Q2:

```python
def ex1(A: np.ndarray, x: np.ndarray) -> np.ndarray:
    assert A.shape[0] == A.shape[1] == x.shape[0]

    n = A.shape[0]
    B = A.T + np.outer(np.array(list(range(1, n + 1))), x.T)
    B = B - np.diag(np.diag(B))

    return B
```

run Q1, Q2

```python
# Inputs and printing solutions to questions
print("Question 1")
A = np.array([[11, -7, 4], [4, 0, 8], [7, 8, 7]])
x = np.array([10, 11, 13])
print(ex1(A, x), '\n')
A = np.array([[1, 2, 3], [4, 5, 6],[7, 8, 9]])
B = A + np.full( shape: (len(A), len(A)),  fill_value: 2)
b = np.array([1, 2, 3])
n = 4
print('q2 result: ', ex2(A, B, n, b))
print('\nQ5')
X = np.array([[-0.966175231649752, -0.920529100440521, -0.871040946427231, -0.792416754493313, -0.7319977
a = fit_rational(X)
d = fit_rational_normed(X)
print('\nPart A solution: ', a)
print('\nPart B solution: ', d)
```

Q2:

```python
def ex2(A, B, n, b):
    """doesn't meet requirements"""
    if n < 4 or A.shape[0] != B.shape[0] or A.shape[1] != B.shape[1] or B.shape[0] != B.shape[1] or A.shape[0] != 
        return

    """ A, B \in R^(mxm), n >= 4 \in N, b \in R^m """
    y = np.concatenate([i * b for i in range(1, n+1)])
    P = build_P(A, B, n)
    Q = np.kron(A, P)
    z = np.concatenate([y for _ in range(len(A))])
    sol = np.linalg.solve(Q, z)
    return sol
```

```python
def build_P(A, B, n):
    m = A.shape[0]
    P = np.zeros((n * m, n * m))

    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if i == j:
                P[i*m:(i+1)*m, j*m:(j+1)*m] = A
            elif j == i + 1:
                P[i*m:(i+1)*m, j*m:(j+1)*m] = B.T
            elif i == j + 1:
                P[i*m:(i+1)*m, j*m:(j+1)*m] = B
    return P
```

```
Question 1
[[ 0 15 20]
 [13  0 34]
 [34 41  0]]
```

.1

```
q2 result:  [-354.12429678  770.43862182 -422.86522077  292.95507359 -425.81638573
  211.44323565  377.39384329 -723.19065961  448.92660639 -211.01227866
  -14.38180556   40.66295457 -135.89081622   82.0682426    66.70214287
 -282.63872531  265.9788166  -140.83727166  -94.15926857  138.90226097
 -251.33590587  315.23298385  227.90231361 -174.67303816   60.95004218
    5.62327724  -72.90199293  -30.09678243  199.39843742  -90.38639814
  103.91450212 -190.00975504  189.55837632 -231.36520464   40.76849083
    6.86558415]
```

.2

3. ⓒ

(2)

נתון: $m_1 = \max\{f(x) : x \in C\}$

$m_2 = \min\{-f(x) : x \in C\}$

וקבוצות הפתרונות:

$S_1 := \operatorname{argmax}\{f(x) : x \in C\} = \{x \in C : f(x) = m_1\}$

$S_2 := \operatorname{argmin}\{-f(x) : x \in C\} = \{x \in C : -f(x) = m_2\}$

- $\forall x^* \in S_1 : f(x^*) = m_1 \underset{\uparrow}{=} -m_2 \Rightarrow -f(x^*) = m_2$

טענה 1

$\Rightarrow x^* \in S_2 \Rightarrow S_1 \subseteq S_2$

- $\forall x^* \in S_2 : -f(x^*) = m_2 \underset{\uparrow}{=} -m_1 \Rightarrow f(x^*) = m_1$

טענה 1

$\Rightarrow x^* \in S_1 \Rightarrow S_2 \subseteq S_1 \Rightarrow S_1 = S_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{argmax}\{f(x) : x \in C\} = \operatorname{argmin}\{-f(x) : x \in C\}$

(4)

