תרגיל בית 1

שאלה 1

יהי $X_n \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{n}\right)$ ויהי X מ"מ מההתפלגות $F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$.

האם $X_n \xrightarrow{P} X$? האם $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$?

שאלה 2

יהיו $X_1, \ldots, X_n \sim Uniform[0, \theta]$ דגימות i.i.d.

א. רשמו את המודל הסטטיסטי הפרמטרי של הנתונים.
ב. מצאו $\hat{\theta}_n$ אומד נראות מרבית ל- θ.
ג. מצאו bias, se ו-MSE ל-$\hat{\theta}_n$.
ד. האם $\hat{\theta}_n$ עקיב? הסבירו.
ה. בחנו את פונקציית הצפיפות של האומד. האם היא שואפת לפונקציית הצפיפות של התפלגות נורמלית כאשר $n \to \infty$? חזרו על ההוכחה לגבי נורמליות אסימפטוטית של אומדי נראות מירבית (שיעור 2.7). ציינו הנחה אחת עליה התבססה ההוכחה שלא מתקיימת במקרה זה.

שאלה 3

הוכיחו את הטענות הבאות:

א. עבור $X_1, \ldots, X_n \sim Poisson(\lambda)$, הממוצע המדגמי $\hat{\lambda}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ הוא אומד נראות מרבית ל-λ.
ב. $MSE_{\theta_0}(\hat{\theta}_n) = \left(bias_{\theta_0}(\hat{\theta}_n)\right)^2 + Var_{\theta_0}(\hat{\theta}_n)$
ג. $I(\theta) = \mathbb{E}[s^2(X;\theta)] = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial}{\partial\theta} s(X;\theta)\right]$

שאלה 4

הוכיחו את הטענות הבאות

א. הוכיחו כי אם אומד $\hat{\theta}_n$ הוא נורמלי אסימפטוטית אז הוא בהכרח עקיב. ניתן להניח ללא הוכחה כי $se(\hat{\theta}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
ב. עברו על ההוכחה של עקיבות אומד נראות מירבית (הרצאה 2.5) והוכיחו את טענות העזר *1,2,3* המופיעות בחלק מההוכחה בשקף 25 ביחידת השקפים של חטיבה 2.

[redacted]

שאלה 1

יהי $X_n \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{n}\right)$ ויהי X מ"מ מההתפלגות $F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$.

האם $X_n \xrightarrow{P} X$? האם $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$?

$X_n \xrightarrow{P} X$ אם $\forall \varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

אם $x < 0$ אז

$$P(X \leq x) = 0$$

אם $x \geq 0$ אז

$$P(X \leq x) = 1$$

ולכן $X \equiv 0$.

יהי ε, אז

$$P(|X_n - X| > \varepsilon) =$$

$$= P(|X_n| > \varepsilon) =$$

$$= 1 - P(|X_n| < \varepsilon) =$$

$$= 1 - P(-\varepsilon < X_n < \varepsilon) =$$

$$= 1 - P(-\sqrt{n}\varepsilon < \sqrt{n} X_n < \sqrt{n}\varepsilon) =$$

$$= 1 - \left[P(\sqrt{n} X_n < \sqrt{n}\varepsilon) - P(\sqrt{n} X_n < -\sqrt{n}\varepsilon)\right]$$

$\sqrt{n} X_n \sim N(0,1)$

$$= 1 - \left[\Phi(\sqrt{n}\varepsilon) - \Phi(-\sqrt{n}\varepsilon)\right] =$$

$$= 1 - \left[\Phi(\sqrt{n}\varepsilon) - (1 - \Phi(\sqrt{n}\varepsilon))\right] =$$

$$= 1 - \left[2\Phi(\sqrt{n}\varepsilon) - 1\right] \xrightarrow[n \to \infty]{} 1 - 1 = 0$$

ולכן $X_n \xrightarrow{P} X$ לפי ההגדרה

וגם לפי משפט $X_n \xrightarrow{D} X$.

שאלה 2

יהיו $X_1, \dots, X_n \sim Uniform[0,\theta]$ דגימות i.i.d.

א. רשמו את המודל הסטטיסטי הפרמטרי של הנתונים.

ב. מצאו $\hat{\theta}_n$ אומד נראות מרבית ל- θ.

ג. מצאו bias, se ו-MSE ל-$\hat{\theta}_n$.

ד. האם $\hat{\theta}_n$ עקיב? הסבירו.

