שאלה 1

נתון מדגם מהתפלגות גיאומטרית $X_1, \dots, X_n \sim Geo(p)$. מצאו אומד נראות מרבית עבור p וחשבו לו רווח סמך ברמת סמך $1-\alpha$.

אנ"מ ל- p:

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n} (1-p)^{X_i - 1} p = (1-p)^{\sum_{i=1}^{n}(X_i-1)} \cdot p^n$$

$$\ell(p) = \sum_{i=1}^{n} (X_i - 1) \log(1-p) + n \log(p)$$

$$\frac{\partial \ell(p)}{\partial p} = -\sum_{i=1}^{n}(X_i-1) \cdot \frac{1}{1-p} + \frac{n}{p} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{n}{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-1)}{1-p} \Rightarrow \frac{1-p}{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-1) \Rightarrow \frac{1}{p} - 1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-1) + n\right) \Rightarrow \boxed{p = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i}} \Rightarrow \boxed{\hat{p} = \frac{1}{\overline{X}_n}}$$

$$\frac{\partial^2 \ell(p)}{\partial p^2} = -\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-1)}{(1-p)^2} - \frac{n}{p^2} < 0 \Rightarrow$$ אנ"מ אכן $\hat{p}$

רווח סמך ברמת סמך $1-\alpha$:

$$\hat{se} = \sqrt{\frac{1}{I_n(\hat{p})}}, \quad I_n(\hat{p}) = \sum_{i=1}^{n} Var_p(s(X_i, p))$$

$$s(x;p) = \frac{\partial \log f(x;p)}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} \log\left((1-p)^{X-1} \cdot p\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial p}\left((x-1)\log(1-p) + \log(p)\right) =$$

$$= -\frac{(x-1)}{1-p} + \frac{1}{p} = \frac{1-xp}{p(1-p)}$$

$$I(p) = \mathrm{Var}(s(x;p)) = \mathrm{Var}\left(\frac{1-xp}{p(1-p)}\right) = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{p(1-p)} - \frac{x}{(1-p)}\right)$$

$$= \frac{1}{(1-p)^2}\mathrm{Var}(x) = \frac{1}{(1-p)^2}\cdot\frac{1-p}{p^2} = \frac{1}{p^2(1-p)} \Rightarrow se(p) = \sqrt{\frac{p^2(1-p)}{n}}$$

$$\hat{se} = \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\bar{X}_n}\right)^2\left(1-\frac{1}{\bar{X}_n}\right)}{n}} \Rightarrow \boxed{C_n = \left(\frac{1}{\bar{X}_n} \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\bar{X}_n}\right)^2\left(1-\frac{1}{\bar{X}_n}\right)}{n}}\right)}$$

שאלה 2

יהיו $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, ויהי τ השברון ה-0.95 של ההתפלגות $P(X \le \tau) = 0.95$.

א. מצאו ביטוי ל-τ כפונקציה של הפרמטרים של ההתפלגות μ ו-σ^2.

$$P(X \le \tau) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{\tau-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= 0.95 \Rightarrow \Phi\left(\frac{\tau-\mu}{\sigma}\right) = 0.95 \Rightarrow \frac{\tau-\mu}{\sigma} = z_{0.95}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau = z_{0.95} \cdot \sigma + \mu}$$

ב. בעת נניח ש-σ אינו ידוע, ואילו μ ידוע. מצאו אומד נראות מרבית ל- σ ובנו רווח סמך ברמת סמך 0.95 עבורו.

$$L(x,\sigma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$l(x,\sigma) = -n\log\sigma - n\log\sqrt{2\pi} - \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2} \cdot I(\sigma>0)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial l(x,\sigma)}{\partial\sigma} = \frac{-n}{\sigma} + \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)^2}{\sigma^3} \equiv 0$$

$$\Rightarrow n = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\sigma^2} \Rightarrow \boxed{\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}}$$

$$\frac{\partial^2 \ell(x,\theta)}{\partial^2\theta} = \frac{n}{\theta^2} - \sum_{i=1}^{n}\frac{3(x_i-\mu)^2}{\theta^4} = \frac{n}{\theta^2} - \frac{3}{\theta^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$\Rightarrow \ell''(x,\hat\theta) = \frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2} - \frac{3n^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2} = \frac{\overbrace{-2n^2}^{<0}}{\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}_{>0}} < 0$$

$\Leftarrow$ $\hat\theta$ מקסימום.

