שאלה 1

נסמן ב-$\mathbb{P}_k$ את המרחב הוקטורי של כל הפולינומים ממעלה k עם מקדמים ממשיים.

עבור n טבעי וסקלרים $x_1, \dots, x_n$ שונים זה מזה, ולכל $p, q \in \mathbb{P}_k$ נגדיר

$$\langle p, q \rangle = \sum_{i=1}^{n} p(x_i) \cdot q(x_i)$$

בידקו עבור אלו ערכי n $\langle \cdot,\cdot \rangle$ היא מכפלה פנימית.

$$\mathbb{P}_k = \{ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2^2 + \dots + a_k \cdot x_k^k \mid \forall i \in [k] \}$$

נבדוק עבור אילו ערכי n מקיים תנאי למכפלה פנימית:

7_0

עבור $n>k$:

$$\langle p, p \rangle = \sum_{i=1}^{n} p(x_i)^2 = \underbrace{p(x_1)^2}_{\geq 0} + \underbrace{p(x_2)^2}_{\geq 0} + \dots + \underbrace{p(x_n)^2}_{\geq 0} \geq 0 \quad (1)$$

כי המחוברים גדולים מ-0

עבור: $p = 0 \Leftarrow \langle 0,0 \rangle = \sum_{i=1}^{n} p(x_i) \cdot p(x_i) = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot 0 = 0$

$0 = \langle p, p \rangle = \sum_{i=1}^{n} p(x_i)^2 \Rightarrow \forall i \; p(x_i) = 0 \Rightarrow x_1, \dots, x_n$ שורשים של פולינום p

מכיוון שלפולינום ממעלה k יש לכל היותר k שורשים לא ייתכן שיש n שורשים שונים $\Leftarrow p=0$.

② צ"ל: $\langle p+q, f\rangle = \langle p, f\rangle + \langle q, f\rangle$

יהי $p, q, f \in \mathbb{P}_n$.

$$\langle p+q, f\rangle = \sum_{i=1}^{n} (p(x_i)+q(x_i))\cdot f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i)f(x_i) + q(x_i)\cdot f(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p(x_i)f(x_i) + \sum_{i=1}^{n} q(x_i)\cdot f(x_i) = \langle p, f\rangle + \langle q, f\rangle$$

עבור כל n.

③ צ"ל: $\langle \alpha p, q\rangle = \alpha\langle p, q\rangle$

$$\langle \alpha p, q\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha p(x_i)\cdot q(x_i) = \alpha \sum_{i=1}^{n} p(x_i)\cdot q(x_i) = \alpha\langle p, q\rangle$$

לכל n.

④ צ"ל: $\langle p, q\rangle = \langle q, p\rangle$

$$\langle p, q\rangle = \sum_{i=1}^{n} p(x_i)q(x_i) = \sum_{i=1}^{n} q(x_i)\cdot p(x_i) = \langle q, p\rangle$$

עבור כל n.

לכן מכפלה קיבלנו שכל התכונות עובדות ובחת

עבור $n \le k$:

$$0 = \langle p, p\rangle = \sum_{i=1}^{n} p(x_i)^2 \Rightarrow \forall i: \; p(x_i) = 0 \Rightarrow x_1, \dots, x_n$$ שורשים של פולינום

מכיוון שיש $n \le k$ שורשים של p, כלומר יכול להיות פולינום מהצורה

$$p(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n) \Rightarrow \langle p, p\rangle = \sum_{i=1}^{n} p(x_i)p(x_i) = 0$$

אבל $p(x) \neq 0$.

לסיכום המכפלה הפנימית הנתונה מוגדרת מתקיים $\boxed{\text{מכחת}}$

שאלה 2

יהיה $\mathcal{S}$ תת-מרחב ממימד k של מרחב מכפלה פנימית $\mathcal{X}$ מעל הממשיים ממימד n.

א. הוכיחו כי המשלים האורתוגונלי של $\mathcal{S}$ (המסומן ב-$\mathcal{S}^\perp$) הוא תת-מרחב וקטורי.

ב. הוכיחו כי אם $V=\mathbb{R}^n$, אז מטריצת ההטלה על $\mathcal{S}^\perp$ נתונה ע"י $I-PP^T$, כש-PP^T היא מטריצת ההטלה על $\mathcal{S}$.

