תרגיל בית 4 - פתרון תמציתי

שאלה 1

האלגוריתם יפעל באופן הבא: נבנה גרף $G=(V,E)$ באופן הבא:

$$V=\{(c_i,d') \mid i\in\{1,...,n\}, d'\in\{0,...,d\}\}$$
$$E=\{((c_i,d'),(c_j,d'+1)) \mid i\in\{1,...,n\}, c_j\in L_i, d'\in\{0,...,d-1\}\}$$
$$w(((c_i,d'),(c_j,d'+1)))=g(c_i,c_j)+h(c_j)$$

כלומר יש צומת לכל זוג של עיר ויום, ויש קשת מכל עיר לכל הערים שאליהן ניתן להגיע ממנה ביום הבא. משקל כל קשת הוא המחיר של לנסוע בין שתי הערים ועוד המחיר של לינה בעיר היעד.
נריץ את אלגוריתם $DAG\_distances$ שראינו בתרגול 11 מהצומת $(c_1,0)$. נחשב את הערך:

$$minCost=\min_{d'\in\{1,...,d\}}(c_n,d').d$$

אם $minCost\le b$ נחזיר $True$ ואחרת נחזיר $False$.
נכונות האלגוריתם:
ראשית ניתן לראות שהגרף שבנינו הוא אכן DAG מפני שהקשתות עוברות מכל יום ליום הבא. לכן אכן ניתן להשתמש באלגוריתם $DAG\_distances$. לפי הגדרת הגרף G המרחק בין זוג צמתים $(c_i,d_1),(c_j,d_2)$ הוא המחיר להגיע מעיר c_i ביום d_1 לעיר c_j ביום־ d_2 כולל מחיר הלינה בדרך. לכן מעניין אותנו אם המרחק של $(c_1,0)$ מ־ (c_n,d') קטן מ־ b עבור איזשהו d'. מנכונות $DAG\_distances$ נקבל שאם $minCost\le b$ אז קיים d' שמקיים זאת ואחרת לא קיים.
ניתוח סיבוכיות:
לפי הגדרת הגרף: $|V|=n(d+1)$ $|E|=10nd$. לכן סיבוכיות בניית הגרף היא: $O(V+E)=O(nd)$ סיבוכיות הרצת, $DAG\_distances$ היא $O(V+E)=O(nd)$. לאחר מכן חישוב $minCost$ לוקח $O(V)=O(nd)$. בסך הכל סיבוכיות האלגוריתם היא $O(nd)$.

שאלה 2

1. תהי קשת $e=(v_i,v_{i'})\in G_f$. לפי הגדרה $i<i'$ ולכן v_i מופיע לפני $v_{i'}$ בסידור $\langle v_1,...,v_n\rangle$ ולכן לפי הגדרה סידור זה הוא מיון טופולוגי של G_f. כפי שראינו בתרגול 5 קיים מיון טופולוגי אמ"ם הגרף הוא DAG ולכן G_f הוא DAG. באופן מקביל G_b הוא גם DAG עם מיון טופולוגי $\langle v_n,...,v_1\rangle$.
2. יהי $P=\langle s,...,v\rangle$ מסלול קצר ביותר פשוט. נסמן ב־ P^t את תת־המסלול של־ P שעדיין לא נעשה לו $Relax$ בסדר הנכון בתחילת האיטרציה ה־ t (כלומר P^t הוא כמו המסלול P לאחר שהורדנו