נבנה רווח סמך עבור 0.95:

$$\frac{\partial s(x_i,\theta)}{\partial\theta} = \frac{1}{\theta^2} - \frac{3(x_i-\mu)^2}{\theta^4} \Rightarrow I(\theta) = -\mathbb{E}\left(\frac{1}{\theta^2} - \frac{3(x_i-\mu)^2}{\theta^4}\right)$$

$$\Rightarrow I(\theta) = \frac{-1}{\theta^2} + \frac{3}{\theta^4}\cdot\mathbb{E}\left[(x_i-\mu)^2\right] \overset{(*)}{=} \frac{-1}{\theta^2} + \frac{3\cancel{\theta^2}}{\theta^{\cancel{4}2}} \overset{(**)}{=} \frac{2}{\theta^2}$$

$(*)$ $\mathbb{E}\left((x_i-\mu)^2\right) = \mathrm{Var}(x_i-\mu) + \mathbb{E}^2(x_i-\mu) = \theta^2 + (\mu-\mu)^2 = \theta^2$

$(**)$ $\Rightarrow \hat{se} = \sqrt{\frac{1}{n}}\cdot\sqrt{\frac{\hat\theta^2}{2}} = \overbrace{\sqrt{\frac{\hat\theta^2}{2n}}}^{(***)}$

ע"פ ההרצאה מתקיים:

$$C_n = \left[\hat\theta \pm z_{0.025}\,\underbrace{\hat{se}}_{(***)}\right]$$

ג. תחת התנאים מסעיף ב', מצאו אומד נראות מירבית ל-τ ובנו רווח סמך ברמת סמך 0.95 עבורו.

σ אינו ידוע, μ ידוע.

אז"מ ל- τ:
$$\tau = z_{0.95} \cdot \sigma + \mu$$

הפונקציה שלילה ברציפות ולכן לפי משפט:
$$\hat{\tau} = z_{0.95} \cdot \hat{\sigma} + \mu$$

רווח סמך ברמת סמך 0.95 עבורו:
$$\left[\hat{\tau} \pm z_{0.025} \cdot \hat{se}\right]$$

כאשר $\hat{se}$ לפי התנ' רשום הוא:
$$\hat{se}(\hat{\tau}) = |g'(\hat{\sigma})| \cdot \hat{se}(\hat{\sigma}) = \left|\frac{\partial}{\partial\hat{\sigma}}\left(z_{0.95} \cdot \hat{\sigma} + \mu\right)\right| \cdot \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{2n}} = z_{0.95} \cdot \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{2n}}$$

ד. תחת התנאים מסעיף ב', מצאו אומד נראות מירבית ל-$\psi = \log(\sigma)$ ובנו רווח סמך ברמת סמך 0.95 עבורו.

σ אינו ידוע, μ ידוע.

אז"מ ל- $\psi = \log(\sigma)$: לפי משפט לו פ' שלילה הרציפות בתחום הגדרה

לכן
$$\hat{\psi} = \log(\hat{\sigma})$$

$\hat{\sigma}$ מסעיף ב'.

רווח סמך ברמת סמך 0.95 עבורו:
$$\hat{se}(\psi) = |(\log(\hat{\sigma}))'| \cdot \hat{se}(\hat{\sigma}) = \frac{1}{\hat{\sigma}} \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{2n}} = \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

$$\Rightarrow C_n = \left[\log(\hat{\sigma}) \pm z_{0.025} \cdot \hat{se}(\psi)\right]$$

שאלה 3

יהיו $X_1,\dots,X_n \sim Uni(0,\theta)$ ונרצה לבחון את ההשערות $\begin{cases} H_0: 0<\theta\le 0.5 \\ H_1: \theta>0.5 \end{cases}$ בעזרת מבחן בעל אזור דחייה מהצורה $R=\{X_{(n)}>c\}$.

א. חשבו את עוצמת המבחן

ב. חשבו את גודל המבחן

ג. עבור אילו ערכי c מתקבל מבחן בעל רמה $\alpha=0.05$?

ד. מה יהיה ה-$p-value$ המתקבל עבור מדגם בגודל $n=20$ עם $X_{(20)}=0.48$? מה המסקנה לגבי H_0?

<u>הדרכה</u>: ניתן להשתמש ללא הוכחה במשפט 10.12 בספר הקורס.

