Algoritmos Genéticos

Prof. Danilo Sipoli Sanches

O Algoritmo Genético Binário

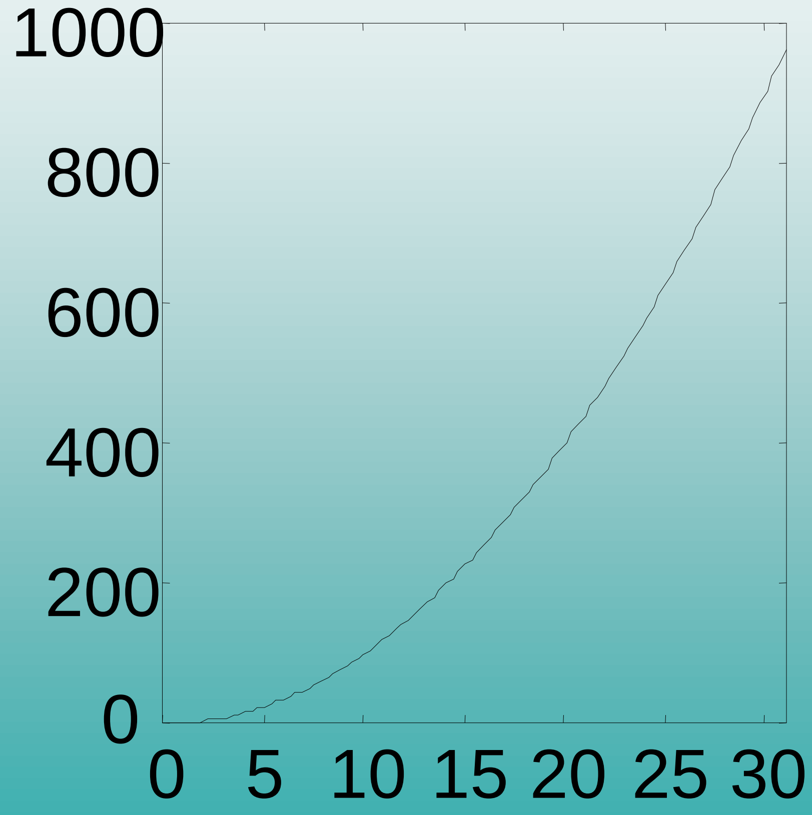
Algoritmo Genético Tradicional

1. Gerar a população inicial.
2. Avaliar cada indivíduo da população.
3. Enquanto critério de parada não for satisfeito faça
   - 3.1 Selecionar os indivíduos mais aptos.
   - 3.2 Criar novos indivíduos aplicando os operadores crossover e mutação.
   - 3.3 Armazenar os novos indivíduos em uma nova população.
   - 3.4 Avaliar cada cromossomo da nova população.

Problema 1

Problema: Use um AG para encontrar o ponto máximo da função:

$$f(x) = x^2$$



com *x* sujeito as seguintes restrições:

$$0 \le x \le 31$$

$$x \text{ é inteiro}$$

Indivíduo

- Cromossomo
  - Estrutura de dados que representa uma possível solução para o problema.
  - Os parâmetros do problema de otimização são representados por cadeias de valores.
  - Exemplos:
    - Vetores de reais, (2.345, 4.3454, 5.1, 3.4)
    - Cadeias de bits, (111011011)
    - Vetores de inteiros, (1,4,2,5,2,8)
    - ou outra estrutura de dados.

Individuo (II)

- Aptidão
  - Nota associada ao indívíduo que avalia quão boa é a solução por ele representada.
- Aptidão pode ser:
  - Igual a função objetivo (raramente usado na prática).
  - Baseado no **ranking** do indívíduo da população.

Cromossomo do Problema 1

- Cromossomos binários com 5 bits:
  - 0 = 00000
  - 31 = 11111
- Aptidão
  - Neste problema, a aptidão pode ser a própria função objetivo.
  - Exemplo:

$$\text{aptidão}(00011) = f(3) = 9$$

Seleção

- Seleção
  - Imitação da seleção natural.
  - Os melhores indivíduos (maior aptidão) são selecionados para gerar filhos através de crossover e mutação.
  - Dirige o AG para as melhores regiões do espaço de busca.
- Tipos mais comuns de seleção
  - Proporcional a aptidão.
  - Torneio.

