HW03 Shitot: Gil x Zak

1)

א. (7 נקודות) הוכיחו כי אי השוויון ההפוך גם מתקיים:

$$\forall k=1,\dots,n:\ \sum_{i=1}^{k}\lambda_{n-i+1}(X+Y)\geq\sum_{i=1}^{k}\lambda_{n-i+1}(X)+\lambda_{n-i+1}(Y)$$

Ky-Fan:

$$\forall k=1,\dots,n,\quad \sum_{i=1}^{k}\lambda_i(A+B)\leq\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(A)+\lambda_i(B)$$

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(-A-B)\leq\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(-A)+\lambda_i(-B)$$

$$\sum_{i=1}^{k}-\lambda_{n-i+1}(A+B)\leq\sum_{i=1}^{k}-\lambda_{n-i+1}(A)-\lambda_{n-i+1}(B)$$

$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{k}\lambda_{n-i+1}(A+B)\leq\sum_{i=1}^{k}\lambda_{n-i+1}(A)+\lambda_{n-i+1}(B)$$

07

ב) (7 נקודות) הוכיחו/הפריכו:

בהינתן שלמים $1\leq k\leq n$ ומטריצה סימטרית $X\in\mathbb{S}^n$, נסמן את הערכים העצמיים שלה על ידי: $\lambda_1(X)\geq\lambda_2(X)\geq\cdots\geq\lambda_n(X)$.

נגדיר את הפונקציה: $\|X\|=\sum_{i=1}^{k}|\lambda_i(X)|$ - כלומר הפונקציה מחזירה את סכום הערכים המוחלטים של k הערכים העצמיים הגדולים ביותר של המטריצה X. אזי, הפונקציה הנ"ל היא נורמה מעל מרחב המטריצות הסימטריות הממשיות $n\times n$.

A function $\|\cdot\|:\mathcal{X}\to\mathbb{R}$ is a norm, if

1. $\forall\mathbf{x}\in\mathcal{X}\ \|\mathbf{x}\|\geq 0$, and $\|\mathbf{x}\|=0$ if and only if $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ (positivity)
2. $\forall\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathcal{X}\ \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|\leq\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|$ (triangle inequality)
3. $\forall\alpha\in\mathbb{R},\mathbf{x}\in\mathcal{X}:\ \|\alpha\mathbf{x}\|=|\alpha|\cdot\|\mathbf{x}\|$ (homogeneity)

ב) יהי $X\in S^n$, $\|X\|=\sum_{i=1}^{k}|\lambda_i(X)|\geq 0$ כי זה מסכום של ערכים אי שליליים

$X=\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix}\in S^2$

$\lambda_1=0,\lambda_2=-1\Rightarrow\lambda_1(X)\geq\lambda_2(X)$ עבור $k=1$ מתקיים $0=\|X\|=\lambda_1(X)=0$

אבל $X\neq 0$ ולכן לא מתקיים אקסיומת החיוביות עבור נורמה

ובפרט $\|X\|$ הנתון [illegible] לא נורמה

שאלה 2

תהי $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ כך ש-$m \leq n$. נסמן ב-$\sigma_1, \dots, \sigma_n$ את הערכים הסינגולרים של A.

נגדיר: $\bar{A} = \begin{pmatrix} A \\ I_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+n)xn}$.

1. הראו כי הערכים הסינגולריים של $\bar{A}$ הם $\bar{\sigma}_i = \sqrt{1+\sigma_i^2}$.

$$\bar{A}^T = (A^T \ I_n) \Rightarrow \bar{A}^T\bar{A} = (A^T \ I_n)\begin{pmatrix} A \\ I_n \end{pmatrix} = A^TA + I_n$$

$$\Rightarrow \lambda_i(\bar{A}^T\bar{A}) = \lambda_i(A^TA + I) = \lambda_i(A^TA) + 1$$

$$\sigma_i(\bar{A}) = \sqrt{\lambda_i(\bar{A}^T\bar{A})} = \sqrt{\lambda_i(A^TA) + 1} = \sqrt{\sigma_i^2(A) + 1}$$

(2

תהי $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ כך ש-$m \leq n$. נסמן ב-$\sigma_1, \dots \dots, \sigma_n$ את הערכים הסינגולרים של A.

