线代
期末复习

邱一航
520030910155

行列式

1. $\boxed{\text{数域}}$. 要证明 xx 是数域，必须有：0, 1 ∈ xx 这一步！（定义）

2. 1×1 矩阵就是数。

3. $\boxed{\text{简化阶梯形矩阵}}$：主元所在列除主元外其余元素全为0. 主元为1

A $A^* = (A\ b)$ x 为 $n\times1$ 矩阵

非零行个数 r 非零行个数 s 显然有 $r\leq s$.

(1) $b\neq0$ 线性非齐次方程组.

⟨1⟩ $r=s$ 有解

- $r=s=n$ 有唯一解
- $r=s<n$ 有无穷多组解

⟨2⟩ $r<s$ 无解

(2) $b=0$ 线性齐次方程组 必有 $r=s\longrightarrow$ 必有解

⟨1⟩ $r=s=n$ 有唯一零解

⟨2⟩ $r=s<n$ 有非零解（有无穷多组解）

特别地，$m<n$ 有无数组解. 有非零解

4⁺. 矩阵、矩阵乘法

4. $\boxed{\text{可交换矩阵}}$：$AB=BA$. 显然 A 与 B 是同型方阵

特殊的可交换矩阵：kE_n 与 n 阶方阵；对角矩阵 diag().

$\boxed{\text{矩阵乘法}}$

5. 矩阵乘法 除交换律外都满足乘法自身性质. $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$ ✓

6. $A^0=E$ $\boxed{(A\neq0)}$

7. $A\cdot B=B\cdot A \Leftrightarrow \forall k\in N^*.\ (A\cdot B)^k=(B\cdot A)^k\ (=A^kB^k=B^kA^k)$

$AB\cdot AB\cdot AB\cdots\cdots AB$

$A\cdot \underbrace{AB\ AB}\ \cdots \underbrace{AB}\cdot B \Rightarrow A\cdots\cdots AB\cdots\cdots B$

$A\cdot A\ \underbrace{AB}\cdot\ \cdots\cdots BB\ B$

8. 行列式

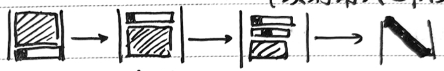
(1) 主对角线行列式. 上(下)三角行列式 $|A| = \prod\limits_{1\le i\le n} a_{ii}$ (主对角线之积)

(2) 次对角线(副对角线)行列式. 反上(下)三角行列式

$$|A| = \prod_{1\le i\le n} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{i,n-i+1}$$

(次对角线之积乘 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$)

Way I. 交换相邻两行



共交换 $\frac{n(n-1)}{2}$ 次, 乘上 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个 (-1).

Way II. 按行.按列展开. 引入自己的符号 antidiag =: antd( )

$$\mathrm{antd}(a_{n1}, a_{(n-1)2}, \cdots a_{1n}) = (-1)^{1+n}\, \mathrm{antd}(a_{n1}\, a_{(n-1)2} \cdots a_{2(n-1)}) \cdot a_{1n}$$

$$= (-1)^{1+n}(-1)^{1+n-1}\, \mathrm{antd}(a_{n1}, a_{(n-1)2}, \cdots a_{3(n-2)}) \cdot a_{2(n-1)} \cdot a_{1n}$$ ← 第行第(n-1)列

$$= \cdots = (-1)^{n+1}(-1)^{n} \cdots (-1)^{1+2}\, a_{n1}\, a_{(n-1)2} \cdots a_{2(n-1)}\, a_{1n}$$

$$= (-1)^{n-1}(-1)^{n-2} \cdots (-1)^{1} \prod \text{次对角线} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod \text{次对角线}$$

(3) Laplace 行列式

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{vmatrix} = |A||B|$$ 其中 A, B 均为方阵 (可不同型)

$$\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & A \\ B & C \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A||B|$$ 其中 A, [redacted] 为 m 阶方阵, B 为 n 阶方阵

(交换直接可证. B 中每一行通过相邻两行不断交换到最终位置都交换 m 次. 共有 n 行要交换. 共 mn 次交换)

(4) Vandermonde 行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}_{n\times n} = \prod_{1\le i<j\le n} (x_j - x_i)$$

9. 行列式常用手段

(1) 加边法

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(2) 箭形行列式化上(下)三角 (化三角法)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{1n} & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

后面几列乘上一定数加到第1列.

