שאלה 1

תהי $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ויהיו $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ ו־$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. נגדיר את $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ על־ידי $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{Ax}+\mathbf{b})$. אז שאם f גזירה ברציפות אז $\nabla g(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^T \nabla f(\mathbf{Ax}+\mathbf{b})$.

הכוונה: השתמשו בכלל השרשרת עבור פונקציות מרובות משתנים.

ש1.

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $b \in \mathbb{R}^n$

$g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

$$g(x) = f(Ax+b) = f(u(x)) \qquad (u(x) = Ax+b)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_j} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$ ← כלל השרשרת

* $u_j(x) = \langle A_j, x\rangle + b_j \Rightarrow \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = A_{ji}$ (A_j - שורה ה-j-ית)

$$\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_j} \cdot A_{ji} = \langle A^i, \nabla f(Ax+b)\rangle$$ (A^i - עמודה ה-i-ית)

$$\Rightarrow \nabla g(x) = \begin{pmatrix} \langle A^1, \nabla f(Ax+b)\rangle \\ \vdots \\ \langle A^m, \nabla f(Ax+b)\rangle \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (A^1)^T \nabla f(Ax+b) \\ \vdots \\ (A^m)^T \nabla f(Ax+b) \end{pmatrix} =$$

$$= A^T \nabla f(Ax+b)$$

שאלה 2

מיצאו נוסחה מפורשת לחישוב הגרדיאנט וההסיאן של הפונקציות הבאות. ניתן להגדיר פונקציות, מטריצות וקטורי עזר בדומה למה שראינו בתרגול.

א. $f(x,y,z) = (x+2y-3z)^2 - e^{-2x+y-z}$.

n2. א

$$f(x,y,z) = (\underbrace{x+2y-3z}_{u})^2 - e^{\overbrace{-2x+y-z}^{v}}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{x} := Ax$$

$$\Rightarrow f(x,y,z) = u^2 - e^v = g(u,v) = g(Ax)$$

$$\nabla f(x,y,z) = A^T \nabla g(u,v)$$

$$\frac{\partial g}{\partial u} = 2u \ , \ \frac{\partial g}{\partial v} = -e^v \Rightarrow \nabla g(u,v) = \begin{pmatrix} 2u \\ -e^v \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \nabla f(x,y,z) = A^T \begin{pmatrix} 2u \\ -e^v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x+4y-6z \\ -e^{-2x+y-z} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2x+4y-6z+2e^{-2x+y-z} \\ 4x+8y-12z-e^{-2x+y-z} \\ -6x-12y+18z+e^{-2x+y-z} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)}{\partial u} = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = 2 \ , \ \frac{\partial\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)}{\partial v} = 0$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)}{\partial v} = -e^v \ , \ \frac{\partial\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)}{\partial u} = 0$$

$$\Rightarrow \nabla^2 g(u,v) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -e^v \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 f(x,y,z) = A^T \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -e^v \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 2 & 2ve^v \\ 4 & -ve^v \\ -6 & ve^v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2-4ve^v & 4+2ve^v & -6-2ve^v \\ 4+\cancel{2ve^v} & 8-ve^v & -12+ve^v \\ -6-2ve^v & -12+ve^v & 18-ve^v \end{pmatrix}$$

$.f(x,y,z) = (x+y)^2 (y+z)^3 (z+x)^4$ (ג.2

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ z+x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

נסמן $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ו- $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

g גזירה ברציפות מכיוון שהיא מנ"ה של פונקציות אלמנטריות ולכן
לפי הטענה.