כעת נניח כי נתון $\{s_1,\dots,s_k\}$ בסיס של $\mathcal{S}$ ו-$\{x_1,\dots,x_n\}$ בסיס של $\mathcal{X}$.

ג. תארו אלגוריתם למציאת בסיס אורתונורמלי ל-$\mathcal{S}^\perp$. (רמז – ראינו כי ניתן להפעיל את תהליך גרם-שמידט גם על קבוצות שאינן בת"ל).

ד. נגדיר $\mathcal{S}=span((0,1,2,2)^T,(2,0,4,1)^T)$, מצאו את ההיטל של הוקטור $y=(2,0,2,1)^T$ על $\mathcal{S}$ ו-$\mathcal{S}^\perp$.

ש2.

(א)

כדי להוכיח ש-$S^\perp$ הוא תת-מרחב וקטורי, נוכיח 3 תכונות:

(1) סגירות לכפל בסקלר וסכום:

נקח $u,v\in S^\perp$.

צ"ל: $\alpha u+\beta v\in S^\perp$

נקח $w\in S$. לכן: $\langle \alpha u+\beta v, w\rangle \overset{\text{additivity, homogenity}}{=}$

$= \alpha\langle u,w\rangle+\beta\langle v,w\rangle \underset{u,v\in S^\perp}{=} 0 \Rightarrow \alpha u+\beta v\in S^\perp$ $((\alpha u+\beta v)\perp w)$

(2) קיום איבר ה"ס:

נקח $w\in S$.

$\langle 0,w\rangle=0 \Rightarrow 0\perp w\Rightarrow 0\in S^\perp$

$\Rightarrow S^\perp$ מהווה תת-מרחב וקטורי.

(ב) נניח כי $V=\mathbb{R}^n$, צ"ל: $S^\perp$ נתונה ע"י $I-P\cdot P^T$

נניח ש- PP^T מטריצת ההטלה על S. עם ה- $Span(x_1,\dots,x_n)$

ויהי $x\in\mathbb{R}^n$, עפ"י משפט הפירוק האורתוגונלי נקבל כי $x=x_S+x_{S^\perp}$ (*)

כאשר $x_S\in S$ ו- $x_{S^\perp}\in S^\perp$. כעת נפעיל את ההטלה כבאה:

$(I-PP^T)x = Ix - P\circ P^Tx = \underbrace{x-x^S}_{(*)} = x^{S^\perp} \Rightarrow (I-PP^T)$ is the projection matrix for $S^\perp$

נכיח על מטריצת ההטלה $S^\perp$

③ (המשך)

בתרגול ראינו שאפשר להפעיל גרם שמידט גם על קבוצה שהיא לא בת"ל.
בתהליך הרצת האלגוריתם, אם הוקטור שהוא שלב k, אז u_k תלוי בקודמיו
ה-z_k המתאים לו יתאפס. בסוף מסירים כל האפסים מהקבוצה ומקבלים
בסיס אורתונורמלי.

ניצור קבוצה חדשה של הוקטורים: $B = \{s_1,...,s_k, z_1, ..., z_n\}$
נשים לב כי $\{s_1,...,s_k\}$ - בת"ל ולכן לכל z_i שמתאימים ל-$s_i \in \{s_1,...,s_k\}$
לא יתאפסו עד שלב k.
אחרי שלב k, נשארנו עם n וקטורים ו-k מהם ת"ל.
נסמן קבוצה חדשה $S^{\perp}$ ונכניס לתוכה כל הוקטורים הבת"ל ששייכים ל-B
אחרי שלב k. יש בדיוק $n-k$ כאלה, נוכיח ש-$S^{\perp}$ - בסיס אורתונורמלי
למשלים אורתוגונלי של S.

① - $|S^{\perp}| = n-k$

② $S^{\perp} \cup \{s_1,...,s_k\}$ - קבוצת הוקטורים שגרם שמידט יוצר לצורך הנ"ל.

$\Rightarrow \forall \omega \in S^{\perp}$: ① $\forall i \in \{1,..,k\} : \omega^T s_i = 0$

(גרם שמידט יוצר וקטורים אורתונורמלים)

② $\forall v \in S^{\perp}, v \neq \omega : \omega^T v = 0$

(גרם שמידט יוצר וקטורים אורתונורמלים)

כך $S^{\perp}$ - בסיס אורתונורמלי למשלים אורתוגונלי של S.

