# תרגיל בית 1 - פתרון תמציתי

## שאלה 1

1. נכון.
נתון שקיימים קבועים $c_1, c_2, c_3, c_4, n_1, n_2 > 0$ כך ש

   (a) $0 \le c_1 g(n) \le f(n) \le c_2 g(n), \forall n \ge n_1$

   (b) $0 \le c_3 h(n) \le g(n) \le c_4 h(n), \forall n \ge n_2$

   משילוב של a ושל b נקבל ש $0 \le c_1 c_3 h(n) \le f(n) \le c_2 c_4 h(n)$, לכל $n \ge \max\{n_1, n_2\}$
ולכן $f(n) = \Theta(h(n))$.

2. לא נכון.
דוגמא נגדית: $f(n) = n$, $g(n) = \frac{1}{n}$.
הפונקציות $f$ ו $g$ הן אסימפטוטית חיוביות. $f(n) + g(n) = n + \frac{1}{n}$ ו $f(n) \cdot g(n) = 1$. לא מתקיים ש $n + \frac{1}{n} = O(1)$ מכיוון שלכל שני קבועים $c, n_0 > 0$ קיים $n \ge n_0$ כך ש $n + \frac{1}{n} > c$.

3. לא נכון.
דוגמא נגדית: $f(n) = 5$, $g(n) = 2^n$.
הפונקציות $f$ ו $g$ הן אסימפטוטית חיוביות ומתקיים ש $2^n = \omega(5)$. לא מתקיים ש $f(n) + g(n) = 2^n + 5 = \Theta(5)$ מכיוון שלכל שני קבועים $c, n_0 > 0$ קיים $n \ge n_0$ כך ש $2^n + 5 > c \cdot 5$ ולכן $2^n + 5 \notin O(5)$ ולכן $2^n + 5 \notin \Theta(5)$.

4. נכון.
נתון שלכל קבוע $c > 0$ קיים קבוע $n_0 > 0$ כך שלכל $n \ge n_0$ מתקיים ש $0 \le g(n) < cf(n)$. נבחר קבוע כלשהו $c_1 > 0$ ונסמן ב $n_1$ את הקבוע המקיים $0 \le g(n) < c_1 f(n)$, $\forall n \ge n_1$. מכאן שלכל $n \ge n_1$ מתקיים
$0 \le f(n) \le f(n) + g(n) < (c_1 + 1) f(n)$.

5. נכון.
על פי העובדה הנתונה מתקיים:
לכל $c > 0$ קיים $n_0 > 0$ כך ש $0 \le n^d < c \cdot a^n$ לכל $n \ge n_0$. מכאן שמתקיים $0 \le (\lg n)^d < c \cdot a^{\lg n}$ עבור כל $n$ שמקיים $\lg n \ge n_0$. מכיוון ש $\epsilon > 0$ מתקיים ש $2^\epsilon > 1$ ולכן אם נגדיר $a = 2^\epsilon$ ו $b = d$ נקבל שלכל $c > 0$ קיים $n_1 = 2^{n_0} > 0$ כך ש $0 \le (\lg n)^b < c \cdot (2^\epsilon)^{\lg n} = c \cdot n^\epsilon$ לכל $n \ge n_1$.

6. נכון.
ראשית, נשים לב כי: $f(n) = 2^{nlogn} = (2^{logn})^n = n^n$.
יהי $c$. עבור $n_0 = c$ לכל $n > n_0$ מתקיים:

$$cn! < n \times n! = n \times n \times (n-1) ... \times 2 \times 1$$

נוכל להתעלם מהאיבר האחרון (כי הוא 1) ונקבל מכפלה של $n$ איברים שכולם קטנים או שווים ל $n$. במילים אחרות,

$$cn! < n \times n! < n^n$$

לכל $n > n_0$ כנדרש.

