1 א)

$$f(x) = x^2+2xy+2y^2+z^2+3x-4y$$

$$f(x) = (x+y)^2+y^2+z^2+3x-4y$$

1) נתון $x,y,z\geq 1$ ונפרק ע"פ האילוצים ניתן לראות כי f קמורה בת"ה

כסכום ומכפלה של פונקציות קמורות

נפרק את האילוצים ונראה שהם קמורות:

$$f_1(x) = \sqrt{2x^2+xy+4y^2+4} = \sqrt{(x+\tfrac{1}{2}y)^2+x^2+(2y)^2-(\tfrac{1}{2}y)^2+z^2}$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|_2$$

לכן f_1 קמורה עקב החלפת משתנים לינארים של פונקציה שהיא נורמה קמורה.

$$f_2(x) = \frac{(x-y+z+1)^2}{x+y}$$

המונה ריבועי והמכנה לינארי ולכן עם החלפת לינארי של המונה נקבל כי f_2 קמורה.

2) אילוצים לינאריים $\Leftarrow$ קמורים

לכן סה"כ קיבלנו כי פונקציית המטרה וקבוצת האילוצים קמורים

$\Leftarrow$ בעיה שהיא תכנות קמור.

קוד:

```python
import cvxpy as cp
import numpy as np
x = cp.Variable(3)
b = 1
A = np.array([[1, 1 / 2, 0], [1, 0, 0], [0, 15 ** (1 / 2) / 2, 0], [0, 0, 0]])
D = np.array([1, -1, 1])
E = np.array([1, 1, 0])
y = np.array([0,0,0,2])
objective = cp.Minimize(cp.square(x[0] + x[1]) + cp.square(x[1]) + cp.square(x[2]) + 3 * x[0] - 4 * x[1])
constraints = [cp.norm(A @ x + y) + cp.quad_over_lin(D @ x + b, E @ x) <= 6, x >= 1]
result = cp.Problem(objective, constraints).solve()
print(f"Optimal value: {result}")
print(f"Optimal var: {x.value}")
```

HW08

```
C:\Users\USER\PycharmProjects\Optimization\.venv\Scripts\python.exe C:\Users\USER\PycharmProjects\Optimization\HW08.py
Optimal value: 5.0000000009241266
Optimal var: [1. 1. 1.]
```

פלט:

1.

ב

$$f(x,y) = \sqrt{2y+5} - x^2 - 2xy - y^2 - 2x - 3y$$

נוכיח שפונקצ"ית המטרה קמורה.

- נשים לב כי $x, y, 2x, 3y$
  כולם קעורות לפי לינאריות
- $x+y$ קמורה תחת טרנספורמציה לינארית
- $(x+y)^2$ גם קמורה כי $\phi(t)=t^2$ קמורה ועולה
- מכאן $-(x+y)^2$ קעורה לפי משפט שראינו
- $2y+5$ קעורה לפי לינאריות
- נגדיר $g(t)=\sqrt{2t+5}$, אז: $g'(t)=\frac{2}{\sqrt{2t+5}}$
- וגם $g''(t) = \frac{-\frac{2}{\sqrt{2t+5}}}{2t+5}$

תחת האילוץ $t \geq 1$, g מוגדרת היטב ו- $g''(t)<0$

ולכן g קעורה.

לכן $f(x,y)$ קעורה כסכום קעורות.

```
constraints = [
    cp.quad_over_lin(x[0] , x[0] + x[1]) + cp.power(cp.quad_over_lin(x[0], x[1]) + 1,
8) <= 100,
    x[0] + x[1] >= 4,
    x[1] >= 1
]

# Define the objective function
objective = cp.Maximize(cp.sqrt(2*x[1] + 5) - cp.square(x[0] + x[1]) - 2*x[0] -
3*x[1])



# Formulate and solve the problem
problem = cp.Problem(objective, constraints)
problem.solve()

# Output the solution
print("Optimal value:", problem.value)
print("Optimal x:", x[0].value)
print("Optimal y:", x[1].value)
```

נוכיח שהאילוצים קמורים.