3) נגדיר $S = span((0,1,2,2)^T,(2,0,4,1)^T)$, מצאו את ההיטל של הוקטור $y=(2,0,2,1)^T$ על S ו-$S^{\perp}$.

$$X = \{x_1, \dots, x_n\}$$

נפעיל את התהליך של גרם-שמידט על S על מנת למצוא בסיס אורתונורמלי

$$z_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$z_2 = \begin{pmatrix}2\\0\\4\\1\end{pmatrix} - \pi_{z_1}\left(\begin{pmatrix}2\\0\\4\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\0\\4\\1\end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix}2\\0\\4\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\\2\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\\2\end{pmatrix}\right\rangle} \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\4\\1\end{pmatrix} - \frac{8+2}{9} \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2\\0\\4\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\ \frac{10}{9}\\ \frac{20}{9}\\ \frac{20}{9}\end{pmatrix} = \left(2 \;\; \frac{-10}{9} \;\; \frac{16}{9} \;\; \frac{-11}{9}\right)^T$$

$$\Rightarrow w_1 = \frac{1}{3}(0 \;\; 1 \;\; 2 \;\; 2)^T$$

$$w_2 = \frac{1}{\sqrt{801}}(18 \;\; -10 \;\; 16 \;\; -11)^T$$

נחשב את Q

$$P = (w_1 \;\; w_2)$$

$$x^* = P \cdot P^T \cdot x = (w_1 \;\; w_2)\begin{pmatrix}w_1^T\\ w_2^T\end{pmatrix} \cdot x = w_1 w_1^T x + w_2 w_2^T x = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}0\\1\\2\\2\end{pmatrix}(0\;1\;2\;2)\begin{pmatrix}2\\0\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$+ \frac{1}{801}\begin{pmatrix}18\\-10\\16\\-11\end{pmatrix}(18 \;\; -10 \;\; 16 \;\; -11)\begin{pmatrix}2\\0\\2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}0\\1\\2\\2\end{pmatrix} \cdot 6 + \frac{1}{801}\begin{pmatrix}18\\-10\\16\\-11\end{pmatrix} \cdot 57 = \frac{2}{3}\begin{pmatrix}0\\1\\2\\2\end{pmatrix} + \frac{57}{801}\begin{pmatrix}18\\-10\\16\\-11\end{pmatrix} = \frac{1}{89}\begin{pmatrix}114\\-4\\220\\49\end{pmatrix}$$

$$\boxed{x^* = \left(\frac{114}{89}, \frac{-4}{89}, \frac{220}{89}, \frac{49}{89}\right)^T} \Leftarrow$$

נשים לב כי כדי למצוא את ההיטל עבור $S^{\perp}$

$$y^* = (I - P \cdot P^T) \cdot y = y - P \cdot P^T \cdot y = \begin{pmatrix}2\\0\\2\\1\end{pmatrix} - \left(\frac{114}{89}, \frac{-4}{89}, \frac{220}{89}, \frac{49}{89}\right)^T = \boxed{\frac{1}{89}\begin{pmatrix}64\\4\\-42\\40\end{pmatrix}}$$

3

יהי $\mathcal{X}$ מרחב מכפלה פנימית מעל הממשיים ותהי $\|\cdot\|$ נורמה על $\mathcal{X}$. נגדיר את **הנורמה הדואלית** ל-$\|\cdot\|$ על ידי

$$\|x\|_* = \max_{\|y\|\le 1}\langle x,y\rangle$$

הוכיחו כי $\|\cdot\|_*$ היא נורמה.

① צ"ל: $\forall x\in\mathcal{X}$ $\|x\|_*\ge 0$, $\|x\|_*=0 \iff x=0$

יהי $x\in\mathcal{X}$, נסתכל על כל y אשר מקיים $\|y\|\le 1$ אם מקיים $0\le\langle x,y\rangle$

אזי $-y$ מקיים $\|-y\|\le 1$ ומתקיים $0\ge\langle x,-y\rangle$, ומכיוון שלוקח את המקסימום

הערך גדול אי שלילי: $\|x\|_* = \max_{\|y\|\le 1}\langle x,y\rangle = \max_{\|y\|\le 1}|\langle x,y\rangle| \ge 0$

עבור $x=0$ נקבל $\|0\|_* = \max_{\|y\|\le 1}\langle 0,y\rangle = 0$

נניח בשלילה כי $\|x\|_*=0$ אבל $x\neq 0$, נקבל כי

$$0=\|x\|_* = \max_{\|y\|\le 1}\langle x,y\rangle \ge \left\langle x,\frac{x}{\|x\|}\right\rangle = \frac{\langle x,x\rangle}{\|x\|}$$

