תרגיל בית 4 - פתרון תמציתי

שאלה 1

1.א נשתמש בשיטה האיטרטיבית

$$T(n) \leq n + T(a) + T(n-a) = n + c + T(n-a) \leq n + (n-a) + 2c + T(n-2a) \leq \cdots \leq$$

$$\leq T(n - i \cdot a) + i \cdot c + n \cdot i - \sum_{k=1}^{i-1} k \cdot a = T(n - i \cdot a) + i \cdot c + n \cdot i - \frac{a}{2}\left(i^2 - i\right)$$

נשים לב כי עבור $i = \frac{n}{a} - 1$ מתקיים תנאי העצירה, כלומר $T(n - (\frac{n}{a} - 1) \cdot a) = T(a)$ נציב ונקבל

$$= c + \left(\frac{n}{a} - 1\right) \cdot c + n \cdot \left(\frac{n}{a} - 1\right) - \frac{a}{2}\left(\left(\frac{n}{a} - 1\right)^2 - \left(\frac{n}{a} - 1\right)\right)$$

$$= \left(\frac{n}{a}\right) \cdot c + \frac{n^2}{a} - n - \left(\frac{a}{2}\left(\frac{n}{a} - 1\right)^2 - \frac{a}{2}\left(\frac{n}{a} - 1\right)\right)$$

$$= \frac{n}{a} \cdot c + \frac{n^2}{a} - n + \frac{n}{2} - \frac{a}{2} - \frac{a}{2}\left(\frac{n}{a} - 1\right)^2$$

$$= \frac{n}{a} \cdot c + \frac{n^2}{a} - n + \frac{n}{2} - \frac{a}{2} - \frac{a}{2}\left(\left(\frac{n}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{n}{a}\right) + 1\right)$$

$$= n^2 \cdot \frac{1}{2a} + n\left(\frac{c}{a} + \frac{1}{2}\right) - a$$

$$= \Theta\left(n^2\right)$$

כעת נוכיח באינדוקציה כי $T(n) \leq n^2 \cdot \frac{1}{2a} + n\left(\frac{c}{a} + \frac{1}{2}\right) - a$

בסיס האינדוקציה: $T(a) = a^2 \cdot \frac{1}{2a} + a\left(\frac{c}{a} + \frac{1}{2}\right) = c$

הנחת האינדוקציה: לכל $m < n$ מתקיים $T(m) \leq m^2 \cdot \frac{1}{2a} + m\left(\frac{c}{a} + \frac{1}{2}\right) - a$

צעד האינדוקציה:

$$T(n) \leq T(n-a) + T(a) + n = T(n-a) + c + n$$

נשתמש בהנחת האינדוקציה

$$\leq (n-a)^2 \cdot \frac{1}{2a} + (n-a)\left(\frac{c}{a}+\frac{1}{2}\right) - a) + c + n = n^2 \cdot \frac{1}{2a} + n\left(\frac{c}{a}+\frac{1}{2}\right) - a$$

1.ב

$$T(n) \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + 1 + T(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} + c = H(n) + c = O(\log n)$$

בסיס האינדוקציה: $T(1) = T(0) + \frac{1}{1} = 1 + c$

הנחת האינדוקציה: לכל $m < n$ מתקיים

$$T(m) \leq \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i} + c$$

צעד האינדוקציה:

$$T(n) \leq T(n-1) + \frac{1}{n}$$

נשתמש בהנחת האינדוקציה עבור $T(n-1)$.

$$T(n) \leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} + c + \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} + c = H(n) + c$$

הטענה מתקיימת.

2. $T(n) = 5^n + 3 \cdot T(\lfloor n^{\frac{2}{5}} \rfloor) > 5^n$ לכן עבור $n_0 = 10$ ו־ $c = 1$ לכל $n \geq n_0$ מתקיים $T(n) > c \cdot 5^n$ ומכאן ש־ $T(n) = \Omega(5^n)$.

את החסם העליון נוכיח באינדוקציה.

טענה: קיים קבוע $c > 0$ כך שלכל $n \geq 1$ מתקיים $T(n) \leq c \cdot (5^n)$.

בסיס האינדוקציה: עבור $n < 10$ הטענה מתקיימת לכל $c \geq b$.

הנחת האינדוקציה: נניח כי לכל $k < n$ מתקיים $T(k) \leq c \cdot (5^k)$.

צעד האינדוקציה:

$$T(n) = 5^n + 3 \cdot T(\lfloor n^{\frac{2}{5}} \rfloor) \underset{induction\ step}{\leq} 5^n + 3 \cdot c \cdot 5^{\lfloor n^{\frac{2}{5}} \rfloor} \leq 5^n + 3 \cdot c \cdot 5^{n^{\frac{2}{5}}} = 5^n \left(1 + \frac{3c}{5^{n-n^{2/5}}}\right) \leq c \cdot 5^n$$

הטענה מתקיימת עבור $c = max(2, b)$.

