = (dy\,dz, dz\,dx, dx\,dy)$

$\boxed{\text{性质}}$: (1) $\Sigma = \bigcup\limits_{i=1}^{k}\Sigma_i$ 且 Σ_i 且无公共内点. $\iint_\Sigma = \sum\limits_{i=1}^{k}\iint_{\Sigma_i}$

(2) $\Sigma^- = -\Sigma$. $\iint_\Sigma = -\iint_{\Sigma^-}$

(3) $\iint_\Sigma \alpha\vec{A}\cdot d\vec{S} + \beta\vec{B}\cdot d\vec{S} = \alpha\iint_\Sigma \vec{A}\cdot d\vec{S} + \beta\iint_\Sigma \vec{B}\cdot d\vec{S}$.

特别地，若取上侧. $z = f(x,y)$. $\longrightarrow$ 投影于 xOy 平面. 取下侧

$$\iint_\Sigma R\,dx\,dy\Big|_{(x,y,f(x,y))} = \iint_{D_{xy}} R\,dx\,dy\Big|_{(x,y,f(x,y))} \qquad = -\iint_{D_{xy}} R\,dx\,dy\Big|_{(x,y,f(x,y))}$$

两类曲面积分间的关系:

$$\underset{\text{第二类}}{\iint_\Sigma P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy} = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz} + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx} + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}\right]$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\alpha_i + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\beta_i + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\gamma_i\right]\Delta S_i$$

$$= \underset{\text{第一类}}{\iint_\Sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,d\sigma}$$

即 $\iint_\Sigma \vec{A}\cdot d\vec{S} = \iint_\Sigma \vec{A}\cdot\vec{n}\,d\sigma$

[应用] $\iint_\Sigma (z^2+x)\,dydz - z\,dxdy$. $\Sigma: z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 介于 $z=0$ 与 $z=2$ 部分的下侧

$$\iint_\Sigma (z^2+x)\,dydz = \iint_\Sigma (z^2+x)\cos\alpha\,d\sigma = \iint_\Sigma (z^2+x)\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\,dxdy$$

取 $\vec{n} = (\underset{z_x}{x}, \underset{z_y}{y}, \underset{下侧}{-1})$ $\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} = -x$.

$$\therefore \iint_\Sigma (z^2+x)\,dydz - z\,dxdy$$

$$= \iint_{D_{xy}} (\underbrace{z^2x}_{积分为0} - x^2 - z)\,dxdy$$

$$= \iint_{D_{xy}} \left(x^2+\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right)dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \left(r^2\cos^2\theta + \frac{1}{2}r^2\right) r\,dr = 8\pi$$

- Green 公式

区域 D $\begin{cases} 单连通区域 \longrightarrow 直接可线段连接 \\ 多连通区域 \end{cases}$

定义域 D 边界 L 的 $\boxed{正向}$：域内部靠左。

e.g.

所标为正向。

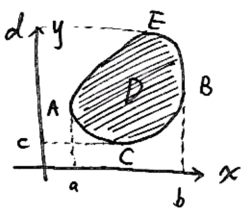
$\boxed{定理}$ 域 D 由分段光滑正向曲线 Γ 围成。$P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在 D 上一阶连续偏导。

则 $$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint_\Gamma P\,dx + Q\,dy$$ 称 $\boxed{\text{Green 公式}}$.

即 $$\iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} dxdy = \oint_\Gamma P\,dx + Q\,dy$$ ← 此时与 Γ 具体形状无关（只要 a.b.c.d 一致）

[证明] ① 若 D 既是 x-型也是 y-型。即 $D: \begin{cases} \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x) \\ a \le x \le b \end{cases}$ $D: \begin{cases} \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y) \\ c \le y \le d \end{cases}$

则 $$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx = \int_c^d Q(\psi_2(y), y)\,dy - \int_c^d Q(\psi_1(y), y)\,dy$$



$$= \int_{\widehat{CBE}} Q(x,y)\,dy - \int_{\widehat{CAE}} Q(x,y)\,dy$$ <第二类曲线积分>

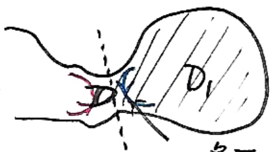
$+ \int_{\widehat{EAC}}$

$$= \oint_\Gamma Q(x,y)\,dy$$

<Γ 方向：逆时针，即 D 正向>

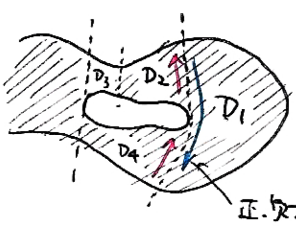
同理知 $$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy = \oint_\Gamma P(x,y)\,dx$$ □

② 对奇怪的区域：



因此可分成多个①区域，叠加即可。

正.负可以抵消（方向相反）



正.负抵消（方向相反）

因此对多连通区域也成立

$$\therefore \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint_\Gamma P\,dx + Q\,dy$$ □

[推论] 正向闭曲线Γ所围区域D的面积 $A=\frac{1}{2}\oint_{\Gamma} x\,dy-y\,dx$

$$\left(\iint_D dx\,dy=\frac{1}{2}\iint_D (1-(-1))\,dx\,dy = \frac{1}{2}\oint_{\Gamma} x\,dy-y\,dx \right)$$

遇到不是环路积分的情况：补上.（如果补上的只是简单线段 —→ √） 添加辅助线

$\boxed{\text{定理2}}$ 设D是单连通域，$P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在D内一阶连续偏导，则以下四者等价：

(1) 沿D中任意光滑曲线Γ 有 $\oint_{\Gamma} P\,dx+Q\,dy=0$.

(2) 对D中任一分段光滑曲线L. 曲线积分$\int_L P\,dx+Q\,dy$ 与路径无关，只与起止点有关.

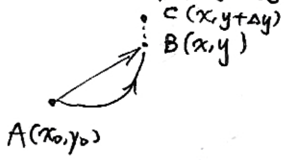
☆ (3) $P\,dx+Q\,dy$ 在D内是某一函数 $u(x,y)$的全微分. 即$du(x,y)=P\,dx+Q\,dy$.