נתון: $m_1 = \max\{\alpha f(x) : x \in C\}$

$m_2 = \max\{f(x) : x \in C\}$

לפי ההגדרה קיים $x^* \in C$ כך שלכל $x \in C$: $\overset{(*)}{m_2 = f(x^*) \geq f(x)}$

נקח את $x^* \in C$ שמקיים $(*)$ ונקבל שעבורו:

$\forall x \in C : m_2 = f(x^*) \geq f(x)$

$\underset{\alpha \geq 0}{\Rightarrow} \alpha m_2 = \alpha f(x^*) \geq \alpha f(x)$

$\Rightarrow m_1 \underset{\uparrow}{=} \alpha m_2 \Rightarrow \max\{\alpha f(x) : x \in C\} = \alpha \max\{f(x) : x \in C\}$

לפי הגדרה - מצאנו x^* המקיים דרישות של המקסימום ולכן $\alpha f(x^*)$ יהיה הערך האופטימלי

Scanned with CamScanner

באופן דומה נוכיח את הלמה ל- min.

$$m_1 = \min\{\alpha f(x) : x\in C\}$$
$$m_2 = \min\{f(x) : x\in C\}$$

לפי ההגדרה קיים $x^*\in C$ כך שלכל $m_2=f(x^*)\le f(x) : x\in C$

נקח x^* כזה, מתקיים:

$$\forall x\in C:\ m_2=f(x^*)\le f(x)$$
$$\Rightarrow \underbrace{\alpha m_2 = \alpha f(x^*)\le \alpha f(x)}_{\alpha\ge 0}$$
$$\Rightarrow \alpha m_2 \underset{\text{לפי הגדרה}}{=} m_1 \Rightarrow \min\{\alpha f(x): x\in C\}=\alpha\min\{f(x): x\in C\}$$

(c)

$$S_1:=\arg\max\{f(x)+\alpha : x\in C\}=\{x\in C: f(x)+\alpha=m_1\}$$
$$S_2:=\arg\max\{f(x): x\in C\}=\{x\in C: f(x)=m_2\}$$
$$m_1:=\max\{f(x)+\alpha : x\in C\}$$
$$m_2:=\max\{f(x): x\in C\}$$

נקח $x^*\in S_1$. מתקיים:

$$m_2+\alpha \underset{\text{טענה 3}}{=} m_1 = f(x^*)+\alpha$$
$$\Rightarrow f(x^*)=m_2 \Rightarrow x^*\in S_2 \Rightarrow S_1\subseteq S_2$$

נקח $x^*\in S_2$. מתקיים:

$$m_1-\alpha = m_2 = f(x^*)$$
$$\Rightarrow f(x^*)+\alpha = m_1 \Rightarrow x^*\in S_1 \Rightarrow S_2\subseteq S_1$$
$$\Rightarrow S_1=S_2 \Rightarrow \arg\max\{f(x)+\alpha : x\in C\}=\arg\max\{f(x$$

באופן דומה נוכיח עבור min; נסמן S_1,S_2,m_1,m_2 בדומה לאיך שהגדרנו אותם בסעיף הקודם. ההוכחה תישאר בדיוק אותו דבר.

(9)

נתון: $x_1 \in \arg\max\{f(x)+g(x) : x \in C\}$

$x_2 \in \arg\max\{f(x) : x \in C\}$

$x_3 \in \arg\max\{g(x) : x \in C\}$

$\Rightarrow \max\{f(x)+g(x) : x \in C\} = f(x_1)+g(x_1)$

לפי ההגדרה מתקיים עבור x_2: $\forall x \in C : f(x_2) \geq f(x)$

וכנ"ל עבור x_3: $\forall x \in C : g(x_3) \geq f(x)$

לכן בפרט: $g(x_3) \geq g(x_1)$, $f(x_2) \geq f(x_1)$

$\Rightarrow f(x_1)+g(x_1) \leq f(x_2)+g(x_3) = \max\{f(x) : x \in C\} +$
$+ \max\{g(x) : x \in C\}$

(10)