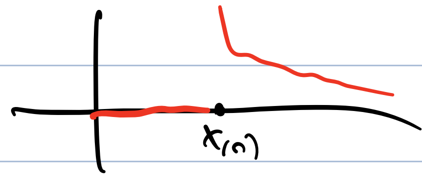
ה. בחנו את פונקציית הצפיפות של האומד. האם היא שואפת לפונקציית הצפיפות של התפלגות נורמלית כאשר $n \to \infty$? חזרו על ההוכחה לגבי נורמליות אסימפטוטית של אומדי נראות מירבית (שיעור 2.7). ציינו הנחה אחת עליה התבססה ההוכחה שלא מתקיימת במקרה זה.

$$\mathcal{F} = \left\{ \frac{1}{\theta} \ , \ \theta \in \mathbb{R}_+ \right\}$$ (א

$L(\theta) =$ (ב

$$\log \prod_{i=1}^{n} f_n(\theta) = \log \frac{1}{\theta^n} = -n \log \theta \quad \text{where } \theta \geq \max\{x_i | \forall i\}$$ (ב

$$\Rightarrow \hat{\theta}_n = X_{(n)}$$



(ג

$$\text{bias}_\theta(\hat{\theta}_n) = E_\theta(\hat{\theta}_n) - \theta = E_\theta(X_{(n)}) - \theta \overset{*}{=} \theta\left(\frac{n-n-1}{n+1}\right) = \frac{-\theta}{n+1}$$

$$* \ E(X_{(n)}) = \frac{n}{\theta^n} \cdot \int_0^\theta x \cdot x^{n-1} dx = \frac{n}{\theta^n} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^\theta = \theta \cdot \frac{n}{n+1}$$

$$F_{X_{(n)}} = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \left(\frac{x}{\theta}\right)^n & 0 \leq x \leq \theta \\ 1 & x > \theta \end{cases} \Rightarrow f_{X_{(n)}}(x) = \frac{d}{dx} F_{X_{(n)}}(x) = \frac{1}{\theta^n} \cdot n \cdot x^{n-1}, \ 0 \leq x \leq \theta$$

$$Var(X_{(n)}) = E(X_{(n)}^2) - E(X_{(n)})^2 = \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta \underbrace{x^2 x^{n-1}}_{x^{n+1}} dx + \theta \cdot \frac{n}{n+1}$$

$$= \frac{n}{\theta^n} \frac{x^{n+2}}{n+2}\Big|_0^\theta + \frac{\theta n}{n+1} = \frac{\theta^2 \cdot n}{n+2} + \frac{\theta n}{n+1} = \frac{n \cdot \theta^2}{(n+2)(n+1)^2}$$

$$\Rightarrow se = \sqrt{Var(X_{(n)})} = \sqrt{\frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2}}$$

$$\Rightarrow MSE_{\hat{\theta}}(\theta) = \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow$$ עקיב $\hat{\theta}_n$ (ה

$$f(k | \theta) = n \cdot \frac{k^{n-1}}{\theta^n} \begin{cases} \xrightarrow{n\to\infty} 0 & \text{if } 0 < k < \theta \\ \xrightarrow{n\to\infty} \infty, & k = \theta \end{cases}$$ (ו

בכל זאת נורמליות לא מתקיימת

$$S(x_i, \hat{\theta}_n) = \frac{\partial \log(f(x_i;\theta))}{\partial \theta}\Big|_{\theta=\hat{\theta}_n}$$ לא גזירה! לא $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S(X_i,\theta) = 0$ כי פונקציית הנראות לא גזירה.

שאלה 3

הוכיחו את הטענות הבאות:

א. עבור $X_1, \dots, X_n \sim Poisson(\lambda)$, הממוצע המדגמי $\hat{\lambda}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ הוא אומד נראות מרבית ל-λ.

ב. $MSE_{\theta_0}(\hat{\theta}_n) = \left(bias_{\theta_0}(\hat{\theta}_n)\right)^2 + Var_{\theta_0}(\hat{\theta}_n)$

ג. $I(\theta) = \mathbb{E}[s^2(X;\theta)] = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial}{\partial\theta} s(X;\theta)\right]$

א) $X_1, \dots, X_n \sim Poisson(\lambda)$, $\hat{\lambda}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

צ"ל: $\hat{\lambda}_n$ אומד נ"מ ל-λ:

