

תרגיל בית 4

להגשה עד 21.3.24 בשעה 23:50

בהצלחה!

תרגיל זה מנוסח בלשון זכר מטעמי נוחות בלבד והוא מיועד לכל המגדרים.

הוראות הגשה:

1. הגשת התרגיל היא בקבוצות של שני סטודנטים בלבד (למעט סטודנטים שאושר להם באופן רשמי).
2. רק בן זוג אחד צריך להגיש את התרגיל. הגשת התרגיל במקום המיועד במודל בלבד.
3. קובץ ההגשה חייב להיות בפורמט pdf בלבד.
4. שם הקובץ המוגש יהיה בפורמט הבא בלבד: EX4_ID1_ID2. כאשר ID1 ו ID2 אלו מספרי תעודות הזהות של בני הזוג.

הערות חשובות:

1. יש להוכיח באופן מלא את התשובה שלכם לכל שאלה. לתשובה שאינה מנומקת היטב לא יינתנו מירב הנקודות.
2. במידה ותרגיל הבית מוגש בכתב יד יש לוודא כי הכתב קריא. פתרון לא קריא יפסל.
3. יש לוודא את איכות הסריקה לפני ההגשה, פתרון המכיל סריקה לא ברורה יפסל.
4. על הגשה של תרגיל בית מוקלד יינתנו 10 נקודות בנוסף לציון התרגיל.

שאלה 1

1. מצא חסם אסימפטוטי עליון הדוק כפי יכולתך לנוסחאות הנסיגה הבאות. יש להוכיח את נכונות החסם באינדוקציה.

(א) יהי $a \in \mathbb{Z}_{>0}$ קבוע שלם כלשהו. לכל $n \leq a$ מתקיים $T(n) = O(1)$. ולכל $n > a$ מתקיים

$$T(n) \leq T(n-a) + T(a) + n$$

(ב) $T(0) = O(1)$, $T(n) \leq T(n-1) + \frac{1}{n}$

2. מצא חסם אסימפטוטי הדוק לנוסחת הנסיגה הבאה. יש להוכיח את נכונות החסם באינדוקציה. לכל $n < 10$ מתקיים $T(n) = \Theta(1)$ ולכל $n \geq 10$ מתקיים $T(n) = 5^n + 3 \cdot T(\lfloor n^{\frac{2}{5}} \rfloor)$.

שאלה 2

ועד הסטודנטים הפקולטי קיים בחירות לנציג סמסטר. הבחירות נעשו באופן ממוחשב, אך לצערנו האקרים מפקולטה עוינת השתלטו על מערכת הבחירות ולכן הוועד לא יכול לספור את הקולות. העובדות הבאות ידועות:

- יש בדיוק n סטודנטים בפקולטה וכולם הצביעו.
- בדיוק מועמד אחד קיבל את רוב הקולות. כלומר יש מועמד שקיבל יותר מ- $\frac{n}{2}$ הצבעות.
- לא ידוע כמה מועמדים יש.

ההאקרים הציבו את התנאים הבאים: הם מספרו את ההצבעות מ-1 עד n והם מאפשרים להפעיל את הפעולה $isMatching(a, b)$ עבור $a, b \in \{1, \dots, n\}$ שמחזירה $True$ אם ההצבעה ה- a וההצבעה ה- b הם לאותו מועמד ו- $False$ אחרת. הם מוכנים להפעיל את הפעולה הזו רק פעם אחת בכל יום. בנוסף הם מאפשרים להפעיל את הפעולה $getVote(a)$ המחזירה את המועמד שלו הצביע הסטודנט ה- a . את הפעולה $getVote$ ניתן להפעיל רק פעם אחת.

תארו אלגוריתם המאפשר לכם לדעת בוודאות איזה מועמד קיבל את רוב הקולות, ב- $O(n \log n)$ ימים (כלומר אלגוריתם הקורא ל- $isMatching$ לכל היותר $O(n \log n)$ פעמים).

יש לספק הסבר לאלגוריתם ופסאודוקוד. יש להוכיח את נכונות האלגוריתם ולנתח את הסיבוכיות שלו (כפונקציה של מספר הקריאות ל- $isMatching$).

שאלה 3

בשאלה זו מניחים שהמפתחות הם מספרים ממשיים וייחודיים. הצע מבנה נתונים דינאמי, D , שתומך בפעולות: $Init(D)$, $Insert(D, x)$, $Delete(D, x)$ ו $AverageOf(D, k_1, k_2)$ כך ש:

- $Init(D)$ מאתחלת מבנה נתונים ריק.
- $Insert(D, x)$ מכניסה קודקוד חדש x לתוך מבנה הנתונים D .
- $Delete(D, x)$ מוציאה את הקודקוד x מתוך מבנה הנתונים D .
- $AverageOf(D, k_1, k_2)$ מחזירה את הממוצע של המפתחות הגדולים שווים מ k_1 וקטנים שווים מ k_2 ב D .

זמן הריצה הנדרש עבור כל הפעולות הינו $O(\log n)$, כאשר n מייצג את מספר האיברים ב D . על התשובה לכלול תאור של מבנה הנתונים המוצע והסבר מלא על המימוש וזמן הריצה. אין חובה לספק פסאודו-קוד.

שאלה 4 (רשות)

נתונה ערימת מינימום H בייצוג מערך. נדרש לתכנן פעולה $print_k_min(H, k)$ אשר מדפיסה את ערכם של k האיברים הקטנים ביותר ב- H כאשר בסוף הריצה H נותרת ללא שינוי. זמן הריצה הנדרש הינו $O(k \cdot \log k)$. יש להסביר על אופן המימוש באופן מפורט, אין חובה לספק פסאודו-קוד. נדרש לנתח את זמן הריצה של הפעולה.

שאלה 5

יהי T עץ חיפוש בינארי בעל מפתחות ייחודיים. הצומת העוקב ל- x הוא הצומת בעל המפתח הקטן ביותר שגדול מהמפתח של x והצומת הקודם ל- x הוא הצומת בעל המפתח הגדול ביותר שקטן מ- x הוכח את הטענות הבאות:

1. אם לצומת x בעץ יש שני בנים אז לצומת העוקב ל- x אין בן שמאלי ולצומת הקודם ל- x אין בן ימני
2. אם לצומת x אין בן ימני אז הצומת העוקב ל- x הוא האב הקדמון העמוק ביותר בעץ שהבן השמאלי שלו הוא גם אב קדמון של x .
3. אם הצומת x הוא עלה, אז ההורה שלו הוא הצומת העוקב לו או הצומת הקודם לו.