HW05:

1)

לאורך כל השאלה נניח כי נתונים מטריצה $A \in \mathbb{S}^n$ ו-וקטור $v \in \mathbb{R}^n$.

א. הוכיחו: $\lambda_1(A + vv^\top) \geq \lambda_1(A)$.

⊛ **Lemma**
Let $\mathbf{A} \in \mathbb{S}^n$ *and let* $\mathbf{B} \in \mathbb{S}^n$. *Then*

$$\mathbf{B} \succeq 0 \implies \lambda_k(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \geq \lambda_k(\mathbf{A}), \ k = 1, \ldots, n.$$

מוכיח כי $V\cdot V^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ והיא סימטרית מכיוון שזה המכפלה של $V\cdot V^T$

$$\forall x\in\mathbb{R}^n \quad x^T\cdot V\cdot V^T\cdot x = (x^T\cdot v)\cdot(v^T\cdot x) = \left((x_1 \ldots x_n)\begin{pmatrix} v_1\\ v_2\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}\right)\left((v_1\ldots v_n)\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 v_1\\ x_2 v_2\\ \vdots\\ x_n v_n\end{pmatrix}(x_1v_1 \ x_2v_2 \ldots x_nv_n) = x_1^2v_1^2 + x_2^2v_2^2 + \ldots + x_n^2\cdot v_n^2 \geq 0$$

כי מס' שלילי/חיובי בריבוע מחזיר מספר חיובי לכן סכום של כאלו חיובי

$$\Rightarrow v\cdot v^t \succeq 0$$

מכיוון ש- $V\cdot V^t$ מטריצה positive semidefinite

אז נשתמש בלמה מלמעלה ⊛

ונקבל

$$\lambda_1(A + v\cdot v^T) \geq \lambda_1(A)$$

1. ב)

נ1.

(א)

$$\lambda_1(A+vv^T) = \max_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ \|x\|_2=1}} x^TAx + x^Tvv^Tx \geq$$

$$\geq \underbrace{u_1^TAu_1}_{\lambda_1(A)} + \underbrace{u_1^Tvv^Tu_1}_{>0} > \lambda_1(A)$$

$(u_1^Tv)\neq 0$

$\Rightarrow (u_1^Tv)^2 > 0$

Corollary (Weyl's inequality)

Let $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{S}^n$. Then, for each $k = 1, \dots, n$, we have

$$\lambda_k(\mathbf{A}) + \lambda_{\min}(\mathbf{B}) \le \lambda_k(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \le \lambda_k(\mathbf{A}) + \lambda_{\max}(\mathbf{B}).$$

ג) ג. הוכיחו: $\lambda_1(A) \geq \lambda_2(A + vv^\top)$.

רמז: ניתן להיעזר במשפט ה-minimax:

$$\lambda_k(A) = \min_{V:\dim(V)=n-k+1} \; \max_{u\in V, \|u\|_2=1} u^\top A u.$$

$$\lambda_2(A+v\cdot v^T) \underset{\text{Weyl}}{\le} \lambda_{max}(A) + \lambda_2(v\cdot v^T) = \lambda_1(\cancel{A}) + \underbrace{\lambda_2(v\cdot v^T)}_{=0}$$

(גוונסו פפסעדלי כי $v\cdot v^T \succeq 0$ וסימטרי)

(**)

$$\le \lambda_2(A) \underset{\lambda_1 \ge \lambda_2 \text{ כי}}{\le} \lambda_1(A)$$

(**)

$$v\cdot v^t = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 v & v_2 v & \cdots & v_n v \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Rank}(v\cdot v^T) \le 1$ ולכן כל העמודות תלויות ליניארית

אם v אז $\lambda_{max}(v\cdot v^T) = 0$

$\lambda_{min}(v\cdot v^T) = 0 \Leftarrow Tr(v\cdot v^T) = |v|^2$ אחרת v

$\lambda_{max}(v\cdot v^T) = \|v\|^2$

אז $\lambda_2 = \lambda_{min} = 0$

(2.1

$$(u_1^T v) \neq 0 \Rightarrow (u_1^T v)^2 > 0$$

(3)

$$\lambda_k(A) = \min_{V:\dim(V)=n-k+1} \ \max_{\substack{u\in V \\ \|u\|_2=1}} u^T A u$$

$\forall V: \dim(V) = n-k$

$$\lambda_{k+1}(A+vv^T) \le \max_{\substack{u\in V \\ \|u\|_2=1}} u^T(A+vv^T)u = \max_{\substack{u\in V \\ \|u\|_2=1}} \left(u^TAu + (u^Tv)^2\right)$$

$$\le \max_{\substack{u\in V \\ \|u\|_2=1}} u^TAu + \max_{\substack{u\in V \\ \|u\|_2=1}} (u^Tv)^2 \le \max_{\substack{u\in V \\ \|u\|_2=1}} u^TAu$$

$k<n$. נפרט קצת יותר מה קיבלנו.