$$f(x,y,z) = g(a,b,c) = a^2 \cdot b^3 \cdot c^4 = g(AX)$$

מהטענה מתקיים $\nabla g(x) = A^T \cdot \nabla f(AX) = A^T \nabla f(a,b,c)$

$$\nabla f(x,y,z) = A^T \cdot \begin{pmatrix} 2a \cdot b^3 \cdot c^4 \\ 3b^2 \cdot a^2 \cdot c^4 \\ 4c^3 \cdot a^2 \cdot b^3 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x,y,z) = A^T \begin{pmatrix} 2 \cdot b^3 \cdot c^4 & 6 \cdot b^2 a \cdot c^4 & 8c^3 a \cdot b^3 \\ 6 \cdot a \cdot b^2 \cdot c^4 & 6 \cdot b \cdot a^2 \cdot c^4 & 12c^3 \cdot b^2 \cdot a^2 \\ 8a \cdot b^3 \cdot c^3 & 12b^2 \cdot a^2 \cdot c^3 & 12 \cdot c^2 \cdot a^2 \cdot b^3 \end{pmatrix} \cdot A$$

אם נציב $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ הגדרה של x,y,z ונכפול עם A נקבל
את הפתרון כנדרש

ג. $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ המוגדרת על־ידי $f(\mathbf{x}) = \ln\left(\left(\mathbf{c}^T(\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b})\right)^2+1\right)$ עבור $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ו־$\mathbf{b},\mathbf{c}\in\mathbb{R}^n$.

ג

$$f(x) = \ln\left(\left(c^T(Ax+b)\right)^2+1\right) =$$

$$= \ln\left(\left(c^TAx+c^Tb\right)^2+1\right)$$

$$A' = c^TA \in \mathbb{R}^{1\times n}, \quad b' = c^Tb \in \mathbb{R}$$

$$u(x) = A'x+b' = c^TAx+c^Tb$$

$$\Rightarrow f(x) = g(A'x+b') = g(u(x)) = \ln(u^2+1)$$

$$\nabla g(A'x+b') = \frac{2u}{u^2+1}$$

$$\Rightarrow \nabla f(x) = (A')^T \cdot \frac{2u}{u^2+1} = \frac{2u}{u^2+1}\cdot (A')^T$$

$$\nabla^2 f(x) = (A')^T \cdot \left(\frac{2u}{u^2+1}\right)'(A') = \left(\frac{2u}{u^2+1}\right)' A^Tcc^TA =$$

$$= \frac{2(u^2+1)-2u(2u)}{(u^2+1)^2}A^Tcc^TA = \frac{2-2u^2}{(u^2+1)^2}A^Tcc^TA$$

$f(x)=\ln\left(\sum_{j=1}^{m} e^{A_j^T x + b_j}\right)$ נגדיר $A' \in \mathbb{R}^{m \times n}$ כך ש- $(A')_{(i)} = A_i^T$ (2

$\forall 1 \le i \le n$ $\quad g(x) = \ln\left(\sum_{j=1}^{m} e^{A_j^T x}\right) \Rightarrow f(x) = g(A'x+b)$

$$\nabla g(x) = \begin{pmatrix} \frac{e^{x_1}}{\sum_{j=1}^{m} e^{x_j}} \\ \vdots \\ \frac{e^{x_m}}{\sum_{j=1}^{m} e^{x_j}} \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\nabla^2 g(x)\right)_{ik} = \frac{\partial g}{\partial x_i \partial x_k}(x)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{e^{x_i}\left(\sum_{j=1}^{m} e^{x_j} - e^{x_i}\right)}{\left(\sum_{j=1}^{m} e^{x_j}\right)^2} & k = i \\ \dfrac{-e^{x_i} \cdot e^{x_k}}{\left(\sum_{j=1}^{m} e^{x_j}\right)^2} & k \neq j \end{cases}$$

נקבל מהטענה כך ש- $\nabla f(x) = A^T \cdot \nabla g(A'x+b)$

שנציב A ו- $\nabla g(A'x+b)$ כנדרש.

$$\nabla^2 f(x) = A^T \nabla^2 g(x) \cdot A'$$

שאלה 3

א. נתונות קבוצה סגורה $C \subseteq \mathbb{R}^n$ ופונקציה רציפה $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. ידוע כי קיים סקלר $\alpha \in \mathbb{R}^n$ כך שהקבוצה $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) \le \alpha\} \cap C$ חסומה ולא ריקה. הוכיחו כי $\operatorname*{argmin}_{\mathbf{x}\in C} f(\mathbf{x}) \neq \emptyset$.

