

תרגיל בית 5

שאלה 1

יהיו $X_1, \dots, X_n \sim F$ ותהי $\hat{F}_n(x)$ פונקציית ההתפלגות האמפירית. הוכיחו כי עבור x נתון מתקיים:

- א. $\mathbb{E}[\hat{F}_n(x)] = F(x)$
- ב. $\text{Var}(\hat{F}_n(x)) = \frac{F(x)(1-F(x))}{n}$
- ג. $\hat{F}_n(x)$ הוא אומד עקיב ל- $F(x)$
- ד. $\hat{F}_n(x)$ מתפלג אסימפטוטית נורמלית

הדרכה: שימו לב שעבור x נתון, המשתנה $I(X \leq x)$ הוא משתנה ברנולי.

שאלה 2

נתון מדגם של זוגות משתנים מקריים $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$. המתאם בין שני משתנים מקריים X ו- Y מוגדר להיות:

$$\rho = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

הראו איך ניתן לאמוד את המתאם באמצעות אומדי plug-in.

שאלה 3

יהיו $X_1, \dots, X_n \sim F$ ותהי $\hat{F}_n(x)$ פונקציית ההתפלגות האמפירית.

- א. עבור x, y נתונים ושונים מצאו את $\text{Cov}(\hat{F}_n(x), \hat{F}_n(y))$
- ב. יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש- $a < b$ ונגדיר $\theta = T(F) = P(a < x \leq b)$. הראו כי זהו פונקציונל לינארי, הציעו אומד plug-in ל- θ ומצאו רווח סמך ברמת סמך מקורבת $1 - \alpha$ עבור θ .

שאלה 4

נגדיר את השברון ה- α של פונקציית התפלגות אמפירית באופן הבא:

$$\hat{F}_n^{-1}(\alpha) = \inf\{x : \hat{F}_n(x) \geq \alpha\}$$

יהי $\hat{\theta}_\alpha^*$ השברון ה- α של ערכי הבוטסטרפ שהתקבלו. הראו שרווח הסמך הפיווטלי ניתן לכתיבה כ-

$$\left[2\hat{\theta}_n - \hat{\theta}_{1-\frac{\alpha}{2}}^*, 2\hat{\theta}_n - \hat{\theta}_{\frac{\alpha}{2}}^* \right]$$

מה אתם יכולים להסיק על אורך רווח הסמך הפיווטלי לעומת אורך רווח סמך מבוסס אחוזונים?

שאלה 5 – רשות (בנוסף 10 נקודות)

יהיו $X_1, \dots, X_n \sim F$ ו- $\theta = T(F)$ פונקציונל כלשהו, כך ש- $\hat{\theta}_n \equiv T_n = T(X_1, \dots, X_n)$.

הוכיחו/ הפריכו:

$$E_{\hat{F}_n}[T_n] = T_n$$

במילים אחרות, האם תוחלת האומד המחושבת על פי ההתפלגות האמפירית שווה בהכרח לאומד המקורי?