化为:

$$\begin{vmatrix} ▨ & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = ▨\cdot \prod_{2\le i\le n} a_{ii} \ (\text{主对角线})$$

(3) 递推法

$$D_{n+1} \xrightarrow{\text{操作}} F(D_n)$$

e.g.

$$D_n=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}_{n\times n} \xrightarrow[\text{第1列}]{\text{全加到}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = D_{n-1} + (-1)^{n+1}\cdot \underbrace{(-1)^{n-1}}_{\text{下三角}}$$

(4) 多个余子式(代数余子式)之和求解

$$|A| = \begin{vmatrix} & & * & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ & & * & & \end{vmatrix}$$

$$k_1A_{i1}+k_2A_{i2}+\cdots+k_nA_{in} = \begin{vmatrix} & & * & \\ k_{i1} & k_{i2} & \cdots & k_{in} \\ & & * & \end{vmatrix} \qquad (k_x=0 \text{ 是允许的})$$

$$k_1M_{i1}+k_2M_{i2}+\cdots+k_nM_{in} = \begin{vmatrix} & & * & \\ k_{i1}\cdot(-1)^{i+1} & k_{i2}(-1)^{i+2} & \cdots & k_{in}(-1)^{i+n} \\ & & * & \end{vmatrix}$$

10. 使用A^{-1}前必须先说明A可逆（$|A|\neq 0$）

11. $(AB)^T = B^T A^T$

$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & & & \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{nn} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & & & \\ & A_{22}^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{nn}^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \iddots & & \\ A_n & & & \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} & & A_{n-1}^{-1} & A_n^{-1} \\ & \iddots & & \\ A_1^{-1} & & & \end{pmatrix}$$

☆ $\boxed{|kA_{n\times n}| = k^n |A|}$

$|A||B| = |AB|$ 仅对A.B同型成立

$|A|+|B| \neq |A+B|$

$$\begin{vmatrix} * \\ \alpha_i \\ * \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} * \\ \beta_i \\ * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * \\ \alpha_i+\beta_i \\ * \end{vmatrix}$$

12. $AB=0$ 且 $B\neq 0$ 则 $Ax=0$ 有非零解.（√）

B的每一列都是$Ax=0$的一组解. $B\neq 0 \longrightarrow$ 非零列即是非零解！

13.
$$A=\begin{array}{|cccccc|l} * & * & * & * & * & * & \\ a & a & a & a & b & b & \leftarrow i \\ * & * & * & * & * & * & \\ c & c & c & c & d & d & \leftarrow j \\ * & * & * & * & * & * & \end{array}$$

求 $A_{k1}+A_{k2}+A_{k3}+A_{k4}$.　（$k\neq i \wedge k\neq j$）

则 $\begin{cases} a(A_{k1}+A_{k2}+A_{k3}+A_{k4}) + b(\cdots) = 0 \\ c(\qquad\qquad) + d(\quad) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow A_{k1}+A_{k2}+A_{k3}+A_{k4} = 0$.

14. $E+AB$ 可逆 $\Rightarrow$ $E+BA$ 可逆.

[证] 记 $C=(E+AB)^{-1}$. 则 $C(E+AB)=(E+AB)C=E$.

$C+CAB = C+ABC = E$

$\underline{CAB} = ABC = \underline{E-C}$

$B(CAB)A = B(E-C)A$

$BCABA = BA - BCA$

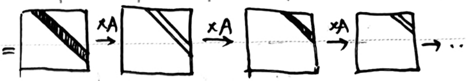
即 $BCA(BA+E) - BA = 0$

$(BCA+E)(BA+E) = E$　故 $(E+BA)^{-1} = BCA+E$.

15. 特殊的矩阵幂

（对+1不变号即可）

(1) $A=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot A=0$

$A=$ 

$A=\begin{pmatrix}0&-1&\cdots&0\\&\ddots&\ddots&\\&&&-1\\&&&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{平方}}\begin{pmatrix}0&0&1&\cdots&0\\&&\ddots&&\\&&&&0\\&&&&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\times A}\begin{pmatrix}0&0&0&-1&0\\&&&\ddots&-1\\&&&&0\\&&&&0\\&&&&0\end{pmatrix}\cdots\cdots\to 0.$

(2) $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$ $\quad A^2=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$ $\quad A^3=\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}$ $\quad\cdots\cdots$

$A=\begin{pmatrix}1&&\\\vdots&\ddots&\\1&\cdots&1\end{pmatrix}$ $\quad A^2=\begin{pmatrix}1&&&\\2&1&&\\3&2&\ddots&\\\vdots&3&2&1\end{pmatrix}$ $\quad A^3=\begin{pmatrix}1&&&&\\3&\ddots&&&\\6&\ddots&&&\\10&&&&\\\vdots&10&6&3&1\end{pmatrix}\begin{matrix}+2\\+3\\+4\\\cdots\end{matrix}$

$A^4=\begin{pmatrix}1&&&&\\4&\ddots&&&\\10&&\ddots&&\\20&&&&\\\vdots&20&10&4&1\end{pmatrix}\begin{matrix}+3\\+6\\+10\\\cdots\end{matrix}$

(3) $A=\begin{pmatrix}a&b\\b&-a\end{pmatrix}$ $\quad A^2=\begin{pmatrix}a^2+b^2&0\\0&a^2+b^2\end{pmatrix}$ $\quad A^3=\begin{pmatrix}a(a^2+b^2)&b(a^2+b^2)\\b(a^2+b^2)&-a(a^2+b^2)\end{pmatrix}$ $\quad A^4=\begin{pmatrix}(a^2+b^2)^2&0\\0&(a^2+b^2)^2\end{pmatrix}$

$\cdots\cdots$

本质：辅助角，化为 $\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\\sin\theta&-\cos\theta\end{pmatrix}$. 旋转[redacted]矩阵！

Date

16. $\boxed{\text{Laplace 定理}}$

D 为 n 阶行列式，其中任取 k 行元素，记它们组成的全体 k 阶子式为 $M_1, \cdots M_r$（显然 $r = C_n^k$）. M_i 对应的 D 中代数余子式为 A_i.

