信号与系统

邱一航

520030910155

引言

线性系统：$x \to \boxed{LS} \to y$ 满足 (1) 齐次性 $x \to y$. $ax \to ay$

(2) 可加性 $x_i \to y_i$ $x_1 + x_2 \to y_1 + y_2$

Fourier Transformation ~ continuous time & discrete time

Laplace Transformation ~ continuous time

Z - Transformation ~ discrete time

Input Stimulation (激励) $\to \boxed{\text{System}} \to$ Output Response (响应)

数学准备：

1) 一重微积分. 定义和分

2) 无穷级数 / 幂级数

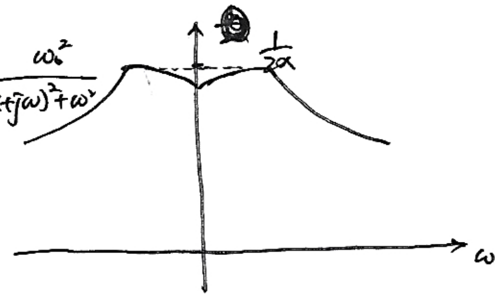
3) 空间向子

4) 复数

$z = x + jy$. $\mathrm{Re}\,z$. $\mathrm{Im}\,z$. $A\angle\theta$. $re^{j\theta} = r\cos\theta + jr\sin\theta$

概念

$$F(\omega) = \frac{\omega_0^2}{(\alpha + j\omega)^2 + \omega_0^2}$$



- 信号描述与分类

1) 描述：函数 / 图象（波形）

2) 分类：随机信号 / 确定性信号

e.g. 噪音　　（有确定的函数形式）

信号能量：$E = \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2\, dt$ （连续时间）　$E = \sum_{n=n_1}^{n_2} |f(n)|^2$ （离散时间）

信号功率：$P = \frac{E}{t_2 - t_1}$ （连续时间）　$P = \frac{E}{n_2 - n_1 + 1}$ （离散时间）

2) 分类
- 总E（和P）均有限. 即 $E_{(-\infty,+\infty)} < \infty$ ($:E_\infty$), $P_\infty = 0$ 　$\boxed{\text{能量信号}}$
- 总E 无限. 平均P有限　即 $E_\infty = \infty$. $0 < P_\infty < \infty$ 　$\boxed{\text{功率信号}}$
- 总E 和平均P 均无限.

2) 分类：周期信号，非周期信号

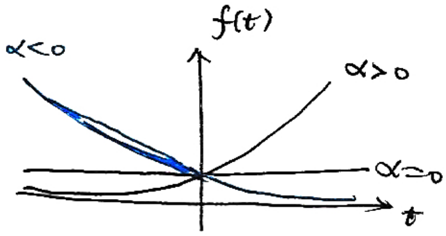
2) 分类：
- $\boxed{\text{连续时间信号}}$
  - $\boxed{\text{模拟信号}}$ （A 连续）　e.g. $\sin t$
  - $\boxed{\text{脉冲信号}}$ （A 离散）　e.g. 方波
- $\boxed{\text{离散时间信号}}$：* 用一组数组表示有限长离散时间信号

  e.g. $\{0, 2, 3, -1, 0.5, 8\}$ 　注意时间轴为 n（仅能取 $\mathbb{Z}$）

  $\uparrow n=0$ （不标柱默认从 n=0 开始）
  - $\boxed{\text{抽样信号}}$ （A连续）
  - $\boxed{\text{数字信号}}$ （A离散）

- 常用信号

1) 常用连续时间信号

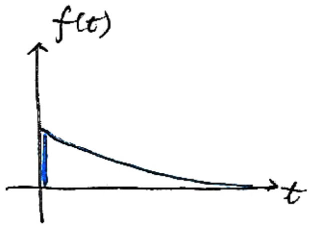


① $\boxed{\text{指数信号}}$ $f(t) = ke^{\alpha t}$

令 时间常数 $\tau = \frac{1}{|\alpha|}$

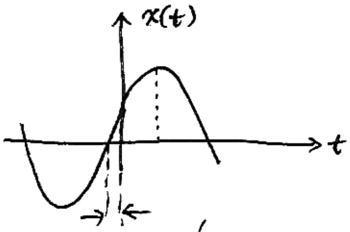
性质：(1) $\frac{df(t)}{dt} = \pm\frac{k}{\tau}e^{\pm\frac{t}{\tau}}$ 也是指数信号

$\int f(t)\,dt = \pm\tau k e^{\pm\frac{t}{\tau}}$



$\boxed{\text{单边指数信号}}$ $f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{t}{\tau}}, & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

② $\boxed{\text{正弦信号}}$ $x(t) = A_0 \sin(\omega t + \varphi)$ 唯一既含时间又含频率的函数



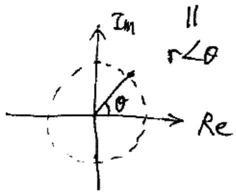
φ/ω $\left(\omega t + \varphi = 0 \rightarrow t = -\frac{\varphi}{\omega}\right)$

由欧拉公式可推

$\cos\omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$

$\sin\omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2}$

$re^{j\theta}$
$\|$
$r\angle\theta$



(欧拉公式 $\begin{cases} e^{j\omega} = \cos\omega t + j\sin\omega t \\ e^{-j\omega} = \cos\omega t - j\sin\omega t \end{cases}$)

↑

Taylor展开可证

③ $\boxed{\text{复指数信号}}$ $f(t) = Ke^{st}$ (其中 $s = \sigma + j\omega$)

$= Ke^{\sigma t}(\cos\omega t + j\sin\omega t)$

* 电路理论. 阻尼过程 Reprise

i) $\sigma = 0$. $\omega \neq 0$ $\longrightarrow$ 正弦信号

ii) $\sigma \neq 0$. $\omega = 0$ $\longrightarrow$ 指数信号

iii) $\sigma = 0$. $\omega = 0$ $\longrightarrow$ 直流信号

$\sigma < 0$: 衰减振荡. $\sigma > 0$: 增强振荡

④ $\boxed{\text{抽样信号}}$ sampling

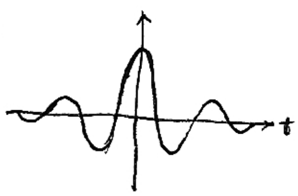
$x(t) = \frac{\sin t}{t} =: Sa(t)$

性质：i) $Sa(t) = Sa(-t)$ ii) 衰减

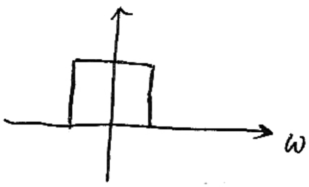
iii) 零点：$\pm k\pi$ $(k \in \mathbb{N})$

iv) $\int_0^\infty Sa(\omega_0 t)\,dt = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\omega_0}$ 其中 $Sa(\omega_0 t) = \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0 t}$

v)



$\xrightarrow{F.T.}$



奇异函数们：

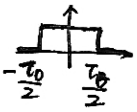
⑤ $\boxed{\text{单位阶跃函数}}$ $\varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$ 其中：$\varepsilon(0) = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ DNE. \end{cases}$ 有些时候便于处理

(不存在 Do Not Exist)

延时阶跃 $\varepsilon(t-t_0)$

e.g. $\operatorname{sgn} x = 2\varepsilon(x) - 1$. 若要求 $\operatorname{sgn} 0 = 0$，此时 $\varepsilon(0) = \frac{1}{2}$

Gating Function



$G_{\tau_0}(t) = \varepsilon(t+\frac{\tau_0}{2}) - \varepsilon(t-\frac{\tau_0}{2})$

* 有时也用 $u(t)$ 来表示阶跃函数

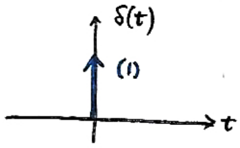
单边指数函数 $f(t) = ke^{-\alpha t} u(t)$

e.g. $x(t) = A\sin(\omega_0 t)$ 从第一个周期的绝对值 ~~m~~ 表达式.
0开始

$f(t) = A\sin(\omega_0 t)\big(-u(t-\pi)+u(t)\big) - A\sin(\omega_0 t)\big(u(t-\pi)-u(t-2\pi)\big)$

另一种表示(拉氏变换更优) $f(t) = A\sin(\omega_0 t)\big(-u(t-\pi)+u(t)\big)$

⑥ $\boxed{\text{单位冲激函数}}$ $\delta(t)$



定义1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1$. 且 $\delta(t) = 0 \quad (t \neq 0)$.

[redacted] $\Rightarrow \delta(t) = \begin{cases} \infty, & t=0 \\ 0, & t\neq 0 \end{cases}$

特别地，$0 \cdot \delta(t) = 0$. (此处0表示无冲激函数)

定义2. $p_\Delta(t) = \frac{1}{\Delta}\left[u(t+\frac{\Delta}{2}) - u(t-\frac{\Delta}{2})\right]$

$\delta(t) = \lim_{\tau\to 0} p_\tau(t) = \underbrace{\lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau}\left[u(t+\frac{\tau}{2}) - u(t-\frac{\tau}{2})\right]}_{\text{导数定义式}}$ 即：$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$

* 其它函数也能用于定义冲激函数，e.g. $\delta(t) = \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau}\left(1-\frac{t}{|\tau|}\right)\left[u(t+\tau) - u(t-\tau)\right]$

延时冲激 $\delta(t-t_0)$.

☆ 性质：1) $\boxed{x(t)\,\delta(t-t_0) = x(t_0)\,\delta(t-t_0) \quad \text{(反正其它地方全是0)}}$ 抽样性质

注意结果仍然应当是函数，勿忘 $\delta(t-t_0)$

$\Rightarrow x(t-T_0)\,\delta(t-T_1) = x(T_1-T_0)\,\delta(t-T_1)$

e.g. $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = x(t_0)$ $\int_{-2}^{2} x(t)\,\delta(t-3) = 0$.

2) 偶函数：$\delta(t) = \delta(-t)$

3) $\boxed{\text{比例特性：} \delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)}$
(尺度变换特性)
(定义2. 证明之)

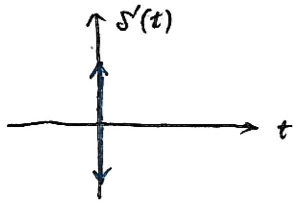
4) 积分特性：$\int_{-\infty}^{t} k\delta(\tau)\,d\tau = ku(t)$

5) 卷积特性：$x(t) * \delta(t) = x(t)$

$x(t) * \delta(t-T_0) = x(t-T_0)$

* $\delta(t)$ 复合函数不作要求

⑦ $\boxed{\text{冲激偶函数}}$ $\delta'(t)$



性质：(1) $\delta'(t) = \dfrac{d\delta(t)}{dt}$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t)\,dt = 0$

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t) f(t)\,dt = -f'(0)$ 分部积分法

$\boxed{(4)\ f(t)\,\delta'(t) = f(0)\,\delta'(t) - f'(0)\,\delta(t)}$

[证] $\because f(t)\,\delta(t) = f(0)\,\delta(t)$. 两边求导，得：

$f'(t)\,\delta(t) + f(t)\,\delta'(t) = f(0)\,\delta'(t)$

$\Rightarrow f(t)\,\delta'(t) = f(0)\,\delta'(t) - f'(t)\,\delta(t)$

$= f(0)\,\delta'(t) - f'(0)\,\delta(t)$ □

e.g. $y(t) = \dfrac{d}{dt}\left[e^{-t+1}\delta(t)\right]$ ← 一般先乘法再运算更方便

① $= \dfrac{d}{dt}\left[e^{+1}\delta(t)\right] = e\,\delta'(t)$ □

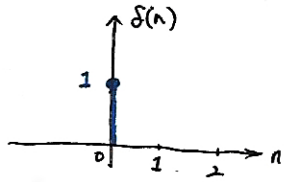
② $= -e^{-t+1}\delta(t) + e^{-t+1}\delta'(t)$

$= \cancel{-e\,\delta(t)} + e\cdot\delta'(t)\,\cancel{+e^{+1}}\,\delta(t)$

$= +e\cdot\delta'(t)$ □

2) 常用离散时间信号

① $\boxed{\text{单位样值信号}}$ $\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$ → 抽样性：$f[n]\,\delta[n] = f[0]\,\delta[n]$



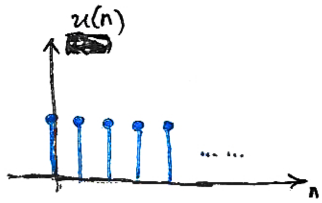
延时样值：$\delta[n-j]$

* 中括号表示 n 是序列，小括号表示取值．之后不作区别．
（离散时间序列）

单位样值信号可用于表示任意离散时间序列：$x[n] = \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\,\delta[n-m]$ ～ 级数（函数项级数）

↑ 在m时刻取值

② $\boxed{\text{单位阶跃序列}}$ $u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$



关系1. $u[n] = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$

$\delta(t) \underset{\text{微分}}{\overset{\text{积分}}{\rightleftharpoons}} u(t)$ $\delta[n] \underset{\text{差分}}{\overset{\text{累加}}{\rightleftharpoons}} u[n]$

关系2. $u(n) = \sum\limits_{m=-\infty}^{n} \delta[m]$

$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$
后项差分

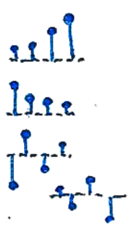
③ $\boxed{\text{矩形序列}}$ $R_N(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n < 0 \text{ 或 } n \geq N \end{cases} = u(n) - u(n-N)$

→ 单边序列：$x(n)\,u(n)$

④ $\boxed{\text{指数序列}}$：$x[n] = C\alpha^n$

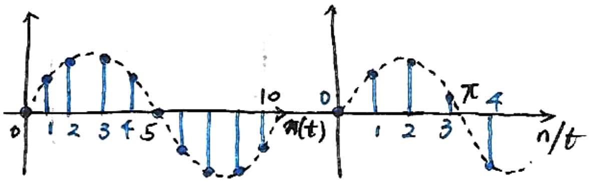
$\begin{cases} \alpha > 1 & \text{指数增长} \\ 0 < \alpha < 1 & \text{指数衰减} \\ -1 < \alpha < 0 & \text{摆动衰减} \\ \alpha < -1 & \text{摆动增长} \end{cases}$

前两种：直流信号；后两种：交流信号



⑤ $\boxed{正弦序列}$ $x[n] = \sin[n\omega_0]$ 为区分离散时间与连续时间，此后用 Ω_0 代替连续的 ω_0

余弦序列 $x[n] = \cos[n\omega_0]$



$f(t) = \sin(\Omega_0 t)$ 非周期

$\omega_0 \rightarrow$ 频率，表示两个相邻离散值之间的弧度变化量

Ω_0： rad/s 模拟角频率

ω_0： rad 数字角频率 $\longrightarrow$ $g_1[n] = \cos\frac{2}{5}\pi n = g_2[n] = \cos\frac{12}{5}\pi n$.

↓

序列随 ω_0 变化以 2π 为周期

数字角频率与序列的"周期"未必一致

对应的模拟"周期"

对比连续与离散信号（正弦信号）：

(1) $x(t) = e^{j\Omega_0 t}$. $x[n] = e^{j\omega_0 n}$

$\Omega_0\uparrow$，振荡频率↑ $\omega_0\uparrow$，振荡频率不一定↑. $\omega_k = \omega_0 + 2k\pi \Rightarrow e^{j\cdot 2\pi kn} = 1$.

$e^{j\omega_k n} = e^{j\omega_0 n}$.

有效频率只有 $[0, 2\pi)$ 区间，且 $0 \rightarrow \pi$，频率↑

$\pi \rightarrow 2\pi$ 振荡频率↓（发生逆转）

(2) 周期性： $x(t) = e^{j\Omega_0 t}$

$x[n] = e^{j\omega_0 n}$.

$x[n+N] = x[n] \Rightarrow e^{j\omega_0 N} = 1$.（条件）

ω_0 为 π 的有理数倍时，才能有周期

- 计算与变换

1) 加法 $\longrightarrow$ 加性噪声 $f_1(t) + f_2(t)$

2) 乘法 乘性噪声 $f_1(t)\cdot f_2(t)$ "调制"

3) 平移 $f(t - t_0)$ （时移/频移）

4) 反转 $f(-t)$ * 物理不可实现，更像是Trick

5) 尺度变换 $f(at)$ $\begin{cases} a>1: & 压缩 \\ a<1: & 扩展 \end{cases}$

* 变换只对 t 有效，对其后常数无效

e.g. $f(t) \rightarrow f(-3t - \frac{1}{2})$

① ✓： $f(t) \rightarrow f(t - \frac{1}{2}) \rightarrow f(-3(t + \frac{1}{2}))$

② ✗： $f(t) \rightarrow f(t + \frac{1}{2}) \not\rightarrow f(-3(t + \frac{1}{2}))$

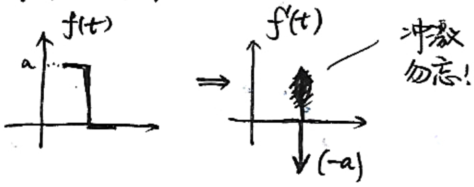
$x(t) \nearrow x(\frac{t}{a}) \longrightarrow x(\frac{t - t_0}{a})$

$\searrow x(t - \frac{t_0}{a}) \rightarrow x(\frac{t}{a} - \frac{t_0}{a})$

$x(at+b) \longrightarrow x(t) = ?$

令 $\tau = at + b \Rightarrow t = f(\tau)$

6) 微分和积分



* 信号写成含 $u(t)$ 形式再求导. 不易出错

离散: 加. 乘. 移位 . $z[n]=x[n+m]$ 倒置.

