6. $\boxed{\text{Cauchy 收敛原理}}$

反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ 对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $A_0 \geq a$，使得对任意 A，$A' \geq A_0$ 有 $\left|\int_A^{A'} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$。

- 积分第二中值定理

$\boxed{\text{积分第二中值定理}}$ $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调，则存在 $\xi \in [a,b]$，

使 $$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx$$

只证 $f(x)$ 连续且 g' 在 $[a,b]$ 上可积的情况。

[证] 记 $F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dF(x) \overset{\because F(a)=0}{=} F(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx$$

$$= g(b)\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b F(x)\,g'(x)\,dx$$ 积分第一中值定理

$$= g(b)\int_a^b f(x)\,dx - F(\xi)\int_a^b g'(x)\,dx$$

$$= g(b)\int_a^b f(x)\,dx - [g(b)-g(a)]\int_a^\xi f(x)\,dx$$

$$= g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx$$

- Abel 判别法与 Dirichlet 判别法

$\boxed{\text{Abel 判别法}}$ $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛，$g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调有界 $\Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ 收敛

$\boxed{\text{Dirichlet 判别法}}$ $F(A) = \int_a^A f(x)\,dx$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界，$g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调且 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$

[证明] Abel 判别法. 设 $|g(x)| \leq G$ $(x\in[a,+\infty))$

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \text{ 收敛} \xrightarrow{\text{Cauchy 收敛}} \exists A_0 \geq a.\ \text{对} \forall A, A' \geq A_0 \text{有} \left|\int_A^{A'} f(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2G}.$$

$$\left|\int_A^{A'} f(x)g(x)\,dx\right| \leq |g(A)|\cdot\left|\int_A^\xi f(x)\,dx\right| + |g(A')|\left|\int_\xi^{A'} f(x)\,dx\right|$$

$$\leq G\cdot\left|\int_A^\xi f(x)\,dx\right| + G\cdot\left|\int_\xi^{A'} f(x)\,dx\right|$$

$$< G\cdot\frac{\varepsilon}{2G} + G\cdot\frac{\varepsilon}{2G} = \varepsilon \qquad (\because \xi \geq A \geq A_0)$$

Dirichlet 判别法.

$$\left|\int_A^{A'} f(x)g(x)\,dx\right| \leq \underbrace{|g(A)|}_{\downarrow\ 0}\cdot\underbrace{\left|\int_A^\xi f(x)\,dx\right|}_{\text{有界}} + \underbrace{|g(A')|}_{\downarrow\ 0}\underbrace{\left|\int_\xi^{A'} f(x)\,dx\right|}_{\text{有界}} < \varepsilon.$$

重要~~…~~反常积分: $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ ← D判. 收 → $\boxed{\text{条件收敛}}$ $\quad \left|\frac{\sin x}{x}\right| \geq \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1-\cos 2x}{2x} = \underbrace{\frac{1}{2x}}_{(\text{发})} - \underbrace{\frac{\cos 2x}{2x}}_{(\text{收})}$ ← D判

- 无界函数反常积分的收敛判别法

→ 无穷限反常积分

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx \quad (a是瑕点). \quad 令\ x = a+\frac{1}{t}.$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{1/(b-a)}^{1/\varepsilon} f(a+\frac{1}{u})\frac{du}{u^2} = \int_{\frac{1}{b-a}}^{\infty} f(a+\frac{1}{u})\frac{du}{u^2}.$$

负号放这了

蓝：比较判别法

1. (Cauchy 判别法) 非负函数 $f(x)\in C[a,b]$. a 为瑕点.

若对 $\forall x>a$ $(x\to a)$. $\exists M>0,\ q<1$. $f(x)\leqslant \frac{M}{(x-a)^q} \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ 收敛

对 $\forall x>a$ $(x\to a)$ $\exists N>0,\ q\geqslant 1$. $f(x)\geqslant \frac{N}{(x-a)^q} \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ 发散

* q 积分可替换为任意收敛积分

* q 积分 - - - - 任意发散积分

2. (极限判别法) $f(x)\in C[a,b]$. $f(x)\geqslant 0$.

$$\lim_{x\to a^+}(x-a)^q f(x) = l$$

1) $0<q<1$, $0\leqslant l<+\infty$. $\int_a^b f(x)\,dx$ 收敛

2) $q\geqslant 1$, $0<l\leqslant+\infty$. $\int_a^b f(x)\,dx$ 发散.

也可替换 收敛/发散积分

3. 绝对收敛必收敛. 条件收敛

4. (Cauchy 收敛原理)

$\int_a^b f(x)\,dx$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$, 使对 $\forall\eta,\eta'\in(0,\delta)$, 有:

$$\left|\int_{b-\eta}^{b-\eta'} f(x)\,dx\right| < \varepsilon. \qquad (b为瑕点)$$

5. (Abel 判别法) $\int_a^b f(x)\,dx$ 收敛, $g(x)$ 在 $[a,b)$ 上单调有界 $\Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)\,dx$ 收敛

(Dirichlet 判别法) $F(\eta)=\int_a^{b-\eta} f(x)\,dx$ 在 $(0,b-a]$ 上有界,

$g(x)$ 在 $[a,b)$ 上单调且 $\lim_{x\to b^-} g(x)=0$.

[定理] $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛, $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续. 则 $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$

[证] 反证. 存在 $\varepsilon_0>0$. $\forall X>a$. $\exists x_0>X$. $|f(x_0)|\geqslant\varepsilon_0$. 不妨设 $f(x_0)\geqslant\varepsilon_0>0$.

一致连续. 对 $\frac{\varepsilon_0}{2}>0$. $\exists\delta\in(0,1]$. $\forall x',x''>a$. 使 $|x'-x''|<\delta$. 就有 $|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon_0}{2}$

对任意给定 $A_0\geqslant a$. 取 $x_0=A_0+1$. 对 $\forall x|\,x-x_0|<\delta_0$ 有 $|f(x)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon_0}{2}$

$\therefore f(x)>f(x_0)-\frac{\varepsilon_0}{2}\geqslant\frac{\varepsilon_0}{2}>0.$

取 $A=x_0-\frac{\delta_0}{2}$. $A'=x_0+\frac{\delta_0}{2}$. $A>A_0$, $A'>A_0$.

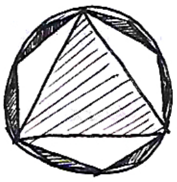
且 $\left|\int_A^{A'} f(x)\,dx\right| = \left|\int_{x_0-\frac{\delta_0}{2}}^{x_0+\frac{\delta_0}{2}} f(x)\,dx\right| > \frac{\varepsilon_0}{2}\delta_0 > \text{“}\varepsilon\text{”}$

即 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 不收敛. 矛盾

数学分析 Ⅱ

数项级数

- 常数项级数



作圆内接正 3×2^n 边形

$S_0 = S_{正\Delta}$. $S_i =$ 比 $(i-1)$ 增加的面积.

$S_{圆} = S_0 + S_1 + \cdots + S_n + \cdots$

一个无穷数列 $\{u_n\}$. 称 $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ (无穷和) 为 $\boxed{常数项无穷级数}$.

又称 $\boxed{常数项级数}$.

记作 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 或 $\sum u_n =: S$.

$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ 称为 数列 $\{u_n\}$ 的部分和.

若 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在. 称 无穷级数 发散.

存在　　　　收敛

级数收敛时. $\boxed{余项}$ $r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$

$\boxed{等比级数/几何级数}$: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$ $(a \neq 0)$

(1) $|q| \neq 1$. $S_n = a \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q}$.

(i) $|q|>1$. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \text{DNE}$. 发散无穷级数

(ii) $|q|<1$ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q}$ 无穷级数收敛 ← 可以 $q=0$

(2) $|q|=1$.

(i) $q=1$. $S_n = na \to +\infty$ 无穷级数发散

(ii) $q=-1$. $S_n = \begin{cases} a & (n奇) \\ 0 & (n偶) \end{cases}$ 无穷级数发散

综上 $\begin{cases} 几何级数收敛. & |q|<1 \\ \qquad 发散 & |q| \geq 1. \end{cases}$

- 级数收敛的必要条件

第一种判断级数发散的方法

$\sum u_n$ 收敛 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. $\Leftrightarrow$ $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0 \Rightarrow \sum u_n \text{ 发散}}$

[注意] 调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散. 但 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

$$\boxed{\begin{aligned} \arctan\frac{1}{2n^2} &= \arctan\frac{1}{2n-1} - \arctan\frac{1}{2n+1} \\ &\neq \arctan(2n+1) - \arctan(2n-1) \end{aligned}}$$

$\left(右 = \arctan\dfrac{\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{2n+1}+1} = \arctan\dfrac{(2n+1)-(2n-1)}{1+4n^2-1} = \arctan\dfrac{2}{4n^2} = 左 \right)$

• 无穷级数的性质

1. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$. 则 $\sum_{n=1}^{\infty} c u_n = cS$. ($c$为常数)

• 级数乘以非零常数后敛散性不变.

2. $S=\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. $\sigma=\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. 则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = S \pm \sigma$

[注意] 发散之和未必发散.

e.g. $u_n=(-1)^{2n}$. $v_n=(-1)^{2n+1}$. $u_n+v_n=0$

e.g. $u_n=\frac{1}{n}$ $v_n=-\frac{1}{n+1}$ $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)=1$

3. 在级数前加上或减去$\boxed{\text{有限项}}$, 不会影响敛散性. $\sum_{n=k}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n - \underbrace{\sum_{n=1}^{k-1} u_n}_{\text{常数}}$

4. 收敛级数加括号后所形成的级数仍收敛于原级数.

i.e. $(u_1+u_2)+(u_3)+\cdots+(u_i+\cdots+u_k)+\cdots+(u_t)+\cdots = u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$

$S_n=\sum_{k=1}^{n} u_n$. $\sigma_n=$ 左边那个级数的部分和. 则 σ_n 是 S_n 的一个$\boxed{\text{子列}}$.

收敛数列必有收敛子列 且 极限相同 $\longrightarrow$ 收敛级数加括号后形成的级数 收敛 收敛于原级数

[注意] 加括号后收敛, 原级数未必收敛.

e.g. $(-1+1)+(-1+1)+\cdots+(-1+1)+\cdots = 0$.

而 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 必发散.

$(-1)+(+1-1)+\cdots+(+1-1)+\cdots=-1$

第二种判别级数发散的方法

$\boxed{\text{加括号后收敛但收敛于不同级数, 原级数发散}}$

第三种判别级数发散的方法

若数列发散, 其收敛子列收敛于不同极限 / 有发散子列 $\longrightarrow$ $\boxed{\text{加括号后有发散形式的级数发散}}$

• 柯西收敛原理

$\boxed{\text{Cauchy 收敛原理}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$收敛 $\iff \forall \varepsilon>0$, $\exists N \in \mathbb{N}^*$, $n>N$时. $\forall p \in \mathbb{N}^+$. $|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|<\varepsilon$.

* 本质: $\{S_n\}$ 的 Cauchy 收敛原理 $|S_{n+p}-S_n|$

e.g. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ $\left|\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}\right| < \frac{1}{n(n+1)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)} = \frac{1}{n}-\frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

• 数列的上、下极限

[极限点] 有界数列 $\{x_n\}$. 必存在一个子列 $\{x_{n_k}\}$ 使 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=\xi$. 称 ξ 为 $\{x_n\}$ 的一个<u>极限点</u>。

↑ Bolzano–Weierstrass 定理

“ξ 是极限点” $\Longleftrightarrow$ “$\{x_n\}$ 组成的数集中落在 ξ 的任意小邻域中的数都有无穷多个.”

或: “$\forall\varepsilon>0$, 存在 $\{x_n\}$ 中无穷多项属于 ξ 的 ε 邻域.”

记 $E=\left\{\xi \mid \xi\text{是}\{x_n\}\text{极限点}\right\}$.   * 自用符号: $\{\xi\}_{\{x_n\}}$.

[定理] $\sup E=\operatorname{Max}E=:H$, $\inf E=\operatorname{Min}E=:h$.

[证] ∵ $\{x_n\}$ 有界, 故 E 有界   ∴ $\exists\ \xi_k\in E$ $(k=1,2,\cdots)$ $\lim\limits_{k\to\infty}\xi_k=H$. (上确界定义)

(不要求 $\xi_i\neq\xi_j$, $i\neq j$)   不妨取 $H-\varepsilon_k<\xi_k\le H<H+\varepsilon_k$

取 $\varepsilon_k=\frac{1}{k}$ $(k=1,2,\cdots)$. 则在 $U(\xi_1,\varepsilon_1)$ 中有无数项 x_n. 选1个记作 x_{n_1}.

$U(\xi_2,\varepsilon_2)$ 中有无数项 x_n. 选1个记作 x_{n_2}

⋮

核心: 构造收敛于H的子列

$U(\xi_k,\varepsilon_k)$ 中有无数项 x_n. 选1个记作 $x_{n_k}\in U(\xi_k,\varepsilon_k)$.

⋮

得到无穷数列 $\{x_{n_k}\}$. 而 $|x_{n_k}-H|=|x_{n_k}-\xi_k|+|\xi_k-H|<\varepsilon_k+\varepsilon_k=\frac{2}{k}$.

即 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=H$. ∴ $H\in E$.   ∴ $H=\sup E=\operatorname{Max}E$ (∵ $\operatorname{Max}E\le\sup E$)

[上极限] 定义 $\underset{\substack{\| \\ \operatorname{Max}E}}{H}=:\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n$

[下极限] $\underset{\substack{\| \\ \operatorname{Min}E}}{h}=:\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n$.