קיבלנו שעבור כל V כך ש- $\dim(V) = n-k$ שנבחר מתקיים:

$$\lambda_{k+1}(A+vv^T) \le \max_{\substack{u\in V \\ \|u\|_2=1}} u^TAu$$

כל V ממימד $n-k$ מוכל בW שהמימד שלו $n-k+1$, לכן:

$$\lambda_{k+1}(A+vv^T) \le \max_{\substack{u\in V \\ \|u\|_2=1}} (u^TAu) \le \max_{\substack{u\in W \\ \|u\|_2=1}} (u^TAu) \le \min_{W:\dim(W)=n-k+1} \ \max_{\substack{u\in W \\ \|u\|_2=1}} (u^TAu) = \lambda_k(A)$$

$$\lambda_k(A+vv^T) \geq \lambda_k(A) + \underbrace{\lambda_{\min}(vv^T)}_{\substack{\geq 0 \\ (vv^T \geq 0)}} \geq \lambda_k(A)$$

$$\Rightarrow \lambda_k(A+vv^T) \geq \lambda_k(A) \geq \lambda_{k+1}(A+vv^T)$$

שאלה 2

תהי מטריצה $A \in \mathbb{S}_+^n$, עבורה מתקיים $\lambda_{n-k} > \lambda_{n-k+1}$. בנוסף נניח כי $k \ll n$.
נסמן את המטריצה V, הנתונה מהפירוק הספקטרלי של $A = V\Lambda V^T$ באופן הבא:

$$V = (V_1, V_2),\quad V_1 \in \mathbb{R}^{n\,x\,k}, V_2 \in \mathbb{R}^{n\,x\,(n-k)}$$

א. הציעו אלגוריתם למציאת קירוב למטריצה $V_2V_2^T$ המתבסס על העקבה, וחשבו את הסיבוכיות.

נרצה לחשב את k הוקטורים המינ'ים של V. כדי למצוא אותן נ.

ניקח $\hat{A} = Tr(A)\cdot I - A$ שמקיימת כי הע' חיוביים, סדר ע"ע

הפוך מהסדר של A, $\lambda_i(\hat{A}) = Tr(A) - \lambda_{n-i+1}(A) \geq 0$

ויש אותם ו"ע כמו A.

(*) לכן הע"ע המוביל של $\hat{A}$ יהיה $\lambda_1(\hat{A}) = Tr(A) - \lambda_n(A)$ ו-ו"ע המתאים

ו"ע. נבצע על מטריצה זו Power Iterations

עכשיו נרצה להמשיך בתהליך ולמצוא את $\lambda_{n-k},\dots,\lambda_{n-1}$

(**) לכן נחשב $\hat{A}^{(1)} = \hat{A} - \lambda_n \cdot v_n v_n^T$

ונחזור על (*) עם $\hat{A}^{(1)}$ עד $\hat{A}^{(n-k)}$

כדי לקבל ו"ע של $V_2 = (v_{n-k} \cdots v_n)$

(*) ניקח $O(N+n)$ כי חישוב trace זה $O(n)$

הכפלה של $\hat{A}$ בוקטור דורש $O(n)$ כי נעביר $Tr(A)\cdot I$

ו- $O(N)$ כדי להכפיל את הוקטור ב- A.

חיסור שני הרכיבים דורש $O(n)$

(**) ניתוח סיבוכיות של חישוב $\hat{A}^{(i)}$

ההכפלה של $V_n \cdot V_n^T$ לוקח $O(n^2)$ והכפלה פי λ_n

לוקח גם $O(n)$ זמן ולחסר $\hat{A} - \lambda_n \cdot V_n \cdot V_n^T$

לוקח גם $O(n^2)$

נחזור על (**) ו-(*) k פעמים כדי למצוא וקטורים עצמיים

שלה $V_{n-k}, \dots, V_{n-1}, V_n$.