则 $D = \sum_{i=1}^{r} M_i A_i$

17. 迹 trace

$$tr A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

可逆矩阵与矩阵乘法

1. 概念们　　$|A| \neq 0$ (方阵) $\Leftrightarrow$ A 可逆

求 A^{-1}：　(1) $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$ 伴随矩阵　　$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$

其中 $|A^{-1}| = |A|^{-1}$　　$\therefore |A^*| = |A|^{n-1}$ (A 为 n 阶方阵)

2. 特殊可逆矩阵

$$[E(i,j)]^{-1} = E(i,j)$$

$$[E(i(k))]^{-1} = E\left(i\left(\tfrac{1}{k}\right)\right)$$

$$[E(i,j(k))]^{-1} = \cancel{E(i,j(k))} \quad E(i,j(-k)).$$

3. $\alpha^T\alpha$ 是数 $\longrightarrow$ 提到外面　　e.g. $\beta\alpha(\alpha^T\alpha)\gamma\delta = (\alpha^T\alpha)\beta\alpha\gamma\delta.$

秩

1. $r(A,B) \geqslant r(A)$

2. $r(A+B) \leqslant r(A,B) \leqslant r(A)+r(B)$

3. $r(A)+r(B)-n \leqslant r(AB) \leqslant \min\{r(A), r(B)\}$

4. $$r(A^*) = \begin{cases} n & (r(A)=n) \\ 1 & (r(A)=n-1) \\ 0 & (r(A)<n-1) \end{cases}$$

$\leftarrow$ 定义知 ($|A^*| \neq 0$)

$\leftarrow$ $r(A^*) \geqslant 1$ (定义，子式)

$\leftarrow$ 定义知 (子式)

$A \cdot A^*$ 中 $b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk}$

把j行改为i行元素，求行列式

$r(A)+r(A^*)-n \leqslant 0 \Rightarrow r(A^*) \leqslant 1.$ $\longleftarrow$ $i=j \to 0$; $i \neq j \longrightarrow 0.$

$\therefore A \cdot A^* = 0$

5. 若 $A \cong B$ (相抵/等价) 即互相初等行变换得到 $\longleftarrow$ 全零行个数一致

$r(A) = r(B)$

Date

向量

1. 概念

向量. 向量组: 本册用 $\alpha_{1\sim n} := \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ 这个向量组. 默认 $A_\alpha = (\alpha_1, \cdots \alpha_m)$

线性表示: $\beta = \sum_{i=1}^{m} k_i \alpha_i$. 本册中: $\beta = Lrp(\alpha_{1\sim m})$.

线性相关: 存在一组不全为0的 $k_1, \cdots k_m$ 使 $\sum_{i=1}^{m} k_i \alpha_i = 0$. 本册中用 $\alpha_{1\sim m} \not+$ 表示.

线性无关: $\sum_{i=1}^{m} k_i \alpha_i = 0 \Leftrightarrow k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$. 本册中用 $\alpha_{1\sim m} +$ 表示.

2. 定理

(默认 $A = (\alpha_1, \cdots \alpha_m)$) $\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix} = x$

(1) $\alpha_{1\sim m} \not+ \Leftrightarrow Ax = 0$ 有无穷多组解/有非零解 $\Leftrightarrow r(A) < m \Leftrightarrow |A| = 0$.

$\alpha_{1\sim m} + \Leftrightarrow Ax = 0$ 有唯一零解 $\Leftrightarrow r(A) = m \Leftrightarrow |A| \neq 0$.

(2) $\beta_{1\sim t} = Lrp(\alpha_{1\sim s})$ $\begin{cases} t > s \Rightarrow \beta_{1\sim t} \not+. \\ \beta_{1\sim t} + \Rightarrow t \leq s. \end{cases}$

(3) $\alpha_{1\sim m} \in \mathbb{R}^n$. $\alpha_{1\sim m} + \Rightarrow m \leq n$

(4) $\beta = Lrp(\alpha_{1\sim m}) \Leftrightarrow Ax = \beta$ 有解 $\Leftrightarrow r(A) = r(A\ \beta)$

(5) 向量组 $\alpha_{1\sim m}$. $\beta_{1\sim s}$. 若 $r(\beta_{1\sim s}) < r(\alpha_{1\sim m}) \Rightarrow \alpha_{1\sim m} \neq Lrp(\beta_{1\sim s})$

若 $\alpha_{1\sim m} = \beta_{1\sim s} \Rightarrow r(\beta_{1\sim s}) \geq r(\alpha_{1\sim m})$