$\|\cdot\|$ זו נורמה וגם $x\neq 0$ $\Leftarrow$ $0<\|x\|$ וגם $0<\langle x,x\rangle$ מהגדרה

אבל סתירה כי קיבלנו ש- $0<0$. $\Leftarrow$ $x=0$ עבור $\|x\|_*=0$

② הומוגניות. צ"ל: $\forall \alpha\in\mathbb{R}, x\in\mathcal{X}: \|\alpha x\|_* = |\alpha|\cdot\|x\|_*$

יהי $\alpha\in\mathbb{R}$, $x\in\mathcal{X}$

הגדרה של מ"פ

$$\|\alpha\cdot x\|_* = \max_{\|y\|\le 1}\langle \alpha x,y\rangle = \max_{\|y\|\le 1}|\alpha|\langle x,y\rangle = |\alpha|\max_{\|y\|\le 1}\langle x,y\rangle = |\alpha|\cdot\|x\|_*$$

③ אי שוויון המשולש. צ"ל: $\forall x,y\in\mathcal{X}: \|x+y\|_* \le \|x\|_*+\|y\|_*$

יהי $x,y\in\mathcal{X}$,

$$\|x+y\|_* = \max_{\|z\|\le 1}\langle x+y,z\rangle \overset{\text{ה}}{=} \max_{\|z\|\le 1}\left(\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle\right)$$

לינאריות של מכפלה פנימית

$$\le \max_{\|z\|\le 1}\langle x,z\rangle + \max_{\|z\|\le 1}\langle y,z\rangle = \|x\|_*+\|y\|_*$$

לכן הוכחנו כי אכן $\|\cdot\|_*$ היא נורמה.

ב3. $x\neq 0$

(ב)

$$<x,y> = \|x\|_2 < \frac{x}{\|x\|_2}, y > \leq \|x\|_2 \max_{\|w\|_2\leq 1} <y,w> =$$

$$= \|x\|_2 \|y\|_*$$

כאשר $x=0$:

$$<x,y> = 0 = \|0\| = \|x\| \|y\|_*$$

ג (3

נזכר במשפט הולדר:

יהיו $x, y \in \mathbb{R}^n$ ויהיו $p, q > 1$. כך ש-$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

אזי: $|x^T y| \leq \|x\|_p \|y\|_q$.

כעת, יהי $y \in \mathbb{R}^n$, נסתכל על בעיית האופטימיזציה הבאה: $\max_{x\in\mathbb{R}^n:\|x\|_p\leq 1} x^T y$.

ממשפט הולדר ידוע כי $|x^T y| \leq \|y\|_q$, עבור q המקיים $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. כלומר, $\|y\|_q$ הוא חסם עליון לבעיית האופטימיזציה.

הוכיחו כי הוקטור $x^* \in \mathbb{R}^n$ שעבורו כל רכיב i הוא מהצורה $x_i^* = \frac{sign(y_i)|y_i|^{q-1}}{\|y\|_q^{q-1}}$, הוא פתרון פיזיבילי לבעיה, כלומר מקיים ש $\|x^*\|_p \leq 1$, וגם מקיים: ${x^*}^T y = \|y\|_q$.

בפרט, הראו כי עבור $p=q=2$ מתקיים ש:

$$\mathrm{argmax}_{\|x\|_2\leq 1} x^T y = \frac{y}{\|y\|_2}$$

$$\mathrm{argmin}_{\|x\|_2\leq 1} x^T y = -\frac{y}{\|y\|_2}$$

נראה כי $x^* \in \mathbb{R}^n$ פתרון פיזיבלי לבעיה. מתנאי $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \Leftarrow p=\frac{q}{q-1}$

$$\|x^*\|_p = \left\| \frac{sign(y_i)|y_i|^{q-1}}{\|y\|_q^{q-1}} \right\|_p = \frac{1}{\|y\|_q^{q-1}} \left(\sum_{i=1}^n \left(|sign(y_i)| |y_i|^{q-1} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \frac{1}{\|y\|_q^{q-1}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{\frac{q-1}{q}} = \frac{1}{\|y\|_q^{q-1}} \cdot \|y\|_q^{q-1} = 1$$

$$(x^*)^T \cdot y = \frac{1}{\|y\|_q^{q-1}} \sum_{i=1}^n sign(y_i)|y_i|^{q-1} y_i = \frac{1}{\|y\|_q^{q-1}} \cdot \sum_{i=1}^n |y_i|^q = \frac{\|y\|_q^q}{\|y\|_q^{q-1}} = \|y\|_q$$

כלומר x^* מקיים את הדרישות הנאמרות לעיל.