(4) 在D内任意点处有 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

[证] (1) ⇒ (2) 显然.（合在一起成了闭路） □

[注] 与路径无关时，记 $\int_L P\,dx+Q\,dy$ 为 $\int_A^B P\,dx+Q\,dy$.

(2) ⇒ (3) 在D内任意取定点 $A(x_0,y_0)$ 与任意点 $B(x,y)$.



则有：$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,dx+Q\,dy$

$$\Delta_y u = u(x,y+\Delta y)-u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y+\Delta y)} P\,dx+Q\,dy-\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,dx+Q\,dy$$

$$=\int_{(x,y)}^{(x,y+\Delta y)} Q\,dy \quad (\because dx=0) \overset{\text{中值}}{=} Q(x,y+\theta\Delta y)\,\Delta y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y u}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0} Q(x,y+\theta\Delta y)\overset{\text{连续}}{=}Q(x,y)$$ 同理. $\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)$

故有 $du=P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$. （$\because$ P,Q是连续的. 即$\frac{\partial u}{\partial x}$. $\frac{\partial u}{\partial y}$ 连续） □

(3) ⇒ (4). 则有 $\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)$. $\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)$.

而 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$ 是连续的. 因此两者相等（混合偏导连续必相等）

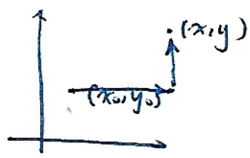
$$\therefore \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$ □

(4) ⇒ (1). 随意取一分段光滑闭曲线且所围区域$D'\subset D$. 记曲线为Γ.

$$\oint_{\Gamma} P\,dx+Q\,dy=\iint_{D'}\left(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx\,dy=0.$$ □

※ 若方向不对劲（按正向围出的区域）—→ 负号+取反方向.

实际上可以直接构造出一种$u(x,y)$的简单形式.



$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\,dx+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)\,dy.$$

$\boxed{\text{曲线积分基本公式}}$ 已知 $du=P\,dx+Q\,dy$. $\int_{AB} P\,dx+Q\,dy=\int_A^B du=u(B)-u(A)$

类似 Newton-Leibniz 公式.

- Gauss 公式

$\boxed{\text{定理}}$ 设空间闭区域 Ω 由分片光滑闭曲面 Σ 所围成，Σ 方向取外侧. 若 P, Q, R 在 Ω 上一阶偏导连续，则有

$$\iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \oiint_\Sigma P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy$$

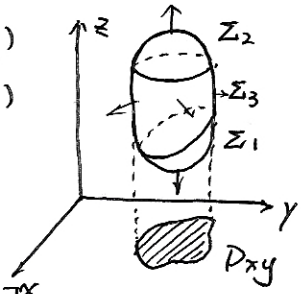
称 $\boxed{\text{Gauss 公式}}$.（实际上三项一一对应）（$P\,dydz \longrightarrow \frac{\partial P}{\partial x}$ 没啥怼啥.
形式上也类似 Green 公式）

[证] (1) 设 Ω^*：$z_1(x,y) \le z(x,y) \le z_2(x,y)$. $(x,y)\in D_{xy}$. 称 Ω^*：XY-型区域.

记 $\Omega^* = \Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3$

Σ_1：$z=z_1(x,y)$ $((x,y)\in D_{xy})$

Σ_2：$z=z_2(x,y)$ $((x,y)\in D_{xy})$



有 $\displaystyle\iiint_{\Omega^*}\frac{\partial R}{\partial z}dxdydz = \iint_{D_{xy}}dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}dz$

$\displaystyle= \iint_{D_{xy}}\left[R(x,y,z_2(x,y))-R(x,y,z_1(x,y))\right]dxdy$

$\displaystyle\oiint_\Sigma R\,dxdy = \left(\iint_{\Sigma_2}+\iint_{\Sigma_1}+\iint_{\Sigma_3}\right)R\,dxdy = \iint_{D_{xy}}R(x,y,z_2(x,y))\,dxdy$ $\boxed{\leftarrow \Sigma_2}$

$\displaystyle-\iint_{D_{xy}}R(x,y,z_1(x,y))\,dxdy$ $\boxed{\leftarrow \Sigma_1}$

类似柱面
只有 z 方向 (xz, yz)
↓
$\displaystyle\iint_{\Sigma_3}P\,dxdy=0$

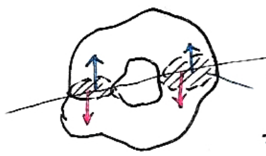
$\Rightarrow \displaystyle\iiint_{\Omega^*}\frac{\partial R}{\partial z}dxdydz = \oiint_\Sigma R\,dxdy$

类似地，可得：

$\displaystyle\iiint_{\Omega^*}\frac{\partial Q}{\partial y}dxdydz = \oiint_\Sigma Q\,dzdx$

$\displaystyle\iiint_{\Omega^*}\frac{\partial P}{\partial x}dxdydz = \oiint_\Sigma P\,dydz$

(2) 若 Ω 不是 XY-型区域：

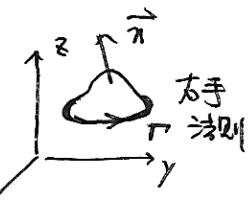


切成2个XY-型区域

方向相反.
抵消 $\longrightarrow$ 可叠加

相加得：$\displaystyle\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz = \oiint_\Sigma P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy$ □

[常用Trick] 质心公式！



- Stokes 公式

$\boxed{\text{定理}}$ 设光滑曲面 Σ 边界为分段光滑曲线 Γ，Σ 侧与 Γ 正向符合右手法则，P, Q, R 在包含 Σ 在内的一个空间域内一阶偏导连续，则有

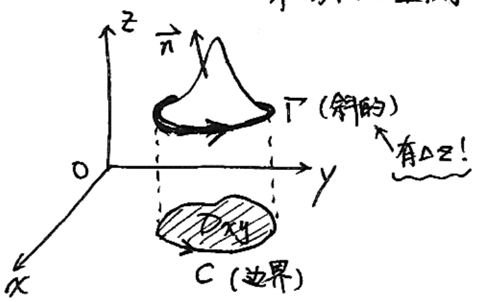
$$\oint_\Gamma P\,dx+Q\,dy+R\,dz = \iint_\Sigma\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

即 $\iint_\Sigma \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \oint_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz$

其中 $dxdy = dS\cos\gamma$，$dydz = dS\cos\alpha$. $dzdx = dS\cos\beta$.