(6) 向量组 $\beta_{1\sim s}$ 能被 $\alpha_{1\sim m}$ 线性表示

$\Leftrightarrow \overset{r(A)=}{r(\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_m)} = r(\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_m\ \beta_1\ \beta_2 \cdots \beta_s) = r(A\ B)$

3. 极大线性无关组

等价向量组. 向量组的秩. 极大线性无关组不唯一

极大线性无关组可互相表示

4. 定理

(1) $r(A) =$ 行秩 (行向量组的秩) $=$ 列秩 (列向量组的秩)

(2) $A \xrightarrow{\text{初等变换}} B$. $A \cong B$ (相抵) $r(A) = r(B)$

(3) $\alpha_{1\sim s} = Lrp(\beta_{1\sim t})$. $\Rightarrow$ $r(\alpha_{1\sim s}) \leqslant r(\beta_{1\sim t})$

5. 基础解系与解的结构

$\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-r}$ $+$ 且 任意解 $= Lrp(\eta_{1\sim n-r})$

(1) 系数矩阵 (Ax=0) $\longrightarrow \begin{pmatrix} E_r & A_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $A_0 = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_{n-r}) = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n-r} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rn-r} \end{pmatrix}$

取 $\eta_1 = \begin{pmatrix} -\alpha_1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\eta_2 = \begin{pmatrix} -\alpha_2 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\cdots$ $\eta_{n-r} = \begin{pmatrix} -\alpha_{n-r} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

原因: 即 $\begin{cases} x_1 + \qquad c_{11}x_{r+1} + \cdots + c_{1n-r}x_n = 0 \\ \quad x_2 \quad + c_{21}x_{r+1} + \cdots + c_{2n-r}x_n = 0 \\ \qquad \cdots \qquad \cdots \\ \qquad x_r + c_{r1}x_{r+1} + \cdots + c_{rn-r}x_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+i} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -kc_{1i} \\ -kc_{2i} \\ \vdots \\ -kc_{ri} \\ 0 \\ \vdots \\ k \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_i \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

(2) $Ax=\beta$: $Ax=0$ 基础解系 $\eta_1, \cdots \eta_{n-r}$. $Ax=\beta$ 特解 γ_0

则 $Ax=\beta$ 通解 $\gamma = \gamma_0 + \underbrace{\sum_{i=1}^{n-r} k_i\eta_i}_{\eta} \longrightarrow A\eta = 0$.

(3) $A\eta_1=0$, $A\eta_2=0 \Rightarrow A(\eta_1-\eta_2)=0$; $A\xi_1=\beta$, $A\xi_2=\beta \Rightarrow A(\xi_1-\xi_2)=0$, $A\cdot\frac{\xi_1+\xi_2}{2}=\beta$)

6. 已知 $\alpha_{1\sim s}$ $+$ ($\not+$). 求 $\beta_{1\sim t}$ (与$\alpha_{1\sim s}$有关) $+$ ($\not+$)

$\Rightarrow$. 化回到 $\alpha_{1\sim s}$ 形式. 得方程组 $\longrightarrow$ x 非零解/唯一零解

7. 证明 $\alpha_{1\sim m}$ 能表示 $\beta_i \in V$. $\longrightarrow$ 求出 x 即可.

e.g. $r(\alpha_{1\sim m}) = m$, $A = (\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_m)$. $Ax=\beta \Rightarrow x = A^{-1}\beta$ 存在. ✓

$\downarrow$ A^{-1} 存在.

8. a_2, a_3, a_4 $+$. $a_1 = 2a_2 - a_3$. $b = a_1+a_2+a_3+a_4$. $A=(a_1, a_2, a_3, a_4)$ 求$Ax=b$ 通解.

[解] $r(A)=3$. 基础解系1个向量. 将$a_1=2a_2-a_3$代入 $(Ax=0)$ $x_1a_1+x_2a_2+x_3a_3+x_4a_4=0$

得 $\begin{cases} 2x_1+x_2=0 \\ -x_1+x_3=0 \\ x_4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=x_1 \\ x_2=-2x_1 \\ x_3=x_1 \\ x_4=0 \end{cases}$ 取 $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. 特解 $\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 通解 $\gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(k \in F)$

线性空间与线性变换

1、 $\boxed{\text{线性空间}}$ $V \neq \phi$. $\mathbb{F}$是数域. 定义"+"和 纯量乘法(数乘)

满足以下，则称V为$\mathbb{F}$上. ($\alpha, \beta, \gamma \in V$, $k \in \mathbb{F}$)

(1) 加法交换律 $\alpha+\beta=\beta+\alpha$

(2) 加法结合律 $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

(3) 零元存在 $0+\alpha=\alpha$

(4) 负元存在 $\forall\alpha\ \exists\beta.\ \alpha+\beta=0 \longrightarrow \beta=\cdots f(\alpha)$

(5) "单位" $"1"\cdot\alpha=\alpha$ ("1"未必是1)

(6) 纯量乘法结合律~~交换律~~ $k(l\alpha)=l(k\alpha)=(kl)\alpha$

(7) 两种分配律 $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$

(8) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$

[性质]: 零元唯一. 负元唯一. $0\cdot\alpha_V=0$. $k\cdot 0=0$. $k\cdot\alpha=0 \Leftrightarrow k=0$ 或 $\alpha=0$.

