

מודלים לא לינאריים בחקר ביצועים --- תרגיל בית 10

26 במאי 2024

הנחיות להגשה

- יש להגיש קובץ pdf יחיד.

שאלה 1

- א. נתונה בעיית אופטימיזציה בה כל האילוצים מוגדרים על-ידי פונקציות גזירות ברציפות. נניח שלבעיה יש לפחות נקודת KKT אחת. האם בהכרח יש לה פתרון מיטבי? נמקו את תשובתכם או הביאו דוגמה נגדית.
- ב. נתונה בעיית אופטימיזציה בה כל האילוצים מוגדרים על-ידי פונקציות גזירות ברציפות. נניח שלבעיה אין כלל נקודות KKT. האם בהכרח אין לבעיה פתרון מיטבי? נמקו את תשובתכם או הביאו דוגמה נגדית.

שאלה 2

נתונה בעיית האופטימיזציה

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^2} \quad & -x_1 x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2^2 \leq 2, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

- א. הוכיחו שהתחום האפשרי חסום.
- ב. מיצאו את כל נקודות KKT של הבעיה.
- הערה: שימו לב שקיימים שלושה אילוצים. בשביל לפתור את המערכת, ניתן לחלק למקרים אפשריים של הכופלים.
- ג. מיצאו את כל הנקודות הלא רגולריות של הבעיה.
- הערה: שימו לב שקיימים שלושה אילוצים.
- ד. הוכיחו שקיים לבעיה פתרון מיטבי ומיצאו אותו.

שאלה 3

נתונה בעיית האופטימיזציה

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} \quad & \mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^4 \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = 1, \\ & \mathbf{x} \geq 0. \end{aligned}$$

א. מוצאו את כל נקודות KKT של הבעיה.

ב. מוצאו פתרון מיטבי של הבעיה. האם יש צורך למצוא נקודות לא רגולריות בשביל למצוא פתרון מיטבי כלשהו? האם תנאי KKT הם מספיקים לפתרון מיטבי? האם ניתן לדעת מראש שהם הכרחיים?

שאלה 4

נתונה בעיית האופטימיזציה

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} \quad & \mathbf{x}_1^2 - \mathbf{x}_2^2 - \mathbf{x}_3^2 \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{x}_1^4 + \mathbf{x}_2^4 + \mathbf{x}_3^4 \leq 1. \end{aligned}$$

א. האם הבעיה קמורה? ללא חישובים נוספים, האם תנאי KKT הם מספיקים לפתרון מיטבי? האם הם הכרחיים?

ב. הוכיחו שיש לבעיה פתרון מיטבי.

ג. מוצאו את כל נקודות KKT של הבעיה.

ד. מוצאו את כל הנקודות הלא רגולריות של הבעיה. כעת, האם תנאי KKT הם הכרחיים?

ה. מוצאו את כל הפתרונות המיטביים של הבעיה.

שאלה 5

מוצאו את כל הפתרונות המיטביים של בעיית האופטימיזציה

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} \quad & -\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_3 \\ \text{s.t.} \quad & \alpha^2 \mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^2 + \mathbf{x}_3^2 \leq 1, \end{aligned}$$

עבור $\alpha > 0$ כלשהו.

שאלה 6

נתונה בעיית האופטימיזציה

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} \quad & x^3 + y^3 + z^3 \\ \text{s.t.} \quad & x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{aligned}$$

א. האם הבעיה קמורה?

ב. הוכיחו שכל נקודות המקסימום המקומי של הבעיה הן גם נקודות KKT.

ג. מציאו את כל נקודות KKT של הבעיה.

ד. מציאו את כל הפתרונות המיטביים של הבעיה.

שאלה 7

תהי בעיית האופטימיזציה

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \end{aligned}$$

עבור $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ כך ש- $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}_n$ ו- f_i רציפות ב- \mathbb{R}^n . הוכיחו שאם \mathbf{x}^* נקודת מינימום מקומי של הבעיה, אז $I(\mathbf{x}^*) \neq \emptyset$.