HW01

תרגיל 1

הוכיחו/הפריכו: האם הקבוצה הבאה היא מרחב וקטורי? אם כן, מצאו בסיס ומימד. אם לא, הפריכו.

א. $(6u_2+2u_3, u_2, u_3)$ $W_a =$ $\{u \in \mathbb{R}^3 \mid u_1 = 6u_2 + 2u_3\}$

ב. $\{u \in \mathbb{R}^3 \mid 1 = 6u_2 + 2u_3\}$

ג. $\{B \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid AB = 0\}, A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$

ד. $\{B \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid AB = 0\}, A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

ה. $\{u \in R^2 \mid {u_1}^2 + 4u_1u_2 + 4{u_2}^2 = 0\}$

א) צ"ל: $W_a \neq 0$, $\forall \alpha\in\mathbb{R} : \forall u,w \in W_a$ is $\alpha u + w \in W_a$

(1) $W_a \neq \emptyset$ כי $(0,0,0) \in W_a$

$0 = 6\cdot 0 + 2\cdot 0 = 0$

(2) נניח $\alpha \in \mathbb{R}$, $u = (u_1,u_2,u_3) \in \mathbb{R}^3$, $V = (v_1,v_2,v_3)$

המקיימים $u_1 \overset{(*)}{=} 6u_2 + 2u_3$, $v_1 \overset{(**)}{=} 6v_2 + 2v_3$, נסתכל על $\alpha v + u$

$\alpha u + v = (\alpha v_1 + u_1, \alpha u_2 + v_2, \alpha u_3 + v_3)$

נרצה לבדוק אם: $\alpha u_1 + v_1 = 6\cdot(\alpha u_2 + v_2) + 2(\alpha u_3 + v_3)$

$*$ $\Rightarrow \alpha v_1 + u_1 \overset{?}{=} 6(\alpha u_2 + v_2) + 2(\alpha u_3 + v_3) = \alpha(\underbrace{6u_2 + 2u_3}_{u_1 \ (*)}) + (\underbrace{6v_2 + 2v_3}_{(**)\ v_1}) = \alpha u_1 + v_1$

לכן מתקיים הדרישה ו- $\alpha u + v \in W_a$

לכן W_a את מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}^3$ ובפרט מ"ו כי מתקיים 1, 2.

נציג איבר כללי ב- W_a: $(6u_2+2u_3, u_2, u_3)$

$= u_2(6,1,0) + u_3(2,0,1) = span\left\{\begin{pmatrix}6\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

כך שהצגנו וקטורים בת"ל ולכן מהווים בסיס ל- W_a $\Leftarrow$ ובפרט $\boxed{B_{W_a} = \left\{\begin{pmatrix}6\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}}$

$\boxed{\dim W_a = |B_{W_a}| = 2}$

ב)

$W_B = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid 1 = 6u_2 + 2u_3\}$

$u_3 = \frac{1}{2} - 3u_2$

לכן וקטור מהצורה $(u_1, u_2, \frac{1}{2} - 3u_2)$

וקטור שלי בקבוצה

$(u_1, 2u_2, 1-6u_2)$

המרחב הינו לא מרחב וקטורי. נראה ש- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, u, v \notin W_B$

מתקיים $\alpha u + v \in W_B$, $u = (1, -\frac{1}{2}, 2), v = (1, \frac{-5}{6}, 3)$

עבור u: מתקיים כי $1 = 6 \cdot \frac{-1}{2} + 2 \cdot 2 = 1 = 4 - 3 = 1$ לכן $u \in W_B$

עבור v: $1 = 6 \cdot \frac{-5}{6} + 2 \cdot 3 = -5 + 6 = 1 \Rightarrow 1 = 1 \Rightarrow v \in W_B$

ניקח $\alpha = 3 \in \mathbb{R}$

$$3(1, \tfrac{-1}{2}, 2) + (1, \tfrac{-5}{6}, 3) = (2, \tfrac{-7}{3}, 5)$$

$$1 = 6 \cdot \tfrac{-7}{3} + 2 \cdot 5 \Rightarrow 1 - 10 + 14 = 0 \Rightarrow 5 = 0$$

כיוון ש- $5 \neq 0$ ולכן זה מהווה סתירה ו- W_B

אינה מרחב וקטורי.

