תרגיל בית 3
להגשה עד 29.2.23 בשעה 23:50
בהצלחה!

תרגיל זה מנוסח בלשון זכר מטעמי נוחות בלבד והוא מיועד לכל המגדרים.

הוראות הגשה:

1. **הגשת התרגיל היא בקבוצות של שני סטודנטים בלבד (למעט סטודנטים שאושר להם באופן רשמי).**
2. **רק בן זוג אחד צריך להגיש את התרגיל. הגשת התרגיל במקום המיועד במודל בלבד.**
3. **קובץ ההגשה חייב להיות בפורמט pdf בלבד.**
4. **שם הקובץ המוגש יהיה בפורמט הבא בלבד: EX3_ID1_ID2. כאשר ID1 ו ID2 אלו מספרי תעודות הזהות של בני הזוג.**

הערות חשובות:

1. **יש להוכיח באופן מלא את התשובה שלכם לכל שאלה. לתשובה שאינה מנומקת היטב לא יינתנו מירב הנקודות.**
2. **במידה ותרגיל הבית מוגש בכתב יד יש לוודא כי הכתב קריא. פתרון לא קריא יפסל.**
3. **יש לוודא את איכות הסריקה לפני ההגשה, פתרון המכיל סריקה לא ברורה יפסל.**
4. **על הגשה של תרגיל בית מוקלד יינתנו 10 נקודות בונוס לציון התרגיל.**

שאלה 1

יהי $G=(V,E)$ גרף מכוון ויהי $s \in V$. נניח כי כל הצמתים נגישים מ-s. הוכח/הפרך את הטענות הבאות:

א. יהי $v \neq s \in V$. אם v הוא עלה בעץ שנוצר מהרצת $BFS(G,s)$ לכל סידור של רשימת השכנויות של G, אז v הוא עלה ביער שנוצר מהרצת $DFS(G)$ לכל סידור של רשימת השכנויות של G.

ב. יהי $v \neq s \in V$. אם v הוא עלה ביער שנוצר מהרצת $DFS(G)$ לכל סידור של רשימת השכנויות של G, אז v הוא עלה בעץ שנוצר מהרצת $BFS(G,s)$ לכל סידור של רשימת השכנויות של G.

ג. לכל סידור של רשימת השכנויות של G, הגובה של העץ שנוצר מהרצת $BFS(G,s)$ קטן שווה מגובה העץ שנוצר מהרצת $DFS(G,s)$ (כלומר הרצת DFS שמתחילה מהצומת s) .

שאלה 2 (רשות)

יהי $G=(V,E)$ גרף מכוון ו $s \in V$ צומת כלשהו. הצע אלגוריתם הפועל בסיבוכיות זמן של $O(V+E)$ המחשב עבור כל צומת $v \in V$ את מספר המסלולים הקצרים ביותר מ s ל v ב G.

שאלה 3

יהי $G=(V,E)$ גרף מכוון חסר מעגלים (DAG).

1. הוכיחו כי הרשימה המוחזרת ע"י הפתרון הבא היא מיון טופולוגי של G.
   (א) אתחל רשימה ריקה L
   (ב) מצא את כל הצמתים עם דרגת כניסה 0
      i. הכנס אותם לסוף הרשימה L
      ii. הסר אותם ואת כל הקשתות היוצאות מהם מהגרף G
   (ג) חזור ל (ב) כל עוד הגרף לא ריק.
   (ד) החזר את L

   שים לב כי זהו רק רעיון עבור אלגוריתם. חסרים בפתרון פרטים על מנת שיהיה אפשר לממש אותו.

2. הציעו אלגוריתם הפועל בסיבוכיות זמן של $O(V+E)$ ומממש את הפתרון שהוצע בסעיף הקודם.

שאלה 4

יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון וקשיר. נגדיר קשת שוברת כקשת שלאחר הסרתה הגרף G לא קשיר. G יקרא שביר אם קיימת ב G קשת שוברת. שאלה זו עוסקת בהחלטה האם הגרף G הוא שביר או לא. לאחר הרצת $\texttt{DFS}(G)$ נגדיר את הגרף **המכוון** $\overrightarrow{G}=(\overrightarrow{V},\overrightarrow{E})$ כך ש $\overrightarrow{V}=V$ וכיווני הקשתות הן לפי הכיוון בו התגלו לראשונה במהלך $\texttt{DFS}(G)$. נשים לב כי הגרף $\overrightarrow{G}$ הוא הגרף G_π עם קשתות מכוונות מהורה לילד בתוספת קשתות אחוריות. מכאן שניתן להשתמש בהגדרות של צאצא ואב קדמון גם ב $\overrightarrow{G}$. לדוגמא, צומת u הוא אב קדמון של צומת v ב $\overrightarrow{G}$ אמ"מ u הוא אב קדמון של v ב G_π.

1. הציעו אלגוריתם המקבל כקלט גרף לא מכוון וקשיר $G=(V,E)$ ומחזיר כפלט את $\overrightarrow{G}$. סיבוכיות הזמן של האלגוריתם המוצע צריכה להיות $O(V+E)$.
2. הוכח כי כל קשת שוברת ב G תסווג כקשת עץ בהרצת $\texttt{DFS}(G)$.
3. הוכח: קשת (u,v) שהוגדרה קשת עץ לאחר $\texttt{DFS}(G)$ היא קשת שוברת ב G אמ"מ לא קיימת קשת אחורית מצאצא של v לאב קדמון של u ב $\overrightarrow{G}$.
4. הצע אלגוריתם המקבל כקלט גרף לא מכוון וקשיר $G=(V,E)$ ומכריע האם G הוא שביר. סיבוכיות הזמן של האלגוריתם המוצע צריכה להיות $O(V+E)$.

   רמז: בהתבסס על סעיף 2 חשוב איזו תכונה תתקיים ב $\overrightarrow{G}$ אם אין קשתות שוברות ב G ומה תהיה ההשפעה על קיום של לפחות קשת שוברת אחת ב G על אותה התכונה ב $\overrightarrow{G}$. כמו כן, במהלך הקורס למדת אלגוריתם הפועל בסיבוכיות הזמן הרצויה המכריע האם התכונה הנ"ל מתקיימת או לא.

שאלה 5

יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון. תהי $f:V\rightarrow\mathbb{R}$. נאמר שמסלול ב־ G הוא מסלול עולה אם לכל קשת $e=(u,v)$ במסלול מתקיים $f(u)<f(v)$. תכנן אלגוריתם אשר מקבל את G בייצוג רשימת שכנויות וצומת $s\in V$ ומחשב לכל צומת $v\in V$ את אורך המסלול העולה הקצר ביותר מ־ s ל־ v ושומרת אותו ב־ $v.d\_inc$. יש להסביר את נכונות האלגוריתם, לנתח את סיבוכיות זמן הריצה שלו ולהסביר את נכונותו. סיבוכיות האלגוריתם צריכה להיות $O(V+E)$.