בפרט נקבל עבור $p=q=2$ כך ש:

$$\mathrm{argmax}_{\|x\|_2\leq 1}(x^T y) = \frac{sign(y_i)|y_i|}{\|y\|_2} = \frac{y}{\|y\|_2}$$

$$\mathrm{argmin}_{\|x\|_2\leq 1}(x^T y) = -\mathrm{argmax}_{\|x\|_2\leq 1}(x^T y) = \frac{-y}{\|y\|_2}$$

ש3

ד

נוכיח כי עבור $p,q\in[1,\infty]$ כך ש- $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$:

$$\boxed{\|x\|_q = \max_{\|y\|_p\le 1} \langle x,y\rangle}$$

נקח $x\in\mathbb{R}^n$ ו- y כך ש- $\|y\|_p\le 1$.

לפי משפט הולדר: $|\langle x,y\rangle| \le \|x\|_q\|y\|_p$

$$\Rightarrow \langle x,y\rangle \le |\langle x,y\rangle| \le \|x\|_q\|y\|_p \underset{\substack{\uparrow\\ \text{הנחה}}}{\le} \|x\|_q$$

$\Leftarrow$ חסמנו את $\langle x,y\rangle$, $\|y\|_p\le 1$ מלמעלה ע"י $\|x\|_q$.

נשאר למצוא y כך שמתקיים: $\langle x,y\rangle=\|x\|_q$ ונסיים.

הוכחנו בסעיף ג שפתרון אופטימלי לבעיה $\max\limits_{\|y\|_p\le 1}\langle x,y\rangle$

זה: $y^*\in\mathbb{R}^n$ כך ש- $y_i^* := \frac{\text{sign}(x_i)|x_i|^{q-1}}{\|x\|_q^{q-1}}$, ואכן $\|y\|_p\le 1$

וגם שמתקיים: $\langle x,y^*\rangle=\|x\|_q$

$\Leftarrow$ סיימנו.

שאלה 4

תהי $P \in \mathbb{R}^{n\times m}$ מטריצה עם עמודות אורתונורמליות.

א. נניח $m < n$.
<u>הוכיחו / הפריכו</u>: השורות של P אורתונורמליות.

$$P = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ P_1 & P_2 & \cdots & P_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}, \quad \forall i \neq j \quad P_i \perp P_j \Leftrightarrow \langle P_i, P_j \rangle = 0, \quad i=j \quad \langle P_i, P_i \rangle = 1$$

זה לא נכון נראה ע"י דוגמא נגדית

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\0\\\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\0\\\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix} \right\rangle = \frac12 + \frac12 = 1, \quad \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle = 1$$

לכן ניתן לראות כי העמודות אורתונורמליות.

עבור השורות. $\left\langle \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\0\end{pmatrix} \right\rangle = 1 \Leftarrow$ השורות של P לא יכולות להיות אורתונורמליות

אבל השורה הראשונה והשלישית
ביחד הם לא אורתונורמליות.

ב. נניח $m = n$.
<u>הוכיחו / הפריכו</u>: השורות של P אורתונורמליות.

4(ב)

ש4. (ב)

$m = n \Rightarrow$ מטריצה אורתונורמלית ריבועית $\Rightarrow P^T = P^{-1}$

$$\Rightarrow PP^T = I \Rightarrow P_i^T P_j = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$ (P_i - שורה ה-i-ית של P)

$\Leftarrow$ שורות של P אורתונורמליות.

