מודלים לא לינאריים בחקר ביצועים --- תרגיל בית 1

26 במאי 2024

הנחיות:

- ההגשה היא בזוגות בלבד ולפי ההנחיות המופיעות באתר הקורס. לא ייבדקו תרגילי בית שיוגשו לבד.
- יש להגיש שני קבצים בלבד:
  - קובץ PDF עם תשובות לשאלות וצילום מסך של קוד ופלטים.
  - קובץ ZIP המכיל את כל קובצי python אותם נדרשתם לכתוב.

שאלה 1

כיתבו פונקציית pyhton בשם ex1. הפונקציה מקבלת מטריצה ריבועית $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ווקטור עמודה $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ומחזירה מטריצה $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ המקיימת:

$$\mathbf{B}_{ij} = \begin{cases} \mathbf{A}_{ji} + x_j \cdot i, & i \neq j. \\ 0, & i = j. \end{cases}.$$

עליכם לבצע בדיקת תקינות קלט. אין להשתמש בלולאות במימוש הפונקציה. הגודל של $\mathbf{A}$ ושל $\mathbf{x}$ לא ידועים לכם מראש, ועל הפונקציה להתאים לכל גודל שיינתן. צרפו את הפלט עבור

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 11 & -7 & 4 \\ 4 & 0 & 8 \\ 7 & 8 & 7 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix}$$

שאלה 2

כיתבו פונקציית python בשם ex2. הפונקציה מקבלת מטריצות ריבועיות $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times m}$, מספר טבעי $n \geq 4$ ווקטור $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. נגדיר את המטריצה והווקטור הבאים:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} & \mathbf{B}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} & \mathbf{A} & \mathbf{B}^T & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{B} & \mathbf{A} & \mathbf{B}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{B} & \mathbf{A} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{nm\times nm}, \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ 2\mathbf{b} \\ 3\mathbf{b} \\ \vdots \\ (n-2)\,\mathbf{b} \\ (n-1)\,\mathbf{b} \\ n\mathbf{b} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{nm}.$$

כעת נגדיר את המטריצה והווקטור הבאים:

$$.\mathbf{Q}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{11}\mathbf{P} & \mathbf{A}_{12}\mathbf{P} & \mathbf{A}_{13}\mathbf{P} & \cdots\\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{P} & \mathbf{A}_{22}\mathbf{P} & \mathbf{A}_{23}\mathbf{P} & \cdots\\ \mathbf{A}_{31}\mathbf{P} & \mathbf{A}_{32}\mathbf{P} & \mathbf{A}_{33}\mathbf{P} & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{nmm\times nmm},\qquad \mathbf{z}=\begin{pmatrix}\mathbf{y}\\ \mathbf{y}\\ \mathbf{y}\\ \vdots\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{nmm}$$

על הפונקציה להחזיר את הפתרון של מערכת המשוואות $\mathbf{Qx}=\mathbf{z}$. יש לבצע בדיקת תקינות הקלט. לפתרון השאלה ניתן להשתמש בהדרכה הבאה:

- השתמשו בפונקציה `kron` על־מנת ליצור את המטריצות והווקטורים. שימו לב ש־`kron` איננה סימטרית (כלומר, $\texttt{kron}(\texttt{C},\texttt{D})\neq\texttt{kron}(\texttt{D},\texttt{C})$). חפשו בוויקפדיה את הערך Kronecker product.
- השתמשו בפונקציה `numpy.linalg.solve` לצורך פתרון מערכת המשוואות. תוכלו לבדוק את תשובתכם ע"י החישוב $\mathbf{Qx}$.

צרפו את הפלט עבור:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix},\qquad \mathbf{B}=\mathbf{A}+\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix},\qquad \mathbf{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\qquad n=4$$

שאלה 3

א. הוכיחו את טענות 2, 4, 6, 8 ו־10 בקובץ העזר בנושא מינימום ומקסימום (ניתן להשתמש ללא הוכחה בסעיפים קודמים בקובץ).