מתחילתו את הקשתות שעשינו להן $Relax$ בסדר הנכון). ראשית נוכיח ש- P^t מתחיל בקשת מ- E_f לכל t שבו הוא אינו ריק:
לפי הגדרת E_f כל קשת שיוצאת מ- s היא קשת ב- E_f ולכן הטענה נכונה באיטרציה הראשונה. נניח שהטענה מתקיימת באיטרציה t. נסמן ב- P_f^t את תת המסלול הארוך ביותר של- P^t שמכיל רק קשתות ב- E_f ושהצומת הראשון בו הוא הצומת הראשון ב- P^t. באופן דומה נסמן ב- P_b^t את תת המסלול הארוך ביותר של- P_t שכל הקשתות בו הן קשתות ב- E_b ושהצומת הראשון שלו הוא הצומת האחרון ב- P_f^t. כלומר P_f^t הוא הרצף הראשון ב- P_t של קשתות מ- E_f ו- P_b^t הוא הרצף הראשון ב- P^t של קשתות מ- E_b.
לפי סדר הפעלת $Relax$ שהוגדר בשאלה, בתחילת כל איטרציה נעשה $Relax$ לכל הקשתות ב- P_f^t לפי הסדר (לא בהכרח ברציפות) ולאחר מכן נעשה $Relax$ לכל הקשתות ב- P_b^t לפי הסדר. לקשת שאחרי P_b^t ב- P^t לא נעשה $Relax$ בסדר הנכון מפני שהיא בהכרח ב- E_f ולכן לה עושים $Relax$ לפני הקשת האחרונה ב- P_b^t. לכן P^{t+1} הוא בדיוק P^t לאחר שהסרנו ממנו את כל הקשתות מ- P_f^t ו- P_b^t. לכן הקשת הראשונה ב- P^{t+1} היא קשת מ- E_f.
לפי הטענה שהוכחנו ומכיוון שהקשת האחרונה ב- P היא קשת ב- E_b (כל קשת שנכנסת ל- s היא ב- E_b), נקבל שבכל איטרציה שבה P^t אינו ריק, P_b^t ו- P_f^t אינם ריקים, ולכן P^{t+1} קצר מ- P^t בלפחות שתי קשתות. P הוא מסלול פשוט ולכן מכיל לכל היותר $n-1$ קשתות, ולכן לאחר $\lceil\frac{n-1}{2}\rceil$ איטרציות P^t בהכרח יהיה ריק, ולכן לפי המשפט שראינו בהרצאה נקבל ש- $v.d=\delta(s,v)$.
ב- G אין מעגלים שליליים ולכן לכל v שנגיש מ- s קיים מסלול פשוט קצר ביותר מ- s ל- v, ולכן הוכחנו שלכל v שנגיש מ- s לאחר $\lceil\frac{n-1}{2}\rceil$ איטרציות $v.d=\delta(s,v)$. לכל v שאינו נגיש מ- s הוכחנו בהרצאה כי מתקיים $v.d=\delta(s,v)=\infty$ בכל שלב באלגוריתם.

3. שינוי זה אינו משפיע על הסיבוכיות האסימפטוטית. כפי שראינו בניתוח ב-2, במקרה שבו P_f^t ו- P_b^t הן באורך אחד לכל איטרציה (כלומר המסלול מתחלף בין קשתות ב- E_f לקשתות ב- E_b), אז יקח לאלגוריתם $\Omega(\lceil\frac{n-1}{2}\rceil)=\Omega(n)$ איטרציות ולכן בסך הכל הסיבוכיות של האלגוריתם היא עדיין $\Theta(mn)$.

שאלה 3

האלגוריתם:

1. נוסיף צומת חדש s ונבנה את הגרף $G'=(V',E',w')$, כאשר $V'=V\cup\{s\}$, $E'=E\cup\{(s,v)\mid v\in V\}$, $w'(s,v)=0$ לכל $v\in V$, ו $w'(u,v)=w(u,v)$ לכל $(u,v)\in E$.
2. נריץ $\texttt{Bellman\_Ford}(G',w',s)$.
3. נבנה את תת-הגרף $H=(V_H,E_H)$, כאשר $V_H=V$ ו $E_H=\{(u,v)\in E\mid u.d+w(u,v)=v.d\}$.
4. נבדוק האם יש מעגל ב H. אם כן נחזיר True; אחרת, נחזיר False.

זמן הריצה:
שלבים $1,3,4$ מתבצעים בזמן $O(n+m)$ (כאשר שלב 4 ניתן למימוש למשל ע"י הרצת $\texttt{DFS}(H)$ ובדיקה האם מתקבלות קשתות אחוריות). שלב 2 ניתן למימוש בזמן $O(nm)$ כפי שראינו בשאלה 3 בתרגול 10.

נכונות:
ראשית נשים לב שקיים מעגל ממשקל 0 ב G אם ורק אם הוא נגיש מ s ב G'. כעת, נראה שעבור מעגל C ב G מתקיים $w(C)=0 \iff \delta(s,u)+w(u,v)=\delta(s,v),\ \forall(u,v)\in C$.

כיוון ראשון $\Leftarrow$: נסמן $C = \langle v_0, \ldots, v_{k-1}, v_k = v_0\rangle$ ונתבונן בצומת v_0. מתקיים

$$\delta(s, v_0) = \delta(s, v_{k-1}) + w(v_{k-1}, v_0) = \delta(s, v_{k-2}) + w(v_{k-2}, v_{k-1}) + w(v_{k-1}, v_0)$$

$$= \cdots = \delta(s, v_0) + w(C) \implies w(C) = 0$$

כיוון שני $\Rightarrow$: עבור מעגל C ממשקל 0, נניח בשלילה שקיימת קשת $(u, v) \in C$ כך ש $\delta(s, u) + w(u, v) > \delta(s, v)$. נסמן ב P את המסלול מ v ל u ב C ונשים לב שמתקיים $w(P) = w(C) - w(u, v) = -w(u, v)$. נסמן ב Q מסלול קצר ביותר מ s ל v ב G', כלומר $w(Q) = \delta(s, v)$. כעת שרשור של המסלול Q ל P נותן מסלול מ s ל u שמשקלו $w(Q) + w(P) = \delta(s, v) - w(u, v)$. הראינו שקיים מסלול מ s ל u שמשקלו $\delta(s, v) - w(u, v)$, מצד שני לפי ההנחה מתקיים $\delta(s, v) - w(u, v) < \delta(s, u)$ בסתירה להגדרת פונקציית המרחק.