נתון: $x_C \in \arg\max\{f(x) : x \in C\}$

$m_C = \max\{f(x) : x \in C\}$

$x_D \in \arg\max\{f(x) : x \in D\}$

$m_D = \max\{f(x) : x \in D\}$

$\Rightarrow$ לכל $x \in D$: $m_D = f(x_D) \geq f(x)$

נקח x_C. מכיוון ש- $C \subseteq D$, $x_C \in D$, לכן:

$m_D = f(x_D) \geq f(x_C) = m_C$

$\Rightarrow \max\{f(x) : x \in D\} \geq \max\{f(x) : x \in C\}$

עבור מינ, ההוכחה דומה:

$x_C = \arg\min\{f(x) : x \in C\}$
$m_C = \min\{f(x) : x \in C\}$
$x_D = \arg\min\{f(x) : x \in D\}$
$m_D = \min\{f(x) : x \in D\}$

$\Rightarrow$ לכל $x \in D$: $m_D = f(x_D) \leq f(x)$

$x_C \in D \Rightarrow m_D = f(x_D) \leq f(x_C) = m_C$

$\Rightarrow \min\{f(x) : x \in D\} \leq \min\{f(x) : x \in C\}$

ב

$$S_2 := \arg\min_{x\in C} \frac{1}{f(x)}$$

נסמן: $S_1 := \arg\max_{x\in C} f(x)$

נקח $x^* \in S_1$. מתקיים:

$$\forall x\in C: \quad f(x^*) \geq f(x)$$

חוץ מזה ידוע לנו שקבוצה $\arg\min_{x\in C} f(x)$ לא ריקה

ועבור $z \in \arg\min_{x\in C} f(x)$, מתקיים: $f(z) > 0$

$$z \in \arg\min_{x\in C} f(x) \Rightarrow \forall x\in C: f(x) \geq f(z) > 0$$

$$\Rightarrow \forall x\in C: f(x) > 0$$

$$\Rightarrow \forall x\in C: f(x^*) \geq f(x) > 0$$

(*) שני הגורמים חיוביים ממש - $f(x^*), f(x)$ ולכן מותר להפעיל פונ' מונ' יורדת $\frac{1}{x}$ לשני הצדדים ולהפוך את $\geq$ ל- $\leq$:

$$\forall x\in C: \frac{1}{f(x^*)} \leq \frac{1}{f(x)} \underset{\text{לפי הגדרה}}{\Rightarrow} x^* \in \arg\min_{x\in C} \frac{1}{f(x)} = S_2$$

$$\Rightarrow S_1 \subseteq S_2$$

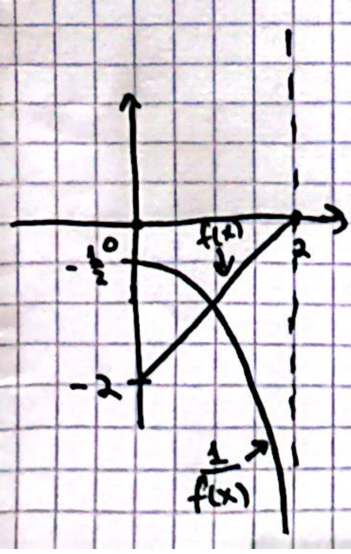
נקח $x^* \in S_2$. מתקיים:

$$\forall x\in C: 0 < \frac{1}{f(x^*)} \leq \frac{1}{f(x)}$$

מ-(*) אפשר להפעיל $\frac{1}{x}$ ולהפוך $\leq$ ל- $\geq$. לכן:

$$0 < f(x) \leq f(x^*)$$

$$\Rightarrow x^* \in S_1 \Rightarrow S_2 \subseteq S_1 \Rightarrow S_1 = S_2.$$



טענה לא נכונה ללא הנחות לגבי $\arg\min_{x\in C} f(x)$.

נקח פונקציה הבאה: $f: [0,2] \to \mathbb{R}$
$f(x) = x-2$

נקבל: $\arg\max_{x\in[0,2]} f(x) = \{2\}$

אבל לא קיים $\arg\min$ כי לכל נקודה ב- $[0,2)$ יכולים להתקדם ב-ε ולרדת עוד יותר.