ב. תהי $f\colon C\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ המקבלת ערך מקסימלי ב־C. הוכיחו כי אם הווקטור $\underset{x\in C}{\operatorname{argmin}}f(x)$ קיים והוא מקיים $f\left(\underset{x\in C}{\operatorname{argmin}}f(x)\right)>0$ אז

$$.\underset{x\in C}{\operatorname{argmax}}f(x)=\underset{x\in C}{\operatorname{argmin}}\frac{1}{f(x)}$$

האם הטענה נכונה גם ללא ההנחות לגבי $\underset{x\in C}{\operatorname{argmin}}f(x)$? הוכיחו או הביאו דוגמה נגדית ע"י בחירה מתאימה של f ו־C.

שאלה 4

ביחרו אחד מבין שני הסעיפים הבאים.

א. תהי מטריצה $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ סימטרית. הוכיחו כי

$$\lambda_{\max}(\mathbf{A})=\max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n}\left\{\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}\colon\ \|\mathbf{x}\|=1\right\}$$

והראו שהערך המקסימלי מתקבל עבור וקטור עצמי מנורמל של $\lambda_{\max}(\mathbf{A})$.

הכוונה: תוכלו להשתמש במשפט הפירוק הספקטרלי ובגישה שראינו בתרגול.

ב. תהי מטריצה $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$. הוכיחו כי

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{i=1,2,\ldots,m}\sum_{j=1}^{n}|\mathbf{A}_{ij}|$$

כלומר, ערך הנורמה הוא המקסימום של סכום הערכים המוחלטים מבין השורות.

שאלה 5

נתונות נקודות $\{(x_i,y_i)\}_{i=1}^{m}\subset\mathbb{R}^2$ הניתנות לקירוב ע"י פונקציה מהצורה

$$y_i \approx f(x_i) = \frac{c_0+c_1x_i+c_2x_i^2}{d_0+d_1x_i+d_2x_i^2}.$$

נרצה למצוא את המקדמים $\mathbf{u}\equiv(c_0,c_1,c_2,d_0,d_1,d_2)$ שנותנים את הקירוב הטוב ביותר. מכיוון שלכל $\alpha\neq 0$ אז $\mathbf{u}$ ו־$\alpha\mathbf{u}$ מייצגים את אותה הפונקציה f, אז יש בייצוג זה יתירות. בסעיפים הבאים נתמודד עם בעיה זו.

א. דרך אחת להתגבר על היתירות היא להניח כי $d_0=1$. נסחו בעיית ריבועים פחותים שמוצאת את המקדמים $\mathbf{u}$ המגדירים את f.

ב. כתבו פונקציית python הניתנת להפעלה ע"י $\mathrm{u}=$ `fit_rational(X)`. הפונקציה מקבלת מטריצה $\mathbf{X}\in\mathbb{R}^{m\times 2}$ שבה כל שורה היא נקודה במישור ומחזירה את המקדמים הרצויים לפי פתרון בעיית הריבועים הפחותים אותה ניסחתם בסעיף הקודם (השתמשו ב־numpy.linalg.lstsq). אין להשתמש בלולאות במימוש הפונקציה.

הפעילו את הפונקציה על הנקודות שנתונות בקובץ X.txt שמצורף לתרגיל. צרפו להגשה את המקדמים שהתקבלו וכן תרשים שבו ניתן לראות את גרף הפונקציה יחד עם הנקודות.

ג. דרך נוספת להתגבר על היתירות היא להניח כי $\|\mathbf{u}\|=1$. נסחו בעיית אופטימיזציה שבה פונקציית המטרה היא תבנית ריבועית שמוצאת את המקדמים תחת ההנחה החדשה. הסבירו כיצד תפתרו את הבעיה.

הכוונה: תוכלו להשתמש בשאלה 4א'.

ד. חזרו על סעיף ב' עבור סעיף ג'. הפונקציה החדשה תופיל ע"י $\mathrm{u}=$ `fit_rational_normed(X)`. איזו משתי הגישות מובילה לקירוב טוב יותר? הסבירו את תשובתם ביחס לתרשימים.