差分 $\begin{cases} \text{前向差分} & \Delta x[n]=x[n+1]-x[n] \\ \text{后向差分} & \nabla x[n]=x[n]-x[n-1] \end{cases}$

累加 $\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] =: z[n]$

重排 (压缩. 扩展).

$x[n]\to x[an]$ / $x[n]\to x[\frac{n}{a}]$ 补足/去除某些点的值 (值为0)

- 分解

1) 直流分量 + 交流分量

2) 奇分量 + 偏分量 $\longrightarrow$ F.T.

任意实信号 $f(t)$. $f(-t)$ $\Big\} \Rightarrow$ $f_{even}=\frac{f(t)+f(-t)}{2}$ $f_{odd}=\frac{f(t)-f(-t)}{2}$

e.g. $\begin{cases} \cos\omega t=\dfrac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2} \\ \sin\omega t=\dfrac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j} \end{cases}$

3) 脉冲分量分解

→ 离散: $x[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\,\delta[n-m]$

→ 连续: $f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau$

4) 正交函数分解

定义函数空间的内积: 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上内积 $\boxed{\langle f, g^* \rangle=\int_a^b f(x)g(x)\,dx}$

$g_i(t)$ 是一组基函数 . 则N项的组合对 $x(t)$ 展开: $x(t)\approx a_1g_1(t)+\cdots+a_Ng_N(t)$

—共轭 (复信号)

$$\langle x(t), g_1^*(t)\rangle = a_1\langle g_1, g_1^*\rangle + a_2\langle g_2, g_1^*\rangle + \cdots + a_N\langle g_N, g_1^*\rangle$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\langle x(t), g_N^*(t)\rangle = a_1\langle g_1, g_N^*\rangle + a_2\langle g_2, g_N^*\rangle + \cdots + a_N\langle g_N, g_N^*\rangle$$

当基函数正交 即 $\forall\, m\neq n$. $\langle g_m, g_n^*\rangle=0$ $\longrightarrow$ 对角矩阵. 求解容易

此外, 新增 $(N+1)\sim M$ 项以优化精度时也无需重算 $a_1\sim a_N$ (对角矩阵!)

《信号与系统》中 选取 $\{e^{jk\omega_0 t}\}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 为基函数.

可证明这组基函数是完备的.

• 系统的描述与分类

$\text{inputs (激励)} \longrightarrow \boxed{Sys} \longrightarrow \text{Outputs (响应)}$

用数学模型描述 $\left\{ \begin{array}{l} \text{表达式} \\ \text{框图} \\ \text{波形} \end{array} \right.$

器件: 加法器. 乘法器. 标量乘法器(数乘器). 积分器. 延时器. etc.

$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{Cont Sys}} \longrightarrow y(t)$ $\qquad$ $x[n] \longrightarrow \boxed{\text{Disc Sys}} \longrightarrow y[n]$

$\boxed{\text{因果性}}$ (causality)

$$y(t) = f[\,x(t),\ x(t-1),\ \cdots\ x(-\infty)]$$ 与未来的输入无关

只与当前及该时刻之前的输入有关

* 是否因果与物理能否实现未必相关 (离散系统可能延后信号)

e.g. $y(t) = x(t) + x(2-t)$ 非因果系统 (取$t=0$)

$y(t) = x(t)\cos(t+1)$ 因果系统

↑ 非输入!

$y(t) = x_1(t)\,x_2(t+1)$ $\quad x_2(t) = \cos(t)$ 非因果系统

$\boxed{\text{因果信号}}$ $t=0$后才接入系统的信号 ($t<0$时值为0). $c(t)$ $\longrightarrow$ $\boxed{\text{反因果信号}}$ $c(-t)$.

$\xrightarrow{\text{因果信号}}$ 因果系统 $\xrightarrow{\text{因果响应}}$

(Stability)

$\boxed{\text{稳定性}}$ 输入有界时输出也有界. 即 $\left|\begin{array}{c} x(t) \\ \text{或} \\ x(n) \end{array}\right| < \infty$, $\left|\begin{array}{c} y(t) \\ \text{或} \\ y(n) \end{array}\right| < \infty$.

Bounded Inputs, Bounded Output (BIBO).

$\boxed{\text{时不变性}}$ $\quad x(t) \longrightarrow y(t).$ $\quad x(t-t_0) \longrightarrow y(t-t_0)$

(*移不变性) $\quad x[n] \longrightarrow y[n]$ $\quad x[n-n_0] \longrightarrow y[n-n_0]$

e.g. $y(t) = x(2t)$.

时变系统

$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{尺度变换}} \longrightarrow x(2t) =: y(t)$

时移 $x(t-t_0) \longrightarrow x(2t-t_0) =: y(t-\frac{t_0}{2})$

变换只对t起效.

时变

$$y(t) = \int_{-\infty}^{5t} x(\tau)\, d\tau$$ 时变

$\boxed{\text{线性}}$ (Linearity): 若 $\begin{array}{l} x_1(t) \rightarrow y_1(t) \\ x_2(t) \rightarrow y_2(t) \end{array}$. $\quad a x_1(t) + b x_2(t) \longrightarrow a y_1(t) + b y_2(t)$. (可加性+齐次性)

e.g. $y(t) = \mathrm{Re}\ x(t)$. 非线性. $\longrightarrow a=j$.

* $\boxed{\text{增量线性}}$: $\Delta x(t)$ 与 $\Delta y(t)$ 有线性关系.

e.g. 静态工作点

线性时不变系统的时域分析

（LTI 系统）

LTI系统：Linear Time-Invariant System

$x(t)=\sum_i a_i x_i(t) \longrightarrow \sum_i a_i y_i(t)$　　线性性 $\begin{cases}\text{齐次性}\\ \text{可加性}\end{cases}$

$x_i(t) \Rightarrow y_i(t)$

- 离散 LTI 系统输入信号的分解

$x[n]=\sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i)\,\delta[n-i]$

序列　　值　序列　单位样值信号

（分解为单位样值信号及其移位的线性组合）

线性：$\sum \delta[n-i] \longrightarrow \sum h[n-i]$

时不变：$\delta[n]$ 的移位关系 $\longrightarrow h[n]$ 移位关系

此时若已知 $\delta[n]\longrightarrow h[n]$．　$x[n]$．

则有输出 $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k) =: x[n]*h[n]$ 称 $\boxed{\text{卷积和}}$

单位样值响应

信号作用的时刻（求和变量）　　求和中是参变量（视作参数）观察响应的时刻

$x[n]\cdot\delta[n]=x(0)\delta[n]$

v.s.

有 $x[n]=x[n]*\delta[n]$．

特别地，$x[n]=0\ (n<0)$ 时 有 $y[n]=\sum_{k=0}^{+\infty} x(k)h(n-k)$

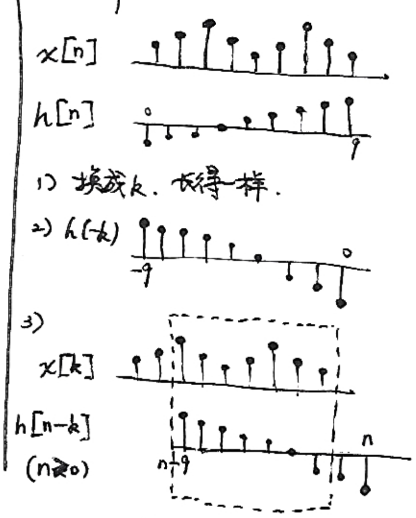
因果序列

$h[n]=0\ (n<0)$ 时 有 $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} x(k)h(n-k)$　　因果系统

因果序列

$x[n]$．$h[n]$ 均因果序列．$y[n]=\sum_{k=0}^{n} x(k)\,h(n-k)$．

图解法



乘积累加 得 y(n)值．

⇒ 1) 确定n范围　2) 确定n范围下k求和的区间．

题．$x(n)=\begin{cases}1 & 0\le n\le 4\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$　　$h[n]=\begin{cases}\alpha^n & 0<\alpha<1,\ 0\le n\le 6\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$

卷积和性质：1) $x[n]*\delta[n-n_0]=x[n-n_0]$

→ 对有限长的序列．把该序列拆成 $\delta[n-k]$ 的线性组合 → 利用性质1) 和另一序列卷积．

一般地，有：x_1 长度 n_1，x_2 长度 n_2．x_1*x_2 长度 n_1+n_2-1．

* z变换

$\boxed{\text{离散卷积}}$的性质 $\begin{cases}\text{交换律、结合律、分配律}\\ \text{差分}\quad \nabla x[n]\rightarrow \nabla y[n]．\quad \text{累加}\quad \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]\rightarrow \sum_{k=-\infty}^{n} y[k]\\ \text{移位}\quad x[n-n_0]\rightarrow y[n-n_0]\ (\text{TI})\\ x[n]*\delta[n-n_0]=x[n-n_0]．\quad (n_0\text{可取}0)\end{cases}$

$x[n]\rightarrow\boxed{\text{LTI}}\rightarrow y[n]$

题. $n<N_1$ 时 $x[n]=0$; $n<N_2$ 时 $h[n]=0$. 当 $n<N_1+N_2$ 时, $x[n]*h[n]=0$. (✔)

[解] $h[n]=h[n]u[n-N_2]$ $\quad x[n]=x[n]u[n-N_1]$

$$s[n]=x[n]*h[n]=x[n]u[n-N_1]*h[n]u[n-N_2]=\sum_{k=N_1}^{n-N_2}x[k]h[n-k]$$

若 $y[n]=x[n]*h[n]$. 则 $y[n-1]=x[n-1]*h[n-1]$. (×)

[证明其误] $x[n-1]*h[n-1]=x[n]*\delta[n-1]*h[n]*\delta[n-1]$

$$=y[n]*\delta[n-2]=y[n-2]\neq y[n-1].$$

若 $y[n]=x[n]*h[n]$. 则 $y[-n]=x[-n]*h[-n]$ (√)

[解] $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)h[n-k]$, $y[-n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)h[-n-k]$.

$$x[-n]*h[-n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(-k)h[-n+k]\xlongequal{\text{记}t=-k}\sum_{t=+\infty}^{-\infty}x(t)h[-n-t]$$ □

$\boxed{\text{解卷积(反卷积)}}$ 已知 $y[n]$ $(=x[n]*h[n])$ $\begin{cases}\text{已知 } x[n]. \text{ 求 } h[n] \\ \text{已知 } h[n]. \text{ 求 } x[n] \quad \text{信号恢复.}\end{cases}$

$$\begin{pmatrix}y_0\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}h_0 & 0 & \cdots & 0\\ h_1 & h_0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ h_n & h_{n-1} & \cdots & h_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

其中 $\alpha_i=\alpha[i]$.

$$\Rightarrow x[i]=\left(y[i]-\sum_{k=0}^{n-1}x(k)h[n-k]\right)/h(0)$$

$$h[i]=\left(y[i]-\sum_{k=0}^{n-1}h(k)x[n-k]\right)/x(0)$$

- 连续时间LTI系统的卷积积分

$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$ 若 $\delta(t)\to h(t)$. 则 $y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$.

e.g. 小波变换: $y(t)=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\omega\left(\frac{\tau-t}{a}\right)d\tau$. $\left(h(t)=\frac{1}{\sqrt{a}}\omega\left(-\frac{t}{a}\right)\right)$

相关运算 $R_{12}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x_1(\tau)x_2^*(\tau-t)d\tau=x_1(t)*x_2^*(-t)$

性质: 1) 交换律. 结合律 $\quad x(t)*h_1(t)*h_2(t)=x(t)*(h_1(t)*h_2(t))$ (串联系统)

2) 分配律: $x[n]\,(t)*(h_1[n]\,(t)+h_2[n]\,(t))=x[n]\,(t)*h_1[n]\,(t)+x[n]\,(t)*h_2[n]\,(t)$ (并联系统) * 叠加原理?

3) 微积分: $x(t)*h(t)=y(t)\Rightarrow x'(t)*h(t)=x(t)*h'(t)=y'(t)$

$$\Rightarrow\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau*h(t)=x(t)*\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}y(\tau)d\tau$$

* 为方便计算:

$y(t)=x(t)*h(t)=x'(t)*\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau$

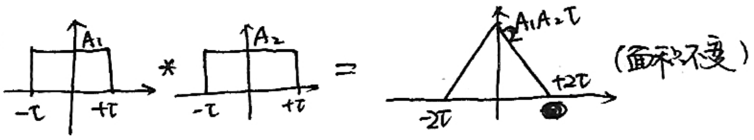
$$\Rightarrow x(t-t_0)*h(t)=x(t)*h(t-t_0)=y(t-t_0)$$

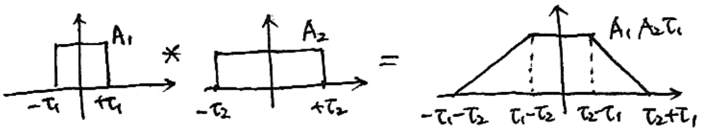
4) $f(t) * \delta(t) = f(t)$, $f(t) * \delta(t-t_0) = f(t-t_0)$. $f(t) * \delta'(t) = f'(t)$

$f(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,d\tau$

卷积积分：$x_1(\tau).\ x_2(-\tau) \xrightarrow[\text{时移}]{} x_1(\tau)x_2(t-\tau)$. 叠加求和 $\int x_1(\tau)x_2(t-\tau)\,d\tau$

常用卷积：

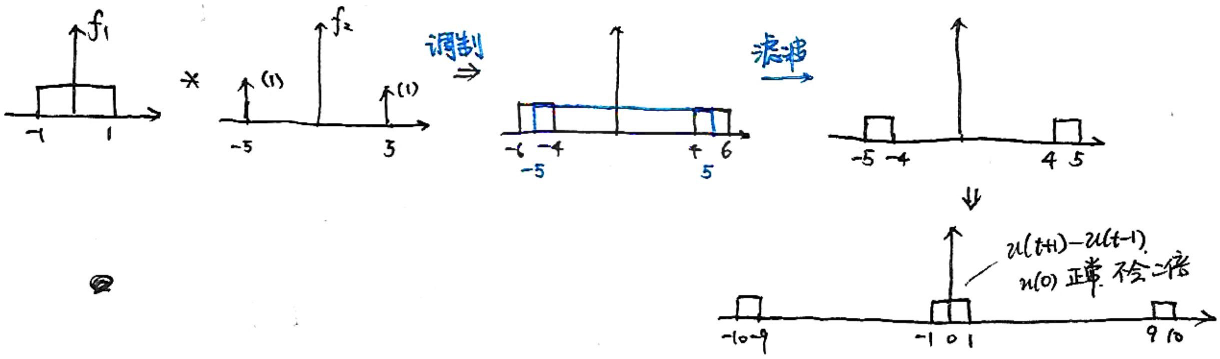




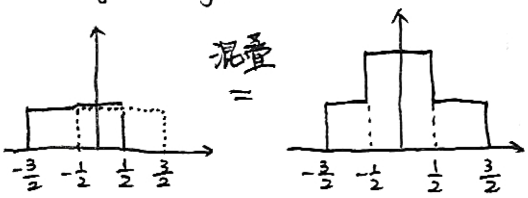
Trick：微分 → 冲激.

e.g. $f_1(t) = u(t+1) - u(t-1)$, $f_2(t) = \delta(t+5) + \delta(t-5)$. $f_3(t) = \delta(t+\frac{1}{2}) + \delta(t-\frac{1}{2})$

[解] (1) $[f_1(t) * f_2(t)] \cdot [u(t+5) - u(t-5)] * f_2(t)$



(2) $f_1(t) * f_3(t)$



- 脉冲响应分析

LTI系统可由单位冲激/样值响应来表征. → LTI系统的特性应有在响应中体现

1) 因果性的体现： * 因果信号 vs 因果系统. 因果性

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\,h[n-k]$$ → 因果性要求 $k>n$ 即 $n-k<0$ 时：$h(n-k)=0$

即：单位样值响应是 $\boxed{\text{因果信号}}$. → 系统因果性体现

类似可知 对连续的情况， 单位冲激响应是 $\boxed{\text{因果信号}}$

* 直观理解：$\delta(t)$ 在 $t=0$ 时才有有效输入. ~ $h(t)$ 在 $t=0$ 之后才能有输出. 即 因果信号

2) 稳定性的体现：

$$|y[n]| = \left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x(n-k)\right| \leq B \sum_{k} |h[k]|$$

有界. 称绝对可和 ⇔ LTI系统稳定的充要条件.