לכן לוקח $O(k(n+n+n^2))$ סה"כ.

2.ב

2מ.

(ב)

נשתמש בשיטה שראינו בתרגול.

① נמצא $\lambda_1(A)$ (Power Iterations)

② נסמן $\hat{A} = \lambda_1(A) I - A$, נקבל $\hat{\lambda}_i(\hat{A}) = \lambda_1(A) - \lambda_{n-i+1}(A)$
$\hat{v}_i(\hat{A}) = v_{n-i+1}(A)$

$$\hat{A} = (\hat{V}_1, \hat{V}_2)\hat{\Lambda}(\hat{V}_1, \hat{V}_2)^T, \quad \hat{V}_1 = V_2, \hat{V}_2 = V_1$$

$$\lambda_{n-k} > \lambda_{n-k+1} \Rightarrow \lambda_1 - \lambda_{n-k} < \lambda_1 - \lambda_{n-k+1} \Rightarrow \hat{\lambda}_{k+1} < \hat{\lambda}_k$$

לכן קיבלנו מטריצה ש-k וקטורים עצמיים $\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_k$ שלה - זה בדיוק

k וקטורים עצמיים אחרונים $v_{n-k+1}, \dots, v_n$ של A.

③ נריץ QR Iterations כדי לקבל את מטריצה Q_t עבורה:

$$Q_t Q_t^T \approx \hat{V}_1 \hat{V}_1^T = V_2 V_2^T$$

הראו כי $\|QQ^T - V_1V_1^T\|_F^2 = 2(k - \|V_1^TQ\|_F^2)$. (1 (3

$$\Rightarrow \|Q\cdot Q^T - V_1\cdot V_1^T\|_F^2 = \|QQ^T\|_F^2 + \|V_1V_1^T\|_F^2 - 2\langle QQ^T, V_1V_1^T\rangle$$

$$= \|(QQ^T)^T\|_F^2 + \|(V_1\cdot V_1^T)^T\|_F^2 - 2\cdot Tr((QQ^T)^T(V_1V_1^T))$$

$$= \|\underbrace{Q^T\cdot Q}_{I_k}\|_F^2 + \|\underbrace{V_1^TV_1}_{I_k}\|_F^2 - 2Tr(QQ^TV_1V_1^T) = 2k - 2Tr((V_1^TQ)^T(V_1^TQ))$$

$$= 2(k - \|V_1^T\cdot Q\|_F^2) \blacksquare$$

(2

$$\|V^TQ\|_F^2 = \left\|\begin{pmatrix}V_1^T\\V_2^T\end{pmatrix}Q\right\|_F^2 = \left\|\begin{pmatrix}V_1^TQ\\V_2^TQ\end{pmatrix}\right\|_F^2 =$$

$$= Tr\left(\begin{pmatrix}V_1^TQ\\V_2^TQ\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}V_1^TQ\\V_2^TQ\end{pmatrix}\right) = Tr\left((Q^TV_1, Q^TV_2)\begin{pmatrix}V_1^TQ\\V_2^TQ\end{pmatrix}\right)$$

$$= Tr(Q^TV_1V_1^TQ + Q^TV_2V_2^TQ) =$$

$$= Tr((V_1^TQ)^TV_1^TQ) + Tr((V_2^TQ)^TV_2^TQ) =$$

$$= \|V_1^TQ\|_F^2 + \|V_2^TQ\|_F^2$$

(3

$$\|V_2^TQ\|_F^2 \underset{\|A\|_2^2 = Tr(A^TA)}{=} Tr((V_2^TQ)^T(V_2^TQ)) \overset{Tr(A)=\sum_{j=1}^{r(A)}\lambda_i(A)}{=} \sum_{j=1}^{k}\lambda_i((V_2^TQ)(V_2^TQ))$$

$$\underset{\lambda_i(A^TA)=\sigma_i^2(A)}{=} \sum_{j=1}^{k}\sigma_i^2(V_2^TQ) \le \sum_{j=1}^{k}\sigma_{max}^2(V_2^TQ) = k\cdot\sigma_{max}^2(V_2Q) = k\cdot\lambda_{max}((V_2^TQ)^T(V_2^TQ))$$

$$\lambda_i(A^TA) = \sigma_i^2(A)$$

$$\underset{\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^TA)}}{=} k\cdot\|V_2^TQ\|_2^2$$