נגדיר: $\bar{A} = \begin{pmatrix} A \\ I_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+n)xn}$.

מצאו פירוק SVD של $\bar{A}$ בהינתן פירוק SVD של A.

$$A = U\Sigma V^T = U_r\Sigma_r V_r^T = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^T$$

(2 .2 ↓

2) כפי שהראינו בפעם קודמת מתקיים ש-

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} U\Sigma V^T \\ I_n \end{pmatrix}$$

$\forall i: \bar{\sigma}_i = \sqrt{1+\sigma_i^2}$

לכן $\bar{\Sigma}_r = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_1 & & 0 \\ & \bar{\sigma}_2 \ddots & \\ 0 & & \bar{\sigma}_r \end{pmatrix}$

$$\bar{A}\bar{A}^T = \begin{pmatrix} U\Sigma V^T \\ I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & U\Sigma V^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U\Sigma V^T & U\Sigma V^T \end{pmatrix}$$

בנוסף נקבל שהו"ע $\bar{u}_i = u_i$ וקטורים כי יהיה שווה זה

כמו שיש עבור A.

בנוסף נקבל ש- V_i שווה ל- $\bar{v}_i = \frac{\bar{A}^T \cdot u_i}{\bar{\sigma}_i}$ $\forall i \in [1,r]$

לכן $\bar{U}_r, \bar{V}_r$ באותם המקורים שמצאנו למעלה

במספר שמתאים לע"ע שלהם.

לכן מצאנו פירוק SVD של $\bar{A} = \bar{U}_r \cdot \bar{\Sigma}_r \cdot \bar{V}_r$

שנשלים עם אפסים כדי להגיע ל- $\boxed{\bar{A} = \bar{U} \cdot \bar{\Sigma} \cdot \bar{V}}$

Q3:

א)

נסמן

$$B = A\cdot A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_{1,2} = 2 \\ \lambda_3 = 1 \end{matrix}$$

נמצא ו"ע מנורמלים של B:

$$(B-2I)x=0 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x_3 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} t \\ s \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U = I$$

$$(B-I)x=0 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{1,2}(A) = \sqrt{2}, \quad \sigma_3 = 1$$

$$V_1 = \frac{A^T u_1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \frac{A^T u_2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \frac{A^T u_3}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{A = \underbrace{I}_{U} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\Sigma} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{V^T}}$$

ב)

ניתן לראות כי $\boxed{\mathrm{Rank}(A)=3}$ נדרג לצורה כדי לוודא.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

בנוסף, גם כל הערכים הסינגולריים יש להם ערך חיובי ולכן הדרגה שווה ל-3

ג)

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \Leftarrow Im(A) = Im(A^T) = \mathbb{R}^3$$

מנימוק הנ"ל $\Leftarrow$ $N(A) = N(A^T) = \{\}$

ד)

כתבו את המטריצה הפסאודו הופכית $A^\dagger$.

$$\Sigma_r^{-1} = diag\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) \Rightarrow \Sigma^+ = \Sigma^{-1}$$

$$U^T = I^T = I$$

$$\boxed{A^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot I}$$

שאלה 4

תהי $Y \in \mathbb{R}^{mxn}$ מטריצה כלשהי, ויהיו $R \in \mathbb{R}^{mxm}$, $Q \in \mathbb{R}^{nxn}$ מטריצות אורתוגונליות. הוכיחו את הטענות הבאות:

1) $\|RYQ\|_F = \|Y\|_F$ (נורמת פרובניוס)