类似地，$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|\,d\tau < \infty$ 绝对可积

e.g. $y(t)=\int_0^1 x(t-\tau)\,d\tau$. 判断系统的因果性、稳定性.

连续时间LTI系统

[解] 1) LTI.Sys. 故有 $y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)h(\tau)\,d\tau$ 对比可知 $h(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & 0\le t\le 1\\ 0, & t>1\end{cases}$ $=u(t)-u(t-1)$

2) 可见 $h(t)$ 是因果信号 且 绝对可积 $\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|\,dt=1<\infty\right)$

故该系统因果且稳定 □

- 单位阶跃响应

$$g(t)\overset{1}{=}\int_{-\infty}^{t} h(\tau)\,d\tau$$
$$\overset{2}{=} u(t)*h(t)$$

- 用LCCDE（线性常系数微分或差分方程）描述的因果LTI系统

Linear Constant Coefficient Differential Equation

1) 差分方程求解：时域经典法

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k)=\sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$ ~ N阶差分方程　　* 类比线代

① 特征根　$\sum_{k=0}^{N} a_k \lambda^{N-k}=0 \longrightarrow N$个特征根 $\{\lambda_k\}$　　* $Ax=0$ 的解空间

e.g. $y(n-4)-2y(n-3)+4y(n-2)-8y(n-1)+y(n)=0$

$1\quad -2\lambda \quad + \quad 4\lambda^2 \quad -8\lambda^3+\lambda^4=0 \longrightarrow \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$

② 齐次解 → 也称 $\boxed{\text{固有频率}}$ 或 $\boxed{\text{自由频率}}$ ~ 决定系统自由响应的全部形式

(α) 各不相同（无重根）. $y_h(n)=\sum_{k=1}^{N} C_k\lambda_k^n$

C_k：待定常系数 ⟵ 最后全解代入初始值求

若有根为L次重根. 该项对应改为 $\left(\sum_{j=1}^{L} C_j n^{L-j}\right)\lambda_k^n$.　e.g. $\underbrace{(c_1+c_2n+c_3n^2)}_{\text{多3个代数方程}}\cdot(\lambda^*)^n$

(β) 共轭根（复根）.

写成 $C_1(\alpha+j\beta)^n+C_2(\alpha-j\beta)^n$

或 $\lambda_1=Ae^{j\beta}$. $\lambda_2=Ae^{-j\beta} \longrightarrow A^n(C_1\cos\beta n+C_2\sin\beta n)$

③ 特解（强迫响应）⟵ 只与激励函数形式相关

右边化简后自由项. （认为不是特征根是0重特征根）

	$\delta[n]$	~	0
$\sum u[n]$ 有的时候可视作 →	const	1是k重根	An^k
但对n(t)有断间要求	n的p次多项式		n^k(n的p次…)
	α^n	α是k重根	

代入左边 y[n] 求解.

* $A\gamma^*=\beta$
↑ 特解

$\gamma=\gamma_0+\gamma^*$
齐次　特

e.g. $y(n)-y(n-1)-2y(n-2)=x(n)+2x(n-2)$. LTI因果系统

求该系统的单位样值响应.

[解] 令 $x(n)=\delta(n)$　　潜在条件: $y(-1)=y(-2)=0$, (因果性)

$\lambda^2-\lambda-2=0$　　$\lambda_1=-1$, $\lambda_2=2$　　记齐次解 $y_h(n)=C_1(-1)^n+C_2\cdot 2^n$

$n\geq 1$ 时, $x(n)=0 \longrightarrow$ 视作常值.　特解 $D_n=D_0$ 代入左边.

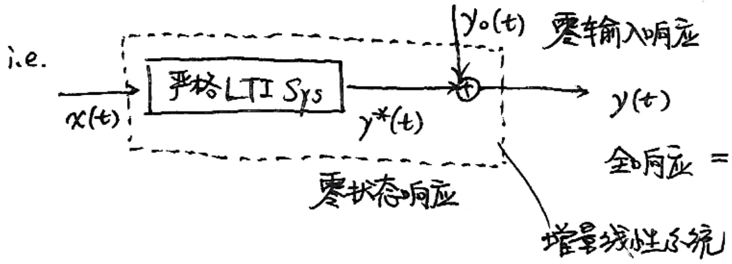
$D_0-D_0-2D_0=0 \Rightarrow D_0=0$

全解 $y(n)=C_1(-1)^n+C_2\cdot 2^n+0$

$$\begin{cases} -C_1+C_2\cdot\frac{1}{2}=y(-1)=0 \\ C_1+C_2\cdot\frac{1}{4}=y(-2)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1= \\ C_2= \end{cases}$$

LCCDE 描述的实际上是增量线性系统: 非零初始状态去除后即严格线性.

i.e.



全响应 = 零输入响应 + 零状态响应

齐次解　　初始值置为0的解.

$n<0$ 时也有输出 $\longrightarrow$ 但无意义. ($n=0$ 才有输入)

- Fourier 级数表示

为何选用三角函数? $\{1, \sin n\omega_1 t, \cos n\omega_1 t\}$ 是完备的正交函数集

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos n\omega t \sin n\omega t \, dt = 0 \quad (\text{正交})$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos n\omega t \cos m\omega t \, dt = \begin{cases} T/2 & (m=n) \\ 0 & (m\neq n)\ (\text{正交}) \end{cases}$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin n\omega t \sin m\omega t \, dt = \begin{cases} T/2 & (m=n) \\ 0 & (m\neq n)\ (\text{正交}) \end{cases}$$

似乎求正/余弦响应也有点麻烦?

复指数信号 e^{st}　$(s=\sigma+j\omega)$.　令 $\sigma=0 \Rightarrow e^{st}=e^{j\omega t}=\cos\omega t+j\sin\omega t$

$$\Rightarrow s(t)=e^{j\omega t}*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)e^{j\omega(t-\tau)}d\tau=e^{j\omega t}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau}_{\text{与t无关. 常数}}$$

复指数信号的响应

发现: 类似 $\underset{h(t)*}{A}\ \underset{e^{j\omega t}}{x}=\underset{\text{常}}{\lambda}\ \underset{e^{j\omega t}}{x}$ $\longrightarrow$ $e^{j\omega t}$ 是所有LTI系数的特征函数.

复指数函数形式的 Fourier 级数: $\{e^{jn\omega t}\}$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\underbrace{X(n\omega_1)}_{\text{待定系数}}\cdot e^{jn\omega_1 t}$$　周期 T_1　角频率 $\omega_1=\frac{2\pi}{T_1}$.

└ 求系数: 与谁作内积, 得谁的系数　　$\langle x(t), e^{-jn\omega_1 t}\rangle=\langle\sum\cdots, e^{-jn\omega_1 t}\rangle$

$X(0)=\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} x(t)\,dt$ （直流分量） ← 方向不变即为直流信号 e.g. 

对复数，内积是乘上共轭：$\langle e^{jn\omega_1 t}, e^{-jn\omega_1 t}\rangle$

$$X(n\omega_1)=\frac{\int_0^{T_1} x(t)\,e^{-jn\omega_1 t}\,dt}{\int_0^{T_1} e^{jn\omega_1 t}e^{-jn\omega_1 t}\,dt}=\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} x(t)\,e^{-jn\omega_1 t}\,dt \quad (n\neq 0)$$

复数 $=|X(n\omega_1)|\,e^{j\varphi_n}$

$|X_n|\sim\omega$：幅度频谱图． $\varphi_n\sim\omega$：相位频谱图．

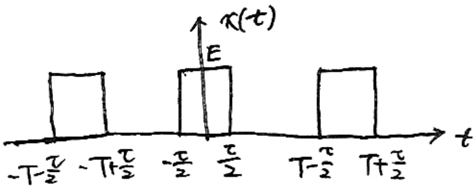
关于 $n\omega_1$ 的偶函数　　关于 $n\omega_1$ 的奇函数

$n=0$：直流分量　　$n=1$：基波分量 (Fundamental)　　$n\geq 2$：高次谐波

与 Fourier 展开：$x(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t+\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t$． 关系？

$X(0)=a_0$．　　$X(n\omega t)=a_n-j\,b_n$.

- 周期矩形脉冲．

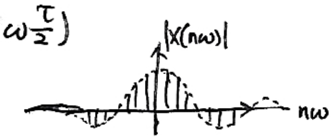


$$X(0)=\frac{1}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} E\,dt=\frac{E\tau}{T}$$

$$X(n\omega)=\cdots=\frac{E}{T}\frac{1}{-jn\omega}e^{-jn\omega t}\Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}=\frac{2E}{n\omega T}\sin\left(n\omega\frac{\tau}{2}\right)$$

偶函数 → $X(n\omega)$ 只有实部

$$=\frac{E\tau}{T}\frac{\sin\left(n\omega\frac{\tau}{2}\right)}{n\omega\frac{\tau}{2}}=\frac{E\tau}{T}\,Sa\left(n\omega\frac{\tau}{2}\right)$$

包络线：抽样信号 

零点位置：$\frac{2\pi}{\tau}$ 与 T_1 无关．

$T\uparrow$，变密集（间隔↓）．纵向压缩．　$T\to\infty$：变为连续

$\tau\downarrow$　间隔不变．零点远离原点．纵向压缩

＊负数的时候是 π / $-\pi$

为了让相位频谱图自洽．

$\omega<0$：负数 $-\pi$；$\omega>0$：负数 π

- 频带宽度

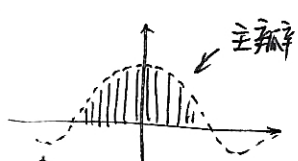
$\boxed{\text{Paseval 定理}}$

时域求功率　　频域求功率

$$\frac{1}{T_1}\int_{T_1}|x(t)|^2\,dt=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|X(n\omega_1)|^2.$$

（一个周期）

[证明] $\frac{1}{T_1}\int_{T_1}\left|X(n\omega_1)e^{jn\omega t}\right|^2 dt=|X(n\omega_1)|^2.$

e.g. 

满足一定失真条件下，信号可用某频段内的信号表示．该频率范围称频带宽度．

一般将首个零点作为频带宽度．　$B_\omega=\pm\frac{2\pi}{\tau}$　　$B_f=\frac{1}{\tau}$．

连续时间的 Fourier 变换

$T_1 \to +\infty$ 时，周期信号 → 非周期信号．　$T_1 \cdot X(n\omega_1) = \dfrac{X(n\omega_1)}{f}$：单位频带上频谱值，频谱密度

$$X(\omega) = \lim_{T_1\to\infty} T_1 X(n\omega_1) = \lim_{T_1\to\infty}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} x(t)e^{-jn\omega_1 t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = |X(\omega)|e^{j\phi(\omega)}$$

$$\omega_1 \to d\omega.\quad n\omega_1 \to \omega$$

$$X(\omega) = \lim_{T_1\to\infty} T_1 X(n\omega_1) = \lim_{T_1\to\infty}\frac{X(n\omega_1)}{\omega_1}\cdot 2\pi \Rightarrow \lim_{T_1\to\infty}\frac{X(n\omega_1)}{\omega_1} = \frac{X(\omega)}{2\pi}$$

$$\therefore x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

常见信号的变换：

(1) 矩形脉冲信号

$$X(\omega) = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} Ee^{-j\omega t}dt = \frac{E}{-j\omega}e^{-j\omega t}\Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{E\tau}{\omega\tau/2}\,\frac{e^{j\omega\frac{\tau}{2}} - e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}}{2j}$$

$$= E\tau\,\frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} = E\tau\, Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

连续化，$n\omega_1 \to \omega$

v.s. 周期　$X_T(\omega) = \dfrac{E\tau}{T} Sa\left(\dfrac{n\omega_1\tau}{2}\right)$

这里 $X(\omega)$ 是密度，T 被乘掉了

(2) 指数信号　$x(t) = e^{-\alpha t}u(t)$　（完整指数信号不收敛）$(\alpha>0)$　单边指数信号

$$X(j\omega) = \int_0^\infty e^{-\alpha t}e^{-j\omega t}dt = \frac{1}{\alpha + j\omega}.$$

$x(t) = e^{-\alpha|t|}$ $(\alpha>0)$　$X(j\omega) = \dfrac{1}{\alpha+j\omega} + \dfrac{1}{\alpha - j\omega} = \dfrac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$

(3) 冲激信号　$x(t) = \delta(t)$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}dt = 1. \longrightarrow \delta(t)\text{ 包含了所有的频率成分}$$

时域上的局部信息在频域上被 FT 模糊化．

(4) 直流分量　$x(t) = E$．　本身不绝对可积．→ 提出广义定义．

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E\,\delta(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{E}{2\pi} \Rightarrow \text{认为 } x(t) = E \xleftrightarrow{F.T.} 2\pi E\delta(\omega)$$

$\omega=0$ 处频谱密度为 ∞．

时域上无限宽　　频带无限窄

(5) $x(t) = \operatorname{sgn} t = \begin{cases} 1 & t>0 \\ 0 & t=0 \\ -1 & t<0 \end{cases}$.

$$X(j\omega) = \lim_{\alpha\to 0}\left(\int_{-\infty}^{0} -e^{\alpha t}e^{-j\omega t}dt + \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}e^{-j\omega t}dt\right)$$

$\alpha \to 0$. $e^{-\alpha t} \to 1$.

$$= \lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{-2j\omega}{\alpha^2+\omega^2}\right) = \frac{2}{j\omega}$$

(6) 阶跃信号 $u(t)=\frac{1}{2}(1+\operatorname{sgn}(t))$ $\mathcal{F}(u(t))=\mathcal{F}(\frac{1}{2})+\mathcal{F}(\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t))=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$

$\omega=0$时. $\frac{1}{j\omega}\to\infty$. $=\begin{cases}\pi\delta(\omega). & \omega=0\\ \frac{1}{j\omega} & . \ \omega\neq0\end{cases}$

性质: ①线性性. $\mathcal{F}(c_1x_1(t)+c_2x_2(t))=c_1\mathcal{F}(x_1(t))+c_2\mathcal{F}(x_2(t))$

②时移性. $\mathcal{F}(x_1(\underset{\substack{\uparrow\\ \text{同号}}}{t-t_0}))=\mathcal{F}(x_1(t))\,\underset{\substack{\uparrow\\ \text{共轭}}}{e^{-j\omega t_0}}$ 则有 $|\mathcal{F}(x_1(t-t_0))|=|\mathcal{F}(x_1(t))|\cdot1$

$\Delta\varphi=-\omega t_0$

时移 不改变幅频. 只改变相频.

③ 共轭对称性 $\mathcal{F}(x(t))=X(\omega)$ $\overset{\text{共轭}\downarrow}{\mathcal{F}}(\overset{*}{x}(t))=\overset{*}{X}(-\omega)$

[证] $\overset{*}{X}(\omega)=\left[\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt\right]^*=\int_{-\infty}^{+\infty}[x(t)e^{-j\omega t}]^*dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\overset{*}{x}(t)e^{j\omega t}dt$

$\therefore\mathcal{F}(\overset{*}{x}(t))=\int_{-\infty}^{+\infty}\overset{*}{x}(t)e^{-j\omega t}dt=\overset{*}{X}(-\omega).$ □

* 原始共轭对称性 $\mathcal{F}$

若 $x(t)$ 为实数, $\Leftrightarrow$ 则有 $X(-\omega)=\overset{*}{X}(\omega)$ $\Rightarrow$

$\operatorname{Re}X(\omega)=\operatorname{Re}X(-\omega)$ —— 偶函数

$\operatorname{Im}X(\omega)=-\operatorname{Im}X(-\omega)$ —— 奇函数

$X(j\omega)=\underset{\substack{\downarrow\\ \text{偶函数}}}{|X(\omega)|}\,e^{j\underset{\substack{\downarrow\\ \text{奇函数}}}{\angle X(\omega)}}$

$x(t)$为实偶函数. $X(-\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\underset{\substack{\parallel\\ x(+\tau)}}{x(-\tau)}e^{-j\omega\tau}d\tau$ $(\tau=-t,\ -1\cdot-1=1)$

$=X(\omega)$ 偶函数. 又有 $X(-\omega)=\overset{*}{X}(\omega)$. 是实偶函数.

