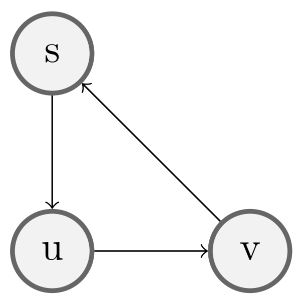
תרגיל בית 3 - פתרון תמציתי

שאלה 1

א. הטענה אינה נכונה. דוגמה נגדית:



כאשר נריץ BFS מ־ s הצומת v אכן יהיה עלה (אין משמעות לסדר רשימת השכנויות) אבל אם נריץ DFS שמתחיל מ־ v אז v לא יהיה עלה.

ב. הטענה נכונה. הוכחה:
ראשית נראה כי דרגת היציאה של v היא 0. נניח בשלילה של־ v יש קשת יוצאת (v,u) . לכן עבור הרצת DFS שמתחילה ב־ v, u יהיה צאצא של v (לפי תכונת המסלול הלבן). לכן בהרצה זו v אינו עלה בסתירה לנתון. כלומר דרגת היציאה של v היא 0.
נסיק כי אין אף מסלול קצר ביותר היוצא מ־ s, ועובר ב־ u אבל ש־ u אינו הצומת האחרון בו (אחרת בהכרח מסלול כזה היה עובר בקשת שיוצאת מ־ v). מכיוון שכל הצמתים נגישים מ־ s, v נמצא בעץ ה־ BFS (לכל סידור של רשימת השכנויות) ולכן הוא בהכרח עלה.

ג. הטענה נכונה. הוכחה:
יהי T_{BFS} עץ שנוצר מהרצת BFS כפי שמתואר בשאלה ו־ T_{DFS} עץ שנוצר מהרצת DFS כפי שמתואר בשאלה . נסמן ב־ u את הצומת הרחוק ביותר מ־ s ב־ T_{BFS} וב־ v את הצומת הרחוק ביותר מ־ s ב־ T_{DFS}. המסלול מ־ s ל־ u ב־ T_{BFS} הוא מסלול קצר ביותר (לפי נכונות BFS) ולכן אנחנו יודעים כי

$$\delta_{T_{BFS}}(s,u) \leq \delta_{T_{DFS}}(s,u)$$

אבל לפי בחירת v מתקיים

$$\delta_{T_{DFS}}(s,u) \leq \delta_{T_{DFS}}(s,v)$$

כלומר קיבלנו ש:

$$\delta_{T_{BFS}}(s,u) \leq \delta_{T_{DFS}}(s,v)$$

אבל לפי הגדרה הגובה של T_{BFS} הוא $\delta_{T_{BFS}}(s,u)$ והגובה של T_{DFS} הוא $\delta_{T_{DFS}}(s,v)$ ולכן סיימנו.

שאלה 2

נוסיף לכל צומת בגרף שדה בשם $shortest\_paths\_num$. עבור כל צומת $v \in V - \{s\}$ נאתחל את השדה להיות 0 ועבור הצומת s נעדכן את השדה להיות 1. נריץ אלגוריתם $\texttt{BFS}(G, s)$ עם השינוי הבא:
כל פעם שמתגלה צומת לבן v ע"י צומת u מעדכנים (בנוסף לכל שאר הפעולות הרגילות) $v.shortest\_paths\_num = u.shortest\_paths\_num$ בנוסף, כאשר עוברים על רשימת השכנויות של צומת u נוסיף בדיקה עבור כל צומת v שאינו לבן האם $v.d = u.d + 1$ אם כן, נבצע את העדכון $v.shortest\_paths\_num = v.shortest\_paths\_num + u.shortest\_paths\_num$ אחרת, לא נבצע כלום.

שאלה 3

1. צריך להראות כי עבור כל קשת $(u, v) \in E$ הצומת u יהיה לפני v ברשימה L. נסתכל על קשת $(u, v) \in E$ כלשהי. הצומת v יכנס לסוף הרשימה L רק לאחר שיהיה לו דרגה נכנסת 0 וזה יקרה רק לאחר שצומת u יכנס לסוף הרשימה L ויוסר מהגרף ביחד עם כל הקשתות היוצאות שלו.

2. נניח כי לכל צומת יש שדה בשם in_deg. הרעיון של הפתרון הוא לתחזק תור (לא חשוב אם זה תור FIFO או LIFO) עם כל הצמתים עם דרגה נכנסת נוכחית שווה ל 0. כל פעם שמוציאים צומת v מהתור סורקים את רשימת השכנויות של v ומקטינים את הדרגה הנכנסת של צומת סמוך u. כאשר הדרגה הנכנסת הנוכחית של u היא 0, מכניסים את u לתור.

   (א) אתחל רשימה L ותור Q.

   (ב) חשב את הדרגה הנכנסת של כל צומת ועבור כל צומת v עדכן את הערך בשדה $v.in\_deg$.

   (ג) הכנס את כל הצמתים עם ערך $v.in\_deg = 0$ לתור Q.

   (ד) כל עוד התור לא ריק בצע

      i. הוצא צומת v מהתור

      ii. הכנס את v לסוף הרשימה L

      iii. עבור על רשימת השכנויות של v והקטן לכל צומת סמוך את ערך שדה ה in_deg שלו ב 1

      iv. אם ערך שדה ה in_deg של צומת סמוך הפך להיות 0 הכנס אותו לתור Q.

