1. א) $g(x)=f(x)-f(0)$. יהיו $t\geq 0$, $x\in\mathbb{R}^n$.

$$t\cdot g(x)=t\cdot f(x)-t\cdot f(0)$$

f קמורה וקעורה ולכן מתקיים

$$\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)\leq f(\lambda\cdot x+(1-\lambda)\cdot y)\leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

$$\Rightarrow f(\lambda x+(1-\lambda)y)=\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

בנוסף

$$g(\lambda x+(1-\lambda)y)=f(\lambda x+(1-\lambda)y)-f(0)$$
$$=\lambda\cdot f(x)+(1-\lambda)\cdot f(y)-f(0)$$

לכן נקבל כי g קמורה וקעורה.

נחלק למקרים. עבור $t=0,t=1$:

$$g(t\cdot x)= \begin{cases} g(x)=1\cdot g(x)=t\cdot g(x) \\ g(0\cdot x)=f(0)-f(0)=0\cdot g(x) \end{cases}$$

עבור $t\in(0,1)$ מתקיים מכיוון ש g קמור וקעור ולכן

$$g(t\cdot x+(1-t)\cdot 0)=t\cdot g(t)+(1-t)\cdot \underbrace{g(0)}_{0}=t\cdot g(t)$$

אחרת $t>1$ ולכן נעשה החלפת משתנים $x=\frac{1}{t}y$ ונשתמש

נשמור הקעירות וקמירות תחת החלפה לינארית.

$$g(x)=g\left(\tfrac{1}{t}y\right)=g\left(\tfrac{1}{t}\cdot y+\left(1-\tfrac{1}{t}\right)\cdot 0\right)=\tfrac{1}{t}\cdot g(y)+\left(1-\tfrac{1}{t}\right)\cdot \underbrace{g(0)}_{0}=\tfrac{1}{t}\cdot g(y)$$
$$=\tfrac{1}{t}\cdot g(t\cdot x)$$

$$\Rightarrow g(x)=\tfrac{1}{t}\cdot g(t\cdot x)\Rightarrow t\, g(x)=g(t\cdot x)$$

לכן קיבלנו את הנדרש.

1. ב) כבר מסעיף א' ניתן להסיק כי $g(-t\cdot x) = -t\cdot g(x)$

מכיוון שזה מתקיים לכל $x\in\mathbb{R}^n$ בפרט ניקח $y=-x$ ואז קיבלנו

שוויון בינו מסעיף א' שהוכחנו כי מתקיים לכל $t\geq 0$ ו- $y\in\mathbb{R}^n$

יהא $x,y\in\mathbb{R}^n$, נגדיר

$$g(x+y) = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot g(x+y) \overset{\text{סעיף ו'}}{=} 2\cdot g\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right) \underset{\substack{\alpha=\frac{1}{2} \\ \text{סעיף ו'}}}{=} 2\cdot\left(\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}g\left(\frac{y}{2}\right)\right)$$

$$= g(x)+g(y)$$ ■

ג) <u>צ"ל:</u> פונק' לינארית $\Leftrightarrow$ מקיימת הומוגניות ואדיטיביות

הוכחנו בסעיף ב' כי g-ש מקיים את שני התנאים

הנ"ל $\Leftarrow$ g לינארית. $\exists\, a\in\mathbb{R}^n, b\in\mathbb{R}: g(x)=a^Tx+b$

$g(0)=0 \Leftarrow g(x)=a^Tx$

לכן $g(x)=f(x)-f(0)$ לכן $a^Tx=f(x)-f(0)$

$\Rightarrow f(x)=a^Tx+\underset{\substack{\shortparallel \\ b}}{f(0)} \Rightarrow$ f גם לינארית

ש2.