שאלה 5

מצאו פ"א, ע"ע, ו"ע, ר"א ו-ר"ג של המטריצה הבאה:

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 7 & -5 & 1\\ 6 & -6 & -2\end{pmatrix}$$

פ"א: מינור ראשון

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & 1 & -1\\ -7 & \lambda+5 & -1\\ -6 & 6 & \lambda+2\end{vmatrix}\begin{matrix}+\\-\\+\end{matrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}-7 & \lambda+5\\ -6 & 6\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\lambda-3 & 1\\ -6 & 6\end{vmatrix}+(\lambda+2)\begin{vmatrix}\lambda-3 & 1\\ -7 & \lambda+5\end{vmatrix}$$

$$=42-6\lambda-30+6\lambda-18+6+(\lambda+2)(\lambda^2+2\lambda-8)=(\lambda+2)(\lambda-2)(\lambda+4)$$

$$\Rightarrow \boxed{p(\lambda)=(\lambda+2)(\lambda-2)(\lambda+4)=-\lambda^3-4\lambda^2+4\lambda+16}$$

מכיוון שזה מטריצה 3x3 יש לה 3 ע"ע מתאימים שונים לכן לכל אחד $\boxed{\lambda_1=2,\ \lambda_2=-2,\ \lambda_3=-4}$ יש $\boxed{\text{ר"א}=\text{ר"ג}=1}$

כעת נמצא וקטורים עצמיים לכל ע"ע:

עבור $\lambda=2$:

$$(A-2I)v=0 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 0\\ 7 & -7 & 1 & 0\\ 6 & -6 & -4 & 0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -6 & 0\\ 0 & 0 & -10 & 0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow v_3=0,\ v_1=v_2=t \Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}t$$

ו"ע

עבור $\lambda=-2$:

$$(A+2I)v=0\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}5 & -1 & 1 & 0\\ 7 & -3 & 1 & 0\\ 6 & -6 & 0 & 0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 4 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\end{array}\right)\Rightarrow \begin{matrix}4v_2=-v_3\\ v_1=v_2\end{matrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}t\\t\\-4t\end{pmatrix}=t\boxed{\begin{pmatrix}1\\1\\-4\end{pmatrix}}$$

ו"ע

$$:\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 7 & -5 & 1\\ 6 & -6 & -2\end{pmatrix}$$

עבור $\lambda=-4$:

$$(A+4I)v=0\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}7 & -1 & 1 & 0\\ 7 & -1 & 1 & 0\\ 6 & -6 & 2 & 0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}7 & -1 & 1 & 0\\ 3 & -3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{R_1-2R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 5 & -1 & 0\\ 3 & -3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2-3R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 5 & -1 & 0\\ 0 & -18 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 5 & -1 & 0\\ 0 & -9 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow v_2=\frac{2}{9}v_3,\ v_1=-\frac{10}{9}v_3+v_3=-\frac{1}{9}v_3$$

$$\Rightarrow v_3=9t,\ v_2=2t,\ v_1=-t\Rightarrow \boxed{(-1\,2\,9)^Tt}$$

ו"ע הם: $\boxed{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\\9\end{pmatrix}}$

ו"ע מנורמלים

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{18}}\begin{pmatrix}1\\1\\-4\end{pmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{86}}\begin{pmatrix}-1\\2\\9\end{pmatrix}}$$

שאלה 6

מצאו פירוק QR של $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

נבצע תהליך של גרם-שמידט על העמודות של A:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{z_1 = u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \quad z_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, z_1 \rangle}{\langle z_1, z_1 \rangle} z_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{-6}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.5 \\ 2.5 \\ 2.5 \\ -2.5 \end{pmatrix}$$

$$z_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \langle z_1, z_1 \rangle = 4, \quad \boxed{z_2 = \begin{pmatrix} -2.5 \\ 2.5 \\ 2.5 \\ -2.5 \end{pmatrix}}, \quad \langle z_2, z_2 \rangle = \frac{25}{4} + \frac{25}{4} + \frac{25}{4} + \frac{25}{4} = 25$$

$$z_3 = u_3 - \sum_{j=1}^{2} \frac{\langle u_3, z_j \rangle}{\langle z_j, z_j \rangle} z_j = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2.5 \\ 2.5 \\ 2.5 \\ -2.5 \end{pmatrix} \right\rangle}{25} \begin{pmatrix} -2.5 \\ 2.5 \\ 2.5 \\ -2.5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{4 - \cancel{2} + \cancel{2}}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{-10 - \cancel{5} + \cancel{5} - 0}{25} \begin{pmatrix} -2.5 \\ 2.5 \\ 2.5 \\ -2.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

$$\|z_1\| = \sqrt{4} = 2, \quad \|z_2\| = 5, \quad \|z_3\| = 4$$

$$w_1 = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\|z_1\|} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \frac{\begin{pmatrix} -2.5 \\ 2.5 \\ 2.5 \\ -2.5 \end{pmatrix}}{\|z_2\|} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}}{\|z_3\|} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.5 \\ 0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow W = \left\{ \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.5 \\ 0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \boxed{Q = (w_1, w_2, w_3) \quad Q = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 \end{pmatrix}}$$

$$\measuredangle \langle u, w_k \rangle$$

$\langle u_2, w_1\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}-1\\4\\4\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0.5\\0.5\\0.5\\0.5\end{pmatrix}\right\rangle = 4-1=3$, $\langle u_3, w_1\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}4\\-1\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0.5\\0.5\\0.5\\0.5\end{pmatrix}\right\rangle = 2$