$\boxed{\text{线性子空间}}$ $W \subseteq V$. $W \neq \phi$. W关于"+"."数乘"封闭. 称W为V的.

$\boxed{\text{基}}$ $\boxed{\text{维数}}$ $\boxed{\text{坐标}}$

2. $\boxed{\text{同构映射}}$. V, V'同为$\mathbb{F}$上线性空间, 若存在$\boxed{\text{一一对应}}$ $\sigma: V \longrightarrow V'$. 满足:

1) $\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$ $(\alpha,\beta\in V)$

2) $\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)$ $(k\in\mathbb{F}.\ \alpha\in V)$

称σ为从V到V'的.

$\boxed{\text{基变换公式}}$ V是$\mathbb{F}$上线性空间. 记$n=\dim V$. $\alpha_{1\sim n}, \beta_{1\sim n}$都是基.

$(\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_n)=(\beta_1 \cdots \beta_n)C_1$ 为从$\beta_{1\sim n}$到$\alpha_{1\sim n}$的.

$(\beta_1\ \beta_2 \cdots \beta_n)=(\alpha_1 \cdots \alpha_n)C_2$ 为从$\alpha_{1\sim n}$到$\beta_{1\sim n}$的.

C_1为从$\beta_{1\sim n}$到$\alpha_{1\sim n}$的$\boxed{\text{过渡矩阵}}$. 且$C_1=C_2^{-1}$.

C_2为从$\alpha_{1\sim n}$到$\beta_{1\sim n}$的过渡矩阵.

$\boxed{\text{坐标变换}}$ x为α下坐标. y为β下坐标. $\rightarrow$ $y=C_1x$

$(\alpha x=\beta C_1 x=\beta y)$

$\boxed{C_1=(\alpha_1\cdots\alpha_n)(\beta_1\cdots\beta_n)^{-1}}$

满秩，必可逆

3. $\boxed{\text{欧氏空间}}$ V是$\mathbb{R}$上线性空间. $\forall \alpha,\beta\in V$, 有唯一实数与之对应 $=: (\alpha,\beta)$.

对应关系满足: (1) 对称性 $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$

(2) 线性性 $(k\alpha+l\beta,\gamma)=(k\alpha,\gamma)+(l\beta,\gamma)$

$=k(\alpha,\gamma)+l(\beta,\gamma)$

(3) 正定性 $(\alpha,\alpha)\geq 0$ 且 $\boxed{(\alpha,\alpha)=0 \Leftrightarrow \alpha=0}$.

则称 V.

☆ Euclid 空间必是实线性空间.

$\boxed{\text{内积}}$ 该对应关系 $(\alpha,\beta): V\times V\longrightarrow \mathbb{R}$.

一般有 $(\alpha,\beta)=\beta^T\alpha$. (特殊说明除外)

$\boxed{\text{长度}}$ $|\alpha|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$. $\in\mathbb{R}$ 特别地, α是单位向量 $\Leftrightarrow |\alpha|=1$.

$\boxed{\text{夹角}}$ $\langle\alpha,\beta\rangle = \arccos\dfrac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}$.

当 $\langle\alpha,\beta\rangle=90^\circ$ 时. $\alpha\perp\beta$. 称α与β $\boxed{\text{正交}}$.

$\boxed{\text{长度的性质}}$ • $|\alpha|\geq 0$, $|k\alpha|=|k||\alpha|$ $(k\in\mathbb{R})$

$\boxed{\text{Cauchy – Schwarz 不等式} \quad |(\alpha,\beta)|\leq|\alpha||\beta|}$ $\xrightarrow[\text{内积}: \int\alpha\beta dx]{V=C[a,b]}$ Schwarz不等式 (积分)

4. 正交向量组. 正交基. 标准正交基

* $\boxed{\text{度量矩阵}}$
$$\begin{pmatrix} (\varepsilon_1,\varepsilon_1) & (\varepsilon_1,\varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_1,\varepsilon_n) \\ (\varepsilon_2,\varepsilon_1) & (\varepsilon_2,\varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_2,\varepsilon_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varepsilon_n,\varepsilon_1) & (\varepsilon_n,\varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_n,\varepsilon_n) \end{pmatrix} \longrightarrow$$
对角矩阵 ($\varepsilon_{1\sim n}$ 正交基)

单位阵 ~ $\varepsilon_{1\sim n}$ 标准正交基

来源: $\alpha=\underbrace{(\varepsilon_1,\cdots\varepsilon_n)}_{\text{正交基}}\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=(\varepsilon)(a)$. $\beta=(\varepsilon)(b)$

$$(\alpha,\beta)=\beta^T\alpha=(\varepsilon b)^T(\varepsilon a)=b\varepsilon^T\varepsilon a=b\underbrace{(\varepsilon^T\varepsilon)}_{\boxed{\text{度量矩阵}}}a$$

$\boxed{\text{施密特正交化}}$

$\beta_1=\alpha_1$

$\beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$ 注意是 (β_i,β_i), 不是 $|\beta_i|$!