לפי תרגול: $\frac{x^2}{x+y}$ קמור.

לפי תרגול: $\frac{x^2}{y}+1$ גם קמור.

תחת האילוצים $\frac{x^2}{y}+1>0$ $\phi(t)=t^2-1$ קמורה ומונ' עולה ולכן

גם $\left(\frac{x^2}{y}+1\right)^2$ גם קמורה (הרכבה)

נפעיל את ההרכבה 3 פעמים ונקבל גורם קמור.

קיבלנו ש- $\left(\frac{x^2}{y}+1\right)^2$ הוא גורם קמור והאילוץ עליו הוא קבוצת רמה

של פונקצ"יה קמורה -> אילוץ קמור.

```
Optimal value: -23.39467529502538
Optimal x: 1.4168663173190004
Optimal y: 2.5831336896593977
```

ש2.

א

משום ש- $\varphi>0$ זה עלות של דקה של הטיסה ו-

$g_i(x)=\alpha\|a^i-x\|$ מספר דקות בממוצע של הרחפן מנק' x לנק' a^i.

p^i - מספר ההזמנות השבועי הממוצע בנק' a^i.

לכן, הפונקציית מטרה תהיה:

$$\min_x \varphi\sum_{i=1}^m p^i\alpha\|a^i-x\|$$

$$s.t \quad \varphi>0,\ p^i\geq 0,\ \alpha>0$$

$$\rightarrow \min_x \sum_{i=1}^m p^i\|a^i-x\|$$

$$s.t \quad p^i\geq 0$$

ב

~~נכתוב את~~ הביטוי:

$$\sum_{i=1}^m \alpha\|a^i-x\|\cdot p^i+\underbrace{p^i\mu_1\left(\max\{\alpha\|a^i-x\|-\sigma_1,0\}\right)}_{\text{פיצוי מעבר לזמן } \sigma_1}+$$

$$+\underbrace{p^i\mu_2\left(\max\{\alpha\|a^i-x\|-\sigma_2,0\}\right)}_{\text{פיצוי מעבר לזמן } \sigma_2}-\underbrace{p^i\mu_1\left(\max\{\alpha\|a^i-x\|-\sigma_2,0\}\right)}_{\text{כך שזה יגדל לשני שלבים}}$$

$$\rightarrow \min_x \sum_{i=1}^m \alpha\|a^i-x\|p^i+p^i\cdot\max\{\mu_1(\alpha\|a^i-x\|-\sigma_1),0\}+$$