[定理] $\{x_n\}$ 有界数列 $\{x_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n=\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n$

~~[Pf]~~

[极限点(推广定义)] 数列 $\{x_n\}$. 存在一个子列 $\{x_{n_k}\}$ 使 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\xi$ $(-\infty\le\xi\le+\infty)$

称 ξ 为 $\{x_n\}$ 的一个<u>极限点</u>.

其中 $\xi=+\infty\,(-\infty)$ 是 $\{x_n\}$ 极限点 $\Leftrightarrow$ $\forall G>0$. $\exists\{x_n\}$ 中无穷多项 使 $x_n>G$ $(x_n<G)$.

[定理] $\{x_n\}$ 有界数列.

(1) $\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n=H$ $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$. (i) $\exists N\in\mathbb{N}^+$. $n>N$ 有 $x_n<H+\varepsilon$ ← 有界的要求

(ii) $\{x_n\}$ 中有无穷多项 使 $x_n>H-\varepsilon$

(把 $H-\varepsilon<x_n<H+\varepsilon$ 拆开, 弱化一个条件)

[证明] $\Rightarrow$: $\forall \varepsilon>0$, 在 $[H+\varepsilon,+\infty)$ 中至多有有限项 ($\because$ H是最大的极限点) 反证可证 H不是 Max.

设有限项中最大项为 x_{n_0} 取 $N=n_0$. 满足(i)

H是极限点 $\therefore U(H,\varepsilon)$ ($\forall\varepsilon>0$) 有无穷多项.

无穷多项满足 $x_n > H-\varepsilon$

$\Leftarrow$: 由(i). $\forall \varepsilon>0$. 有 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \le H+\varepsilon$. 由 ε 任意性. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \le H$.

由(ii). $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \ge H-\varepsilon$. 由 ε 任意性 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \ge H$

$\therefore \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = H$. □

(2) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = h \iff \forall \varepsilon>0$ (i) $\exists N\in\mathbb{N}^+$, $n>N$ 有 $x_n>h-\varepsilon$.

(ii) $\{x_n\}$中有无穷多项使 $x_n<h+\varepsilon$.

定理 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 是两数列:

(1) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n) \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n$

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n) \ge \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n + \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n$.

要求: 右侧不是待定型 $\frac{0}{0}$, $\frac{*}{\infty}$.

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在. 可将"$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$"和"$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$"替换为"$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$" 且全改"=".

[证]. 记 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \alpha_n = H_\alpha$. ($\alpha\in\{x,y\}$) $\forall\varepsilon>0$. $\exists N$ 使 $n>N$. $x_n<H_x+\varepsilon$. $y_n<H_y+\varepsilon$

(1) $x_n+y_n<H_x+H_y+2\varepsilon$. $\therefore \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n)\le H_x+H_y+2\varepsilon$ $(\varepsilon\to 0)$ □.

(2) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}[(x_n+y_n)-x_n] \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n) + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(-x_n)$.

即 $\begin{cases} \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n) \ge \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n \\ \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n) \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n \end{cases}$ $\Rightarrow$ 取等. □

定理 $\{x_n\}$. $\{y_n\}$ 是两数列

(1) $x_n\ge 0$, $y_n\ge 0$. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_ny_n) \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \cdot \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n$

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_ny_n) \ge \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \cdot \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n$

要求: 右侧不是待定型 $0/0$, $*/\infty$.

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $0<x<+\infty$. 替换"$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$". "$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$"为"$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$" 且全改"=".

↑ 此处不要求 $y_n\ge 0$. 注意证明时需同时考虑 $H_x-\varepsilon$ 和 $H_x+\varepsilon$. 取Max

其它情况: 取相反数即可.

$\boxed{\text{正项级数}}$ 若 $u_n \geq 0$. 称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. (实际上是"非负项级数").

$\boxed{\text{定理}}$ 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ 部分和序列 $\{S_n\}(n=1,2,\cdots)$ 有界.

[证] "$\longrightarrow$": 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛. 则 $\{S_n\}$ 收敛 $\Rightarrow$ 收敛必有界

"$\longleftarrow$": $\because u_n \geq 0$. $\therefore \{S_n\}\uparrow$. 而 $\{S_n\}$ 有界. 故 $\{S_n\}$ 收敛. $\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

$\boxed{\text{比较判别法}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是两个正项级数

且存在 $N \in \mathbb{N}_+$. 对一切 $n > N$ 有 $u_n \leq k v_n$ (常数 $k>0$).

1) 若强级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则弱级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

2) 若弱级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则强级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

1) [证]. $v \sim \sigma_n$ 部分和 $u \sim S_n$ 部分和.

$\sum_{n=1}^{\infty} v$ 收敛 $\therefore \{\sigma_n\}$ 有界. $\therefore \{S_n\}$ 有界. 又 $\{S_n\}\uparrow$. $\therefore \{S_n\}$ 收敛 $\sum u$ 收敛.

对比: p-积分(无穷积分) $\longleftrightarrow$ p-级数

$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ $\qquad$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ $(p>0)$

<1> $p \leq 1$ 发散

<2> $p>1$ 收敛

$= \frac{1}{(p-1)} \cdot \frac{1}{a^{p-1}}$

<1> $p \leq 1$. $\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}$. 调和级数发散. 发散

<2> $p>1$. $n-1 \leq x \leq n$ 时. $\frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{x^p}$.

则 $\frac{1}{n^p} = \int_{n-1}^{n} \frac{1}{n^p}dx \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x^p}dx$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \leq 1 + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = L = \frac{1}{p-1} + 1$

收敛

或: $\frac{1}{n^p} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}\cdot\left(\frac{1}{(n-1)^{p-1}} - \frac{1}{(n-1)^p}\right)$

而 $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}}\right) = 1 - \frac{1}{(n+1)^{p-1}}$ 收敛

收敛

[完全一致]

反常积分的比较判别法

极限形式

$\boxed{\text{比较判别法极限形式}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. 正项级数. $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$

(1) $0 < l < \infty$. 级数同收敛. 同发散

(2) $l = 0$. $\sum v_n$ 收敛. $\sum u_n$ 收敛

(3) $l = \infty$. $\sum v_n$ 发散. $\sum u_n$ 发散

可取 $v_n = \frac{1}{n^p}$ $\longrightarrow$ 直接用结论

[证明] 用 $l - \varepsilon \leq \frac{u_n}{v_n} \leq l + \varepsilon$ 即可.

比值判别法（D'alembert 判别法）

$\overline{\lim}=\overline{\rho}$. $\underline{\lim}=\underline{\rho}$

[推广]

(i) $\overline{\rho}<1$ 收敛

(ii) $\underline{\rho}>1$ 或 $\underline{\rho}=\infty$. 发散

设 $\sum u_n$ 为正项级数 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$. 则：

(i) $\rho<1$. 收敛

(ii) $\rho>1$ 或 $\rho=\infty$. 发散

[证] 利用 $\rho-\varepsilon<\frac{u_{n+1}}{u_n}<\rho+\varepsilon$ 证. $\rho<1\to\sum(\rho+\varepsilon)^k u_{N+1}$ 收敛

$\sum\limits_{n=N}u_n<$ 收敛.

$\rho>1\to\ >\sum(\rho-\varepsilon)^k u_{N+1}$ 发散.

注意：$\rho=1\longrightarrow$ 无法判断. 可能收敛 可能发散 e.g. p-级数

根值判别法（Cauchy 判别法）

设 $\sum u_n$ 为正项级数 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$. 则

(i) $\rho<1$. 级数收敛

(ii) $\rho>1$ 或 $\rho=\infty$ 级数发散

[证] 利用 $(\rho-\varepsilon)^n<u_n<(\rho+\varepsilon)^n$. (取 $\varepsilon<|1-\rho|$)

[推广] $\overline{\lim}=\overline{\rho}$. $\underline{\lim}=\underline{\rho}$

(i) $\overline{\rho}<1$ 收敛 (ii) $\overline{\rho}>1$ 或 $\overline{\rho}=\infty$ 发散

[注意] $\rho=1$ 依然无法判断 e.g. p-级数

比值变化更大，根值变化更小 $\longrightarrow$ D'alembert 判别法范围小于 Cauchy 判别法

Cauchy 更敏锐

能用 D 判 一定能用 C 判. 原因：$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{x_{n+1}}{x_n}\le\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{x_n}\le\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{x_n}\le\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{x_{n+1}}{x_n}$

e.g. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots$.

Raabe 判别法

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ ($x_n\neq0$) 是正项级数. $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=\rho$. 则

(1) $\rho>1$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛. (2) $\rho<1$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 发散

[证明] 设 $s>t>1$. $f(x)=1+sx-(1+x)^t$. 则 $f(0)=0$. $f'(0)=s-t>0$

故 $\exists\delta>0$. 使 $x\in(0,\delta)$ 时. 有 $1+sx>(1+x)^t$ 成立 ($\because f(x)>0$) $\longrightarrow$ 取 $\delta<\frac{1}{n}$

$\rho>1$ 时：$\rho>s>t>1$ (取 s,t) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=\rho>s>t$

对充分大的 n 有 $\frac{x_n}{x_{n+1}}>1+\frac{s}{n}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^t=\frac{(n+1)^t}{n^t}$

则有 $x_n\cdot n^t>x_{n+1}\cdot(n+1)^t$.

$\therefore\{n^t x_n\}$ 从某一项开始 $\downarrow$. 即 $n^t x_n\le A\Rightarrow x_n\le\frac{A}{n^t}$ $t>1\longrightarrow p$-级数 收敛

故收敛

$\rho<1$ 时. $\frac{x_n}{x_{n+1}}<1+\frac{1}{n}$. (充分大 n) $=\frac{n+1}{n}$. 则 $(n+1)x_{n+1}>nx_n$.

$\{nx_n\}$ 从某一项开始 $\uparrow$ 即 $nx_n\ge A$. $x_n\ge\frac{A}{n}$. (发散)

故发散

$\rho=1$： e.g. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^q n}$ 使 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=\rho=1$.

$q>1$ 收敛　　　$q\le 1$ 发散

$\boxed{\text{积分判别法}}$ $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有定义. $f(x)\ge 0$. 设 $f(x)$ 在任意有限区间 $[a,A]$ 上 Riemann 可积.

取一单调增且趋于 $+\infty$ 的数列 $\{a_n\}$： $a=a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots$

$$u_n=\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,dx.$$

反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 与正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 同时收敛或同时发散于 $+\infty$.

且 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx=\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,dx$.

特别地，当 $f(x)\downarrow$. 取 $a_n=n$. 则反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 与正项级数 $\sum\limits_{n=N}^{\infty} f(n)$.
($N=[a]+1$) 同时收敛或同时发散

[证] 设 u_n 部分和 S_n.

$\forall A>a$. $\exists n$ 使 $a_n\le A<a_{n+1}$. 则 $S_{n-1}\le \int_a^A f(x)\,dx\le S_n$

$\{S_n\}$ 收敛 $\longrightarrow \lim\limits_{A\to\infty}\int_a^A f(x)\,dx$ 收敛 且 收敛于相同极限

$\{S_n\}$ 发散 $\longrightarrow \lim\limits_{A\to\infty}\int_a^A f(x)\,dx$ 发散

特别地，取 $a_n=n$. 当 $n\ge N=[a]+1$. $f(n+1)\le u_n=\int_n^{n+1} f(x)\,dx\le f(n)$
$f(x)\downarrow$

故 $\sum\limits_{n=N}^{\infty} f(n)$ 与 $\sum\limits_{n=N}^{\infty} u_n$ 同敛散

从而 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ 同敛散

[注意] 由反常积分收敛性 $\longrightarrow$ 级数收敛性 不需要 $f(x)\ge 0$ 条件. 逆向不能省条件.

e.g. $f(x)=\sin x$. $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ 发散. 取 $a_n=2n\pi$. $u_n=\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,dx=0$ 收敛

- 任意项级数

$\boxed{\text{级数的 Cauchy 收敛原理}}$ 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛 $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon>0$. $\exists N\in \mathbb{N}^+$. 使

$$|x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots x_m|=\left|\sum_{i=n+1}^{m} x_i\right|<\varepsilon$$

对一切 $m>n>N$ 成立

$\Longleftrightarrow \cdots\cdots |x_{n+1}+\cdots+x_{n+p}|<\varepsilon,\ \cdots\cdots$

特别地，取 $p=1$ ($m=n+1$). 退化为"必要条件"：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$.

$\boxed{\text{Leibniz 级数(交错级数)}}$ 设 $u_n>0$. $u_1-u_2+u_3-\cdots+(-1)^{n-1}u_n+\cdots=\sum u$.

$\boxed{\text{Leibniz 判别法}}$ 若交错级数满足条件: 1) $|u_n|\ge|u_{n+1}|$. 2) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

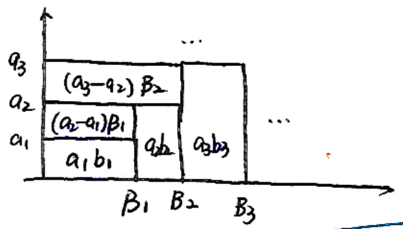
则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛 且 $S\le u_1$. 余项 $|r_n|\le u_{n+1}$ $(\forall n)$

$\boxed{\text{Abel 变换}}$ $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 是两数列. 记 $B_k=\sum\limits_{i=1}^{k}b_i$ $(k=1,2,\cdots)$

$$\text{则}\quad \sum_{k=1}^{p}a_kb_k=a_pB_p-\sum_{k=1}^{p-1}(a_{k+1}-a_k)B_k$$

[证] $$\sum_{k=1}^{p}a_kb_k=a_1B_1+\sum_{k=2}^{p}a_k(B_k-B_{k-1})=a_1B_1+\sum_{k=2}^{p}a_kB_k-\sum_{k=2}^{p}a_kB_{k-1}$$

$$=\sum_{k=1}^{p-1}a_kB_k+a_pB_p-\sum_{k=1}^{p-1}a_{k+1}B_k=-\sum_{k=1}^{p-1}(a_{k+1}-a_k)B_k+a_pB_p\qquad\square$$



$\boxed{\text{离散版本的分部积分}}$!