שאלה 2

```
getWinner(A, n)
1: if n=1 then
2:     return A[1]
3: c_1 = getWinner(A[1, ..., ⌊n/2⌋], ⌊n/2⌋)
4: c_2 = getWinner(A[⌈n/2⌉, ..., n], ⌈n/2⌉)
5: count1 = 0
6: count2 = 0
7: for i=1,...,n do
8:     if isMatching(c1, A[i]) then
9:         count1 = count1 + 1
10:    if isMatching(c2, A[i]) then
11:        count2 = count2 + 1
12: if count1 > count2 then return c1
13: return c2
```

הוכחת נכונות:
ראשית נראה שאם נחלק את המערך A לשני מערכים A_1, A_2 בגודל n_1, n_2 בהתאמה (כלומר $n_1+n_2 = n$) אז המועמד המנצח בהכרח קיבל את רוב הקולות ב־ A_1 או ב־ A_2. נניח בשלילה שהטענה לא מתקיימת ונסמן ב־ v_1 את מספר הקולות שקיבל המועמד המנצח ב־ A_1 וב־ v_2 את מספר הקולות שקיבל ב־ A_2.
לפי הנחת השלילה אנחנו יודעים ש־

$$t_1 \leq \frac{n_1}{2} \quad t_2 \leq \frac{n_2}{2}$$

ולכן:

$$t_1 + t_2 \leq \frac{n_1}{2} + \frac{n_2}{2} = \frac{n_1 + n_2}{2} = \frac{n}{2}$$

בסתירה לכך שהמועמד המנצח קיבל יותר מ־ $\frac{n}{2}$ קולות.
כעת נוכיח באינדוקציה על n ש־ $getWinner$ מחזירה את המנצח הנכון.
בסיס האינדוקציה: עבור $n = 1$ המועמד המנצח קיבל את הקול היחיד ולכן הפונקציה תחזיר ואתו בשורה 2.
הנחת האינדוקציה: נניח שהפונקציה נכונה לכל $m < n$.
צעד האינדוקציה: לפי ההוכחה למעלה המועמד המנצח קיבל את מירב הקולות באחד מבין המערכים $A[1, ..., \lceil\frac{n}{2}\rceil]$ ו־ $A[1, ..., \lfloor\frac{n}{2}\rfloor]$. לכן מהנחת האינדוקציה אחד מבין c_1, c_2 הוא המנצח. נשאר לבדוק מי מביניהם קיבל יותר קולות וזה נעשה בשורות 7 עד 13.
ניתוח סיבוכיות: את מספר הקריאות ל־ $isMatching$ ניתן לתאר על ידי נוסחת הנסיגה הבאה:

$$T(n) \leq \begin{cases} O(1) & n = 1 \\ T(\lfloor\frac{n}{2}\rfloor) + T(\lceil\frac{n}{2}\rceil) + O(n) & n > 1 \end{cases}$$

נשים לב שאת נוסחת הנסיגה הזו ניתן לחסום מלמעלה על ידי:

$$T(n) \leq \begin{cases} O(1) & n = 1 \\ 2T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + O(n) & n > 1 \end{cases}$$

ניתן לראות שנוסחה זו מתאימה למקרה בשיטת האב (עבור $a = b = 2$) ולכן נקבל ש־ $T(n) = O(n \log n)$.

שאלה 3

נרחיב עץ 2-3 עם שני שדות נוספים לכל צומת v בעץ (שני השדות הופיעו בפתרונות בתרגול 6).

- $v.size = \#$ of leaves (other than the sentinels) in the sub-tree rooted at v (including v); and
- $v.sum =$ sum of keys in the leaves (other than the sentinels) in the sub-tree rooted at v (including v)

ראינו בתרגול כי התחזוקה של שדות אלו לא משנה את הסיבוכיות של הכנסה ומחיקה בעץ 2-3. נסמן את כל צמתי העץ 2-3 ב V. על מנת לממש את הפעולה $\texttt{AverageOf}(D, k_1, k_2)$ נבצע את הפעולות הבאות:

1. נמצא את הצומת x_1 בעץ המקיים $x_1 = \arg\min_{v \in V}\{v.key \mid v.key \geq k_1\}$. את הפעולה הזאת נבצע ב $O(\log n)$ זמן ע"י חיפוש בעץ את המפתח k_1. נשנה את החיפוש כך שיחזיר תמיד את העלה שהגענו אליו (שימו לב כי העלה שהגענו אליו הוא בדיוק הצומת x_1 המבוקש).
2. נמצא את הצומת x_2 המקיים $x_2 = \arg\max_{v \in V}\{v.key \mid v.key \leq k_2\}$. את הפעולה הזאת נבצע ב $O(\log n)$ זמן ע"י חיפוש בעץ את המפתח k_2. נשנה את החיפוש כך שיחזיר תמיד את העלה שהגענו אליו. אם המפתח של העלה שהגענו אליו הוא k_2 סיימנו, אחרת נמצא את ה predecessor של העלה שהגענו אליו.
3. אם $x_1.key > x_2.key$ החזר 0 אחרת, החזר

$$\frac{\texttt{Sum\_of\_smaller}(D, x_2.key) - \texttt{Sum\_of\_smaller}(D, x_1.key) + x_1.key}{\texttt{Rank}(D, x_2) - \texttt{Rank}(D, x_1) + 1}$$

כאשר הפונקציות $\texttt{Rank}$ ו $\texttt{Sum\_of\_smaller}$ אלו הפונקציות שהיו בתרגול 6 שאלות 2 ו 4 בהתאמה.