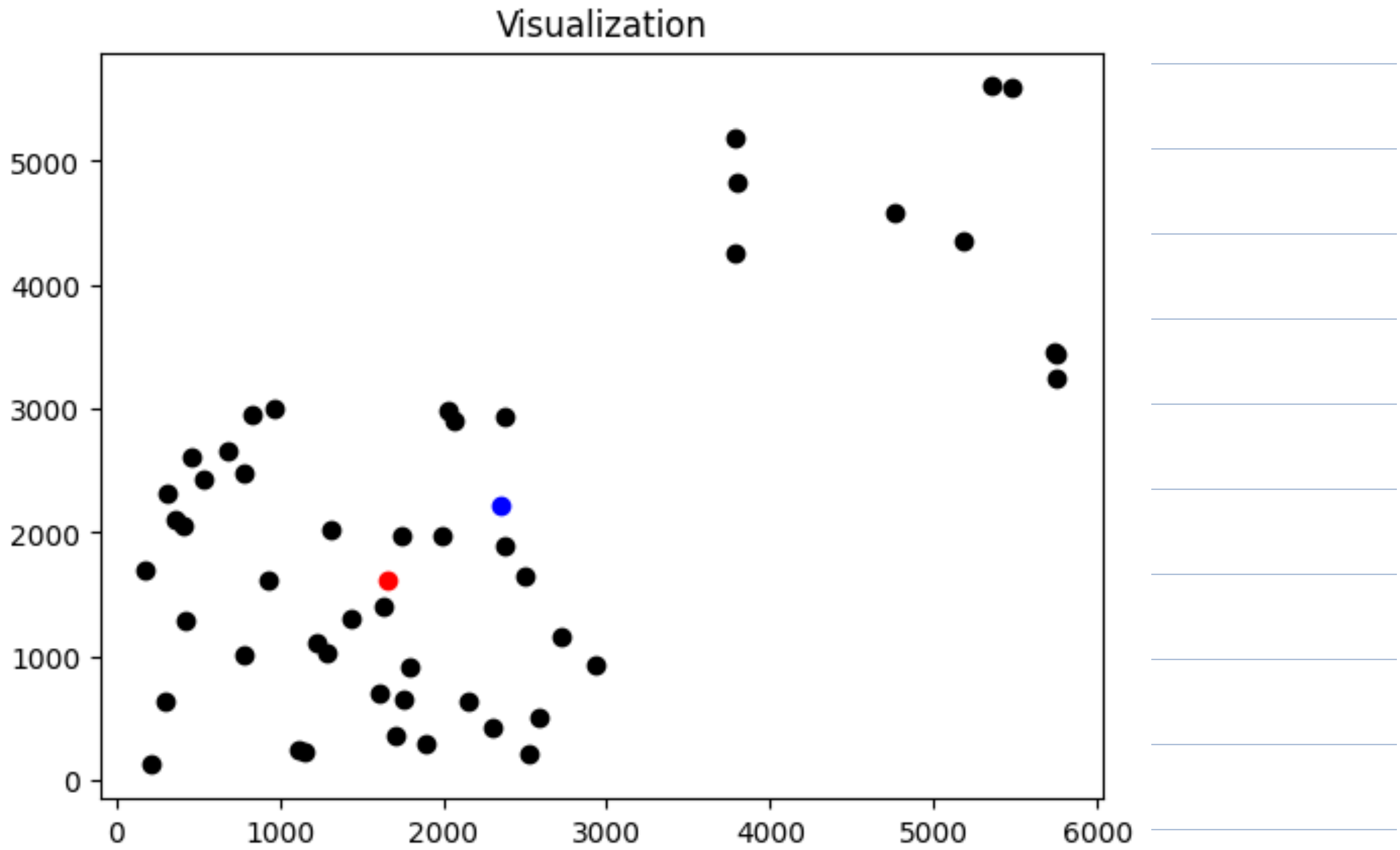
$$+p^i\cdot\max\{(\mu_2-\mu_1)(\alpha\|a^i-x\|-\sigma_2),0\}$$

$$s.t \quad \mu_1>0,\ \mu_2>0,\ \mu_2>\mu_1$$

ראינו ש- max של פונקציות קמורות - גם פונקציה קמורה ומשום

ש- צישרביש, נקבל כי כל גורם בגוף max הינו קמור ולכן

פונ' המטרה קמורה כסכום של קמורות.




```python
# Solve problem.
prob = cp.Problem(objective, constraints)
result = prob.solve()
# Print result.
print(f"Optimal value for B: {result}")
print(f"Optimal x_B: {x_B.value}")

# Plot A_i points in black, x_A in red, x_B in blue

plt.scatter(A[0,:], A[1,:], c='k', label='Shipments')
plt.scatter(x_A.value[0], x_A.value[1], c='r', label='First option for storage location')
plt.scatter(x_B.value[0], x_B.value[1], c='b', label='Second option for storage location')
plt.title("Visualization")
plt.show()
```

```
Optimal value for A: 16382.693745365377
Optimal x_A: [1662.00851244 1613.78600109]
Optimal value for B: 26250.468365180855
Optimal x_B: [2356.74890495 2220.00465292]
```


```python
# Solve problem.
prob = cp.Problem(objective, constraints)
result = prob.solve()
# Print result.
print(f"Optimal value for B: {result}")
print(f"Optimal x_B: {x_B.value}")

# Plot A_i points in black, x_A in red, x_B in blue

plt.scatter(A[0,:], A[1,:], c='k', label='Shipments')
plt.scatter(x_A.value[0], x_A.value[1], c='r', label='First option for storage location')
plt.scatter(x_B.value[0], x_B.value[1], c='b', label='Second option for storage location')
plt.title("Visualization")
plt.show()
```