[证明] 情形1. Σ 与平行 z 轴直线只交于一点. 设 $\Sigma: z = f(x,y)$. $(x,y)\in D_{xy}$.

取方向为上侧



(x,y,z)的变化 ⟶ $(x,y,f(x,y))$的变化 两者一致（定性感觉）

$$\oint_\Gamma P\,dx = \oint_C P(x,y,f(x,y))\,dx \quad \leftarrow \text{此步可用曲线}\int\text{-II定义证明}$$

$$\overset{\text{Green公式}}{=} -\iint_{D_{xy}} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y,f(x,y))\,dxdy$$

$$= -\iint_{D_{xy}} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) dxdy$$

$$= -\iint_\Sigma \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} f_y\right)\cos\gamma\, dS$$

一个法向量 $(\vec{n} = (-f_x, -f_y, 1))$

而 $\cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$

$\cos\beta = \dfrac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} \Rightarrow f_y = \dfrac{-\cos\beta}{\cos\gamma}$

$$\therefore \oint_\Gamma P\,dx = \iint_\Sigma \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right) dS$$

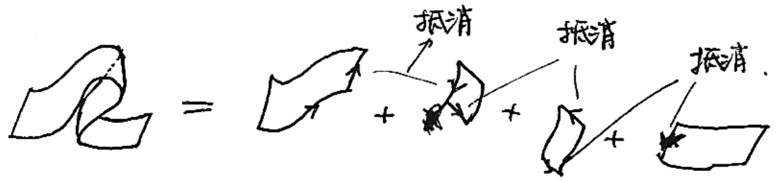
$$= \iint_\Sigma \frac{\partial P}{\partial z}\,dzdx - \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy$$

~~同理~~ $\cancel{\oint_\Gamma Q\,dx = \iint_\Sigma \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy - \frac{\partial Q}{\partial z}\,dydz}$

$\cancel{\oint_\Gamma R\,dx = \iint_\Sigma \frac{\partial R}{\partial y}\,dydz - \frac{\partial R}{\partial x}\,dzdx}$

情形2. Σ 与平行 z 轴直线交点多于一个. 可将其拆成几个情形1的部分.

e.g.



得证

同理. $\oint_\Gamma Q\,dx = \iint_\Sigma \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy - \frac{\partial Q}{\partial z}\,dydz$. $\oint_\Gamma R\,dx = \iint_\Sigma \frac{\partial R}{\partial y}\,dydz - \frac{\partial R}{\partial x}\,dzdx$.

□

特别地，若取 Σ 为平面区域. 退化为 Green 公式.

Trick：对称性

$x/y/z$ 对称 $\to \iint_\Sigma dydz + dzdx + dxdy = 3\iint_{D_{xy}} dxdy$

* *场论

向量场 $\vec{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$

$\iint_{\Sigma}\vec{A}\cdot\vec{n}\,dS$ 称 $\boxed{\text{通量(流量)}}$

$\operatorname{div}\vec{A}:=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$ 称 $\boxed{\text{散度}}$. $\operatorname{div}\vec{A}=:\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$

divergence

$\operatorname{rot}\vec{A}:=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$ 称 $\boxed{\text{旋度}}$ $\operatorname{rot}\vec{A}=:\vec{\nabla}\times\vec{A}$

rotation.

则: Gauss公式形式2 $\iiint_{\Omega}\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=\oiint_{\Sigma}\vec{A}\cdot\vec{n}\,dS$ 通量(流量)

Stokes公式形式2 $\iint_{\Sigma}\vec{\nabla}\times\vec{A}=\oint_{\Gamma}\vec{A}\cdot d\vec{s}$ 环流量

含参变量积分

- 被积函数含参

$f(x,y):\ [a,b]\times[\alpha,\beta]\longrightarrow I\subseteq\mathbb{R}$. 连续.

则 $\int_\alpha^\beta f(x,y)\,dy$ 为定义在 $[a,b]$ 上函数. 记作 $\varphi(x)=\int_\alpha^\beta \underset{\text{参变量}}{\underset{\uparrow}{f(x,y)}}\,dy$

$\boxed{\text{连续性[定理]}}$ $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续（一致连续）$\Rightarrow$ $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续（一致连续）

[证明]. f 一致连续 $\Rightarrow$ $\forall\varepsilon>0$. $\exists\delta>0$ 使 $\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2)\in[a,b]\times[\alpha,\beta]$

只要 $\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2))<\delta$. 成立 $|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon$.

则 $|\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)|=\left|\int_\alpha^\beta[f(x+\Delta x,y)-f(x,y)]\,dy\right|$

$$\leq\int_\alpha^\beta|f(x+\Delta x,y)-f(x,y)|\,dy<\varepsilon(\beta-\alpha).\qquad\square$$

[推论] $\lim\limits_{x\to x_0}\int_\alpha^\beta f(x,y)\,dy=\int_\alpha^\beta\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)\,dy$ （极限与积分在 f 连续时可交换）

即 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0)$ 因此证明显然 $\square$

$\boxed{\text{可积性[定理]}}$ $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续 $\Rightarrow$ $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且

$$\int_a^b\varphi(x)\,dx=\int_a^b\left[\int_\alpha^\beta f(x,y)\,dy\right]dx=\iint_{[a,b]\times[\alpha,\beta]}f(x,y)\,dxdy$$

$$\int_\alpha^\beta\psi(y)\,dy=\int_\alpha^\beta\left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right]dy\ \mathrel{/\!/}\ \leftarrow\ \text{重积分推导得到}$$

[推论] $\int_a^b dx\int_\alpha^\beta f(x,y)\,dy=\int_\alpha^\beta dy\int_a^b f(x,y)\,dx$ 积分顺序可换

$\boxed{\text{可微性[定理]}}$ $f(x,y)$ 及偏导 $f_x(x,y)$ 在 $[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续.