יהי $C\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצה קמורה, אזי:

פונקציה $f: C\to\mathbb{R}$ קמורה <u>אמ"מ</u> $epi(f)$ קמורה.

$$epi(f)=\left\{\begin{pmatrix}x\\t\end{pmatrix}\in C\times\mathbb{R} \;\middle|\; f(x)\le t\right\}$$

נגדיר שני נקודות $u=\begin{pmatrix}x\\t\end{pmatrix}, v=\begin{pmatrix}y\\t\end{pmatrix}$ עבור $x,y\in C$.

ועבור $t=\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$ ועבור $\lambda\in[0,1]$

<u>אם $epi(f)$ קמורה</u> $\Leftarrow$ $\lambda u+(1-\lambda)v\in epi(f)$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}\lambda x+(1-\lambda)y\\t\end{pmatrix}\in epi(f)$$

$$\Rightarrow f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le t=\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y) \Rightarrow$$ f קמורה.

נקח שני נקודות $x,y\in C$.

<u>אם f קמורה</u> $\Leftarrow$ $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$

נסמן $\cancel{u=\begin{pmatrix}x\\t\end{pmatrix}, v=\begin{pmatrix}y\\t\end{pmatrix}}$

$t=\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$ ונקבל:

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le t$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}\lambda x+(1-\lambda)y\\t\end{pmatrix}\in epi(f)$$

$$\Rightarrow \lambda\begin{pmatrix}x\\t\end{pmatrix}+(1-\lambda)\begin{pmatrix}y\\t\end{pmatrix}\in epi(f)$$

$\Rightarrow$ $epi(f)$ קמורה

3) א) ניקח $x=\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix}$ עבור $n=3$, $x,y\in C$

עבור $\lambda=\frac{1}{2}$ נקבל

$$\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\Rightarrow \min\{x_1,-x_2,x_3\}=1>1 \Rightarrow \lambda x+(1-\lambda)y\notin C$$

לכן נקבל שקבוצה לא קמורה.

ב) עבור $n=2$ ניקח $x=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ ו $y=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ $\lambda=\frac{1}{2}$

$$\lambda x+(1-\lambda)y=\frac{1}{2}(x+y)\Rightarrow\left(\frac{x_1+y_1}{2}\right)^3-\frac{x_2+y_2}{2}=8-1=7\neq 0$$

לכן הקבוצה לא קמורה.

ג) יהי $\lambda\in[0,1]$ ניקח $x,y\in C$ כך ש- $z=\lambda\cdot x+(1-\lambda)y$

ובפרט $x_2,x_3,y_2,y_3\geq 0$.

$$z_2=\lambda x_2+(1-\lambda)y_2$$
$$z_3=\lambda x_3+(1-\lambda)y_3$$

נראה ש- $z_1^2\leq z_2\cdot z_3$:

$$z_1^2=(\lambda x_1+(1-\lambda)y_1)^2=\lambda x^2+2\lambda x_1(1-\lambda)y_1+(1-\lambda)^2y^2$$

$$\underset{x,y\in C}{\leq}\lambda x_2x_3+2\cdot\lambda(1-\lambda)x_1y_1+(1-\lambda)^2y_2y_3\leq\lambda^2x_2x^3+2\lambda(1-\lambda)\sqrt{x_2x_3y_2y_3}+(1-\lambda)^2y_2y_3$$

$$\underset{(*)}{\leq}\lambda^2x_2x_3+\lambda(1-\lambda)(x_2y_3+y_2y_3)+(1-\lambda)^2y_2y_3$$

$$=(\lambda x_2+(1-\lambda)y_2)(\lambda x_3+(1-\lambda)y_3)=z_2\cdot z_3$$

$(*)$: $0\leq\left(\sqrt{x_2y_3}-\sqrt{y_2x_3}\right)^2$
$\Rightarrow 2\sqrt{x_2y_3y_2x_3}\leq x_2y_3+y_2x_3$

$$z\in C\Leftarrow z_2,z_3\geq 0,\ z_1^2\leq z_2\cdot z_3\Leftarrow$$ ●

ג)

$$\|x-u\| \le \|x-v\| \iff \|x-u\|^2 \le \|x-v\|^2$$

$$\iff \cancel{\|x\|^2} - 2\langle x,u\rangle + \|u\|^2 \le \cancel{\|x\|^2} - 2\langle x,v\rangle + \|v\|^2$$

