מודלים לא ליניאריים בחקר ביצועים --- תרגיל בית 7

26 במאי 2024

הנחיות להגשה

- יש להגיש קובץ pdf יחיד.

שאלה 1

נתונה $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ קמורה וקעורה.

א. נגדיר את הפונקציה $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{0})$. הוכיחו כי $g(t\mathbf{x}) = tg(\mathbf{x})$ לכל $t \geq 0$ ולכל $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

ב. הוכיחו כי $g(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = g(\mathbf{x}) + g(\mathbf{y})$ לכל $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ והסיקו כי $g(-t\mathbf{x}) = -tg(\mathbf{x})$ לכל $t > 0$ ולכל $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

ג. הסיקו כי f היא פונקציה לינארית. כלומר, $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T\mathbf{x} + b$ עבור $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ ו־$b \in \mathbb{R}$.

שאלה 2

הוכיחו את קריטריון האפיגרף: תהי $C \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה קמורה. אז פונקציה $f\colon C \to \mathbb{R}$ היא קמורה אם"ם $\operatorname{epi}(f)$ קבוצה קמורה.

שאלה 3

הוכיחו או הפריכו את קמירות הקבוצות הבאות.

א. $\left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\colon\ \min\left\{\mathbf{x}_1, -\mathbf{x}_2, \ldots, (-1)^{n+1}\mathbf{x}_n\right\} \leq 1\right\}$.

ב. $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x^3 - y \leq 0\right\}$.

ג. $\left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\colon \mathbf{x}_1^2 \leq \mathbf{x}_2\mathbf{x}_3,\ \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \geq 0\right\}$.

ד. $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\colon\ \|\mathbf{x}-\mathbf{u}\| \leq \|\mathbf{x}-\mathbf{v}\|\}$ עבור $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ קבועים.

ה. $\left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\colon\ (\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3+1)(2\mathbf{x}_1+2\mathbf{x}_3+2)(3\mathbf{x}_1+3\mathbf{x}_2+3) \geq 1\right\} \cap \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\colon \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \geq -\frac{1}{3}\right\}$.

שאלה 4

הוכיחו או הפריכו את קמירות הפונקציות הבאות.

א. $f(x,y) = -\sqrt{xy}$ בתחום $\mathbb{R}_+^2$.

הכוונה: תוכלו להשתמש באי־שוויון קושי־שוורץ.

ב. $f(\mathbf{x}) = (\|\mathbf{x}\| - 1)^3$ בתחום $\mathbb{R}^n$.

ג. $f(\mathbf{x}) = (\|\mathbf{x}\|+1)^4$ **בתחום** $\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n:\ \|\mathbf{x}\|_1 \ge \sqrt{n}\}$.

ד. $f(x) = \begin{cases} x\ln(x), & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ **בתחום** $\mathbb{R}_+$.

הכוונה: הוכיחו את הטענה בתחום הפתוח $\mathbb{R}_{++}$ והשתמשו בכך בשביל להוכיח את הטענה גם בתחום $\mathbb{R}_+$.

ה. $f(x,y,z) = \sqrt{7x^2+y^2+5z^2-4xy-4xz+2yz-4z+6}$ **ב־**$\mathrm{dom}(f)$ **ומיצאו תחום זה.**

הכוונה: הראו שמדובר בהחלפת משתנים לינארית של פונקציה קמורה בדומה למה שראינו בתרגול.

ו. $f(\mathbf{x}) = (\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| - \|\mathbf{x}-\mathbf{b}\|)^2$ **בתחום** $\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n:\ \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| \ge \|\mathbf{x}-\mathbf{b}\|\}$ **עבור** $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{R}^n$ כלשהם.

ז. $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{1+\min\{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_n\}}$ **בתחום** $\mathbb{R}^n_+$.

הכוונה: בטאו את f כמקסימום של פונקציות.

ח. $f(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}_1^4}{\mathbf{x}_2^2} + \frac{\mathbf{x}_2^4}{\mathbf{x}_1^2} + 2\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 - \min\left\{\ln(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2), \ln\left(2\mathbf{x}_1+\frac{1}{2}\mathbf{x}_2\right)\right\}$ **בתחום** $\mathbb{R}^2_{++}$.

הכוונה: השתמשו בפונקציה $\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{t}$ בתחום $t>0$ אותה ראינו בהרצאה.

שאלה 5

נתונה $f:\mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ המוגדרת על־ידי

$$f(\mathbf{x}) = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\mathbf{x}_i}.$$

כלומר, f מחשבת את הממוצע ההנדסי של איברי הווקטור $\mathbf{x}$.

א. הוכיחו באמצעות אי־שוויון הגרדיאנט ש־f קעורה בתחום הפתוח $\mathbb{R}^n_{++}$.

ב. השתמשו בסעיף הקודם בשביל להוכיח לפי הגדרה ש־f קעורה בתחום $\mathbb{R}^n_+$. כלומר, ביחרו $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n_+$ כלשהם וחלקו למקרים אפשריים.

שאלה 6

נתונה הפונקציה

$$f(x,y) = \sqrt{6x^2+14y^2+8xy-2x+2y+\frac{7}{17}}.$$

האם יש ל־f נקודות מינימום גלובלי? אם כן -- מיצאו אותן, אם לא -- הסבירו מדוע.

הכוונה: מיצאו ראשית את תחום ההגדרה של f באופן מפורש (כלומר, היות הפונקציה בתוך השורש אי־שלילית).

שאלה 7 (אין חובת הגשה -- בונוס 10 נקודות)

נתונה $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ גזירה ברציפות, קוארסיבית ובעלת גרדיאנט ליפשיצי עם קבוע L. נניח ש־$\nabla^2 f(\mathbf{x}) \succeq 0$ לכל $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$. תהי $\{\mathbf{x}^k\}_{k\ge 0}$ הסדרה הנוצרת ע"י שיטת הגרדיאנט עם גודל צעד קבוע $t\in\left(0,\frac{2}{L}\right)$. נסמן $f^* = \min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$. **הוכיחו כי** $f(\mathbf{x}^k)\to f^*$ **כאשר** $k\to\infty$.

הכוונה: מיצאו קבוצת רמה חסומה שבאמצעותה ניתן להראות שמתקיימים תנאי שאלה 6 מתרגיל בית 5.