População Inicial do Problema 1

É aleatória (mas quando possível, o conhecimento da aplicação pode ser utilizado para definir população inicial)

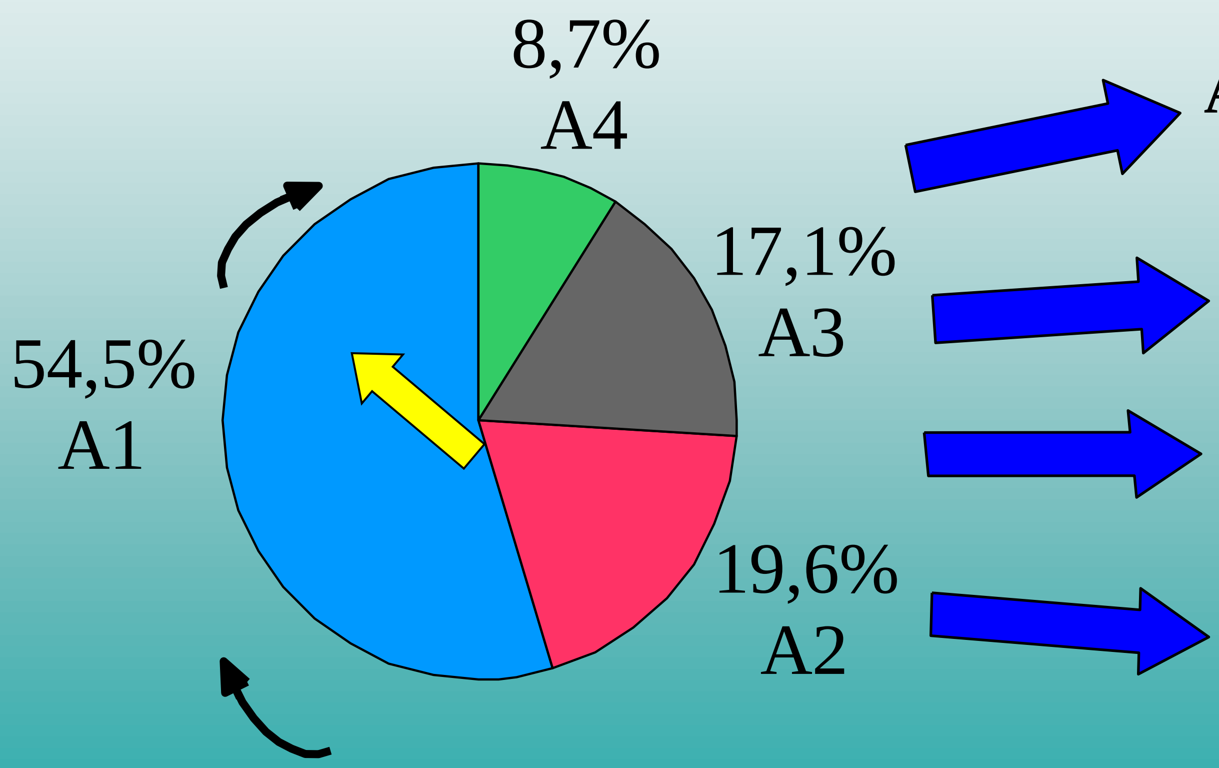
Pop. inicial

cromossomos	x	$f(x)$	**Prob. de seleção**
$A_1 = 1\ 1\ 0\ 0\ 1$	25	625	54,5%
$A_2 = 0\ 1\ 1\ 1\ 1$	15	225	19,6%
$A_3 = 0\ 1\ 1\ 1\ 0$	14	196	17,1%
$A_4 = 0\ 1\ 0\ 1\ 0$	10	100	8,7%

Probabilidade de seleção proporcional a aptidão

$$p_i = \frac{f(x_i)}{\sum_{k=1}^{N} f(x_k)}$$

Seleção proporcional a aptidão (Roleta)



Pais selecionados

A1 = 1 1 0 0 1

A2 = **0 1 1 1 1**

A2 = 0 1 1 1 1

A1 = 1 1 0 0 1

Seleção por Torneio

- Escolhe-se *n* (tipicamente 2) indivíduos aleatoriamente da população e o melhor é selecionado.

Crossover e Mutação

- Combinam pais selecionados para produção de filhos.
- Principais mecanismos de busca do AG.
- Permite explorar áreas desconhecidas do espaço de busca.

Crossover de 1 ponto

O crossover é aplicado com uma dada probabilidade denominada *taxa de crossover* (60% a 90%)

O Ponto de corte é escolhido aleatóriamente

Pais

1 1 0 | 0 1

0 1 1 | 1 1

Filhos

1 1 0 *1 1*

***0 1 1* 0 1**

Se o crossover é aplicado os pais trocam suas caldas gerando dois filhos, caso contrário os dois filhos serão cópias exatas dos pais.

Mutação

Mutação inverte os valores dos bits.

A mutação é aplicada com dada probabilidade, denominada *taxa de mutação* (~1%), em cada um dos bits do cromossomo.

Antes da mutação	**0 1 1 0 1**
Depois	**0 <u>0</u> 1 0 1**

Aqui, apenas o 2o.bit passou no teste de probabilidade

A taxa de mutação não deve ser nem alta nem baixa, mas o suficiente para assegurar a diversidade de cromossomos na população.