$$\iff \|u\|^2 - \|v\|^2 \le 2\langle x,u\rangle - 2\langle x,v\rangle = 2\langle x, u-v\rangle$$

$$\iff \frac{\|u\|^2 - \|v\|^2}{2} \le \langle x, u-v\rangle$$

$$\iff \frac{\|v\|^2 - \|u\|^2}{2} \ge \langle x, v-u\rangle$$

u,v קבועים. לכן הקבוצה חצי מרחב $\Leftarrow$ C קמורה. ●

ד) נסתכל על שני הקבוצות בנפרד. אם שניהם קמורים

אז לפי משפט חיתוך של שני קבוצות קמורים גם קמור.

עבור, $\{x\in\mathbb{R}^3 : -I_3 x \le \frac{1}{3}\} = \{x\in\mathbb{R}^3 \mid -x_1, -x_2, -x_3 \le \frac{1}{3}\} = \{x\in\mathbb{R} : x_1, x_2, x_3 \ge -\frac{1}{3}\}$

התת קבוצה פוליהדר קמור עבור $A = -I_3,\ b = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

הקבוצה השניה:

$$(x_2+x_3+1)(2x_1+2x_3+2)(3x_1+3x_2+3) \ge 1$$

$$\iff (x_2+x_3+1)\cdot 6(x_1+x_3+1)^2 \ge 1$$

$$\iff (x_2+x_3+1)\cdot(x_1+x_3+1)^2 \ge \frac{1}{6}$$

$$\ln\left((x_2+x_3+1)\cdot(x_1+x_3+1)^2\right) \ge \ln\frac{1}{6} \iff \ln\left((x_2+x_3+1)\right) + 2\ln(x_1+x_3+1) \ge -\ln 6$$

$$\iff -\ln\left((x_2+x_3+1)\right) - 2\ln(x_1+x_3+1) \le \ln 6$$

נגדיר את הביטוי השמאלי כ- $g(x)$ ו- $t = \ln(6)$

כלומר $g(x) \le t$ שב $epi(g)$

$\Leftarrow \{ \begin{pmatrix} x \\ \ln 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3\times\mathbb{R} \mid g(x) \le \ln 6 \}$ זהו משפט epi קמור

ש4.

הוכחה:

(א)

ראשית, נוכיח ש- $\mathbb{R}_+^2$ היא קבוצה קמורה.

נקח $u=(x_1,y_1)$, $v=(x_2,y_2)$, כלומר $v,u\in\mathbb{R}_+^2$

כך ש $x_1,y_1,x_2,y_2\geq 0$. לכן מתקיים:

$$\forall\lambda\in[0,1] : z:=\lambda v+(1-\lambda)u=(\lambda x_2+(1-\lambda)x_1, (1-\lambda)y_1+\lambda x_2)$$

מכיוון ש- $\lambda\in[0,1]$ ו- $x_1,x_2,y_1,y_2\geq 0$, כל הרכיבים ב-z אי-שליליים

ולכן $z\in\mathbb{R}_+^2$ ולכן $\mathbb{R}_+^2$ - קבוצה קמורה.

כעת נראה שפונקציה $g:\mathbb{R}_+^2\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י: $g(x)=-\sqrt{x_1x_2}$

היא פונ' קמורה.