<u>צ"ל:</u> f קוארסיביות.

$$f^{-1}(x \in (-\infty, \alpha]) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \le \alpha\}$$

הקבוצה סגורה מכיוון ש-f רציפה. ובפרט S סגורה על f.

מתקיים כי S קומפקטית מכיוון שהיא סגורה וחסומה..

לכן נקבל מוויירשטראס מינימום שנסמן m כך שקיים $y \in S$ כך ש-
$f(x) = m$ ולכל $x \in S$ מתקיים כי $f(x) \ge m$

לכל $x \in S \setminus C$ מתקיים

$$f(x) > \alpha \ge f(y) = m$$

נניח בשלילה שאין מינימום ב-C

$\Leftarrow$ $\forall x \in S \setminus C : f(x) \ge m$ ומכיוון שב-$S\setminus C$ עבור $f(x)$ חסומה, מלרע
וסגורה ולכן קיים לה מינימום.
בסתירה, ולכן קיים לו מינימום.

ולכן $\operatorname*{argmin}_{x \in C} f(x) \neq \emptyset$

ב. פונקציה $f: C \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ עבור C קבוצה סגורה נקראת קוארסיבית ב־C אם לכל M קיים $R > 0$ כך שלכל $\mathbf{x} \in C$ המקיים $\|\mathbf{x}\| > R$ אז $f(\mathbf{x}) > M$. הוכיחו שאם f רציפה וקוארסיבית ב־C, אז

$$\operatorname*{argmin}_{\mathbf{x}\in C} f(\mathbf{x}) \neq \emptyset.$$

נסמן נקודה כלשהי $x_0 \in C$. מהקוארסיביות מתקיים:

קיים $R > 0$ כך ש- $\|x\| > R \Rightarrow f(x) > f(x_0)$ **(1)**

נגדיר כדור $B := B(0,R) = \{x \in C \mid \|x\| \le R\}$

ראינו בהרצאה שכדור B שהגדרנו מהווה קבוצה סגורה. לפי הנתון, גם C - קבוצה סגורה

ולכן $S = B \cap C$ גם היא מהווה קבוצה סגורה (גם חסומה) ולכן S- קומפקטית.

לפי משפט ויירשטראס, קיים לקבוצה כי מינימום אשר נסמנו ב- $x^* \in \operatorname*{arg\,min}_{x\in S} f(x)$.

נשים לב כי $x_0 \in S$ כי אחרת נניח בשלילה ש- $x_0 \in C/S$, אז מ- (1)

נקבל $f(x_0) > f(x_0)$ בסתירה. ולכן:

$$\forall x \in C/S: \quad f(x^*) \underset{x^* \in \arg\min_S f(x)}{\le} f(x_0) \underset{(1)}{\le} f(x)$$

$$\forall x \in S: \quad f(x^*) \underset{x^* \in \arg\min_S f(x)}{\le} f(x)$$

$$\Rightarrow x^* \in \operatorname*{arg\,min}_{x\in C} f(x)$$

שאלה 4

תהי $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ המוגדרת על־ידי

$$.f(x,y)=\begin{cases} x^2-2xy+y^2, & x\neq y \\ x^2+y^2, & x=y \end{cases}$$

הוכיחו שלכל $(0,0)\neq(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ ולכל $\alpha\in\mathbb{R}$ אז

$$,\lim_{\alpha\to\pm\infty} f(\alpha x_0,\alpha y_0)=\infty$$

והוכיחו ש־f לא קוארסיבית.

4) יהי $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2 \neq (0,0)$. נחלק למקרים.