Q3)

$y_i \in \{1,-1\}$, $x_i \in \mathbb{R}^n$

$\min \|P\|_2$ S.T. $y_i(x_i^T \cdot P \cdot x_i + q^T \cdot x_i + r) \ge 0$ $\forall 1\le i\le n$ <u>בעיה:</u>

$P\in\mathbb{R}^{n\times n}, q\in\mathbb{R}^n, r\in\mathbb{R}$ $P_{i,j}=P_{j,i}$ $\forall 1\le i,j\le n$

<u>הסבר:</u> פונקצ"ת המטרה קמורה מכיוון שפונקצ"ת הנורמה קמורה.

האילוץ השני לינארי $\Leftarrow$ קמור

נתבונן כעת על האילוץ הראשון. $-y_i(x_i^T P x_i + q^T x_i + r) \le 0$

המשתנים בביטוי הם P,q,r כאשר x_i,y_i נתון לנו.

ובפרט נתייחס ל- x_i,y_i כקבועים.

ניתן לראות כי r, q לינאריים.

מתקיים כי $x_i^T P x_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_i P_{i,j}$ זה ומו כ"ל עם x_i,y_i כפרמטרי P

לכן הביטוי זה סכום ומכפלות של סקלרים וביטויים לינאריים

ובפרט נקבל כי האילוצים קמורים.

$\Leftarrow$ בעיה של תכנות קמור.

(4 (א

```
def grad_proj(f, gf, proj, t, x0, eps):
    x_prev = x0
    xk = proj(x_prev - t * gf(x_prev))
    fs = [f(xk)]
    while np.linalg.norm(xk - x_prev) > eps:
        x_prev = xk
        xk = proj(x_prev - t * gf(x_prev))
        fs.append(f(xk))
    return xk, fs
```

4) א) $\ell = \left\{ \binom{x}{y} \mid x+y-1=0 \right\}$ ויהי $P=(z_1,z_2)$ נק' כלשהי.

נמצא אנך לישר $y=1-x$ ⇐ שיפוע אנך הוא 1.

⇐ $y=x+c$ $\exists c\in\mathbb{R}$ ונציב $z_2=z_1+c$ ⇐ $c=z_2-z_1$

⇐ $y=x+z_2-z_1$

⇐ חיתוך בין הישרים $x+z_2-z_1=-x+1$ ⇐ $x=\frac{z_1-z_2+1}{2}$

נציב את x ב-ℓ כדי למצוא את הנק':

$$y=\frac{z_2-z_1-1}{2}+1=\frac{z_2-z_1+1}{2}$$

⇐ $\left(\frac{z_1-z_2+1}{2}, \frac{z_2-z_1+1}{2}\right)$

ב)

```python
def proj_section_b():
    return lambda p: np.array([(p[0]-p[1]+1)/2, (p[1]-p[0]+1)/2])
```

ג) $f(x)=\|x\|^2$ נציג דרך גרדיאנט והטלות ל-ℓ כמו ישר.