נקח צירוף קמור של $x,y\in\mathbb{R}_+^2$ כלומר: $z=\lambda x+(1-\lambda)y$ עבור $\lambda\in[0,1]$

$$g(z)=g(\lambda x+(1-\lambda)y)=-\sqrt{(\lambda x_1+(1-\lambda)y_1)(\lambda x_2+(1-\lambda)y_2)}=$$

$$=-\sqrt{\lambda x_1+(1-\lambda)y_1}\cdot\sqrt{\lambda x_2+(1-\lambda)y_2}$$

נגדיר וקטור $u=\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda x_1}\\ \sqrt{(1-\lambda)y_1}\end{pmatrix}$ ו- $v=\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda x_2}\\ \sqrt{(1-\lambda)y_2}\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow g(z)=-\|v\|_2\|u\|_2 \leq -|\langle v,u\rangle| =$$

אי-שוויון קושי-שוורץ

$$=-\Big|\underbrace{\lambda\sqrt{x_1x_2}+(1-\lambda)\sqrt{y_1y_2}}_{\geq 0}\Big| = \lambda g(x)+(1-\lambda)g(y)$$

$\Rightarrow$ g - פונ' קמורה לפי הגדרה.

ב

<u>הפרכה:</u>

נקח $n=1$, $x=-1, y=2$, $\lambda=0.5$.

$$\lambda x+(1-\lambda)y=-0.5+1=0.5$$

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)=f(0.5)=(-0.5)^3=-0.125$$

אבל,

$$\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)=0.5\cdot(-2)^3+0.5\cdot(1)^3=-4+0.5=-3.5$$

$$\Rightarrow f(\lambda x+(1-\lambda)y)>\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

$\Rightarrow$ f לא קמורה.

ג

<u>הפרכה:</u>

נשים לב לקבוצה עבורה פונ' f מוגדרת.

נקח $n=1$, $x=-1, y=1$, וכו': $1=|x|=|y|\geq\sqrt{1}=1$

אבל, עבור $\lambda=0.5$: $z:=\lambda x+(1-\lambda)y=0$

$$0=|z|<\sqrt{1}=1 \Rightarrow z\notin\{x\in\mathbb{R} \mid |x|\geq 1\}$$

$\Rightarrow$ קבוצה עבורה הפונ' מוגדרת לא קמורה ולכן גם f לא קמורה.

ד

<u>הוכחה:</u>

כפי שראינו בהנחיות, נוכיח שהטענה נכונה בתחום קמור $\mathbb{R}_{++}$.

פונ' גזירה פעמיים ומקיים:

$$f'(x)=1\cdot\ln(x)+\frac{x}{x}=1+\ln x$$

$$f''(x)=\frac{1}{x}>0 \quad (x\in\mathbb{R}_{++})$$

כעת נבדוק מקרים בהם יתאפשר ש- $x=0$ ונוכיח קמירות לפי הגדרה. נקח $x,y\in\mathbb{R}_+$.

<u>מקרה I.</u> $(x=0,\ y>0)$ בלי הגבלת הכלליות,

נגדיר $z:=\lambda x+(1-\lambda)y$ עבור $\lambda\in[0,1]$.

<u>עבור $\lambda=1$:</u> $z=0$; $f(z)=0$; $f(z)\leq\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)=0$

<u>עבור $\lambda=0$:</u> $z=y$; $f(z)=y$; $f(y)=f(z)\leq\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)=f(y)$

עבור $\lambda\in(0,1)$ נקבל $z>0$ ולכן $z\in\mathbb{R}_{++}$ וזה סימנו.

מקרה II: $(x=0, y=0)$

עבור כל $\lambda\in[0,1]$ אם נגדיר $z:=\lambda x+(1-\lambda)y$, $z=0$

ולכן $f(z)=0$.

גם מתקיים: $0=f(z)\le \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)=0$

כיסינו את שני המקרים האפשריים בהם הגבלנו ל- x או y לקבל ערך 0

ובשני המקרים f -קמורה, לכן סיימנו.