$\langle u_3, w_2\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}4\\-1\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0.5\\0.5\\-0.5\\-0.5\end{pmatrix}\right\rangle = -2$

$$\boxed{R = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$$

X מעל $\mathbb{R}$

(1) (ד

אם $\|\cdot\|_A$ ו- $\|\cdot\|_B$ נורמות, אז $\|\cdot\|_A + \|\cdot\|_B$ נורמה.

נסמן $\|\cdot\|_* = \|\cdot\|_A + \|\cdot\|_B$,

יהי $\alpha\in\mathbb{R}, x\in X$

$\|\alpha\cdot x\|_* = \|\alpha\cdot x\|_A + \|\alpha\cdot x\|_B \overset{\text{כי } A,B \text{ נורמות}}{=} |\alpha|\,\|x\|_A + |\alpha|\,\|x\|_B = |\alpha|\left(\|x\|_A + \|x\|_B\right)$

$= |\alpha|\,\|x\|_* \Rightarrow$ מתקיים הומוגניות

נבדוק אי שוויון משולש: יהי $x,y\in X$

$\|x+y\|_* = \|x+y\|_A + \|x+y\|_B \underset{\text{אי שוויון משולש של } A,B}{\leq} \|x\|_A + \|y\|_A + \|x\|_B + \|y\|_B = \|x\|_A + \|x\|_B + \|y\|_A + \|y\|_B$

$= \|x\|_* + \|y\|_* \Rightarrow$ מתקיים אי שוויון המשולש

נבדוק חיוביות:

$\forall x\in X: \|x\|_* = \|x\|_A + \|x\|_B \underset{\text{חיוביות של נורמות } A,B}{\geq} 0+0 = 0$

אם $x=0$ אז $\|x\|_* = \|0\|_* = \|0\|_A + \|0\|_B \underset{\text{חיוביות של הנורמות } A,B}{=} 0+0$

$0 = \|x\|_* = \underbrace{\|x\|_A}_{\geq 0} + \underbrace{\|x\|_B}_{\geq 0} \Rightarrow x = 0$

לא ייתכן כי שניהם [illegible] של השני

לכן $\|\cdot\|_*$ משמש כי מתקיימים 3 התנאים לנורמה ונסיק
היא נורמה ■

(207

א7.

2. הטענה נכונה:

① positivity:

$C\|x\| \geq 0$. $C\|x\|=0 \iff \|x\|=0 \iff x=0$

(א) $\|x\|$ - נורמה
(ב) $C>0$

$C>0$

$\|x\|$ - נורמה

② triangle inequality:

$\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$ ← $\|\cdot\|$ - נורמה

נכפיל שני צדדים ב-$C>0$: $C\|x+y\| \leq C\|x\|+C\|y\|$

③ homogenity:

$\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ ← $\|\cdot\|$ - נורמה

$\Rightarrow C\|\lambda x\| = C|\lambda|\,\|x\|$

7. (3) אם $\|\cdot\|_A$ ו- $\|\cdot\|_B$ נורמות, אז $\sqrt{\|\cdot\|_A\cdot\|\cdot\|_B}$ נורמה.

נסמן $\|\circ\|_* = \sqrt{\|\cdot\|_A \cdot \|\cdot\|_B}$

נראה שזה לא נורמה עבור $A=B=3$ ועבור $x=y=1$

נבדוק את הנכונות עבור אי שיוויון המשולש:

אי שיוויון משולש צריך לקיים את הבא: $\|1+1\|_* \le \|1\|_* + \|1\|_*$

$$\|1+1\|_* = \sqrt{\|2\|_3 \cdot \|2\|_3} = 8$$

$$\|1\|_* + \|1\|_* = \sqrt{\|1\|_3\|1\|_3} + \sqrt{\|1\|_3\|1\|_3} = 2$$

אבל $8 \le 2$ זה לא נכון

ולכן לא מתקיים התכונה של אי שיוויון משולש

ומכאן $\|\circ\|_*$ היא לא נורמה.