3. א) נגדיר

$$\beta(\theta)=P_\theta(T_n\in R)=P(rej\ H_0)$$

$$=P(X_{(n)}>c)=1-P(X_{(n)}\le c)$$

$$=1-\prod_{i=1}^{n}P(X_i\le c)=\boxed{1-\left(\frac{c}{\theta}\right)^n}$$

ב)

מונוטונית יורדת

$$\sup_{\theta\in\Theta_0}\beta(\theta)=\sup\left(1-\left(\frac{c}{\theta}\right)^n\right)\overset{\downarrow}{=}\boxed{1-(2c)^n}$$

נציב 0.5

שהוא גבול

ההשערה האפס

ג)

$$1-(2c)^n\le 0.05$$

$$(2c)^n\ge 0.95$$

$$\boxed{c\ge\frac{\sqrt[n]{0.95}}{2}}$$

ד) נתון כי $n=20$, $X_{(20)}=0.48$

$$p\_val=\inf(\alpha: T_n\in R_\alpha)$$

$$=1-(2c)^n=1-(2\cdot 0.48)^{20}=\boxed{0.558}$$

לכן נדחה את השערת האפס עבור $\alpha>0.558$

שאלה 4

א. הוכיחו כי כאשר השערת האפס אינה נכונה, בלומר כאשר $\theta_* \neq \theta_0$, עוצמת מבחן וולד נתונה בקירוב על ידי

$$\beta(\theta_*) = 1 - \Phi\left(\frac{\theta_0-\theta_*}{\widehat{se}} + z_{1-\alpha/2}\right) + \Phi\left(\frac{\theta_0-\theta_*}{\widehat{se}} - z_{1-\alpha/2}\right)$$

עוצמת מבחן וולד: $P(\text{reject } H_0 \mid H_1 \text{ true})$

השערת האפס אינה נכונה, לכן $|W| > z_{\frac{\alpha}{2}}$. לפי וולד: $W = \frac{\hat{\theta}-\theta_0}{\hat{se}}$

$$\boxed{\beta(\theta_*)} = P_{\theta_* \neq \theta_0}\left(\left|\frac{\hat{\theta}-\theta_0}{\hat{se}}\right| > z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - P_{\theta^*}\left(\left|\frac{\hat{\theta}-\theta_0}{\hat{se}}\right| \le z_{\frac{\alpha}{2}}\right) =$$

הוספה והחסרה

$$= 1 - P_{\theta^*}\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\hat{\theta}-\theta_0}{\hat{se}} \le z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - P_{\theta^*}\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\hat{\theta}-\theta^* + \theta^* - \theta_0}{\hat{se}} \le z_{\frac{\alpha}{2}}\right) =$$

$$= 1 - P_{\theta^*}\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} - \frac{\theta^*-\theta_0}{\hat{se}} \le \frac{\hat{\theta}-\theta^*}{\hat{se}} \le z_{\frac{\alpha}{2}} - \frac{\theta^*-\theta_0}{\hat{se}}\right) =$$

$$= 1 - P_{\theta^*}\left(\frac{\hat{\theta}-\theta^*}{\hat{se}} \le z_{\frac{\alpha}{2}} - \frac{\theta^*-\theta_0}{\hat{se}}\right) + P_{\theta^*}\left(\frac{\hat{\theta}-\theta^*}{\hat{se}} \le z_{\frac{\alpha}{2}} - \frac{\theta^*-\theta_0}{\hat{se}}\right) =$$

נורמלי סטנדרטי בקירוב

$$= 1 - \Phi\left(z_{\frac{\alpha}{2}} + \frac{\theta_0-\theta^*}{\hat{se}}\right) + \Phi\left(\frac{\theta_0-\theta^*}{\hat{se}} - z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

ב. הראו כי $\beta(\theta_*) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

4) ב)

צ"ל: $\beta(\theta_*) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

$$\phi\left(\frac{\theta_0-\theta_*}{\hat{se}} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = \phi\left(\frac{\theta_0-\theta_*}{\hat{se}} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

כע"פ שקולה צד שפגוות עבור $n\to\infty$.

