1.א) f גזירה ברציפות. $\exists x: x$ KKT

הטענה נכונה, אם ק"מ x שהוא נק' KKT אזי

קיימים $\lambda_1,\dots,\lambda_m \geq 0$ ו-$\mu_1,\dots,\mu_p$ כך ש-

$$\begin{cases} \nabla_x L(x^*,\lambda,\mu) = \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j \nabla h_j(x^*) = 0_n \\ \lambda_i \cdot g_i(x^*) = 0, \quad \forall i \in [m] \end{cases}$$

ובפרט מהטענה שראינו בתרגול שאם הבעיה היא בעיית

תכנות קמור אז כל נק' KKT מינימום גלובלי.

מכיוון ש-f גזירה ברציפות אזי זו בעיית תכנות קמור

ולכן יש פתרון מיטבי ■

1. (המשך)

ב

נפריך את הטענה. יהי בעיית אופטימיזציה הבאה:

$$\min \; x_1+x_2$$
$$\text{s.t.} \;\; (x_1^2+x_2^2-1)^2=0$$

לגרנז'יאן: $\mathcal{L}(x_1,x_2,\mu)=x_1+x_2+\mu(x_1^2+x_2^2-1)^2$

נרשום את המערכת KKT שלנו:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1+4\mu x_1(x_1^2+x_2^2-1) \\ 1+4\mu x_2(x_1^2+x_2^2-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{KKT cond.} \\ (x_1^2+x_2^2-1)^2=0 & \text{פיזיביליות} \end{cases}$$

$$(x_1^2+x_2^2-1)^2=0 \Rightarrow x_1^2+x_2^2-1=0 \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1+4\mu x_1(x_1^2+x_2^2-1) \\ 1+4\mu x_2(x_1^2+x_2^2-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

לכן לבעיה זאת אין נקודות KKT.

קבוצת האילוצים סגורה וחסומה כי מהווה ~~שפה~~ שפה של ספרת היחידה.
פונ' המטרה - רציפה ולכן לפי ויירשטראס קיים פתרון מיטבי.

שאלה 2:

$$\min_{x\in\mathbb{R}^2} -x_1\cdot x_2$$
$$\text{s.t } x_1+x_2^2\le 2$$
$$x\ge 0$$

א) נראה שהאילוצים חסומים:

$$x_1+x_2^2\le 2,\quad x_2,x_1\ge 0 \Rightarrow 0\le x_1+x_2^2\le 2$$

כלומר $x_1+x_2^2\in[0,2]$ חסום.

ב) $L(x,\lambda,\mu) = -x_1\cdot x_2 - \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 + \mu(x_1+x_2^2-2)$

תנאי KKT
$$\begin{pmatrix} -x_2+\mu-\lambda_1 \\ -x_1+\mu\cdot 2x_2-\lambda_2 \end{pmatrix}$$

השלמות רוקפים $\mu(x_1+x_2^2-2)=0,\ -\lambda_1 x_1=0,\ -\lambda_2 x_2=0$

תנאי מכפלים $\mu,\lambda_1,\lambda_2\ge 0$

פיזיבליים $\forall i$:
$$-x_1,-x_2\le 0$$
$$x_1+x_2^2-2\le 0$$

עבור $\mu=\lambda_1=\lambda_2=0$ נקבל תנאי KKT

$$\begin{pmatrix} -x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}=0 \Rightarrow \boxed{(0,0)\ \text{KKT}}$$

אם $\mu,\lambda_1,\lambda_2>0$ נקבל מהשלמות הרוקפיות כי:

$-x_2=0,\ -x_1=0$ וגם $x_1+x_2^2-2=0 \Rightarrow -2=0$

כלומר אין כי הגענו לסתירה

אם רק $\lambda_1=\lambda_2=0,\ \mu>0$ נקבל: $x_1+x_2^2-2=0$ כלומר

$$\begin{pmatrix} -x_2+\mu \\ -x_1+2\mu x_2 \end{pmatrix}=0$$

לכן נקבל $\boxed{\left(\frac{4}{3},\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\ \text{KKT}}$

opT HW10

2) ב. כמובן נק' אי רגולריות.

נסתכל על האילוצים של הבעיה:

$$\begin{cases} x_1+x_2^2\le 2 \\ x_1\ge 0 \\ x_2\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix}1\\2x_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} x_1+x_2^2\le 2 \\ -x_1,-x_2\ge 0 \end{matrix} \right\}$$

זה לא יכול להיות ת"ל מאחר והתנאים קיימים כי אז נקבל $0=-2$.

