

## שיטות אלגבריות בהנדסת נתונים - תרגיל בית 3

### שאלה 1

אי שוויון Ky-Fan עבור מטריצות סימטריות  $X, Y \in \mathbb{S}^n$  אומר:

$$\forall k = 1, \dots, n: \sum_{i=1}^k \lambda_i(X+Y) \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i(X) + \lambda_i(Y)$$

א. (7 נקודות) הוכיחו כי אי השוויון ההפוך גם מתקיים:

$$\forall k = 1, \dots, n: \sum_{i=1}^k \lambda_{n-i+1}(X+Y) \geq \sum_{i=1}^k \lambda_{n-i+1}(X) + \lambda_{n-i+1}(Y)$$

ב. (7 נקודות) הוכיחו/הפריכו:

בהינתן שלמים  $1 \leq k \leq n$  ומטריצה סימטרית  $X \in \mathbb{S}^n$ , נסמן את הערכים העצמיים שלה על ידי:  $\lambda_1(X) \geq \lambda_2(X) \geq \dots \geq \lambda_n(X)$ .  
נגדיר את הפונקציה:  $\|X\| = \sum_{i=1}^k |\lambda_i(X)|$  - כלומר הפונקציה מחזירה את סכום הערכים המוחלטים של  $k$  הערכים העצמיים הגדולים ביותר של המטריצה  $X$ . אזי, הפונקציה הנ"ל היא נורמה מעל מרחב המטריצות הסימטריות הממשיות  $n \times n$ .

### שאלה 2

תהי  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  כך ש- $m \leq n$ . נסמן ב- $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  את הערכים הסינגולרים של  $A$ .

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A \\ I_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+n) \times n}$$

נגדיר:

1. הראו כי הערכים הסינגולריים של  $\bar{A}$  הם  $\bar{\sigma}_i = \sqrt{1 + \sigma_i^2}$ .

2. מצאו פירוק SVD של  $\bar{A}$  בהינתן פירוק SVD של  $A$ .

### שאלה 3

1. מצאו פירוק SVD של המטריצה הבאה:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. מהי הדרגה של  $A$ ?

3. כתבו באופן מפורש בסיסים אורתונורמליים למרחבים הבאים:

$$\text{Im}(A), \text{Im}(A^T), N(A), N(A^T)$$

4. כתבו את המטריצה הפסאודו הופכית  $A^\dagger$ .

## שאלה 4

תהי  $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$  מטריצה כלשהי, ויהיו  $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  מטריצות אורתוגונליות. הוכיחו את הטענות הבאות:

1.  $\|RYQ\|_F = \|Y\|_F$  (נורמת פרובניוס)
2.  $\|RYQ\|_2 = \|Y\|_2$  (נורמה ספקטרלית)

## שאלה 5

תהי  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .

1. הוכיחו את הטענה הבאה, שהיא הטענה המקבילה למשפט ריילי עבור מטריצות לא סימטריות:  $\sigma_1 = \max_{x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n, \|x\|_2 = \|y\|_2 = 1} x^T A y$   
בנוסף, הוכיחו כי:  $\sigma_1 = \min_{x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n, \|x\|_2 = \|y\|_2 = 1} x^T A y$
2. הוכיחו כי הערך המקסימלי מתקבל עבור  $x = u_1, y = v_1$ . כלומר - עבור הוקטורים הסינגולריים המתאימים ל- $\sigma_1(A)$ .
3. השתמשו בתוצאה הנ"ל כדי להראות שעבור כל  $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$  מתקיים:  
 $\sigma_1(A + B) \leq \sigma_1(A) + \sigma_1(B)$

## שאלה 6

תהי מטריצה  $A \in \mathbb{S}^n$ .

- נסמן ב- $A^{\frac{1}{2}} \in \mathbb{S}^n$  את השורש של  $A$  שהיא מטריצה שמקיימת  $A^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} = A$ .
1. הוכיחו שלמטריצה  $A$  קיים שורש ממשי  $A^{\frac{1}{2}}$  אם ורק אם  $A \geq 0$ .
  2. נסמן ב- $A = U \Lambda U^T = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i u_i^T$  את הפירוק הספקטרלי של  $A$ . בטאו באמצעותו את הפירוק הספקטרלי של  $A^{\frac{1}{2}}$ .

נסמן ב- $A^{-\frac{1}{2}}$  את המטריצה ההופכית של  $A^{\frac{1}{2}}$ .

3. נניח  $A$  מוגדרת חיובית. תהי  $B \in \mathbb{S}^n$ .  
נתבונן בבעיית האופטימיזציה הבאה:

$$\max_{x \neq 0} \frac{x^T B x}{x^T A x}$$

הוכיחו כי הערך האופטימלי של בעיה זו הוא  $\lambda_1(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}})$ .

## שאלה 7

יהיו  $A, B \in \mathbb{S}^n$ . ראינו בהרצאה את הטענה הבאה:

אם  $A \succcurlyeq B$  אז לכל  $1 \leq i \leq n$  מתקיים:  $\lambda_i(A) \geq \lambda_i(B)$ .

הוכח / הפרך:

אם לכל  $1 \leq i \leq n$  מתקיים:  $\lambda_i(A) \geq \lambda_i(B)$  אז  $A \succcurlyeq B$ .

### שאלה 8 (שאלה תכנותית)

כתבו קוד פייתון המחשב פירוק QR של מטריצה נתונה  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  כפי שנלמד בתרגול 3. כלומר: מקבל מטריצה A ומחזיר את המטריצות Q ו-R.

א. השתמשו בקוד שכתבתם כדי לחשב פירוק QR של המטריצה הבאה:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 & 0 & 4 & 3 & 1 & 5 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 6 & 5 & 1 & 9 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 0 & 9 & 8 & 0 & 4 & 9 & 6 & 6 & 4 \\ 0 & 7 & 6 & 9 & 2 & 5 & 5 & 5 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 8 & 1 & 2 & 2 & 6 & 6 & 6 & 4 \\ 5 & 4 & 1 & 8 & 1 & 5 & 8 & 9 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 5 & 3 & 7 & 9 & 4 & 0 & 7 \\ 2 & 9 & 2 & 8 & 3 & 4 & 8 & 2 & 2 & 5 \\ 6 & 6 & 0 & 0 & 4 & 6 & 8 & 2 & 7 & 1 \\ 4 & 7 & 8 & 6 & 4 & 8 & 7 & 8 & 2 & 7 \\ 7 & 5 & 9 & 9 & 5 & 1 & 8 & 4 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 9 & 2 & 9 & 4 & 0 & 7 & 0 & 8 \\ 2 & 8 & 2 & 4 & 2 & 4 & 6 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 9 & 6 & 8 & 2 & 5 & 9 & 0 & 0 & 9 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 2 & 2 & 2 & 6 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

- ב. הטילו את הנקודה  $x = (21, 11, 9, 6, 5, 4, 2, 1, 94, 91, 89, 85, 84, 16, 98)^T$  על מרחב העמודות של A, נסמנו  $\mathcal{S}$ .
- ג. הטילו את הנקודה  $x = (21, 11, 9, 6, 5, 4, 2, 1, 94, 91, 89, 85, 84, 16, 98)^T$  על  $\mathcal{S}^\perp$ .

הגישו את הקוד שכתבתם ואת הפלט של כל סעיף (המטריצות Q ו-R בסעיף א', ו-וקטורי ההיטל בסעיפים ב' וג').