

## תרגיל בית 2

### שאלה 1

נתון מדגם מהתפלגות גיאומטרית  $X_1, \dots, X_n \sim Geo(p)$ . מצאו אומד נראות מרבית עבור  $p$  וחשבו לו רווח סמך ברמת סמך  $1 - \alpha$ .

### שאלה 2

יהיו  $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , ויהי  $\tau$  השברון ה-0.95 של ההתפלגות  $P(X \leq \tau) = 0.95$ .

- מצאו ביטוי ל- $\tau$  בפונקציה של הפרמטרים של ההתפלגות  $\mu$  ו- $\sigma^2$ .
- כעת נניח ש- $\sigma$  אינו ידוע, ואילו  $\mu$  ידוע. מצאו אומד נראות מרבית ל- $\sigma$  ובנו רווח סמך ברמת סמך 0.95 עבורו.
- תחת התנאים מסעיף ב', מצאו אומד נראות מירבית ל- $\tau$  ובנו רווח סמך ברמת סמך 0.95 עבורו.
- תחת התנאים מסעיף ב', מצאו אומד נראות מירבית ל- $\psi = \log(\sigma)$  ובנו רווח סמך ברמת סמך 0.95 עבורו.

### שאלה 3

יהיו  $X_1, \dots, X_n \sim Uni(0, \theta)$  ונרצה לבחון את ההשערות  $\begin{cases} H_0: 0 < \theta \leq 0.5 \\ H_1: \theta > 0.5 \end{cases}$  בעזרת מבחן בעל אזור דחייה מהצורה  $R = \{X_{(n)} > c\}$ .

- חשבו את עוצמת המבחן
  - חשבו את גודל המבחן
  - עבור אילו ערכי  $c$  מתקבל מבחן בעל רמה  $\alpha = 0.05$ ?
  - מה יהיה  $p$ -value המתקבל עבור מדגם בגודל  $n = 20$  עם  $X_{(20)} = 0.48$ ? מה המסקנה לגבי  $H_0$ ?
- הדרכה: ניתן להשתמש ללא הוכחה במשפט 10.12 בספר הקורס.

### שאלה 4

א. הוכיחו כי כאשר השערת האפס אינה נכונה, כלומר כאשר  $\theta_* \neq \theta_0$ , עוצמת מבחן וולד נתונה בקירוב על ידי

$$\beta(\theta_*) = 1 - \Phi\left(\frac{\theta_0 - \theta_*}{\widehat{se}} + z_{1-\alpha/2}\right) + \Phi\left(\frac{\theta_0 - \theta_*}{\widehat{se}} - z_{1-\alpha/2}\right)$$

ב. הראו כי  $\beta(\theta_*) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$

### שאלה 5

יהיו  $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ . הניחו כי השונות ידועה.

- בנו מבחן וולד עבור בדיקת ההשערות  $H_0: \mu = \mu_0$   $H_1: \mu \neq \mu_0$
- בנו מבחן יחס נראות עבור בדיקת השערות הנ"ל.

**שאלה 6**

יהיו  $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ . הניחו כי התוחלת ידועה.

א. בנו מבחן וולד עבור בדיקת ההשערות

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$$

$$H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

ב. בנו מבחן יחס נראות עבור בדיקת ההשערות הנ"ל