שאלה 4:

נתחזק בנוסף ל־ H ערימת מינימום נוספת A.

1. הכנס ל־ A את הבנים של השורש של H.
2. הדפס את $H(1)$.
3. כל עוד לא הודפסו k איברים
   (א) הדפס את $A(1)$.
   (ב) הוצא את $A(1)$ לתוך משתנה a.
   (ג) הכנס אל A את הבנים של a ב־ H.

נכונות: טענת עזר: בהינתן קבוצת i האיברים עם המפתחות הקטנים ביותר $T=\{a_1,a_2....a_i\}$ בערמה H אז האיבר a_{i+1} עם המפתח $i+1$ מקיים $parent.a_{i+1}\in T$.
הוכחת טענת עזר:
נניח בשלילה שהטענה לא נכונה, לכן קיים איבר a_j שלא נמצא ב־ T המקיים $parent.a_{i+1}=a_j$.
לפי תכונת הערמה $H(a_j).key<H(a_{i+1}).key$ בסתירה לכך שהמפתח של a_{i+1} הוא האיבר הבא בסדר.

כיוון שהבנים של כל איבר שמודפס נכנסים תמיד ל־ A הרי שהאיבר הבא להדפסה נמצא תמיד ב־ A. **סיבוכיות:**
הבחנה: גודל של ערמת העזר הוא לכל היותר $2k$. הכנסה ומחיקה של איבר מ־ A עולה $\log(k)$.
לכן זמן הריצה הוא לכל היותר $O(2k\cdot\log(k))$.

שאלה 5

1. ראשית נראה אם ל־ x יש שני בנים אז הצומת העוקב ל־ x נמצא בתת העץ הימני והצומת הקודם נמצא בתת העץ השמאלי. נניח בשלילה שהעוקב ל־ x שנסמן ב־ y אינו בתת העץ הימני. כמובן ש־ y לא בתת העץ השמאלי לפי הגדרת הצומת העוקב ותכונת העץ. לכן ל־ x ו־ y קיים אב קדמון משותף z. אם $z=y$ אז x בתת העץ השמאלי של z כי אחרת $y.key<x.key$ בסתירה להגדרת הצומת העוקב. אחרת x בתת העץ השמאלי ו־ y בתת העץ השמאלי של z. לכן מתקיים: $x.key<z.key\leq y.key$. אבל נשים לב ש $x.right$ גם בתת העץ השמאלי של z ולכן: $x.key<x.left.key<z.key\leq y.key$ בסתירה לכך ש־ y עוקב ל־ x. לכן העוקב ל־ x נמצא בתת העץ הימני שלו והקודם לו נמצא בתת העץ השמאלי.
כעת נסמן ב־ x^+ את הצומת העוקב ל־ x וב־ x^- את הצומת הקודם. לפי אותם שיקולים שהצגנו מעל, אם ל־ x^+ היה בן שמאלי אז הקודם ל־ x^+ היה בתת העץ השמאלי שלו. אבל אנחנו יודעים שהקודם ל־ x^+ הוא x שאינו צאצא של x^+ ולכן לא ייתכן של־ x^+ יש בן שמאלי. באופן מקביל לא ייתכן של־ x^- יש בן ימני.
2. נסמן ב־ y את הצומת העוקב ל־ x. ראשית נוכיח כי y הוא אב קדמון של x. קודם כל כמובן ש y אינו בתת העץ שמושרש בבן השמאלי של x כי אז הוא היה קטן מ־ x. נניח בשלילה ש־ y אינו אב קדמון של x. לכן ל־ x ו־ y יש אב קדמון משותף z שאינו x. $x.key<y.key$ ולכן y בתת העץ הימני של z ו־ x בתת העץ השמאלי. אבל לפי תכונת העץ החיפוש הבינאר נקבל ש־ $x.key<z.key<y.key$ בסתירה לכך ש־ y עוקב ל־ x.
כעת נשים לב ש־ $y.left$ הוא אב קדמון של x כי אחרת המפתח של x היה גדול מהמפתח של y.
לבסוף נניח בשלילה ש־ y אינו האב הקדמון העמוק ביותר של x שמקיים את תכונה זו. כלומר קיים אב קדמון עמוק יותר z שעדיין מקיים את אותה תכונה. z בתת העץ השמאלי של y כי אחרת $x.key>y.key$ ולכן $x.key<z.key<y.key$ בסתירה לכך ש־ y עוקב ל־ x.
3. לפי סעיף 2 הצומת העוקב ל־ x הוא האב הקדמון העמוק ביותר שלו שהבן השמאלי שלו הוא גם אב קדמון של x. אם $x=x.parent.left$ אז כמובן ש־ $x.parent$ עומד בתנאים אלו ולכן $x.parent$ הוא העוקב ל־ x. באופן מקביל אם $x=x.parent.right$ אז ההורה של x הוא הצומת הקודם לו.