$W_c = \{B \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid AB = 0\}, A = \begin{pmatrix}3 & 1\\ 6 & 2\end{pmatrix}\}$ (ג

צ"ל: $\alpha V + W \in W_c$

$$\alpha \begin{pmatrix}3 & 1\\ 6 & 2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix}3x+z & 3y+w\\ 6x+2z & 6y+2w\end{pmatrix} = 0$$

$3x + z = 0 \Rightarrow z = -3x$

$3y + w = 0 \Rightarrow w = -3y$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 6 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_4 \to \frac{1}{2}R_4} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כלומר וקטור כללי של W_c נראה: $\begin{pmatrix}x & y\\ -3x & -3y\end{pmatrix}$ ונראה W_c כך

נגדיר $\alpha \in \mathbb{R}$ כללי, נניח $U = \begin{pmatrix}u_1 & u_2\\ -3u_1 & -3u_2\end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix}v_1 & v_2\\ -3v_1 & -3v_2\end{pmatrix}$ ולכן שאכן $A \cdot V = 0, A \cdot U = 0$

$$l = \alpha V + u$$

נראה כי $A \cdot l = 0$.

$$A \cdot l = \begin{pmatrix}3 & 1\\ 6 & 2\end{pmatrix}(\alpha V + u) \overset{\text{לינאריות כפל של } \mathbb{R}^{2\times 2}}{=} \alpha A V + A u = \alpha \cdot 0 + 0 = 0$$

לכן $\alpha u + v \in W_c$ ומכאן W_c מרחב וקטורי,

$\dim(W_c) = 2$, $\boxed{B_{W_c} = \left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -3\end{pmatrix}\right\}}$

$\dim(W_c) = |B_{W_c}|$

ג) $W_d := \{B \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid AB = 0\}, A = \begin{pmatrix}3&1\\0&2\end{pmatrix}\}$

$$AB=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}3&1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix}3x+z & 3y+w\\ 2z & 2w\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases}3x+z=0\\3y+w=0\\2z=0\\2w=0\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}w=0\\z=0\\y=0\\x=0\end{matrix}$$

לפי כך $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \in W_d$. ומכאן ש W_d לא ריקה.

עבור $u,v\in W_d$ ו- $\alpha\in\mathbb{R}$ כך ש- $u=v=0$ כי 0

$\alpha\cdot u+v=0$ לפי ההגדרה היחידה מקיימים לכן $A\cdot 0=0$

ולכן מתקיים

ולכן $\alpha u+v\in W_d$

$\Leftarrow$ W_d מרחב וקטורי.

בסך מימד 0 ובסיס 0 $B=\{\ \}$.

מכאן W_d מרחב וקטורי.

ה) $W_e := \{u\in R^2 \mid u_1^2+4u_1u_2+4u_2^2=0\}$

$(u_1+2u_2)^2 = u_1^2+4u_1\cdot u_2+4u_2^2$

$\Downarrow$

$(u_1+2u_2)^2=0$

$u_1=-2u_2$

$\Downarrow$

$u=(-2x,x)$

עבור $u=(u_1,u_2)$: $u_1^2+4u_1u_2+4u_2^2=0$

- הקבוצה לא ריקה כי $(0,0)\in W_e$

כי $0^2+4\cdot0\cdot0+4\cdot0^2=0$.

- ניקח $\alpha\in\mathbb{R}$ ו- $u=(-2x,x)$, $v=(-2y,y)$

$$\alpha v+u=(-2\alpha y,\alpha y)+(-2x,x)=(-2(\alpha y+x),\ \alpha y+x)$$

נסמן $l=\alpha y+x$

$\Rightarrow$ $\alpha v+u=(-2l,l) \Rightarrow \alpha v+u\in W_e$

ולכן W_e הוא מ"ו.

