תרגיל בית 1

שאלה 1

יהי $X_n \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{n}\right)$ ויהי X מ"מ מההתפלגות $F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$.

האם $X_n \xrightarrow{P} X$? האם $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$?

שאלה 2

יהיו $X_1, \dots, X_n \sim Uniform[0, \theta]$ דגימות i.i.d.

א. רשמו את המודל הסטטיסטי הפרמטרי של הנתונים.
ב. מצאו $\hat{\theta}_n$ אומד נראות מרבית ל- θ.
ג. מצאו bias, se ו-MSE ל-$\hat{\theta}_n$.
ד. האם $\hat{\theta}_n$ עקיב? הסבירו.
ה. בחנו את פונקציית הצפיפות של האומד. האם היא שואפת לפונקציית הצפיפות של התפלגות נורמלית כאשר $n \to \infty$? חזרו על ההוכחה לגבי נורמליות אסימפטוטית של אומדי נראות מירבית (שיעור 2.7). ציינו הנחה אחת עליה התבססה ההוכחה שלא מתקיימת במקרה זה.

שאלה 3

הוכיחו את הטענות הבאות:

א. עבור $X_1, \dots, X_n \sim Poisson(\lambda)$, הממוצע המדגמי $\hat{\lambda}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ הוא אומד נראות מרבית ל-λ.
ב. $MSE_{\theta_0}\left(\hat{\theta}_n\right) = \left(bias_{\theta_0}\left(\hat{\theta}_n\right)\right)^2 + Var_{\theta_0}\left(\hat{\theta}_n\right)$
ג. $I(\theta) = \mathbb{E}[s^2(X;\theta)] = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial}{\partial\theta} s(X;\theta)\right]$

שאלה 4

הוכיחו את הטענות הבאות

א. הוכיחו כי אם אומד $\hat{\theta}_n$ הוא נורמלי אסימפטוטית אז הוא בהכרח עקיב. ניתן להניח ללא הוכחה כי $se\left(\hat{\theta}_n\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
ב. עברו על ההוכחה של עקיבות אומד נראות מירבית (הרצאה 2.5) והוכיחו את טענות העזר *1,2,3* המופיעות בחלק מההוכחה בשקף 25 ביחידת השקפים של חטיבה 2.