גיל קפלן - [redacted]
רחל גולדשטיין - [redacted]

תרגיל בית 6

שאלה 1 – רשות

א. יהי X משתנה מקרי עם פונקציית צפיפות $f(x;\theta)$. נרצה לבטא את הצפיפות באמצעות פרמטר חדש μ, כלומר נרצה לבצע טרנספורמציה $\theta = g(\mu)$ כאשר g גזירה ברציפות. הוכיחו כי

$$I(\mu) = I\big(g(\mu)\big)[g'(\mu)]^2$$

(זוהי נוסחת הטרנספורמציה עבור האינפורמציה של פישר במקרה החד מימדי)

ב. כעת הניחו ש-g היא בנוסף מונוטונית עולה. הוכיחו את תכונת האינווריאנטיות של *Jeffreys Prior*, כלומר הוכיחו כי אם נבחר

$$\pi(\theta) = \sqrt{I(\theta)}$$

אז עבור הטרנספורמציה נקבל את הפריור

$$\pi(\mu) = \sqrt{I(\mu)}$$

שאלה 2

נתון מדגם X^n המגיע ממודל פרמטרי $X|\theta \sim Geo(\theta)$, ונבחר פריור עבור θ - $\theta \sim Beta(a,b)$.

א. חשבו את הפוסטריור עבור הפריור והמודל הפרמטרי $X|\theta \sim Geo(\theta)$ בהינתן מדגם $X_1, \dots, X_n$.

ב. הציעו אומד נקודתי ל-θ המבוסס על תוחלת הפוסטריור. הראו כי ניתן להציג אותו כקומבינציה לינארית של האנ"מ ל-θ ותוחלת הפריור.

ג. הניחו כי $a, b > 1$ והציעו אומד נקודתי ל-θ המבוסס על הערך השכיח של התפלגות הפוסטריור (MAP). הראו כי ניתן להציג אותו כקומבינציה לינארית של האנ"מ והערך השכיח של הפריור. האם קיבלתם את אותה תוצאה מסעיף ב'? מדוע?

ד. מצאו רווח מהימנות ל-θ ברמה $1-\alpha$. הסבירו כיצד ניתן לחשב את רווח המהימנות באמצעות סימולציה.

שאלה 3

בהינתן הפריור $\pi(\theta) \propto \frac{1}{\theta}$ והמודל הפרמטרי $X_1, \dots, X_n \sim Uni(0,\theta)$ (התפלגות אחידה רציפה)

א. מהי ההתפלגות האפוסטריורית?

ב. מצאו אומד נקודתי באמצעות תוחלת הפוסטריור ובאמצעות *MAP*

שאלה 4

נתונה התפלגות אפריורית $\mu \sim N(m,\tau^2)$ ונתונים $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu,\sigma^2)$, כאשר σ, m ו-τ ידועים. הוכיחו כי מתקיים

$$\mu|X^n \sim N\left(\alpha\bar{X}_n + (1-\alpha)m, \frac{\tau^2\frac{\sigma^2}{n}}{\tau^2 + \frac{\sigma^2}{n}}\right)$$

כאשר $\alpha = \frac{\tau^2}{\frac{\sigma^2}{n}+\tau^2}$.

שאלה 2

נתון מדגם X^n המגיע ממודל פרמטרי $X|\theta \sim Geo(\theta)$, ונבחר פריור עבור θ - $\theta \sim Beta(a,b)$.

א. חשבו את הפוסטריור עבור הפריור והמודל הפרמטרי $X|\theta \sim Geo(\theta)$ בהינתן מדגם $X_1, \dots, X_n$.

$\underline{X}_n = x_1, \dots, x_n$ התפלגות הנתונים: $f(x|\theta)$ פריור: $\Pi(\theta) = Beta(a,b)$

$$\text{Posterior: } f(\theta|\underline{X}_n) \underset{\text{ב"ה}}{=} \frac{f(\underline{X}_n|\theta)\cdot\Pi(\theta)}{C_n} = \underbrace{\frac{\mathcal{L}(\theta)\cdot\Pi(\theta)}{C_n}} \propto \mathcal{L}(\theta)\Pi(\theta)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(\theta)\Pi(\theta) \underset{S:=\sum_{i=1}^{n} x_i}{\overset{*}{=}} \theta^{n}(1-\theta)^{S-n}\cdot\Pi(\theta) \sim Beta(n+a, S-n+b)$$

$$(*)\ \mathcal{L}(\theta) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x|\theta) = \prod_{i=1}^{n}(1-\theta)^{x_i-1}\theta = \theta^{n}(1-\theta)^{\sum_{i=1}^{n}(x_i-1)} = \theta^{n}(1-\theta)^{S-n}$$

$$\Rightarrow \theta|X^n \sim Beta(n+a, S-n+b)$$

ב. הציעו אומד נקודתי ל-θ המבוסס על תוחלת הפוסטריור. הראו כי ניתן להציג אותו בקומבינציה לינארית של האנ"מ ל-θ ותוחלת הפריור.