(4) $A\in\mathbb{R}^{k\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{n\times m}$

$$\|B^T\|_2^2=\max\frac{\|Bx\|_2}{\|x\|_2}\Rightarrow \|B^T\|_2^2\|x\|_2^2\ge\|B^Tx\|_2^2$$

$$\|AB\|_F^2=\sum_{i=1}^{k}\|A_i^TB\|_2^2=\sum_{i=1}^{k}\|B^TA_i\|_2^2\le\sum_{i=1}^{k}\|B^T\|_2^2\|A_i\|_2^2=$$

$$=\|B\|_2^2\sum_{i=1}^{k}\|A_i\|_2^2=\|B\|_2^2\|A\|_F^2$$

(5 נרצה להשתמש בהוכחת ההתכנסות של "QR-Iterations" על מנת לחסום את $\|V_2^TQ\|_2^2$.

$$\|Q\cdot Q^T\cdot X-V_1\cdot V_1^TX\|_F^2=\|(QQ^T-V_1V_1^T)X\|_F^2=Tr((QQ^T-V_1V_1^T)^TX)$$

$$=\|X(QQ^T-V_1V_1^T)\|_F^2\le\|QQ^T-V_1V_1^T\|\cdot\|X\|_2^2\overset{(1)}{=}2(k-\|V_1^TQ\|_F^2)\|X\|_2^2$$

מתכונות נורמת פרוביניוס

אי שוויון קושי

$$\overset{(2)}{=}2(k-(k-\|V_2^TQ\|_F^2))\|X\|_2^2\overset{(3)}{\le}2k\|V_2^TQ\|_2^2\|X\|_2^2$$

לכן $\Leftarrow$ אם, $2k\|V_2^TQ\|_2^2\|X\|_2^2\le\varepsilon$ $\Leftarrow$ $\|QQ^TX-V_1V_1^TX\|_F^2\le\varepsilon$.

עכשיו, כי מתקיים $\|V_2^TQ\|_2^2\le\frac{\varepsilon}{2k\cdot\|X\|_2^2}$

נוכל לסיים את ההוכחה.

נסמן $\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{2k\|X\|_2^2}$.

ונשתמש ב- QR-Iterations.

$$t\ge\frac{\lambda_k(X\cdot X^T)}{\lambda_k(XX^T)-\lambda_{k+1}(XX^T)}\log\frac{1}{\sigma_{min}(V_1Q_0)\varepsilon'}-1$$

$$=\frac{\lambda_k(XX^T)}{\lambda_k(XX^T)-\lambda_{k+1}(XX^T)}\log\frac{2k\|X\|_2^2}{\sigma_{min}(V_1Q_0)\varepsilon}-1$$

שאלה 4

תהי $A \in \mathbb{S}^n$ ונניח כי $\lambda_1(A) > \lambda_2(A) > \ldots\ldots > \lambda_n(A) > 0$,

ויהיו p, q שלמים חיוביים. נסתכל על האלגוריתם האיטרטיבי

הבא:

$$\forall t \geq 0: \quad y_t \leftarrow \frac{A^p \cdot x_t}{\left\|A^p \cdot x_t\right\|_2}$$

$$x_{t+1} \leftarrow \frac{A^{-q} \cdot y_t}{\left\|A^{-q} \cdot y_t\right\|_2}$$

הניחו כי x_0 הוא וקטור יחידה הנבחר באקראי.

א) לכל ערך אפשרי של p, q, כתבו לאיזה וקטור הסדרה $\{x_t\}_{t\geq 0}$ המתקבלת על ידי האלגוריתם הנ"ל מתכנסת.

$$x_{t+1} = \frac{A^{-q} \cdot y_t}{\|A^{-q} \cdot y_t\|_2} = \frac{\dfrac{A^{-q} \cdot A^p \cdot x_t}{\cancel{\|A^p \cdot x_t\|_2}}}{\left\|A^{-q} \cdot \dfrac{A^p \cdot x_t}{\cancel{\|A^p \cdot x_t\|_2}}\right\|_2} \overset{*}{=} \frac{A^{p-q} \cdot x_t}{\|A^{p-q} \cdot x^t\|_2}$$

היסקתי בגל האינדוקציה על x_0

$$= \ldots = \frac{A^{(t+1)(p-q)} \cdot x_0}{\|A^{(t+1)(p-q)} x_0\|_2} \Rightarrow x_t = \frac{A^{t(p-q)} \cdot x_0}{\|A^{t(p-q)} x_0\|_2}$$

נחלק למקרים:

- עבור $p=q$: כי $A^{t\cdot 0} = I$ $x_t \to \frac{x_0}{\|x_0\|_2}$
- עבור $p>q$: שמתכנס לו"ע של ע"ע הג' $x_t \to u_1$
- עבור $p<q$: ההפוך מ-הקודם מתכנס ל-u_n של ע"ע הק'.