נסתכל על כל תת קבוצה בנפרד:

לכן לא $\left\{ \begin{pmatrix}1\\2x_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} x_1+x_2^2=0 \\ -x_1=0 \end{matrix} \Rightarrow -x_2=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \right\}$

לכן לא $\left\{ \begin{pmatrix}1\\2x_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} x_1+x_2^2=0 \\ x_2=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} -x_2=0 \\ -x_1=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right\}$

לכן לא $\left\{ \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} \;\middle|\; x_1,x_2=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} \right\}$

לכן בכלל כל הקבוצות ולכן אין קבוצה ת"ל.

ג) אנו יודעים מ~~[illegible]~~ כי הפונקציה קמורה וגם חסומה כי כולל נק' על השפה => ויירשטראס כי גם קומפקט ונוכל מהרה דעה לכן נקבל מינימום בקבוצה, פתרון מיטבי. אנו יודעים כי אותו נק' זו נק' KKT או אי-רגולרית. לכן נציב ונבחר את הפתרון המיטבי.

$$\text{Min } 0\cdot 0=0, \quad \text{[illegible] } -\frac{4}{3}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}} = -\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} < 0$$

לכן $\left(\frac{4}{3},\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ פתרון מיטבי.

(ii) הפונקציה גזירה פעמיים ולכן נסתכל על ההסיאן

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

לכן ממשפט נובע שההסיאן לא מוגדר והפונ' הנ"ל לא קמירה.

לכן זה לא מספיק כי $\{\text{רגולריות}\} \cup \{KKT\} \subseteq \{\text{optimal}\}$
כי אולי הפתרון המיטבי הינו לא KKT.

ג) באופן גאומטרי, נוכל לרשום את הבעיה האופטימיזציה בצורה הבאה:
$\|x\|_4 \le 1$
ו- $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ שייכת לקבוצה זו. מכיוון שפונק' המטרה רציפה והאילוצים יש את נק' השפה והקומפקטיות נובע מ- W-
שיש מינימום כלומר יש פתרון מיטבי.

ד) נחלק למקרים כאשר ה
$x_1^4+x_2^4+x_3^4=1$ מקרה 0:

$\Downarrow$

$x_1+2\lambda x_1^3=0 \Rightarrow$ אם $x_1 \neq 0$
$x_1(\underbrace{1+2\lambda x_1^2}_{>0})=0$

$\Downarrow$

$x_2, x_3 = 0 \text{ or } \pm\sqrt{\frac{1}{2\lambda}}$

תנאי KKT
$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 2x_1+4\lambda x_1^3 \\ -2x_2+4\lambda x_2^3 \\ -2x_3+4\lambda x_3^3 \end{pmatrix} \\ \lambda(x_1^4+x_2^4+x_3^4-1)=0 & \text{המשלים} \\ x_1^4+x_2^4+x_3^4-1 \le 0 & \text{פיזיביליות} \\ \lambda \ge 0 & \text{תנאי כפולים} \end{cases}$$

אם $\lambda = 0$:

$$\begin{pmatrix} 2x_1 \\ -2x_2 \\ -2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

פלי פתרון שכבר מצאנו לכן $\boxed{(0,0,0)}$ KKT

לשני $\sqrt{\frac{1}{2\lambda}}$ נקבל $0+\frac{1}{4\lambda^2}+2=1 \Rightarrow \cancel{\ldots}$ $\lambda = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$

בנוסף $\pm\sqrt{\frac{1}{2\lambda}} \Rightarrow 0+\frac{1}{4\lambda^2}+0=1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$

לכן גם $\boxed{(0,0,\pm 1),(0,\pm 1,0),(0,\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}},\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}})}$

n3.

$$\min_{x\in\mathbb{R}^2} \; x_1^2+x_2^4$$

$$\text{s.t} \quad x_1+x_2=1$$
$$x\geq 0$$

ב)

לגרנז'יאן:

$$\mathcal{L}(x_1,x_2,\mu,\lambda_1,\lambda_2)=$$

$$= x_1^2+x_2^4+\mu(x_1+x_2-1)-\lambda_1\cdot x_1-\lambda_2\cdot x_2$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 2x_1+\mu-\lambda_1 \\ 4x_2^3+\mu-\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{KKT cond.} \\ -\lambda_1 x_1 = 0 & \\ -\lambda_2 x_2 = 0, & \text{השלמה חזקה} \\ x_1+x_2-1=0 & \\ -x_1\leq 0 & \text{פיזיביליות} \\ -x_2\leq 0, & \\ \lambda_1,\lambda_2\geq 0, & \text{תנאי כופלים} \end{cases}$$