......

$\beta_n=\alpha_n-\dfrac{(\alpha_n,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\cdots-\dfrac{(\alpha_n,\beta_{n-1})}{(\beta_{n-1},\beta_{n-1})}\beta_{n-1}$

标准化. $\eta_i = \frac{\beta_i}{|\beta_i|}$. 有 $\mathscr{L}(\alpha_{1\sim n}) = \mathscr{L}(\beta_{1\sim n}) = \mathscr{L}(\eta_{1\sim n})$.

5. $\boxed{\text{正交矩阵}}$ 定义1.(性质2) $\alpha_{1\sim n} \in \mathbb{R}^n$. $\alpha_{1\sim n}$ 正交且标准

$A = (\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_n)$ 是.

定义2(性质1). $\alpha_{1\sim n} \in \mathbb{R}^n$ 使 $(\alpha_i, \alpha_j) = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases}$.

$A = (\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_n)$ 是.

性质3. $A^T A = E \iff A$是正交矩阵 $\Rightarrow A^{-1}, A^*$ 是正交矩阵

$\Updownarrow$ $\Downarrow$ $\Rightarrow$

$AA^T = E \iff A^T = A^{-1}$. $|A| = \pm 1$

性质4. A, B 正交矩阵 $\Rightarrow AB$ 正交矩阵. (BA也是)

6. $\boxed{\text{线性变换}}$ V为F上线性空间. $\mathscr{A}: \underset{\text{原像空间}}{V} \longrightarrow \underset{\text{像空间}}{V}$ 是一个映射 (无其它要求) vs. 同构 (双射)

满足: $\mathscr{A}(\alpha+\beta) = \mathscr{A}(\alpha) + \mathscr{A}(\beta)$

$\mathscr{A}(k\alpha) = k\mathscr{A}(\alpha)$. 称 $\mathscr{A}$.

1) $\mathscr{A}v = v$. $\boxed{\text{恒等变换}}$ 2) $\mathscr{A}v = kv$ $(k\neq 0)$ $\boxed{\text{数乘变换}}$ 3) $\mathscr{A}v = 0$ $\boxed{\text{零变换}}$ (常记作θ)

4) $\mathscr{A}(A) = P^{-1}AP$. $(V = F^{n\times n}.\ P \in F^{n\times n}.\ r(P) = n)$ $\boxed{\text{相似变换}}$

5) $\mathscr{A}(A) = P^TAP$. $(V = F^{n\times n}.\ P \in F^{n\times n}.\ r(P) = n)$ $\boxed{\text{合同变换}}$.

$\boxed{\text{值域与核}}$ $\mathscr{A}: \underset{\text{定义域}}{V} \longrightarrow \underset{\text{陪域}}{V}$

$\boxed{\text{值域/像空间}}$ $Im(\mathscr{A}) = \{\mathscr{A}(\xi) \mid \xi \in V\} \subseteq V$.

$\boxed{\text{核/零空间}}$ $Ker(\mathscr{A}) = \{\xi \in V \mid \mathscr{A}(\xi) = 0\}$. $\subseteq V$

一般求法: V的一组基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_n)$ $\mathscr{A}\varepsilon = (\mathscr{A}\varepsilon_1, \mathscr{A}\varepsilon_2, \cdots \mathscr{A}\varepsilon_n)$

非0的 $\mathscr{A}\varepsilon_i$ (取线性无关的那些) $\longleftarrow$ 其中变为0的就扔了

$\overset{!!}{\eta_j}$ $\downarrow$ $\mathscr{A}\varepsilon_i = 0$. 记 $\varepsilon_i =: \rho_j$.

$Im(\mathscr{A}) = \mathscr{L}(\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_r)$ $Ker(\mathscr{A}) = \mathscr{L}(\rho_1, \cdots \rho_{n-r})$

"新"基 ($\mathscr{A}$后) 原基 ($\mathscr{A}$前)

$\boxed{\text{线性变换的秩}}$ $r(\mathscr{A}) = \dim(Im(\mathscr{A}))$ $\boxed{r(\mathscr{A}) + r(Ker(\mathscr{A})) = n}$

$\boxed{\text{线性变换的零度}}$ $r(Ker(\mathscr{A})) = \dim(Ker(\mathscr{A}))$

$(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\alpha) = \mathcal{A}(\alpha)+\mathcal{B}(\alpha)$. $(k\mathcal{A})(\alpha) = k\mathcal{A}(\alpha)$

$(\mathcal{A}\mathcal{B})(\alpha) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(\alpha))$. $\neq (\mathcal{B}\mathcal{A})(\alpha)$.