$\boxed{\text{Abel 引理}}$ 设 (1) $\{a_n\}$ 单调数列. (2) $\{B_k\}$. ($B_k=\sum\limits_{i=1}^{k}b_i$, $k=1,2,\cdots$) 有界.

即: 存在 $M>0$. $\forall k$. 成立 $|B_k|\le M$

$$\text{则}\quad \left|\sum_{k=1}^{p}a_kb_k\right|\le M(|a_1|+2|a_p|)$$

[证] $$\left|\sum_{k=1}^{p}a_kb_k\right|=\left|a_pB_p-\sum_{k=1}^{p-1}(a_{k+1}-a_k)B_k\right|\le \underbrace{M|a_p|+M|a_1|}_{M|a_p|+M(a_p-a_1)}+M|a_p|=M(|a_1|+2|a_p|)$$

$\boxed{\text{Abel-Dirichlet 判别法(级数)}}$ 若以下两个条件有一个能满足, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛:

(1) (Abel 判别法) $\{a_n\}$ 单调有界, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛

(2) (Dirichlet 判别法) $\{a_n\}$ 单调 $\to 0$. $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}b_k\right\}$ 有界

* 和反常积分类比: (1) $\rightleftarrows$ $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调有界, $\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$ 收敛

(2) $\rightleftarrows$ $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调且 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$

$F(A)=\int_a^A f(x)\,dx$ 有界

Abel 判别法适用范围是 Dirichlet 判别法适用范围的真子集.

[证] (1) 设 $|a_n|\le M$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛, 由 Cauchy 收敛原理, $\forall\varepsilon>0$, $\exists N$ 使 $\forall n>N$, $p\in N^+$, 有 $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}b_k\right|<\varepsilon$ 成立.

由 Abel 引理得: $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}a_kb_k\right|<\varepsilon(|a_{n+1}|+2|a_{n+p}|)\le \underset{\text{有限量}}{3M}\varepsilon\longrightarrow 0$.

Cauchy 收敛原理, 得证

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. $\forall\varepsilon>0$ $\exists N$ 使 $n>N$ 成立 $|a_n|<\varepsilon$. 设 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}b_k\right|\le M$. 令 $B_k=\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}b_k$

$B_k=\left|\sum\limits_{k=1}^{n+k}b_k-\sum\limits_{k=1}^{n}b_k\right|\le 2M$. $\longrightarrow$ Abel 引理: $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}a_kb_k\right|<6M\varepsilon$.

e.g. $\sum (\sin nx)\, a_n$ 收敛

$x\neq 2k\pi$ 时有 $2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\sin kx \xlongequal{\text{和差化积}} \cos\frac{x}{2}-\cos\frac{2n+1}{2}x \Rightarrow \left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|\le \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}$

再用 Dirichlet 判别法

条件收敛与绝对收敛

绝对收敛必收敛。（三角不等式 + Cauchy 收敛）　逆向不可. e.g. $\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n}$

$\sum x_n$ 为任意项级数，定义：

$$x_n^+=\frac{|x_n|+x_n}{2}=\begin{cases}x_n, & x_n>0\\ 0, & x_n\le 0\end{cases}\quad (n=1,2,\cdots)\longrightarrow \text{正项级数}$$

$$x_n^-=\frac{|x_n|-x_n}{2}=\begin{cases}-x_n, & x_n<0\\ 0, & x_n\ge 0\end{cases}\quad (n=1,2,\cdots)\longrightarrow \text{正项级数}$$

有：$x_n=x_n^+-x_n^-$，$|x_n|=x_n^++x_n^-$　$(n=1,2,\cdots)$

定理 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 绝对收敛. 则 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^+$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^-$ 都收敛；$(\because 0\le x_n^+\le|x_n|,\ 0\le x_n^-\le|x_n|)$

$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 条件收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^+$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^-$ 都发散到 $+\infty$.

绝对收敛级数的性质：

1) 绝对收敛级数不因项位置改变而改变. 即 **加法交换律（无限意义）**.

称收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 的项重新排列得到的新级数 $\sum x_n'$ 为 $\sum x_n$ 的 **更序级数**.

条件收敛不满足： e.g. $\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

[证明] ① 正项级数. $\sum_{k=1}^{n}x_k'\le\sum_{k=1}^{\infty}x_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}x_n'$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty}x_n'\le\sum_{n=1}^{\infty}x_n$

反之有 $\sum_{k=1}^{n}x_k\le\sum_{k=1}^{\infty}x_k' \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}x_n\le\sum_{n=1}^{\infty}x_n'$

② 任意项级数. $\sum x_n'^+=\sum x_n^+$. $\sum x_n'^-=\sum x_n^-$

得 $\sum|x_n'|$ 绝对收敛 $\Rightarrow \sum x_n'$ 收敛 且 $\sum x_n'=\sum x_n$

Riemann定理 $\sum x_n$ 条件收敛. $\forall a$. $-\infty\le a\le+\infty$

存在 $\sum x_n$ 的更序级数 $\sum x_n'$ 满足 $\sum x_n'=a$.

更序级数

[证明] 利用 $\sum x_n^+$. $\sum x_n^-$.　条件收敛 $\rightarrow \sum x_n^+=+\infty$. $\sum x_n^-=+\infty$

一些正项 ← 必存在最小的 $n_1\in\mathbb{N}^+$ 使 $x_1^++\cdots+x_{n_1}^+>a$.

一些负项 ← 必存在最小的 $m_1\in\mathbb{N}^+$ 使 $x_1^++\cdots+x_{n_1}^+-x_1^--x_2^--\cdots-x_{m_1}^-<a$

一些正项 ← 必存在最小的 $n_2\in\mathbb{N}^+$ 使 $x_1^++\cdots+x_{n_1}^++x_{n_1+1}^++\cdots+x_{n_2}^+-x_1^--\cdots-x_{m_1}^->a$

$\because x_n^+=x_n$ 或 $x_n^-=x_n$

……

得 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 的一个更序级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n'$. 部分和在 $a+x_{n_k}^+$ 与 $a-x_{m_k}^-$ 之间摆动

$\sum x_n$ 收敛 $\Rightarrow \lim_{n\to\infty}x_n^+=\lim_{n\to\infty}x_n^-=0$. $(\because x_n\to 0.\ 0\le x_n^+(x_n^-)\le|x_n|\to 0)$

2）$\boxed{\text{绝对收敛级数的乘法}}$

$\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 绝对收敛，其和为 S，σ，则对 $u_i v_j$ 按任意顺序排列得到的级数 $\sum w_n$ 绝对收敛，且 $\sum w_n = S\sigma$

$\left(\sum w_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots) \right)$

（当时大概忘记补了）

多元微积分

函数项级数

$\mathbb{R}$: N个定理互推

~~函数项级数~~

• ~~函数项级数~~

一列函数$\{u_n(x)\}$. ($x\in[a,b]$). $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

处处可导但不连续: $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}(\cos 3^n x)$ (2.3可换为其它数) Weierstrass 函数

$\longrightarrow$ 导数: $\left(\frac{3}{2}\right)^n \sin(3^n x)$

函数项级数

- 一致收敛

$\boxed{\text{点态收敛}}$：数项级数意义上的收敛。

$\boxed{\text{收敛点}}$：$\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 E ($\subset \mathbb{R}$) 上有定义。对 $x_0 \in E$，若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛，称 x_0 为 $\sum u_n(x)$ 的收敛点。

$\boxed{\text{收敛域}}$ $D := \left\{ x \in E \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ 收敛} \right\}$

$\boxed{\text{和函数}}$ $S: D \to \mathbb{R}$. $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

称 $\sum u_n(x)$ $\boxed{\text{点态收敛}}$ 于 $S(x)$.

另一表述：若 $\forall x \in D$，$\forall \varepsilon > 0$. $\exists N(x,\varepsilon)$. 使 $\forall n \geq N(x,\varepsilon)$ 成立 $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$

称 $\sum u_n(x)$ 点态收敛于 $S(x)$.

常用反例：1) 连续函数的极限不连续。

$S_n(x) = x^n$. ($x \in (-1,1]$). $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \begin{cases} 1, & x=1 \\ 0, & x \in (-1,1). \end{cases}$

2) $S_n(x) = 2^{-n}\cos(3^n x)$. $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = 0 \to \left(\lim_{n\to\infty} S_n(x)\right)' = 0$.

求导与取极限不可交换。

$S_n'(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^n \left(-\sin(3^n x)\right)$ $\lim_{n\to\infty} S_n'(x) =$ DNE.

3) 积分与取极限不可交换。

把 $[0,1]$ 中有理数排成一列 $\{r_1, r_2, \cdots\}$

$$S_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{r_1, \cdots r_n\} \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \{r_1, \cdots r_n\} \end{cases}$$

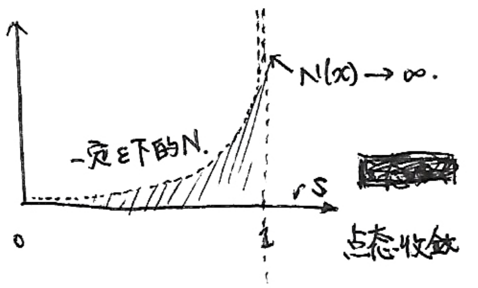
$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cup [0,1] \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \cup [0,1]. \end{cases}$$ Dirichlet 函数

黎曼可积 → [redacted] 黎曼不可积
(有穷个不连续点)　　(无穷个不连续点)

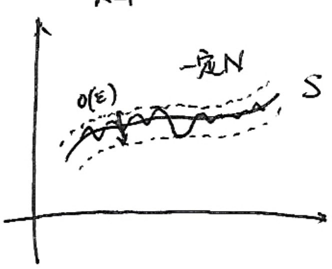
$\boxed{\text{一致收敛}}$：若 [redacted] $\forall x \in D$. $\forall \varepsilon > 0$. $\exists N(\varepsilon)$ 使 $\forall n \geq N(\varepsilon)$ 成立 $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$.

称 $\sum u_n(x)$ $\boxed{\text{一致收敛}}$ 于 $S(x)$. 记作 $S_n \rightrightarrows S$ (in D).

此时：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \rightrightarrows S(x) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ [redacted] $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \rightrightarrows S$.



点态收敛



一致收敛

$\boxed{\text{内闭一致连续}}$ 若 $\forall [a,b] \subset D$，$S_n \rightrightarrows S$ (in $[a,b]$)，称 S_n 在 D 上内闭一致收敛于 S.

一致连续的等价描述：f, g 定义在 D 上. 引入 $d(f,g) := \sup\limits_{x \in D} |f(x) - g(x)|$.
"距离"

设 $\{S_n\}$ 在 D 上点态收敛于 S. 则 $\boxed{S_n \rightrightarrows S. \iff \lim\limits_{n\to\infty} d(S_n, S) = 0.}$

$\boxed{\text{距离}}$ 非负性．对称性．三角不等式

d：① 非负：显然. ② 对称性：显然 ③ $d(f,h) = \sup |f(x) - h(x)|$

$$\begin{aligned} &= \sup |f(x) - g(x) + g(x) - h(x)| \\ &\leq \sup \left(|f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)| \right) \\ &\leq \sup |f(x) - g(x)| + \sup |g(x) - h(x)| \\ &= d(f,g) + d(g,h) \end{aligned}$$

$S_n \rightrightarrows S \iff \boxed{\forall \text{点列} \{x_n\} \text{ in } D.\ \lim\limits_{n\to\infty} [S_n(x_n) - S(x_n)] = 0.}$

用于判断非一致收敛．找一数列 使 $\lim\limits_{n\to\infty} [S_n(x_n) - S(x_n)] \neq 0$ 或 $=$ DNE

[证明] $\Leftarrow$：反证.

若 $S_n \not\rightrightarrows S$. $\exists \varepsilon > 0$ 使对 $\forall N$. $\exists n > N$ $\exists x$ 使 $|S_n(x) - S(x)| \geq \varepsilon$.

取 $N = 1$. 找到这个 n_1 和对应的 x_1. 记 $x_1 =: y_{n_1}$. S_{n_1}

$N = n_1$. n_2 x_2 $x_2 =: y_{n_2}$. S_{n_2}

……

得一数列 $\{x_n\}$. 此时有 $|S_{n_k}(y_{n_k}) - S(y_{n_k})| \geq \varepsilon$.

补充：取 $n \in \mathbb{N} \setminus \{n_1, n_2, \cdots\}$. 或者 $\lim\limits_{n\to\infty} [S_n(x_n) - S(x_n)] \geq \varepsilon > 0$. 矛盾

或者 $\lim = $ DNE. 一定不为0 □

• 一致收敛的判别法与性质

1) 连续性保持.

$$\begin{cases} S_n \rightrightarrows S \text{ in } [a,b] \\ S_n \in C[a,b] \end{cases} \Rightarrow S \in C[a,b].$$

[证] $|S(x_0+h) - S(x_0)| \leq |S(x_0+h) - S_n(x_0+h)| + |S_n(x_0+h) - S_n(x_0)| + |S_n(x_0) - S(x_0)|$

$\underline{\leq \varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon}$ □

2) $\boxed{\text{Cauchy 收敛原理}}$

$$S_n \overset{\text{in } D}{\rightrightarrows} S \iff \forall \varepsilon>0.\ \exists N.\ \forall m>n>N \text{ 有: } \forall x\in D \text{ 成立 } |S_n(x)-S_m(x)|<\varepsilon.$$

[证] $\Rightarrow$: 略　　$\Leftarrow$: $\forall x\in D$. 则 $\{S_n(x)\}$ 是 Cauchy 列. $\exists\, \xi(x)\in\mathbb{R}$ s.t. $S_n(x)\to\xi(x)$ $(n\to\infty)$

令 $S(x)=\xi(x)$.

