**Probability Theory and Mathematical Statistics 概率统计**

# Homework 0927-0930

邱一航 520030910155

**09/27 周一**

21. 解：(1) 记"目标被摧毁"为事件A.

$$P(A) = 0.4^3 \cdot 0.8 + C_3^1 \cdot 0.4^2 \cdot 0.6 \cdot 0.5 + (C_3^2 \cdot 0.4 \cdot 0.6^2) \cdot 0.2$$

$$= 0.2816 \quad \square$$

(2) 记"被击中三次而被摧毁"为事件B.

$$P(B|A) = \frac{0.4^3 \cdot 0.8}{P(A)} = 0.1818 \quad \square$$

26. 解：(1) 记进球人数为X.

则 $P(X=1) = 0.5 \cdot (1-0.7)(1-0.6) + (1-0.5) \cdot 0.7 \cdot (1-0.6)$

$+ (1-0.5)(1-0.7) \cdot 0.6 = 0.29 \quad \square$

(2) $P(X=2) = 0.5 \cdot 0.7 \cdot (1-0.6) + (1-0.5) \cdot 0.7 \cdot 0.6 + 0.5 \cdot (1-0.7) \cdot 0.6$

$= 0.44 \quad \square$

(3) $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - (1-0.5)(1-0.7)(1-0.6) = 0.94 \quad \square$

习题二

1. 解：$F(-\infty) = a - \frac{\pi}{2} b = 0.$ $\quad F(+\infty) = a + \frac{\pi}{2} b = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{\pi} \end{cases} \quad \square$

2. 证明：(1) $\because$ $G(x), H(x)$ 是随机变量的分布函数 $\therefore G(-\infty) = H(-\infty) = 0.$

$G(+\infty) = H(+\infty) = 1.$

$\therefore F(-\infty) = aG(-\infty) + bH(-\infty) = 0, \quad F(+\infty) = aG(+\infty) + bH(+\infty) = a + b = 1$

(2) 由于 $G(x), H(x)$ 均为单调不减函数. $\because a, b$ 均为正常数,

$\therefore F(x) = aG(x) + bH(x)$ 也是单调不减函数

(3) 由已知 $G(X)=G(X+0)$, $H(X)=H(X+0)$

$\therefore F(X)=aG(X)+bH(X)=aG(X+0)+bH(X+0)=F(X+0)$ 即右连续

由以上三条性质可知 $F(X)$ 也是随机变量的分布函数. □

4. 解: X的分布律:

| X | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| P | 0.72 | 0.24 | 0.04 |

(记 $P(X=2)=p_2$. 则 $3p_2+p_2+\frac{1}{6}p_2=1 \Rightarrow p_2=0.24$) □

∴ 分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ 0.72, & 1\leq x<2\\ 0.96, & 2\leq x<3\\ 1, & x\geq 3\end{cases}$$ □

计算 $P(1<X\leq 3)$: 方法一: $P(1\leq X\leq 3)=$ [redacted] $F(3)-F(1)=1-0.72=0.28$

方法二: $P(1<X\leq 3)=P(X=2)+P(X=3)=0.28$ □

5. 解: $P(X<7)=0$. $P(X=7)=\frac{1}{C_6^3}=\frac{1}{20}$ $P(X=9)=\frac{C_3^2}{C_6^3}=\frac{3}{20}$

$P(X=13)=\frac{C_4^2}{C_6^3}=\frac{3}{10}$ $P(X=18)=\frac{C_5^2}{C_6^3}=\frac{1}{2}$

∴ 分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<7\\ \frac{1}{20}, & 7\leq x<9\\ \frac{1}{5}, & 9\leq x<13\\ \frac{1}{2}, & 13\leq x<18\\ 1, & x\geq 18\end{cases}$ □

$P(X=7)=\frac{1}{20}$ □

$P(2<X<7)=F(7-0)-F(2)=0$ □

$P(7\leq X<13)=F(13-0)-F(7)+P(X=7)=\frac{1}{5}$ □

8. 解: 记第一名队员投篮次数为X, 第二名队员投篮次数为Y.