שאלה 4

שלב א': נראה שהביטוי חסום ע"י $\lambda_{max}(A)$

$$x^T \cdot A \cdot x = x^T U \cdot \Lambda \cdot U^{-1} \cdot x = x^T \cdot U \cdot \Lambda \cdot U^T x \le x^T \cdot U \cdot \lambda_{max}(A) \cdot I \cdot U^T \cdot x$$

משפט פירוק ספקטרלי

$$= \lambda_{max}(A) \cdot x^T \cdot \underbrace{U \cdot U^T}_{I} \cdot x = \lambda_{max}(A) \cdot x^T \cdot x = \lambda_{max}(A)$$

הוצאנו סקלר

כי אורתונורמליים

$$\|x\| = 1 \Rightarrow x^T x = 1$$

שלב ב': ו"ע מנורמל של $\lambda_{max}(A)$ נניח כי: x
מכיוון שמנורמל אז בהכרח מתקיים ש- $\|x\| = 1$

$$x^T \cdot A \cdot x = x^T \cdot \lambda_{max}(A) x = \lambda_{max}(A) \cdot x^T \cdot x = \lambda_{max}(A)$$

סקלר

$\|x\| = 1$

ב. תהי מטריצה $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. הוכיחו כי

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{i=1,2,\dots,m} \sum_{j=1}^{n} |\mathbf{A}_{ij}|$$

כלומר, ערך הנורמה הוא המקסימום של סכום הערכים המוחלטים מבין השורות.

שלב א':

$$\|A\|_\infty \underset{\text{הגדרה}}{=} \max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty=1} \left\| \begin{pmatrix} A_1 x \\ \vdots \\ A_m x \end{pmatrix} \right\|_\infty$$

$$= \max_{\|x\|_\infty=1} \left(\max_{j=1,\dots,m} |A_j x| \right) = \max_{\|x\|_\infty=1} \left(\max_{j=1,\dots,m} \left| \sum_{i=1}^{n} A_{ji} x_i \right| \right)$$

$$\underset{\text{א"ש}}{\le} \max_{\|x\|_\infty=1} \left(\max_{j=1,\dots,m} \sum_{i=1}^{n} |A_{ji} x_i| \right) = \max_{\|x\|_\infty=1} \left(\max_{j=1,\dots,m} \left(\sum_{i=1}^{n} |A_{ji}||x_i| \right) \right)$$

$$\le \max_{\|x\|_\infty=1} \left(\max_{j=1,\dots,m} \sum_{i=1}^{n} |A_{ji}| \max_{i=1,\dots,n} |x_i| \right) = \max_{\|x\|_\infty=1} \left(\max_{j=1,\dots,m} \sum_{i=1}^{n} |A_{ji}| \left(\max_{i=1,\dots,n} |x_i| \right) \right)$$

$$= \max_{\|x\|_\infty=1} \left(\max_{j=1,\dots,m} \sum_{i=1}^{n} |A_{ji}| \, \|x\|_\infty \right) = \max_{j=1,\dots,m} \sum_{i=1}^{n} A_{ji} \underset{\text{א"ש}}{\le} \max_{j=1,\dots,m} \left(\sum_{i=1}^{n} |A_{ji}| \right)$$

שלב ב':

נגדיר $j^* = \operatorname{argmax}$ $\qquad x = e^{j^*} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ נכי ב e_{j^*}

$$\max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty = |A \cdot e^{j^*}| = \underset{\text{שורה}}{|A_{j^*}|} = \sum_{i=1}^{n} |A_{j^*i}| = \max_{j=1,\dots,m} \left(\sum_{i=1}^{n} |A_{ji}| \right)$$

$\blacksquare$

N5. א

$$y_i \approx \frac{c_0 + c_1 x_i + c_2 x_i^2}{d_0 + d_1 x_i + d_2 x_i^2}$$

$$u = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

קובעים $d_0 = 1$ ומקבלים

$$\Rightarrow y_i + d_1 x_i y_i + d_2 x_i^2 y_i \approx c_0 + c_1 x_i + c_2 x_i^2 \qquad (d_0 = 1)$$

$$\Rightarrow y_i \approx c_0 + c_1 x_i + c_2 x_i^2 - d_1 x_i y_i - d_2 x_i^2 y_i$$