由 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N$　$\forall n>N$ 有 $\forall x\in D$ 成立 $|S_m(x)-S_n(x)|<\varepsilon$.

令 $m\to\infty$. 则 $|S(x)-S_n(x)|<\varepsilon$.

□

[推论] $\boxed{\text{Cauchy 收敛原理 (函数项级数)}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n \overset{\text{in } D}{\rightrightarrows} S \iff \forall\varepsilon>0.\ \exists N.\ \forall n>N\ \forall p\in\mathbb{N}^*.\ \text{有 } \forall x\in D \text{ 成立 } \left|\sum_{k=n}^{n+p}u_k(x)\right|<\varepsilon.$$

3) $\boxed{\text{Weierstrass 比较判别法}}$

若 $\{u_n(x)\}$ $(x\in D)$ 满足: $|u_n(x)|\le a_n\in\mathbb{R}$ $(\forall x\in D)$ 且 $\sum a_n$ 收敛 $(<+\infty)$ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 一致收敛

4) $\boxed{\text{Abel-Dirichlet 判别法}}$

若满足下列条件之一, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$ 收敛.

(1) (Abel) $\{u_n(x)\}$ (关于 n) 单调 且在 D 上一致有界. $\sum v_n(x)$ 在 D 上一致收敛.

(2) (Dirichlet) $\{u_n(x)\}$ (关于 n) 单调且 $u_n(x)\overset{\text{in } D}{\rightrightarrows}0$. $\{\sum v_n(x)\}$ 一致有界

($\exists M>0$, $\forall n\in\mathbb{N}$. $\forall x\in D$ 成立 $|\sum v_n(x)|<M$)

类比: 常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$

(Abel) a_n 单调有界. $\sum b_n$ 收敛

(Dirichlet) a_n 单调 $\to 0$. $\{\sum b_n\}$ 有界. ($\exists M>0$ $\forall n\in\mathbb{N}$. $|\sum b_n|<M$)

反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x)g(x)\,dx$

(Abel) $f(x)$ 单调有界 $[a,+\infty)$. $\int_a^{+\infty}g(x)\,dx$ 收敛.

(Dirichlet) $f(x)$ 单调 $\to 0$ $(x\to\infty)$ $[a,+\infty)$　　$G(x)=\int_a^{+\infty}g(x)\,dx$ 有界 $[a,+\infty)$ 上

[证明] (核心: 函数级数版本的 Abel 引理) $\longleftarrow$ 离散版本的分部积分.

$|u_1(x)v_1(x)+u_2(x)v_2(x)+\cdots+u_n(x)v_n(x)|$　　记 $V_n(x)=v_1(x)+\cdots+v_n(x)$.

$$\sum_{k=1}^{n}u_k(x)v_k(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)(V_k-V_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)V_k(x)-\sum_{k=0}^{n-1}u_{k+1}(x)V_k(x)$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}(u_k-u_{k+1})V_k+u_n(x)V_n(x)$$

$\therefore \left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x)v_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\left|u_k(x)-u_{k+1}(x)\right|\left|V_k\right| + |u_n||V_n|$.

$\rightarrow$ Abel: $|\cdots| \leqslant \underbrace{2M(x)}_{\text{常数}}\underbrace{\left(|u_n(x)|+|u_{n+1}(x)|\right)}_{\varepsilon}$

$\boxed{\text{欧拉 (Eular) 恒等式}}$ $\cos nx = \dfrac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}$ $\quad e^{i\pi}=-1$

Trick. $\sum_{i=1}^{N}|\cos nx| \leqslant \left|\sum_{i=1}^{N}\dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)-\sin\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\frac{x}{2}}\right| = \left|\dfrac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)x-\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\right| < \left|\dfrac{1}{\sin\frac{x}{2}}\right|$

$\boxed{\text{性质}}$ $\begin{matrix}\lim\limits_{x\to x_0}\\ \int_a^b dx \\ \frac{d}{dx}\end{matrix}\ \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) \overset{?}{=} \lim\limits_{n\to\infty}\begin{matrix}\lim\limits_{x\to x_0}\\ \int_a^b dx \\ \frac{d}{dx}\end{matrix}\ S_n(x)$

$\boxed{\text{连续性定理}}$: $S_n(x)\in C[a,b]$ $(\forall n)$ 且 $S_n \overset{\text{in }[a,b]}{\rightrightarrows} S$. 则 $S\in C[a,b]$.

[证明] $\forall x_0\in[a,b]$. 由 $S_n(x)\in C[a,b]$ 知

$\forall \varepsilon>0$, $\exists\,\delta>0$ 使 $\forall x, x'\in[a,b]$ 有 $|S_n(x)-S_n(x')|<\varepsilon$.

另一方面, 由 $S_n \overset{\text{in }[a,b]}{\rightrightarrows} S$ 知:

$\forall\varepsilon>0$, $\exists\, N_1\in\mathbb{N}^*$ 使 $\forall n>N_1$ 有 $\sup\limits_{[a,b]}|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$.

则: $\forall\varepsilon>0$. ~~$\exists$ 取 $N_2\in\mathbb{N}^*$ 使 $\forall n>N_2$ 有 $\frac{1}{n}<\delta$~~.

取 $\Delta x<\delta$. 则有 $|S(x_0+\Delta x)-S(x_0)| = |S(x_0+\Delta x)-S_n(x_0+\Delta x)+S_n(x_0+\Delta x)$
$-S_n(x_0)+S_n(x_0)-S(x)|<3\varepsilon$.

$\therefore$ 连续.

□

[推论] $S_n(x)\in C(a,b)$ $(\forall n)$ 且 S_n 在 (a,b) 上内闭一致收敛于 $S(x)$.

则 $S\in C(a,b)$.

[证]. 在 $[a+\eta, b-\eta]$ 上(一致)连续 $\Rightarrow$ ✓.

$\boxed{\text{极限与积分可交换}}$: $S_n(x)\in \underset{\text{黎曼可积}}{\mathcal{R}[a,b]}$ $(\forall n)$. 且 $S_n \overset{\text{in }[a,b]}{\rightrightarrows} S$ 则 $S\in\mathcal{R}[a,b]$

(Riemann 可积保持性)

[证明]. 由 $S_n \overset{\text{in }[a,b]}{\rightrightarrows} S$ 知: $\forall\varepsilon>0$, $\exists\, N_1\in\mathbb{N}^*$ 使 $\forall n>N_1$ 有 $\sup\limits_{x\in[a,b]}|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$.

由 $S_{N_0}(x)\in\mathcal{R}[a,b]$ $\exists$ 划分 $\pi: a=x_0<x_1<\cdots<x_p=b$.

使 $\sum_{i=1}^{p}\omega_i^{S_n(x)}(x_i-x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{p}\sup\limits_{x,y\in[x_{i-1},x_i]}|S_n(x)-S_n(y)|(x_i-x_{i-1}) < \varepsilon$.

对 $S(x)$ 使用同一划分 π.

则 $\sum_{i=1}^{p} \omega_i^{S(x)} (x_i - x_{i-1})$ ~~$= \sum_{i=1} \left| \sup_{[x_{i-1},x_i]} S(x) - \inf_{[x_{i-1},x_i]} S(x) \right| (x_i - x_{i-1})$~~

~~$\leq \sum_{i=1}^{p} (x_i - x_{i-1}) \left| \sup S(x) - \sup \right.$~~

$$= \sum_{i=1}^{p} \sup_{x,y\in[x_{i-1},x_i]} |S(x)-S(y)| (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{p} \sup_{x,y\in[x_{i-1},x_i]} \left(|S(x)-S_n(x)| + |S_n(x)-S_n(y)| + |S_n(y)-S(y)| \right) (x_i - x_{i-1})$$

$$\leq \sum_{i=1}^{p} \left(\sup |S(x)-S_n(x)| + \sup |S_n(x)-S_n(y)| + \sup |S(y)-S_n(y)| \right) (x_i - x_{i-1})$$

$$< \sum_{i=1}^{p} (\varepsilon + \omega_i^{S_n(x)} + \varepsilon)(x_i - x_{i-1}) = 2\varepsilon(b-a) + \varepsilon.$$

$\therefore\ S \in R[a,b]$. □

[推论] $S_n(x) \in R[a,b]\ (\forall n)$ 且 $S_n \overset{\text{in } [a,b]}{\rightrightarrows} S$ 则 $\int_a^b S(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n(x)\,dx$.

[证]. $\left| \int_a^b S_n(x)\,dx - \underbrace{\int_a^b S(x)\,dx}_{\substack{S(x)\in R[a,b] \\ \text{故有意义}}} \right| \leq \int_a^b |S_n(x) - S(x)|\,dx < \varepsilon(b-a)$. □

[推论]. $u_n(x) \in R[a,b]\ (\forall n)$. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x)$. 则① $\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx$

② $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(v)\,dv \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} \int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} u_n(v)\,dv$

$\boxed{\text{极限与微分可交换}}$

$S_n \in D[a,b]$. $(\forall n)$. (即 $S_n \in C[a,b]$ 且 $S_n' \in C[a,b]$).

且 (1) $\forall x \in [a,b]$. $S_n(x) \to S(x)$ ←条件放宽

(2) $S_n' \overset{\text{in } [a,b]}{\rightrightarrows} \sigma$

则: $S \in C[a,b]$. 且 $S'(x) = \sigma(x)$. (即 $\frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx} S_n(x)$)

[证] ~~$S \in C[a,b]$ 显然,~~

$S_n(x) = S_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} S_n'(u)\,du$. 取 $n\to\infty$ 知 $S(x) = S(x_0) + \int_{x_0}^{x} \sigma(u)\,du$

$\left(\int_{x_0}^{x} \lim_{n\to\infty} S_n'(u)\,du = \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} S_n'(u)\,du \right)$

显然 σ 连续 ($\because S_n'$ 连续)

$\therefore\ S \in C[a,b]$ 且 $S'(x) = \sigma(x)$. (取 $x_0 \to x$)

[注意] 以上三者均为 $\boxed{\text{充分条件}}$

(实际实变函数改变积分定义后, 要求 $|f_n(x)| < g(x)$ (对 $\forall x \in [a,b]$) 且 $\int_a^b g(x)\,dx < +\infty$ 即可)

⇐ 的反例: $S_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ $(x \in [0,1])$ $\not\rightrightarrows 0$ (取 $x_n = \frac{1}{n}$)

该函数满足前两个性质. 微分可交换反例: $f_n(x)=\int_0^x S_n(u)\,du$ 即可.

$\boxed{\text{Dini定理}}$ $S_n(x)\xrightarrow{[a,b]}S(x)$. 且

(1) $S_n\in C[a,b]$ ($\forall n$). (2) $S\in C[a,b]$ (3) $\forall x\in[a,b]$. $\{S_n(x)\}$ 关于n单调

则 $S_n\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}S$.

⇒ Cantor定理 证明 一致连续性

[证明] 反证.

$\exists\varepsilon_0>0$. $\forall N$. $\exists n>N$ 使 $\exists x\in[a,b]$ 成立 $|S_n(x)-S(x)|>\varepsilon_0$

取$N=1$, 得n_1. 取$N=n_1$. 得n_2 ……

得到数列 $\{x_k\}$. 使 $|S_{n_k}(x_k)-S(x_k)|>\varepsilon_0$

$\because\{x_k\}$ 有界. 必有收敛子列 $\{x_k'\}$. $\lim\limits_{k\to\infty}x_k'=:x_0$.

对应的$\{S_{n_k}\}$子列 $\{\sigma_k\}$.

因 $S_i(x_0)\xrightarrow{i\to+\infty}S(x_0)$ $\exists N_0$ 使 $|S_{N_0}(x_0)-S(x_0)|<\varepsilon$.

另一方面, $S_n(x)\xrightarrow{[a,b]}S(x)$ 故: $\exists K_1$. $k\geq K_1$ 使 $|S_{N_0}(x_k)-S(x_k)|<\varepsilon$.

由单调性: 取 $j>\max\{K,N_0\}$. $|\sigma_k(x_j)-S(x_j)|<|S_{N_0}(x_k)-S(x_k)|<\varepsilon$.

(取$\varepsilon=\cdots\varepsilon_0$)

$\Rightarrow|S(x_j)-S(x_j)|<\varepsilon_0$. 矛盾

• 幂级数

$\boxed{\text{幂级数}}$: 形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 称为幂级数. ⟶ 事实上, Taylor展开就是一个幂级数

(若$f\in C^\infty$且$R_n\to0$)

方便起见, 讨论 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$

由数项级数的Cauchy判别法. $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n||x|^n}=\varlimsup\limits_{n\to\infty}|x|\sqrt[n]{|a_n|}$ >1 绝对收敛 <1 发散

$\boxed{\text{收敛半径}}$ $R:=\dfrac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$ 收敛域: $\in\begin{cases}(-R,R)\\[-R,R)\\(-R,R]\\[-R,R]\end{cases}$

$\boxed{\text{Cauchy-Hadamard定理}}$ 对$\sum a_nx^n$. 当$|x|<R$时绝对收敛

当$|x|>R$时发散

注意 $x=\pm R$ 要特判.