הגדרת $\|\cdot\|_F$

$$\|RYQ\|_F^2 = Tr(Q^TY^TR^TRYQ) =$$

$$= Tr(Q^TQR^TRY^TY) = Tr(Y^TY) = \|Y\|_F^2$$

$Tr(AB)=Tr(BA)$

$A^TA = I$

אם A- אורתוגונלית

הגדרת $\|\cdot\|_F$

$$\boxed{\|RYQ\|_F = \|Y\|_F}$$

תהי $\mathbb{R}^{mxn}$, נתון פירוק ה-SVD שלה:
$A = U\Sigma V^T = U_r\Sigma_rV_r^T = \sum_{i=1}^{r}\sigma_iu_iv_i^T$

המטריצה: $A^\dagger = V\Sigma^\dagger U^T$ נקראת המטריצה הפסאודו-הופכית של A.

$$\Sigma^\dagger = \begin{pmatrix} \Sigma_r^{-1} & 0_{r\,x\,(m-r)} \\ 0_{(n-r)x\,n} & 0_{(n-r)\,x\,(m-r)} \end{pmatrix}, \Sigma_r^{-1} = diag\left(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_r}\right) > 0$$

שאלה 4

תהי $Y \in \mathbb{R}^{mxn}$ מטריצה כלשהי, ויהיו $R \in \mathbb{R}^{mxm}$, $\mathbb{R}^{n}$ כאשר: אורתוגונליות. הוכיחו את הטענות הבאות:

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \sum_{i\in[m],j\in[n]}$$

1. $\|RYQ\|_F = \|Y\|_F$ (נורמת פרובניוס)
2. $\|RYQ\|_2 = \|Y\|_2$ (נורמה ספקטרלית)

$$\|RYQ\|_2 = \sqrt{\langle RYQ, RYQ \rangle} = \sqrt{\sum_{\substack{i\in[m]\\ j\in[n]}} (RYQ)_{ij} \cdot (RYQ)_{ij}} = \sqrt{\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{m} R_{ij}Y_{ij}Q_{ij}R_{ij}Y_{ij}Q_{ij}}$$

R, Q אורתוגונליות

$$= \sqrt{\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{m} R_{ij}\cdot R_{ij}\cdot Q_{ij}Q_{ij}\cdot Y_{ij}\cdot Y_{ij}} \overset{?}{=} \sqrt{\sum_{\substack{\forall i=j\\ i\in[m]\\ j\in[n]}} Y_{ii}\cdot Y_{ii}} = \sqrt{\langle Y, Y \rangle} = \|Y\|_2 \;\blacksquare$$

כי זה אפס

הגדרה של מכפלה פנימית הסטנדרטית של מטריצות

שאלה 5

תהי $A \in \mathbb{R}^{mxn}$.

1. הוכיחו את הטענה הבאה, שהיא הטענה המקבילה למשפט ריילי עבור מטריצות לא סימטריות: $\max\limits_{x\in\mathbb{R}^m, y\in\mathbb{R}^n, \|x\|_2=\|y\|_2=1} x^T A y = \sigma_1$

בנוסף, הוכיחו כי: $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^m, y\in\mathbb{R}^n, \|x\|_2=\|y\|_2=1} x^T A y = -\sigma_1$

צ"ל, $\max\limits_{\substack{x\in\mathbb{R}^m \\ y\in\mathbb{R}^n \\ \|x\|_2=\|y\|_2=1}} (x^T A y) = \sigma_1$

נרשום את הפירוק ה-SVD של A:

$$A = U \Sigma V^T$$

$$\Rightarrow \max_{\substack{x\in\mathbb{R}^m, y\in\mathbb{R}^n \\ \|x\|_2=\|y_2\|=1}} (x^T A y) = \max_{\substack{x\in\mathbb{R}^m, y\in\mathbb{R}^n \\ \|x\|_2=\|y_2\|=1}} (x^T U_r \Sigma_r V_r^T y)$$

נסמן $\bar{x} = U_r^T x \in \mathbb{R}^r$, $\bar{y} = V_r^T y \in \mathbb{R}^r$, ולכן:

$$\|\bar{x}\|_2 = \|U^T x\|_2 = x^T U_r U_r^T x = x^T x = \|x\|_2 = 1$$

לקחנו x ולא y בה"כ ולכן גם $\|\bar{y}\|_2 = 1$.