求导积分可交换 $\Rightarrow$ $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微. 且 $\varphi'(x)=\frac{d}{dx}\int_\alpha^\beta f(x,y)\,dy=\int_\alpha^\beta f_x(x,y)\,dy$

[证明] 记 $g(x)=\int_\alpha^\beta f_x(x,y)\,dy$. $\int_a^x g(x)\,dx=\int_a^x dx\int_\alpha^\beta f_x(x,y)\,dy$

可积性推论

$$\cancel{\int_a^x[f(x,\beta)-f(x,\alpha)]\,dx}$$

$$=\int_\alpha^\beta dy\int_a^x f_x(x,y)\,dx$$

$$=\int_\alpha^\beta f(x,y)-f(a,y)\,dy$$

$$=\varphi(x)-\varphi(a)$$

左右求导 $\Rightarrow$ $g(x)=\varphi'(x)$. $\square$

$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx = ?$

记 $\varphi(t)=\int_0^1 \frac{\ln(1+tx)}{1+x^2}dx$. $\varphi(0)=0$. $\varphi(1)=$ 原积分

↖ 连续

$$\varphi'(t)=\int_0^1 \frac{x\,dx}{(1+x^2)(1+tx)} = \frac{1}{t^2+1}\int_0^1\left(\frac{x}{x^2+1}+\frac{t}{x^2+1}-\frac{t}{1+tx}\right)dx$$

$$= \frac{1}{t^2+1}\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+t\arctan x-\ln(1+tx)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{t^2+1}\left(\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}t-\ln(1+t)\right)$$

$$\varphi(t)=\int_0^1\varphi'(t) = \frac{1}{2}\ln 2\arctan t\Big|_0^1+\frac{\pi}{8}\ln(t^2+1)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{\ln(1+t)}{1+t^2}dt$$

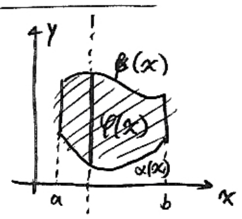
$$\Rightarrow \varphi(1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln 2\arctan t\Big|_0^1+\frac{\pi}{8}\ln(t^2+1)\Big|_0^1\right) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{4}\ln 2 = \frac{\pi}{8}\ln 2 \qquad \square$$

Trick: $\ln\boxed{\ } \to \frac{dx}{a^2-\sin^2 x} \to \frac{\csc^2 x\,dx}{a^2\csc^2 x-1} \to \frac{-d(\cot x)}{a^2\cot^2 x+a^2-1} \to \cdots\cdots$ ☆ $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=?\ (x>1)$

- 积分限含参

$D:\begin{cases}\alpha(x)\le y\le\beta(x)\\ a\le x\le b\end{cases}$. f 在 D 上连续. $\varphi(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy$

定义域在 $[a,b]$.



[redacted]

[redacted]. 可积性显然.

$\boxed{\text{可微性[定理]}}$ $f(x,y)$ 及 $f_x(x,y)$ 在 D 上连续. $D=[a,b]\times[c,d]$

$\alpha(x),\beta(x)$ 为 $[a,b]$ 上值域含于 $[c,d]$ 中的可微函数

则 $\varphi(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy$ 在 $[a,b]$ 上可微.

且 $\varphi'(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f_x(x,y)\,dy+f(x,\beta(x))\beta'(x)-f(x,\alpha(x))\alpha'(x)$.

[证] 记 $\varphi(x)=H(x,\alpha,\beta)=\int_\alpha^\beta f(x,y)\,dy$

则 $\varphi'(x)=\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial x}$

$$=\int_\alpha^\beta f_x(x,y)\,dy+\left(-f(x,\alpha(x))\right)\alpha'(x)+f(x,\beta(x))\beta'(x). \qquad \square$$

- 含参反常积分

$\boxed{\text{第一类含参反常积分(含参无穷积分)}}$

$f(x,y)$ 在 $[a,+\infty)\times[c,d]$ 上. 若对某个 $y_0\in[c,d]$. $\int_a^{+\infty} f(x,y_0)\,dx$ 收敛.

称 y_0 为 $\boxed{\text{收敛点}}$ ---→ $\boxed{\text{收敛域}}$

↓

也是 $I(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dy$ 的定义域

$\boxed{\text{一致收敛}}$

$f(x,y)$ 定义在 $[a,b]\times[c,d]$ 上， $I(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ 对任意 $y\in[c,d]$ 都存在

若对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 与 y 无关的 A_0，使 $A>A_0$ 时，$\forall y\in[c,d]$ 有

$$\left|\int_a^A f(x,y)-I(y)\right| = \left|\int_A^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon.$$

称 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ 关于 y 在 $[c,d]$ 上一致收敛于 $I(y)$.

$\boxed{\text{Cauchy 收敛原理}}$ $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ 在 $[c,d]$ 上一致收敛

$\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$，$\exists A_0>0$ （与 y 无关），使 $\forall A'>A_0$，$A''>A_0$，

成立 $\left|\int_A^{A'} f(x,y)\,dx\right|<\varepsilon$. （$\forall y\in[c,d]$）

$\boxed{\text{Weierstrass 判别法}}$ (1) $|f(x,y)|\le F(x)$ （$a\le x<+\infty$，$c\le y\le d$）

(2) $\int_a^{+\infty} F(x)\,dx$ 收敛 $\Rightarrow$ $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ 在 $[c,d]$ 上一致收敛.

$\boxed{\text{Abel 判别法}}$ (1) $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ 关于 y 在 $[c,d]$ 上一致收敛

(2) $g(x,y)$ 关于 x 单调 且一致有界. 即 $|g(x,y)|\le L$. （$\forall x\,\forall y\in[a,+\infty)\times[c,d]$）

$\boxed{\text{Dirichlet 判别法}}$ (1) $\cancel{f(x,y)\,dx}$ $\int_a^A f(x,y)\,dx$ 一致有界

(2) $g(x,y)$ 关于 x 单调 且 $\rightrightarrows 0$. （$x\to+\infty$ 时关于 y 在 $[c,d]$ 上）

一致收敛积分的性质：

$\boxed{\text{连续性}}$ $f(x,y)\in\mathbf{C}(D)$. $D=[a,b]\times[\alpha,+\infty)$.

若 $\int_\alpha^{+\infty} f(x,y)\,dy$ 关于 x 在 $[a,b]$ 上一致收敛. 则 $\int_\alpha^{+\infty} f(x,y)\,dy\in\mathbf{C}[a,b]$.

