Digital Signal and Image Processing
Programming Homework #2

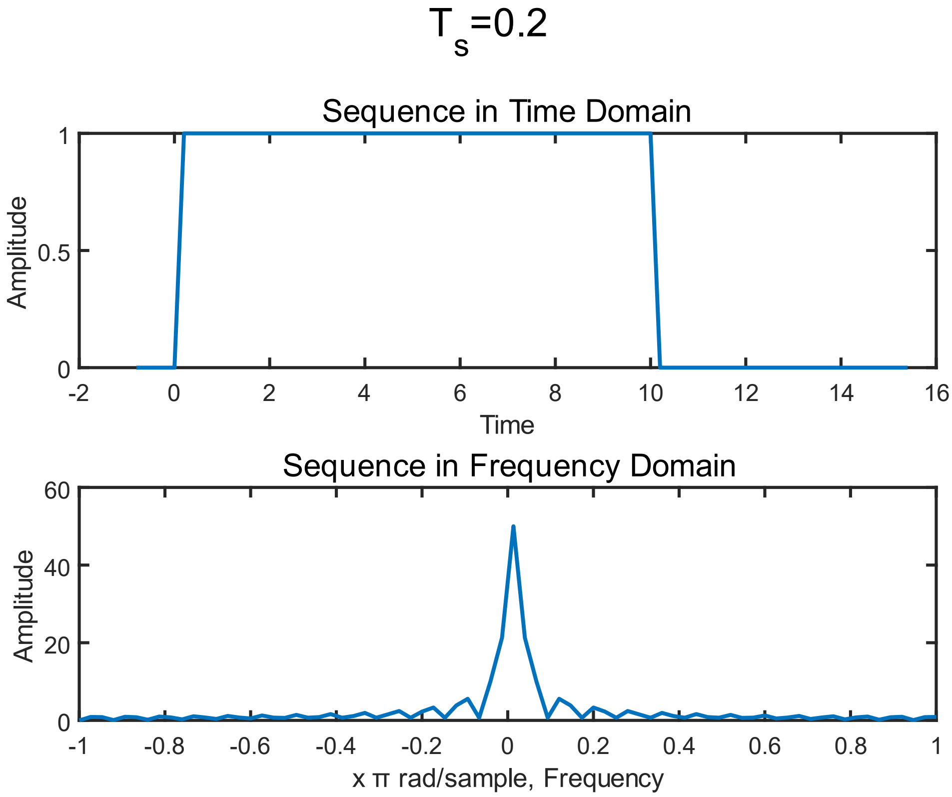
Qiu Yihang, 2022/03/04-03/12

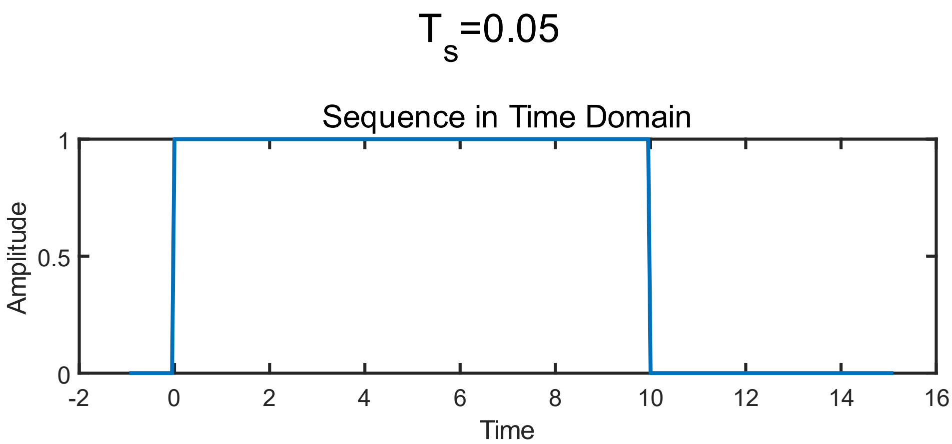
00 Tools

使用 MATLAB 进行本次图像处理实验。所使用的 MATLAB 版本为 R2021b。

01 Sampling Rectangular Window

窗函数通过自定义函数实现。分别设置采样时间$T_s = 0.2s, 0.05s, 0.001s$（对应的$f_s = 5,20,1000$），采样得到的离散序列图像及其频谱特性如图 1（由于频谱特性以 2π 为周期，只展示 $[-\pi, \pi]$ 上的图像）。