נחשב את הנ"מ:

$$L_n(X_i;\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!} =$$

$$= \frac{\lambda^{x_1} e^{-\lambda}}{x_1!} \cdot \frac{\lambda^{x_2} e^{-\lambda}}{x_2!} \cdot \frac{\lambda^{x_3} e^{-\lambda}}{x_3!} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda^{x_n} e^{-\lambda}}{x_n!}$$

$$= \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \cdot e^{-n\lambda}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}$$

$$l_n(\theta) = \log\left(\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}\right) + \log\left(e^{-n\lambda}\right)$$

$$- \log\left(\prod_{i=1}^{n} x_i!\right) =$$

$$= \sum x_i \cdot \log(\lambda) - n\lambda - \log\left(\prod x_i!\right)$$

$$l_n'(\theta) = \frac{\sum x_i}{\lambda} - n = 0$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\lambda}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \quad \blacksquare$$

$$l_n''(\theta) = \sum -\frac{x_i}{\lambda^2} < 0 \Rightarrow$$ לכן מקסימום

ג)

$$MSE_\theta(\hat{\theta}) \underset{\downarrow}{=} \mathbb{E}[(\hat{\theta}_n - \theta_0)^2] =$$

הגדרה של MSE

$$= Var(\hat{\theta}_n - \theta_0) + \mathbb{E}(\hat{\theta}_n - \theta_0)^2$$

$Var(x) = \mathbb{E}(x^2) - \mathbb{E}(x)^2$

$$\underset{\downarrow}{=} Var(\hat{\theta}_n) + (\mathbb{E}(\hat{\theta}_n) - \theta_0)^2 =$$

$Var(c) = 0$
$\mathbb{E}[c] = c$

$$\underset{\downarrow}{=} Var(\hat{\theta}_n) + (bias_{\theta_0}(\hat{\theta}_n))^2 \quad \blacksquare$$

הגדרה של bias

d)

$$I(\theta) = Var_\theta(s(X;\theta)) =$$

$$= \mathbb{E}[s(x;\theta)^2] - \underbrace{\mathbb{E}[s(x;\theta)]^2}_{=0}$$

$$= \mathbb{E}[s^2(x;\theta)]$$

כעת נראה כי $\mathbb{E}[s^2(X;\theta)] = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial}{\partial\theta} s(X;\theta)\right]$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{f(x;\theta)}\cdot\frac{\partial f(x;\theta)}{\partial\theta}\right) = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\frac{\partial f(x;\theta)}{\partial\theta}}{f(x;\theta)}\right)$$

$$= \frac{\frac{\partial^2 f(x;\theta)}{\partial\theta^2}\cdot f(x;\theta) - \frac{\partial}{\partial\theta}f(x;\theta)\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}f(x;\theta)}{f^2(x;\theta)}$$

$$= \frac{\partial^2 f(x;\theta)}{\partial\theta^2}\cdot\frac{1}{f(x;\theta)} - \left(\frac{\frac{\partial}{\partial\theta}f(x;\theta)}{f(x;\theta)}\right)^2$$

$$\underset{\text{מנגזרת של log}}{=} \overbrace{\frac{\partial^2 f(x;\theta)}{\partial\theta^2}\cdot\frac{1}{f(x;\theta)}}^{*} - \left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x;\theta)\right)^2$$

ומתקיים כי $\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x;\theta) = s(x;\theta)$

נפעיל מינוס התוחלת ה $*$ ונקבל:

$$-\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2 f(x;\theta)}{\partial\theta^2}\cdot\frac{1}{f(x;\theta)}\right] =$$

הגדרת תוחלת

$$\underset{\downarrow}{=} -\int \frac{\partial^2 f(x;\theta)}{\partial\theta^2}\cdot\frac{1}{f(x;\theta)}\cdot dF(x) =$$

$$= -\int \frac{\partial^2 f(x;\theta)}{\partial\theta^2}\cdot\frac{\cancel{f(x;\theta)}}{\cancel{f(x;\theta)}}\cdot dx \underset{\downarrow}{=}$$

כלל לייבניץ לגזירת מתחת לאינטגרל

$$= -\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\underbrace{\int f(x;\theta)\,dx}_{=1} = 0$$

ולכן נקבל:

$$-\mathbb{E}\left[-\Big(\underbrace{\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x;\theta)}_{s(x;\theta)}\Big)^2\right] = \mathbb{E}[s^2(x;\theta)]$$

ולכן נקבל:

$$\mathbb{E}[-s'(x;\theta)] = \mathbb{E}[s^2(x;\theta)]$$

כלומר,

$$I(\theta) = \mathbb{E}[s^2(x;\theta)] = \mathbb{E}[-s'(x;\theta)]$$

∎

4) א)