נחלק למקרים לפי λ:

$\underline{\lambda_1=\lambda_2=0:}$

$$\begin{cases} 2x_1+\mu=0 \\ 4x_2^3+\mu=0 \end{cases} \Rightarrow 4x_2^3-2x_1=0 \qquad (\text{KKT})$$

$$\begin{cases} 4x_2^3+\mu=0 \\ x_1+x_2=1 \end{cases} \Rightarrow 4x_2^3-2(1-x_2)=0 \qquad (\text{פיזיביליות})$$

$$4x_2^3-2+2x_2=0 \Rightarrow 2x_2^3+x_2-1=0$$

פתרון היחיד- $x_2=0.589 \Leftarrow x_1=0.411$

$\Leftarrow$ קיבלנו נקודה $(0.411,0.589)$ שהינה נקודת KKT ונקודה פיזיבילית

$\lambda_1>0,\ \lambda_2=0:$

מהשלמת החורים - $x_1=0$

$$\begin{cases} \mu-\lambda_1=0 \\ 4x_2^3-\mu=0 \end{cases} \Rightarrow 4x_2^3=-\lambda_1 \Rightarrow x_2<0 \rightarrow$$ סתירה

$\lambda_1=0,\ \lambda_2>0:$

$$\begin{cases} 2x_1+\mu=0 \\ \mu-\lambda_2=0 \end{cases} \Rightarrow 2x_1=-\lambda_2 \Rightarrow x_1<0 \rightarrow$$ סתירה

$\lambda_1>0,\ \lambda_2>0:$

מהשלמת החורים: $x_1=x_2=0$

$\Rightarrow x_1+x_2=0\neq 1 \Rightarrow$ סתירה לפיזיביליות

לכן, קיבלנו ש- $(0.411, 0.589)$ נקודת KKT יחידה.

(ב)

פונ' המטרה קמורה וגזירה ברציפות כסכום קמורות וגזירות ברציפות.

האילוצים שלנו ליניאריים.

לפי הנלמד בהרצאה, $optimal \subseteq KKT$. הראינו ש- $KKT \neq \{\emptyset\}$

ומכאן קיים פתרון מיטבי. אין צורך למצוא נקודות אי-רגולריות כדי למצוא פתרון מיטבי.

ואכן יש נקודות אי-רגולריות שיהוו פתרון מיטבי גם כן.

4) ק)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4x_1^3 \\ 4x_2^3 \\ 4x_3^3 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_1^4+x_2^4+x_3^4=1 \right\}$$

הקבוצה ת"ל $\iff$ $x_1=x_2=x_3=0$ כלומר $(0,0,0)$ פתרון

אבל זה לא מקיים את האילוץ ולכן אין נק' אי רגולריות

$\Rightarrow$ תנאי KKT הכרחי עבור $\phi \neq \{optimal\}$

מכיוון ש $\{optimal\} \subseteq \{KKT\}$

ג) נבדוק אילו ערכים ממזערים את הפונקציה המטרה

ואילו הנקודות המקסימליות

$$\underset{\substack{x\in\mathbb{R}^3 \\ x\in\{KKT\}}}{\operatorname{argmax}} f(x) = \left\{\left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$

5

$$\min_{x\in\mathbb{R}^3} -x_1x_2x_3$$

$$\text{S.T } \alpha^2x_1^2+x_2^2+x_3^2\le 1$$

$$\alpha>0$$

נראה קודם שקיים פתרון מינימלי לבעיה.

נוכיח כי הביטוי הוא ספראיד: עבור $c=1$, $\alpha=\frac{1}{2}>0$

נקבל $\alpha^2x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$

לכן מווירשטראס נקבל מינימום כי התחום קומפקטי

הפונקציה מוגדרת היטב רציפה וגזירה.