$\boxed{\text{d'Alembert 判别法}}$ 对 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. 若 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = A$. 则 $\sum a_n x^n$ 收敛半径为 $\frac{1}{A}$.

$\boxed{\text{Stirling 公式}}$ $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

$\boxed{\text{Abel 第一定理}}$ 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=\xi\ (\neq 0)$ 处收敛，则它在区间 $(-|\xi|, |\xi|)$ 中绝对收敛.

若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=\eta$ 处发散. 则它在 $|x|>|\eta|$ 均发散.

[证]. $|x|<|\xi|$ 时. $\sum|a_n x^n| = \sum |a_n\xi^n|\left|\frac{x}{\xi}\right|^n < M\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{x}{\xi}\right|^n < +\infty$.

($\because \sum a_n\xi^n$ 收敛 $\Rightarrow a_n\xi^n$ 有界) □

☆ $\boxed{\text{Abel 第二定理}}$ 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛半径为 R. 则

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R, R)$ 上内闭一致收敛.

(即 $\forall [a,b]\subset(-R,R)$. 有 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛)

(ii) 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=R$ 处收敛, $\forall [a,b]\subset(-R,R]$ 有 ...

(iii) ...... $-R$ -- $[-R,R)$ 有 ...

(iv) $R, -R$ 在 $[-R,R]$ 上一致收敛

简言之：幂级数在包含于收敛域任意闭区间上一致收敛.

[证] 先证明(i). $[a,b]\subset(-R,R)$. 取 $\xi=\max\{|a|,|b|\}$. $\exists\varepsilon>0$ s.t. $\xi+\varepsilon<R$.

则有 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\xi+\varepsilon)^n$ 收敛 $\xrightarrow{\text{Abel-I}}$ $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n||\xi|^n$ 收敛

由比较判别法知：$\sum a_n x^n$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛
(Weierstrass)

后只证明(ii.) 只需证 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $[0,R]$ 上一致收敛

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n\left(\frac{x}{R}\right)^n$. $\because \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ 一致收敛, $\left(\frac{x}{R}\right)^n$ 单调有界

由 Abel 判别法知. $\sum a_n x^n$ 一致收敛. □

$\boxed{\text{幂级数性质}}$

1) 连续性：$\sum a_n x^n$ 收敛半径 R. 则和函数 $\sum a_n x^n \in C(-R,R)$.

若 $\sum a_n x^n$ 在 $x=R$ (或 $-R$) 处收敛，则 $\sum a_n x^n$ 在 R (或 $-R$) 处左(右)连续.

2) 逐项积分: a, b 为 $\sum a_n x^n$ 收敛域中任意两点.

则 $\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b a_n x^n\,dx$

特别地，取 $a=0$. $b=x$. 有 $\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n\,du = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n u^n\,du = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$

$\frac{1}{n+1}$ 提供可能的收敛

收敛半径一样!
但收敛区间可能扩大

3） 逐项求导： $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛半径为 R，则在 $(-R, R)$ 上可以逐项求导.

即 $\dfrac{d}{dx}\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{d}{dx} a_n x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

收敛半径一致，但收敛域可能减少（n的存在）

*实际上，上述结论对有限和无条件成立.

e.g. $\boxed{\sum \dfrac{(-1)^{n-1} x^n}{n}}$ $\xrightarrow{\text{求导}}$ $(-1, 1)$ $\qquad$ $\boxed{\sum (-1)^{n-1} x^{n-1}}$ $\xrightarrow{\text{积分}}$ $(-1, 1]$

$[-1, 1]$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $(-1, 1)$

$\boxed{\sum \dfrac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1}}$ $\underset{\text{积分}}{\overset{\text{求导}}{\rightleftarrows}}$ $\boxed{\sum (-1)^{n-1} x^{2n-2}}$

$[-1, 1]$

[例] 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{a^2}+\cdots+\dfrac{n}{a^n}\right)$ $(a>1)$.

[解] $\rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} n\left(\dfrac{1}{a}\right)^n$. 得解.

- 幂级数展开

$\boxed{\text{Taylor 级数}}$ 若 $f(x) \in D^{\infty}$ in $U(x_0, \delta)$. 称 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.

某

对比： Taylor 展开 $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^n + \underbrace{\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{R_n(x)}$ $\left(\xi \in (x, x_0) \text{ 或 } (x_0, x)\right)$

有限和式！

（要求： $f(x) \in D^{n+1}$) in $U(x_0, \delta)$

特别地， $x_0 = 0$ 称为 $\boxed{\text{Maclaurin}}$ 展开.

$\boxed{\text{Maclaurin 级数}}$ $x_0 = 0$ 时的形式.

$\boxed{\text{定理}}$ $f(x) \in D^{\infty}$. 则 $f(x)$ 能在 $U(x_0)$ 内展开为 Taylor 级数 $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

[证明] 当 $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 令 $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$. 则 $f(x) = S_{n+1}(x) + R_n(x)$

$\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}[f(x) - S_{n+1}(x)] = 0$ $\left(\text{即 } f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_{n+1}(x)\right)$

$\boxed{\text{定理}}$ $f(x) \in D^{\infty}$. 则 $f(x)$ 能展开为 x 的幂级数，则展开式唯一；即 Maclaurin 级数.

[证明] $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$, $x \in (-R, R)$ $\qquad a_0 = f(0)$

$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots$ $\qquad a_1 = f'(0)$

$f''(x) = 2!\, a_2 + \cdots + n(n-1) a_n x^{n-2} + \cdots$ $\qquad a_2 = \dfrac{f''(0)}{2!}$

…… $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$

直接 Macluarin 级数：写完．求R．看看 $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$？

Euclid 空间上的极限与连续

一维空间极限 $\xrightarrow{推广}$ 高维空间极限　　　$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R} \longrightarrow$ 高维空间

$\boxed{欧氏空间}$ （线代 Reprise）

引入内积 $\langle x, y\rangle$ （一般令 $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_i y_i$）

若内积满足：(1)（正定性）$\langle x, x\rangle \geqslant 0$. 且 $\langle x, x\rangle = 0$ iff. $x = 0$.

(2)（对称性）$\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$

(3)（线性性）$\langle \lambda x + \mu y, z\rangle = \lambda\langle x, z\rangle + \mu\langle y, z\rangle$

＊复数空间内：共轭线性性

则称该空间为 欧氏空间.

$\boxed{内积性质}$ （Schwarz 不等式）　$\langle x, y\rangle^2 \leqslant \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$.

特别地，在空间为 $\mathbb{R}^n$ 时，内积的一般定义必满足这三个条件.（三个条件成为性质）

$\boxed{距离}$：满足 (1)（正定性）$|x-y| \geqslant 0$ 且 $|x-y| = 0$ iff. $x = y$.　(2)（对称性）$|x, y| = |y, x|$

(3)（三角不等式）$|x-z| \leqslant |x-y| + |y-z|$

$\boxed{(欧氏)距离}$　$\sqrt{(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2} =: \rho(x, y)$ 或 $\|x-y\|$.

特别地，$y = 0$ 时，$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$.

$n = 1, 2, 3$ 时 $\|x\|$ 也写作 $|x|$.

$\boxed{趋于}$　当 $\mathbb{R}^n$ 中变元 x 与定元 α 满足：$\|x-\alpha\| \longrightarrow 0$. 称 x 趋于 α. 记作 $x \longrightarrow \alpha$.

即：$x \longrightarrow \alpha \iff x_k \longrightarrow a_k$　（令 $\alpha = (a_1, \cdots a_n)$）

$(\forall k \in \{1, 2, \cdots, n\})$

$\boxed{\delta 邻域}$　$\mathbb{R}^n$ 中点 α 的 δ 邻域为：$U(\alpha, \delta) = \left\{ x \,\middle|\, x \in \mathbb{R}^n, \|x, \alpha\| < \delta \right\}$

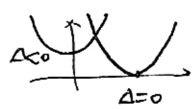
↘ 圆邻域　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　都可以.

$\boxed{方邻域}$　$U(P_0, \delta) = \left\{ (x_1, \cdots x_n) \,\middle|\, |x_1 - x_{10}| < \delta,\ |x_2 - x_{20}| < \delta,\ \cdots\ |x_n - x_{n0}| < \delta \right\}$.　　无大区别

[Schwarz 不等式证明]

$\langle \lambda x + y, \lambda x + y\rangle = \lambda^2\langle x, x\rangle + 2\lambda\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \geqslant 0.$　$(\forall \lambda \in \mathbb{R})$

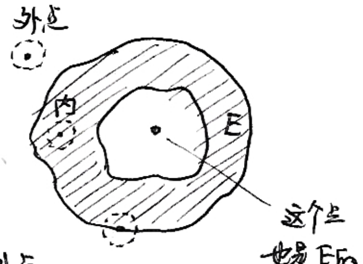
λ 有解 $(\lambda \in \mathbb{R})$　　$\Delta = (2\langle x, y\rangle)^2 - 4\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \leqslant 0$



$\Rightarrow \langle x, y\rangle^2 \leqslant \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle.$

□

点 点P、点集E，均在$\mathbb{R}^n$空间中



内点 存在P的某邻域 $U(P,\delta)\subset E$，P为E的内点。

外点 存在P的某邻域 $U(P,\delta)\cap E=\emptyset$，P为E的外点。

边界点 任意P的邻域 $U(P,\delta)$ 既包含E中内点也包含E的外点，P为E的边界点。

聚点 任意P的去心邻域 $\mathring{U}(P,\delta)$ 内总有E中的点，则P是E的聚点

[内点集合 E_{in}，边界点 P_b，外点集合 E_{out} 则有 $E_{in}\subset E$，$E_{out}\cap E=\emptyset$。
P_b 可以 $\in E$ 也可以 $\notin E$。 聚点 P_c 可以 $\in E$ 也可以 $\notin E$]

导集 E的聚点的集合。

[定理] x 是E的聚点 $\Leftrightarrow$ $\exists\{x_k\}$ 满足 $x_k\in E$，$x_k\neq x$ $(k=1,2,\cdots)$ 使 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x$。

区域 点集E。E的内点集合：E° ($\mathring{E}$)。E的边界点集合：∂E，称为**边界**。

开集 $E=\mathring{E}$，称E

闭包 $\overline{E}=E\cup E'$ ← E的聚点集合

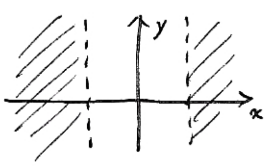
闭集 定义① $E\supset\partial E$，称E。定义② 包含了E中所有聚点 ← 等价定义

连通/道路连通 任意D中两点用一完全属于D的折线相连，称D。

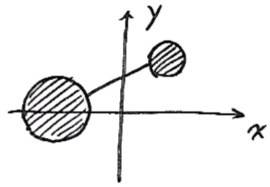
开区域 连通的开集。

闭区域 开区域及其边界。

整个空间和空集既是开域也是闭域。



非开域，开集



非闭域，闭集

有界域 对集合D，$\exists K>0$，使 $\forall P\in D$，与某定点A满足 $|AP|\leq K$，则称D。

无界域

补集 $\mathbb{R}^n\setminus E=:E^c$。

De Morgan's Law $\left(\bigcup\limits_\alpha S_\alpha\right)^c=\bigcap\limits_\alpha S_\alpha^c$ ； $\left(\bigcap\limits_\alpha S_\alpha\right)^c=\bigcup\limits_\alpha S_\alpha^c$。 $\alpha\Rightarrow$ 可以无穷并/交

α：任意指标，甚至可以不可数无穷多个集交/并。

定理 任意一组开集的并集是开集；任意一组闭集的交集是闭集。
有限个开集的交集是开集；有限个闭集的并集是闭集。

开覆盖 $S\subset\mathbb{R}^n$，若$\mathbb{R}^n$中的一组开集$\{U_\alpha\}$满足 $\bigcup\limits_\alpha U_\alpha\supset S$，称$\{U_\alpha\}$为S的一个开覆盖。

紧集 S的任意一个开覆盖$\{U_\alpha\}$中总存在一个有限子覆盖（即存在 $\{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^p$ (有限个开集)，$U_{\alpha_i}\in\{U_\alpha\}$，满足 $\bigcup_{i=1}^p U_{\alpha_i}\supset S$），称S。

$\boxed{\text{Heine-Borel 定理}}$ $\mathbb{R}^n$上点集S是紧集 $\Longleftrightarrow$ S是有界闭集

$\Rightarrow$：当S是紧集时，显然$\{U(x,1)\subset\mathbb{R}^2 \mid x\in S\}$是一个开覆盖，则存在$S$的有限子覆盖，即存在$x_1,\cdots x_p$使
$S\subset\bigcup_{i=1}^{p} U(x_i,1)$，有限开覆盖的并有界，则$S$有界.

反证S是闭集，设存在S的聚点$\alpha\notin S$，则有开集$U_n=\{x \mid |x-\alpha|>\frac{1}{n}\}$ $\bigcup_{n=1}^{\infty}U_n=\mathbb{R}^2\setminus\{\alpha\}\supset S$.
$\because\alpha$是S的聚点，取$\delta=\frac{1}{n}$可得$\{x_n\}$，使$x_n\neq\alpha$且$x_n\in S$，则任意U_i中只有有限个$\{x_n\}$中的点.
即不存在S的有限子覆盖，矛盾（S是紧集）

$\Leftarrow$：反证.