(4.7

4. הטענה נכונה

① ~~positivity~~ positivity

כי מכפלות פנימיות - $\langle x,x\rangle_A \geq 0$, $\langle x,x\rangle_B \geq 0$

$$\Downarrow$$

$$\langle x,x\rangle_A + \langle x,x\rangle_B \geq 0$$

$$\langle x,x\rangle_A + \langle x,x\rangle_B = 0 \iff \langle x,x\rangle_A = 0,\ \langle x,x\rangle_B = 0$$

$$\iff x = 0$$

② ~~triangle inequality~~ additivity

$$\langle x+y,z\rangle_A + \langle x+y,z\rangle_B = \langle x,z\rangle_A + \langle y,z\rangle_A + \langle x,z\rangle_B + \langle y,z\rangle_B =$$

$$= (\langle x,z\rangle_A + \langle x,z\rangle_B) + (\langle y,z\rangle_A + \langle y,z\rangle_B) \Rightarrow$$ נכונה מש"ל

③ homogenity.

$$\langle \alpha x,z\rangle_A + \langle \alpha x,z\rangle_B =$$

$$= \alpha\langle x,z\rangle_A + \alpha\langle x,z\rangle_B = \alpha(\langle x,z\rangle_A + \langle x,z\rangle_B)$$

④ symmetry.

$$\langle x,y\rangle_A + \langle x,y\rangle_B = \langle y,x\rangle_A + \langle y,x\rangle_B$$

שאלה 8

יהיו $S_1, \dots, S_k$ חלוקה של האינדקסים $1, \dots, n$.

כלומר לכל $i \neq j$, $S_i \cap S_j = \emptyset$ וגם $S_1 \cup \dots \cup S_k = \{1, \dots, n\}$.

יהיו נורמות $\|\cdot\|_{S_i}: \mathbb{R}^{|S_i|} \to \mathbb{R}_+$, ונגדיר:

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{k} \|x_{(i)}\|_{S_i}$$

כאשר $x_{(i)}$ הוא וקטור בגודל $|S_i|$, וערכיו הם הכניסות ב-x המתאימות לאינדקסים S_i.

הוכיחו ש- $\|x\|$ נורמה.

(1) נראה שמתקיים חיוביות:

כי כל נורמה S_i מחזירה ערך שגדול שווה מ-0

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{k} \|x_{(i)}\|_{S_i} \geq 0$$

$$\|0\| = \sum_{i=1}^{k} \|0\|_{S_i} = 0 + 0 + \dots + 0 = 0 \quad , \quad 0 = \|x\| = \sum_{i=1}^{k} \|x_{(i)}\|_{S_i} \Rightarrow x = 0$$

כל נורמה עפ"י הגדרה עבור וקטור 0 מחזירה 0

כי מתקיים חיוביות עבור כל נורמה

ולכן רק וקטור ה-0 יכול לקיים $\|x\|=0$.

לכן מתקיים חיוביות.

(2) יהי $x, y \in X$ נראה כי מתקיים אי שוויון המשולש

$$\|x+y\| = \sum_{i=1}^{k} \|x_{(i)} + y_{(i)}\|_{S_i} \le \sum_{i=1}^{k} \|x_{(i)}\|_{S_i} + \|y_{(i)}\|_{S_i} = \sum_{i=1}^{k} \|x_{(i)}\|_{S_i} + \sum_{i=1}^{k} \|y_{(i)}\|_{S_i}$$

אי שוויון משולש של S_i

$$= \|x\| + \|y\| \Rightarrow$$ מתקיים אש"מ

(3) נראה הומוגניות כלומר $\forall \alpha \in \mathbb{R}, x \in X$

$$\|\alpha \cdot x\| = \sum_{i=1}^{k} \|\alpha \cdot x_{(i)}\|_{S_i} = \sum_{i=1}^{k} |\alpha| \|x_{(i)}\|_{S_i} = |\alpha| \sum_{i=1}^{k} \|x_{(i)}\|_{S_i} = |\alpha| \|x\| \blacksquare$$

$\Leftarrow$ מתקיים הומוגניות.

לכן מתקיים שלושת התכונות ובפרט $\|\cdot\|$

נורמה כנדרש $\blacksquare$