ה

הוכחה:

נגדיר מטריצה
$$Q=\begin{pmatrix}7&-2&-2&0\\-2&1&1&0\\-2&1&5&-2\\0&0&-2&6\end{pmatrix}$$
, אזי:

$$f(x,y,z)=\sqrt{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\1\end{pmatrix}^T Q\begin{pmatrix}x\\y\\z\\1\end{pmatrix}}$$

נשים לב כי $Q\succ 0$:

$\Delta_1=7$, $\Delta_2=7-(-4)=11$, $\Delta_3=7(5-1)+2(-10+2)-2\cdot 0=12$,

$\Delta_4=7[34-(6+2)+0]+2[-2\cdot 34-1\cdot(-12+2)+0]-$

$-2[-2(6+2)-1(-12+2)+0]+0=$

$=7\cdot 26+2(-44)+12=106$

$\forall i:\ \Delta_i>0 \Rightarrow Q\succ 0$

$\Rightarrow$ f מוגדרת היטב ולכן $dom(f)=\mathbb{R}^3$ (קבוצה קמורה)

נשים לב: $\cancel{7x^2+y^2+5z^2-4xy-4xz+2yz-4z+6}=$

$\cancel{=(2x-y)^2+(\sqrt{3}x-z)^2+(y-z)^2}$

עבור
$$A=\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&0&2\\\sqrt{3}&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \tilde{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\\sqrt{5}\end{pmatrix}$$

$$f(x,y,z)=\|A\tilde{x}+b\|$$

נורמה קמורה ולכן גם תחת החלפת משתנים קמירות נשמרת $\Rightarrow$ f קמורה.

(א)

הפרכה:

נשים לב כי עבור $n=1, a=0, b=1$: $f(x)=(|x|-|x-1|)^2$

ניקח $x=-1$, $y=\frac{1}{2}$. שניהם אכן נמצאים בתחום הנתון לנו.

עבור $\lambda=\frac{1}{2}$:

$$f\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right)=f\left(-\frac{1}{4}\right)=1$$

אבל, $\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(y)=\frac{1}{2}f(-1)+\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}<1=f\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right)$

לכן f לא קמורה.

(ב)

הוכחה:

נשים לב כי $g(t)=\frac{1}{1+t}$ היא כן פונ' קמורה.

$$g'(t)=-\frac{1}{(1+t)^2},\quad g''(t)=\frac{2}{(1+t)^3}>0 \quad (t\in\mathbb{R}_+)$$

נשים לב שאנחנו יכולים להציג $f(x)=\frac{1}{1+\min\{x_1,\dots,x_n\}}$ כמקסימום

של הפונקציות הבאות: $g(k_i(x))=\frac{1}{1+x_i}$.

כלומר $f(x)=\max_i g(k_i(x))$ שכן $g(k_i(x))$ קמורה לכן

f קמורה כמקסימום של קמורות.

(ג)

הוכחה:

נפרק את הפונקציה לשני חלקים:

$$f_1(x)=\frac{x_1^4}{x_2^2}+\frac{x_2^4}{x_1^2}+2x_1x_2$$

$$f_2(x)=-\min\{\ln(x_1+x_2),\ \ln(2x_1+\tfrac{1}{2}x_2)\}$$

$$f_1(x)=\left(\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_1}\right)^2$$

ראינו בהרצאה כי $g(x,t)=\frac{\|x\|^2}{t}$ היא קמורה, לכן $\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_1}$

גם קמורה. בנוסף $h(t)=t^2$ - פונק' מונו' עולה וקמורה ולכן

$f_1(x)$ גם קמורה ממשפט ההרכבה.

נסתכל כעת על f_2. מהגדרת המקסימום ומינימום:

$$f_2(x) = \max\{\underbrace{-\ln(x_1+x_2)}_{g_1}, \underbrace{-\ln(2x_1+\tfrac{1}{2}x_2)}_{g_2}\}$$

כיון g_1, g_2 הן קמורות כהחלפת משתנים ליניארית תחת $\ln$ ב- $\mathbb{R}^2_{++}$.

לכן, f_2 גם קמורה כמקסימום בין שתי קמורות.

לכן f_1, f_2 - קמורות ו- f קמורה כסכום.

לכן נקבל סה"כ שהפונקציה קמורה.