$\boxed{\text{Cantor 闭区域套定理}}$

* 列紧集

多元函数微分学

- 偏导数

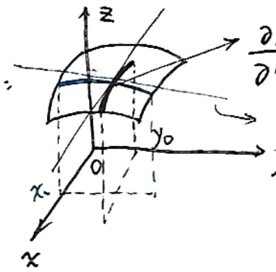
$\boxed{\text{偏导数}}$ 若 $y=f(x_1,x_2,\cdots x_n)$ 在点 $(x_{10},x_{20},\cdots x_{n0})$ 的某邻域内有 $\lim\limits_{\Delta x_i\to 0}\dfrac{f(x_{10}\cdots x_{i-1\,0},x_{i0}+\Delta x,\cdots x_{n0})-f(x_{10}\cdots x_{n0})}{\Delta x_i}$

存在，称为 $f(\cdot)$ 在 $(x_{10},\cdots x_{n0})$ 对 x_{i0} 的偏导数。记为 $\left.\dfrac{\partial y}{\partial x_i}\right|_{(x_{10},\cdots x_{n0})}$ 或 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{(x_{10},\cdots x_{n0})}$

即固定除 x_i 外的一切自变量，只改变 x_i。　　* 有时也记作 $y_{x_i}\big|_{(x_{10},\cdots x_{n0})}$，$f_{x_i}\big|_{(x_{10},\cdots x_{n0})}$，$f_i'\big|_{(x_{10},\cdots x_{n0})}$。

若在 D 中每一点处都有对 x_i 偏导数存在，则称 $\boxed{\text{偏导(函)数}}$，记作 $\dfrac{\partial y}{\partial x_i},\dfrac{\partial f}{\partial x_i},y_{x_i},f_{x_i},f_i'$

几何意义：



$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{y=y_0}$ 是这条线某点切线的斜率

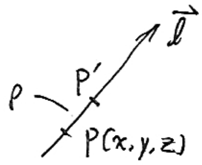
$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{x=x_0}$ 是这条线某点切线的斜率（蓝细线）

☆ $\boxed{\text{各偏导数存在的点未必连续}}$　　e.g. $z=f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

在 $(0,0)$ 处不连续

而 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\dfrac{d}{dx}(0)=0=\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}$

$\boxed{\text{方向导数}}$ 若 $u=f(x,y,z)$ 在 (x,y,z) 处沿方向 $\vec{l}$（方向角：α,β,γ）存在下列极限：



$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta f}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)-f(x,y,z)}{\rho}=:\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}$$

（其中：$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$，$\Delta x=\rho\cos\alpha$，$\Delta y=\rho\cos\beta$，$\Delta z=\rho\cos\gamma$）

称 $\dfrac{\partial f}{\partial l}$ 为 $f(x,y,z)$ 在 (x,y,z) 处沿方向 $\vec{l}$ 的方向导数

* 取 $\vec{l}=\vec{i}$，则 $\dfrac{\partial f}{\partial l}=\dfrac{\partial f}{\partial x}$.　　$\vec{l}=-\vec{i}$ 则 $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}=\dfrac{-\partial f}{\partial x}$

$\boxed{\text{全微分}}$ 若 $y=f(x_1,\cdots x_n)$ 在 D 的内点 $(x_1,\cdots x_n)$ 处全增量 $\Delta y=f(x_1+\Delta x_1,\cdots x_n+\Delta x_n)-f(x_1,\cdots x_n)$

可表示为 $\Delta y=\underbrace{\boxed{A_1\Delta x_1+A_2\Delta x_2+\cdots+A_n\Delta x_n}}_{\text{线性主部称 } f \text{ 在该点的全微分}}+o(\rho)$　　（A_i 相对 Δx_i 们来说为常量，可与 $x_1,\cdots x_n$ 有关）

（$\rho=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta x_i^2}$）

线性主部称 f 在该点的全微分.

记作：$dy=df=A_1dx_1+\cdots+A_ndx_n$　　　函数可微：……（略）

函数可微时有 $\lim\limits_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ (1\le i\le n)}} \Delta y = \lim\limits_{\rho\to 0}\left[(\underset{\downarrow\ 0}{A_1\Delta x_1+\cdots+A_n\Delta x_n})+\underset{\downarrow\ 0}{o(\rho)}\right]=0$.

得: $\lim\limits_{\substack{\Delta x_i\to 0\\ (i\in\{1,\cdots n\})}} f(x_1+\Delta x_1,\cdots x_n+\Delta x_n) = f(x_1,\cdots x_n)$ 即 $\boxed{f\text{ 连续}}$

因此有: $\boxed{y=f(x_1,\cdots x_n)\text{ 在 }(x_1,\cdots x_n)\text{ 可微} \Rightarrow f\text{ 连续}}$

$\not\Updownarrow$

可导 —— 不一定连续

函数可微 $\overset{\times}{\underset{\longrightarrow}{\longleftarrow}}$ 偏导数存在.

函数可微 $\overset{\longleftarrow}{\underset{\times}{\longrightarrow}}$ 偏导数连续

$\boxed{\text{定理}}$ $f(x,y)$ 在 (x,y) 处可微, 则 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \ne DNE$ 且 $df=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$.

[证明] $\Delta f = A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$ 取 $\Delta y=0$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f=\lim\limits_{\Delta x\to 0}A\Delta x=\frac{\partial f}{\partial x}$. 对 Δy 同理. □

[逆向反例]
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2\ne 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$$

$\partial f/\partial x=\partial f/\partial y=0$.

$\Delta z=\dfrac{(x+\Delta x)(y+\Delta y)}{\sqrt{(x+\Delta x)^2+(y+\Delta y)^2}}-\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \not\to 0$

$(1-x\Delta x-y\Delta y-\frac{1}{2}\Delta x^2-\frac{1}{2}\Delta y)$

$=\dfrac{(x+\Delta x)(y+\Delta y)-xy}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot}=\dfrac{(x\Delta x+y\Delta y)(1-xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\boxed{\text{定理}}$ $f(x,y)$. $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ 在 (x,y) 处连续, 则 f 在该点可微.

[证明] $\Delta f = f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x+\Delta x,y)+f(x+\Delta x,y)-f(x,y)$

$=\frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y+\theta_2\Delta y)\Delta y$ ← 一元函数 微分中值定理

$=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\alpha\right)\Delta x+\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)+\beta\right)\Delta y$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0}\beta=0$.

$\alpha=\frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)-\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$

↓ 连续. 则 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\alpha=0$

$|\alpha\Delta x+\beta\Delta y|\le\rho|\alpha|+\rho|\beta|$

即 $\dfrac{|\alpha\Delta x+\beta\Delta y|}{\rho}\le|\alpha|+|\beta|$ 高阶无穷小

$=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Delta y+\underline{\alpha\Delta x+\beta\Delta y} =: o(\rho)$

$A\ \Delta x\ +\ B\ \Delta y\ +\ o(\rho)$ □

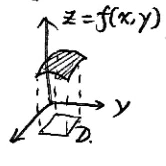
$\boxed{\text{定理}}$ 若 $f(x,y,z)$ 在 (x,y,z) 处可微, 则在该点沿任意方向 $\vec{l}$ 的方向导数存在.

且有 $\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$ 其中 α,β,γ 为 $\vec{l}$ 的方向角.

- 多元函数

$\boxed{n\text{元函数}}$: 非空点集 $D\subset\mathbb{R}^n$. 称映射 $f: D\mapsto\mathbb{R}$. 记为 $f(x_1,\cdots x_n)$. 或 $f(P)$, $P\in D$.
$\uparrow$ 定义域

二元函数图象为 $\boxed{\text{空间曲面}}$



三元函数图象 $\in\mathbb{R}^4$

$\boxed{\text{多元函数的极限}}$ $f(P)$. $P\in D\subset\mathbb{R}^n$. P_0是D的一个聚点. 设D为开集.

若存在 $A\in\mathbb{R}$ (常数). $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$. 对 $\forall P\in D\cap\mathring{U}(P_0,\delta)$ 都有 $|f(P)-A|<\varepsilon$.

称 A 为 $f(P)$ 在 $P\to P_0$ 时的极限.

记作: $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=A$. 或 记 $\rho=|PP_0|=\sqrt{(x_1-x_{01})^2+\cdots+(x_n-x_{0n})^2}$

$$\lim_{\rho\to 0} f(x_1,x_2,\cdots x_n)=A.$$

$$=\lim_{x_1\to x_{01},\cdots x_n\to x_{0n}} f(x_1,\cdots x_n)=A$$

称: $\boxed{n\text{重极限}}$

当P以不同方式$\to P$时 极限不同或不存在. 则该点极限不存在.

[常用趋近方式] $y=kx$. ; $y=x^\alpha\pm x^\beta$ $\longrightarrow$ 把分母改掉"

☆ $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) \overset{\text{不一定}}{\neq} \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$

若以下极限存在, 则三者相等: $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)}=\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)}$

$\boxed{\text{累次极限}}$ $\boxed{\text{二次极限}}$

一个存在推不出其它.

e.g. $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=0$$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}$ 不存在 (取 $y=kx$)

e.g. $f(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}, & xy\neq 0\\ 0, & xy=0\end{cases}$: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$.

而 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}$ 和 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}$ 不存在 (第一个lim不存在)

$\boxed{\text{定理}}$ 若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$ 且 $x\neq x_0$ 时存在 $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=\varphi(x)$.

则 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$.

其中 x,y 等价. 可互换.

$\boxed{\text{多元函数的连续性}}$ 若 n 元函数 $f(P)$ 定义在 D 上. 聚点 $P_0\in D$. 若存在 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=f(P_0)$

称 f 在 P_0 处连续.

$\boxed{\text{一切多元初等函数连续.}}$

闭域上多元连续函数有与一元函数类似性质：

$f(P)$ 在有界闭域 D 上连续，则

(1) $\exists K>0$. 使 $|f(P)|\le K$, $P\in D$　（有界性定理） $\to$ 可证 K 紧集 $\Rightarrow$ $f(K)$ 紧

列紧集 $\Rightarrow$ $f(K)$ 列紧；$\Updownarrow$；$\Downarrow$ 有界闭

(2) $f(P)$ 在 D 上必有 Max, min　（最值定理）

(3) $\forall \mu\in[m,M]$ $\exists Q\in D$ 使 $f(Q)=\mu$.　（介值定理）

(4)* $f(P)$ 在 D 上一致连续

[证] 使用 Heine–Borel Thm. 是紧集 $\to$ 有限开覆盖 $U(x_1,\delta_1)\cdots U(x_n,\delta_n)$

取 $\delta=\frac{1}{2}\min\{\delta_1,\cdots\delta_n\}$. ~~$\to \forall P\in D\cap \mathring{U}(x,\delta)$　$|f(P)-f(P_0)|<\varepsilon$.~~

~~一致连续~~　$\forall (x,x'')$ ~~满足~~ $|x'-x''|<\delta$.

若 $x'\in U(x_p,\frac{\delta_p}{2})$.　则 $|x''-x_p|\le|x''-x'|+|x'-x_p|<\delta_p$.

$\Rightarrow |f(x')-f(x'')|\le|f(x'')-f(x_p)|+|f(x')-f(x_p)|<2\varepsilon$.

方法：分子有理化.

$\boxed{\text{向量值函数}}$　设 $D\subset\mathbb{R}^n$. 则 $f: D\to\mathbb{R}^m$

$$\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots x_n)\mapsto \boldsymbol{z}=(z_1,\cdots z_m)$$

称为 $\boxed{n\text{ 元 }m\text{ 维向量值函数（多元函数组）}}$. 记作 $\boldsymbol{z}=f(\boldsymbol{x})$　$(\boldsymbol{x}\in D)$

$z_i=f_i(x)$ 称为 f 的第 i 个分量函数（坐标函数）

$\boxed{\text{极限}}$　D 是 $\mathbb{R}^n$ 上开集. $f(x): D\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}^m$. $A\in\mathbb{R}^m$.

$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ 使 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时 成立 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

称 A 为 $x\to x_0$ 时 f 的极限. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

$\boxed{\text{连续}}$　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

$\Updownarrow$

每个分量连续

数学分析 Ⅱ

邱一航

520030910155

【证明】 可微，则 $df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=\rho\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma\right)+o(\rho)$

则 $\frac{\partial f}{\partial l}=\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\Delta f}{\rho}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$ □

令 $\vec{G}=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$ $\quad \vec{l}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ → $\vec{G}$ 表示f变化率最大的方向，$\vec{l}$ 是当前方向

则有 $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}=\vec{G}\cdot\vec{l}=|\vec{G}|\cos\langle\vec{G},\vec{l}\rangle$ $\quad (\because \|\vec{l}\|=1)$

$\boxed{\text{梯度}}$ 定义 $\vec{G}=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$ 称为f在 $P(x,y,z)$ 处的梯度 (gradient)

记作 $\mathrm{grad}\, f(P)$ 或 $\nabla f(P)$.

"Nabla"

其中 $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$ 为一个算子.

此时有 $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}=\mathrm{grad}\, f\cdot\vec{e}_l=\nabla f\cdot\vec{e}_l$ 即梯度在 $\vec{l}$ 方向上的投影.

运算法则：(1) $\nabla c=\vec{0}$ $\quad$ (2) $\nabla(cu)=c\nabla u$ $\quad$ (3) $\nabla(u\pm v)=\nabla u\pm\nabla v$

(4) $\nabla(uv)=u\nabla v+v\nabla u$ $\quad$ (5) $\nabla(u/v)=\frac{v\nabla u-u\nabla v}{v^2}$

(6) $\nabla f(u)=f'(u)\nabla u$

一元函数!

$\boxed{\text{高阶偏导}}$ $z=f(x,y)$. $\quad \frac{\partial z}{\partial x}=f_x(x,y)$. $\quad \frac{\partial z}{\partial y}=f_y(x,y)$

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y)$ $\quad$ $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y)$

不常用 $\quad$ 先求 后求

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y)$

*一般中间这一符号只用于 $f_{xy}=f_{yx}$ 时.