记为 $I(x)$.

[证明] ~~$\forall\varepsilon>0$，$\exists A_0>\alpha$，$\forall A>A_0$，$\exists\delta>0$ 使 $|f(x,A)-f(x,A+\Delta y)|<\varepsilon$~~

~~$(\forall\Delta y<\delta,\ \Delta y>0)$~~

一致收敛：$\forall\varepsilon>0$，$\exists A_0>\alpha$，$\forall A>A_0$，有 $\left|\int_A^{+\infty} f(x+\Delta x,y)\,dy\right|<\varepsilon$

$$\left|\int_A^{+\infty} f(x,y)\,dy\right|<\varepsilon.$$

$$|f(x+\Delta x,y)-f(x,y)|<\frac{\varepsilon}{A-\alpha}.$$

又 $f(x,y)\in\mathbf{C}(D)$. $\left|\int_\alpha^A f(x+\Delta x,y)\,dy-\int_\alpha^A f(x,y)\,dy\right|<\varepsilon$

$$\left|\int_\alpha^{+\infty} f(x+\Delta x,y)\,dy-\int_\alpha^{+\infty} f(x,y)\,dy\right|<\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon \qquad \square$$

[推广] $\lim\limits_{x\to x_0}\int_\alpha^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_\alpha^{+\infty}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)\,dy = \int_\alpha^{+\infty} f(x_0,y)\,dy$.

[ ]. 任取一单调增 $\{a_n\}$, s.t. $a_0=a$. $a_n\to+\infty$ $(n\to+\infty)$

记 $u_n(y)=\int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x,y)\,dy$ ~ 函数项级数.

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x,y)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y)$$

[引理] $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ 一致收敛 $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(y)$ 一致收敛.

反之不亦然. 反例: $a_n=n$.

$\boxed{\text{积分次序可交换}}$ $f(x,y)\in C[a,+\infty)\times[c,d]$. $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ 关于 x 在 $y\in[c,d]$ 上一致收敛

则 $$\int_c^d dy\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_a^{+\infty} dx\int_c^d f(x,y)\,dy$$

[证] $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(y)$ 在 $[c,d]$ 上一致收敛. $\int_c^d dy\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_c^d \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(y)\,dy$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\int_c^d u_n(y)\,dy = \sum_{n=1}^{\infty}\int_c^d\left(\int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x,y)\,dx\right)dy$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{a_{n-1}}^{a_n} dx\int_c^d f(x,y)\,dy = \int_a^{+\infty} dx\int_c^d f(x,y)\,dy. \quad\square$$

$\boxed{\text{积分求导交换}}$ $f(x,y),\ f_y(x,y)\in C[a,+\infty)\times[c,d]$ 上连续. 且 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ 收敛, $\int_a^{+\infty} f_y(x,y)\,dx$ 一致收敛

则 $\dfrac{d}{dy}\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_a^{+\infty} f_y(x,y)\,dx$. (在 $y\in[c,d]$ 上成立)

[证]. $\varphi(y)=\int_a^{+\infty} f_y(x,y)\,dx$ 在 $[c,d]$ 上连续.

$\forall y\in[c,d]$. $\int_c^y \varphi(z)\,dz = \int_c^y dz\int_a^{+\infty} f_z(x,z)\,dx = \int_a^{+\infty} dx\int_c^y f_z(x,z)\,dz$

$$= \int_a^{+\infty}[f(x,y)-f(x,c)]\,dx = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx - \underbrace{\int_a^{+\infty} f(x,c)\,dx}_{\text{const}}$$

两边求导. $\varphi(z) = \dfrac{d}{dy}\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$.

$\square$

$\boxed{\text{Dirichlet 积分}}$ $I=\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}\,dx$

[解] $I(\alpha)=\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\dfrac{\sin x}{x}\,dx$. $(\alpha\ge 0)$. 辅助函数 $f(x,\alpha)=\begin{cases} e^{-\alpha x}\dfrac{\sin x}{x}, & x\ne 0\\ 1, & x=0\end{cases}$

则 $f(x,\alpha)\in C[0,+\infty)^2$ $\quad f_\alpha(x,\alpha)=e^{-\alpha x}\sin x\in C[0,+\infty)^2$

可证 $I(\alpha)$ 一致收敛 (Dirichlet $\Rightarrow \int\frac{\sin x}{x}dx$ 一致收敛, 再 Abel)

则 $I(\alpha)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续. $I=I(0)=\lim_{\alpha\to 0^+} I(\alpha)$.

考虑 $\int_0^{+\infty} f_\alpha(x,\alpha)\,dx = -\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin x\,dx$. 该反常积分在 $[0,+\infty)$ 上非一致收敛.

但 $\forall \alpha_0>0$. $\int_a^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin x\,dx$ 在 $[\alpha_0,+\infty)$ 上一致收敛. $\left(\because \left|e^{-\alpha x}\sin x\right| \le e^{-\alpha_0 x}\right)$

$$I'(\alpha) = -\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin x\,dx = \left.\frac{e^{-\alpha x}(\alpha\sin x+\cos x)}{\alpha^2+1}\right|_0^{+\infty} = -\frac{1}{1+\alpha^2}$$ Weierstrass 即可.

$\Rightarrow I(\alpha) = -\arctan\alpha + C$

在 $\alpha\in(0,+\infty)$ 上. $|I(\alpha)| = \left|\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,dx\right| \le \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha}$.

$\lim_{\alpha\to+\infty} I(\alpha)=0 \quad \therefore C=\frac{\pi}{2}$.