נגדיר:

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & -x_1 y_1 & -x_1^2 y_1 \\ & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & -x_m y_m & -x_m^2 y_m \end{pmatrix}$$

וע"י פתירת בעיית ריבועים פחותים הבאה:
נקבל את ה-u
שהוא הקירוב הכי טוב.

$$\min_u \|Au - y\|_2^2$$

פלטים:

```
Q5

Part B solution:  [ 1.74018225  0.49321152 -0.93418242  1.          2.34611649  1.6613219 ]

Part D solution:  [ 0.07613583 -0.23284937  0.61771818  0.03340038  0.26105315  0.69938861]
```

5 ב)

$u := (c_0, c_1, c_2, d_0, d_1, d_2), \ \forall i \in [m] \quad y_i \approx f(x_i) = \frac{c_0 + c_1 x_i + c_2 x_i^2}{d_0 + d_1 x_i + d_2 x_i^2}$ נגדיר

במקרה נרצה $y_i - f(x_i) \approx 0$

$$y_i - f(x_i) = y_i - \frac{c_0 + c_1 x_i + c_2 x_i^2}{d_0 + d_1 x_i + d_2 x_i^2} = \frac{d_0 y_i + d_1 x_i y_i + d_2 x_i^2 y_i - c_0 - c_1 x_i - c_2 x_i^2}{d_0 + d_1 x_i + d_2 x_i^2} \approx 0$$

$$\Rightarrow \forall i: d_0 y_i + d_1 x_i y_i + d_2 x_i^2 y_i - c_0 - c_1 x_i - c_2 x_i^2 = 0 \Rightarrow \min_{\substack{\|u\|_2 = 1 \\ u \in \mathbb{R}^6}} \left\| \sum_{i=1}^{m} (-1, -x_i, -x_i^2 y_i, x_i y_i, x_i^2 y_i) u \right\|$$

$$\Rightarrow \min_{\substack{\|u\|_2 = 1 \\ u \in \mathbb{R}^6}} \left\| \begin{pmatrix} -1 & -x_1 & -x_1^2 & y_1 & x_1 y_1 & x_1^2 y_1 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ -1 & -x_m & -x_m^2 & y_m & x_m y_m & x_m^2 y_m \end{pmatrix} u \right\|$$

$$= \min_{\substack{\|u\|_2 = 1 \\ u \in \mathbb{R}^6}} (u^T \underbrace{A^T \cdot A}_{\text{סימטרי}} \cdot u)$$

שזוהי תבנית ריבועית ←

ידוע משפט ריילי כי המינימום הוא $\lambda_{min}(A^T A)$

ג) ב)