תרגיל 2

ב)

א. מצאו בסיס ומימד לגרעין ולתמונה של המטריצה הבאה:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

ב. מצאו בסיס ומימד לגרעין ולתמונה של המטריצה AA^T.

א)

גרעין:

$$\ker(A) = \{ V \in \mathbb{R}^4 \mid A \cdot V = 0 \}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \to R_2 - 2R_1]{R_3 \to R_3 - R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 3R_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \leftarrow -\frac{1}{2}R_3]{R_2 \leftarrow -\frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - 4R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \to R_2 + R_3]{R_1 \to R_1 - R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_4 = 5V_3 \\ V_2 = -3.5V_3 \\ V_1 = -2V_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ -3.5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

לכן קיבלנו הוא כך שוקטור

$$\boxed{\begin{gathered} \dim(\ker A) = 1 \\ \ker A = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -3.5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} \end{gathered}}$$

ומצאנו . ש-

נקבל ממשפט המימדים כך ש- $\dim(\ker A) + \dim(\operatorname{Im} A) = \dim V$

$$2 + \dim(\operatorname{Im} A) = 4$$

$$\boxed{\dim(\operatorname{Im} A) = 3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 4y + z + 3w \\ 2x + 2y + z + 2w \\ x + 2y + 4z + w \end{pmatrix}$$

$$= x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -11 \\ 0 & -2 & -14 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & -20 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}}$$

ב

תרגיל 2

א. מצאו בסיס ומימד לגרעין ולתמונה של המטריצה הבאה:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

ב. מצאו בסיס ומימד לגרעין ולתמונה של המטריצה AA^T.

$3\times 4 \quad 4\times 3$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\to A\cdot A^T = \begin{pmatrix} 27 & 17 & 16 \\ 17 & 13 & 12 \\ 16 & 12 & 22 \end{pmatrix}$$

כעת נבצע דירוג על מנת למצוא את הקרנל.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 27 & 17 & 16 & 0 \\ 17 & 13 & 12 & 0 \\ 16 & 12 & 22 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_1 \to R_1 - R_3]{R_2 \to R_2 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 11 & 5 & -6 & 0 \\ 1 & 1 & -10 & 0 \\ 16 & 12 & 22 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -10 & 0 \\ 11 & 5 & -6 & 0 \\ 16 & 12 & 22 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 16R_1]{R_2 \to R_2 - 11R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -10 & 0 \\ 0 & -6 & 104 & 0 \\ 0 & -4 & 182 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \leftrightarrow -\frac{1}{2}R_2]{R_4 \leftrightarrow -\frac{1}{4}R_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -10 & 0 \\ 0 & 3 & 52 & 0 \\ 0 & 1 & 45.5 & 0 \end{array}\right)$$

52

-136.5

$$\xrightarrow[R_2 \to R_2 - 3R_3]{R_1 \to R_1 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -55.5 & 0 \\ 0 & 0 & -84.5 & 0 \\ 0 & 1 & 45.5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -55.5 & 0 \\ 0 & 1 & 45.5 & 0 \\ 0 & 0 & -84.5 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} V_1 = 0 \\ V_2 = 0 \\ V_3 = 0 \end{array} \Rightarrow \boxed{\ker AA^T = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\},\ \dim \ker AA^t = 0}$$

משפט המימדים נותן

$$\underbrace{\dim \ker AA^T}_{1} + \dim \operatorname{Im} AA^T = \dim \mathbb{R}^4$$

$$\Downarrow$$

$$\dim \operatorname{Im} A\cdot A^T = \dim \mathbb{R}^3$$

$$\Downarrow$$

לכן יש להם אותו בסיס

$$\Rightarrow \boxed{B_{A\cdot A^T} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\},\ \dim(\operatorname{Im}(A\cdot A^T)) = 3}$$

תרגיל 3

א. יהיו $A \in R^{m\,x\,n}, B \in R^{n\,x\,m}$. הוכיחו כי $Tr(AB) = Tr(BA)$.