$\therefore I(0) = I = -\arctan 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$. □

[推广] $$\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}\,dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & (a>0) \\ 0 & (a=0) \\ -\frac{\pi}{2} & (a<0)\end{cases} = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{sgn}\,a$$

$$\Rightarrow \mathrm{sgn}\,a = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}\,dx.$$

- Eular 积分

$\boxed{\text{第一类 Eular 积分 (Beta 函数)}}$ $B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$

$$B(p,q) = \underbrace{\int_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx}_{\text{有界}} + \underbrace{\int_{1/2}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx}_{\text{有界}}$$

$\le M\int_0^{1/2} x^{p-1}\,dx$ $\quad\left(M=\max\left\{\frac{1}{2^{q-1}},1\right\}\right)$ $p>0$. 收敛

$\le M'\int_{1/2}^1 (1-x)^{q-1}\,dx$ $\quad\left(M'=\max\left\{\frac{1}{2^{p-1}},1\right\}\right)$ $q>0$. 收敛

$\boxed{\text{连续性}}$ $B(p,q)$ 在 $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$ 上连续

[证明] $\forall p_0>0$. $q_0>0$. 当 $p\ge p_0$. $q\ge q_0$ 时有 $x^{p-1}(1-x)^{q-1} \le x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1}$ $(0\le x\le 1)$

$\int_0^1 \underline{x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1}}\,dx$ 存在. 由 Weierstrass. 一致收敛

而 $x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ 连续. 因此 $B(p,q)$ 在 $[p_0,+\infty)\times[q_0,+\infty)$ 上连续

$p_0\to 0$. $q_0\to 0$. □

$\boxed{\text{对称性}}$ $B(p,q)=B(q,p)$. $p>0$. $q>0$

$\boxed{\text{递推公式}}$ $B(p,q) = \frac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1)$. $p>0$. $q>1$ (p. q 位置等价)

[证] $B(p,q)=\int_0^1 \frac{1}{p}(1-x)^{q-1}\,d(x^p) = \frac{x^p}{p}(1-x)^{q-1}\Big|_0^1 + \frac{q-1}{p}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-2}\,dx$

$= \frac{q-1}{p}\int_0^1 x^{p-1}\underset{\substack{\downarrow\\(1+x-1)}}{x}\cdot(1-x)^{q-2}\,dx = \frac{q-1}{p}\left[\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-2}\,dx - \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx\right]$

$\therefore B(p,q) = \frac{q-1}{p}B(p,q-1) - \frac{q-1}{p}B(p,q) \Rightarrow (p+q-1)B(p,q) = (q-1)B(p,q-1)$

$\therefore B(p,q) = \frac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1)$ □

$\boxed{\text{变换}}$ $x=\cos^2\varphi$. 则 $B(p,q) = 2\int_0^{\pi/2}\cos^{2p-1}\varphi\,\sin^{2q-1}\varphi\,d\varphi$

$B(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \pi$.

$\boxed{\text{第二类 Eular 积分（Gamma 函数）}}$ $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,dx$ 发现 $\Gamma(1)=1$.

[证] $\Gamma(s) = \int_0^1 x^{s-1}e^{-x}\,dx + \int_1^{\infty} x^{s-1}e^{-x}\,dx$ —— 指数收敛快于幂 $\Rightarrow$ 收敛

$s<1$ 时. 取 $p=1-s$. 则 $\lim\limits_{x\to0^+} x^p x^{s-1}e^{-x} = \lim\limits_{x\to0^+} e^{-x} = 1$. 收敛性与 $\frac{1}{x^{1-s}}$ 等数.

$1-s<1$ 时收敛 即 $s>0$.

$s\geq1$ 时 显然收敛.

$\therefore s>0$. □

$\boxed{\text{连续性}}$ $\Gamma(s)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续且可导.

$\boxed{\text{可导性}}$

[证] $s\in[a,b]\subset(0,+\infty)$ 时. $x^{s-1}e^{-x} \leq x^{a-1}e^{-x}$. $x\in(0,1]$

$x^{s-1}e^{-x} \leq x^{b-1}e^{-x}$ $x\in[1,+\infty)$

则 $\Gamma(s) \leq \underbrace{\int_0^1 x^{a-1}e^{-x}\,dx}_{\text{收敛}} + \underbrace{\int_1^{\infty} x^{b-1}e^{-x}\,dx}_{\text{收敛}}$. 由 Weierstrass. $\Gamma(s)$ 一致收敛

又 $x^{s-1}e^{-x}$ 连续 $\therefore \Gamma(s)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

$\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial s}(x^{s-1}e^{-x})\,dx = \int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\ln x\,dx$

$= \int_0^1 \underbrace{x^{s-1}}_{\text{主部}}e^{-x}\ln x\,dx + \int_1^{\infty} x^{s-1}\underbrace{e^{-x}}_{\text{主部}}\ln x\,dx$ 收敛 收敛

一致收敛 $\Rightarrow\checkmark$ □

$\boxed{\text{递推}}$ $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \Rightarrow \Gamma(n) = (n-1)!\ (\forall n\in\mathbb{N}^*)$

[证] $\Gamma(s+1) = \int_0^{+\infty} x^{s}e^{-x}\,dx = -\int_0^{+\infty} x^{s}\,d(e^{-x}) = -x^{s}e^{-x}\Big|_0^{\infty} + s\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,dx$

$= s\Gamma(s)$. □

$\boxed{\text{变换}}$ $x = t^2$. $\Gamma(s) = 2\int_0^{+\infty} t^{2s-1} e^{-t^2} dt$

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

$\boxed{\text{Dirichlet 公式}}$ $$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (p,q>0)$$

[证] $$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4\int_0^{+\infty} s^{2p-1} e^{-s^2} ds \int_0^{+\infty} t^{2q-1} e^{-t^2} dt$$

$$= 4\iint_{\Omega} s^{2p-1} e^{-s^2} t^{2q-1} e^{-t^2} ds\, dt$$

$\Omega: (0,+\infty)\times(0,+\infty)$

$$= 4\iint\limits_{\substack{0\le r\le\infty \\ 0\le\theta\le\pi/2}} r^{2(p+q)-1} e^{-r^2} \cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta\, dr\, d\theta$$

$$= \left(2\int_0^{+\infty} r^{2(p+q)-1} e^{-r^2} dr\right)\left(2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta\, d\theta\right)$$

$$= \Gamma(p+q)\; B(p,q)$$ □

* $\boxed{\Gamma\text{函数的推广}}$ $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$

由 $(0,1) \longrightarrow (-1,0)$. 0处依然无定义 ～ $\frac{\Gamma(1)}{0}$

$$\boxed{\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin s\pi}}$$ （余元公式）

傅利叶级数

- 三角级数

$\boxed{\text{三角级数}}$ $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

$\boxed{\text{组成三角级数的函数系}}$ $1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \cdots\ \begin{matrix}\cos nx,\\ \sin nx,\end{matrix}\ \cdots$

[定理] 组成三角级数的函数系在 $[-\pi,\pi]$ 上 $\boxed{\text{正交}}$ 即其中任意两个不同的函数之积在 $[-\pi,\pi]$ 上积分为 0.