מבקשים למצוא MAP, מכיוון שהפריור בהתפלגות שמקיים כי
הידוע לנו עבור התפלגות $Beta(a,b)$ זה $\bar{\theta}_{\substack{Posterior\\ mean}} = \frac{a}{a+b}$

$$\bar{\theta}_{\substack{posterior\\ mean}} = \frac{n+a}{S+a+b}$$

$$E(\theta) = \frac{a}{a+b}, \quad \bar{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{n}{S}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{a}{a+b}}\cdot\frac{a+b}{S+a+b} + \boxed{\frac{n}{S}}\cdot\frac{S}{S+a+b} = \frac{n+a}{S+a+b}$$

ניתן לראות כי מתקיים:

ג. הניחו כי $a,b>1$ והציעו אומד נקודתי ל-θ המבוסס על הערך השכיח של התפלגות הפוסטריור (MAP). הראו כי ניתן להציג אותו בקומבינציה לינארית של האנ"מ והערך השכיח של הפריור. האם קיבלתם את אותה תוצאה מסעיף ב'? מדוע?

$$\bar\theta_{map}=\frac{n+a-1}{s+a+b-2} \leftarrow$$ ראינו בהרצאה

$$\bar\theta=\frac{n}{s}\ ,\ \ \bar\theta_{map\ \text{פריור}}=\frac{a-1}{a+b-2}$$

$$\underbrace{\frac{n}{s}}\cdot\frac{s}{s+a+b-2}+\underbrace{\frac{a-1}{a+b-2}}\cdot\frac{a+b-2}{s+a+b-2}=\bar\theta_{map}$$

לא אותה תוצאה כמו סעיף ב.

תשובות שונות מכיוון שה-MAP prior $\neq$ תוחלת

ד. מצאו רווח מהימנות ל-θ ברמה $1-\alpha$. הסבירו כיצד ניתן לחשב את רווח המהימנות באמצעות סימולציה.

$$\int_{-\infty}^{a} f(\theta|x^n)d\theta=\frac{\alpha}{2} \rightarrow$$ כלומר a האחוזון ה-$\frac{\alpha}{2}$ של התפלגות Beta(a+n,s+b-n)

$$\int_{\beta}^{\infty} f(\theta|x^n)d\theta=\frac{\alpha}{2} \rightarrow$$ כנ"ל עבור $1-\frac{\alpha}{2}$ יהיה β.

נבצע סימולציה עם B דגימות. נחשב אחוזונים ונמצא ממוצע

שאלה 3

בהינתן הפריור $\pi(\theta) \propto \frac{1}{\theta}$ והמודל הפרמטרי $X_1, \dots, X_n \sim Uni(0, \theta)$ (התפלגות אחידה רציפה)

א. מהי ההתפלגות האפוסטריורית?

ב. מצאו אומד נקודתי באמצעות תוחלת הפוסטריור ובאמצעות MAP

א)

$$f(\theta \mid X_n) \propto L(\theta) \cdot \pi(\theta) = \alpha \frac{1}{\theta^n} \cdot \frac{1}{\theta} I(0 \le X_i \le \theta)$$

$$= \alpha \frac{1}{\theta^{n+1}} I(0 \le X_i \le \theta)$$

$$\alpha \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\theta}\right)^{n+1} = \alpha \left[-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\theta}\right)^n\right]_{x_{(n)}}^{\infty} = 1$$

נבחר את α

$$\Downarrow$$

$$\alpha = n \cdot x_{(n)}^n$$

$$\Downarrow$$

$$f(\theta \mid x^n) = \frac{n \cdot x_{(n)}^n}{\theta^{n+1}} \cdot I\left(\forall i : x_i \in [0, \theta]\right)$$

ב) תוחלת:

$$\int_{x_{(n)}}^{\infty} \frac{n \cdot x_{(n)}^n}{\theta^{n+1}} \cancel{d}\,d\theta = \left[-\frac{n}{n-1}\frac{x_{(n)}^n}{\theta^{n-1}}\right]_{x_{(n)}}^{\infty}$$

$$= \frac{-n}{n-1} x_{(n)}$$

MAP:

$$Mode\left(f(\theta \mid x^n)\right) = \underset{\theta}{\arg\max} \frac{n \cdot x_{(n)}^n}{\theta^{n+1}} \cdot I\left(\forall i : x_i \in [0, \theta]\right)$$

$$\Rightarrow \theta = X_{(n)}$$

מונוטונית יורדת $\theta \ge X_{(n)}$

שאלה 4

נתונה התפלגות אפריורית $\mu\sim N(m,\tau^2)$ ונתונים $X_1,\dots,X_n\sim N(\mu,\sigma^2)$, כאשר σ, m ו-τ ידועים. הוכיחו כי מתקיים

$$\mu|X^n\sim N\left(\alpha\bar{X}_n+(1-\alpha)m,\frac{\tau^2\frac{\sigma^2}{n}}{\tau^2+\frac{\sigma^2}{n}}\right)$$

כאשר $\alpha=\frac{\tau^2}{\frac{\sigma^2}{n}+\tau^2}$.