5)

$$f(x) = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$

באופן שקול מנ"ם כי $f(x)$ קמורה.

$$f(x)+\nabla(f(x))^T(y-x)\le f(y)$$

$$f(x) = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\nabla f(x)_k = \frac{1}{n}\cdot\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}-1}\cdot\prod_{j\ne k} x_j = \frac{\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}}{n\cdot x_k} = \frac{f(x)}{n\cdot x_k} \quad \forall 1\le k\le n$$

$$\Rightarrow f(x)+\nabla f(x)^T(y-x) = f(x)+\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x)}{n\cdot x_i}\cdot(y_i-x_i)$$

$$= f(x)\cdot\left(\cancel{1}+\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{nx_i}-\cancel{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}}\right) = f(x)\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{n} \ge f(x)\cdot\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}, \quad a_i := \frac{y_i}{x_i}$$

$$= \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\frac{y_i}{x_i}}\cdot\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} y_i} = f(y)$$

לכן נקבל כי f קמורה בתחום של $\mathbb{R}^n_{++}$.

ב) נחלק למקרים.

$x,y\in\mathbb{R}^n_{++}$: שכל הכניסות חיוביות $\Leftarrow$ סעיף א' זה פותר.

$\exists i,j$: $x_i=0 \cap y_j=0$ עבור $i=j$ נקבל $0=f(\lambda x+(1-\lambda)y)\ge\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$
$= f(0) = 0$

עבור $i\ne j$: כל $f(\lambda x+(1-\lambda)y) = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\underbrace{\lambda x_i+(1-\lambda)y_i}_{>0}}$
$= \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$

אם רק $x \in \mathbb{R}^n_{++} \wedge y \notin \mathbb{R}^n_{++} \vee x \notin \mathbb{R}^n_{++} \wedge y \in \mathbb{R}^n_{++}$: לאחד יש כניסה עם 0.

בה"כ ל- x יש כניסה עם 0:

$$\Leftarrow \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(\lambda x_i + (1-\lambda)y_i)} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(1-\lambda)y_i}$$

$$= (1-\lambda)\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} y_i} = (1-\lambda)f(y) \underset{f(x)=0}{=} (1-\lambda)f(y) + \lambda f(x)$$

N6.

$$f(x,y)=\sqrt{6x^2+14y^2+8xy-2x+2y+\frac{7}{17}}$$

נמצא את ג"ה. נשים לב:

$$f(x,y)=\sqrt{\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}^T \underbrace{\begin{pmatrix}6 & 4 & -1\\ 4 & 14 & 1\\ -1 & 1 & \frac{7}{17}\end{pmatrix}}_{Q}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}}$$

נשים לב ש- $Q \succ 0$.

$$\Delta_1=6,\quad \Delta_3=6\cdot\left(\frac{14\cdot 7}{17}-1\right)-4\left(\frac{4\cdot 7}{17}+1\right)-1\left(4+14\right)=$$

$$=\frac{6\cdot 14\cdot 7}{17}-\frac{4\cdot 14\cdot 7}{17}=\frac{14}{17}\left(42-28\right)=\frac{14^2}{17}>0$$

$$\Delta_2=84-16=68>0$$

$\Leftarrow$ f מוגדרת בכל $\mathbb{R}^2$

נמצא נק' סטציונרית של $\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}^T Q\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}}_{g(x,y)}$ וזוהי ג"ה נקודת מינימום גלובלי ה-f.

$$\nabla g(x,y)=\begin{pmatrix}12x+8y-2\\ 8x+28y+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}12x+8y=2\\ 8x+28y=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}24x+16y=4\\ 24x+84y=-6\end{cases}\Rightarrow 68y=-10\Rightarrow y=-\frac{5}{34},\quad x=\frac{9}{34}$$

$$f\left(\frac{9}{34},-\frac{5}{34}\right)=\sqrt{6\cdot\left(\frac{9}{34}\right)^2+14\cdot\left(\frac{5}{34}\right)^2+8\cdot\frac{45}{34}-\frac{18}{34}-\frac{10}{34}+\frac{7}{17}}=0$$

$\Leftarrow$ $\left(\frac{9}{34},-\frac{5}{34}\right)$ — נקודת מינימום גלובלית של f.