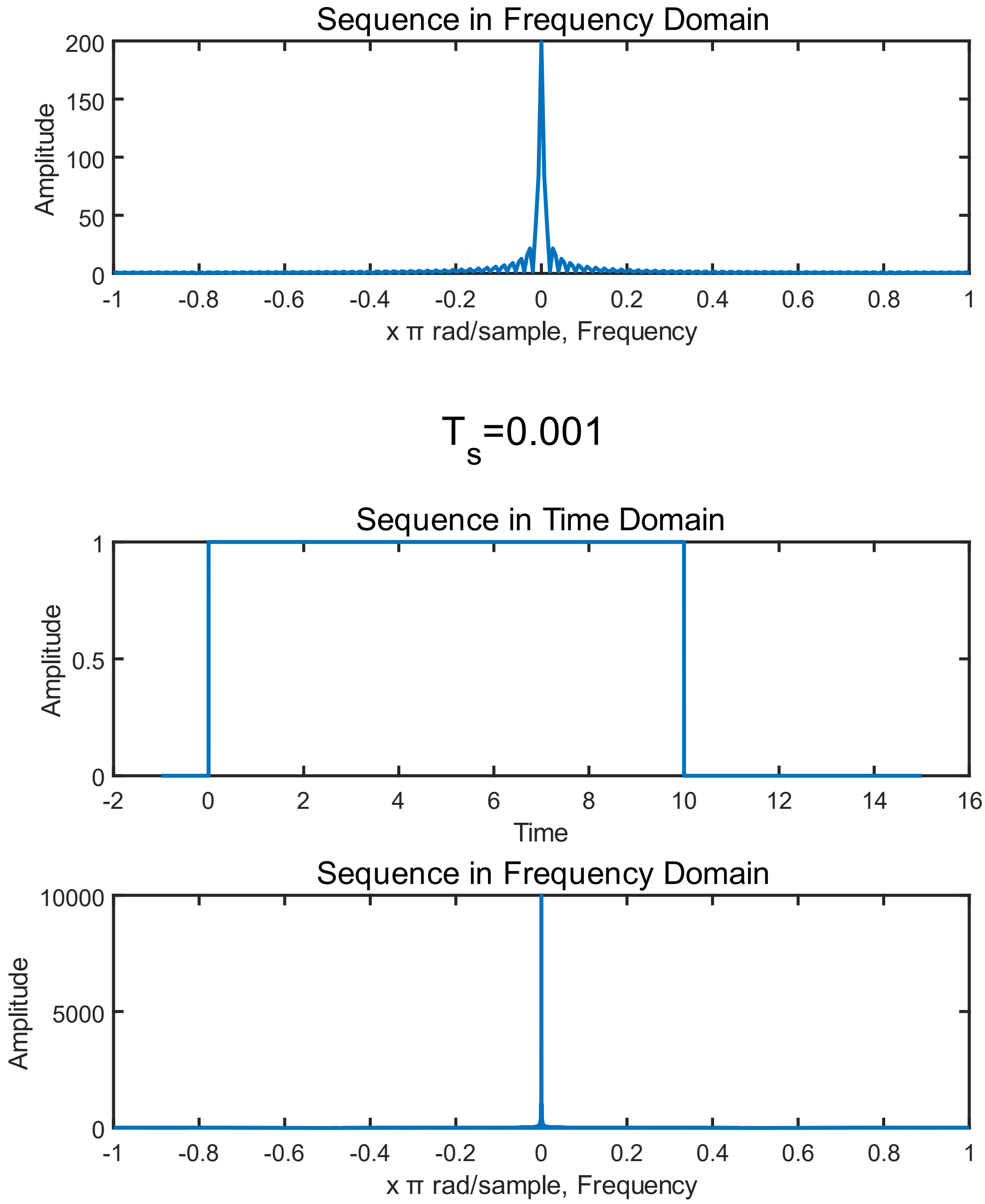


图 1　不同采样时间下，窗函数在时域中的图像及其频谱特性

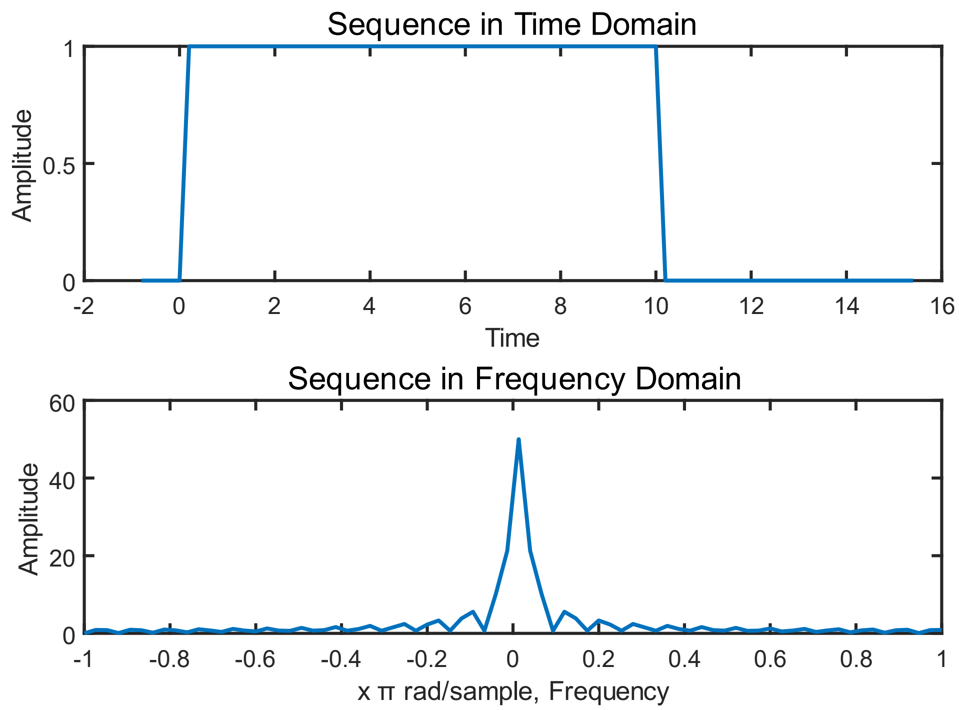
窗函数的频谱特性体现为：0处有最高的主瓣，两侧有最大幅值快速衰减的连续多个旁瓣；幅值衰减的速度为指数衰减。同时可以发现T_s越小，频谱特性中旁瓣幅值衰减速度越快，主瓣的最高幅值越大；且在$T_s = 0.001s$时，频谱特性近似冲激函数。

02　Sampling Shifted Rectangular Window

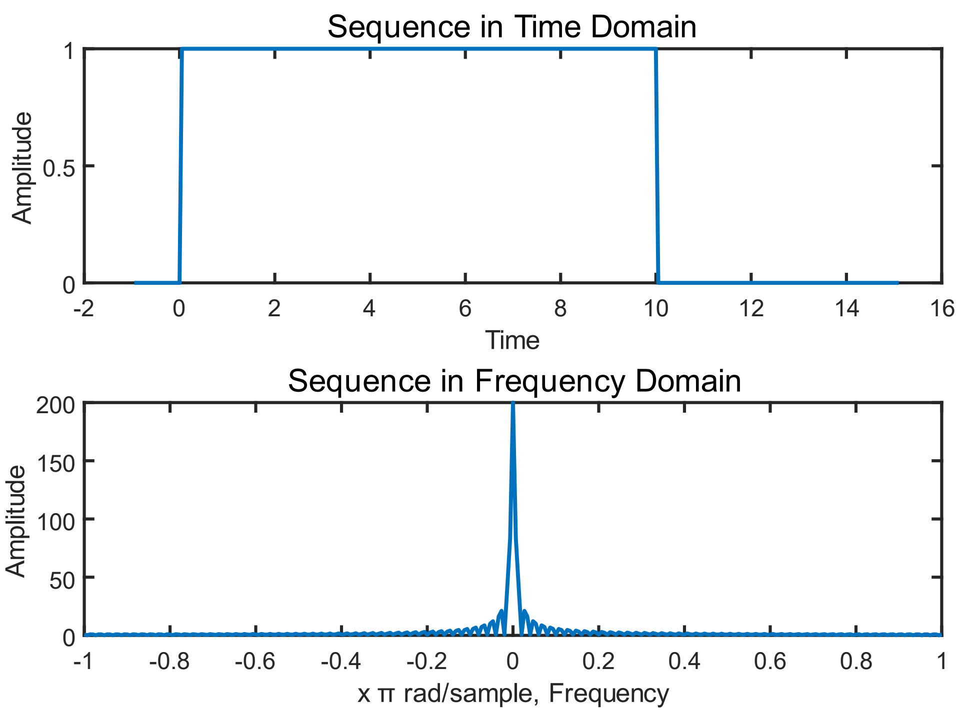
将原窗函数向右进行 $0.5T_s$ 的时移，以 $0.5T_s$ 的采样时间进行采样，采样得到的信号在时域中的图像及其频谱特性如图 2。（见下页）