A primeira geração do Problema 1

Pais | | | | **Filhos**

Pais				Filhos	
A1 = 1 1 0 | 0 1	*crossover*	**1 1 0 1 1**	*mutação*	**1 1 0 1 1**	**Nova pop.**
A2 = 0 1 1 | 1 1		**0 1 1 0 1**		**0 <u>0</u> 1 0 1**	
A2 = 0 1 1 1 | 1	*crossover*	**0 1 1 1 1**	*mutação*	**<u>1 0</u> 1 1 1**	
A1 = 1 1 0 0 | 1		**1 1 0 0 1**		**1 1 0 0 1**	

A primeira geração do Problema 1 (II)

cromossomos		x	$f(x)$	prob. de seleção
1	1 1 0 1 1	27	729	29,1%
2	1 1 0 0 1	25	625	24,9%
3	1 1 0 0 1	25	625	24,9%
4	1 0 1 1 1	23	529	21,1%

As demais gerações do Problema 1

Segunda Geração

		x	$f(x)$
1	1 1 0 1 1	27	729
2	1 1 0 0 0	24	576
3	1 0 1 1 1	23	529
4	1 0 1 0 1	21	441

Terceira Geração

		x	$f(x)$
1	1 1 0 1 1	27	729
2	1 0 1 1 1	23	529
3	0 1 1 1 1	15	225
4	0 0 1 1 1	7	49

As demais gerações do Problema 1 (II)

Quarta Geração

		x	$f(x)$
1	1 1 1 1 1	31	961
2	1 1 0 1 1	27	729
3	1 0 1 1 1	23	529
4	1 0 1 1 1	23	529

Quinta Geração

		x	$f(x)$
1	1 1 1 1 1	31	961
2	1 1 1 1 1	31	961
3	1 1 1 1 1	31	961
4	1 0 1 1 1	23	529

Outros Crossover´s

- Crossover de 2-pontos

$$pai_1 \quad 010 \; 011000 \; 101011$$

$$pai_2 \quad 001 \; 001110 \; 001101$$

$$filho_1 \quad 010001110101011$$

$$filho_2 \quad 001011000001101$$

Considerado melhor que o crossover de 1 ponto.

Crossover de n-Pontos

pai_1 101 010010 01010 01 001

pai_2 001 001110 00110 11 100

$filho_1$ 101001110010101 1001

$fillho_2$ 001010010001100 01100

Crossover de 4-pontos

Problema 2

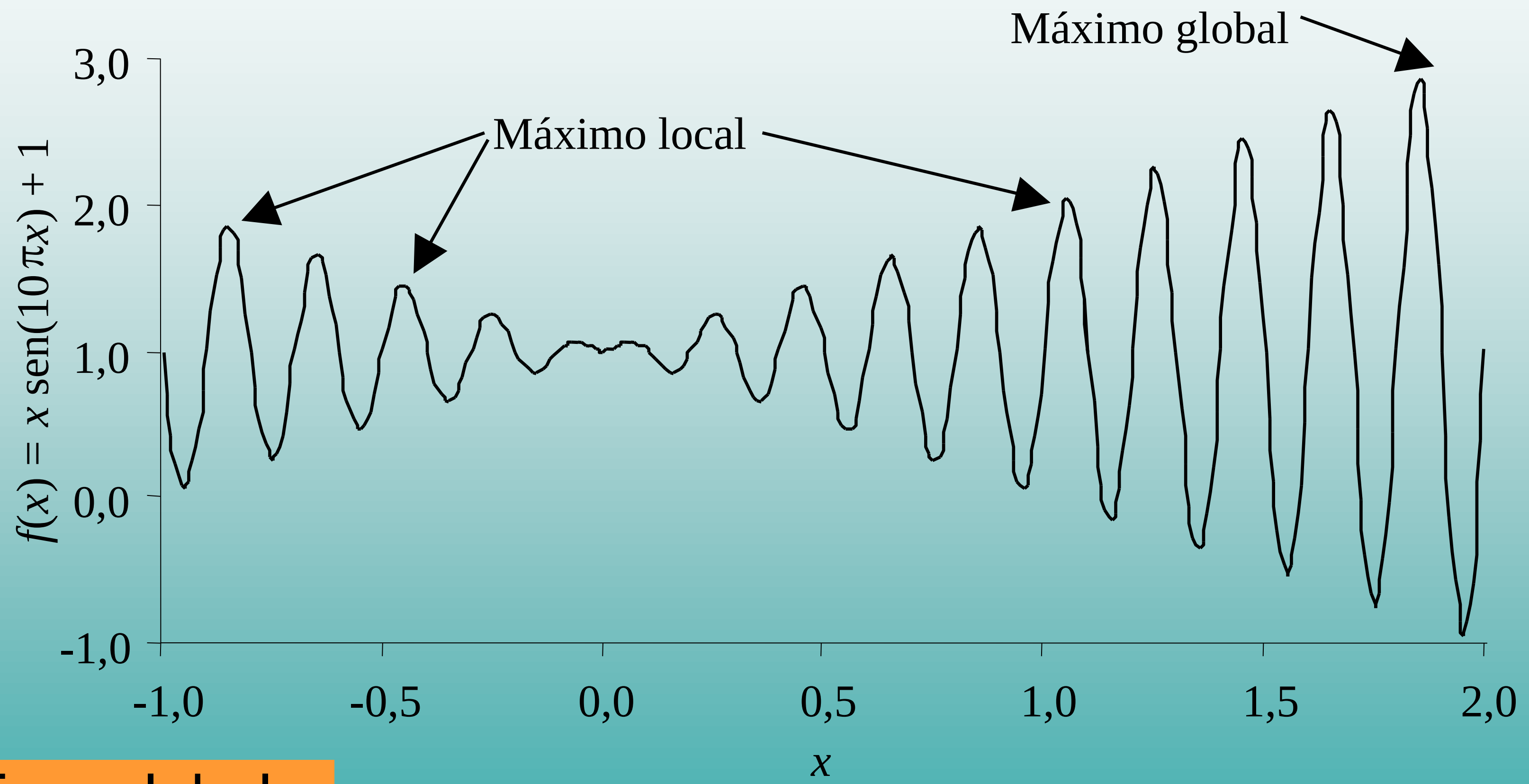
Achar o máximo da função utilizando Algoritmos Genéticos,