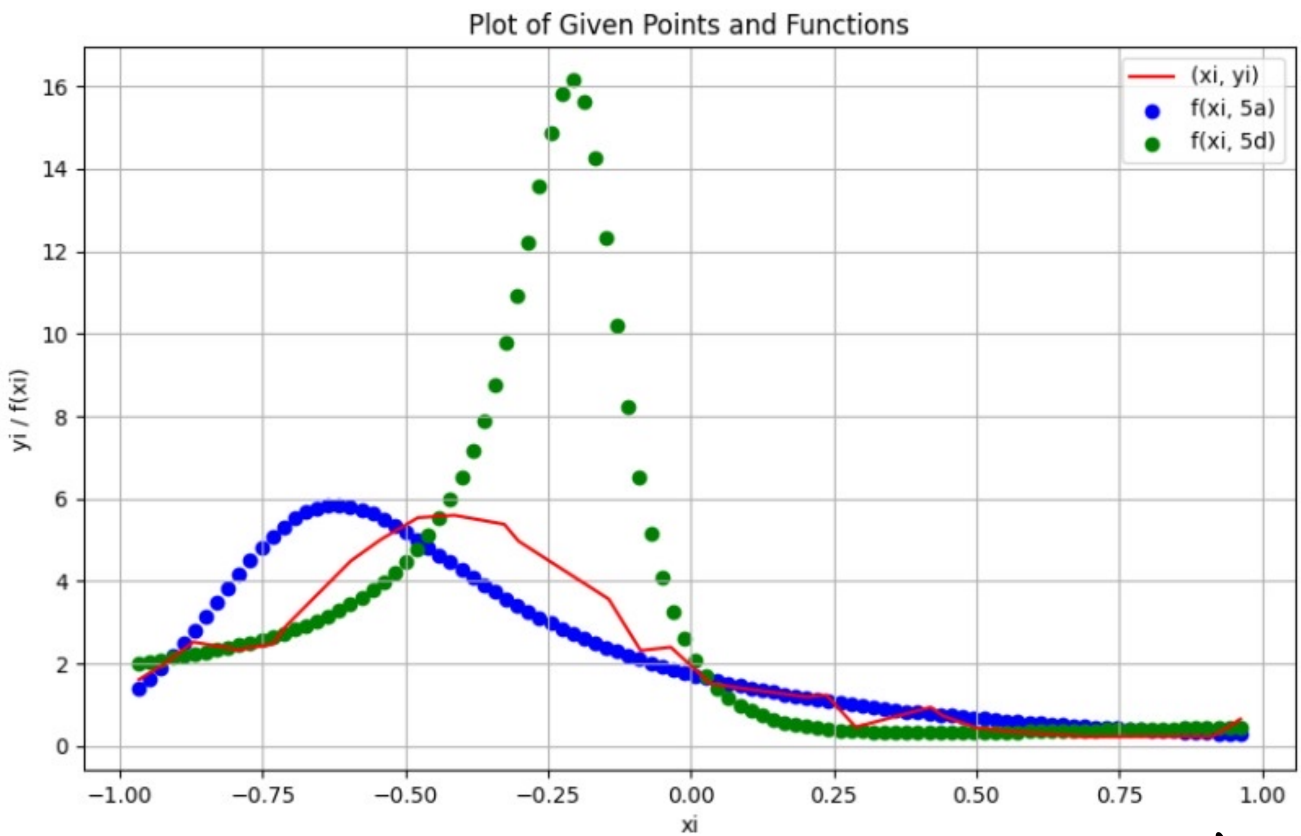
```python
def fit_rational(X: np.ndarray):
    m = X.shape[1]

    if X.shape[0] != 2:
        raise ValueError("incorrect dimensions")
    ones = np.ones(m)

    x = X[0]
    y = X[1]

    A = np.column_stack((ones, x, x ** 2, -x * y, - (x ** 2) * y))
    sol = np.linalg.lstsq(A, y, rcond=None)[0]
    coefficents = np.concatenate((sol[:3], [1], sol[3:]))
    return coefficents
```

ג) מימוש ג וב)

```python
def fit_rational_normed(X: np.ndarray):
    x = X[0]
    y = X[1]

    if X.shape[0] != 2 or x.shape != y.shape:
        raise ValueError("incorrect dimensions")
    A = np.array([[-1, -xi, -xi ** 2, yi, yi * xi, yi * (xi ** 2)] for xi, yi in zip(x, y)])
    eigenvalues, U = np.linalg.eig(np.dot(A.T,A))
    return U[:, np.argmin(eigenvalues)]
```

```python
f = lambda xi, u: (u[0] + u[1]*xi + u[2]*xi**2) / (u[3] + u[4]*xi + u[5]*xi**2)
xi_range = np.linspace(min(X[0]), max(X[0]), num: 100)
f_a_values = f(xi_range, a)
f_d_values = f(xi_range, d)

plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot( *args: X[0], X[1], color='red', label='(xi, yi)')
plt.scatter(xi_range, f_a_values, color='blue', label='f(xi, 5a)')
plt.scatter(xi_range, f_d_values, color='green', label='f(xi, 5d)')

plt.title('Plot of Given Points and Functions')
plt.xlabel('xi')
plt.ylabel('yi / f(xi)')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

Plot of $f(x_i), y_i$ from Q5



ניתן לראות כי 5a מתאים יותר לזוג (x_i,y_i) הנתון מאשר
5d ע"פ הגרף ולכן מבחינת דיוק יותר טוב.