נחשב את ה Lagrangian:

$$L(x,\lambda)=-x_1x_2x_3+\lambda(\alpha^2x_1^2+x_2^2+x_3^2)$$

KKT:

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}-x_2x_3+2\lambda\alpha^2x_1\\-x_1x_3+2\lambda x_2\\-x_1x_2+2\lambda x_3\end{pmatrix}=0 & \text{KKT}\\[2mm] \lambda(\alpha^2x_1^2+x_2^2+x_3^2-1)=0 & \text{השלמת בקיום}\\ \alpha^2x_1^2+x_2^2+x_3^2-1\le 0 & \text{פיזיביליות}\\ \lambda\ge 0 & \text{תנאי כוללים}\end{cases}$$

נסתכל על ערכים שונים של λ:

$\lambda=0$:

$$\begin{cases}-x_2x_3=0\\-x_1x_3=0\\-x_1x_2=0\end{cases}$$

אם $x_3\neq 0$, $x_1=x_2=0$ כך ש $(0,0,x_3)$ יהיו פיזיביליות

צריך שיתקיים $|x_3|\le 1$ ויהיו KKT

$x_2\neq 0$, $x_3=x_1=0$: כך ש $(x_1,0,0)$ פיזיבלי צריך ש

$\alpha^2x_1^2\le 1 \Leftarrow |x_1|\le\frac{1}{\alpha}$ ובפרט KKT

$x_1=x_2=x_3=0$: $-1<0$ ולכן $(0,0,0)$ KKT opt HW10

5) נסתכל על סעיף ג': נקודת $\alpha^2x_1^2+x_2^2+x_3^2-1=0$

נסתכל על $(0,0,0)$ ולכן אינה רגולרית כי נקבל $0=-1$

עבור $x_1,x_2,x_3\neq 0$:

$$-x_2x_3+2\lambda\alpha^2x_1=0 \Rightarrow 2\lambda\alpha^2x_1=x_2x_3 \Rightarrow x_1=\frac{x_2x_3}{2\lambda\alpha^2}$$

$$\Rightarrow -\frac{x_2x_3^2}{2\lambda\alpha^2}+2\lambda x_2=0 \Rightarrow \frac{-x_2x_3^2}{2\lambda\alpha^2}+2\lambda x_2=0$$

נציב

$$\Rightarrow \frac{-x_3^2}{2\lambda\alpha^2}=-2\lambda \Rightarrow x_3^2=4\lambda^2\alpha^2 \Rightarrow x_3^2=4\lambda^2\alpha^2$$

$$\Rightarrow \boxed{x_3=\pm 2\lambda\alpha}$$

זה סימטרי לגבי x_2 ולכן $\boxed{x_2=\pm 2\lambda\alpha}$

ובפרט נקבל $x_1=\frac{x_2x_3}{2\lambda\alpha^2}=\frac{4\lambda^2\alpha^2}{2\lambda\alpha^2}=2\lambda$

$$\Rightarrow \boxed{x_1=\pm 2\lambda}$$

נציב ב $\alpha^2x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ ונקבל בפרט

$$\alpha^2 4\lambda^2+8\lambda^2\alpha^2=1 \Rightarrow 12\lambda^2\alpha^2=1 \Rightarrow \lambda=\pm\frac{1}{\sqrt{12}\alpha} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{12}\alpha}$$

לכן נקבל ס.ב. $\boxed{\left(\pm\frac{1}{\alpha\sqrt{3}},\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$ נק' KKT

נק' אי רגולריות: נסתכל על הגרדיאנט והקבוצה ונקבל

$$\left\{\begin{pmatrix}2\alpha^2x_1\\2x_2\\2x_3\end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha^2x_1^2+x_2^2+x_3^2-1=0\right\}$$

גם $\Leftrightarrow x_1=x_2=x_3=0$

ולכן אין באף הנקודות כי אז נקבל $0=-1 \Leftarrow$ אין נק' אי רגולריות

לכן המינימום מתקיים הם נק' KKT שמקיימות את הביטוי!

לכן $\left(\frac{1}{\sqrt{3}\alpha},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{3}\alpha},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{3}\alpha},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{3}\alpha},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

ממזערות את הביטוי

№6.

$$\max_{x\in\mathbb{R}^3} x^3+y^3+z^3$$

$$s.t \quad x^2+y^2+z^2=1$$

(א)

נשים לב שפונ' המטרה איננה קמורה שכן ל- $f(x)$

$$f(x)=x^3 , \ f'(x)=3x^2 , \ f''(x)=6x$$

כלומר קיימים נקודות שבהם $f''(x)<0$.