$$f(x) = \text{x seno}(10\pi x) + 1{,}0$$

Restrita ao intervalo:

$$-1{,}0 \leq x \leq 2{,}0$$

Problema 2 (II)



Máximo global:

x = 1,85055

f(x) = 2,85027

Problema 2 (III)

- Função multimodal com vários pontos de máximo.
- É um problema de otimização global (encontrar o máximo global)
- Não pode ser resolvido pela grande maioria dos métodos de otimização convencional.
- Há muitos métodos de otimização local, mas para otimização global são poucos.

O Cromossomo Problema 2

- Representar o único parâmetro deste problema (a variável *x*) na forma de um cromossomo:
  - Quantos bits deverá ter o cromossomo?
  - Quanto Mais bits melhor precisão númerica.
  - Longos cromossomos são difíceis de manipular.
  - Cromossomo com 22 bits

1000101110110101000111

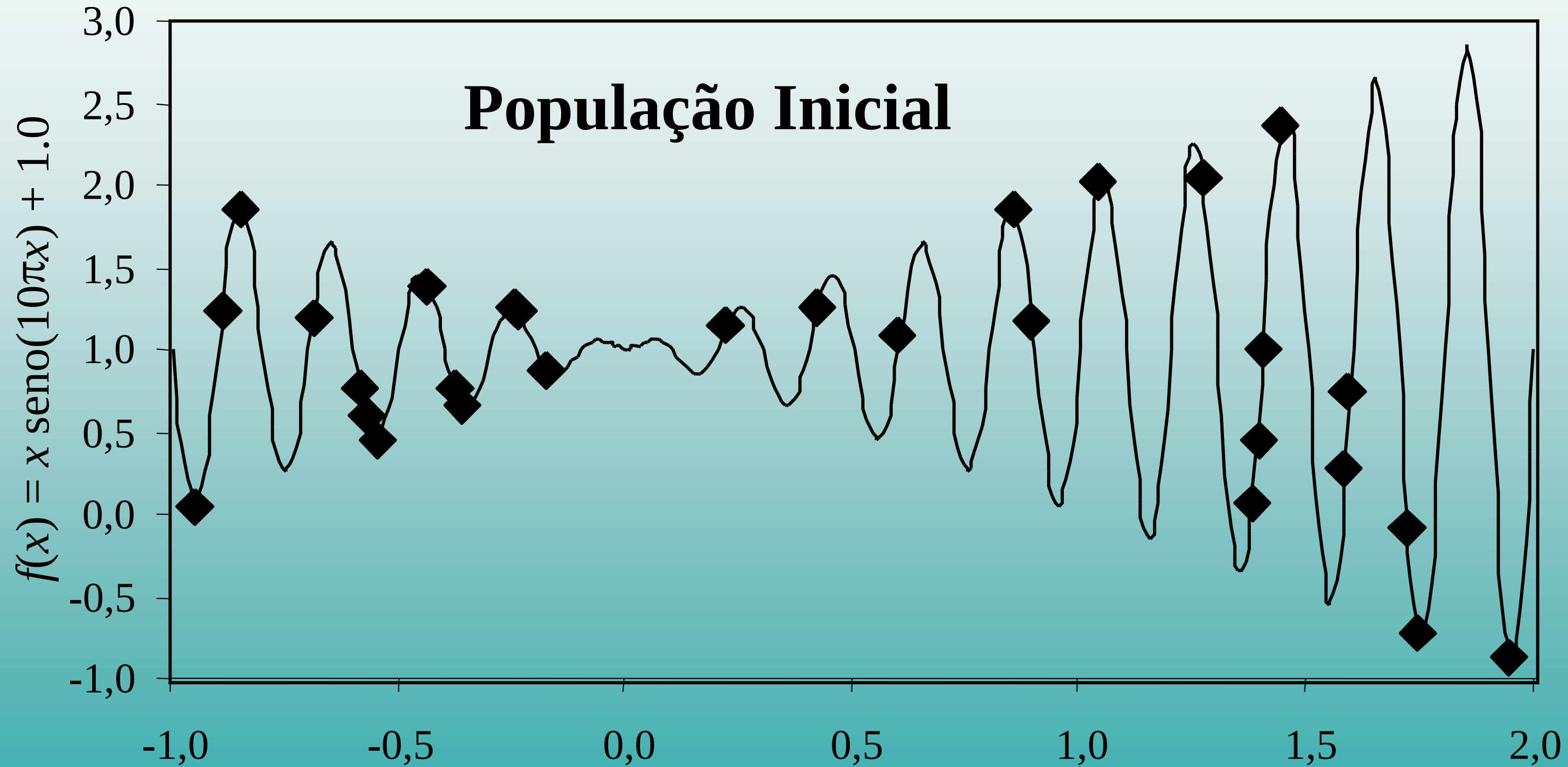
O Cromossomo Problema 2 (II)