$x(t)$ 为实奇函数 $\rightarrow$ $X(\omega)$ 为虚奇函数

$\mathcal{F}[\underset{\text{实部}}{x_e(t)}]=\operatorname{Re}X(\omega)$

$\mathcal{F}[\underset{\text{虚部}}{x_o(t)}]=\operatorname{Im}X(\omega)$

4.25

④ 微分与积分: $x(t)\xrightarrow{\mathcal{F}}X(\omega)$. 则 $\frac{dx(t)}{dt}\xrightarrow{\mathcal{F}}j\omega X(\omega)$. $x^{(n)}(t)\xrightarrow{\mathcal{F}}(j\omega)^nX(\omega)$

微分 代数运算

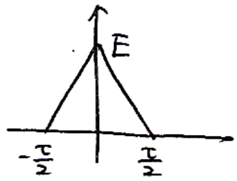
$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau\xrightarrow{\mathcal{F}}\frac{X(\omega)}{j\omega}$ $(\omega\neq0)\longrightarrow\omega=0$处要单独考虑

↓

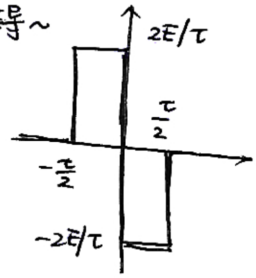
$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau\xrightarrow{\mathcal{FT}}\frac{X(\omega)}{j\omega}+\pi X(0)\delta(\omega)$

原因: $\underline{\underline{+C}}$. 积分结果是不定的

e.g.



① 求导~

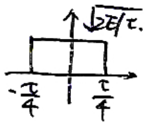


$$\mathcal{F}(x'(t)) = \frac{2E}{\tau}\cdot\frac{\tau}{2}Sa\left(\omega\cdot\frac{\tau}{4}\right)\cdot e^{-\frac{j\tau\omega}{4}} + -\frac{2E}{\tau}\cdot\frac{\tau}{2}Sa\left(\omega\cdot\frac{\tau}{4}\right)e^{\frac{j\tau\omega}{4}}$$

$$= 2E\,Sa\left(\omega\cdot\frac{\tau}{4}\right)j\sin\frac{\omega}{4}\tau$$

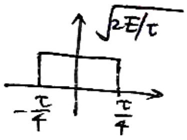
$$\mathcal{F}(x(t)) = \frac{2E}{\cancel{j\omega}}Sa\left(\omega\cdot\frac{\tau}{4}\right)\cancel{j}\sin\frac{\omega}{4}\tau = \frac{2E\tau}{4}Sa\left(\omega\frac{\tau}{4}\right)\frac{\sin\frac{\omega}{4}\tau}{\frac{\omega}{4}\tau} = \frac{E\tau}{2}Sa^2\left(\omega\frac{\tau}{4}\right)$$

② 拆卷积~ $x(t) =$



$x_1(t)$

$*$



$x_2(t)$

$$\mathcal{F}(x(t)) = \mathcal{F}(x_1 * x_2) = \mathcal{F}(x_1(t))\,\mathcal{F}(x_2(t))$$

$$= \sqrt{\frac{2E}{\tau}}\cdot\frac{\tau}{2}Sa\left(\omega\frac{\tau}{4}\right)\cdot\sqrt{\frac{2E}{\tau}}\cdot\frac{\tau}{2}Sa\left(\omega\frac{\tau}{4}\right)$$

$$= \frac{E\tau}{2}Sa^2\left(\omega\frac{\tau}{4}\right)$$

⑤ 尺度变换: $x(at) \xleftrightarrow{F.T.} \frac{1}{|a|}X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$ $\quad x(at-t_0) \xleftrightarrow{F.T.} \frac{1}{|a|}X\left(\frac{j\omega}{a}\right)e^{-j\frac{\omega}{a}t_0}$

⑥ 对偶性: $x(t) \xleftrightarrow{F.T.} X(j\omega)$ $\quad X(t) \xleftrightarrow{F.t.} 2\pi x(-\omega) =: x^*(\omega)$

[证] $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$ $\quad x(-t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j\omega t}X(\omega)\,d\omega$

即 $x(-\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j\omega t}X(t)\,dt$

$$\boxed{\text{e.g.}\quad Sa(\omega_c t) \xleftrightarrow[F.T.]{} \frac{\pi}{\omega_c}\left(u(\omega+\omega_c) - u(\omega-\omega_c)\right)}$$

e.g. $\frac{1}{t} \xleftrightarrow{F.t.} -j\pi\,sgn(\omega)$

⑦ 频域微分性质 $-jt\,x(t) \xleftrightarrow{F.t.} \frac{dX(j\omega)}{d\omega}$

e.g. $te^{-2t}u(t)$, $\quad\because e^{-2t}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2+j\omega}$, $\quad\therefore te^{-2t}u(t) \longleftrightarrow j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{2+j\omega}\right) = \frac{1}{(2+j\omega)^2}$

e.g. $(1-2t)x(1-2t) = x(1-2t) - 2t\,x(1-2t)$

$$\longleftrightarrow \frac{1}{2}X\left(-j\frac{\omega}{2}\right)e^{-j\frac{\omega}{2}} - 2j\frac{d}{d\omega}\left[\frac{1}{2}X\left(-j\frac{\omega}{2}\right)e^{-j\frac{\omega}{2}}\right]$$

不可换为 $\tau\,x(\tau)$! 只对 $t\,x(f(t))$ 有这一性质!

⑧ 频移性质. $e^{j\omega_0 t}x(t) \xleftrightarrow{F.T.} X(\omega-\omega_0)$

反号

e.g. $\cos\omega_0 t \leftrightarrow \pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$, $\quad x(t)\cos\omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2}\left(X(j(\omega+\omega_0))+X(j(\omega-\omega_0))\right)$

$\sin\omega_0 t \leftrightarrow j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$ $\quad x(t)\sin\omega_0 t \leftrightarrow \frac{j}{2}[X(j(\omega+\omega_0))-X(j(\omega-\omega_0))]$

⑨ Parseval's Thm.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|X(j\omega)|^2\,d\omega$$

⑩ 卷积性质

(1) $x_1(t) * x_2(t) \xleftrightarrow{F.T.} X_1(j\omega)X_2(j\omega)$

(2) $x_1(t)\cdot x_2(t) \xleftrightarrow{F.T.} \frac{X_1(j\omega)*X_2(j\omega)}{2\pi}$

此时系统 $h(t) \longleftrightarrow H(j\omega)$

单位冲激响应 "特征函数"

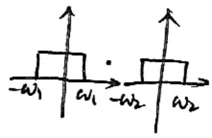
e.g. $x(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\,d\tau \xleftrightarrow{F.T.} X(\omega)\cdot\left[\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\right]=\frac{X(\omega)}{j\omega}+\pi X(0)\delta(\omega)$

e.g. $x(t)\cos\omega_0 t \xleftrightarrow{F.T.} \frac{1}{2\pi}X(j\omega)*\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]=\frac{1}{2}\left(X[j(\omega+\omega_0)]+X[j(\omega-\omega_0)]\right)$.

e.g. $\frac{\sin\omega_1 t}{\pi t} * \frac{\sin\omega_2 t}{\pi t}$ | 频域中: $\frac{\omega_1}{\pi}\frac{\pi}{\omega_1}\left(u(\omega+\omega_1)-u(\omega-\omega_1)\right)\frac{\omega_2\pi}{\pi\,\omega_2}\left(u(\omega+\omega_2)-u(\omega-\omega_2)\right)$

记 $\omega_m=\min\{\omega_1,\omega_2\}$

频域中: $u(\omega+\omega_m)-u(\omega-\omega_m) \xrightarrow{F.T.^{-1}} \frac{\sin\omega_m t}{\pi t}$.

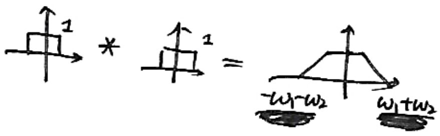


e.g. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega_1 t}{\pi t}\frac{\sin\omega_2 t}{\pi t}\,dt$

因此直接 Fourier Transform

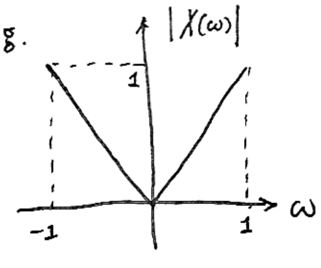
考虑到 $\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\,dt=X(0)$.

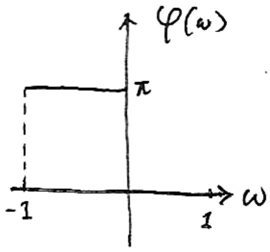
只用管 $X(0)$. $=\frac{2}{2\pi}\min\{\omega_1,\omega_2\}$



$$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega_1 t}{\pi t}\frac{\sin\omega_2 t}{\pi t}\,dt=\frac{1}{\pi}\min\{\omega_1,\omega_2\}.$$

e.g.





显然 $X(\omega)=\omega\,[u(\omega+1)-u(\omega-1)]$

$\Rightarrow x(t)=\cdots\cdots$

F1.

对偶性. $X_1(t)=t\,[u(t+1)-u(t-1)] \xleftrightarrow{F.T.} \frac{d}{d\omega}2Sa(\omega)\cdot j$

$=2j\frac{d}{d\omega}\frac{\sin\omega}{\omega}=2j\frac{\omega\cos\omega-\sin\omega}{\omega^2} \leftarrow$ "$x(\omega)$"

$\therefore x(t)=\frac{2j}{2\pi}\frac{(-t)\cos(t)-\sin(t)}{(-t)^2}=\frac{\sin t-t\cos t}{t^2}\cdot\frac{j}{\pi}$ □

F2. $\frac{dX(\omega)}{d\omega} = u(\omega+1)-u(\omega-1)+\omega\big(\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)\big) = u(\omega+1)-u(\omega-1)-\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)$

$\xrightarrow{(F.T.)^{-1}} 2Sa(\omega)-\frac{1}{2\pi}e^{-jt}-\frac{1}{2\pi}e^{jt}$. $\quad x(t) = -jt\left(2Sa(\omega)-\frac{1}{\pi}\cos t\right) = \cdots$

F3. $\frac{d^2X(\omega)}{d\omega^2} = \delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)-\delta'(\omega+1)-\delta'(\omega-1) \xrightarrow{IFT.} \frac{1}{2\pi}\left(e^{-jt}-e^{jt}+jte^{-jt}+jte^{-jt}\right)$

$= \frac{1}{\pi}(-j\sin t + jt\cos t)$

$/(jt)^2$ 相当于求两次积分

$\underline{\frac{1}{\pi t^2}(jt\cos t - j\sin t)}$ □

周期信号的 Fourier 变换

$\tilde{x}(t)$ 周期信号 $\xrightarrow{\text{Fourier展开}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(n\omega_1)e^{jn\omega_1 t} \xrightarrow{F.T.} \tilde{X}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(n\omega_1)\,\mathcal{F}[e^{jn\omega_1 t}]$

$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(n\omega_1)\,2\pi\,\delta(\omega-n\omega_1)$

$= 2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(n\omega_1)\,\delta(\omega-n\omega_1)$

冲激序列

取一个周期 $x_0(t) \xrightarrow{F.T.} X_0(\omega)$. $\Rightarrow$ $X_0(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} x_0(t)e^{-j\omega t}dt$

$X(n\omega_1) = \frac{1}{T_1}\int_{-T/2}^{T/2}\tilde{x}(t)e^{-jn\omega_1 t}dt.$

故 $X(n\omega_1) = \frac{1}{T_1}X_0(\omega)\Big|_{\omega=n\omega_1}$

e.g. 周期单位冲激序列. $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_1) =: \tilde{\delta}(t)$

F1. $\delta(t)\xrightarrow{F.T.} 1$. $\quad \delta_T(t)$: $X(n\omega_1) = \frac{1}{T_1}$. $\quad \delta_T(t)\xrightarrow{F.T.}\Delta_T(\omega) = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T_1}\delta(\omega-n\omega_1)$.

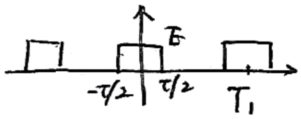
$= \omega_1\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-n\omega_1)$.

F2. 时移性质. $\mathcal{F}[\delta(t-nT_1)] = 1\cdot e^{-jnT_1\omega}$

则 $\Delta_T(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-jnT_1\omega}$

利用极限可以证明: $\sum_{\infty} e^{-jnT_1\omega} = \omega_1\sum_{\infty}\delta(\omega-n\omega_1)$

e.g. 周期矩形信号.



法1. 一个门 $\xrightarrow{F.T.}$ $E\tau Sa(\frac{\tau}{2}\omega) =: X_0(\omega)$

$X(n\omega_1) = \frac{1}{T_1} X_0(\omega)\Big|_{\omega=n\omega_1} = \frac{E\tau}{T_1} Sa(\frac{\tau}{2}n\omega_1)$ ← 直接 F.E. 也能得到.

$X_T(\omega) = 2\pi \sum_{\infty} \frac{E\tau}{T_1} Sa(\frac{\tau}{2}n\omega_1) = E\tau\omega_1 \sum_{\infty} Sa(\frac{\tau}{2}n\omega_1)\,\delta(\omega-n\omega_1)$.

法2. $\boxed{\tilde{x}(t) = x_0(t) * \tilde{\delta}_T(t)}$!!

时移性质. $\mathcal{F}[\tilde{x}(t)] = \mathcal{F}[x_0(t)]\,\mathcal{F}[\tilde{\delta}(t)] = E\tau Sa(\frac{\tau}{2}\omega)\cdot\omega_1\sum_{\infty} e^{-jnT_1\omega}$

$= E\tau\omega_1 \sum_{\infty} Sa(\frac{\tau}{2}n\omega_1)\,\delta(\omega-n\omega_1)$

Lab. 自相关 → $(1+\alpha^2)R_{xx}(0) + \alpha R_{xx}(\tau) + \alpha R_{xx}(-\tau)$

↑ 得出 α ↑ 得出 τ. ⟶ 估算

连续时间系统的频域分析 ← 相量法

$\xrightarrow[E(j\omega)]{e(t)} \boxed{Sys} \xrightarrow[R(j\omega)]{r(t)}$

$r(t) = e(t) * h(t)$

$R(j\omega) = E(j\omega)\cdot \underset{\uparrow\ 频率响应}{H(j\omega)}$

$H(j\omega) = \underset{系统的幅频特性}{|H(j\omega)|}\ \underset{系统的相频特性}{e^{j\varphi(\omega)}}$

$e(t) = e^{j\omega_0 t} \to$ ~~[illegible]~~ $\quad r(t) = e(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, e^{j\omega_0 (t-\tau)}\, d\tau$

$= e^{j\omega_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, e^{-j\omega_0 \tau}\, d\tau = e^{j\omega_0 t} H(j\omega)\big|_{\omega=\omega_0}$

$\uparrow$ 是 LTI Sys 的特征函数!

频率响应: 1) $h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(j\omega)$ 2) $H(j\omega) = \dfrac{R(j\omega)}{E(j\omega)}$ 3) $H(j\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega}$

$\uparrow$ Laplace 变换

e.g. $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = x(t)$.

$\to -\omega^2 Y(j\omega) + 5j\omega Y(j\omega) + 6Y(j\omega) = X(j\omega)$

$H(j\omega) = \dfrac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \dfrac{1}{-\omega^2 + 5j\omega + 6} = \dfrac{1}{(j\omega + \frac{5}{2})^2 - \frac{1}{4}} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \cdots\cdots$

实验上测 $h(t)$?

$\xrightarrow{e^{j\omega_0 t}} \boxed{Sys} \xrightarrow{H(j\omega)\, e^{j\omega_0 t}}$

扫频: ω → 对应的 $H(j\omega)$ (离散) → 连成一条曲线. $\Delta\omega \to 0$ 近似于连续

- 正弦激励下的系统稳态响应

$\boxed{h(t) \in \mathbb{R}\ \ \forall t}$

激励信号 $v_1(t) = \sin\omega_0 t$. $\quad H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$ 稳态响应 $v_2(t) = ?$

$V_1(\omega) = j\pi(\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0)) \to V_2(j\omega) = H(j\omega) V_1(j\omega)$

$= |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} j\pi(\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0))$

$|H(j\omega)|$ 偶函数. $\varphi(\omega)$ 奇函数.