(ב)

לפי המשפט בהרצאה, $\text{optimal} = \text{KKT} \cup \text{irregular}$

לכן מספיק להראות ש- $\text{irregular} \neq \emptyset$ ואז כל נקודת מקסימום

גם היא נקודת KKT. קבוצת הגרדיאנטים של האילוצים:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \ s.t \ x^2+y^2+z^2=1 \right\}$$

בו היא לא קבוצה ב"ת כיוון שלא מתקיים $x=y=z=0$

לכן אין נקודות אי-רגולריות ומתקיים: $\text{optimal} = \text{KKT}$

(ג)

לגרנג'יאן:

$$\mathcal{L}(x,y,z,\mu) = x^3+y^3+z^3+\mu(x^2+y^2+z^2)$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 3x^2+2\mu x \\ 3y^2+2\mu y \\ 3z^2+2\mu z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , & \text{KKT cond.} \\ x^2+y^2+z^2-1=0 , & \text{פיזיביליות} \end{cases}$$

ה: $x=0$ או $x=-\frac{2}{3}\mu$

$y=0$ או $y=-\frac{2}{3}\mu$

$z=0$ או $z=-\frac{2}{3}\mu$

$(0,0,0)$ אינה פיזיבילית. נחלק למקרים:

$x=-\frac{2}{3}\mu,\ y=z=0:$

פיצ'יבילית $\Rightarrow \frac{4}{9}\mu^2=1 \Rightarrow \mu^2=\frac{9}{4} \Rightarrow \mu=\pm\frac{3}{2}$

$\Leftarrow$ $(\pm1,0,0)$ - נקודות KKT

$x=0,\ y=0,\ z=-\frac{2}{3}\mu:$

$\Rightarrow \mu=\pm\frac{3}{2}$

$\Leftarrow$ $(0,0,\pm1)$ - נקודות KKT

באותו אופן נקבל כי - $(0,\pm1,0)$ הם נקודות KKT.

$x=y=-\frac{2}{3}\mu,\ z=0:$

$\frac{4}{9}\mu^2\cdot 2=1 \Rightarrow \mu=\pm\sqrt{\frac{9}{8}}=\pm\frac{3}{2\sqrt{2}}$

$\Rightarrow x=y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftarrow$ $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$ - נקודות KKT.

המקרים הבאים סימטריים לחלוטין, $x=z=-\frac{2}{3}\mu,\ y=0$ / $y=z=-\frac{2}{3}\mu,\ x=0$

$\Leftarrow$ $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

- כולם נקודות KKT.

$x=y=z=-\frac{2}{3}\mu:$

$3\cdot\frac{4}{9}\mu^2=1 \Rightarrow \mu=\pm\sqrt{\frac{9}{12}}=\pm\frac{3}{2\sqrt{3}}$

$\Leftarrow$ נקודות $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ - נק' KKT

3

כל הנקודות KKT שנמצאו מאותו מקרה הן מאיזוט אותה ערך הפונקציה, לכן נציג נק' אחת (לא יותר) שמתאימה לכל מקרה.

ונבחר את המקסימום.

$$f(1,0,0)=1 \qquad f\left(-\tfrac{1}{\sqrt2},-\tfrac{1}{\sqrt2},0\right)=-\tfrac{1}{\sqrt2}$$

$$f(-1,0,0)=-1 \qquad f\left(\tfrac{1}{\sqrt2},\tfrac{1}{\sqrt2},0\right)=\tfrac{1}{\sqrt2}$$

$$f\left(\tfrac{1}{\sqrt3},\tfrac{1}{\sqrt3},\tfrac{1}{\sqrt3}\right)=\tfrac{1}{\sqrt3} \qquad f\left(-\tfrac{1}{\sqrt3},-\tfrac{1}{\sqrt3},-\tfrac{1}{\sqrt3}\right)=-\tfrac{1}{\sqrt3}$$

$\Leftarrow$ פתרונות המיטב"ם:

$$(0,0,1)\ ;\ (0,1,0)\ ;\ (1,0,0)$$

דמ.

נניח בשלילה כי $I(x^*) = \emptyset$, אזי $\forall i: f_i(x^*) < 0$.

$$\nabla f(x) = c$$

$\downarrow$

f - פונ' המטרה

נבחר את כיוון הירידה להיות $d = -\nabla f(x)$.

$$\Rightarrow f'(x;d) = -c^T c < 0$$

לכן קיימת סביבה $B(x^*, r)$ בה אנחנו יכולים ללכת בכיוון $d = -c$

של הנקודה $x \in B(x^*, r)$ כך ש- $\forall i: f_i(x) < 0$ (רציפות).

d - כיוון הירידה עבור פונ' מטרה f ולכן: $f(x) < f(x^*)$ $\Rightarrow$ **סתירה**