# תרגיל בית 2
# להגשה עד 15.02.24 בשעה 23:50
# בהצלחה!

תרגיל זה מנוסח בלשון זכר מטעמי נוחות בלבד והוא מיועד לכל המגדרים.

## הוראות הגשה:

1. **הגשת התרגיל היא בקבוצות של שניים או שלושה סטודנטים בלבד (למעט סטודנטים שאושר להם באופן רשמי).**
2. **רק נציג אחד מכל קבוצה צריך להגיש את התרגיל. הגשת התרגיל במקום המיועד במודל בלבד.**
3. **קובץ ההגשה חייב להיות בפורמט pdf בלבד.**
4. **שם הקובץ המוגש יהיה בפורמט הבא בלבד: EX2_ID1_ID2 עבור זוגות; ו EX2_ID1_ID2_ID3 עבור שלשות. כאשר ID1 , ID2, ו ID3 אלו מספרי תעודות הזהות של חברי הקבוצה.**

## הערות חשובות:

1. **בתרגיל בית זה, לכל שאלה יש לספק הסברים (יש לספק הוכחות רק אם נדרש). תשובות ללא הוכחות מלאות והסברים יזכו בניקוד חלקי או לא יזכו בניקוד כלל.**
2. **במידה ותרגיל הבית מוגש בכתב יד יש לוודא כי הכתב קריא. פתרון לא קריא יפסל.**
3. **יש לוודא את איכות הסריקה לפני ההגשה, פתרון המכיל סריקה לא ברורה יפסל.**
4. **על הגשה של תרגיל בית מוקלד יינתנו 10 נקודות בונוס לציון התרגיל.**

## שאלה 1

א. הוכח שבגרף לא מכוון $G = (V, E)$ תת מסלול של מסלול קצר ביותר הוא גם כן מסלול קצר ביותר

ב. הוכח/הפרך: יהי $G = (V, E)$ גרף קשיר לא מכוון. הוכח כי $G$ הוא גרף דו צדדי אם ורק אם אין בו מעגלים באורך אי זוגי

## הגדרה עבור שאלה 2

יהי $G = (V, E)$ גרף לא מכוון ויהי $k > 0$ מספר שלם. צביעה ב $k$ צבעים של מכוון $G$ היא פונקציה $c : V \to \{1, 2, \ldots, k\}$ המקיימת $c(v) \neq c(u)$ עבור כל קשת $(u, v) \in E$. במילים אחרות, המספרים $1, 2, \ldots, k$ מייצגים $k$ צבעים ולכל שני צמתים סמוכים צבעים שונים. גרף $G$ נקרא $k$־צביע אם קיימת צביעה שלו ב $k$ צבעים.
נשים לב שאם גרף הוא $k$־צביע אז הוא גם $k'$־צביע לכל $k' \geq k$ (לא חייבים להשתמש בכל הצבעים).

## שאלה 2

<u>הגדרה:</u> יהי $G = (V, E)$ גרף לא מכוון עם $n = |V| \geq 2$ צמתים ו $m = |E|$ קשתות, ויהי $k > 0$ מספר שלם. נאמר ש $G$ הוא $k$־דליל אם קיימות $k$ קבוצות של קשתות $E_1, \ldots, E_k \subseteq E$ כך שמתקיים:

1. $E_1 \cup \cdots \cup E_k = E$.
2. $E_i \cap E_j = \emptyset$ לכל $1 \leq i < j \leq k$.
3. הגרף $G_i = (V, E_i)$ הוא יער לכל $i \in \{1, \ldots, k\}$.

נשים לב שאם גרף הוא $k$־דליל אז הוא גם $k'$־דליל לכל $k' \geq k$ (הקבוצות $E_i$ יכולות להיות ריקות).
ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח: אם גרף $G = (V, E)$ הוא $k$־דליל, אז $k \geq \frac{m}{n-1}$.

ב. הוכח: אם גרף $G = (V, E)$ הוא $k$־דליל, אז קיים צומת ב $G$ שדרגתו קטנה ממש מ $2k$.

ג. הוכח: אם גרף $G = (V, E)$ הוא $k$־דליל, אז הוא $2k$־צביע.
**רמז:** ניתן להעזר בסעיף ב ביחד עם העובדה שאם $G$ הוא $k$־דליל, אז לכל צומת $v \in V$ מתקיים שתת הגרף המושרה ע"י קבוצת הצמתים $V - \{v\}$ הוא $k$־דליל.

## שאלה 3

א. בהנתן גרף $G = (V, E)$ לא מכוון, בעל $C$ מחלקות קשירות, הוכח כי: $|E| \geq |V| - |C|$.

ב. הוכח כי לכל גרף קשיר לא מכוון $G = (V, E)$ בעל $n$ צמתים ולכל $1 \leq k \leq n$ קיים תת גרף $G'$ כך ש $G'$ עץ בעל $k$ צמתים

ג. לפניך רשימת תנאים. לכל תנאי בנפרד, הוכח/הפרך שקיים גרף $G = (V, E)$ לא מכוון שמקיים אותו

1. עץ בעל 9 צמתים וסכום דרגות 18
2. גרף בעל 5 רכיבי קשירות, 12 צמתים ו־7 קשתות
3. גרף בעל 5 רכיבי קשירות, 30 צמתים ו־24 קשתות
4. גרף בעל 9 קשתות, 9 צמתים וללא מעגלים

## שאלה 4

יהי $T$ עץ מושרש בייצוג left-child-right-sibling. כל צומת ב $T$ מחזיק שדה נוסף בשם $degree$. תכננו אלגוריתם רקורסיבי המעדכן את שדה ה־$degree$ של כל צומת להיות הדרגה שלו ב־$T$ (נדגיש כי מדובר על דרגה בעץ המושרש, כלומר מספר הילדים ולא מספר השכנים). דרישות מהאלגוריתם:

- זמן הריצה של האלגוריתם צריך להיות $O(n)$ כאשר $n$ הינו מספר הצמתים ב $T$.
- מלבד עדכון שדה ה־$degree$ אסור לשנות את $T$. בפרט, אסור להוסיף לצמתים ב־$T$ שדות נוספים.

יש לספק פסאודוקוד והסבר מילולי לאופן פעולת האלגוריתם והסיבוכיות.

## שאלה 5 (רשות)

תכנן אלגוריתם שמקבל כקלט 100-rooted tree לא ריק $T$ בייצוג rooted trees with bounded degree ומחזיר true אם כל העלים של העץ באותו עומק ו false אחרת. דרישות מהאלגוריתם:

- זמן הריצה של האלגוריתם צריך להיות $O(n)$ כאשר $n$ הינו מספר הצמתים ב $T$.
- לאלגוריתם מותר להשתמש ב $O(1)$ זיכרון (מעבר לייצוג של העץ הנתון $T$).
  שים לב: אלגוריתם רקורסיבי עם עומק רקורסיה $h$ צורך $\Omega(h)$ זיכרון.
- אסור לשנות את $T$. בפרט, אסור להוסיף לצמתים של $T$ שדות נוספים.

יש לספק פסאודו־קוד והסבר מילולי לאופן פעולת האלגוריתם והסיבוכיות.