冲激性质

$V_2(j\omega) = j\pi |H(j\omega_0)| e^{j\varphi(-\omega_0)} \delta(\omega+\omega_0) - j\pi |H(j\omega_0)| e^{j\varphi\omega_0} \delta(\omega-\omega_0)$

$= j\pi |H(j\omega_0)| e^{-j\varphi(\omega_0)} \delta(\omega+\omega_0) - j\pi |H(j\omega_0)| e^{j\varphi\omega_0} \delta(\omega-\omega_0)$

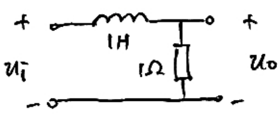
$\downarrow$

$v_2(t) = \frac{1}{2} |H(j\omega_0)|\, j\,[e^{-j\omega_0 t}\cdot e^{-j\varphi(\omega_0)} - e^{j\omega_0 t}\cdot e^{j\varphi(\omega_0)}] = \underset{\uparrow\ 幅度改变}{|H(j\omega_0)|} \sin(\omega_0 t + \underset{\uparrow\ 相位}{\varphi(\omega_0)})$

相量法的基础! (与 ω_0 无关)

e.g. $H(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega}$. (1) 输入 $\sin t$, $\sin 2t$ 时输出为? (2) 输入 e^{t} 时输出为? (3) 输入为 $(1+e^{-t})u(t)$ 输出为?

解: 实际电路:



$|H(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$. $\varphi(\omega)=\arctan\omega$

(1) $\sin t \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(t-45^\circ)$; $\sin 2t \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{5}}\sin(2t-\arctan 2)$

(2) $e^{j\omega_0 t}$ 是特征函数.

$\downarrow$

$e^{st} \Longrightarrow e^{st}\, H(s)\big|_{s=\text{"}j\omega_0\text{"}=1}$

$\therefore$ 输出: $\frac{1}{2}e^{t}$.

$H(s)=\frac{1}{1+s}$ Laplace T.

(3) $E(j\omega)=\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)+\frac{1}{1+j\omega}$ $\leftarrow \alpha=1$ $\qquad H(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega}$

$R(j\omega)=E(j\omega)H(j\omega)=\frac{1}{j\omega(1+j\omega)}+\pi\delta(\omega)\cdot\frac{1}{1+j\omega}\Big|_{\omega=0}+\frac{1}{(1+j\omega)^2}$

$=\frac{1}{j\omega(1+j\omega)}+\pi\delta(\omega)+\frac{1}{(1+j\omega)^2}$ $\xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}}$? (麻烦)

$=\pi\delta(\omega)+\frac{a}{j\omega}+\frac{b}{1+j\omega}+\frac{c}{(1+j\omega)^2}$ □

Laplace Transform: $E(s)=\frac{1}{s}+\frac{1}{1+s}$ $\qquad H(s)=\frac{1}{1+s}$

$R(s)=\frac{1}{s(1+s)}+\frac{1}{(1+s)^2}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}+\frac{1}{(s+1)^2}$

$r(t)=u(t)-e^{-t}-t\,e^{-t}$ □

- 失真 $\longleftarrow$ 输出波形发生变化 ; 不失真: 幅度可变, 可时移, 即 $r(t)=Ke(t-t_0)$.

{ 幅度失真
  相位失真

不失真条件: $H(j\omega)=\frac{R(j\omega)}{E(j\omega)}=\frac{K\,E(j\omega)\,e^{-j\omega t_0}}{E(j\omega)}=Ke^{-j\omega t_0}$

$\uparrow$ $h(t)=K\delta(t-t_0)$.

即 $\begin{cases} |H(j\omega)|=K & \leftarrow \text{通频带无穷宽} \\ \varphi(\omega)=-\omega t_0 & \leftarrow \text{过原点的负斜率直线 即 群时延为常数.} \end{cases}$

幅值和群时延为常数

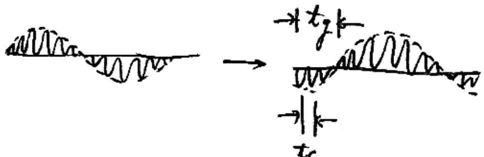
相时延 $t_f=\frac{\varphi(\omega)}{\omega}$.

$\tau=-\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}$ $(=-t_0)$: 群时延. 此时 群延时为const

保证各次谐波时移后合成波形维持原状

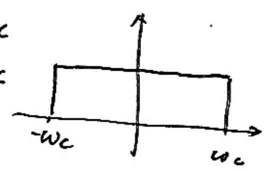
$\omega t-t_0$ vs. $\omega t-\omega t_0$

一般情况下, 群时延与相时延未必相等.



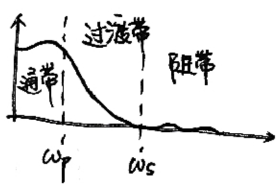
$\boxed{\text{理想低通滤波器}}$ ~ 频率选择性

理想低通: $H(j\omega)=\begin{cases}1\cdot e^{-j\omega t_0} & |\omega|<\omega_c \\ 0 & |\omega|>\omega_c\end{cases}$ $\nearrow |H(j\omega)|=\begin{cases}1 & |\omega|<\omega_c \\ 0 & |\omega|>\omega_c\end{cases}$ $\searrow \varphi(\omega)=-\omega t_0$



$\dashrightarrow$ 对 $0\sim\omega_c$ 频段无失真传输

非理想:



冲激响应: $h(t)=\frac{\omega_c}{\pi}Sa(\omega_c(t-t_0))$. ($*$ $e^{-j\omega t_0}\longrightarrow$ 时移!)

非因果信号 $\Longrightarrow$ 该系统是非因果系统, 物理不可实现 | $\omega_c\to\infty \Rightarrow$ 无失真传输条件.

失真

阶跃响应： $u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega) \longrightarrow \cdot e^{-j\omega t_0} \ (-\omega_c<t<\omega_c) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} r(t)$

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2\pi}\int_0^{\omega_c}\frac{\sin\omega(t-t_0)}{\omega}d\omega$$

超越函数. 令 $x=\omega(t-t_0)$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_c(t-t_0)}\frac{\sin x}{x}dx$$

正弦积分 $Si(y)=\int_0^y \frac{\sin x}{x}dx$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}Si[\omega_c(t-t_0)]$$

e.g. $x(t)=e^{-\alpha t}u(t)$ 经理想低通后 输出信号能量降为 $x(t)$ 的50%, 求截止频率 ω_c.

[解] $E=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2(t)\,dt=\int_0^{+\infty}e^{-2\alpha t}dt=\frac{1}{2\alpha} \longrightarrow 50\%: \frac{1}{4\alpha}$

$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega)=\frac{1}{\alpha+j\omega} \cdot H(j\omega) \longrightarrow Y(j\omega)=\begin{cases}\frac{1}{\alpha+j\omega}e^{-j\omega t_0} & (|\omega|<\omega_c)\\ 0 & (|\omega|>\omega_c)\end{cases}$

$H(j\omega)=\begin{cases}e^{-j\omega t_0} & (|\omega|<\omega_c)\\ 0 & (|\omega|>\omega_c)\end{cases}$

Paseval:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|Y(j\omega)|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}\left|\frac{e^{-j\omega t_0}}{\alpha+j\omega}\right|^2d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}\right)^2d\omega$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}\frac{d\omega}{\alpha^2+\omega^2}=\frac{1}{4\alpha}$$

$$=\frac{1}{\alpha\pi}\arctan\frac{x}{\alpha}\Big|_{-\omega_c}^{\omega_c}$$

$=\frac{1}{4\alpha}$ $\quad \frac{\pi}{4}$ $\quad \Longrightarrow \underline{\omega_c=\alpha}$ □

$\boxed{\text{调制解调}}$ $x(t)\cos(\omega_0 t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2}[X(\omega+\omega_0)-X(\omega-\omega_0)]$

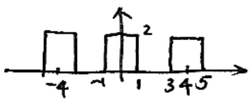
e.g. $x(t) \longrightarrow \boxed{H_1(j\omega)} \longrightarrow \otimes \longrightarrow \boxed{H_2(j\omega)} \longrightarrow y(t)$. （$\otimes$ 输入 $\cos 2t$）

$H_1(j\omega)=\begin{cases}3, & -2\le\omega\le 2\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$ 低通

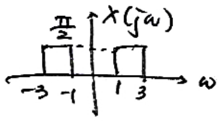
$H_2(j\omega)=\begin{cases}e^{j\omega}, & |\omega|>2\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$ 高通.

(1) 若 $x(t)=Sa(t)\cos 2t$. 求 $y(t)$

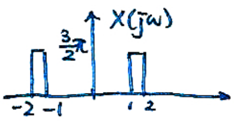
(2) $x(t)$ 如图. 求 $y(t)$



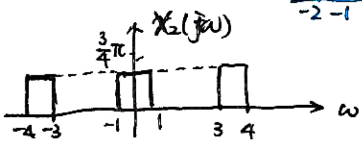
[解] 1) $\mathcal{F}(Sa(t))=\pi(u(\omega+1)-u(\omega-1)) \longrightarrow X(j\omega)=\frac{\pi}{2}[u(\omega+3)-u(\omega+1)+u(\omega-1)-u(\omega-3)]$



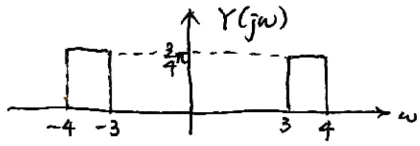
$H_1(j\omega)$: 低通



$\otimes \cos 2t$

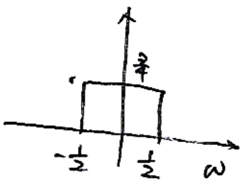


$H_2(j\omega)$: 高通

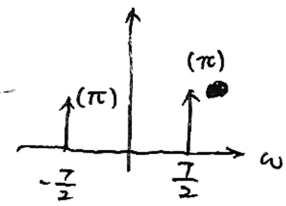


$$Y(j\omega)=\frac{3}{4}\pi[u(\omega+4)-u(\omega+3)+u(\omega-3)-u(\omega-4)]$$

$\|$



$*$



$$\therefore y(t)=\left[\cancel{\frac{1}{2\pi}}\cdot\frac{3}{4}Sa\left(\frac{t}{2}\right)\cdot\cos\frac{7}{2}t\right]\cdot\cancel{2\pi}$$

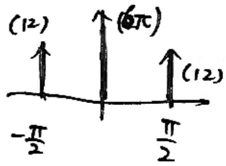
$$=\frac{3}{4}\cos\frac{7}{2}(t+1)Sa\left(\frac{t+1}{2}\right) \longleftarrow \text{时移}$$

2) $x(t)=f(t)*p(t)$. 其中 $f(t)=u(t+1)-u(t-1)$, $p(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-4n)$.

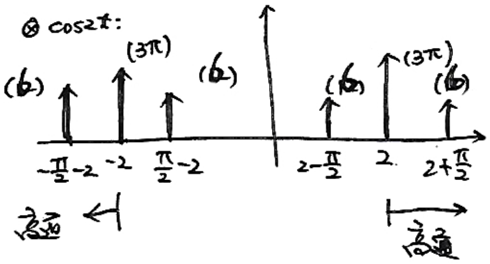
一个周期: $F(\omega)=4Sa(t)$. $\longrightarrow$ $F(n\omega_1)=4\cdot\frac{1}{4}Sa(n\omega_1)=Sa(n\omega_1)=Sa(\frac{\pi}{2}n)$

$\therefore X(j\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}Sa(\frac{\pi}{2}n)\,\delta(\omega-\frac{\pi}{2}n)$

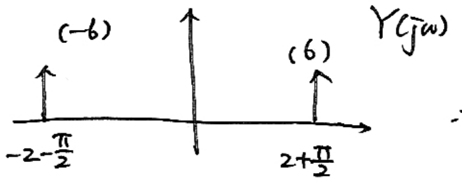
$H_1(j\omega)$后. $X_1(\omega)=6\pi\sum_{n=-1}^{1}Sa(\frac{\pi}{2}n)\,\delta(\omega-\frac{\pi}{2}n)=12\delta(\omega+\frac{\pi}{2})+12\delta(\omega-\frac{\pi}{2})+6\pi\delta(\omega)$



⊗ cos2t:



$\longrightarrow$



$\therefore \tilde{y}(t)=\frac{6}{\pi}\cos\left((2+\frac{\pi}{2})t\right)$

时移!

$y(t)=\frac{6}{\pi}\cos\left((2+\frac{\pi}{2})(t+1)\right)$.

□

离散时间信号 Fourier 变换

PTFS ⟶ CTFT ⟶ 系统

Periodic Series Continuous

CTFT ⟶ DTFT (Discrete) ⟶ z变换

DTFT ⇢ DFT（下学期）

PTFS ⇢ DPTFS ⟶ DTFT

- 周期信号的 Fourier 级数（Reprise）

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk\omega_0 n} = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

（由于 $\{e^{j\omega_0 kn}\}$ 过 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 之后就周期了）

- 离散时间信号的 Fourier 变换

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

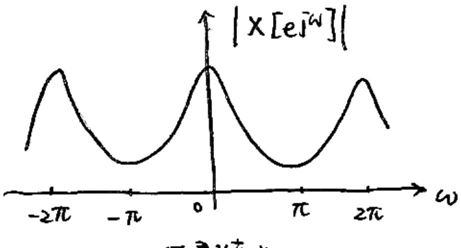
频谱连续，以 2π 为周期

常用信号的 DTFT.

(1) $x[n] = a^n u[n]$. $|a|<1$.

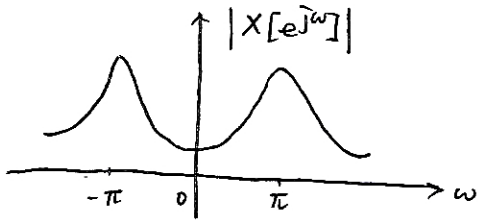
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n e^{-j\omega n} = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

① $0<a<1$.



低通特性

② $-1<a<0$

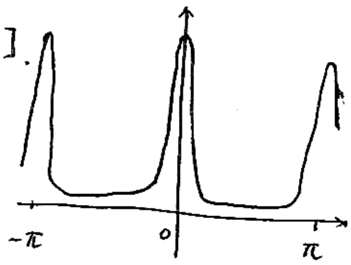


高通特性

② $x[n] = a^{|n|}$ $|a|<1$ $\Rightarrow$ $x[n] = a^{-n} u[-n-1] + a^n u[n]$.

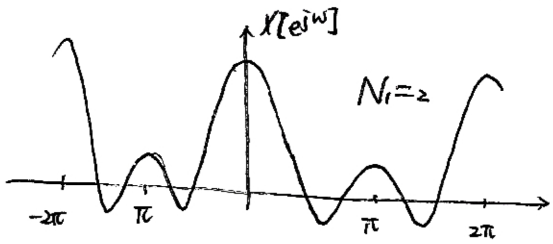
卒!!!

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1-a^2}{1+a^2-2a\cos\omega}.$$



③ 矩形脉冲 $x[n] = \begin{cases} 1, & |n| \le N_1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{\sin[(N_1+\frac{1}{2})\omega]}{\sin\frac{\omega}{2}} =: Sad$$



与对应周期信号: $a_k = \frac{1}{N} \frac{\sin\frac{\pi}{N}k(2N_1+1)}{\sin\frac{\pi}{N}k}$

即 $a_k = \frac{1}{N} X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$

④ $x[n] = \delta[n] \Rightarrow X(e^{j\omega}) = 1$.

DTFT 收敛要求：(1) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|x[n]\right|<+\infty.$　　(2) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|x[n]\right|^2<+\infty$

DTFT 性质:

(1) $X(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega+2\pi)})$　周期 2π

(2) $\alpha x_1[n]+\beta x_2[n] \leftrightarrow \alpha X_1(e^{j\omega})+\beta X_2(e^{j\omega})$

(3) $x[n-n_0] \leftrightarrow X(e^{j\omega})e^{-j\omega n_0}$　时移　　同号.

$x[n]e^{j\omega_0 n} \leftrightarrow X(e^{j(\omega-\omega_0)})$　频移.　　反号

(4) $x[-n] \leftrightarrow X(e^{-j\omega})$

$x^*[+n] \leftrightarrow X^*(e^{-j\omega})$

(5) 差分求和性质:　差分(时移可推): $x[n]-x[n-1] = (1-e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$.

求和 $\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{X(e^{j\omega})}{1-e^{j\omega}} + \pi X(e^{j0})\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)$

连续 "$j\omega$" ↔ 离散 "$1-e^{j\omega}$" $\overset{?}{\leftrightarrow}$ Laplace s

e.g. $u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-e^{j\omega}} + \pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-2\pi k)$.　保证 2π 的周期性 (DTFT)

(6) 内插. interpolation　$x_k[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{k}\right] & k\mid n \\ 0 & k\nmid n. \end{cases}$　　$X_k(e^{j\omega}) = X(e^{jk\omega})$

(7) 频域微分　$nx[n] \leftrightarrow j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$

(8) Parseval Thm.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x[n]\right|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\left|X(e^{j\omega})\right|^2 d\omega$$

(9) 卷积

(10) 调制

(11) 对偶性

CFS.