   (ה) החזר את L

שאלה 4

1. על מנת לבנות את $\overrightarrow{G}$ נאתחל את $\overrightarrow{G}.Adj$ להיות מערך חדש בגודל $|V|$ ונעדכן. $\overrightarrow{G}.V = G.V$ ונריץ $\texttt{DFS}(G)$ עם השינויים הבאים ב $\texttt{DFS\_Visit}(G,u)$:
   (א) אם השכן v של u הוא לבן נוסיף את הקשת (u,v) ל $\overrightarrow{G}.Adj[u]$.
   (ב) אם השכן v של u הוא אפור וגם $u.\pi \neq v$ נוסיף את הקשת (u,v) ל $\overrightarrow{G}.Adj[u]$.

2. תהי קשת $(u,v)=(v,u)\in E$ קשת שוברת ב G. משאלה 3 בתרגול 5 אנו יודעים כי הרצת $\texttt{DFS}(G)$ יכולה לסווג כל קשת רק כקשת עץ או קשת אחורית (G הוא גרף לא מכוון). נניח בשלילה כי הקשת השוברת $(u,v)=(v,u)$ סווגה כקשת אחורית ונניח בלי הגבלת הכלליות כי הקשת נחקרה לראשונה מהכיוון של v ל u כלומר, הקשת (v,u) היא קשת אחורית. צומת v הוא צאצא של צומת u (הקשת (v,u) היא קשת אחורית) ולכן קיים מסלול מצומת u לצומת v ב G_π שלא עובד דרך קשת $(u,v)=(v,u)$. נסמן את המסלול הנ"ל ב $P_{tree}(u,v)$ ואת אותו המסלול מצומת v לצומת u ב $P_{tree}(v,u)$. נסמן את הגרף G לאחר הסרת הקשת (v,u) ב $\bar{G}$ ונראה כי הגרף $\bar{G}$ קשיר. כל מסלול בין שני צמתים $w,z\in V$ ב G ניתן להמיר למסלול בין הצמתים ב $\bar{G}$. אם המסלול לא עובר דרך קשת (u,v) אז המסלול קיים גם ב $\bar{G}$. אם המסלול עובר על קשת (u,v) מצומת u לצומת v נחליף את הקשת במסלול $P_{tree}(u,v)$ אחרת נחליף את הקשת במסלול $P_{tree}(v,u)$. מכיוון ש $\bar{G}$ קשיר קיבלנו סתירה.

3. תהי $(u,v)\in E$ קשת שהוגדרה קשת עץ בהרצת $\texttt{DFS}(G)$ ונחקרה לראשונה מצומת u לצומת v.
   כיוון $\Longleftarrow$:
   נניח בשלילה שקיימת קשת מצאצא של v שנסמנו w (ייתכן ו $w=v$) לאב קדמון של u שנסמנו z (ייתכן כי $z=u$). אם כך נוכל להחליף את הקשת (u,v) בכל מסלול בגרף G במסלול $u\rightsquigarrow v\rightsquigarrow w\rightsquigarrow z$ כאשר עוברים דרך הקשת מצומת u לצומת v ובמסלול $v\rightsquigarrow w\rightsquigarrow z\rightsquigarrow u$ אחרת. וזו סתירה כי קשת (u,v) היא קשת שוברת.
   כיוון $\Longrightarrow$:
   נתון כי לא קיימת קשת אחורית מצאצא של צומת v לאב קדמון של צומת u. נסמן את תת העץ המושרש בצומת v ב G_π ב T_v. מכיוון שבגרף לא מכוון הסיווג של כל קשת הוא או קשת עץ או קשת אחורית נקבל שאין כלל קשת מצמתים ב T_v לצמתים שלא ב T_v ב G. מכאן שהסרת הקשת (u,v) תגרום לכך שהגרף יהיה לא קשיר כי לא ניתן להגיע מצומת u לאף צומת ב T_v ולכן הקשת (u,v) היא קשת שוברת.

   הערה: נשים לב, כי על פי סעיף 2 קשת שוברת היא בהכרח קשת עץ ולכן בסעיף זה קיבלנו הגדרה שקולה לקשת שוברת.

4. ע"פ סעיף 3 אם יש בגרף המכוון $\overrightarrow{G}$ תת עץ ללא קשת אחורית אז הגרף G שביר. נשים לב שבמקרה כזה הגרף $\overrightarrow{G}$ הוא לא קשיר היטב ולכן יש בו יותר מרכיב קשיר היטב אחד. אלגוריתם:
   (א) הרץ $\texttt{DFS}(G)$
   (ב) בנה את הגרף $\overrightarrow{G}$
   (ג) הרץ $\texttt{SCC}(\overrightarrow{G})$
   (ד) אם יש רכיב קשירות אחד החזר "G לא שביר", אחרת החזר "G שביר".

כל שורה באלגוריתם היא בסיבוכיות זמן של $O(V+E)$ ולכן סה"כ סיבוכיות הזמן היא $O(V+E)$.

שאלה 5

נשתמש ברדוקציה: נגדיר $G' = (V, E')$ גרף **מכוון** כאשר: $E' = \{(u,v) : (u,v) \in E, f(u) < f(v)\}$. נשים לב כי כל מסלול ב־ G' הוא מסלול עולה ב־ G ושכל מסלול עולה ב־ G הוא מסלול ב־ G'. לכן לכל זוג צמתים $u, v \in V$, המרחק ביניהם ב־ G' הוא אורך המסלול העולה הקצר ביותר ביניהם ב־ G. לכן האלגוריתם שנציע הוא:

- ניצור את G' — $O(V+E)$
- נריץ $BFS(G', s)$ — $O(V+E)$
- לכל $v \in V$ נקבע $v.d\_inc = v.d$ — $O(V)$

נכונות האלגוריתם נובעת מההסבר למעלה ומנכונות BFS. סיבוכיות האלגוריתם היא $O(V+E)$.