7. נכון.
יהי $c > 0$. נגדיר טענת עזר: קיים $n_0$ כך שלכל $n > n_0$, $cn! > 2^n$ הוכחה:

$$cn! > 2^n \equiv \frac{n!}{2^n} > \frac{1}{c}$$

נשים לב כי:

$$\frac{n!}{2^n} > \frac{\frac{n}{2}^{\frac{n}{2}}}{2^n} = \frac{n^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}2^n} = (\frac{n}{2^3})^{\frac{n}{2}} = (\frac{n}{8})^{\frac{n}{2}}$$

ואז, לכל $n > 16$ נקבל

$$\frac{n!}{2^n} > (\frac{n}{8})^{\frac{n}{2}} > 2^{\frac{n}{2}}$$

לכן, נדרוש שיתקיים

$$2^{\frac{n}{2}} > \frac{1}{c}$$

בפרט, לכל

$$n > max(16, lg(1/c^2))$$

אפשר לראות שהטענה תתקיים. ולכן, נבחר את

$$n_0 = max(16, lg(1/c^2)$$

נחזור להוכחה:

$$f(n) = 2^{\frac{1}{k}nlg(n)} < 2^{\frac{1}{2}nlg(n)} = n^{\frac{n}{2}}$$

נסמן אי שוויון זה ב(*)

$$cn! > c\frac{n}{2}!(\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}$$

מטענת העזר, קיים $n_0$ כך ש $c\frac{n}{2}! > 2^{\frac{n}{2}}$ ואז:

$$cn! > c\frac{n}{2}!(\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}} > 2^{\frac{n}{2}}(\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}} = n^{\frac{n}{2}} > f(n)$$

כנדרש.

## שאלה 2

1. נכון.
ע"פ הגדרה מתקיים לכל $n$ ש $T_A(I) \leq T_A(n)$.

2. לא נכון.
דוגמא נגדית: אלגוריתם $A$ מבצע רק פעולות קבועות כלומר, $T_A(n) = c_1$ עבור קבוע כלשהו. קיימים $c, n_0$ כך שלכל אינסטנס $T_A(I) = c_1 \leq cn^2$ אך $T_A(n) \notin \Omega(n)$.

3. נכון.
אם לכל $n \geq n_0$ ולכל אינסטנס $I$ בגודל $n$ מתקיים ש $T_A(I) < cg(n)$ אזי בהכרח לכל $n \geq n_0$ מתקיים ש $T_A(n) < cg(n)$, מכיוון שאם לכל אינסטנס לא לוקח יותר מ $cg(n)$ אז גם פונקציית זמן הריצה שמוגדרת ע"י מקסימום תהיה קטנה מ $cg(n)$ ולכן $T_A(n) = O(g(n))$.

4. לא נכון.
דוגמא נגדית: אלגוריתם שעבור כל $n$ זוגי מבצע רק פעולה בסיסית אחת (זמן קבוע) ולכל $n$ אי זוגי מבצע $n^4$ פעולות בסיסיות. כמובן, שלכל $n_0$ נוכל למצוא $n \geq n_0$ כך שיתקיים $T_A(I) \leq cn^2$ לכל אינסטנס בגודל $n$. מהגדרת האלגוריתם ברור ש $T_A(n) \notin O(n^2)$.

# שאלה 3

שורה 1 באלגוריתם לוקחת $\Theta(1)$ זמן. הלולאה בשורות 7-9 לוקחת $\Theta(\log n)$ זמן לכל $j$. הלולאה בשורות 4-9 חוזרת על עצמה $\Theta(\log n)$ פעמים ובכל איטרציה מבצעים $\Theta(\log n)$ פעולות. כל זה חוזר על עצמו $\Theta(n/2) = \Theta(n)$ פעמים. מכאן שסיבוכיות זמן הריצה היא $\Theta(n \log^2 n)$.