$x_0=y_0$:

$$\lim_{\alpha\to\pm\infty}(\alpha^2x_0^2+\alpha^2y_0^2)=\lim_{\alpha\to\pm\infty}(\alpha^2x_0^2+\alpha^2x_0^2)=\lim_{\alpha\to\pm\infty}(2\cdot\underbrace{\alpha^2}_{>0}\cdot\underbrace{x_0^2}_{>0})=\infty$$

$x_0\neq y_0$. בה"כ מתקיים:

$$f(\alpha x_0,\alpha y_0)=\alpha^2x_0^2-2\cdot\alpha^2x_0y_0+\alpha^2y_0^2=\alpha^2(x_0^2-2\cdot x_0\cdot y_0+y_0^2)$$

$$=\underbrace{\alpha^2}_{>0}\underbrace{(x_0-y_0)^2}_{>0}\xrightarrow{\alpha\to\pm\infty}\infty$$

לכן בסה"כ נקבל: $\forall (x_0,y_0)\neq(0,0)\in\mathbb{R}^2$ מתקיים $\lim_{\alpha\to\pm\infty} f(\alpha\cdot x_0,\alpha\cdot y_0)=\infty$

f לא קוארסיבית $\iff$ $\exists M\in\mathbb{R}:\forall R>0\ \ \|x\|>R\Rightarrow f(x)\le M$

נבחר $M=2$, יהי $R>0$ כלשהו כך שעבור $\binom{x}{y}\in\mathbb{R}^2$ המקיים $\left\|\binom{x}{y}\right\|>R$

אז עבור $y=1+x$ כך ש- $\forall x\in\mathbb{R}: \left\|\binom{x}{x+1}\right\|>R$

מתקיים

$$f(x,y)=x^2-2xy+y^2=(x-y)^2=(x-x-1)^2=1\le 2=M$$

לכן, הוכחנו את השלילה של ההגדרה של פונקציה קוארסיבית

ובפרט $f(x,y)$ פונקציה לא קוארסיבית. ∎

ג $\quad .f(x,y,x) = (x-y+z)^4 - (x-z-3)^2 \quad$ (5

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y+z \\ x-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \cdot X$$

$$f(u,v) = u^4 - (v-3)^2$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla f(u,v) = \begin{pmatrix} 4u^3 \\ 6-2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{matrix} u=0 \\ v=3 \end{matrix} \iff \begin{matrix} y = 2z+3 \\ x = z+3 \end{matrix}$$

נק' קריטיות מהצורה הבאה: $\forall z \in \mathbb{R}: (z+3, 2z+3, z)$

$$u = x-y+z = \cancel{z}+3 - 2\cancel{z}+3+\cancel{z} = 6$$

$$\nabla^2 f(u,v) = \begin{pmatrix} 12u^3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12\cdot 6^3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det(\nabla^2 f(u,v)) = 12\cdot 6^3 \cdot (-2) < 0 \Rightarrow$$

$$\mathrm{Tr}(\nabla^2 f(u,v)) > 0$$

נק' סטצ' הם
אוכף או
מקסימום לוקלי

לכן נקבל שכל הנק' מהצורה $\forall z \in \mathbb{R}: (z+3, 2z+3, z)$
שהם אוכפים.

הכוונה: אל תגזרו ישירות והשתמשו בכלים שלמדנו בתרגול.

ב. $f(x,y,z) = x^4 - 2x^2 + y^2 + 2yz + 2z^2$.

5מ.

ב $f(x,y,z) = x^4 - 2x^2 + y^2 + 2yz + 2z^2$

$$\Rightarrow \nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 4x \\ 2y + 2z \\ 2y + 4z \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x(x^2 - 1) = 0 \\ y = -z \\ y = -2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \{-1, 0, 1\} \\ y = z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \Leftarrow$$ נקודות סטציונריות

<u>חישוב ההסיאן:</u>

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(0,0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$${}^{*}\Delta_1 = -4 < 0 \quad , \quad (-1)^1 \Delta_1 = 4 > 0$$

$\Leftarrow$ לפי קריטריון מינורים הראשיים מטריצה לא אינה מוגדרת

ולכן $(0,0,0)$ - נקודת אוכף

המשך שאלה 5 סעיף ב

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} 12x^2-4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(-1,0,0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l} \Delta_1 = 8 > 0 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 16 > 0 \\ \Delta_3 = 8\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 32 > 0 \end{array}$$

$\Leftarrow$ לפי קריטריון מינורים הראשיים, $\nabla^2 f(-1,0,0) \succ 0$

וגם $(-1,0,0)$ נק' סטציונרית לכן לפי משפט שראינו

בהרצאה, $(-1,0,0)$ - נק' מינימום גלובלי ממש

נשים לב ש- $\nabla^2 f(-1,0,0) = \nabla^2 f(1,0,0)$ ולכן גם

$(1,0,0)$ - נק' מינימום גלובלי ממש

ג. $f(x,y)=\frac{x+y}{3+x^2+xy+y^2}$.

