Time series analysis

Maths

ARMA theory (optional)

Théorème 2.1 : Filtrage linéaire des processus bornés

Soit $\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ et soit $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus, borné dans L^p avec $p \geq 1$, c'est-à-dire que $\sup_{t\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}(|X_t|^p) < \infty$. Posons

$$\forall t \in \mathbb{Z},\ \forall m, n \in \mathbb{N},\ Y_{t,m,n} = \sum_{k=-m}^{n} \alpha_k X_{t-k}.$$

Alors pour tout $t \in \mathbb{Z}$ la famille $(Y_{t,m,n})_{m,n\geq 1}$ converge presque-sûrement et dans L^p lorsque $m, n \to \infty$ vers une variable aléatoire $Y_t \in \mathrm{L}^p$:

$$Y_{t,m,n} \xrightarrow[m,n\to\infty]{\text{p.s.}} Y_t \in \mathrm{L}^p \quad \text{et} \quad \lim_{m,n\to\infty} \mathbb{E}(|Y_{t,m,n} - Y_t|^p) = 0.$$

De plus, le processus $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est bien défini p.s. et est borné dans L^p.

Théorème 2.2 : Filtrage de processus stationnaires

Soit $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ et soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus stationnaire de moyenne μ_X d'autocovariance $\gamma_X(h)$. Alors le processus $Y := F_\alpha(X)$ défini par

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad (F_\alpha X)_t = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k X_{t-k}$$

est un processus du second ordre et stationnaire, de moyenne et d'autoc

$$\mu_Y = \mu_X \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k \quad \text{et} \quad \gamma_Y(h) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_j \alpha_k \gamma_X(h + j - k).$$

Exemple 2.3 : Processus linéaires : filtrage d'un BB

Si $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un $\mathrm{BB}(0, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$, et $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$, alors le théorème 2
$X = \mu + F_\alpha Z$ est un processus stationnaire de moyenne μ et d'autocovar

$$\gamma_X(h) = \sigma^2 \sum_{j\in\mathbb{Z}} \alpha_j \alpha_{j+h}.$$

C'est l'image d'un BB par une application linéaire : on parle de **processu**

Causality and invertibility

Définition 2.5 : Causalité et inversibilité

Si Z est stationnaire, on dit que le filtre $X = \mu + F_\alpha Z$ de Z est un processus...

- **causal** lorsque $\alpha_k = 0$ pour tout $k < 0$ (X_t ne dépend pas du futur de Z_t). C'est le cas par exemple des processus MA(q), $q \geq 1$, qui vérifient

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad X_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \cdots + \theta_q Z_{t-q}.$$

  Plus généralement, les processus linéaires causaux (Z BB) avec $\alpha_0 = 1$ sont les processus MA(∞) (un processus MA(q) est un MA(q') pour tout $q' \geq q$) ;
- **inversible** lorsque Z est un processus causal de X, c'est-à-dire qu'il existe un $\beta \in \ell^1(\mathbb{Z})$ tel que $Z = F_\beta(X)$ avec $\beta_k = 0$ pour tout $k < 0$. C'est le cas par exemple des processus AR(p), $p \geq 1$, qui vérifient $Z = F(X)$ car

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad X_t - \varphi_1 X_{t-1} - \cdots - \varphi_p X_{t-p} = Z_t.$$

  Plus généralement, les processus linéaires inversible (Z BB) avec $\alpha_0 = 1$ sont les processus AR(∞) (un AR(p) est un AR(p') pour tout $p' \geq p$).

Convolution and power series

Théorème 2.8 : Inversibilité pour la convolution et séries de puissances

Soit $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ tel que $P_\alpha(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k z^k$ est un polynôme, c'est-à-dire que α est à support fini et ≥ 0. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. α est inversible pour le produit de convolution dans $\ell^1(\mathbb{Z})$;
2. P_α n'a pas de racine de module 1 ;
3. $z \mapsto 1/P_\alpha(z)$ est développable en série de puissances de z, absolument convergente dans une couronne de $\mathbb{C}$ contenant le cercle unité :

$$\frac{1}{P_\alpha(z)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_k z^k, \quad \beta \in \ell^1(\mathbb{Z}).$$

Lorsque ces propriétés ont lieu, alors $\alpha^{-1} = \beta$. De plus, si P_α n'a pas de racine de module < 1 alors le support de α^{-1} est ≥ 0, c'est-à-dire que $\{k \in \mathbb{Z} : \alpha_k^{-1} \neq 0\} \subset \mathbb{N}$.