נניח כי השערת האפס אינה נכונה $\theta_0 \neq \theta_*$.

$$\Rightarrow \phi\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}} + (\theta_0-\theta_*)\cdot\sqrt{I_n(\hat{\theta}_n)}\right) = \phi\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}} - (\theta_0-\theta_*)\sqrt{I_n(\hat{\theta}_n)}\right) \quad (*)$$

$\hat{se} = \sqrt{I_n(\hat{\theta}_n)}$

ומתקיים כי $I_n(\hat{\theta}_n) = n\cdot I(\hat{\theta}_n) \xrightarrow{n\to\infty} \infty$

לכן לפי הטענה והמצב כרגע הביטויים שניהם שואפים ל 1 ואחד

ולכן: $(*) \xrightarrow{n\to\infty}$ נקבל $1=1 \Leftarrow 0=0$

כלומר ההפרש בין הביטוי הראשון והשני ומתקיים:

$$\beta(\theta_*) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \blacksquare$$

שאלה 5

יהיו $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. הניחו כי השונות ידועה.

א. בנו מבחן וולד עבור בדיקת ההשערות

$$H_0: \mu = \mu_0$$
$$H_1: \mu \neq \mu_0$$

$$W = \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{\hat{se}} = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\hat{se}}$$

$$\hat{se} = se(\bar{X}_n) = \sqrt{Var(\bar{X}_n)} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow \quad W = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

ולכן מבחן וולד הוא:

$$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu \neq \mu_0 \\ T.S: \quad W = \left| \dfrac{\bar{X}_n - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right| \\ R.R: \text{ reject } H_0 \text{ if } |W| > z_{1-\frac{\alpha}{2}} \end{cases}$$

ב. בנו מבחן יחס נראות עבור בדיקת השערות הנ"ל.

ב)

5) $\forall i: x_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 ידוע.

$$\lambda(\mu) = 2\log\left(\frac{L_n(\hat{\theta}_n)}{L_n(\hat{\theta}_{n,0})}\right) \underset{\text{נציב ע"י } ⊛}{=} 2\log\left(\frac{\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x_i-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}}{\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x_i-\mu_0)^2}{2\sigma^2}}}\right)$$

$$= 2\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu_0)^2-(x_i-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$= \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(2x_i-\mu_0-\bar{x})$$

$$= \boxed{\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i - n\cdot\mu_0\right) > \chi^2_{1,\alpha}}$$

⊛

$$L_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}\cdot e^{\frac{1}{2\sigma^2}} \Rightarrow l(x,\mu) = \log\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) + \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \cancel{\log(e)}^{\frac{1}{2\sigma^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial l(x,\mu)}{\partial\mu} = -\sum_{i=1}^{n}\cancel{2}(x_i-\mu) \Rightarrow n\mu = \sum_{i=1}^{n}x_i \Rightarrow \mu = \frac{\sum x_i}{n} = \bar{x}$$

$$\frac{\partial^2 l(x,\mu)}{\partial^2\mu} = -n < 0 \Rightarrow \max$$

שאלה 6

יהיו $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. הניחו כי התוחלת ידועה.

א. בנו מבחן וולד עבור בדיקת ההשערות

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$$
$$H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

6.א)

$$W = \frac{\hat{\sigma}_n^2 - \sigma_0^2}{\hat{se}}$$

$$\hat{\sigma}_n^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right)^2$$

כבר מצאנו
בשאלה 2

$$\hat{se} = |2\hat{\sigma}_n| \, se(\hat{\sigma}_n) = 2\hat{\sigma}_n \cdot \frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{2n}} = \sqrt{\frac{2}{n}}\left(\frac{1}{n}\sum(x_i-\mu)^2\right)^2$$

שאלה 2

נדחה עבור $\Leftarrow$

$$\boxed{\left|\frac{\hat{\sigma}_n^2 - \sigma_0^2}{\hat{se}}\right| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}}$$

ב. בנו מבחן יחס נראות עבור בדיקת ההשערות הנ"ל

$$\lambda = 2\log\left(\frac{\sup\limits_{\sigma^2\in\mathbb{R}^{++}} \mathcal{L}(\mu)}{\sup\limits_{\sigma^2=\sigma_0^2} \mathcal{L}(\mu)}\right) =$$

$$= 2\log\left(\frac{\prod\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\left(\frac{1}{n}\sum(x_i-\mu)^2\right)^2}}}{\prod\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma_0^2}}}\right) =$$

$$= 2\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma_0^2} - \frac{(x_i-\mu)^2}{2\left(\frac{1}{n}\sum(x_i-\mu)^2\right)^2}\right) =$$

$$= \frac{\sum\limits^{n}(x_i-\mu)^2}{\sigma_0^2} - \frac{n^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2} > \chi^2_{1,1-\alpha}$$