ב. יהיו $A \in R^{m\,x\,n}, B \in R^{n\,x\,k}, C \in R^{k\,x\,m}$. הוכיחו כי $Tr(ABC) = Tr(CAB) = Tr(BCA)$.

א3.

(א) $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

צ"ל: $Tr(AB) = Tr(BA)$

הוכחה:

$$Tr(AB) = \sum_{i=1}^{m} (AB)_{ii}, \quad Tr(BA) = \sum_{i=1}^{n} (BA)_{ii}$$

$$(AB)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} \Rightarrow Tr(AB) \overset{1}{=} \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{kj}$$

$$(BA)_{ii} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik} a_{ki} \Rightarrow Tr(BA) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} b_{jk} a_{kj} \overset{2}{=} \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{jk} a_{kj} =$$

$$\overset{3}{=} \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} b_{kj} a_{jk} = Tr(AB) \blacksquare$$

① סכימה על האיברי האלכסון

② החלפת סדר סכימה

③ k ו-j - סתם משתנים לכן אם נחליף את הסדר ביניהם וגם האיברים

זה בעצם כתיבה אחרת של אותו ביטוי.

3

$$AB = Q_2, \quad BC = Q_1 \qquad : |^{NOJ}$$

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n \times k}, \quad C \in \mathbb{R}^{k \times m}$$

$Tr(ABC) = Tr(CAB) = Tr(BCA)$ $\qquad \underline{:\delta \cdot 3}$

1

$$Tr(ABC) = Tr((AB)C) = Tr(Q_2 C) = Tr(CQ_2) = Tr(CAB)$$

1

$$Tr(ABC) = Tr(AQ_1) = Tr(Q_1 A) = Tr(BCA)$$

$\Rightarrow Tr(ABC) = Tr(CAB) = Tr(BCA)$ ■ $\qquad$ 1 δ'ro 1

תרגיל 4

יהיו מטריצות: $U \in \mathbb{R}^{m\,x\,r}, D \in \mathbb{R}^{r\,x\,r}, V \in \mathbb{R}^{n\,x\,r}$.

נסמן:

$u_1, \dots, u_r$ הן העמודות של U.

$v_1, \dots, v_r$ הן העמודות של V.

D אלכסונית כך ש:

$d_i = D_{i,i}, 1 \le i \le r$

הוכיחו:

$$UDV^T = \sum_{i=1}^{r} d_i u_i v_i^T$$

$m \times r \cdot r \times n = m \times n$

$$UDV^T =$$

$$= \begin{pmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_r \\ | & | & & | \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_r \end{pmatrix} \cdot V^T$$

$$= \begin{pmatrix} | & | & & | \\ d_1 u_1 & d_2 u_2 & \cdots & d_r u_r \\ | & | & & | \end{pmatrix} \cdot V^T = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ d_1 u_1 & d_2 u_2 & \cdots & d_r u_r \\ | & | & & | \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} - v_1^T - \\ - v_2^T - \\ \vdots \\ - v_r^T - \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{r} d_i u_{1i} v_{i1}^T & \sum_{i=1}^{r} d_i u_{1i} v_{i2}^T & \cdots & \sum_{i=1}^{r} d_i u_{1i} v_{ir}^T \\ \sum_{i=1}^{r} d_i u_{2i} v_{i1}^T & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ \sum_{i=1}^{r} d_i u_{mi} v_{i1}^T & \cdots & & \sum_{i=1}^{r} d_i u_{mi} v_{ir}^T \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{r} d_i u_i v_i^T \blacksquare$$

תרגיל 5

הוכיחו/הפריכו:

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

$$(A^{-1})^T \cdot (A^T) = (A \cdot A^{-1})^T = I$$

$$(A^{-1})^T \cdot \overbrace{(A^T) \cdot (A^T)^{-1}}^{I} = \cancel{I} \cdot (A^T)^{-1}$$