מ4.

(ב)

4) ב)

כמו שראינו בסעיף (א), סדרה $\{x_t\}_{t\geq 0}$ מתכנסת לו"ע המתאים לע"ע של A^{p-q} הכי גדול.

במקרה בו החזקה שלילית מתכנס ל-u_n, חיובית - u_1
ואם $p=q$: בכל איטרציה t נקבל $x_t = x_0$

כפי שראינו כדי להגיע ל-$(x_{t_\varepsilon}^T x^*) \leq 1-\varepsilon$, אנו צריכים:

$p=q$: $$x_{t_\varepsilon}^T x_0 = x_0^T x_0 = 1 \geq 1-\varepsilon$$

$$t \geq 0 \quad \Leftarrow$$

לפי מה שראינו בהרצאה ובתרגול:

$p \neq q$: $$t \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda_1(A^{p-q})}{\lambda_1(A^{p-q}) - \lambda_2(A^{p-q})} \log\left(\frac{1}{(\tilde{u}_1^T x_0)^2 \varepsilon}\right)$$

$p>q$: $$\lambda_i(A^{p-q}) = \lambda_i^{p-q}(A) = \lambda_i^{p-q}, \quad \tilde{u}_1 = u_1$$

$$\Rightarrow t \geq \frac{1}{2} \frac{\lambda_1^{p-q}}{\lambda_1^{p-q} - \lambda_2^{p-q}} \log\left(\frac{1}{(u_1^T x_0)^2 \varepsilon}\right)$$

$p<q$: $$\lambda_i(A^{p-q}) = \lambda_n^{p-q}(A) = \lambda_n^{p-q}$$

$$\Rightarrow t \geq \frac{1}{2} \frac{\lambda_n^{p-q}}{\lambda_{n-1}^{p-q} - \lambda_n^{p-q}} \log\left(\frac{1}{(u_n^T x_0)^2 \varepsilon}\right)$$

ה)

כ"י נתון

$U^T \cdot V = I$

א) $\|U^T\cdot V_i\| = \sqrt{\lambda_{max}(U\cdot V_i^T V_i\cdot U^T)} = \sqrt{\lambda_{max}(U\cdot U^T)} \underset{U \text{ אורתונורמלי}}{=} \sqrt{\lambda_{max}(I)}$

$=\sqrt{1} = 1$ ■

ב. נכון לכל $i,j\in[n]$ כאשר $i\neq j$:

$(U^T V_i)^T (U^T\cdot V_j) = v_i^T\cdot \underbrace{U\cdot U^T}_{I}\cdot v_j = V_i^T\cdot V_j \underset{\text{אורתונורמלי ולכן } i\neq j}{=} 0$

כי אורתונורמלי

ב)

נ.ל.

ב

נסמן $\mathbb{R}^{n\times n} \ni V = (v_1 \cdots v_n)$

$U^TAU = (U^TV)\Lambda(V^TU)$

$U^T \underbrace{VV^T}_{I_n} U = U^T I_n U = I_k$

ולכן מצאנו פירוק ספקטרלי, המטריצה U^TV אורתונורמלית, ו"ע שבאלכסון של A שהם אותם ע"ע של ג

ג) הוכיחו כי אם w הוא ו"ע של $U^\top AU$, אזי $v = Uw$ הוא ו"ע של A עם אותו ע"ע.

