תרגיל בית 2 - פתרון מקוצר

שאלה 1

א. יהי $P = \langle u_1, u_2, ...u_k\rangle$ מסלול קצר ביותר ונניח בשלילה כי קיים תת מסלול שלו $P' = \langle u_x, ...u_y\rangle, 1 \le x, y \le k$ שאינו קצר ביותר. כלומר, קיים מסלול $P^* = \langle u_x, ...u_y\rangle$ כך ש $|P^*| < |P'|$ לכן, לפי הגדרה המסלול מ u_1 ל u_k שמהצומת $u_(x-1)$ עובר במסלול P^* ואחרי הצומת u_y ממשיך בהתאם לצמתי P הוא מסלול קצר יותר מ P בין u_1 ל u_k בסתירה.

ב. כיוון אחד $\Leftarrow$
G הוא גרף דו- צדדי $\Leftarrow$ קיימות שתי קבוצות צמתים V_1 ו- V_2 המקיימות את התכונות הבאות

(א) $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

(ב) $V_1 \cup V_2 = V$

(ג) $E \subseteq V_1 \times V_2$

ראשית, אם אין מעגלים כלל בגרף, סיימנו (שכן אין מעגלים באורך אי זוגי). אחרת, יהי מעגל $C = \langle u_1, u_2, ...u_1\rangle$ לפי תכונה (ג), כל קשת (u_i, u_j) לאורך המעגל בהכרח מקיימת שקצה אחד שלה ב V_1 והשני ב V_2. כלומר, כל קשת מהווה מעבר מקבוצת צמתים אחת לשניה. כדי לחזור לקבוצת הצמתים ש u_1 נמצא בה ניהיה חיבים לעשות מספר זוגי של צעדים. כלומר, אורך המעגל זוגי כנדרש.

כיוון שני $\Rightarrow$
ב G אין מעגלים באורך אי זוגי. אם אין בו מעגלים כלל, לפי שאלה 1 מתרגול 3 סיימנו, שכן גרף לא מכוון, קשיר וחסר מעגלים הוא עץ וראינו כי כל עץ הוא גרף דו צדדי.
אחרת, נוכיח כי G הוא גרף דו-צדדי בעזרת בניה של הקבוצות V_1, V_2. נבחר באופן שרירותי צומת $u_0 \in V$ ונגיד שכל צומת שהמרחק שלו מ u_0 זוגי נמצא ב V_1 וכל צומת במרחק אי זוגי מ u_0 נמצא ב V_2. באותו אופן בדיוק כמו בשאלה 1 בתרגול 3, תכונות (א) ו (ב) מתקיימות.
נניח בשלילה שתכונה (ג) לא מתקיימת. כלומר, יש קשת $(x, w) \in E$ כך ש $x, w \in V_1$ או $x, w \in V_2$.
נניח בה"כ כי $x, w \in V_1$. נסמן מסלולים קצרים ביותר כלשהם מ u_0 ל x, w ע"י P_x, P_w בהתאמה. לפי הגדרת V_1 בהכרח $|P_w|, |P_x|$ זוגיים. נשים לב שהמעגל העובר במסלול מ u_0 ל w דרך P_w, אח"כ דרך הקשת (x, w) ואז בסדר הפוך מ P_x עובר מ x ל u_0 יהיה מעגל באורך אי זוגי בסתירה לנתון.

שאלה 2

א. מכיוון שהקבוצות $E_1, \ldots, E_k$ זרות בזוגות כך ש $E = E_1 \cup \cdots \cup E_k$, מתקיים $m = |E| = \sum_{i=1}^{k} |E_i|$. כעת, מכיוון שכל (V, E_i) הוא יער, נקבל ש $|E_i| \leq n-1$ לכל $i \in [k]$. מכאן, נקבל

$$m = \sum_{i=1}^{k} |E_i| \leq k(n-1) \implies k \geq \frac{m}{n-1}$$

ב. ניזכר שסכום הדרגות בגרף לא מכוון הוא $2m$. בנוסף, מכיוון שהגרף k־דליל, ראינו בסעיף א שמתקיים $m < nk$. כעת, נוכל לקבל שהדרגה הממוצעת בגרף היא

$$\frac{\sum_{v \in V} \deg(v)}{n} = \frac{2m}{n} < 2k$$

קיבלנו שהדרגה הממוצעת קטנה מ $2k$, לכן מעקרון שובך היונים קיים צומת שדרגתו קטנה מ $2k$.