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y)$

$f_{xy}(x,y)\overset{?}{=\!=}f_{yx}(x,y)$: 未必 (一般相等，但有反例)

【反例】 $z=\begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases} =: f(x,y)$

* 此时偏导不连续，不能将 $y=0$ 直接代入做

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(0,0)}=f_{xy}^{(0,0)}=\frac{\partial}{\partial y}\left(y\cdot\frac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}\right)_{(0,0)}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{f_x(0,\Delta y)-f_x(0,0)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\frac{-(\Delta y)^5}{(\Delta y)^4}}{\Delta y}=-1$

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{(0,0)}=f_{yx}(0,0)=\frac{\partial}{\partial x}\left(x\cdot\frac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}\right)_{(0,0)}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f_y(\Delta x,0)-f_y(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{(\Delta x)^5}{(\Delta x)^4}}{\Delta x}$

$=1$

不相等

[定理]（一般只有理论证明要用） 若 $f_{xy}(x,y)$, $f_{yx}(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

则 $f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$

[推广] 对n元多次偏导也有这一结论

[对比] $\frac{\partial f}{\partial x}$ vs $\frac{\partial f}{\partial l}$

既然 $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} \xlongequal{\text{取}\vec{l}=\vec{i}} \frac{\partial f}{\partial x}$. 是否可认为 $\frac{\partial f}{\partial l}$ 是 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 推广形式?

不可.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,\cdots)-f(x,\cdots)}{\Delta x}$$

从两侧逼近

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\Delta x,\cdots)-f(x,\cdots)}{\rho}=\lim_{|\Delta x|\to 0}\frac{f(x+\Delta x,\cdots)-f(x,\cdots)}{|\Delta x|}$$

$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2}=|\Delta x|$

只从一侧逼近

且有 $\frac{\partial f}{\partial l} \xlongequal{\text{取}\vec{l}=-\vec{i}} -\frac{\partial f}{\partial x}$.

$\boxed{\text{高阶微分}}$ $d^{k+1}z=d(d^kz)$ 其中 $z=f(x,y)$

对自变量 x,y 恒有 $d^2x=d(dx)=0$. $d^2y=d(dy)=0$.

$$d^2z=d(dz)=d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)=d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx+\cancel{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)d^2x}+d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy+\cancel{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)d^2y}$$

$$=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dy\right)dx+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dx+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\right)dy$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

则有 $d^kz=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^k z$ [数学归纳法]

运算: $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^p=\frac{\partial^p}{\partial x^p}$; $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^p\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^q=\frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p\partial y^q}$

$$d^ku=\left(dx_1\frac{\partial}{\partial x_1}+dx_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+dx_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k u \quad (k=1,2,\cdots)$$

$\boxed{\text{向量值函数的导数}}$ $f: D\longrightarrow R^m$.
$x\longrightarrow y=f(x)$.

1) 若 f_i 在 x^0 均可偏导.称 f 在 x^0 可导.

$$\text{称}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0)\right)_{m\times n}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x^0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x^0)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x^0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x^0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x^0)\end{pmatrix}$$

为 f 在 x^0 的导数或 Jacobi 矩阵. 记作 $f'(x^0)$ 或 $Df(x^0)$ 或 $Jf(x^0)$

2) f 分量偏导在 x^0 连续 $\Leftrightarrow$ f 导数在 x^0 连续

3) 若存在只与 x^0 有关.与 Δx 无关的矩阵 A 使在 x^0 附近成立

$$\Delta y=f(x^0+\Delta x)-f(x^0)=A\Delta x+o(\Delta x)$$

其中 $\Delta x=(\Delta x_1,\cdots\Delta x_n)^T$. $o(\Delta x)$ 是向量,
$\|o(\Delta x)\|=o(\|\Delta x\|)$

则称 f 在 x^0 可微. 称 Adx ($A\Delta x$) 为 f 在 x^0 的微分. 记作 $dy=Adx$.

• 多元复合函数的求导法则

若 $u=\varphi(t)$. $v=\psi(t)$. 在点 t 可导 $\frac{\partial f}{\partial u}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial v}$ 连续. 则 $\frac{d f(u,v)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dt}$

$$\begin{tikzcd} & f \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ u \arrow[d] & & v \arrow[d] \\ t & & t \end{tikzcd}$$

[证明] $df = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv$ （由连续偏导数知: f 可微）

$$\cancel{\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\Delta u}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\Delta v}{\Delta t} + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}}$$

$$\cancel{\Delta f = f(u+\Delta u, v+\Delta v) - f(u,v)}$$

设增量 Δt. $\longrightarrow$ 增量 Δu. Δv. $\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\Delta u}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\Delta v}{\Delta t} + \frac{o(\rho)}{\Delta t}$

（其中: $\rho = \sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}$ ） 令 $\Delta t\to 0$. 有 $\Delta u \to 0$. $\Delta v\to 0$

$\frac{\Delta u}{\Delta t}\to\frac{du}{dt}$. $\frac{\Delta v}{\Delta t}\to\frac{dv}{dt}$ $\frac{o(\rho)}{\Delta t} = \frac{o(\rho)}{\rho}\sqrt{\left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)^2} \to 0$

$$\therefore \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dt}$$

□

[推广]

1) 中间变量 ≥ 2. $z=f(u,v,w)$. $u=\varphi(t)$ $v=\psi(t)$. $w=\omega(t)$. 都可微

$$\begin{tikzcd} & u \arrow[r] & t \\ z \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & v \arrow[r] & t \\ & w \arrow[r] & t \end{tikzcd}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dt} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{dw}{dt} = f_1'\varphi' + f_2'\psi' + f_3'\omega'.$$

2) 中间变量是多元函数. $z=f(u,v)$. $u=\varphi(x,y)$. $v=\psi(x,y)$ 都可微

$$\begin{tikzcd} & & x \\ & u \arrow[ur] \arrow[r] & y \\ z \arrow[ur] \arrow[dr] & & x \\ & v \arrow[ur] \arrow[r] & y \end{tikzcd}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = f_1'\varphi_1' + f_2'\psi_1'$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial y} = f_1'\varphi_2' + f_2'\psi_2'$$

$z=f(x,v)$. $v=\psi(x,y)$ 都可微.

$$\begin{tikzcd} & x & \\ z=f \arrow[ur] \arrow[dr] & & x \\ & v \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & & y \end{tikzcd}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = f_1' + f_2'\psi_1'$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = f_2'\psi_2'$$

注意: $\frac{\partial z}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 在此处不同.

$\frac{\partial z}{\partial x}$ 表示 $z=f(x,\psi(x,y))$ 固定 y. 对 x 求导

$\frac{\partial f}{\partial x}$ 表示 $f(x, v)$ 固定 v. 对 x 求导

[注意] 偏导数连续不可退化为"偏导数存在"!

[反例] $z=f(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2}$ 取 $\begin{cases} x=u=t \\ y=v=t.\end{cases}$ 则 $\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(0,0)}=0$ $\left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{(0,0)}=0$

$\frac{dz}{dt} = d\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2}$. 而 $\frac{1}{2} \neq 0\cdot 1 + 0\cdot 1$

□

- 多元复合函数的全微分

$z=f(u,v)$. $u=\varphi(x,y)$. $v=\psi(x,y)$ 都可微　则 $z=f(\varphi(x,y),\psi(x,y))$ 的全微分为

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv$$
$$=\frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)$$
$$=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

"形式不变性"

可利用全微分形式不变性求偏导.

$z=e^u\sin v$. $u=xy$. $v=x+y$. $\Rightarrow dz=\cdots du+\cdots dv=\cdots d(xy)+\cdots d(x+y)$

$$=\underbrace{xxx}_{\frac{\partial z}{\partial x}}dx+\underbrace{xxx}_{\frac{\partial z}{\partial y}}dy$$

对向量值函数: $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$. g 在 $x^0\in D$ 可导. 且 f 在 $y^0=g(x^0)$ 可微. $z=f(g(x^0))$.

则 $\frac{\partial z}{\partial x_i}(x^0)=\frac{\partial z}{\partial y_1}(y^0)\frac{\partial y_1}{\partial x_i}(x^0)+\cdots+\frac{\partial z}{\partial y_m}(y^0)\frac{\partial y_m}{\partial x_i}(x^0)$

即: $\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}(x^0),\frac{\partial z}{\partial x_2}(x^0),\cdots\frac{\partial z}{\partial x_n}(x^0)\right)$

$$=\left(\frac{\partial z}{\partial y_1}(y^0),\frac{\partial z}{\partial y_2}(y^0),\cdots\frac{\partial z}{\partial y_m}(y^0)\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1}(x^0) & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n}(x^0)\\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1}(x^0) & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n}(x^0)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1}(x^0) & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n}(x^0)\end{pmatrix}$$

- 二元函数的 Taylor 公式

记算子: $\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f=hf_x+kf_y$.

$$\left(h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2kh\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f=(h^2f_{xx}+hkf_{xy}+khf_{yx}+k^2f_{yy})$$
$$\|$$
$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2$$

要求: $f_{xy}=f_{yx}$ 即两者连续

[定理] 若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某一邻域 U 中连续且 $1\sim(n+1)$ 阶偏导数都连续
当 $(x_0+h,y_0+k)\in U$ 时.
则有 $f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2f(x_0,y_0)+\cdots$
$+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^nf(x_0,y_0)+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1}f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)$

$\theta\in(0,1)$

[证明] 记 $\varphi(t) = f(\overset{x}{\overset{\parallel}{x_0+th}}, \overset{y}{\overset{\parallel}{y_0+tk}})$ $t\in[0,1]$ 依然在U中

$$\varphi'(t) = h\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+th, y_0+tk) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+th, y_0+tk)$$

$$\varphi'(0) = h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

而 $\varphi(1) = \varphi(0)+\varphi'(0)+\varphi''(0)+\cdots+\varphi^{n}(0)+R_{n+1}(0)$

其中 $\varphi^{(n)}(0) = \left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{(n)} f(x_0,y_0)$ $R_{n+1}(0) = \left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+\theta h, y_0+\theta k)$ $=\varphi^{n+1}(\theta)$

□

取$n=0$. 有Lagrange中值定理: $f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0+y_0) + h\frac{\partial}{\partial x}f(x_0+\theta h, y_0+\theta k) + k\frac{\partial}{\partial y}f(x_0+\theta h, y_0+\theta k)$

当 $\frac{\partial}{\partial x}f = \frac{\partial}{\partial y}f \equiv 0$ 时 $f\equiv \text{const}$.

[推广至n元]: Taylor公式 $f(x_{10}+h_1, x_{20}+h_2, \cdots, x_{n0}+h_n)$

$$= f(x_{10}, x_{20}, \cdots x_{n0}) + \left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)f(x_{10},\cdots x_{n0})$$

$$+\cdots+\frac{1}{m!}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^m f(x_{10},\cdots x_{n0})$$

$$+\underbrace{\frac{1}{(m+1)!}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{m+1} f(x_{10}+\theta h_1, \cdots x_{n0}+\theta h_n)}_{R_{m+1}} \quad \theta\in(0,1)$$

取$m=0$ 即Lagrange中值定理:

$$f(x_{10}+h_1, \cdots x_{n0}+h_n) - f(x_{10}, \cdots y_{n0}) = \left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right) f(x_{10}+\theta h_1, \cdots x_{n0}+\theta h_n)$$
$$\theta\in(0,1)$$

- 隐函数

[定理] $F(x,y)$在$P(x_0,y_0)$某一邻域内满足: ① 具有连续偏导; ② $F(x_0,y_0)=0$; ③ $F_y(x_0,y_0)\neq 0$

隐函数存在定理 则 $F(x,y)=0$ 在P的某邻域内可唯一确定一个单值连续函数 $y=f(x)$.

且满足: ① $y_0=f(x_0)$ ② 有连续导数 $\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$ ←(隐函数求导公式)

[推导求导公式] $y=f(x)$已知是隐函数. 可以用这一公式求

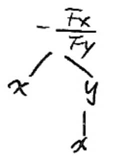
则 $F(x, f(x))\equiv 0 \xrightarrow{\text{对}x\text{求导}} \frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$

也可直接隐函数对x求导

再重新整理得到 $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F_x}{F_y}$ □

[推广] 若F的二阶偏导也连续: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)\cdot\frac{dy}{dx}$

$$= -\frac{F_{xx}F_y - F_xF_{xy} + F_{xy}F_y y' - F_xF_{yy}y'}{F_y^2}$$



[定理] $F(x,y,z)$ 满足：① 在 $P(x_0,y_0,z_0)$ 某邻域内偏导连续. ② $F(x_0,y_0,z_0)=0$ ③ $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$.