连续时间 周期性　　离散 非周期

$x(t)\leftrightarrow a_k$

$a_k=\frac{1}{T}X(j\frac{2\pi}{T}k)$ $\Updownarrow$

CTFT

$x(t)\leftrightarrow X(j\omega)$

$X(jt)\leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$

连续时间 非周期　　连续频域 非周期

DFS

离散时间 周期　　离散 周期

$x[n]\leftrightarrow a_k$.　$a_k \leftrightarrow \frac{1}{N}x[-k]$

$\Updownarrow$ $a_k=\frac{1}{N}X(e^{j\frac{2\pi}{N}k})$

DTFT

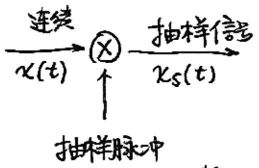
$x[n]\leftrightarrow X(e^{j\omega})$

离散时间 非周期　　连续频域 周期

$e^{j\omega_0 n} \leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega_0-2\pi k)$

采样

- 理想抽样



$x(t) \leftrightarrow X(\omega) \quad (-\omega_m < \omega < \omega_m)$

$p(t) \leftrightarrow P(\omega) = \omega_s \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s)$

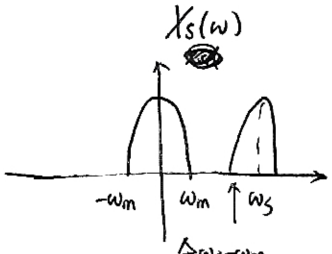
$x_s(t) \leftrightarrow X_s(\omega)$

$p(t) = \delta_T(t) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$

$x_s(t) = x(t)\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\,\delta(t - nT_s)$

仍是连续信号.

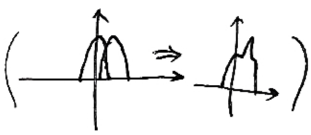
$\leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(\omega - n\omega_s)}$ → 对 $X(\omega)$ 进行了 ω_s 的周期延拓



想要的情况: $\omega_s - \omega_m \geq \omega_m \Rightarrow \underline{\omega_s \geq 2\omega_m} \Rightarrow \boxed{T_s \leq \frac{1}{2f_m}}$ (采样定理)

→ 一般工程上绝不取等 (一个周期 8~10个点) ← $\boxed{\text{过采样}}$

→ 防止频谱混叠



* 问题: 频带受限 → 时间域上无限. ⇒ 抽样前加抗混叠滤波 <只保留一定频率范围>.

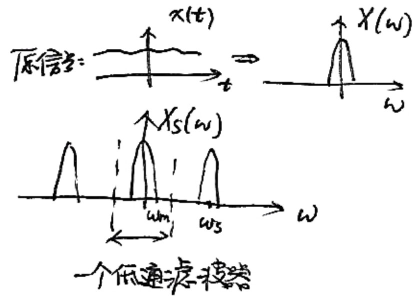
e.g. $x(t) \to \omega_m$ 带限 $\quad \omega_f > 2\omega_m$ $\quad \underline{\omega_f > 2\omega_m}$

$x^2(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\omega) * X(\omega)$. $\quad \omega_m^* \geq 2\omega_m\ (-1) \longrightarrow \underline{\omega_f > 4\omega_m}$

$x(t) * x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X^2(\omega) \quad \omega_m^* = \omega_m. \quad \underline{\omega_f > 2\omega_m}$

也可直接代入 $x(t) = \cos\omega_m t$ 来看.

- 恢复



对周期信号, 采样后: $x_s(t) = x(t)\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\,\delta(t - nT_s)$

$X_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * P(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(\omega - n\omega_s)$

采样脉冲在频域中. (Fourier 变换)

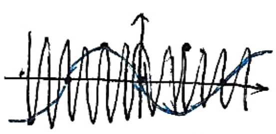
$\boxed{\omega_m < \omega_c < \omega_s - \omega_m}$

低通 $H(\omega) = \begin{cases} T_s \\ 0 \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad h(t) = T_s \frac{\omega_c}{\pi} Sa(\omega_c t)$

$\hat{x}(t) = x_s(t) * h(t) = T_s \frac{\omega_c}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\, Sa\big(\omega_c(t - nT_s)\big)$ ← 无穷个叠加后恢复回原信号

- 欠采样

$x(t) = \cos(\omega_0 t) \xrightarrow[\text{欠采样}]{\omega_s < 2\omega_0 \ \text{频谱混叠} \ \omega_0 < \omega_s < 2\omega_0} \hat{x}(t) = \cos\big((\omega_s - \omega_0)t\big)$



欠采样 (蓝色是恢复后)

e.g. $\cos\frac{7}{3}\pi \xrightarrow{\text{欠采样}} \cos\frac{\pi}{3}$

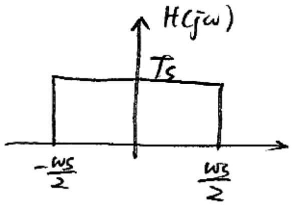
e.g.

$f(t)=\cos\Omega t \longrightarrow \otimes \longrightarrow \boxed{H(j\omega)} \longrightarrow y(t)=\cos\frac{\Omega}{A}t$. 求 A.

$\uparrow$

$\delta_{T_s}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(t-mT_s)$

$\omega_s=\frac{2\pi}{T_s}=\frac{\Omega}{10.01}$.



[解] $F(\omega)=\pi\left(\delta(\omega+\Omega)+\delta(\omega-\Omega)\right)$. $f(t)\cdot\delta_{T_s} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)*\frac{1}{2\pi}\mathcal{F}_{T_s}(\omega)$

$=\frac{1}{2}\omega_s\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-m\omega_s+\underline{10.01\omega_s})+\frac{1}{2}\omega_s\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-m\omega_s-10.01\omega_s)$

只有 $-\frac{\omega_s}{2}\sim\frac{\omega_s}{2}$ 能通过. ∴ 只有 $m=\pm10$

$\Rightarrow Y(\omega)=\left(\delta(\omega+0.01\omega_s)+\delta(\omega-0.01\omega_s)\right)\cdot\frac{1}{2}\omega_s\cdot T_s=\pi\delta(\omega+0.01\omega_s)+\pi\delta(\omega-0.01\omega_s)$

$\Rightarrow y(t)=\cos(0.01\omega_s t) \Rightarrow A=\frac{\Omega}{0.01\omega_s}=\frac{10.01}{0.01}=1001$. $\longrightarrow$ 只采样得到的频率非常慢 □

- C/D 转换

$x_c(t) \longrightarrow \otimes \xrightarrow{x_p(t)} \boxed{\text{冲激串到序列}} \longrightarrow x_d[n]=x_c(nT)$ ($p(t)$ 输入 $\otimes$)

$X_c(j\omega)=$

$X_d(e^{j\Omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_c(nT)e^{-j\Omega n}$

离散(数字)角频率

抽样间隔

$T_s=\frac{1}{f_s}$ 抽样频率

$\Omega=\omega\cdot T_s$ 尺度变换

(0~2π循环)

$\Downarrow$

$X_d(e^{j\Omega})=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X_c\left[j\frac{1}{T_s}(\Omega-2\pi k)\right]$

Laplace 变换

F.T. $\longrightarrow$ $e^{j\omega t}$ 的线性组合（因复指数是一切LTI Sys 的特征函数）

$s=\sigma+j\omega$　F.T. 令$\sigma=0$.　$\sigma\neq 0$? $\rightarrow$ L.T.

- 双边 Laplace 变换

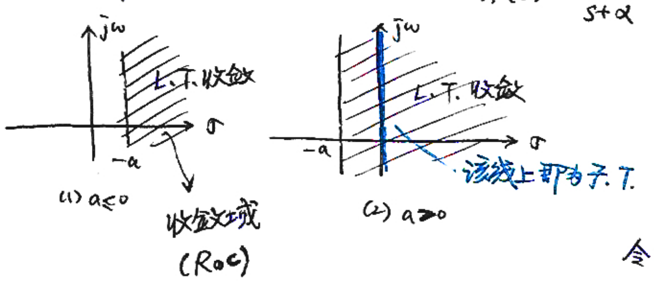
$$X(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\,e^{-st}\,dt \;=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x(t)e^{-\sigma}\right)e^{-j\omega t}\,dt=\mathcal{F}\left[x(t)e^{-\sigma t}\right]$$

↑ 一些不能求F.T.的信号可求L.T. 推广了F.T.

e.g. 单边指数　$e^{-\alpha t}u(t)\longleftrightarrow X(s)=\frac{1}{s+\alpha}$.　（要求 $\mathrm{Re}\,s>-\alpha$. 否则不收敛）

（$\alpha>0$时. 有F.T. $X(j\omega)=\frac{1}{j\omega+\alpha}$）.

$$X(s)\Big|_{s=j\omega}=X(j\omega)$$



令$\alpha=0$.　$u(t)\longleftrightarrow\frac{1}{s}$.

$\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$

$x(t)=-e^{-\alpha t}u(-t)\longleftrightarrow X(s)=\frac{1}{s+\alpha}$　（$\mathrm{Re}\,s<-\alpha$）

Roc不同！

实际上，　$x(t)\mapsto\left(X(s),\ \mathrm{Roc}\,X(s)\right)$

$\left(X(s),\ \mathrm{Roc}\,X(s)\right)\mapsto x(t)$

<一一对应>.

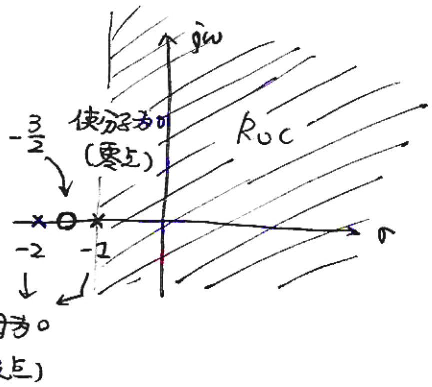
（带上收敛域才行）

- 零极点图、与收敛域

e.g. $X(s)=\frac{2s+3}{s^2+3s+2}=\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+2}$.　Roc: $\mathrm{Re}\,s>-1$.

$s\to\infty$时. $\frac{\infty}{\infty^2}\to 0$.　零点.

故零点: ∞, $-\frac{3}{2}$;　极点: -2, -1.



ROC性质：

① Roc总是以平行于jω轴的直线为边界（只对Res有要求）

且边界与分母的根（极点）相对应

即：Roc是带形区域（竖着的）

② Roc内无极点

③ 时限信号L.T.的Roc是整个s平面

<时限信号L.T.积分是一定可积的>（有限）

④ 右边信号（$x(t)u(t-t_0)$）Roc在一条平行jω直线的右边

左边信号（$x(t)u(-t+t_0)$）Roc在一条平行jω直线的左边.

⑤ 双边信号Roc: $\varnothing$或带形区域（拆成左边信号+右边信号）

⑥ $X(s)$是有理函数 $\frac{P(s)}{Q(s)}$ 时，Roc由极点分割

e.g. $X(s)=\frac{1}{s+\alpha}\left(1-e^{-(s+\alpha)T}\right)$

$x(t)=e^{-\alpha t}\left(u(t-T)-u(t)\right)$ 时限信号

极点: $s=-\alpha$

零点: $1-e^{-(s+\alpha)T}=0\Rightarrow s=\alpha+j\frac{2\pi}{T}\omega$. ☆

零极点对消 $\longrightarrow$ Roc在整个s平面

- 单边Laplace变换

$$X(s)=\int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt$$ 对因果信号，单边、双边Laplace变换一样。 其ROC一般在最右极点右边

$\delta(t)\leftrightarrow 1$ （全部s）. $\delta(t-t_0)\leftrightarrow e^{-st_0}$

$u(t)\leftrightarrow \frac{1}{s}$. $Re\,s>0$ $-u(-t)\leftrightarrow \frac{1}{s}$. $Re\,s<0$

$e^{-\alpha t}u(t)\leftrightarrow \frac{1}{s+\alpha}$. $Re\,s>-\alpha$. $-e^{-\alpha t}u(-t)\leftrightarrow \frac{1}{s+\alpha}$. $Re\,s<-\alpha$

$t^n u(t)\leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}$ $Re\,s>0$. $-t^n u(-t)\leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}$ $Re\,s<0$

注：为区别，下用$\mathcal{L}$表示双边，$\mathcal{L}^+$表示单边

- Laplace变换的性质

1) 线性：$x_1(t)\leftrightarrow X_1(s)$. $x_2(t)\leftrightarrow X_2(s)$ $\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)\leftrightarrow \alpha X_1(s)+\beta X_2(s)$

ROC：至少是 $R_1\cup R_2$ （可能零极点对消，ROC扩大）

2) 时移：$x(t)\leftrightarrow X(s)$. $x(t-t_0)\leftrightarrow e^{-st_0}X(s)$ <同号>

对单边：$x(t)u(t)\leftrightarrow X(s)$. $\underbrace{x(t-t_0)u(t-t_0)}_{\text{保证一致性}}\leftrightarrow e^{-st_0}X(s)$

e.g. $e^{-2(t-1)}u(t)=\underbrace{e^{-2t}u(t)}_{\updownarrow\ \frac{1}{s+2}}\cdot e^2\leftrightarrow \frac{e^2}{s+2}$.   用时移是错误的

e.g. $f_s(t)=\sum_{n=0}^{\infty}f(nT)\delta(t-nT)$.   当 $f(nT)=1 \Rightarrow f_s(t)\leftrightarrow \frac{1}{1-e^{-sT}}$ （由等比数列可证）

3) 复数域平移：$x(t)\leftrightarrow X(s)$ $x(t)e^{s_0t}\leftrightarrow X(s-s_0)$.   <异号>

ROC：R ROC：$R+Re\,s_0$ （也平移）

e.g. $e^{-j\omega_0t}u(t)\leftrightarrow \frac{1}{s+j\omega_0}$. $e^{j\omega_0t}u(t)\leftrightarrow \frac{1}{s-j\omega_0}$ $\Rightarrow \begin{cases}\cos\omega_0t\,u(t)\leftrightarrow \frac{s}{s^2+\omega_0^2}\\ \sin\omega_0t\,u(t)\leftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}\end{cases}$

$\Rightarrow \mathcal{L}[x(t)\cos\omega_0t\,u(t)]=\frac{1}{2}X(s+j\omega_0)+\frac{1}{2}X(s-j\omega_0)$

$\mathcal{L}[x(t)\sin\omega_0t\,u(t)]=\frac{j}{2}X(s+j\omega_0)-\frac{j}{2}X(s-j\omega_0)$.

4) 尺度变换：$x(t)\leftrightarrow X(s)$, R. $x(at)\leftrightarrow \frac{1}{|a|}X\left(\frac{s}{a}\right)$, aR

5) 共轭对称性：$x(t)\leftrightarrow X(s)$, R. $x^*(t)\leftrightarrow X^*(s^*)$, R $\Rightarrow$ $x(t)$ 实信号 $\Leftrightarrow X(s)=X^*(s^*)$.

在s_0有极(零)点，则在s_0^*也有极(零)点

6) 卷积性质：$x_1(t) \underset{R_1}{\longleftrightarrow} X_1(s)$　　$x_2(t) \underset{R_2}{\longleftrightarrow} X_2(s)$　　$x_1(t) * x_2(t) \longleftrightarrow X_1(s) X_2(s)$

R至少是$R_1 \cup R_2$.（可能零极点对消而扩大）

7) 时域微分：$x(t) \longleftrightarrow X(s)$.

[双边] $\dfrac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow sX(s)$

[单边] $\dfrac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow sX(s) - x(0^-)$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \longleftrightarrow s^2X(s) - sx(0^-) - x'(0^-)$$

$$= s\left(sX(s) - x(0^-)\right) - x'(0^-).$$

8) 复频域微分. $x(t) \longleftrightarrow X(s)$　　$-tx(t) \longleftrightarrow \dfrac{dX(s)}{ds}$

9) 时域积分：

$$\mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau\right] = \frac{1}{s} X(s)$$

$$\mathcal{L}^{+}\left[\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau\right] = \frac{1}{s} X(s) + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^-} x(\tau)\,d\tau \quad (\text{很少用})$$

10) 初值、终值定理：

初值定理 $\boxed{x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s).}$ ⇐ $x(t)$为因果信号. 且$t=0$不包含奇异函数

（所有极点在左半平面时. 初值存在）

↑

ROC包含 $\mathrm{Re}\,s \geq 0$.

若含奇异函数. e.g. $F(s) = \dfrac{2s}{s+1}$. 求$f(0^+)$.