- Decodificação
  - cromossomo = 1000101110110101000111
  - b_{10} = $(1000101110110101000111)_2$ = 2288967
  - Valor de x precisa estar no intervalo [-1,0; 2,0]

$$x = \min + (\max - \min)\frac{b_{10}}{2^l - 1}$$

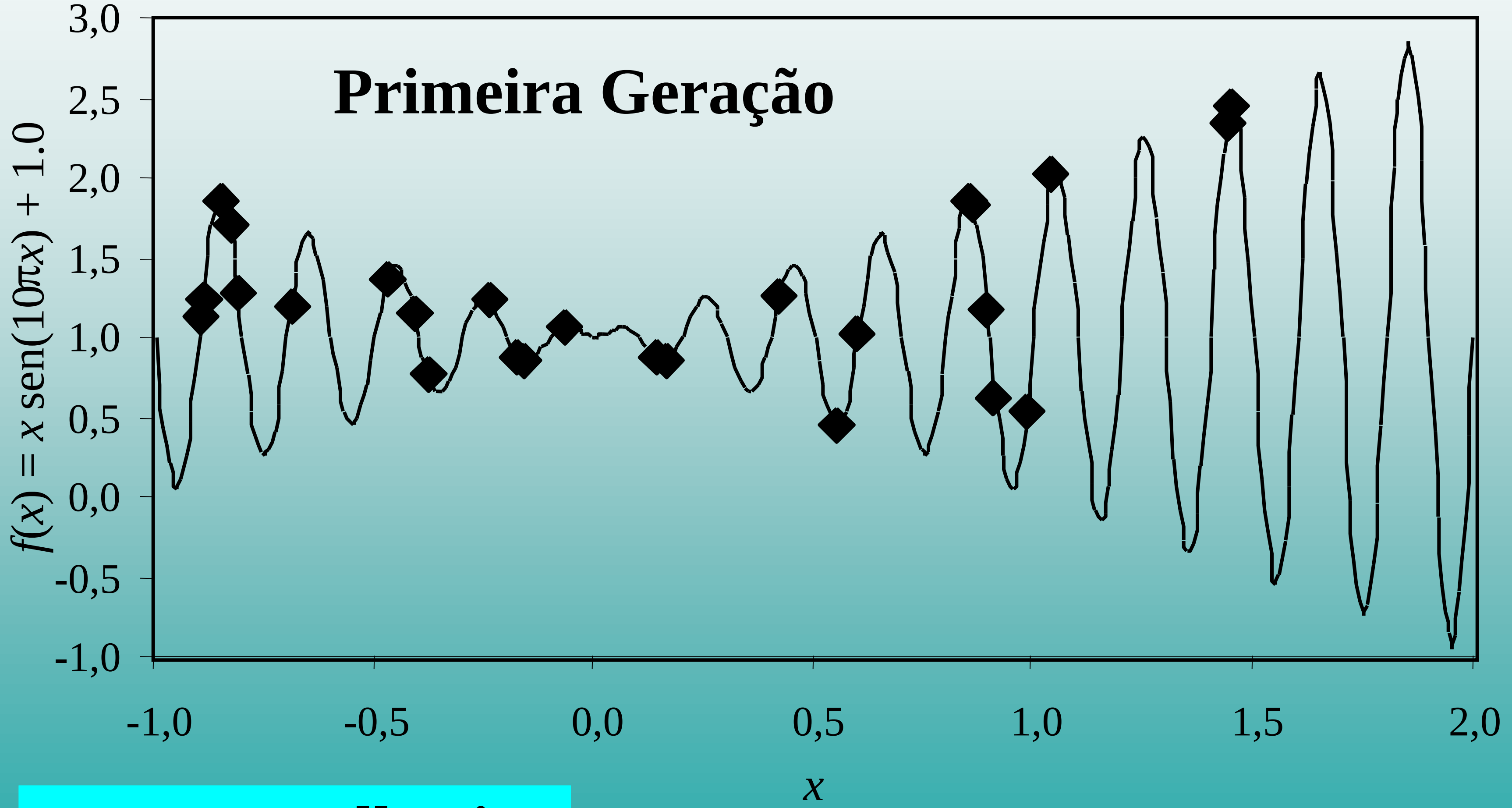
$$x = -1 + (2+1)\frac{2.288.967}{2^{22} - 1} = 0{,}637197$$