$$\mathcal{A}(k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m) = \mathcal{A}(\alpha\cdot\boxed{k}) = k_1\mathcal{A}(\alpha_1)+\cdots+k_m\mathcal{A}(\alpha_m)$$
$$= (\mathcal{A}(\alpha))\boxed{k}$$

线性关系保持不变

7. 线性变换在给定基下的矩阵

$\mathcal{A}(\varepsilon_1\sim n) = (\varepsilon_1\sim n)A$. $*\ \mathcal{A} \longrightarrow A$ 一一对应（给定基下）$\longrightarrow$ 同构映射

不同基下矩阵间关系：$\begin{cases} \mathcal{A}\text{在 } \varepsilon_1\sim n \text{ 下}: A \\ \mathcal{A}\text{在 } \eta_1\sim n \text{ 下}: B \end{cases}$ 从 $\varepsilon_1\sim n$ 到 $\eta_1\sim n$: C（过渡矩阵）
$\eta_1\sim n$ $\varepsilon_1\sim n$: C^{-1}

$$\boxed{B = C^{-1}AC}$$

$A = CBC^{-1}$

$\mathcal{A}(\varepsilon C) = \mathcal{A}(\varepsilon)C$

$\mathcal{A}(\eta) = \cancel{\eta B = \varepsilon CB} = \varepsilon AC = \eta C^{-1}AC = \eta B$

"保持线性关系"

8. 常用技巧：(I)

1) 发现形如 $\mathcal{A}(\square,\square,\square\cdots\square) = \mathcal{A}(0,\square,\cdots\square)$

考虑两边 $(n-1)$ 次线性变换 $\longrightarrow$ 找到 $\mathcal{A}^x = \theta$. $\longrightarrow$ 证明/计算.

2) 求 $\mathcal{A}$ 在 $\varepsilon_1\sim n$ 下矩阵.

已知 $\varepsilon_1\sim n$. $\mathcal{A}(\varepsilon_1\sim n) \Rightarrow r(\varepsilon_1\sim n) = n$. $\therefore A = (\varepsilon_1\sim n)^{-1}(\mathcal{A}(\varepsilon_1\sim n))$

~~3) $r(\mathrm{Im}(\mathcal{A})) = r(A_{\mathcal{A}\text{在}\varepsilon_1\sim n\text{下}})$~~

~~[证] $\mathcal{A}\xi=0 \Leftrightarrow \mathcal{A}(\varepsilon x)=0 \Leftrightarrow$~~

3) 特别地，当取基为 $\varepsilon_1\sim n$. $(\varepsilon_i = \varepsilon(i))$.

$r(\mathrm{Im}(\mathcal{A})) = r(A_{\mathcal{A}\text{在}\varepsilon_1\sim n\text{下}})$.

保持线性关系

[证] $\mathcal{A}\xi=0 \Leftrightarrow \mathcal{A}(\varepsilon x)=0 \Leftrightarrow (\mathcal{A}\varepsilon)x=0$

$\Leftrightarrow EAx=0 \Leftrightarrow Ax=0$

$\therefore r(\mathrm{Ker}(\mathcal{A}))$ 即解空间维数 $= n - r(A_{\mathcal{A}\text{在}\varepsilon_1\sim n\text{下}})$.

$\therefore r(\mathrm{Im}(\mathcal{A})) = n - r(\mathrm{Ker}(\mathcal{A})) = r(A_{\mathcal{A}\text{在}\varepsilon_1\sim n\text{下}})$.

No.

Date

（这大概也是把 $r(\mathscr{A}) := r(\operatorname{Im}(\mathscr{A}))$ 的原因）.

9. $\boxed{\text{正定矩阵}}$ $A_{n\times n}$. 使 $\forall \overset{\neq 0}{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ 有 $\alpha^T A \alpha > 0$.

10. 常用技巧(Ⅱ):

矩阵相似对角化 $A\in F^{n\times n}$.

1. $\boxed{\text{特征值}}$ $\lambda\in F$ 使 $A\alpha=\lambda\alpha$ 称 λ.

特征向量 $\alpha\in F^n$ 称 α $\boxed{\text{对应于}\lambda\text{的特征向量}}$.

$\boxed{\text{特征多项式}}$ $|\lambda E-A|$. $\underline{\underline{\text{笔记中简写为}}}$ $f_A(\lambda)$

本笔记中，将A所有特征值的集合简记为 $\{\lambda\}_A$.

$\boxed{\text{代数重数与几何重数}}$:

1) 代数重数 $f_A(\lambda)=\prod_{i=1}^{s}(\lambda-\lambda_i)^{p_i}$ ← 称为 λ_i 的代数重数.

2) 几何重数:

$\lambda_i x=Ax$ 即 $(\lambda_i E-A)x=0$ 的解空间维数.

$1\leqslant$ 几何重数 $\leqslant$ 代数重数

单特征值. p_i 重特征值. 本笔记中记 λ 的代数重数为 p_λ, 几何重数为 g_λ.

