

תרגיל בית 5

להגשה עד 8.4.24 בשעה 23:50

בהצלחה!

תרגיל זה מנוסח בלשון זכר מטעמי נוחות בלבד והוא מיועד לכל המגדרים.

הוראות הגשה:

1. הגשת התרגיל היא בקבוצות של שני סטודנטים בלבד (למעט סטודנטים שאושר להם באופן רשמי).
2. רק בן זוג אחד צריך להגיש את התרגיל. הגשת התרגיל במקום המיועד במודל בלבד.
3. קובץ ההגשה חייב להיות בפורמט pdf בלבד.
4. שם הקובץ המוגש יהיה בפורמט הבא בלבד: EX5_ID1_ID2. כאשר ID1 ו ID2 אלו מספרי תעודות הזהות של בני הזוג.

הערות חשובות:

1. יש להוכיח באופן מלא את התשובה שלכם לכל שאלה. לתשובה שאינה מנומקת היטב לא יינתנו מירב הנקודות.
2. במידה ותרגיל הבית מוגש בכתב יד יש לוודא כי הכתב קריא. פתרון לא קריא יפסל.
3. יש לוודא את איכות הסריקה לפני ההגשה, פתרון המכיל סריקה לא ברורה יפסל.
4. על הגשה של תרגיל בית מוקלד יינתנו 10 נקודות בנוסף לציון התרגיל.

שאלה 1

אורי ונועם רוצים לתכנן טיול באירופה ומבקשים את עזרתכם. בכל יום הם מתכוונים לנסוע בין שתי ערים ובכל לילה הם מתכוונים לישון במלון בעיר אליה הגיעו. בסך הכל יש n ערים. לכל עיר c_i אורי ונועם הכינו את הנתונים הבאים:

- מספר חיובי $h(c_i)$ שמייצג את המחיר לישון במלון בעיר c_i ללילה אחד.
- רשימה L_i של עשר ערים שניתן לנסוע אליהן מהעיר c_i ביום אחד ו- $g(c_i, c_j)$ שהוא המחיר של נסיעה כזו לכל $c_j \in L_i$.
- אורי ונועם החליטו להתחיל את הטיול בליסבון (שנסמן ב- c_1) ולסיים אותו באתונה (שנסמן ב- c_n). לצורך תכנון הטיול אתם מתבקשים לתכנן אלגוריתם שמקבל את h, L_i, g, b ו- d ובודק האם ניתן לסיים את הטיול הזה בלילה היותר d ימים ובעלות של לכל היותר b . סיבוכיות האלגוריתם צריכה להיות $O(nd)$. יש לספק תיאור מדויק של האלגוריתם אבל אין חובה לספק פסאודוקוד. יש להוכיח את נכונות האלגוריתם לנתח את סיבוכיות זמן הריצה שלו.

הדרכה: הגדירו גרף $G = (V, E)$ באופן הבא:

$$V = \{(c_i, d') \mid i \in \{1, \dots, n\}, d' \in \{0, \dots, d\}\}$$

$$E = \{((c_i, d'), (c_j, d' + 1)) \mid i \in \{1, \dots, n\}, c_j \in L_i, d' \in \{0, \dots, d - 1\}\}$$

מה ניתן להגיד על הגרף הזה? חשבו כיצד ניתן להשתמש בגרף זה כדי לפתור את השאלה.

שאלה 2

בהגדרה של אלגוריתם בלמן פורד שראינו בהרצאה, לא הייתה אף דרישה על הסדר שבו אנחנו מפעילים על הקשתות בכל איטרציה. נניח כי נגדיר את הסדר של המעבר על הקשתות באופן הבא: בתחילת האלגוריתם נסדר את הצמתים בגרף בסדר שרירותי $s = v_1, \dots, v_n$. נחלק את הקשתות בגרף באופן הבא: $E_f = \{(v_i, v_j) : i < j\}$ ו- $E_b = \{(v_i, v_j) : i > j\}$. (נניח כי בגרף אין קשתות עצמיות ואז $E = E_f \cup E_b$). נגדיר:

$$G_f = (V, E_f) \quad G_b = (V, E_b)$$

כעת כדי לעשות $Relax$ לכל הקשתות, נעבור על כל הצמתים בסדר v_1, \dots, v_n ונעשה $Relax$ רק לקשתות היוצאות מכל צומת ששייכות ל- E_f . לאחר מכן נעבור על כל הצמתים שוב בסדר v_n, \dots, v_1 ונפעיל $Relax$ רק על הקשתות שיוצאות מכל צומת ששייכות ל- E_b .

1. הוכיחו כי G_f ו- G_b הם DAG ו- $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ ו- $\langle v_n, \dots, v_1 \rangle$ הם מיונים טופולוגיים שלהם (בהתאמה).

2. הוכיחו כי לאחר $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ איטרציות מתקיים $v.d = \delta(s, v)$ לכל $v \in V$.

3. האם שינוי זה משפיע על הסיבוכיות האסימפטוטית של האלגוריתם?

שאלה 3

יהי $G = (V, E, w)$ גרף מכוון ממושקל עם פונקציית משקל $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ על הקשתות כך שאין בגרף מעגלים ממושקל שלילי. תכנן אלגוריתם שמכריע האם קיים בגרף G מעגל שמשקלו 0. זמן הריצה של האלגוריתם צריך להיות $O(nm)$. יש להסביר במדויק ובתמציתיות כיצד פועל האלגוריתם ולהוכיח את נכונותו. אין חובה לספק פסאודו-קוד.

שאלה 4 (רשות)

$G = (V, E)$ גרף לא מכוון קשיר עם פונקציית משקל $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ על הקשתות. תהי $e \in E$ קשת כלשהי בגרף. הוכח/הפרד:

- אם קיימת קבוצת צמתים $\emptyset \subset S \subset V$ כך ש e חוצה את החתך $\{S, V - S\}$ וגם $w(e) < w(e')$ לכל קשת $e' \neq e$ שחוצה את החתך $\{S, V - S\}$ (כלומר, e הינה הקשת הקלה ביותר, קלה ממש מכל קשת אחרת, שחוצה את החתך $\{S, V - S\}$), אזי e שייכת לכל MST של G .
- אם e שייכת לכל MST של G , אזי קיימת קבוצת צמתים $\emptyset \subset S \subset V$ כך ש e חוצה את החתך $\{S, V - S\}$ וגם $w(e) < w(e')$ לכל קשת $e' \neq e$ שחוצה את החתך $\{S, V - S\}$.

שאלה 5

שאלה זאת הינה שאלת המשך לשאלה 2 בתרגול 11. יהיה גרף מכוון $G = (V, E)$ עם פונקציית משקל $w : E \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ ו- $P = \langle s, \dots, v \rangle$ מסלול קצר ביותר ב- G . הוכח/הפרד: במהלך ריצת אלגוריתם דייקסטרא על הגרף G בהינתן צומת המקור s ופונקציית המשקל w , הקשתות של המסלול P יעברו את פרוצדורת הרילקס (*Relax*) בסדר בו הן מופיעות ב- P .