הכוונה: ניתן להראות שכל הנקודות הסטציונריות הן גלובליות ולכן אין צורך לחשב את ההסיאן.

ג

$$f(x,y)=\frac{x+y}{3+x^2+xy+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{3+x^2+xy+y^2-(x+y)(2x+y)}{(3+x^2+xy+y^2)^2}=\frac{3-x^2-2xy}{(3+x^2+xy+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{3+x^2+xy+y^2-(x+y)(2y+x)}{(3+x^2+xy+y^2)^2}=\frac{3-y^2-2xy}{(3+x^2+xy+y^2)^2}$$

נשווה נגזרות חלקיות ל-0 ונקבל נק' סטציונריות.

$$\begin{cases} 3-x^2-2xy=0 \\ 3-y^2-2xy=0 \end{cases} \Rightarrow x^2-y^2=0 \Rightarrow x^2=y^2 \Rightarrow$$

$$① \; x=y$$
$$② \; x=-y$$

$$① \; 3-x^2-2x^2=0 \Rightarrow 3x^2=3 \Rightarrow x=\pm 1 \Rightarrow \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$② \; 3-x^2+2x^2=0 \Rightarrow x^2=-3 \Rightarrow x=\phi$$

$$f(1,1)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3} \quad ; \quad f(-1,-1)=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}$$

כעת, נראה כי מתקיים : $-\frac{1}{3}\le f(x,y)\le \frac{1}{3}$

המשך שאלה 5, סעיף ג

$$f(x,y)=\frac{x+y}{3+x^2+xy+y^2}$$

① $f(x,y)\geq -\frac{1}{3}$:

$$\frac{x+y}{3+x^2+xy+y^2}\geq -\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{-3x-3y}{3+x^2+xy+y^2}\leq 1$$

$$\Rightarrow -3x-3y\leq 3+x^2+xy+y^2$$

$$\Rightarrow x^2+x(3+y)+y^2+3y+3\geq 0$$

האי-שוויון מתקיים כאשר דסקרימיננטה קטנה מ-0.

$$D=(3+y)^2-4(y^2+3y+3)=$$
$$=y^2+6y+9-4y^2-12y-12=$$
$$=-3y^2-6y-3=-3(y^2+2y+1)=-3(y+1)^2$$

⇐ קיבלנו דסקרימיננטה שתמיד קטנה מ-0 ומתאפסת רק ב- $(-1,-1)$

⇐ $f(x)\geq -\frac{1}{3}$ ועבור כל נקודה שהיא לא $(-1,-1)$: $f(x)>-\frac{1}{3}$

⇐ $(-1,-1)$ - נקודת מינימום גלובלי ממש

② $f(x)\leq \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow \frac{x+y}{3+x^2+xy+y^2}\leq \frac{1}{3} \Rightarrow 3x+3y\leq 3+x^2+xy+y^2$$

$$\Rightarrow x^2+x(y-3)+(y^2-3y+3)\geq 0$$

אי-שוויון זה מתקיים תחת אותו תנאי (דיסקרימיננטה קטנה מ-0)

$$D=(y-3)^2-4(y^2-3y+3)=y^2-6y+9-4y^2+12y-12=$$
$$=-3y^2+6y-3=-3(y^2-2y+1)=-3(y-1)^2$$

$D<0$: $\forall y\neq 1$

$D=0$: $y=1$

⇐ $\forall y\neq 1$: $f(x)<\frac{1}{3}$

⇐ $(1,1)$ - נקודת מקסימום גלובלי ממש