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} \blacksquare$$

<u>תרגיל 6</u>

נתונות מטריצות:

$$A=\begin{pmatrix} A^{1,1} & \cdots & A^{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{s,1} & \cdots & A^{s,k}\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} B^{1,1} & \cdots & B^{1,l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B^{k,1} & \cdots & B^{k,l}\end{pmatrix}$$

$A^{i,j}\in\mathbb{R}^{m\,x\,n}$

$B^{i,j}\in\ \mathbb{R}^{n\,x\,t}$

הוכיחו כי:

$$AB=\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{k}A^{1,i}\cdot B^{i,1} & \cdots & \sum_{i=1}^{k}A^{1,i}\cdot B^{i,l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{k}A^{s,i}\cdot B^{i,1} & \cdots & \sum_{i=1}^{k}A^{s,i}\cdot B^{i,l}\end{pmatrix}$$

ת6.

$A^{i,j}\in\mathbb{R}^{m\times n}$

$B^{i,j}\in\mathbb{R}^{n\times t}$

$$A=\begin{pmatrix} A^{1,1} & \cdots & A^{1,k} \\ \vdots & \ddots & \\ A^{s,1} & \cdots & A^{s,k}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{sm\times kn}$$

$$B=\begin{pmatrix} B^{1,1} & \cdots & B^{1,l} \\ \vdots & \ddots & \\ B^{k,1} & \cdots & B^{k,l}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{kn\times tl}$$

נסמן:

$$M=\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{k}A^{1,i}\cdot B^{i,1} & \cdots & \sum_{i=1}^{k}A^{1,i}\cdot B^{i,l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{k}A^{s,i}\cdot B^{i,1} & \cdots & \sum_{i=1}^{k}A^{s,i}\cdot B^{i,l}\end{pmatrix}$$

צ"ל:

$$\forall i,j:\ (AB)_{i,j}=M_{i,j}$$

נסמן הבלוק מסוים של M ה- $M^{i,j}$, $M^{l,j} = \sum_{i=1}^{k} A^{l,i} \cdot B^{i,j} \in \mathbb{R}^{m\times t}$

$$\Rightarrow M_{i,j} = \left(M^{\lceil i/m\rceil, \lceil j/t\rceil}\right)_{i\%m,\, j\%t}$$

$$(AB)_{i,j} = \sum_{l=1}^{kn} A_{i,l}\cdot B_{l,j} = \sum_{l=1}^{k}\sum_{m=1}^{n} A_{i,(l-1)\cdot n+m}\cdot B_{(l-1)\cdot n+m,\, j} =$$

$$= \sum_{l=1}^{k}\sum_{m=1}^{n} \left(A^{\lceil i/m\rceil,\, l}\right)_{i\%m,\, m}\cdot \left(B^{l,\, \lceil j/t\rceil}\right)_{m,\, j\%t} = \cancel{\text{[illegible]}}$$

$$= \sum_{l=1}^{k} \left(A^{\lceil i/m\rceil,\, l}\cdot B^{l,\, \lceil j/t\rceil}\right)_{i\%m,\, j\%t} = M_{i,j}$$

תרגיל 7

יהי $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ מרחב מכפלה פנימית. יהיו $x,y,z \in \mathcal{X}$ כך ש- $x,y,z \neq 0$.
הוכיחו / הפריכו את הטענה הבאה: אם $\langle x,y\rangle = \langle y,z\rangle = a \in \mathbb{R}$ אז $\langle x,z\rangle = a$.

$x,y,z \neq 0$

דוגמא נגדית:

$\langle x,y\rangle = \langle y,z\rangle = a \in \mathbb{R}$

$\overset{?}{\Downarrow}$

$\langle x,z\rangle = a$

ניקח את מכפלה פנימית סטנדרטית.