~~则~~ $\cancel{P(X=x)=(1-0.4)^{x-1}\cdot 0.6+(1-0.4)^{x}}$

则 $P(X=x)=(1-0.4)^{x-1}(1-0.6)^{x-1}\left(0.4+0.6\cdot(1-0.4)\right)$

$=0.76\cdot 0.24^{x-1}$ $(x\geq 1)(x\in N^*)$

$P(Y=y)=(1-0.4)^{y}(1-0.6)^{y-1}\left(0.6+(1-0.6)\cdot 0.4\right)$

$= 0.456 \cdot 0.24^{y-1} \qquad (y \geq 1)(y \in \mathbb{N}^*)$

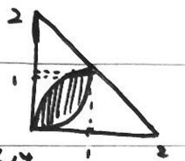
特别地，$P(X=0)=0$，$P(Y=0)=0.4$

综上，第一名队员投篮次数分布列为 $P(X=x)=\begin{cases} 0.76 \cdot 0.24^{x-1} & (x\in\mathbb{N}^*) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$ □

第二名队员投篮次数分布列为 $P(Y=y)=\begin{cases} 0.456 \cdot 0.24^{y-1} & (y\in\mathbb{N}^*) \\ 0.4 & (y=0) \end{cases}$ □

补充1. 解：设向该三角形区域投1个质点，其坐标满足 $x^2<y<\sqrt{x}$ 的概率为 $p$.

几何概型：$\int_0^1 (1-x^2)\,dx = 1-\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$



$S = 2\cdot\frac{2}{3}-1=\frac{1}{3}$

$p=\frac{S}{S_{总}}=\frac{1}{3}$

每次满足条件

投10次质点彼此独立且概率一致，服从二项分布

记满足 $x^2<y<\sqrt{x}$ 的质点有 $X$ 个，则 $X \sim B(10,\frac{1}{3})$

$P(X\geq 3)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)$

$=1-(1-\frac{1}{3})^{10}-C_{10}^1\cdot(1-\frac{1}{3})^9(\frac{1}{3})-C_{10}^2(1-\frac{1}{3})^8(\frac{1}{3})^2$

$=0.7009$ □

补充2. 解：记成功的次数为 $X$，由题意知 $X\sim B(n,p)$

$P(X>0)=1-P(X=0)=1-(1-p)^n$，$P(X=1)=n\cdot(1-p)^{n-1}\cdot p$

$P(X>1|X>0)=1-\frac{P(X=1)}{P(X>0)}=1-\frac{np(1-p)^{n-1}}{1-(1-p)^n}=\frac{1-(1-p)^{n-1}(1-p+np)}{1-(1-p)^n}$ □

**09/30 周四**

2-13. 解：记对某人检测1次发现呈阳性反应的概率为 $p$，呈阳性反应的次数为 $X$.

$p=10\%\cdot 0.95+(1-10\%)\cdot 0.01=0.104$.

独立重复试验，关注“阳性反应”，∴服从二项分布，$X\sim B(3,0.104)$

$P(X=2)=C_3^2\cdot p^2(1-p)=0.0291$ □

(2) 记"该人是带菌者"为事件A. 则 $P(A|X=2)=\dfrac{P(A)P(X=2|A)}{P(X=2)}$

$$P(X=2|A)=C_3^2\cdot 0.95^2\cdot 0.05=0.1354$$

$$\therefore P(A|X=2)=\frac{10\%\cdot 0.1354}{0.0291}=0.4656$$ □

2-14. 解: $X\sim B(20,0.3)$　　$P(X=k)$最大时, $k=\lfloor (20+1)\times 0.3\rfloor=6$

此时 $P(X=k)=C_{20}^6\cdot 0.3^6(1-0.3)^{14}=0.1916$ □

2-15. 解: $n=500$, $p=\frac{1}{500}$. 令 $\lambda=np=1$. 考虑到 $n,p,\lambda$ 三者量级差异.