$S = U^TA\cdot U$

הדרכה: הראו כי $AUw = UU^\top AUw$
(או באופן כללי יותר: $AU = UU^\top AU$)

$U^T\cdot A\cdot U\cdot w \underset{\text{ו"ע של } U^T\cdot A\cdot U}{=} \lambda_1\cdot w \Rightarrow \overbrace{U\cdot U^T}^{I}\cdot A\cdot U\cdot w = \lambda_1\cdot V \Rightarrow A\cdot V = \lambda_1\cdot V$

ולכן V ו"ע של A ■

ב)

(3)

(1) $\underset{k\times n}{U^T}\underset{n\times n}{A}\underset{n\times k}{U} \; - \; O(n^2k)$

(2) חישוב ע"ע וו"ע של U^TAU – $O(k^3)$

(3) לכל ו"ע w שמצאנו, נקבל ו"ע של A ע"י

$v = Uw \; - \; k \cdot O(nk) = O(nk^2)$

(4) ע"ע יהיו אותו דבר לפי סעיף קודם

$\Rightarrow O(n^2k) + O(k^3) + O(nk^2) = O(n^2k)$

ה) לצורך סעיף זה נניח כי A מוגדרת אי-שלילית. נניח כעת כי המטריצה U אינה נתונה וכי אנו מעוניינים באלגוריתם איטרטיבי המקרב את k הע״ע המובילים של המטריצה A וו״ע המתאימים להם (כלומר, ככל שניתן לאלגוריתם לרוץ יותר איטרציות, הע״ע שנקבל והו״ע יהיו קרובים יותר לאלו של A).
תארו אלגוריתם כזה אשר כל איטרציה שלו ניתנת לחישוב בזמן $O(n^2k)$.

$A \succeq 0$.

נשתמש באלגוריתם QR-Iterations. על מנת למצוא את U המתאימה.

בפרט נשתמש באלגוריתם שתיארנו בסעיף ד. ובפרט נשתמש בפיבפיות כי QR רץ ב- $O(n^2k)$ לצעדים.

ו)

(1)

$A \leq I \Rightarrow I - A \succeq 0$

זה אומר שכל ע"ע קטנים או שווים מ- 1, לכן

נגדיר מטריצה $\hat{A} = I - A$, נפעיל עליה

QR Iter., הובטח לנו $\lambda_i(\hat{A}) = 1 - \lambda_{n-i+1}(A) - e$

ולכן אם נמצא k ע"ע וו"ע הראשונים של $\hat{A}$ הם יהיו

מתאימים ל-k ע"ע וו"ע האחרונים של A.

$$\lambda_{\max} = \max_{\mathbf{x}:\|\mathbf{x}\|_2=1} \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x}$$

6) א) צ"ל: $\lambda_1\left(A^{-\frac{1}{2}}vv^\top A^{-\frac{1}{2}}\right) = v^\top A^{-1}v$

נסמן $S = A^{-\frac12}\cdot v\cdot v^T\cdot A^{-\frac12}$

כי זהו מספר ממשי

$$\lambda_1(A^{-\frac12}\cdot v\cdot v^T\cdot A^{-\frac12}) = tr(A^{-\frac12}\cdot v\cdot v^t\cdot A^{-\frac12}) = tr(v^T A^{-1} v) = v^T\cdot A^{-1}\cdot v$$

וליניאריות ציקליות ביחד של trace

מכיוון ש- V הוא וקטור יחידה אזי המטריצה ונקבל S שהוא תוצר של עמודה בשורה ולכן $Rank(S)=1$ ובפרט לכל ע"ע חוץ מ- אחד הם שווים ל- 0. לכן נתפוס ל- trace

$\Leftarrow$ $\lambda_1(A^{-\frac12}\cdot v\cdot v^T\cdot A^{-\frac12}) = v^T\cdot A^{-1}\cdot v$

6ב)

ב)

ידוע כי $\lambda_i(I-B) = 1-\lambda_{n-i+1}(B)$

$$\Rightarrow \lambda_n(I-\lambda A^{-\frac12}vv^TA^{-\frac12}) = 1-\lambda_1(\lambda A^{-\frac12}vv^TA^{-\frac12}) =$$

$$= 1-\lambda\cdot\lambda_1(A^{-\frac12}vv^TA^{-\frac12}) = 1-\lambda v^TA^{-1}v$$

ג)

תהי B מט' $n\times n$ סמטרית. הוכיחו כי מתקיים:

$A^{1/2}BA^{1/2} \succ 0 \Leftrightarrow B \succ 0$

$\Leftarrow$: נניח כי $B\succ 0$, נבחר $x\in\mathbb{R}^n$ כלשהו, עבור $x^T\cdot A^{\frac12} B^{\frac12}\cdot A^{\frac12}\cdot x$