שלו הגרדיאנט פשוט ומינימום.

f חסום מלמטה, מינימום שלו ליפשיץ עם $L=2$ ליפשיצי.

$$\|\nabla f(x)-\nabla f(y)\|=\|2x-2y\|=2\|x-y\|$$

⇐ ניתן להפעיל את אלג' הגרדיאנט

ולכן קיבלנו התכנסות.

```python
def proj_section_b():
    return lambda p: np.array([(p[0]-p[1]+1)/2, (p[1]-p[0]+1)/2])

f = lambda x: np.linalg.norm(x)**2
gf = lambda x: 2*x
x, fs = grad_proj(f, gf, proj_section_b(), 0.5, np.array([100, 100]), 10**-8)
print(f"convered after: {len(fs)} iterations with point {x}")
```

```
convered after: 2 iterations with point [0.5 0.5]
```

(SLa) №5. 1c

$$f(x,u) = \sum_{i=1}^{m} \left(\|x-a_i\|^2 - 2d_i u_i^T (x-a_i) + \|a_i\|^2 \right) \underset{\text{קושי-שוורץ}}{\geq} \sum_{i=1}^{m} \left(\|x-a_i\|^2 - 2d_i \|u_i\| \|x-a_i\| + \|a_i\|^2 \right)$$

$(u=(u_1,\dots,u_m))$

$$\underset{\forall i:\ \|u_i\| \leq 1}{\geq} \sum_{i=1}^{m} \left(\|x-a_i\|^2 - 2d_i \|x-a_i\| + \|a_i\|^2 \right) = m$$

נשים לב שהשוויון מתקיים:

עבור $u^* = (u_1,\dots,u_m) :\ \forall i:\ u_i = \frac{x-a_i}{\|x-a_i\|}$

$$f(x,u^*) = m$$

לכן:

$$\min_{x,u} f(x,u) = m$$

נשים לב:

$$\arg\min_{x,u} f(x,u) = \underset{\text{כבר מצאנו } u^*}{\arg\min_{x}} \sum_{i=1}^{m} \left(\|x-a_i\|^2 - 2d_i \|x-a_i\| + \|a_i\|^2 \right) =$$

$$= \arg\min_{x} \sum_{i=1}^{m} \left(\|x-a_i\|^2 - 2d_i \|x-a_i\| \right)$$

שכן ~~האבר~~ הגורם $\|a_i\|$ לא תלויה ב-x.

(SL)

$$\arg\min_{x} \sum_{i=1}^{m} \left(\|x-a_i\| - d_i \right)^2 =$$

$$= \arg\min_{x} \sum_{i=1}^{m} \left(\|x-a_i\|^2 - 2d_i \|x-a_i\| + d_i^2 \right) =$$

$$= \arg\min_{x} \sum_{i=1}^{m} \left(\|x-a_i\|^2 - 2d_i \|x-a_i\| \right)$$

שכן הגורם d_i^2 לא תלוי ב-x.

לכן הבעיות שקולות.

(2)

(SL1)

ניקח $a=0, d=1$,

$$\Rightarrow f(x)=(|x|-1)^2$$

עבור $x_1=1, x_2=-1$, $\lambda=\frac{1}{2}$ מתקיים:

$$f\left(\tfrac{1}{2}x_1+\tfrac{1}{2}x_2\right)=f(0)=1$$

$$\tfrac{1}{2}f(x_1)+\tfrac{1}{2}f(x_2)=0$$

$\Leftarrow$ לפי ההגדרה, הפונ' לא קמורה.

(SL2)

נקח $a=1, d=1$.

$$\Rightarrow f(x,u)=(x-1)^2-2u(x-1)+1$$

עבור $x=(2,0), u=(1,-1)$ ו- $\lambda=\frac{1}{2}$:

$$f\left(\tfrac{1}{2}(x_1,u_1)+\tfrac{1}{2}(x_2,u_2)\right)=f\left(\tfrac{1}{2},0\right)=1.25$$

$$\tfrac{1}{2}f(x_1,u_1)+\tfrac{1}{2}f(x_2,u_2)=\tfrac{1}{2}\cdot 0+\tfrac{1}{2}\cdot 0=0$$

$\Leftarrow$ לפי הגדרה הפונ' לא קמורה.