בעמוד קודם הראנו:

$$\forall x,y\in\mathbb{R}^r, \|x\|_2=\|y\|_2=1 : (x^T \Sigma_r y) \le \sigma_1 \|x\|_2 \|y\|_2 = \sigma_1$$

$$\Rightarrow x^T \Sigma_r y \ge -\sigma_1$$

בנוסף עבור $x = (1, \dots, 0)$, $y = (-1, \dots, 0)$ מתקיים:

$$x^T \Sigma_r y = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i x_i y_i = -\sigma_1$$

$$\Rightarrow \min_{\substack{x\in\mathbb{R}^m, y\in\mathbb{R}^n \\ \|x\|_2=\|y\|_2=1}} x^T A y = \min_{\substack{x,y\in\mathbb{R}^r \\ \|x\|_2=\|y\|_2=1}} x^T \Sigma_r y = -\sigma_1$$

לכן, יכולים לכתוב את הבעיה עם אילוצים חדשים:

$$\max_{\substack{x\in\mathbb{R}^m,\, y\in\mathbb{R}^n \\ \|x\|_2=\|y\|_2=1}} \left(x^T U_r \Sigma_r V_r^T y\right) = \max_{\substack{x\in\mathbb{R}^r,\, y\in\mathbb{R}^r \\ \|x\|_2=\|y\|_2=1}} \left(x^T \Sigma_r y\right)$$

$\Sigma_r \in \mathbb{R}^{r\times r}$ - אלכסונית מכילה ערכים סינגולרים באלכסון לכן

$$\Rightarrow \left(x^T \Sigma_r y\right) = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i x_i y_i \underset{\substack{\sigma_1 \text{ - ע"ס} \\ \text{הכי גדול}}}{\leq} \sigma_1 \sum_{i=1}^{r} x_i y_i = \sigma_1 x^T y \underset{\text{קושי-שוורץ}}{\leq} \sigma_1 \|x\|_2 \|y\|_2$$

$$\Rightarrow \forall x,y\in\mathbb{R}^r,\ \|x\|_2=\|y\|_2=1:\ x^T \Sigma_r y \leq \sigma_1$$

חסמנו את הביטוי, לכן נשאר למצוא $x,y\in\mathbb{R}^r$ שקיימו את האילוצים ועבורם:

$$x^T \Sigma_r y = \sigma_1$$

נקח $x=y=e^1=(1,0,\dots,0)^T$. עבורם אכן מתקיים:

$$x^T \Sigma_r y = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i x_i y_i = \sigma_1$$

$$\Rightarrow \max_{\substack{x\in\mathbb{R}^m,\, y\in\mathbb{R}^n \\ \|x\|_2=\|y\|_2=1}} \left(x^T U_r \Sigma_r V_r^T y\right) = \max_{\substack{x\in\mathbb{R}^r,\, y\in\mathbb{R}^r \\ \|x\|_2=\|y\|_2=1}} \left(x^T \Sigma_r y\right) = \sigma_1$$

5) 2) $.A \in \mathbb{R}^{mxn}$

הוכיחו כי הערך המקסימלי מתקבל עבור $y = v_1, x = u_1$. כלומר - עבור הוקטורים הסינגולריים המתאימים ל-$\sigma_1(A)$.

צ"ל: כי $x^T = u_1^T$ ו- $y = v_1$.