נסמן $y=A^{\frac12}\cdot x$ ולכן נקבל $x^T\cdot A^{\frac12} B^{\frac12}\cdot A^{\frac12}\cdot x = y^T\cdot B^{\frac12}\cdot y$

ומכיוון ש- $B\succ 0$ לכל $y\in\mathbb{R}^n$ $\Leftarrow$ $y^T\cdot B^{\frac12}\cdot y>0$ $\Leftarrow$ $A^{\frac12}\cdot B\cdot A^{\frac12}\succ 0$

שמצינים הנדרש

$\Rightarrow$: נניח כי $A^{\frac12}\cdot B\cdot A^{\frac12}\succ 0$, לכן $\forall x\in\mathbb{R}^n$ $x^T\cdot A^{\frac12}\cdot B\cdot A^{\frac12}\cdot x>0$

בפרט עבור $y=A^{\frac12}\cdot x$ נקבל $y^T\cdot B\cdot y>0$ $\Leftarrow$ $B\succ 0$ כי לכל וקטור

שלשים נכון למעט א וקטור מאפיין כך ש- $y^T\cdot B\cdot y>0$.

3 6) ג)

3 ל:

$$A-\lambda vv^T > 0 \iff 1-\lambda v^TA^{-1}v > 0$$

$$\lambda_n\left(I-\lambda A^{-\frac{1}{2}}vv^TA^{-\frac{1}{2}}\right) = 1-\lambda v^TA^{-1}v > 0$$

לכן גם כל הע״ע של $I-\lambda A^{-\frac{1}{2}}vv^TA^{-\frac{1}{2}}$ חיוביים

לכן,

$$1-\lambda v^TA^{-1}v > 0$$
$$\Updownarrow$$
$$I-\lambda A^{-\frac{1}{2}}vv^TA^{-\frac{1}{2}} > 0$$
$$\Updownarrow$$
$$A^{\frac{1}{2}}\left(I-\lambda A^{-\frac{1}{2}}vv^TA^{-\frac{1}{2}}\right)A^{\frac{1}{2}} > 0$$
$$\Updownarrow$$
$$A-\lambda vv^T > 0$$

כעת נתעניין בפתרון מערכת משוואות מהצורה $H_n^{\mathsf{T}} x = b$, כאשר $n = 2^k$ עבור k שלם אי-שלילי, ו-$b \in \mathbb{R}^n$.

הוכיחו כי למערכת משוואות זו יש פתרון יחיד וכי ניתן לחשב אותו בזמן $O(n\log_2 n)$.

מה אומרת גיא? :)

$H_n^T \cdot x = b$

הוכחנו בתרגול כי עבור $n = 2^k$ מתקיים $H_n H_n^{\mathsf{T}} = nI$, ולכן כל הערכים הסינגולרים של H_n שווים ל- $\sqrt{n}$.

כפי שהראינו בתרגול

יש ל- H_n n ערכים סינגולריים שהם לא אפס ולכן היא מדרגה מלאה ובפרט קיים למערכת משוואות $H_n^T \cdot x = b$ פתרון יחיד.

פירוק SVD הינו $U \cdot \Sigma \cdot V^T$ לפי מה . $\Sigma = \sqrt{n} \cdot I$ שהוכחנו בתרגול לכן נקבל $H_n = \sqrt{n} \cdot U \cdot V^T$ אבל בפועל נסמן $w = U^T b$ ונסמן $\Sigma z = w$ ולכן $z = \Sigma^{-1} w$ וגם $x = Vz$ וזה סיימנו. חישוב פירוק SVD במקרה הזה הינו צולח מכיוון שלוקח $O(k \cdot n)$ כאשר $k = \log_2 n$ לחשב U, V^T כל אחד בנפרד

3 שלבים ראינו בתרגול 12

ולכן נקבל סיבוכיות זמן של $O(n\log_2 n)$ לחישוב של פירוק SVD כי Σ מידי כי אנו יודעים את הערכים הסינגולריים)

שאר החישובים לוקחים $O(n^2)$ (כפל מטריצה בוקטור)

ו- Σ^{-1} אפשר לחשב ע"י $O(n)$ האלכסון ולהכפיל בסקלר של כל לוקח $O(n)$.

$\Leftarrow$ סה"כ נקבל חישוב זמן של $O(n\log_2 n)$ •