ג. נוכיח את הטענה באינדוקציה על מספר הצמתים בגרף.

<u>בסיס:</u> נתבונן בגרף G עם שני צמתים. נשים לב שגרף זה הוא יער, כלומר 1־דליל ולכן k־דליל לכל $k > 0$. בנוסף, הגרף בהכרח 2־צביע (כי תמיד אפשר לצבוע כל צומת בצבע אחר) ולכן $2k$־צביע לכל $k > 0$.

<u>הנחה:</u> נניח שהטענה מתקיימת לכל גרף k־דליל עם פחות מ n צמתים.

<u>צעד:</u> יהי $G = (V, E)$ גרף k־דליל עם n צמתים ויהי $v \in V$ צומת שדרגתו קטנה מ $2k$ (הראינו שקיים כזה בסעיף ב). נסמן ב $G(V - \{v\})$ את תת הגרף המושרה ע"י $V - \{v\}$. נשים לב ש $G(V - \{v\})$ הוא k־דליל עם פחות מ n צמתים, ולכן מהנחת האינדוקציה הוא $2k$־צביע. נגדיר צביעה $c : (V - \{v\}) \to [2k]$ של $G(V - \{v\})$. כעת, נתבונן בצומת v ונשים לב שיש לו פחות מ $2k$ שכנים ולכן קיים צבע $i \in [2k]$ כך ש $i \neq c(u)$ לכל צומת u המהווה שכן של v ב G. כעת, נוכל להקצות ל v את הצבע i ולקבל צביעה של G ב $2k$ צבעים כך שלכל קשת $(x, y) \in E$ מתקיים $c(x) \neq c(y)$. כלומר, הראינו ש G הוא $2k$־צביע.

שאלה 3

א. לפי ההרצאה על גרפים, שקף (12) מתקיים כי לכל גרף קשיר $|E| \geq |V| - 1$. נתבונן בכל אחד מרכיבי הקשירות של הגרף $C_1 = (V_1, E_1), C_2 = (V_2, E_1), ..., C_K = (V_k, E_k)$ מתקיים

$$\forall i, j \;\; V_i \cap V_j = \emptyset, \quad \cup_{1 \leq i \leq j} V_i = V$$

וגם

$$\forall i, j \;\; E_i \cap E_j = \emptyset$$

לכן נקבל:

$$|E| = |E_1| + |E_2| + ... + |E_k| \geq |V_1| - 1 + ... + |V_k| - 1 = |V| - k$$

כנדרש

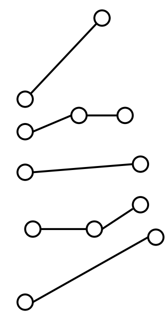
ב. טענת עזר־ לכל תת גרף בעל $1 \leq k \leq n-1$ צמתים שמהווה עץ, ניתן להוסיף צומת וקשת כך שתת הגרף החדש (בעל $k+1$ צמתים) הוא גם עץ נתבונן בתת הגרף המהווה עץ בעל k צמתים. מאחר ו $k <= n-1 < n$, קיים צומת v כך ש v אינו חלק מתת הגרף. נבחר צומת שרירותי בעץ u.

לפי הקשירות של G קיים מסלול ב G בין u ל v בפרט, בשלב כלשהו המסלול עובר מצומת שהיתה חלק מתת הגרף המהווה עץ לצומת שלא היתה חלק מתת הגרף. נסמן את הצומת הראשונה שאינה חלק מתת הגרף המהווה עץ כ w. מהגדרת w, קיימת קשת מצומת שמהווה חלק מהעץ ל w ולכן נוכל להוסיף אותו ולקבל תת גרף המהווה עץ בעל $k+1$ צמתים.