הוכחנו בסעיף א'

$$\sigma_{max}(A) = \sigma_1 = \max_{x\in\mathbb{R}^m, y\in\mathbb{R}^n, \|x\|_2=\|y\|_2=1} x^T A y$$

מצד שני אנחנו יודעים כי $\sigma_1 = u_1^T \cdot A \cdot v_1$ כי הוכחנו בשיעור בהקבצה (הרצאה 5 שקופית 8)

לכן אותו $x^T = u_1^T$ ו- $y = v_1$ שממקסם את הערך של σ_1 מכיוון שאנחנו מנסים למצוא את המקסימום

3)

3. השתמשו בתוצאה הנ"ל כדי להראות שעבור כל $A, B \in \mathbb{R}^{mxn}$ מתקיים:
$$\sigma_1(A+B) \le \sigma_1(A) + \sigma_1(B)$$

$$\sigma_1(A+B) = \max_{\substack{x\in\mathbb{R}^m, y\in\mathbb{R}^n \\ \|x\|_2=\|y\|_2=1}} x^T(A+B)y \le \max_{\substack{x\in\mathbb{R}^m, y\in\mathbb{R}^n \\ \|x\|_2=\|y\|_2=1}} (x^TAy) + \max_{\substack{x\in\mathbb{R}^m, y\in\mathbb{R}^n \\ \|x\|_2=\|y\|_2=1}} (x^TBy) =$$

$$= \sigma_1(A) + \sigma_1(B)$$

6

תהי מטריצה $A \in \mathbb{S}^n$.

נסמן ב-$A^{\frac{1}{2}} \in \mathbb{S}^n$ את השורש של A שהיא מטריצה שמקיימת $A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}} = A$.

1. הוכיחו שלמטריצה A קיים שורש ממשי $A^{\frac{1}{2}}$ אם ורק אם $A \succeq 0$.

נניח כי $A \geq 0 \iff \forall x \in \mathbb{R}^n: x^T A \cdot x \geq 0 \iff$ בפרט ניקח את הפירוק הספקטרלי

$\lambda_i \in \mathbb{R}, i \in [n], \exists u_i \in \mathbb{R}^n, i \in [n]: Au_i = \lambda_i u_i, \exists U = [u_1, \dots, u_n] (UU^T = I_n): A = U\Lambda U^T \geq 0$

נגדיר עכשיו $A^{\frac{1}{2}}$, מכיוון ש-Λ אלכסון כל ערכיה אי-שליליים, ולכן:

$$A = U \cdot \Lambda \cdot U^T = U \cdot \Lambda^{\frac{1}{2}} \cdot \overbrace{U^T \cdot U}^{I} \Lambda^{\frac{1}{2}} U^T = A^{\frac{1}{2}} \cdot A^{\frac{1}{2}}$$

לכן קיים שורש ממשי ל-$A^{\frac{1}{2}}$

2. נסמן ב $A = U\Lambda U^T = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i u_i^T$ את הפירוק הספקטרלי של A. בטאו באמצעותו את הפירוק הספקטרלי של $A^{\frac{1}{2}}$.

ראינו שבפירוק הספקטרלי, Λ מכילה רק ערכים גדולים או שווים ל-0 באלכסון. לכן $\Lambda \geq 0$, לכן: $\Lambda = \Lambda^{\frac{1}{2}}\Lambda^{\frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow A = U\Lambda^{\frac{1}{2}}\Lambda^{\frac{1}{2}}U^T = U\Lambda^{\frac{1}{2}}U^T U\Lambda^{\frac{1}{2}}U^T$$

$\Leftarrow$ מצאנו מטריצה שמקיימת $BB = A$

$$\Rightarrow A^{\frac{1}{2}} = B = U\Lambda^{\frac{1}{2}}U^T$$

3.6

נסמן ב $A^{-\frac{1}{2}}$ את המטריצה ההופכית של $A^{\frac{1}{2}}$.

3. נניח A מוגדרת חיובית. תהי $B \in \mathbb{S}^n$.

נתבונן בבעיית האופטימיזציה הבאה:

$$\max_{x \neq 0} \frac{x^T B x}{x^T A x}$$

הוכיחו כי הערך האופטימלי של בעיה זו הוא $\lambda_1(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}})$.