则在 (x_0,y_0,z_0) 某一邻域内可唯一确定一个单值连续函数 $f(x,y)=z$. 且满足：

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}.\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$$

[证明] $F(x,y,f(x,y))=0 \xrightarrow{\text{对}x\text{求导}} F_x+F_z\frac{\partial f}{\partial x}=0.$ 对 y 同理. □

* 也可用全微分不变来求 隐函数的导数. e.g. $dF=\underset{\substack{\uparrow\\ \checkmark}}{\overset{\text{整理}}{\cdots}}dx+\cdots+dy$

方程组的情形：

$$\left\{\begin{array}{l}F(x,y,u,v)=0\\ G(x,y,u,v)=0\end{array}\right.$$

$\uparrow$ 线性无关

如何求出 $u=\varphi(x,y)$, $v=\psi(x,y)$？

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}$$

$J\downarrow$ $\boxed{\text{Jacobi行列式（雅各比行列式）}}$

[定理] $F(x,y,u,v)$, $G(x,y,u,v)$ 满足：① 在 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 某邻域内偏导连续 ② $\left\{\begin{array}{l}F(P)=0\\ G(P)=0.\end{array}\right.$

③ $\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\right|_P\neq 0.$ 则 (x_0,y_0,u_0,v_0) 某一邻域 U 内可唯一确定一组满足条件 $u_0=u(x_0,y_0)$,

$v_0=v(x_0,y_0)$ 单值连续函数 $u=f(x,y)$, $v=g(x,y)$. $(x,y)\in U$

且满足：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_x & F_v\\ G_x & G_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\begin{vmatrix}F_y & F_v\\ G_y & G_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u & F_x\\ G_u & G_x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u & F_y\\ G_u & G_y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}$$

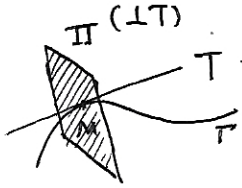
[证明]
$$\left\{\begin{array}{l}F(x,y,f(x,y),g(x,y))\equiv 0\\ G(x,y,f(x,y),g(x,y))\equiv 0\end{array}\right.\longrightarrow \begin{array}{l}F_x+F_u\frac{\partial u}{\partial x}+F_v\frac{\partial v}{\partial x}=0\\ G_x+G_u\frac{\partial u}{\partial x}+G_v\frac{\partial v}{\partial x}=0\end{array}$$

由线代知识可推得 $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\begin{vmatrix}F_x & F_v\\ G_x & G_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}$. $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u & F_x\\ G_u & G_x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}$

* 但一般计算似乎还是直接求个导直接算比较快.

- 几何中的应用

1）空间曲线的切线与法平面



光滑曲线Γ：$\vec{f}(t)=(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))$

当φ'、ψ'、ω'不全为0时，Γ在该点处切向量即法平面的法向量即为 $\vec{f}'(t)=(\varphi'(t),\psi'(t),\omega'(t))$

$M(\varphi(t_0),\psi(t_0),\omega(t_0))$ 则 $\vec{f}'(t_0)=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$ $\Rightarrow \Pi, T.$

切线方程 T：$\dfrac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$

当$\theta'=0$时，该项退化为 $\alpha=\alpha_0$ （$\theta\in\{\varphi,\psi,\omega\}$，$\alpha\in\{x,y,z\}$
且 $\theta=\varphi$ — $\alpha=x$
$\theta=\psi$ — $\alpha=y$，下同）
$\theta=\omega$ — $\alpha=z$

法平面方程：Π：$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$

特别地，取$t=x$，则$\varphi(t)=t$。即 $f'(x)=(1,\psi'(x),\omega'(x))$ ⟶ T/Π.

曲线为一般式 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=\psi(x)\\z=\omega(x)\end{cases}$

此时 $\vec{f}'(x_0)=\left(1,\ -\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}\Big|_M,\ -\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}\Big|_M\right)$

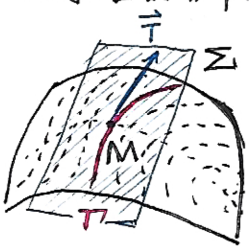
$\Rightarrow \vec{T}^*=\left(\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\Big|_M,\ \dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\Big|_M,\ \dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\Big|_M\right)$

则切线有 $\dfrac{x-x_0}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\big|_M}=\dfrac{y-y_0}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\big|_M}=\dfrac{z-z_0}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\big|_M}$ 形式

法平面有 $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\Big|_M(x-x_0)+\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\Big|_M(y-y_0)+\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\Big|_M(z-z_0)=0$ 形式

即 $\begin{vmatrix}x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ F_x(M) & F_y(M) & F_z(M)\\ G_x(M) & G_y(M) & G_z(M)\end{vmatrix}=0.$ □

2）空间曲面的切平面与法线



光滑曲面Σ：$F(x,y,z)=0$

$M(x_0,y_0,z_0)$. 过M引任意一条光滑曲线Γ：$(x,y,z)=(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))$
且$t=t_0$对应M

φ'，ω'，ψ'不全为0时，Γ切线为 $\dfrac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$.

下证：Σ上过M的任意曲线Γ在M处的切线都在同一平面内。

[证明] $\Gamma\subseteq\Sigma$. 则有 $F(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))\equiv 0 \xrightarrow[\text{求导}]{t=t_0} F_x|_M\varphi'(t_0)+F_y|_M\psi'(t_0)+F_z|_M\omega'(t_0)=0$

令 $\vec{n}=(F_x(x_0,y_0,z_0),\ F_y(x_0,y_0,z_0),\ F_z(x_0,y_0,z_0))$.

有 $\vec{n}\cdot\vec{T}=0$ $(\forall\Gamma.)$ 因此 $\vec{n}$ 即为法线向量! $(\forall\Gamma.\ \vec{T}\perp\vec{n})$

切平面: $F_x|_M(x-x_0)+F_y|_M(y-y_0)+F_z|_M(z-z_0)=0$

法线: $\dfrac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$ □

特别地, 若: $\Sigma: z=f(x,y) \Longrightarrow$ 令 $F(x,y,z)=f(x,y)-z \Rightarrow \checkmark$

$\vec{n}=(f_x(x_0,y_0),\ f_y(x_0,y_0),\ -1)$

$z-z_0=f_x|_M(x-x_0)+f_y|_M(y-y_0).$ $\quad \dfrac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\dfrac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\dfrac{z-z_0}{-1}$ □

为积分方便, 引入 方向余弦. α,β,γ 表示 $\vec{n}$ 的方向角, 规定方向向上 即 γ 为锐角

则有 $\cos\alpha=-\dfrac{f_x}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}}$. $\cos\beta=-\dfrac{f_y}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}}$. $\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}}$

相切 $\Rightarrow \vec{n}_1 /\!/ \vec{n}_2$ $\begin{cases}\text{正向}\\ \text{反向}\end{cases}$ 都可以

- 多元函数的极值

极大值 若 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 某邻域内有 $f(x,y)\le f(x_0,y_0)$. 则称 f 在该点取得极大值

极小值 $\ge$ 小

↑ 极值点

鞍点.

[定理] (必要条件) 若 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 偏导存在, 且取得极值.

则 $f_x(x,y)=0$. $f_y(x_0,y_0)=0$

[证] $f(x_0,y)$, $f(x,y_0)$ 在 (x_0,y_0) 也取到极值

[定理] (充分条件) 若 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 某邻域内有一阶和二阶连续偏导数. 且 $f_x(x_0,y_0)=0$. $f_y(x_0,y_0)=0$

令 $A=f_{xx}(x_0,y_0)$ $\quad B=f_{xy}(x_0,y_0)$ $\quad C=f_{yy}(x_0,y_0)$

1) $AC-B^2>0$. 具有极值 $\begin{cases} A<0 \text{ 极大值} \\ A>0 \text{ 极小值}\end{cases}$

2) $AC-B^2<0$ 无极值

3) $AC=B^2$ 不确定

[证] 联想到 Taylor 展开： $f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+\frac{1}{1!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})f(x_0,y_0)+\cdots+\frac{1}{n!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^n f(x_0,y_0)$
$+\frac{1}{(n+1)!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^{n+1}f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)$

展开到1阶. 代入 $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$.

则： ~~$\Delta z=\frac{1}{2}(f_{xx}(x_0,y_0)$~~ $\Delta z=\frac{1}{2}\left(f_{xx}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)h^2+2f_{xy}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)hk+f_{yy}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)k^2\right)$

而 $f_{xx}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)=A+\alpha$ （$h\to0$. $k\to0$ 时有 $\alpha\to0$）

$f_{xy}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)=B+\beta$ （$h\to0$. $k\to0$ 时有 $\beta\to0$）

$f_{yy}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)=C+\gamma$ （$h\to0$. $k\to0$ 时有 $\gamma\to0$）

此时： $\Delta z=\frac{1}{2}(Ah^2+2Bhk+Ck^2)+\underbrace{\frac{1}{2}(\alpha h^2+2\beta hk+\gamma k^2)}_{=o(\rho^2)}$ 其中 $\rho^2=\sqrt{h^2+k^2}$

$\frac{\alpha h^2+2\beta hk+\gamma k^2}{h^2+k^2}\leq\max(\alpha,\gamma)+\beta$. $o(\rho)$

因此 $|h||k|$ 很小时，Δz 正负号可由 $Ah^2+2Bhk+Ck^2$ 确定.

(1) 当 $AC-B^2>0$ （[redacted]） $\longrightarrow$ 显然 $A\neq0$ 且 AC 同号

此时 $Ah^2+2Bhk+Ck^2=\frac{1}{A}\left(A^2h^2+2ABhk+B^2k^2+(AC-B^2)k^2\right)$
$=\frac{1}{A}\left(\underbrace{(Ah+Bk)^2+(AC-B^2)k^2}_{>0}\right)$

故 $A>0$ 时 $Ah^2+2Bhk+Ck^2>0$ $\longrightarrow$ 极小值

$A<0$ 时 $Ah^2+2Bhk+Ck^2<0$ $\longrightarrow$ 极大值 □

* 也可直接用二次函数图象. $AC-B^2>0$ 时. Δz 保持同号. $A>0$ 时 $\Delta z>0$. (极小) $A<0$. $\Delta z<0$ (极大)

(2) 当 $AC-B^2<0$ 时.

[1] $A\neq0$. （$C\neq0$ 时等价. 不单独再说明）. 有 $Ah^2+2Bhk+Ck^2=\frac{1}{A}((Ah+Bk)^2+(AC-B^2)k^2)$

(x,y) 沿 $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ 接近 (x_0,y_0) 时. $Ah+Bk=0$ $\Rightarrow\Delta z<0$

(x,y) 沿 $y-y_0=0$ 接近 (x_0,y_0) 时. 有 $k=0$ $\Rightarrow\Delta z>0$

$\therefore\Delta z$ 有正有负

* 也可直接用二次函数图象

[2] $A=C=0$. 不妨设 $B>0$. 则 $Ah^2+2Bhk+Ck^2=2Bhk$. $\begin{cases}h,k\text{ 同号}\Rightarrow\Delta z>0\\h,k\text{ 异号}\Rightarrow\Delta z<0\end{cases}$

$\therefore\Delta z$ 有正有负 □

(3) 当 $AC-B^2=0$ 时

$\begin{cases}A\neq0.\ (C\neq0) & Ah^2+2Bhk+Ck^2=\frac{1}{A}(Ah+Bk)^2\\A=0=C & Ah^2+2Bhk+Ck^2=0.\end{cases}$ 此时 Δz 符号由 $o(\rho^2)$ 决定. 不能确定 □

先利用 $f_x=0$. $f_y=0$ 求得驻点 $\longrightarrow$ 再用上述定理判别

[定理] 设 n 元函数 $f(x)$ 在 $x_0=(x_1^\circ, x_2^\circ, \cdots x_n^\circ)$ 附近有二阶连续偏导. 且 x_0 为 $f(x)$ 驻点.

则当二次型 $\sum_{ij} f_{x_ix_j}(x_0) =: g(\xi)$

(1) 正定: 极小值 (2) 负定: 极大值 (3) 其它: 不确定

$\boxed{\text{Hesse 矩阵}}$ $A=\begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(x_0) & f_{x_1x_2}(x_0) & \cdots & f_{x_1x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1}(x_0) & f_{x_nx_2}(x_0) & \cdots & f_{x_nx_n}(x_0) \end{pmatrix}$.

* 线性主子式. $\forall k\in\{1,2,\cdots n\}$ $|A_k|_{det}>0$ 正定 极小值 $\vee$

$\forall k\in\{1,2,\cdots n\}$ $|A_k|_{det}(-1)^k>0$ 负定 极大值 $\wedge$

$\boxed{\text{最值}}$: 驻点 + 边界上点 $\longrightarrow$ 判定比较 $\begin{cases} \text{Max} \\ \text{Min} \end{cases}$

$\boxed{\text{条件极值}}$: 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下 求 $z=f(x,y)$ 极值.

考虑到极值点必有 $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$. 则必有 $\frac{dz}{dx}=f_x+f_y\frac{dy}{dx}=0$,

而 $\frac{dy}{dx}=-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$ (由隐函数 φ 对 x 求导得) 则 $f_x-f_y\frac{\varphi_x}{\varphi_y}=0$

记 $\frac{f_x}{\varphi_x}=\frac{f_y}{\varphi_y}=-\lambda$ (λ 实际可能为任意值)

则极值点必满足 $\begin{cases} f_x+\lambda\varphi_x=0 \\ f_y+\lambda\varphi_y=0 \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases}$ 引入辅助函数 $\underset{\text{三元函数}}{F}=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$

则极值点满足 $\begin{cases} F_x=0 \\ F_y=0 \\ F_\lambda=0 \end{cases}$

称为 $\boxed{\text{Lagrange 函数}}$

该方法即 $\boxed{\text{Lagrange 数乘法}}$.

[推广] $f(x_1,\cdots x_n)$. 条件 $\varphi_1(x_1,\cdots x_n)=0$ $\cdots$ $\varphi_w(x_1,\cdots x_n)=0$

则 $F=f(x_1,\cdots x_n)+\lambda_1\varphi_1(x_1,\cdots x_n)+\cdots+\lambda_w\varphi_w(x_1,\cdots x_n)$

其中 $-\lambda_i=\frac{f_{x_1}}{\varphi_{x_1}}=\frac{f_{x_2}}{\varphi_{x_2}}=\cdots=\frac{f_{x_n}}{\varphi_{x_n}}$

则极值点必满足 $\begin{cases} F_{x_1}=0 \\ \vdots \\ F_{x_n}=0 \\ F_{\lambda_1}=0 \\ \vdots \\ F_{\lambda_w}=0 \end{cases}$