可使用Poisson分布进行近似. 记指定的该页上错误数为X.

$$P(X\geq 3)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)=1-e^{-1}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\right)$$

$$=0.0803$$ □

2-16. 解: 查表(附录)中Poisson分布分布函数可知. $\lambda=3$时, 在$x=8$时 $\overset{\text{分布函数}}{F(8)}=\sum_{i=0}^{8}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}=0.9962>0.996$

且 $F(7)=\sum_{i=0}^{7}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}=0.9881<0.996$　　∴至少库存8颗钻石. □

2-18. 解: (1) $P(X>15)=1-\sum_{i=0}^{15}P(X=i)=1-e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{15}\frac{\lambda^k}{k!}=0.0487$ □

(2) $P(X>0)=0.5\Rightarrow P(X=0)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!}=e^{-\lambda}=0.5$

$$\therefore P(X=1)=e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda}{1!}=\lambda e^{-\lambda}=-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}=+\frac{1}{2}\ln 2$$

$$\therefore P(X\geq 2)=1-P(X=0)-P(X=1)=0.5-\frac{1}{2}\ln 2=0.1534$$ □

2-19. 解: 考察 $\frac{P(X=k)}{P(X=k+1)}$　$(k\geq 0)$.

记 $q_k=\dfrac{P(X=k)}{P(X=k+1)}=\dfrac{e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}}{e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}}=\dfrac{k+1}{\lambda}$

当 $k+1<\lambda$ 时. $P(X=k)<P(X=k+1)$

当 $k+1>\lambda$ 时　$P(X=k)>P(X=k+1)$.

因此有
① $\lambda\in\mathbb{N}^*$ 时. $k=\lambda-1$ 或 $\lambda$ 时, $P(X=k)$ 最大　($\because P(X=0)<\cdots<P(X=\lambda-1)=P(X=\lambda)>P(X=\lambda+1)>\cdots$)
② $\lambda\notin\mathbb{N}^*$ 时　$k=[\lambda]$ 时. $P(X=k)$ 最大　($\because P(X=0)<\cdots<P(X=\lfloor\lambda\rfloor)>\cdots$)

证明过程见上. □

2-23. 解: $F(0-0)=F(0) \Rightarrow a=b$

$F(2-0)=F(2) \Rightarrow b+2a=1$ $\Rightarrow \begin{cases} a=1/3 \\ b=1/3 \end{cases}$ □

2-25. 证明: ∵ $F(x)$ 是连续型随机变量 $X$ 的分布函数 ∴存在 $f(u)$ 使得:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$$

则有 $\int_{-\infty}^{+\infty}[F(x+b)-F(x+a)]\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{x+b} f(u)\,du-\int_{-\infty}^{x+a} f(u)\,du\right)dx$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{x+a}^{x+b} f(u)\,du=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx\int_{u-b}^{u-a}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}(b-a)f(u)\,du$

$=(b-a)\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,du=b-a$ □

2-27. 解: (1) 由 $f(x)$ 是概率密度, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}\frac{a}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\cos\theta}\,d\theta$

$=a\pi=1 \Rightarrow a=\frac{1}{\pi}$ □

(2) $P(|X|<\frac{1}{2})=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{a}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos\theta}{\cos\theta}\,d\theta=\frac{1}{3}$ □

(3) $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$

① $x<-1$ 时: $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)\,du=0$

② $x\geq 1$ 时. $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)\,du=1$.