从图像上看，时域中幅值为 1 的长度减少T_s，频谱特性与时移之前几乎没有差别（实际上）。

T_s=0.2


Sequence in Time Domain
Amplitude
Time
Sequence in Frequency Domain
Amplitude
x π rad/sample, Frequency

T_s=0.05


Sequence in Time Domain
Amplitude
Time
Sequence in Frequency Domain
Amplitude
x π rad/sample, Frequency

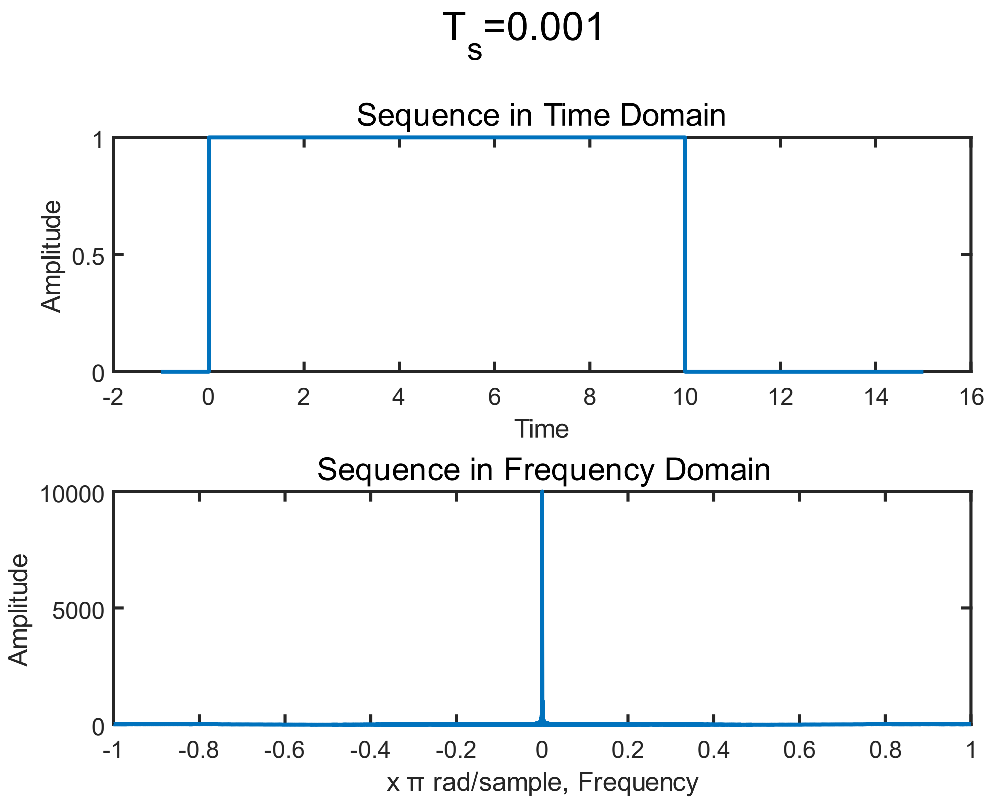
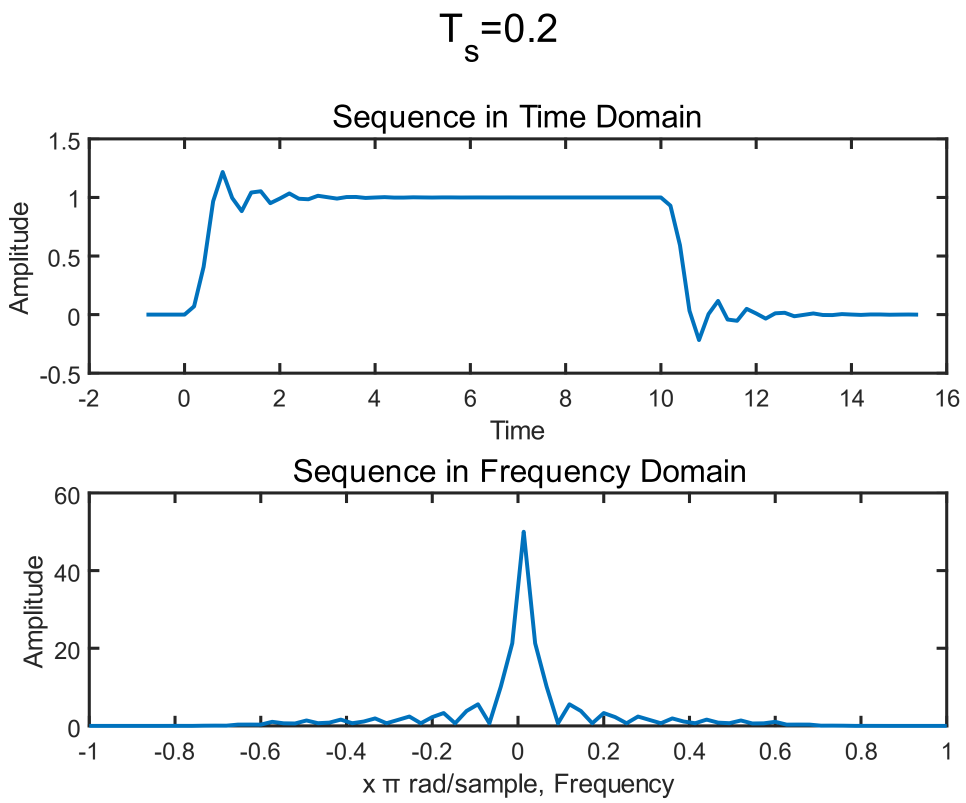