As Gerações do Problema 2



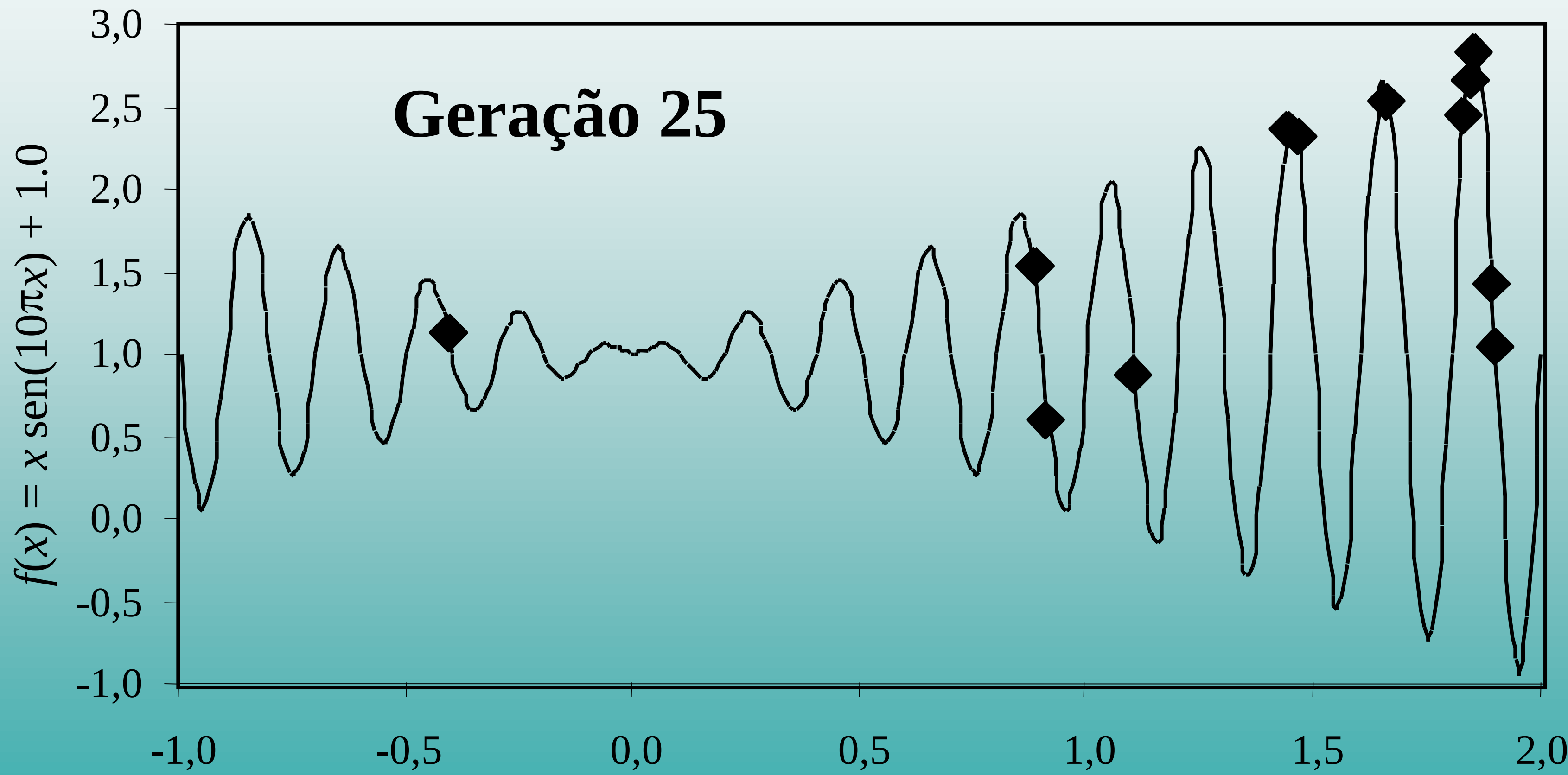
População gerada aleatóriamente

As Gerações do Problema 2 (II)