כעת, נוכיח את הטענה בבניה. נבחר צומת שרירותי בגרף. לפי הגדרה, הגרף המושרה על ידו מהווה עץ בעל צומת יחיד. והפעלת טענת העזר מספר פעמים בהתאם לגודל תת הגרף המבוקש מסיימת את ההוכחה. גם פתרונות המשתמשים בעץ ה BFS יתקבלו

ג. 1. לא קיים. בעץ בעל 9 צמתים יש 8 קשתות. ראינו כי סכום הדרגות בגרף שווה ל $2|E|$ ו $2 \times 8 \neq 18$

2. קיים.



3. לא קיים לפי סעיף א

4. לא קיים. לפי סעיף ב, קיים תת גרף בעל 9 צמתים המהווה עץ. כלומר תת הגרף הוא קשיר ובעל 8 קשתות. יש קשת יחידה שאינה בתת הגרף, אם נוסיף אותה ודאי שנשמור על קשירות תת הגרף. אם נניח בשלילה כי הוא חסר מעגלים קיבלנו עץ עם 9 קשתות ו9 צמתים בסתירה לאפיון של עצים.

שאלה 4

רעיון האלגוריתם: כל צומת מבצע 2 פעולות. אחת היא לקבל מהילד השמאלי שלו את מספר הצאצאים שלו. השניה היא לסכום את האחים שלו מצד ימין, ולהוסיף להם 1 כי גם הוא שם (על מנת שלבסוף זה יגיע לאח הכי שמאלי המשותף, והוא יעביר את התוצאה להורה). שימו לב שאנו מבצעים ראשית את הפעולה על ילד שמאל ולאחר מכן עוברים לאח ימין, בדומה לשאלה 5.2 מתרגול 3. ניתוח הסיבוכיות דומה לזה שבתרגיל 5.2 מתרגול 3.

```
Calc_Degree(x)
if x == NIL then
    return 0
x.degree = Calc_Degree(x.left_child)
return Calc_Degree(x.right_sibling) + 1
```

שאלה 5

רעיון האלגוריתם: נעבור על הצמתים בסדר ה־ postorder, כפי שעשינו בשאלה 4.2 בתרגול **3**. נתחזק משתנה בשם $temp\_d$ שישמור לנו את העומק של הצומת x בו אנו נמצאים כעת. בנוסף, יש לנו משתנה d בו יהיה את העומק של העלה השמאלי ביותר. (שימו לב, המשתנה d מתעדכן פעם אחת בלבד במהלך ריצת האלגוריתם. הסבירו לעצמכם מדוע העדכון קורה כאשר המשתנה x נמצא בעלה השמאלי ביותר בעץ.)

בכל פעם שאנו מגיעים לעלה שאינו השמאלי ביותר (מגיעים לשורה 9), אנו בודקים האם העומק שלו זהה לעומק העלה השמאלי ביותר. אם יש לפחות עלה אחד בו זה לא מתקיים, אז לא כל העלים באותו עומק, והאלגוריתם יחזיר $false$. אחרת, מתקיים שכל העלים באותו עומק כמו העלה השמאלי ביותר, ובפרט באותו העומק, והאלגוריתם יחזיר $true$.

ניתוח הסיבוכיות זהה לזה שבתרגיל 4.2 בתרגול **3** כיוון שהוספנו רק שני משתנים ופעולות קבועות. שימו לב שהשתמשנו באלגוריתם איטרטיבי על מנת לעמוד בדרישות השאלה.

```
Alg_q5(T)
1:  from = NIL, d = NIL, temp_d = 0
2:  x = T.root
3:  while x ≠ NIL do
4:      to = Travrse_To_k(x, from)
5:      if to == RETURN_TO_PARENT then
6:          if from == x.parent then
7:              if d == NIL then
8:                  d = temp_d
9:              else
10:                 if d ≠ temp_d then
11:                     return false
12:         from = x
13:         x = x.parent
14:         temp_d− = 1
15:     else
16:         from = x
17:         x = x.c[to]
18:         temp_d+ = 1
19: return true
```