שאלה 4

נשים לב כי G קשיר ולכן בהכרח קיים MST.

1. הטענה נכונה: נניח בשלילה כי קיים MST T כך ש $e = (u, v) \notin T$, ונניח בלי הגבלת הכלליות ש $u \in S$ ו $v \in V - S$. נסמן ב P את המסלול הפשוט (הייחודי) ב T מצומת u לצומת v. בהכרח קיימת קשת e' ששייכת ל P וחוצה את החתך $\{S, V - S\}$. ע"פ הנתון $w(e) < w(e')$. נגדיר $T' = T - \{e'\} \cup \{e\}$. מתקבל $(\to\leftarrow)$ $w(T') = w(T) - w(e') + w(e) < w(T)$.
2. הטענה נכונה: יהי T MST כלשהו של G. ע"פ הנתון $e \in T$. מתרגול 12 שאלה 4 אנחנו יודעים ש e היא קשת קלה בחתך $\{C_u, C_v\}$ (כפי שמוגדר בתרגול). נותר להראות כי e קלה ממש בחתך $\{C_u, C_v\}$. נניח בשלילה כי קיימת קשת e' שחוצה את החתך $\{C_u, C_v\}$ וגם $w(e) = w(e')$. אם כך, ניתן לבנות עץ פורש $T' = T - \{e\} \cup \{e'\}$ כך ש $w(T') = w(T) - w(e') + w(e) = w(T)$, בסתירה לנתון ש e שייכת לכל MST של G.

שאלה 5

הטענה נכונה. יהי $P = \langle s, u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, v\rangle$ מסלול קצר ביותר ב G. נניח בשלילה שסדר הקריאות לפרוצדורה $Relax$ על קשתות המסלול P אינו לפי סדר הופעת הקשתות במסלול. יהי u_i הצומת האחרון ב P שעבורו מתקיים שסדר הקריאות לפרוצדורה $Relax$ על קשתות תת־המסלול $P_{s,u_i} = \langle s, \ldots, u_i\rangle$ הוא לפי סדר הופעת הקשתות במסלול. נשים לב ש P_{s,u_i} הוא מסלול קצר ביותר מ s ל u_i (מכיוון שהוא תת־מסלול של מסלול קצר ביותר) ולכן מתכונת shortest path relaxation, לאחר סדרת הקריאות $\texttt{Relax}(s, u_1, w), \ldots, \texttt{Relax}(u_{i-1}, u_i, w)$ על קשתות המסלול P_{s,u_i}, מתקיים $u_i.d = \delta(s, u_i)$. נגדיר את הקשת $e = (u_k, u_{k+1})$ להיות הקשת הראשונה במסלול P שעבורה הקריאה ל $\texttt{Relax}(u_k, u_{k+1}, w)$ מתבצעת לאחר סדרת הקריאות $\texttt{Relax}(s, u_1, w), \ldots, \texttt{Relax}(u_{i-1}, u_i, w)$ ולפני הקריאה ל $\texttt{Relax}(u_i, u_{i+1}, w)$. נסמן ב t^k את זמן ההוצאה של u_k מ Q. נשים לב שבזמן t^k סדרת הקריאות $\texttt{Relax}(s, u_1, w), \ldots, \texttt{Relax}(u_{i-1}, u_i, w)$ כבר התבצעה ולכן $u_i.d = \delta(s, u_i)$ בזמן זה. בנוסף, כפי שראינו בלמה מההרצאה (שקף 43), בזמן t^k מתקיים $u_k.d = \delta(s, u_k)$. מכיוון שהוצאה מ Q מתבצעת ע"י $\texttt{Extract\_Min}(Q)$, נקבל שבזמן t^k מתקיים ש $\delta(s, u_k) = u_k.d \leq u_i.d = \delta(s, u_i)$. מצד

שני, מכיוון שמשקלי הקשתות הם חיוביים ו u_i נמצא לפני u_k ב P, מתקיים $\delta(s, u_i) < \delta(s, u_k)$ וזו סתירה.