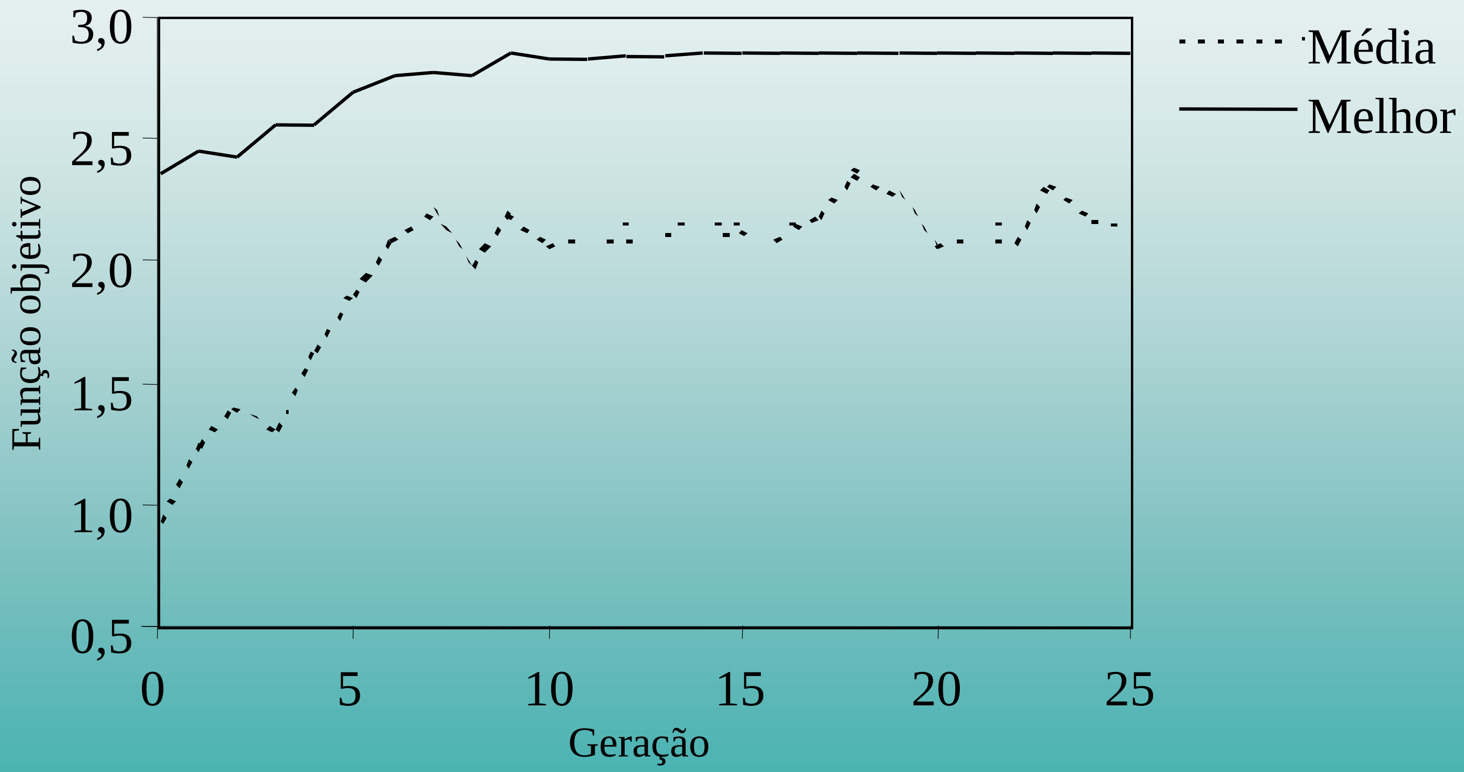
Pouca melhoria

As Gerações do Problema 2 (III)



A maioria dos indivíduos encontraram o máximo global

As Gerações do Problema 2 (IV)