2. 重要性质: 1) $|A|=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$

2) $tr(A)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$

3) A特征值 λ. $A\alpha=\lambda\alpha$ $\Rightarrow$ A^{-1} 特征值 λ^{-1}. $A^{-1}\alpha=\lambda^{-1}\alpha$

$\Rightarrow$ A^T 特征值 λ. $A^T\beta=\lambda\beta$

4) $Ax=\lambda x$ $\Rightarrow$ $kAx=(k\lambda)x$

$A^k x=\lambda^k x$

$g(A)x=g(\lambda)x$

3. $\boxed{A_{n\times n}\text{不同特征值对应的特征向量(各取1个)线性无关.}}$

4. 相似: $\mathcal{A}(A)=P^{-1}AP=B$ $(|P|\neq 0)$ 则 $A\sim B$

↓

等价关系

5. $A\sim B$ $\Rightarrow$ $f_\lambda(A)=f_\lambda(B)$, $tr(A)=tr(B)$, $|A|=|B|$

此时 $r(A)=r(B)$. $A^T\sim B^T$. $g(A)\sim g(B)$

6. 矩阵对角化：　$P^{-1}AP = \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n)$

如何找P？ $\longrightarrow$ $A(x_1, x_2, \cdots x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots \lambda x_n) = (x_1 \cdots x_n)\Lambda$

~~所以只要找到P. → AP=PΛ ⇒ P⁻¹AP=Λ~~

↑

~~特征向量按次排列~~

$AX = X\Lambda$.

7. $\boxed{\text{矩阵可对角化}} \Longleftrightarrow \begin{cases} A\text{有}n\text{个不同特征值} \\ \sum p_i = \sum q_i = n \end{cases}$

8. $r(A) = 1 \Longleftrightarrow A = \alpha\beta^T$

9. 1) $\boxed{\text{实对称矩阵必可对角化.}}$

2) $\boxed{\text{实对称矩阵对应不同特征值的特征向量正交}}$

3) 一定存在正交矩阵Q. 使 $Q^{-1}AQ = Q^TAQ = \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n)$

10. 实对称矩阵对角化：

1) 求 $\{\lambda\}_A$.

2) 找特征向量. 对应于同一特征值的特征向量正交化. 标准化 $\longrightarrow$ 放一起就是Q

11. 常用技巧：

实二次型

1. 二次型. 实二次型 f

$\boxed{\text{二次型矩阵}}$：定义要求 $\boxed{\text{对称}}$

2. $\boxed{\text{非奇异(非退化)线性替换}}$ $x=Py$. P可逆.

A：实对称矩阵. $\longrightarrow$ 必能对角化. $P^{-1}AP=\Lambda$ （P：正交矩阵）

称 $x=Py$ $(y=P^{-1}x)$.

[证] $f(Py)=y^TP^TAPy=y^TP^{-1}APy=y^T\Lambda y$ $\boxed{\text{标准二次型}}$ → 对应于一个对角阵

3. 再经一次合同变换 $\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ 即 $z=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \end{pmatrix}y$

$\rightarrow z^T\begin{pmatrix} E_p & & \\ & -E_q & \\ & & 0 \end{pmatrix}z$. $\boxed{\text{规范二次型}}$.

4. $\boxed{\text{惯性定理}}$ 必存在非奇异线性替换化二次型为规范二次型且规~唯一.

$\boxed{\text{正惯性系数}}$ $\boxed{\text{负惯性系数}}$ $\begin{pmatrix} E_p & & \\ & E_q & \\ & & O_{n-r} \end{pmatrix}$ 符号差 $s=p-q$

5. $P^TAP=B \iff r(A)=r(B)$ 且 $p(A)=p(B)$ [后一符号仅限笔记]

6. 1) $\exists x$ 使 $x^TAx>0 \iff p>0$

2) $\exists x$ 使 $x^TAx<0 \iff q>0$

7. $\boxed{\text{正定矩阵/正定二次型}}$ A为正定矩阵 $\iff \forall x\neq 0,\ x^TAx>0$

$\iff \lambda\in\{\lambda_A\},\ \lambda>0 \iff A=P^TEP$.

$\iff \exists M,\ r(M)=0,\ A=M^TM.$ $\Rightarrow$ A对称，$|A|>0$

$\boxed{\text{负定矩阵/负定二次型}}$ $\forall x\neq 0,\ x^TAx<0$

考察 $-A$（正定）

$\forall x\neq 0$. $x^TAx\geq 0$ $\boxed{\text{半正定二次型}}$

≤ 0 半负定

其它 不定二次型

8. 对比 相似/合同

1) 合同： r, p, q 不变 2) 相似： r, p, q, $\{\lambda\}$. 都不变

9. 判断正定二次型：

1) 定义.

2) 化为标准型
- 正交矩阵 + (两)
- 配方
- 初等变换： 左乘行变换，右乘列变换

3) 顺序主子式全大于0.

顺序主子式

10) 常用技巧：

$$(Nx)^TNx=x^TN^TNx=(Nx,Nx)\neq 0 \quad \text{(内积定义)}$$

↓ 只要证 $Nx\neq 0$ 即可.

$y^Ty=x^Tx$