# שאלה 4

ראשית, נשים לב שלכל $n$ זמן הריצה של $FindPow$ הוא $\Theta(log(n))$. שורות 2,1 ו6 לוקחות $\Theta(1)$. תחזוק לולאת ה $while$ לוקח $\Theta(log(n))$ זמן לפי הגדרת ה $log$ מאחר ומכפילים את $k$ ב2 עד שהוא גדול ממש מ $n$. בנוסף, הפלט של האלגוריתם יהיה החזקה הגדולה ביותר של 2 שנכנסת ב $n$.
כעת ננתח את זמן הריצה של $Alg\_4$. ראשית, כפי שהראנו קודם לכן, זמן הריצה של שורה 1 הוא $\Theta(log(n))$. ושורות 3,2 לוקחות $\Theta(1)$ כל אחת. בנוסף, $p$ נקבע בתחילת האלגוריתם ואינו משתנה, ולכן לולאת ה $for$ בשורות $4-10$ תתרחש $\Theta(log(n))$ פעמים ללא תלות בתכונות מספריות של $n$.
כתוצאה מכך, לכל אינסטנס חסמים על זמן הריצה יקבעו בהתאם לזמן הריצה של כל שורה בלולאת ה $for$.
נשים לב, שאם $n$ הוא חזקה של 2, ההקטנה שלו בשורה 3 תביא אותו ל0 ואז, כל שורה בלולאת ה $for$ בשורות $4-10$ תיקח $\Theta(1)$ יחידות זמן, ולכן הלולאה כולה תיקח סה"כ $\Theta(log(n))$ איטרציות. כמובן שזהו המקרה הטוב ביותר וחסם מלמטה על זמן הריצה עבור $n$ נתון. לכן, זמן הריצה של האלגוריתם כולו הוא $\Omega(log(n))$
בנוסף, נשים לב שהמקרה הגרוע ביותר הוא זה שבו ההקטנות בשורות $3,8$ לא יביאו את $n$ ל $0$ במילים אחרות, שתמיד תיהיה לו שארית מהחזקה הכי גדולה של 2 שנכנסת בו. לכן הוא יהיה מהצורה $n = 2^k - 1$
במקרה זה, $p = k - 1$ ובכל איטרציה של ה $for$ תנאי ה $if$ יתקיים, נקטין את $n$ והחזקה ש $FindPow$ תחזיר תקטן ב1. מההגדרה של $n$ $k = \Theta(log(n))$ לכן זמן הריצה הכולל במקרה הזה יהיה

$$\Theta(log(n) + log(n) - 1 + log(n) - 2 + ... + 1 + 0) = \Theta(log(n)^2)$$

זהו חסם מלמעלה על זמן הריצה של האלגוריתם לכל קלט נתון ולכן זמן הריצה של האלגוריתם הוא $\O(log(n)^2)$

## שאלה 5 (רשות)

שורה 1 באלגוריתם לוקחת $\Theta(1)$ זמן. עבור $i$ כלשהו, הלולאה בשורות 3-4 לוקחת $\Theta(1)\cdot(i^2+1)$ זמן והלולאה בשורות 6-12 לוקחת $\sum_{j=1}^{i}\Theta(1)(j^2+1)$. כמו כן, תחזוק לולאת ה For בשורות 2-12 וכן שורה 5 לוקח ביחד לוקח $\Theta(1)$ זמן. מכאן,

$$
\begin{aligned}
T_{Alg\_5}(n) &= \\
&= \Theta(1) + \sum_{i=1}^{2n}\left(\Theta(1) + \Theta(1)(i^2+1) + \sum_{j=1}^{i}\Theta(1)(j^2+1)\right) \\
&= \Theta(1) + \Theta(n) + \Theta(n^2) + \Theta(1)\sum_{i=1}^{2n} i^2 + \underbrace{\Theta(1)\sum_{i=1}^{2n}\sum_{j=1}^{i} j^2}_{=\Theta(n^4)\text{ according to question 1.6}} = \\
&= \Theta(n^2) + \Theta(n^3) + \Theta(n^4) = \Theta(n^4).
\end{aligned}
$$