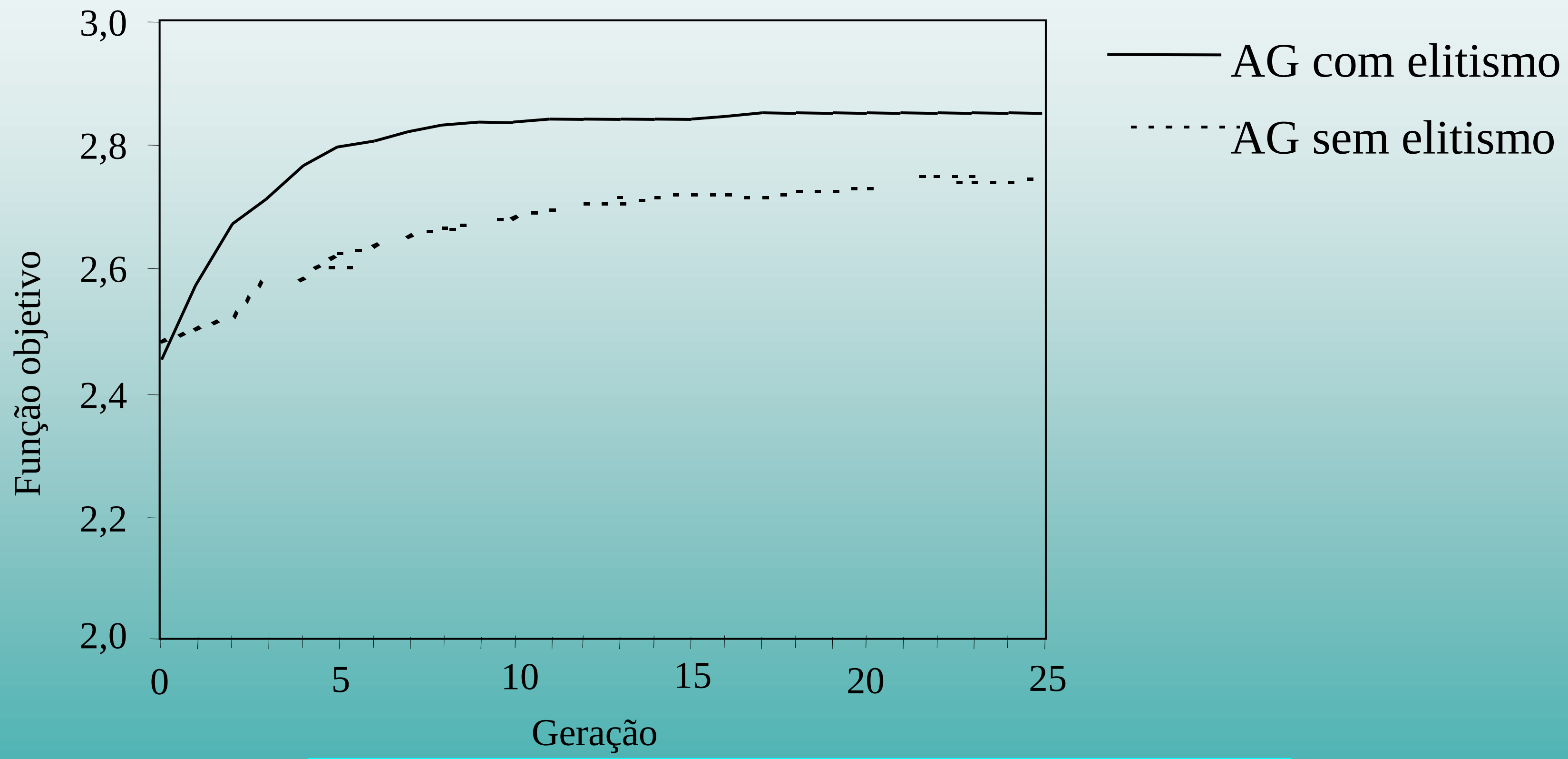


Na geração 15 o AG já encontrou o ponto máximo

Elitismo

- O crossover ou mutação podem destruir a melhor indivíduo.
- Por que perder a melhor solução encontrada?
- Elitismo transfere a cópia do melhor indíviduo para a geração seguinte.

Elitismo no Problema 2



AG com elitismo é melhor ?

Critérios de Parada

- Número de gerações.
- Encontrou a solução (quando esta é conhecida).
- Perda de diversidade.
- Convergência
  - nas últimas *k* gerações não houve melhora da na aptidão

Funções de *Benchmark*

- Todas apresentam seu mínimo global correspondente ao valor (0,0,...,0), de acordo com o seu número de coordenadas *n.*

$$f_1(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$f_2(x) = \sum_{i=1}^{n} i \, . \, x_i^4$$

$$f_3(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - 10\cos(2\pi x_i) + 10)$$

$$f_4(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 / 4000) - \prod_{i=1}^{n} \cos(x_i / \sqrt{i}) + 1$$

Funções de *Benchmark*

Tabela 1: Domínio da função

Função	Domínio
f_1	$-5.12 \leq x_i \leq 5.12$
f_2	$-20 \leq x_i \leq 20$
f_3	$-5.12 \leq x_i \leq 5.12$
f_4	$-600 \leq x_i \leq 600$

Atividade Prática – Relatório 1

Data de Entrega: **16/08**

Encontrar o ponto máximo para as seguintes funções:

- $f(x) = 2x - 3x + 4 \Rightarrow x \in [0, 50]$;
- $f(x1,x2) = x1^2 + 3x2 + 4 \Rightarrow x1 \in [1, 15]$ e $x2 \in [1,15]$;
- $f(x1,x2) = x1 + 3x2 + 10 \Rightarrow x1 \in [1, 15]$ e $x2 \in [8, 16]$.