图 2　不同采样时间下，经 ${}^{1}/{}_{2}\,T_s$ 时移的窗函数在时域中的图像及其频谱特性

03　Sampling Shifted Rectangular Windows After Lowpass Filter

使用 Butterworth Filter 构造低通滤波器，本次实验中构造的低通滤波器为`butter(6,0.6)`。经过低通滤波器后的信号在时域中的图像及其频谱特性见图 3。



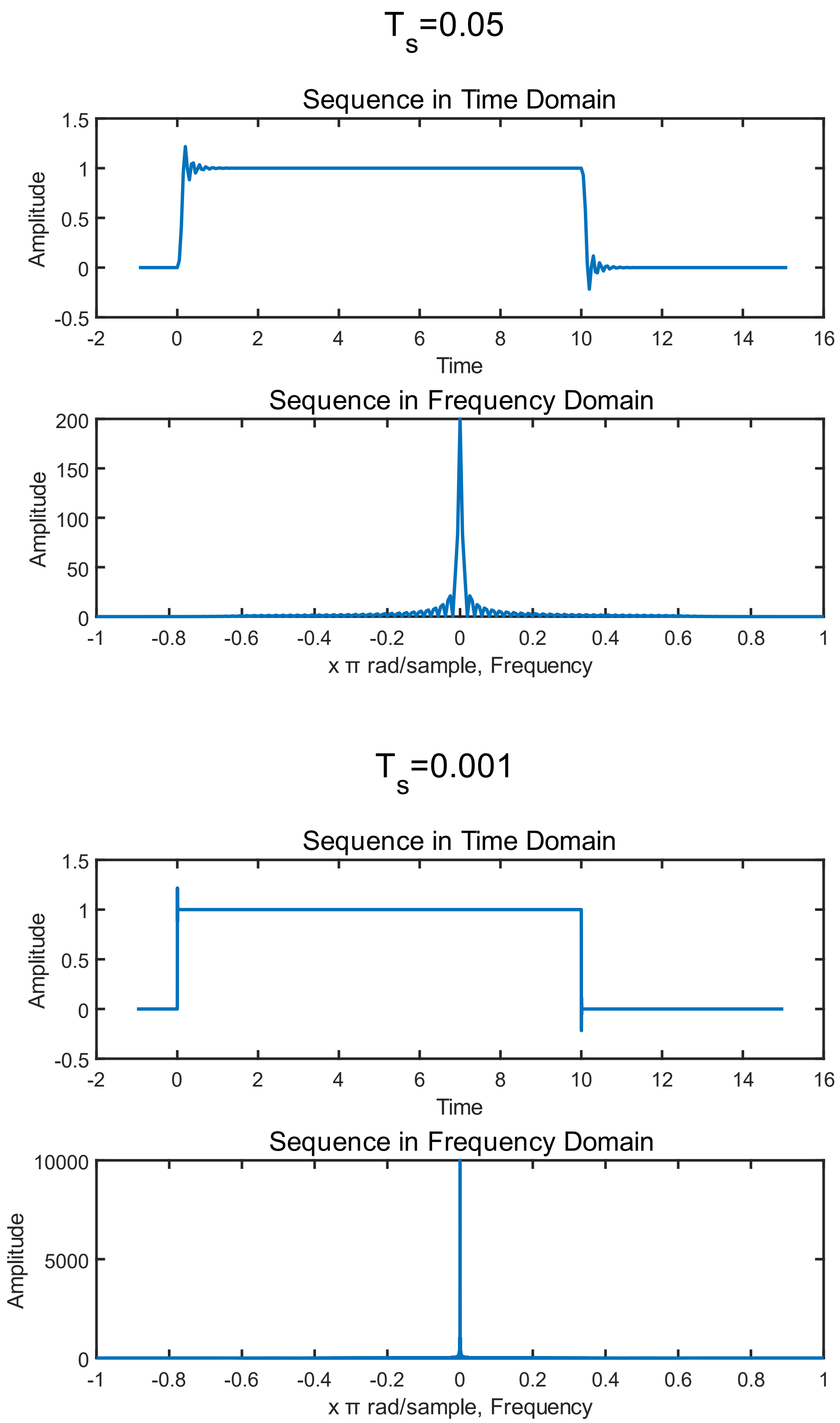


图 3 通过低通滤波器后，经过 $^{1}/_{2}\,T_s$ 窗函数在时域中的图像及其频谱特性

从图像上看，经过滤波器后，信号在时域内的图像出现了 Gibbs 现象，即在窗函数数值跳变处出现了逐渐渐弱的振荡；其频谱特性是原信号频谱特性在$[-0.6\pi, 0.6\pi]$的部分。

04 Analyses

记窗函数为$x(t)=\begin{cases}1, & 0\le t\le 10\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$. 采样后序列为$x[n]=x(nT_s)=\begin{cases}1, & 0\le n\le 10f_s\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$.

$$\text{DFT：}X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}=\sum_{n=0}^{10f_s}e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}=\frac{1-e^{-j\frac{20\pi f_s n}{N}}}{1-e^{-j\frac{2\pi n}{N}}}.$$

时移后窗函数为$x\left(t-\frac{1}{2}T_s\right)$. 采样后为$x[n]=x\left(nT_s-\frac{1}{2}T_s\right)=\begin{cases}1, & 1\le n\le 10f_s\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$.