נניח ש- $A \succeq 0$ לכן נקבל ממשפט 7 כי קיים שורש ממשי $A = A^{\frac{1}{2}} \circ A^{\frac{1}{2}}$

בנוסף, כל הע"ע הם חיוביים ממש ו- $A^{\frac{1}{2}}$ הפיכה. ובפרט

תהי $B \in S^n$

$$\max_{x \neq 0} \frac{x^T \cdot B \cdot x}{x^T \cdot A \cdot x} = \max_{x \neq 0} \frac{x^T \cdot B \cdot x}{x^T \cdot A^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} x} = \frac{x^T \cdot B \cdot x}{(A^{\frac{1}{2}} x)^T (A^{\frac{1}{2}} x)}$$

נסמן $y = A^{\frac{1}{2}} \cdot x$, הפיך $A^{\frac{1}{2}}$ לכן נגדיר $x = A^{-\frac{1}{2}}$ ולכן נקבל ממשפט ריילי כי

$$\max_{x \neq 0} \frac{(A^{-\frac{1}{2}} y)^T B (A^{-\frac{1}{2}} y)}{y^T \cdot y} = \lambda_1 (A^{-\frac{1}{2}} \cdot B A \cdot A^{-\frac{1}{2}})$$

שאלה 7

יהיו $A,B\in\mathbb{S}^n$. ראינו בהרצאה את הטענה הבאה:

אם $A\succcurlyeq B$ אז לכל $1\le i\le n$ מתקיים: $\lambda_i(A)\ge\lambda_i(B)$.

הוכח / הפרך:

אם לכל $1\le i\le n$ מתקיים: $\lambda_i(A)\ge\lambda_i(B)$ אז $A\succcurlyeq B$.

$\forall x\in\mathbb{R}^n: x^T(A-B)\cdot x\ge 0 \Leftrightarrow A-B\succeq 0$

לא נכון

$A=\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$, $3=\lambda_1(A)\ge\lambda_1(B)=2$

$1=\lambda_2(A)\ge\lambda_2(B)=1$

$2\times2\cdot2\times1$

$(1,4)\left(\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}=(1,4)\begin{pmatrix}2&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$

$=(1,4)\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}=2-16=-14<0$

לכן הראינו עבור $A,B\in\mathbb{S}^n$ שמתקיים $\lambda_i(A)\ge\lambda_i(B)$ $\forall i\in[n]$