[证] $\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\cos nx\,dx=\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}=0=\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\sin nx\,dx=\frac{1}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}=0$

$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(k+n)x+\cos(k-n)x\,dx=0+0=0.$ $(k\neq n)$

$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin nx\,dx=-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(k+n)x-\cos(k-n)x\,dx=0-0=0$ $(k\neq n)$

$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos nx\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(k+n)x+\sin(k-n)x\,dx=0+0=0.$

□

但相同函数 (2个) 的积在 $[-\pi,\pi]$ 上积分不为 0.

$\int_{-\pi}^{\pi}1^2\,dx=2\pi$ $\qquad\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}1+\cos 2nx\,dx=\pi.$

$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}1-\cos 2nx\,dx=\pi.$

- 傅里叶级数展开

[引理] $f(x)$ 是周期 2π 的周期函数，且 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 右端可逐项积分，

则 $\begin{cases}a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx & (n=0,1,2,\cdots)\\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx & (n=1,2,\cdots)\end{cases}$

[证]. 逐项积分.

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{a_0}{2}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}dx}_{2\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx}_{0}+b_n\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx}_{0}\Big)$$

$=\pi a_0$ 　导致级数形式是含有 $\frac{1}{2}a_0$. $\quad\Rightarrow a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx.$

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\,dx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin nx\,dx\Big)$$

$=a_k\cdot\pi$

$\Rightarrow a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx$

同理, $\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx.$

□

$\boxed{\text{傅里叶系数}}$ 称 a_n, b_n. $\boxed{\text{傅里叶级数}}$ 以 $f(x)$ 的傅里叶系数为系数的三角级数.

定义在 $[-\pi, \pi]$ 上函数的傅里叶级数展开: 周期延拓. ⟶ "周期函数"

一般的展开用"~". 相等用"=",

e.g. $f(x) = \begin{cases} -x & -\pi \leq x \leq 0 \\ x & 0 \leq x \leq \pi \end{cases} \xrightarrow{\text{延展}} F(x)$ 余弦级数

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \cdots\right) \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

$$\Rightarrow 0 = f(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\right) \Rightarrow \frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \cdots$$

可用于计算特殊级数的和

- 正弦级数与余弦级数

[定理] $f(x)$ 周期 2π. 奇函数. 其傅利叶级数为 $\boxed{\text{正弦级数}}$. $\begin{cases} a_n = 0 & (n=0,1,2,\cdots) \\ b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\, dx & (n=1,2,\cdots) \end{cases}$

偶函数 $\boxed{\text{余弦级数}}$ $\begin{cases} a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\, dx & (n=0,1,2,\cdots) \\ b_n = 0 & (n=1,2,\cdots) \end{cases}$

[易证]. [记忆] 正弦是奇 ~ 奇. 余弦是偶函数 ~ 偶.

定义在 $[0, \pi]$ 上函数 $\xrightarrow{\text{奇延拓}}$ 正弦级数

$\xrightarrow{\text{偶延拓}}$ 余弦级数 * 有的时候需先去掉端点 最后单独讨论

- 一般周期函数的 Fourier 级数

周期 $2l$ 的函数 $f(x) =: F\left(\frac{\pi x}{l}\right) = F(z)$. 周期 2π

对 $F(z)$ Fourier 展开. $\begin{cases} a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(z)\, dz \\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(z)\cos nz\, dz \\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(z)\sin nz\, dz. \end{cases}$ $F(z) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nz + b_n\sin nz)$

$\boxed{\text{定理}}$ 设周期 $2l$ 的周期函数 $f(x)$ 满足收敛条件 即 Dirichlet 条件.

1) 一个周期内连续或只有有限个第一类间断点 (左右极限存在但不等)

2) 一个周期内只有有限个极值点.

则 $f(x)$ 可 Fourier 展开为 $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$

且 $\begin{cases} a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\, dx & (n = 0,1,2,3,\cdots) \\ b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\, dx & (n = 1,2,3,\cdots) \end{cases}$

[证]. $F(z) = F\left(\frac{\pi x}{l}\right) = f(x) = f\left(\frac{lz}{\pi}\right)$

……

同样，也有正弦级数与余弦级数：

$f(x)$ 为奇函数 $\longrightarrow$ $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$.　　$f(x)$ 为偶函数：$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}$.

常用：积化和差.　　注意有时候 a_1 / b_1 要单独算 $\longrightarrow$ 可能会出现 $\frac{?}{n-1}$ 的形式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

- *Riemann* 引理

$\boxed{\text{Riemann 引理}}$　设 $\psi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积或绝对可积，则有

$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^b \psi(x)\sin px\,dx=\lim_{p\to+\infty}\int_a^b \psi(x)\cos px\,dx=0$$

[证] 1) $\psi(x)$ Riemann 可积的情况. $\psi(x)$ 有界.

* Riemann 可积 = Darboux 可积

$\forall \varepsilon>0$. $\exists$ 划分 Π: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$　使 $\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}$

其中 $\omega_i=M_i-m_i$

$M_i=\sup_{[x_{i-1},x_i]}\psi(x) = \text{Max}\cdots$, $m_i=\inf_{[x_{i-1},x_i]}\psi(x) = \text{Min}\cdots$

$\exists P=\frac{4}{\varepsilon}\left(\sum_{i=1}^{n}|m_i|\right)>0$

$\forall p>P$. 有 $\frac{2}{p}\sum_{i=1}^{n}|m_i|<\frac{2\varepsilon}{4}=\frac{\varepsilon}{2}$.

$$\left|\int_a^b \psi(x)\sin px\,dx\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\psi(x)\sin px\,dx\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(\psi(x)-m_i)\sin px\,dx+\sum_{i=1}^{n}m_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}\sin px\,dx\right|$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}|\psi(x)-m_i|\,dx+\sum_{i=1}^{n}m_i\cdot\frac{\cos px\big|_{x_{i-1}}^{x_i}}{p}$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}|\psi(x)-m_i|\,dx+\frac{2}{p}\sum_{i=1}^{n}|m_i|$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\omega_i\,dx+\frac{2}{p}\sum_{i=1}^{n}|m_i|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

□

2) $\psi(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界. 但绝对可积的情况.