$F(s) = 2 - \dfrac{2}{s+1}$ → 对这部分初值定理 ⇒ $\lim_{s\to\infty} s\left(-\dfrac{2}{s+1}\right) = -2 = f(0^+)$

↑

造成冲激

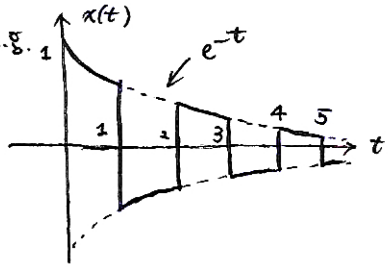
终值定理：$\boxed{x(\infty) = \lim_{s\to 0} sX(s)}$ （所有极点在左半平面时. 终值存在）

↑

ROC包含 $\mathrm{Re}\,s \geq 0$

* 虚轴上有共轭极点 $\pm aj$ ⟶ 原函数含正、余弦成分 ⟶ 终值不存在.

e.g.



$$x(t) = \left[\left(u(t) - 2u(t-1) + u(t-2)\right) * \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-2n)\right] e^{-t} u(t)$$

$$u(t) - 2u(t-1) + u(t-2) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s}\cdot\left(1 - 2e^{-s} + e^{-2s}\right) = \frac{1}{s}\left(1 - 2e^{-s}\right)^2$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-2n) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-e^{-2s}}$$

e^{-t} ⇒ 时移

$$\frac{x(t)}{e^{-t}} \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s}\left(1 - e^{-s}\right)^2 \cdot \frac{1}{1-e^{-2s}} = \frac{1}{s}\cdot\frac{1-e^{-s}}{1+e^{-s}}.$$

$$\therefore x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+1}\cdot\frac{1-e^{-(s+1)}}{1+e^{-(s+1)}}$$

□

- Laplace 反变换

$$x(t)=\frac{1}{2j\pi}\int_{\sigma-j(\infty)}^{\sigma+j(\infty)} X(s)\, e^{st}\, ds \qquad (\text{整个轴上积分})$$

$$F(s)=P(s)+\frac{A(s)}{B(s)} \qquad \frac{A(s)}{B(s)}=\frac{A_s}{(s-p_1)^{r_1}\cdots(s-p_n)^{r_n}}=\frac{k_{11}}{s-p_1}+\frac{k_{12}}{(s-p_1)^2}+\cdots+\frac{k_{1r_1}}{(s-p_1)^{r_1}}+\cdots+\frac{k_{nr_n}}{(s-p_n)^{r_n}}.$$

(1) 当 $r_i=1$ 时. $k_i=(s-p_i)\cdot F(s)\Big|_{s=p_i}$.

(2) 当有 $\frac{A(s)}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$ 时. $\xrightarrow{F_1.}$ $\frac{k_1}{s+\alpha+j\beta}+\frac{k_2}{s+\alpha-j\beta}$. $k_2=k_1^*$ ……

$\xrightarrow{F_2.}$ $\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}-\frac{\alpha-\gamma}{\beta}\frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$ $\quad (A(s)=s+\gamma)$

$$\downarrow$$

$$e^{-\alpha t}\cos\beta t-\frac{\alpha-\gamma}{\beta}e^{-\alpha t}\sin\beta t$$

(3) $r_i>1$ 时. 利用复频域微分性质.

$$\frac{k_{i1}}{s+p_i}+\frac{k_{i2}}{(s+p_i)^2}+\cdots+\frac{k_{ir_i}}{(s+p_i)^{r_i}}$$

$$\downarrow$$

$$k_{i1}e^{-p_i t}+t\,k_{i2}e^{-p_i t}+\cdots+t^{r_i-1}k_{ir_i}e^{-p_i t}$$

$$k_{ik}=\frac{1}{k!}\underbrace{\frac{d^k}{ds^k}}_{\text{求导.}}\Big((s+p_i)^{r_i}\cdot F(s)\Big)\Big|_{s=p_i}$$

e.g. $X(s)=\frac{\pi}{(s^2+\pi^2)(1+e^{-2s})}$ $\Big|$ $=\frac{\pi}{s^2+\pi^2}\cdot\frac{1-e^{-2s}}{(1+e^{-2s})(1-e^{-2s})}$.

$x_1(t)=\sin\pi t\, u(t)\sim X_1(s)$

$X_2(s)=\frac{1-e^{-2s}}{1-e^{-4s}}=\frac{1}{1-e^{-4s}}-\frac{e^{-2s}}{1-e^{-4s}}$

$x_2(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-4n)$ $\qquad x_2(t-2)$

$x_1(t)*x_2(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sin\pi(t-4n)u(t-4n) =: r(t)$

$x(t)=r(t)-r(t-2)=$ ……

□

- LTI 系统的系统函数

$y(t)=x(t)*\underbrace{h(t)}_{\text{单位冲激响应}}.\sim Y(s)=X(s)\underbrace{H(s)}_{\text{系统函数}}$

* $H(j\omega)$ 系统的频率响应

$H(s)=\mathcal{L}(h(t))$

$\underset{\text{特征函数}}{e^{st}}\to\boxed{\begin{matrix}LTI\\ h(t)\end{matrix}}\to e^{st}\cdot H(s).$

证: $y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau=e^{st}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$
$=e^{st}H(s).$

系统若稳定 $H(j\omega)=H(s)\big|_{s=j\omega}$

$H(s)=?$ ① $h(t)\overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow}H(s)$ ② 微分方程两侧取 $\mathcal{L}$. 整理

③ 零极点.

e.g. $y''(t)+5y'(t)+6y(t)=3x'(t)+2x(t)$

$\rightarrow s^2Y(s)+5sY(s)+6Y(s)=3sX(s)+2X(s)$

LTI Sys：线性系统. 0^-时刻要求为0. 单双边 $\mathcal{L}$ 一样

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{3s+2}{s^2+5s+6}$$

$H(j\omega)=H(s)\big|_{s=j\omega}\rightarrow$ 频率响应.

正弦稳态响应：$e(t)=E_m\sin(\omega_0t+\varphi)u(t)\longrightarrow r(t)=|H(j\omega_0)|\,E_m\sin(\omega_0t+\varphi+\angle H(j\omega_0))$

用 e^{st} 就可证

利用 $H(s)$ 判断系统的性质：

1) 因果性：$h(t)$ 因果信号 $\Longleftrightarrow$ 因果系统

$\Updownarrow$ $\Downarrow$

$H(s)$ 有理函数 ROC 在最右极点右边　$H(s)$ ROC 在最右极点右边

2) 稳定性：$\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|dt<\infty \Longleftrightarrow$ 有界输入得有界输出 稳定系统

$\Updownarrow$

$H(j\omega)$ 存在、即 ROC 包含 $j\omega$ 轴.

e.g. 二阶常系数微分方程描述的系统. 因果LTI 有限的 s 平面内. 极点 $s=-1$. 零点 $s=1$. (部分极点.零点) $x(t)=1$ 时 $y(t)=-1$. $h(t)$ 初始值为2、不含冲激项

(1) Sys. (2) $y(0^-)=1$. $y'(0^-)=2$. $x(t)=e^{-3t}u(t)$ 时初值是否跳变.

(1) $H(s)=\dfrac{k(s-1)}{(s+1)(s+a)}\,q(s)$ ← 可能是 s 的高阶.（x求几次导与它阶微分方程阶数无关）

$1=e^{0\cdot t}\rightarrow\boxed{}\rightarrow e^{0\cdot t}\cdot\underset{H(0)}{\underset{\|}{(-1)}}$　$\therefore H(0)=\dfrac{-k\,q(0)}{a}=-1\Rightarrow k=\dfrac{a}{q(0)}$

$h(t)$ 初始值不含冲激项 $\longrightarrow$ 分子阶数 $\leq$ 分母阶数 -1. $\therefore q(s)$ 为0阶. 令 $kq(s)=k^*$. $\underline{k^*=a}$.

初值定理 $h(0^+)=\lim\limits_{s\to\infty}sH(s)=2\Rightarrow\lim\limits_{s\to\infty}\dfrac{k^*s(s-1)}{(s+1)(s+a)}=2\Rightarrow k^*=2.$

$a=k^*=2$

$\therefore H(s)=\dfrac{2(s-1)}{(s+1)(s+2)}=\dfrac{2s-2}{s^2+3s+2}\Rightarrow y''(t)+3y'(t)+2y(t)=2x'(t)-2$

(2) $y(0^+)=\lim\limits_{s\to\infty}sY(s)=0$ | 代入微分方程 $\Rightarrow Y(s)=\dfrac{2(s-1)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$ $(\because X(s)=\frac{1}{s+3})$.

与 $y(0^-)$ 对比. 跳变

$y'(0^+)=\lim\limits_{s\to\infty}s^2Y(s)=2=y'(0^-)$. 无跳变

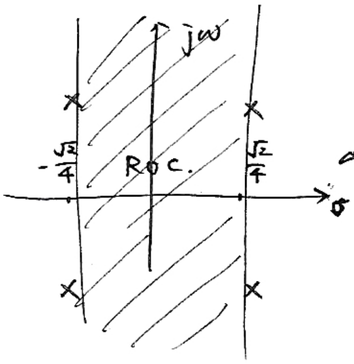
e.g. $x(t)$：实值偶信号．有限s平面内．$X(s)$有4个极点且无零点．$X(s)$一个极点：$s=\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$．
$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,dt=4$．

$$X(s)=\frac{k}{(s-\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}})(s-\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}})(\quad)(\quad)}$$

$x(t)=x(-t)$
$X(s)=X(-s)$ 尺度变换

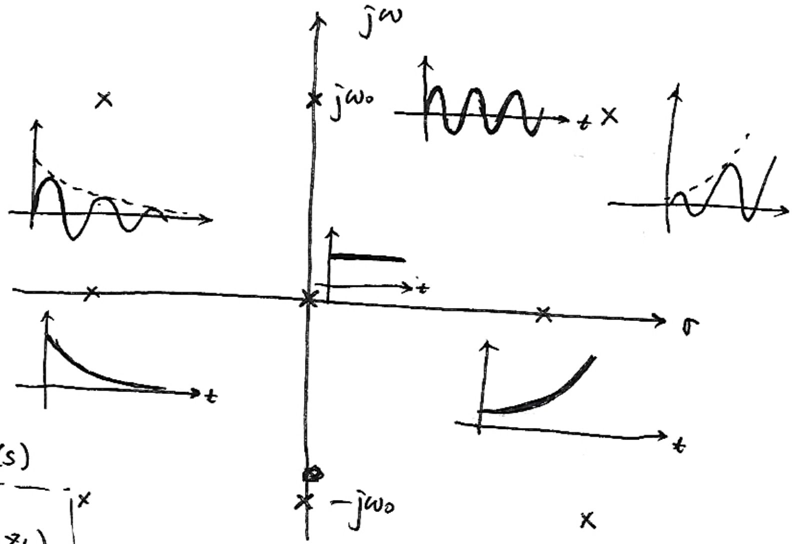
$$=\frac{k}{(s-\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}})(s-\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}})(s+\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}})(s+\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}})}$$

$1 \to \boxed{x(t)} \to 1\cdot\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,dt = 1\cdot X(0) = 4 \Rightarrow \frac{k}{\frac{1}{16}}=4 \Rightarrow k=\frac{1}{4}$.



必须包括$j\omega$轴 (因$\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\,dt=4$，可积)

$\boxed{固有频率}$：分母里那些极点对应的s



一阶

$$Y(s)=X(s)H(s)=\underbrace{\frac{\prod_i(s-z_i)}{\prod_j(s-p_j)}}_{X(s)}\underbrace{\frac{\prod_k(s-z_k)}{\prod_l(s-p_l)}}_{H(s)}$$

$$=\sum_j\frac{A_j}{s-p_j}+\sum_l\frac{A_l}{s-p_l}$$

$$y(t)=\sum_j A_j e^{p_j t}u(t)+\sum_l A_l e^{p_l t}u(t)$$

强迫响应分量 (输入极点)　　自由响应分量 (系统极点)

* 重合/对消的极点：无法分辨．

$\boxed{暂态响应}$：完全响应中暂时出现的分量．$t\to\infty$时$\to 0$．

$\boxed{稳态响应}$：减去暂态响应部分．(不一定是常值!)
steady

～ $j\omega$轴左右两侧 (衰减)
～ $j\omega$轴上 (steady!)

* 激励的极点在s正半平面时 (实部≥ 0). $\longrightarrow$ 稳态响应即自由响应；暂态响应即强迫响应

增量LTI Sys. ⟶ 拆出一个初始值全0的LTI ⟶ 单边LT.

e.g. $\frac{d^2}{dt^2}r(t)+3\frac{d}{dt}r(t)+2r(t)=\frac{d}{dt}e(t)+3e(t)$.　　$r(0^-)=1$.　$r'(0^-)=2$.

$\mathcal{L}^+[\frac{d^2}{dt^2}r(t)] = s^2R(s)-sr(0^-)-r'(0^-)$.

对方程两边作$\mathcal{L}^+$.　$s^2R(s)-sr(0^-)-r'(0^-)+3sR(s)-3r(0^-)+2R(s)=sE(s)-s\overset{0}{\overset{\parallel}{\cancel{e(0-)}}}+3E(s)$

$$\therefore \underset{\substack{\uparrow\\ \text{零输入. } E(s)=0}}{R_{zi}(s)}=\frac{sr(0-)+r'(0-)+3r(0-)}{s^2+3s+2}\sim r_{zi}(t)=\cdots$$

实际上: $t>-\infty$
只关心 $t\geq0$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{零状态.}}}{R_{zs}(s)}=\frac{(s+3)E(s)}{s^2+3s+2}\sim r_{zs}(t)=\cdots \qquad (t\geq0).$$

计算频率响应.

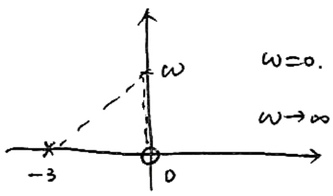
$$H(j\omega)=H(s)\Big|_{s=j\omega}=K\frac{\prod_{j=1}^{m}(j\omega-z_j)=:N_je^{j\psi_j}}{\prod_{i=1}^{n}(j\omega-p_i)=:M_ie^{j\theta_i}}$$

← "矢量差"(类似)

$$H(j\omega)=\frac{N_1N_2\cdots N_m}{M_1M_2\cdots M_n}\frac{e^{j\psi_1}e^{j\psi_2}\cdots e^{j\psi_m}}{e^{j\theta_1}e^{j\theta_2}\cdots e^{j\theta_n}}\qquad |H(j\omega)|=\frac{N_1\cdots N_m}{M_1\cdots M_n}$$

$$\varphi(j\omega)=\sum\psi_j-\sum\theta_i$$

e.g.



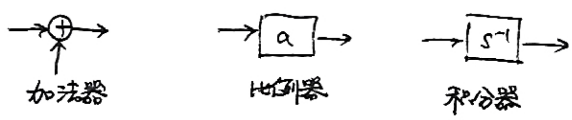
$\omega=0$.　$|H(j\omega)|=0=\frac{0}{\cdots}$

$\omega\to\infty$　$|H(j\omega)|\to k$.　　高通滤波器

ω: $|H(j\omega)|=\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+3^2}}$

方框图表示 ~ 具体电路实现

基本单元:



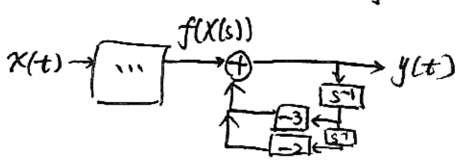
*微分: 产生冲激
积分: 平滑化输入

直接型

e.g. $H(s)=\frac{2s^2+4s-6}{5s^2+3s-9}\longrightarrow\frac{2+4s^{-1}-6s^{-2}}{5+3s^{-1}-9s^{-2}}$ ⇒ $X(s)$. $Y(s)$ 关系 ⇒ 直接电路

$Y(s)=f(Y(s),X(s))$
↑
?

e.g. $Y(s)=-3s^{-1}Y(s)-2s^{-2}Y(s)+f(X(s))$



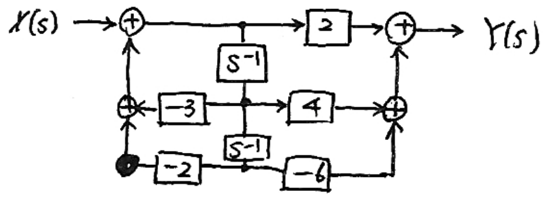
问题：误差逐级放大；加法器数量很多.