לפי ההגדרה:

$$\frac{\hat{\theta}_n - \theta_0}{se(\hat{\theta}_n)} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

צ"ל:

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|\hat{\theta}_n - \theta| > \varepsilon\right) = 0 \iff$$

$$= 1 - \lim_{n\to\infty} P\left(|\hat{\theta}_n - \theta| < \varepsilon\right) =$$

$$= 1 - \lim_{n\to\infty} P\left(-\varepsilon < \hat{\theta}_n - \theta < \varepsilon\right) =$$

$$= 1 - \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{-\varepsilon}{se(\hat{\theta}_n)} < \frac{\hat{\theta}_n - \theta_0}{se(\hat{\theta}_n)} < \frac{\varepsilon}{se(\hat{\theta}_n)}\right) =$$

$$= 1 - \lim_{n\to\infty} \left[P\left(\frac{\hat{\theta}_n - \theta_0}{se(\hat{\theta}_n)} < \frac{\varepsilon}{se(\hat{\theta}_n)}\right) - P\left(\frac{\hat{\theta}_n - \theta_0}{se(\hat{\theta}_n)} < \frac{-\varepsilon}{se(\hat{\theta}_n)}\right)\right]$$

$$= 1 - \lim_{n\to\infty} \left[\Phi\left(\frac{\varepsilon}{se(\hat{\theta}_n)}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon}{se(\hat{\theta}_n)}\right)\right)\right] =$$

$$= 1 - \lim_{n\to\infty} \left[2\,\Phi\Big(\underbrace{\frac{\varepsilon}{se(\hat{\theta}_n)}}_{\downarrow\,\infty}\Big) - 1\right] =$$

$$se(\hat{\theta}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$= 1 - 1 = 0 \quad \blacksquare$$

4) ב)

1. $\mathbb{E}_{\theta_0}[s(X,\hat{\theta}_n)] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ means that $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta_0$

נעשה קירוב טיילור של $\mathbb{E}_{\theta_0}[s(X;\theta)]$ סביב θ_0:

$$\mathbb{E}[s(X;\hat{\theta}_n)] \approx \underbrace{\mathbb{E}[s(X;\theta_0)]}_{=0} + \frac{\partial}{\partial\theta}\mathbb{E}_{\theta_0}[s(X;\theta)]\Big|_{\theta=\theta_0}(\hat{\theta}_n-\theta_0)+R$$

Assumption 3 pag 24

(מהנחה 2 מדף

$$\frac{\partial^2\mathbb{E}[l(X;\theta)]}{\partial\theta^2} = \frac{\partial}{\partial\theta}\mathbb{E}_{\theta_0}[s(X;\theta)]\Big|_{\theta=\theta_0}$$

24 מתאימות (2 ומהנחה 3 θ_0 הוא

המקסימום של $\mathbb{E}_{\theta_0}[l(X;\theta)]$ (היחיד) ולכן הנגזרת שנייה

גם היא חיובית

ולכן אם $\mathbb{E}[s(X;\hat{\theta}_n)] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ אז

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\mathbb{E}_{\theta_0}(s(X;\theta))\Big|_{\theta=\theta_0}\cdot(\hat{\theta}_n-\theta_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ולכן

$$\hat{\theta}_n-\theta_0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

כלומר,

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta_0$$

2. $$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} s(X_i,\hat{\theta}_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(X_i,\theta)}_{\text{נגזרת של } \log \text{ פונקציה נראות } \ell_n}\Big|_{\theta=\hat{\theta}_n}$$

$$\ell(\theta)=\sum_{i=1}^{n}\log f(X_i;\theta)$$

ו $\hat{\theta}_n$ אנ"מ כלומר $\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial\theta}\Big|_{\theta=\hat{\theta}_n}=0$ כי f גזירה. (מהנחות בדף 24)

כלומר,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} s(X_i,\hat{\theta}_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \ell(X_i;\theta)}{\partial\theta}\Big|_{\theta=\hat{\theta}_n}=0$$

3. Claim: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} s(X_i,\theta)\xrightarrow{P}\mathbb{E}_{\theta_0}[s(X,\theta)]$

$s(X_1,\theta),\dots,s(X_n,\theta)$ רק תלויים ב- X_i שהם iid לכן
$s(X_i,\theta)$ iid עם תוחלת $\mathbb{E}[s(X,\theta)]$
ולכן לפי חוק החלש של המספרים הגדולים

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} s(X_i,\theta)\xrightarrow{P}\mathbb{E}_{\theta_0}[s(X,\theta)]$$