③ $-1\leq x<1$ 时. $F(x)=\int_{-1}^{x} f(u)\,du=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\arcsin x}d\theta=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin x$

$$\therefore F(x)=\begin{cases} 0 & (x<-1) \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin x & (-1\leq x<1) \\ 1 & (x\geq 1) \end{cases}$$ □

2-32. 解: $f(x)=\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x>0) \\ 0 & (x\leq 0) \end{cases} \Rightarrow F(x)=\begin{cases} 0 & (x\leq 0) \\ 1-e^{-\lambda x} & (x>0) \end{cases}$

(1) $P(X\leq 2)=\int_{-\infty}^{2} f(x)\,dx=F(2)=1-e^{-\frac{2}{50}}=0.0392$ □

(2) $P(X\geq 10)=1-P(X<10)=1-F(10-0)=e^{-\frac{1}{5}}=0.8187$ □

(3) 即求 $P(X\geq 20\,|\,X\geq 10)$

$$P(X\geq 20) = 1 - F(20-0) = e^{-\frac{2}{5}} = 0.6703$$

$$P(X\geq 20 \mid X\geq 10) = \frac{e^{-\frac{2}{5}}}{e^{-1/5}} = e^{-1/5} = 0.8187$$ □

2-33. 解：记每人次电话超过10 min的概率为$p$. 则 $p = P(T\geq 10) = 1-F(10-0) = e^{-10\lambda} = e^{-5} = 0.0067$

282人次所打电话超过10min的次数为$X$.

独立重复试验. 只关注"$T\geq 10$". 服从二项分布. $X\sim B(282, p)$

$$P(X\geq 2) = 1-P(X=0)-P(X=1) = 1-(1-p)^{282}-282\cdot p\cdot(1-p)^{281} = 0.5671$$ □

*考虑到$n, p$, $\lambda'=np=1.8894$ 的量级差异. 可用Poisson分布近似

$$P(X\geq 2) = 1-P(X=0)-P(X=1) = 1-e^{-\lambda'}(1+\lambda') = 0.5632$$ □

2-35. 解：$\because P(X>c) = P(X<2\cdot 2-c)$ (正态分布的性质) 且 $P(X\geq c)=P(X<c)$

$\therefore c = 2\cdot 2-c \Rightarrow c=2$ □

2-38. 解：$P(X\leq 60) = 0.25 = P(X\geq 2\cdot 66-60) = P(X\geq 72) = 1-P(X<72)$

$= 1-P(X\leq 72) \Rightarrow P(X\leq 72) = 0.75$

$X\sim N(66,\sigma^2)$ $\therefore P(X\leq x) = \Phi\left(\frac{x-66}{\sigma}\right)$ 查表知 $\Phi(0.67)\approx 0.75$

$\Rightarrow \sigma = 8.96$ 则 $P(X\geq 65) = 1-P(X<65) = 1-P(X\leq 65)$

$= 1-\Phi\left(\frac{65-66}{\sigma}\right) = \Phi\left(-\frac{65-66}{\sigma}\right) = \Phi(0.11) = 0.5438$

记体重超过65kg的人数为$Y$. 则 $Y\sim B(3, P(X\geq 65))$

$$P(Y\geq 1) = 1-P(Y=0) = 1-(1-P(X\geq 65))^3 = 0.9051$$ □

2-39. 解：$P(|X|>23.26) = 1-P(|X|\leq 23.26) = 2-2P(X\leq 23.26)$

$\sigma=10$. $= 2-2\Phi\left(\frac{23.26}{\sigma}\right) = 2-2\Phi(2.326) = 2-2\times 0.9901$

$= 0.0198$

记200次独立重复测量中误差绝对值大于23.26的次数为$Y$. 则 $Y\sim B(200, 0.0198)$

$$P(Y\geq 4) = 1-P(Y=0)-P(Y=1)-P(Y=2)-P(Y=3)$$

$$= 1-(1-0.0198)^{200}-200\cdot 0.0198\cdot(1-0.0198)^{199}-C_{200}^{2}\cdot 0.0198^2(1-0.0198)^{198}$$

$$- C_{200}^{3} \cdot 0.0198^{3} \cdot (1-0.0198)^{197}$$

$$= 0.5606 \qquad \square$$

* 考虑到 $n=200$，$p=0.0198$，$\lambda := np = 3.96$ 的数量级，可近似为 Poisson 分布.

$$P(Y \geq 4) = 1 - \sum_{k=0}^{3} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = 1 - e^{-3.96} \cdot \left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^3}{6}\right)$$

$$= 0.5587 \qquad \square$$