直接II型

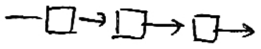
e.g. $Y(s) = \dfrac{2+4s^{-1}-6s^{-2}}{1+3s^{-1}+2s^{-2}} X(s). \;=:\; (2+4s^{-1}-6s^{-2})\,W(s)$

$\Rightarrow$ $W(s) = -3s^{-1}W(s) - 2s^{-2}W(s) + X(s)$

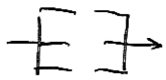
$Y(s) = 2W(s) + 4s^{-1}W(s) - 6s^{-2}W(s)$

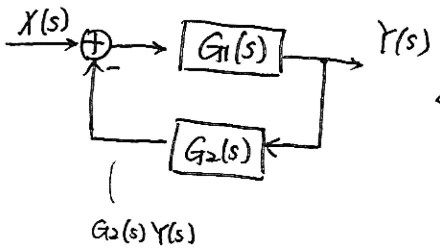


级联型：$H(s) = \square \cdot \square \cdot \square$



并联型：$H(s) = \square + \dfrac{\square}{\square} + \dfrac{\square}{\square}$ $\rightarrow$





$\Leftrightarrow$ $G_1(s)\left(X(s) - G_2(s)Y(s)\right) = Y(s).$

注意：非零状态系统/增量 LTI Sys. $\longrightarrow$ $y(t) = $

零输入 y_{zp} $\longrightarrow$ Unknown. TBC. $\sim Y_{zp}(s)$

y_{zs} 零状态 $\longrightarrow$ $h(t) * x(t)$ $\sim H(s)X(s)$

$\downarrow$

复频域分析

反馈型：$\dfrac{\square}{1+\square\cdot\triangle}$

Z-变换

离散时间信号/系统的复频域分析　　DTFT的推广

$x_s(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(nT)\,\delta(t-nT)$　　　　$(s=\sigma+j\omega)$

$X_s(s) = \mathcal{L}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\,\delta(t-nT)\right] = \sum_{\infty} x(nT)\,\mathcal{L}[\delta(t-nT)] = \sum_{\infty} x(nT)\,e^{-snT}$

引入复变量 $z=e^{sT}$.　则 $X_s(s)\Big|_{z=e^{sT}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\,z^{-n} =: X(z)$

↑ 幂级数

- 双边 z 变换

$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\,z^{-n}$　　($z=re^{j\omega}\in\mathbb{C}$. 当 $r=1$ 时, $z=e^{j\omega}$ 即 DTFT)

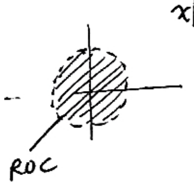
$\|$

$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\,r^{-n}e^{-j\omega n} = \mathcal{F}\left[\underline{x[n]\,r^{-n}}\right]$

即对 $x[n]\,r^{-n}$ 做DTFT.

ROC 和式子一起才能确定原函数.

e.g.

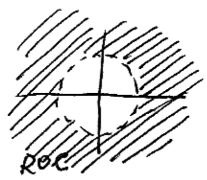


$x[n] = -a^n u[-n-1]$

$X(z) = -\sum_{-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n.$

$= 1-\sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}z)^n.$

$|z|<|a|$ 时. $X(z) = \frac{z}{z-a}$ . .



$x[n] = a^n u[n]$

$\rightarrow X(z) = \frac{z}{z-a}$

ROC: $|z|>|a|$

与DTFT的关系:　$X(e^{j\omega}) = X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}$.　(若ROC包括单位圆)

注: 有限序列 $n_1 \sim n_2$

$\begin{cases} n_1>0,\ n_2>0. & \text{不包括 } z=0 \quad (\text{否则 } \frac{\square}{0}\to\infty) \\ n_1<0.\ n_2<0. & \text{不包括 } |z|=\infty. \\ n_1<0.\ n_2>0. & z\neq 0.\ |z|\neq\infty \end{cases}$

$n_1<0 \longrightarrow z^{-n_1}$　正次幂　　$|z|=\infty$. $H(z)\to\infty$　极点

$|z|=\infty$ 是否在ROC内 $\longrightarrow$ 是否因果标志

$|z|=0$　　　反因果　　　　零极点图

常用 z 变换:　$\delta[n] \sim X(z)=1.$　全平面

$u[n] \sim X(z) = \frac{z}{z-1}.$　$|z|>1.$

$-u[-n-1] \sim X(z) = \frac{z}{z-1}.$　$|z|<1.$

$a^n u[n] \sim X(z) = \frac{z}{z-a}.$　$|z|>|a|$

$-a^n u[-n-1] \sim X(z) = z/(z-a)$　$|z|<|a|$

$nu[n]$: $\mathcal{Z}(u[n]) = \frac{1}{1-z^{-1}}$, $|z|>1$ $\xrightarrow{\text{对}z^{-1}\text{求导}}$ $\sum_{n=0}^{\infty} n(z^{-1})^{n-1} = \frac{1}{(1-z^{-1})^2}$

$\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}$

$\downarrow$ 同乘 z^{-1}

注：z是连续变量，n是离散变量 $\qquad \sum_{n=0}^{\infty} n(z^{-1})^{n} = \frac{z}{(z-1)^2}$，$|z|>1$.

$nu[n] \sim \frac{z}{(z-1)^2}$，$|z|>1$.

$n^2u[n] \sim \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$.

* $\cos(\omega_0 n)u[n] \sim \frac{z(z-\cos\omega_0)}{z^2-2z\cos\omega_0+1}$

* $\sin(\omega_0 n)u[n] \sim \frac{z\sin\omega_0}{z^2-2z\cos\omega_0+1}$ $\qquad |z|>1$

- Z变换的性质

1) 线性性 $\qquad$ ROC 取交集

2) 位移性 $\qquad$ 正次幂 ROC 不含 $|z|=\infty$

(1) $x(n) \sim X(z)$. $\qquad x(n-m) \sim z^{-m}X(z)$.

双边Z变换 $\qquad x(n+m) \sim z^{m}X(z)$ $\qquad$ ROC 只影响 $|z|=0$ 和 $|z|=\infty$ 处

(2) 单边Z变换：$x(n) \sim X(z)$. $\qquad x(n+m)u[n] \sim z^m\left(X(z)-\sum_{k=0}^{m-1}x[k]z^{-k}\right)$

* $x[n-1] \sim z^{-1}X(z)+x[-1]$

$x[n-2] \sim z^{-2}X(z)+z^{-1}x[-1]+x[-2]$.

* 也可以把 0时刻之前的 凑成 $\sum\delta[n]$ 形式.

3) 序列线性加权（Z域微分性质）

$\mathcal{Z}(x[n]) = X(z) \qquad \mathcal{Z}(nx[n]) = -z\frac{d}{dz}X(z)$ *

$\frac{1}{(1-az^{-1})^{m+1}} = \frac{z^{m+1}}{(z-a)^{m+1}} \sim \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}{m!}a^n u[n]$.

$|z|>|a|$

4) Z域尺度变换（序列指数加权）

$\mathcal{Z}(x[n]) = X(z)$. $\rightarrow$ $\mathcal{Z}[a^n x[n]] \Leftrightarrow X\left(\frac{z}{a}\right)$

$R_1<|z|<R_2 \qquad R_1<\left|\frac{z}{a}\right|<R_2$

$e^{j\omega_0 n}x(n) \leftrightarrow X(e^{-j\omega_0 n}z)$ $\longleftarrow$ 数字角频率. $\omega_0\in[0,\pi]$.

即 DTFT 的频移

5）共轭对称性： $x[n] \sim X(z),\ R$

$x^*[n] \sim X^*(z^*),\ R$

6）时间反转： $x[-n] \sim X(z^{-1})$. ROC: $\frac{1}{R}$ （内外翻转）

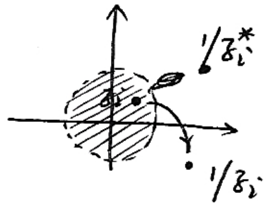
零极点 $z_i \longrightarrow 1/z_i$

$x[n]$ $\quad$ $x[-n]$

$\downarrow$

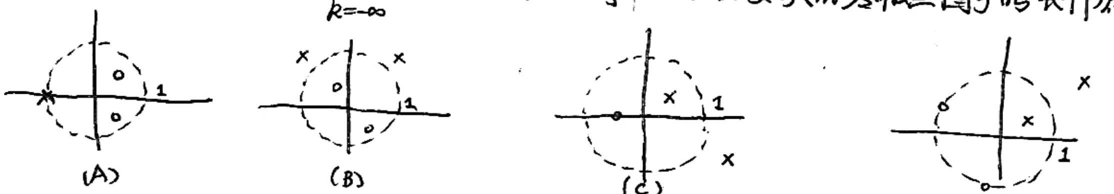
z_i^* 也是零/极点 $\quad$ $1/z_i^*$

$x[-n]$.



共轭倒量对称

e.g. 自相关序列 $r[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x^*[k]\, x[k-n]$ 其Z变换的零极点图可能长什么样？



(A) (B) (C) (D)

［解］离散卷积形式. $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, x[n-k]$

$$r[n] = x^*[n] * x[-n] \sim R(z) = X^*(z^*)\, X(z^{-1})$$

若 z_0 是 $X(z)$ 的极点 $\longrightarrow$ z_0^* 和 $1/z_0$ 同时出现

若 $|z_0| = 1$. $z_0 = e^{j\theta}$. $z_0^* = e^{-j\theta}$. $1/z_0 = e^{j(\pi+\theta)}$ $\longrightarrow$ D)可能

7）时域内插.

$x[n] \sim X(z)$ ROC: R

$$x_k[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{k}\right] & n 为 k 整数倍 \\ 0 & 其它 \end{cases} \qquad x_k[n] \sim X(z^k)$$

8）初值定理 $\quad$ $x[n]$ 因果信号.

$$x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z)$$

$$\underline{\overset{0}{\downarrow}\ x[n+1]} \sim z^{+1} X(z)$$

$$* \quad x[1] = \lim_{z\to\infty} \left(z^{+1} X(z)\right)$$

终值定理. $\quad$ $x[n]$ 因果信号

$x[n] \longleftrightarrow X(z)$. 除了在 $z=1$ 有一阶极点外. 其它极点都在圆内

则 $\lim_{n\to\infty} x[n] = \lim_{z\to 1} (z-1) X(z)$

9）卷积： $x_1[n] * x_2[n] \sim X_1(z)\, X_2(z)$

• 反Z变换

1) 部分分式展开 $\longrightarrow \sum_i \frac{A_i}{(1-a_i z^{-1})^{m_i}} = \sum_i \frac{A_i z^{m_i}}{(z-a_i)^{m_i}}$　　真分式.(分子比分母少一阶)

转化为真分式? ① 拆成和

② $z \cdot \underbrace{\boxed{\frac{X(z)}{z}}}_{\text{真分式}}$ → 拆. → 时移.

化成和形式: 上.下都非负次幂

不同ROC下形式不同!

无重根 vs 有重根 $\longrightarrow$ e.g. $\frac{z}{(z-4)^3} = z^{-2}\frac{z^3}{(z-4)^3} \sim \frac{(n+1)(n+2)}{2!} \cdot 4^n u[n]$

☆ (m=2! 2+1=3)

时移

$\frac{(n-2+1)(n-2+2)}{2!} 4^n u[n-2]$

↓

直接 $\frac{z}{z-a} \sim a^n u[n] \quad |z|>|a|$

$-a^n u[-n-1] \quad |z|<|a|$

~~2) 长除法~~

~~e.g.~~ $\cancel{\frac{1}{z^2-\frac{1}{4}}}$ $\cancel{z^2-\frac{1}{4} \overline{)\,1}}$ $\cancel{z^{-2}}$ $\cancel{1 - \frac{1}{4}z^{-2}}$ $\cancel{\frac{1}{4}z^{-2}}$

e.g. $\frac{z^2}{(z-a)^2}$　　$X(z) = \frac{z}{z-a} \cdot \frac{z}{z-a}$

$x[n] = a^n u[n] * a^n u[n]$

$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a^m u[m]\, a^{n-m} u[n-m] = \sum_{m=0}^{n} a^m \cdot a^{n-m} = a^n \sum_{m=0}^{n} 1$

$= a^n (n+1)\, u[n]$

e.g. $\frac{z(z^N-a^N)}{(z-a)(z^N-1)} = \frac{1}{z^{N-1}} \frac{z^N-a^N}{z-a} \frac{z^N}{z^N-1} = \boxed{\frac{1-(az^{-1})^N}{1-az^{-1}}} \sum_{m=0}^{+\infty} z^{-mN}$

$= \boxed{\sum_{n=0}^{N-1} a^n z^{-n}} \cdot \sum_{m=0}^{+\infty} z^{-mN}$

$x[n] = a^n \left[u[n]-u[n-N]\right] * \sum_{m=0}^{+\infty} \delta[n-mN]$　　周期延拓

2) 幂级数展开法: $\ln(1-w) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{w^n}{n}$ ……

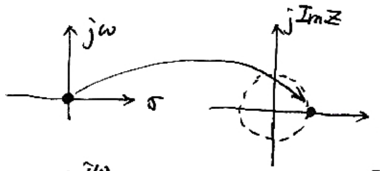
- Z平面与S平面的关系

S平面 ~ S域直角坐标系 $s=\sigma+j\omega$

Z平面 ~ $z=e^{sT}=e^{(\sigma+j\omega)T}=e^{\sigma T}\cdot e^{j\omega T} =: re^{j\theta}$ 　　$\begin{cases} r=e^{\sigma T} \\ \theta=\omega T = 2\pi\dfrac{\omega}{\omega_s} \end{cases}$

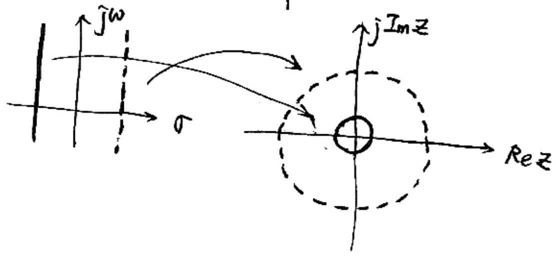
（T：取样时间间隔；$re^{j\theta}$：极坐标系；ω_s：sample 抽样角频率）

1) 原点 $\begin{cases}\sigma=0\\ j\omega=0\end{cases} \rightarrow \begin{cases} r=1 \\ \theta=0\end{cases}$ 即 $z=1$



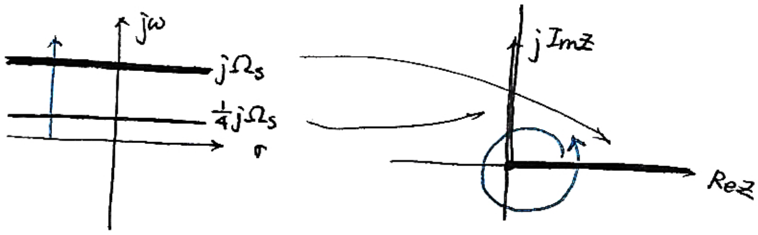
2) $\sigma=\sigma_0$（平行 jω 轴直线）$\longrightarrow r=\text{const}$
即 圆

左半平面 ~ 单位圆内
jω轴 ~ 单位圆
右半平面 ~ 单位圆外



3) $\omega=\omega_0$（平行σ轴直线）$\longrightarrow \theta=\text{const}$
即 射线

$\omega=\Omega_s$ 时转了一圈.



* 其它关系见下学期.

- 系统函数与z变换

$H(z) \longleftrightarrow h[n]$

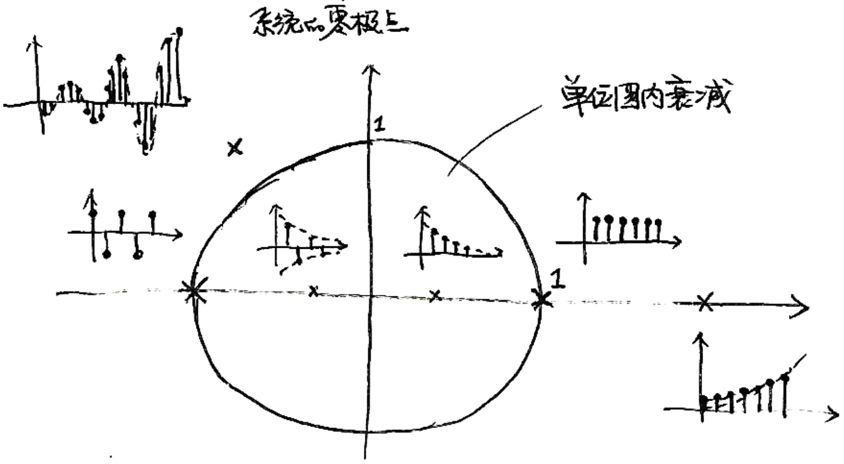
零极点图　差分方程　方框图

因果系统 $\longleftrightarrow$ 1) 定义
2) $h[n]$ 因果信号
3) $H(z)$：
ROC是最外侧极点外部. 包括 $|z|=\infty$

稳定系统 $\longleftrightarrow$ 1) 定义
2) $\left|\sum |h[n]|\right| < \infty$.
3) $H(z)$：ROC 包含单位圆.

$Y(z)=H(z)X(z)=\dfrac{M(z)}{N(z)}\,\dfrac{Q(z)}{P(z)}$

（$N(z)$：系统的零极点）



$H(z) \longrightarrow H(e^{j\omega})$

$H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}$ （要求 $H(z)$ ROC包含单位圆）