Définition 3.1 : AR, MA, ARMA

Soient $p, q \in \mathbb{N}$, $\varphi \in \mathbb{R}^p$ et $\theta \in \mathbb{R}^q$ des coefficients fixés, et $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}} \sim \mathrm{BB}\big(0, \sigma^2\big)$. On dit que $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un **processus ARMA**(p, q), ou ARMA d'ordre (p, q), lorsqu'il est stationnaire et vérifie l'équation de récurrence linéaire suivante [a] :

$$\forall t \in \mathbb{Z},\ X_t = \sum_{k=1}^{p} \varphi_k X_{t-k} + Z_t + \sum_{k=1}^{q} \theta_k Z_{t-k}.$$

De plus :

— si $\theta \equiv 0$ ou $q = 0$ alors on dit qu'il s'agit d'un **processus AR**(p) ;

— si $\varphi \equiv 0$ ou $p = 0$ alors on dit qu'il s'agit d'un **processus MA**(q).

a. Avec la convention $\sum_{k=0}^{-1} = \sum_{\varnothing} = 0$ utile quand $p = 0$ ou $q = 0$.

Théorème 3.6 : Existence des processus ARMA

Soient Φ et Θ les polynômes associés à l'équation ARMA(p, q).

1. Si Φ n'a pas de racine de module 1 alors ARMA(p, q) possède une unique solution stationnaire, donnée par le processus linéaire $F_\alpha Z$ où $\alpha = \alpha_\theta * \alpha_\varphi^{-1}$ où α_φ^{-1} est l'inverse de α_φ pour $*$ (existe : théorème 2.8) ;
2. Si ARMA(p, q) admet un processus linéaire $F_\alpha Z$ avec $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ comme solution alors toute racine de module 1 de Φ est également racine de Θ.

Théorème 3.9 : Causalité et inversibilité des ARMA

Considérons une équation ARMA(p, q) $F_{\alpha_\varphi} X = F_{\alpha_\theta} Z$ et ses polynômes $\Phi = P_{\alpha_\varphi}$ et $\Theta = P_{\alpha_\theta}$. On suppose que Φ n'a pas de racines de module 1, ce qui assure l'existence d'une solution stationnaire unique $X = F_{\alpha_\varphi^{-1} * \alpha_\theta} Z$ (théorème 3.6). Alors

- la solution X est causale si Φ n'a pas de racine de module ≤ 1 ;
- la solution X est inversible si Θ n'a pas de racine de module ≤ 1.

Remarque 3.11 : Résolution pratique des ARMA inversibles

La résolution pratique des ARMA(p, q) inversible peut être menée grâce à la remarque 2.10. En effet, on résout en ξ le système

$$\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \xi_k z^k \right) (1 - \varphi_1 z - \cdots - \varphi_p z^p) = 1 + \theta_1 z + \cdots + \theta_q z^q$$

en identifiant les coefficients, ce qui donne dans le cas causal le système triangulaire

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \theta_0 = 1 \\ -\xi_0 \varphi_1 + \xi_1 &= \theta_1 \\ -\xi_0 \varphi_2 - \xi_1 \varphi_1 + \xi_2 &= \theta_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Note : si P_{α_φ} divise P_{α_θ} (c'est-à-dire que si z_j est racine de P_{α_φ} de multiplicité m_j alors elle est aussi racine de P_{α_θ} de multiplicité $\geq m_j$) alors P_ξ est un polynôme. Dans le cas contraire, P_ξ n'est pas un polynôme et contient des puissances de z de degré arbitrairement grand. Exemple : la solution de ARMA$(1, 1)$ quand $|\varphi_1| < 1$ est donnée par $P_\xi(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_1 + \theta_1) \varphi_1^k z^k$, qui vérifie bien $(1 - \varphi_1 z) P_\xi(z) = 1 + \theta_1 z$. Ici, P_{α_φ} divise P_{α_θ} ssi $-1/\theta_1 = 1/\varphi_1$, c'est-à-dire ssi $P_\xi(z) = 1$ (et on a $P_{\alpha_\varphi} = P_{\alpha_\theta}$).