Probability Theory and Mathematical Statistics 概率统计

Homework 1101

邱一航 520030910155

11/2

4-1. 解：X的分布列为：

X	1	2	3	4
	$\frac{37}{64}$	$\frac{19}{64}$	$\frac{7}{64}$	$\frac{1}{64}$

($P(X=4)=\left(\frac{1}{4}\right)^3$. $P(X=3)=\left(\frac{1}{2}\right)^3-\left(\frac{1}{4}\right)^3$. $P(X=2)=\left(\frac{3}{4}\right)^3-P(X=4)-P(X=3)$.

$P(X=1)=1-P(X=4)-P(X=3)-P(X=2)$)

$$E(X)=\frac{37}{64}\cdot 1+\frac{19}{64}\cdot 2+\frac{7}{64}\cdot 3+\frac{1}{64}\cdot 4=\frac{25}{16}$$ □

4-3. 解：设比赛局数为X. 分布列为：

X	3	4	5
	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$

($P(X=3)=\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot 2$, $P(X=4)=C_3^1\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot 2\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$, $P(X=5)=1-P(X=3)-P(X=4)$)

$$E(X)=3\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{3}{8}+5\cdot\frac{3}{8}=\frac{33}{8}$$ □

4-5. 解： 引入随机变量 X_i, $X_i=\begin{cases}0 & \text{. 停在第}i\text{层}, \\ 1 & \text{. 不停第}i\text{层}\end{cases}$

设电梯停的次数为X. 则 $X=X_2+X_3+\cdots+X_n$.

则有 $P(X_i=0)=\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^m$. $P(X_i=1)=1-\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^m$

$$E(X)=\sum_{i=2}^{n}E(X_i)=\sum_{i=2}^{n}1\cdot P(X_i=1)=(n-1)\left[1-\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^m\right].$$ □

4-6. 解：设客户人数为n. 记平均每人赔付金额为X. 总收益为Y. 保费为a元.

$E(X)=p\cdot m$ $\quad E(Y)=E(n\cdot a-nX)=na-nE(X)=na-nmp$.

有：$\frac{na-nmp}{nm}\geq 5\%$ $\quad\therefore a\geq 0.05m+mp$

$\therefore a_{min}=m(p+0.05)$ □

4-7. 解：记第i组砝码称重时使用的砝码数为X_i.

第一组：使用1个砝码：1g，2g，5g，10g. 使用2个砝码：3g，4g，6g，7g

使用3个砝码：8g，9g 因此X_1分布列如下：

$\therefore E(X_1)=1\cdot\frac{2}{5}+2\cdot\frac{2}{5}+3\cdot\frac{1}{5}=\frac{9}{5}$

X_1	1	2	3
	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$

第二组：使用1个砝码：1g，2g，3g，4g，10g 使用2个砝码：5g，6g，7g

使用3个砝码：8g，9g 因此X_2分布列如下：

$\therefore E(X_2)=1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{3}{10}+3\cdot\frac{1}{5}=1.7$

X_2	1	2	3
	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$

第三组：使用1个砝码：1g，2g，5g，10g 使用2个砝码：3g，6g，7g

使用3个砝码：4g，8g 使用4个砝码：9g

X_3分布列：

X_3	1	2	3	4
	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

$\therefore E(X_3)=1\cdot\frac{2}{5}+2\cdot\frac{3}{10}+3\cdot\frac{1}{5}+4\cdot\frac{1}{10}$

$=2$

由此可知第二组砝码称重时所用的平均砝码数最少. □

4-11. 解：发现$f(x)$是关于$x=1$对称的函数. $\therefore E(X)=1$. □

$E(2X+1)=2E(X)+1=3$. □

$$E(e^{-X})=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x}f(x)\,dx=\int_0^1 xe^{-x}\,dx+\int_1^2(2-x)e^{-x}\,dx$$

$$=-xe^{-x}\Big|_0^1-e^{-x}\Big|_0^1-2e^{-x}\Big|_1^2+xe^{-x}\Big|_1^2+e^{-x}\Big|_1^2=e^{-2}-2e^{-1}+1$$ □

4-13. 解：$X\sim N(\mu,1)$ $E(T)=-1\cdot P(T=-1)+20P(T=20)-5P(T=-5)$

$=-1P(X<10)+20P(10\leq X\leq 12)-5P(X>12)$

$=-\Phi(10-\mu)+20\left(\Phi(12-\mu)-\Phi(10-\mu)\right)-5\left(1-\Phi(12-\mu)\right)$

$=25\Phi(12-\mu)-21\Phi(10-\mu)-5$ 要使$E(T)$最大，显然$10\leq\mu\leq12$.

$=25\Phi(12-\mu)+21\Phi(\mu-10)-26$

查表计算得 $12-\mu=1.11$，$\mu-10=0.89$ 时 $E(T)$ 最大. 此时 $\mu\approx 10.89\,mm$ □

4-17. 解: $E(XY)=\iint_{\infty} xy\,f(x,y)\,dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx\int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\,dy$

$=\int_0^1 x\,dx\int_5^{+\infty} y e^{-(y-5)}\,dy=\int_0^1 6x\,dx=3x^2\Big|_0^1=3$ □

4-18. 解: $E(XY)=\iint_{\infty} xy\,f(x,y)\,dxdy=\int_0^1 6x^2dx\int_0^1 y^3dy=6\int_0^1\frac{1}{4}x^2dx=\frac{1}{2}$ □

$E(2X^2+3Y)=\iint_{\infty}(2x^2+3y)\,f(x,y)\,dxdy=\int_0^1 12x^3dx\int_0^1 y^2dy+\int_0^1 18x\,dx\int_0^1 y^3dy$

$=1+\frac{9}{4}=\frac{13}{4}$ □

补充1. 解: (1) 发现 $f(x)$ 关于 $x=7$ 对称. 故有 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx=7$ □

(2) $E\left((X-E(X))^3\right)=E\left((X-7)^3\right)$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-7)^3\cdot\frac{1}{9}(5-|x-7|)\,dx=\frac{1}{9}\int_{-1}^{1}u^3(5-|u|)\,du$

考虑到 $u^3(5-|u|)$ 是关于 u 的奇函数且 $[-1,1]$ 关于原点对称,

$\therefore E\left((X-E(X))^3\right)=0.$ □

补充2. 解: $P(Y=2)=P(X\leqslant 2)=\int_0^2\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\,dx=1-e^{-1}.$

$E(Y)=2\cdot P(Y=2)+\int_2^{+\infty}x\cdot f(x)\,dx=2(1-e^{-1})+\frac{1}{2}\int_2^{+\infty}xe^{-\frac{1}{2}x}\,dx$

$=2-2e^{-1}$ □

$E(Y^2)=2^2\cdot P(Y=2)+\int_2^{+\infty}x^2 f(x)\,dx=4(1-e^{-1})+\frac{1}{2}\int_2^{+\infty}x^2e^{-\frac{1}{2}x}\,dx$

$=4-4e^{-1}$ □