$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ z = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\langle x,y\rangle = x^T\cdot y = (2\ 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 4$

$\langle y,z\rangle = y^T\cdot z = (1\ 2)\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 4$

אבל

$\langle x,z\rangle = x^T\cdot z = (2\ 1)\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2$

אבל $2 \neq 4$ לכן הטענה לא מתקיימת

תרגיל 8

יהיו $x,y\in\mathbb{R}^n$. נסמן ב $(\sphericalangle x,y)$ את הזווית בין x ל y.

עבור כל אחת מהאופרטורים הבאים, הוכיחו שהוא מכפלה פנימית או הפריכו ע"י דוגמה נגדית:

$\sqrt[2]{\sum x_i^2}$

א. $\langle x,y\rangle = \|x\|_2\|y\|_2 sin(\sphericalangle x,y)$

ב. $\langle x,y\rangle = \|x\|_2\|y\|_2 cos(\sphericalangle x,y)$

ג. $\langle x,y\rangle = \|x\|_2\|y\|_2 tan(\sphericalangle x,y)$

An inner product on a real vector space $\mathcal{X}$ is a function which maps any pair $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathcal{X}$ into a real scalar denoted by $\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle$, which satisfies the following axioms for any $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in\mathcal{X}$ and scalar $\alpha\in\mathbb{R}$: $*(\alpha=\langle x,y\rangle)$

1. $\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle\geq 0$, and $\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle=0$ if and only if $\mathbf{x}=0$ (positivity)
2. $\langle\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{z}\rangle=\langle\mathbf{x},\mathbf{z}\rangle+\langle\mathbf{y},\mathbf{z}\rangle$ (additivity)
3. $\langle\alpha\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle=\alpha\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle$ (homogeneity)
4. $\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle=\langle\mathbf{y},\mathbf{x}\rangle$ (symmetry)

א) לא נכון, עבור וקטור $x=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$ נקבל כי

$$\langle x,x\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\right\rangle = \left\|\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\right\|_2\left\|\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\right\|_2\cdot \sin 0 = 0$$

אבל $x=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\neq 0$ בסתירה לאקסיומה (1) ש- $\langle x,x\rangle=0$ iff $x=0$

ב) נראה כי $\langle x,y\rangle=\|x\|_2\|y\|_2\cos(\sphericalangle x,y)$ שווה למכפלה פנימית הסטנדרטית ולכן מקיימת כי זה מכפלה פנימית

כפי שראינו בקורס המכפלה הסטנדרטית היא $\langle x,y\rangle = x^T y$

ועכשיו יהי $x,y\in\mathbb{R}^n$ כך ש- $x,y\neq 0$, נסתכל על המשולש שעבורו הקודקודים הם $(0,x,y)$ ו- θ בין הצלעות $x-0, y-0$

נשתמש במשפט הקוסינוסים מגיאומטריה:

I) $\|x-y\|_2^2 = \|x-0\|_2^2+\|y-0\|_2^2-2\|x-0\|_2\|y-0\|\cos\theta = \|x\|_2^2+\|y\|_2^2-2\|x\|_2\|y\|_2\cos\theta$

II) $\|x-y\|_2^2 = (x-y)^T(x-y) = x^Tx-x^Ty-y^Tx+y^Ty = \|x\|_2^2+\|y\|_2^2-2x^Ty$ ולכן

ביחד עם (I),(II) נקבל $x^Ty = \|x\|_2\|y\|_2\cos(\sphericalangle x,y)$

$\boxed{\langle x,y\rangle \overset{?}{=} x^Ty = \|x\|_2\|y\|_2\cos(\sphericalangle x,y)}$ כנדרש

מכפלה פנימית סטנדרטית

ג)

לא נכון, עבור וקטור $x=\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ נקבל כי

$$\langle x,x\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right\rangle=\left\|\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right\|_2\left\|\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right\|_2\cdot\tan 0=0$$

אבל $x=\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}\neq 0$ בסתירה לאקסיומה 1 ש- $\langle x,x\rangle=0$ אמ"מ $x=0$