(2)

$$f(x,u)=\sum_{i=1}^{m}\left(\|x-a_i\|^2-2d_iu_i^T(x-a_i)+\|a_i\|^2\right)$$

$$\nabla f_x=\sum_{i=1}^{m}2(x-a_i)-2d_iu_i$$

$$\nabla f_{u_i}=-2d_ix+2d_ia_i$$

$$\Rightarrow \nabla f=\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{m}2(x-a_i)-2d_iu_i\\ -2d_1x+2d_1a_1\\ \vdots\\ -2d_mx+2d_ma_m\end{pmatrix}$$

$$\|\nabla f(x,u) - \nabla f(y,v)\| = \left\| \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} 2x-2y+2d_i(v_i-u_i) \\ 2d_1(y-x) \\ \vdots \\ 2d_m(y-x) \end{pmatrix} \right\| =$$

$$= 2 \left\| \begin{pmatrix} mI_n(x-y) \\ d_1(x-y) \\ \vdots \\ d_m(x-y) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} -d_i(u_i-v_i) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\|$$

נגדיר $z = \begin{pmatrix} u_1-v_1 \\ \vdots \\ u_m-v_m \end{pmatrix}$, אזי:

$$= 2 \left\| \begin{pmatrix} mI_n(x-y) \\ -D^T(x-y) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -Dz \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\| =$$

$$= 2 \left\| \begin{pmatrix} mI_n & \cancel{m}-D \\ -D^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-y \\ z \end{pmatrix} \right\| =$$

$$= 2 \left\| P \begin{pmatrix} x-y \\ z \end{pmatrix} \right\| \le 2\|P\| \left\| \begin{pmatrix} x-y \\ z \end{pmatrix} \right\|$$

הגרדיאנט הוא ρ-ליפשיצי עם $\rho = 2\|P\| \Leftarrow$

(ח)

- f גזירה ברציפות כהרכבה של פונ' גזירות ברציפות.
- בסעיף קודם הוכחנו ש-f בעלת גרדיאנט ליפשיצי.

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\|x-a_i\|^2-2d_i u_i^T(x-a_i)+\|a_i\|^2\right) \geq \sum_{i=1}^{m}\left(\|x-a_i\|^2-2d_i\|x-a_i\|+\|a_i\|^2\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\left(\|x-a_i\|^2-2d_i\|x-a_i\|+\|a_i\|^2+d_i^2-d_i^2\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\left[\left(\|x-a_i\|-d_i\right)^2+\|a_i\|^2-\|d_i\|^2\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\left[\left(\|x-a_i\|-d_i\right)^2+\left(\|a_i\|-\|d_i\|\right)\left(\|a_i\|+\|d_i\|\right)\right] \geq$$

$$\geq \sum_{i=1}^{m}\left(\|a_i\|-\|d_i\|\right)\left(\|a_i\|+\|d_i\|\right)$$

הצלחנו לחסום המחובר שנתון לנו (a_i, d_i נתונים)

קבוצת הפתרונות קמורה וסגורה (כי היא חיתוך של קמורות וסגורות.

וגם כי מכפלה קרטזית משמרת קמירות.

$\Rightarrow$ אנחנו יכולים להפעיל את השיטה.

נשים לב:

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\|x-a_i\|^2-2d_i\|x-a_i\|+\|a_i\|^2\right) \xrightarrow[\|x\|\to\infty]{} \infty$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m}\left(\|x-a_i\|^2-2d_i u_i^T(x-a_i)+\|a_i\|^2\right) \xrightarrow[\|x\|\to\infty]{} \infty$$

$\Rightarrow$ פונ' המטרה קוארסיבית, גם כן מתקיים כי הפונ' רציפה ומוגדרת על קבוצה סגורה ולכן קיים פתרון מיטבי. ראינו שפתרון של SL2 שקול לפתרון של SL $\Rightarrow$ פתרון של הבעיה הזאת יהוה גם פתרון מיטבי לבעיה SL.