$$\text{DFT：}X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}=\sum_{n=1}^{10f_s}e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}=\frac{e^{-j\frac{2\pi n}{N}}-e^{-j\frac{20\pi f_s n}{N}}}{1-e^{-j\frac{2\pi n}{N}}}.$$

将时移后窗函数通过低通滤波器，其对应频谱为$X\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}\sum_{n=1}^{10f_s}e^{-j\omega n}, & |\omega|\le 0.6\pi\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$，即$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=1}^{10f_s}e^{-j\omega n}\cdot \text{rect}\left(\frac{\omega}{0.6\pi}\right)$.

因此，其在时域中为

$$x[n]=x\left(nT_s-\frac{1}{2}T_s\right)*0.6\pi\ \text{sinc}(0.6\pi nT_s)=\sum_{k=1}^{10f_s}0.6\pi\ \text{sinc}\big(0.6\pi T_s(n-k)\big).$$

是sinc函数与矩形窗的卷积，体现为 Gibbs 现象。

$$\text{DFT：}X[k]=\frac{e^{-j\frac{2\pi n}{N}}-e^{-j\frac{20\pi f_s n}{N}}}{1-e^{-j\frac{2\pi n}{N}}}e^{-j\frac{2\pi n}{N}}\text{rect}\left(\frac{\omega}{0.6\pi}\right).$$