设 b 为 $\psi(x)$ 的唯一瑕点.　绝对可积 则 $\forall\varepsilon>0$. $\exists\delta<0$. $\forall\eta<\delta$. $\int_{b-\eta}^{b}|\psi(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{2}$.

对 $\left|\int_a^{b-\eta}\psi(x)\sin px\,dx\right|$. 由 1) 中可知. $\left|\int_a^{b-\eta}\psi(x)\sin px\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}$.

由 1) 中结论. 有 P 存在 使 $\forall p>P$ 时　$\left|\int_a^b\psi(x)\sin px\,dx\right|=\left|\int_a^{b-\eta}\psi(x)\sin px\,dx+\int_{b-\eta}^{b}\psi(x)\sin px\,dx\right|$

$$\le\left|\int_a^{b-\eta}\psi(x)\sin px\,dx\right|+\int_{b-\eta}^{b}|\psi(x)|\,dx$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

□

(以下内容只要求了解)

$\boxed{\text{收敛定理(展开定理)}}$ $f(x)$ 是周期 2π 的函数. 若 $f(x)$ 满足 Dirichlet 条件:

(1) 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点;

(2) 在一个周期内只有有限个极值点.

则 $f(x)$ 的 Fourier 级数收敛. 且有 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\begin{cases} f(x). & x \text{ 为连续点} \\ \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} & x \text{ 为间断点}\end{cases}$

$\boxed{\text{引入定义}}$ f 在 $[a,b]$ 上定义.

若 $\exists\ a=x_0<x_1<\cdots<x_N=b$ 使 f 在 (x_{i-1},x_i) 上单调.

称 f 在 $[a,b]$ 上 $\boxed{\text{分段单调}}$.

设 x 是 $f(x)$ 的连续点或第一类间断点. 若对任意充分小的 $\delta>0$. $\exists L>0$, $\alpha\in(0,1]$

使得 $\quad |f(x\pm u)-f(x^{\pm})|<Lu^{\alpha}\quad (0<u<\delta)$

称 $f(x)$ 在点 x 处满足指数为 $\alpha\in(0,1]$ 的 $\boxed{\text{Hölder 条件}}$

* 将 $x^{\pm}$ 替换为 x, 则为 Hölder 连续.

$\boxed{\text{收敛定理(展开定理) 表述 2}}$

$f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或绝对可积, 且满足 $\quad(-\pi\leq x_0\leq\pi)$

(1) (Dirichlet - Jordan 判别法)

$f(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 上是分段单调有界函数

(2) (Dini - Lipschitz 判别法)

$f(x)$ 在 x_0 处满足指数为 $\alpha\in(0,1]$ 的 Hölder 条件.

则 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 x_0 处收敛于 $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$.

[证] 不要求. 见书.

$\boxed{\text{Dirichlet 引理}}$ $\psi(u)$ 在 $[0,\delta]$ 上单调. 则 $\lim\limits_{p\to+\infty}\int_0^{\delta}\frac{\psi(u)-\psi(0^+)}{u}\sin pu\,du=0.$

[证] 不妨设 $\psi(u)$ 单调增.

$\forall\varepsilon>0$. $\exists\ \eta\in[0,\delta]$ 使 $u\in(0,\eta]$ 时 $0\leq\psi(u)-\psi(0_+)<\varepsilon$. (单调增)

$$\int_0^{\delta}\frac{\psi(u)-\psi(0^+)}{u}\sin pu\,du=\int_0^{\eta}\frac{\psi(u)-\psi(0^+)}{u}\sin pu\,du+\underline{\int_{\eta}^{\delta}\frac{\psi(u)-\psi(0_+)}{u}\sin pu\,du}$$

$$\leq\frac{1}{\eta}\int_{\eta}^{\delta}\psi(u)-\psi(0^+)\sin pu\,du\xrightarrow{\text{Riemann.}}0.$$

reprise：积分第二中值定理

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调。$\exists\ \xi\in[a,b]$，s.t. $\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx + g(b)\int_{\xi}^b f(x)dx$

则 $$\left|\int_0^{\eta} \frac{\psi(u)-\psi(0+)}{u}\sin pu\,du\right| = \left|\int_0^{\eta}(\psi(u)-\psi(0+))\frac{\sin pu}{u}du\right| = 0 + \underbrace{(\psi(\eta)-\psi(0+))}_{\to 0}\left|\int_{\xi}^{\eta}\frac{\sin pu}{u}du\right|$$

$(\exists\ \xi\in[0,\eta])$

$$< \left|\int_{p\xi}^{p\eta}\frac{\sin x}{x}dx\right|\cdot\varepsilon$$

$$< \left|\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx\right|\cdot\varepsilon = \frac{\pi}{2}\varepsilon$$

□

$\boxed{\text{等价表示}}$ $$\lim_{p\to+\infty}\int_0^{\delta}\psi(u)\frac{\sin pu}{u}du = \frac{\pi}{2}\psi(0+)$$

[推广] $\psi(u)$ 是分段单调，亦成立

[推论] 若 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或绝对可积，在 x 处两个单侧导数 $f_+'(x)$ 和 $f_-'(x)$ 都存在，

或更进一步，只要2个拟单侧导数 $\lim_{h\to0^+}\frac{f(x\pm h)-f(x^{\pm})}{h}$ 存在，

则 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 x 处收敛于 $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$.

• Fourier 级数的分析性质

由 Riemann 引理：$f(x)$（绝对）可积，则 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim_{n\to\infty}b_n=0$，

$\boxed{\text{逐项积分定理}}$ 设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或绝对可积

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

$\forall\ c,\ x\in[-\pi,\pi]$ 有 $$\int_c^x f(u)du = \int_c^x\frac{a_0}{2}du+\sum_{n=1}^{\infty}\int_c^x(a_n\cos nu+b_n\sin nu)du$$

[证] 不要求.

$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 是某个在 $[-\pi,\pi]$ 上（绝对）可积函数的 Fourier 级数的必要条件是 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$ 收敛.