פתרון:

$$f(\mu|X^n)=\frac{\mathcal{L}(X^n;\mu)\cdot\pi(\mu)}{C_n}=\frac{\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta^2}}\cdot e^{\frac{-(x_i-\mu)^2}{2\theta^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau^2}}e^{-\frac{(\mu-m)^2}{2\tau^2}}}{C_n}\propto$$

$$\propto\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{n+1}\cdot\left(\frac{1}{\theta}\right)^n\cdot\left(\frac{1}{\tau}\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\sum_{i=1}^n(x_i-\mu)^2}{\theta^2}+\frac{(\mu-m)^2}{\tau^2}\right]}\propto e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\sum_{i=1}^n(x_i-\mu)^2}{\theta^2}+\frac{(\mu-m)^2}{\tau^2}\right]}\underset{\text{נוסחת הריבוע}}{=}$$

לא קשור ל-μ ; לא קשור ל-μ

$$=e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\sum_{i=1}^n(x_i^2-2x_i\mu+\mu^2)}{\theta^2}+\frac{\mu^2-2\mu m+m^2}{\tau^2}\right]}\propto e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\sum-2x_i\mu+\mu^2}{\theta^2}+\frac{\mu^2-2\mu m}{\tau^2}\right]}=e^{-\frac{n}{2}\left[\frac{\mu^2-2\mu\bar{X}_n}{\theta^2}+\frac{\mu^2-2\mu m}{\tau^2 n}\right]}=$$

קבוע

$$=e^{-\frac{n}{2}\left[\frac{\mu^2(\tau^2 n+\theta^2)-2\mu(\tau^2 n\bar{X}_n+m\theta^2)}{\theta^2\tau^2}\right]}=e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(\tau^2 n+\theta^2)}{\theta^2\tau^2}\left(\mu^2-2\mu\frac{(\tau^2 n\bar{X}_n+m\theta^2)}{(\tau^2 n+\theta^2)}\right)\right]}\propto$$

$$\propto e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(\tau^2 n+\theta^2)}{\theta^2\tau^2}\left(\mu^2-2\mu\frac{(\tau^2 n\bar{X}_n+m\theta^2)}{(\tau^2 n+\theta^2)}+\overbrace{\left(\frac{\tau^2 n\bar{X}_n+m\theta^2}{\tau^2 n+\theta^2}\right)^2}^{\text{הוספת קבוע}}\right)\right]}=e^{\left[-\frac{1}{2}\left[\frac{\tau^2 n+\theta^2}{\theta^2\tau^2}\left(\mu-\frac{\tau^2 n\cdot\bar{X}_n+m\theta^2}{\tau^2 n+\theta^2}\right)^2\right]\right]}$$

$$=e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{\tau^2+\frac{\theta^2}{n}}{\frac{\theta^2}{n}\tau^2}\left(\mu-\frac{\tau^2 n\bar{X}_n+m\theta^2}{\tau^2 n+\theta^2}\right)^2}=e^{\left[-\frac{1}{2}\frac{\tau^2+\theta^2/n}{\frac{\theta^2}{n}\tau^2}\left(\mu-\left(\alpha\bar{X}_n+(1-\alpha)m\right)\right)^2\right]}$$

$$\frac{\tau^2 n\bar{X}_n+m\theta^2}{(\tau^2 n+\theta^2)}=\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\cdot\frac{\tau^2 n\bar{X}_n}{(\tau^2 n+\theta^2)}+\frac{\frac{1}{n}m\theta^2}{\frac{1}{n}(\tau^2 n+\theta^2)}=\frac{\tau^2\cdot\bar{X}_n}{\tau^2+\frac{\theta^2}{n}}+\frac{\frac{\theta^2}{n}\cdot m}{\tau^2+\frac{\theta^2}{n}}=\alpha\bar{X}_n+(1-\alpha)m$$

$$\alpha=\frac{\tau^2}{\frac{\theta^2}{n}+\tau^2}$$

$$\Rightarrow\quad\mu|X^n\sim N\left(\alpha\bar{X}_n+(1-\alpha)m,\ \frac{\tau^2\frac{\theta^2}{n}}{\tau^2+\frac{\theta^2}{n}}\right)$$

כי קיבלנו שפונקצית צפיפות של $\mu|X^n$ באה מהתפלגות נורמלית עם הפרמטרים $\alpha\bar{X}_n+(1-\alpha)m$; $\frac{\tau^2\theta^2/n}{\tau^2+\theta^2/n}$