שלא מתקיים $A-B\succeq 0$ ובפרט לא מתקיים $A\succeq B$.

```python
def QR_division(A):
    z, Q = Grand_Shit(A)
    R = find_R(A, Q, z)


    return Q, R
```

```python
def Grand_Shit(A):
    A = np.array(A, float).T
    z = np.array([[0 for _ in range(len(A[0]))] for _ in range(len(A))], float)
    z[0] = A[0]

    for i in range(1, len(A)):
        series_sum = sum(cal_proj(z[j], A[i]) for j in range(i))
        z[i] = A[i] - series_sum

    W = np.array([normalize(row) for row in z], float)

    return z.T, W.T
```

```python
def find_R(A, Q, Z):
    R = np.array([[0 for _ in range(len(A[0]))] for _ in range(len(A[0]))], float)
    Q = np.array(Q, float)
    A = np.array(A, float)
    for i in range(len(R)):  # row
        for j in range(len(R[0])):  # col
            if i == j:
                R[i][i] = math.sqrt(sum(f ** 2 for f in Z.T[i]))
            elif i < j:
                R[i][j] = inner_mul(Q.T[i], A.T[j])
    return R
```

```python
def cal_proj(V1, V2):
    return (inner_mul(V1, V2) / inner_mul(V1, V1)) * V1



3 usages   GilCaplan
def inner_mul(V1, V2):
    return sum(V1[i] * V2[i] for i in range(len(V1)))



1 usage   GilCaplan
def normalize(V):
    V = np.array(V, float)
    x = math.sqrt(sum(V[i] * V[i] for i in range(len(V))))
    return np.array([v_i / x for v_i in V], float)
```

```python
x = np.array([21,11,9,6,5,4,2,1,94,91,89,85,84,16,98])

np.set_printoptions(precision=2)
Q1, R1 = QR_division(M)
print(f"Q = , {Q1}, \n")
print(f"R = , {R1}, \n")
print("part 2:", Q1 @ Q1.T @ x)
# projection of x on S is equal to P @ P^T @ x
print("part 3", (np.eye(len(Q1)) - Q1 @ Q1.T) @ x)
# projection of x on S complement is (I - P @ P^T) @ x as proved in HW02 QB
```

```
Q = , [[ 0.21  0.18  0.19 -0.48 -0.23 -0.06 -0.26  0.   -0.18 -0.11]
 [ 0.28 -0.26  0.16  0.13 -0.08  0.54 -0.45 -0.3   0.21  0.04]
 [ 0.36 -0.32  0.29  0.27 -0.3  -0.09  0.15  0.04  0.12 -0.21]
 [ 0.    0.43  0.2   0.35 -0.02  0.03 -0.23  0.11  0.22 -0.41]
 [ 0.14  0.06  0.31 -0.28 -0.31 -0.09  0.38  0.23 -0.02 -0.1 ]
 [ 0.36 -0.08 -0.3   0.34  0.08  0.07 -0.05  0.61 -0.22  0.19]
 [ 0.    0.06  0.41  0.2   0.25  0.39  0.59 -0.04 -0.02  0.04]
 [ 0.14  0.43 -0.21  0.25  0.15 -0.07  0.08 -0.09  0.09 -0.02]
 [ 0.43 -0.02 -0.47 -0.38  0.12  0.29  0.31 -0.14  0.25 -0.08]
 [ 0.28  0.17  0.11 -0.06 -0.06  0.24 -0.13  0.16 -0.53  0.08]
 [ 0.5  -0.15  0.06  0.13  0.19 -0.61  0.01 -0.26  0.03  0.01]
 [ 0.14  0.12  0.35 -0.25  0.72 -0.04 -0.17  0.08 -0.01 -0.01]
 [ 0.14  0.36 -0.18 -0.04 -0.13  0.06  0.03  0.05  0.14 -0.42]
 [ 0.14  0.43  0.04  0.15 -0.23 -0.03  0.09 -0.46 -0.21  0.47]
 [ 0.07  0.18  0.16 -0.12 -0.13 -0.05 -0.08  0.34  0.63  0.56]],
```

```
R = , [[14.04 14.75 17.95 16.74  9.55 14.61 20.8  15.39 13.18 14.82]
 [ 0.   16.17  6.51  8.35  5.7   6.47  8.61  4.83  3.32  8.99]
 [ 0.    0.   16.17  5.01  4.3   4.62  2.88  7.57  1.16  9.92]
 [ 0.    0.    0.   12.4  -3.39  2.76  7.29  0.65 -2.03  2.34]
 [ 0.    0.    0.    0.    6.35  0.82 -2.1   1.3  -4.66  3.23]
 [ 0.    0.    0.    0.    0.   10.11  3.14  2.2   1.2  -0.15]
 [ 0.    0.    0.    0.    0.    0.    8.74 -0.62  1.28  1.6 ]
 [ 0.    0.    0.    0.    0.    0.    0.    9.24  5.84 -1.08]
 [ 0.    0.    0.    0.    0.    0.    0.    0.    7.34 -1.02]
 [ 0.    0.    0.    0.    0.    0.    0.    0.    0.    4.62]],

part 2: [60.98 24.87  6.06 12.49 31.24 31.14  0.91 40.73 95.81 38.16 69.24 89.69
 39.99 21.85 75.38]
part 3 [-39.98 -13.87   2.94  -6.49 -26.24 -27.14   1.09 -39.73  -1.81  52.84
  19.76  -4.69  44.01  -5.85  22.62]
```