

## הרצאה 7

מסלולים קלים ביותר

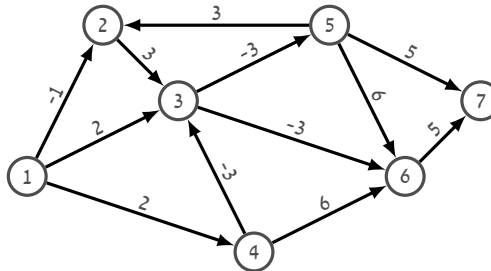
אלגוריתם גנרי

## הקדמה

נתון לנו גרף (מכוון או לא)  $G = (V, E)$  וכן פונקציית משקל על הקשתות  $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ . נסמן ב- $P_{st} = (s = v_0, \dots, v_k = t)$  מסלול מצומת  $s$  לצומת  $t$  וב- $\delta(s, t)$  את משקל המסלול הקל ביותר בין שני צמתים  $s$  ו- $t$ . כלומר:

$$\delta(s, t) = \inf_{P_{st}} w(P_{st})$$

**דוגמה:** למה שווה  $\delta(1, 3)$  בגרף הבא? למה שווה  $\delta(1, 7)$ ?



## הערות:

- לאלגוריתמים למציאת מסלול קל ביותר שימושים רבים, אולי המידי שבהם הוא חישוב מסלול קצר ביותר בין שתי נקודות במפה.
- יתכנו משקלים שלילים על הקשתות, למשל אם אנחנו מעוניינים לתכנן מסלול לרכב חשמלי והמטרה שלנו היא לחסוך בסוללה.
- כאשר צומת  $t$  לא ישיג מצומת  $s$  נגדיר  $\delta(s, t) = \infty$
- כאשר יש מעגל שלילי ישיג מצומת  $s$ , נגדיר  $\delta(s, v) = -\infty$  לכל  $v$  ששייך ל- $s$  (בדרך כלל במקרה כזה רק נרצה לזהות שזהו אכן המצב).

## תכונות

**טענה 1.** אם אין בגרף מעגלים שלילים אז קיים מסלול פשוט קל ביותר

הוכחה. נסתכל על המסלול הקל ביותר עם הכי מעט מעגלים, נוריד מעגל אחד. ☐

**טענה 2.** אם  $p = (v_0, \dots, v_k)$  מסלול קל ביותר מ- $v_0$  ל- $v_k$  אז לכל  $0 \leq i \leq j \leq k$  מתקיים ש- $(v_i, \dots, v_j)$  מסלול קל ביותר בין  $v_i$  ל- $v_j$ . ☐

הוכחה. אם לא, נחליף את המסלול הקל ביותר בתת מסלול הקיים ונקבל מסלול קל יותר.

**טענה 3** (אי שוויון המשולש). לכל  $u, v \in V, uv \in E$  מתקיים ש- $\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + w(uv)$

הוכחה. משקל המסלול הקל ביותר מ- $s$  ל- $u$  ומשם ל- $v$  הוא  $\delta(s, u) + w(uv)$  (אבל יתכנו מסלולים קלים יותר ממסלול זה). ☐

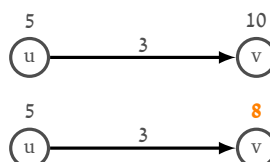
## מקור בודד

בהינתן גרף  $G = (V, E)$  וצומת מקור  $s$ , נרצה לחשב את הערך  $\delta(s, v)$  לכל  $v \in V$ .

**הגדרה 1** (פונקציית חסם עליון). בהינתן גרף  $G = (V, E)$ , פונקציה  $d : V \rightarrow \mathbb{R}$  תקרא פונקציית חסם עליון אם לכל  $v \in V$  מתקיים ש- $d(v) \geq \delta(s, v)$

**ניסיון שיפור:** בהינתן גרף  $G = (V, E)$  ופונקציית חסם עליון  $d : V \rightarrow \mathbb{R}$  ניסיון שיפור של  $d(v)$  לפי קשת  $uv$  מוגדר להיות  $d(v) \leftarrow \min\{d(v), d(u) + w(uv)\}$

**דוגמה:**



**טענה 4.** אם  $d$  היא פונקציית חסם עליון לפני ניסיון שיפור אז  $d$  היא פונקציית חסם עליון אחרי ניסיון השיפור.

הוכחה. אם אחרי ניסיון השיפור מתקיים ש- $d(v) < \delta(v)$  אז מתקיים ש:

$$d(v) < \delta(s, v) \leq \delta(s, u) + w(uv) \leq d(u) + w(uv) = d(v)$$

□

**הגדרה 2.** (קשת משפרת) קשת  $uv$  תקרא משפרת אם  $w(uv) < d(v) - d(u)$

**אלגוריתם גנרי לחישוב ערך המסלול הקל ביותר ממקור בודד**

1. אתחול: לכל  $v \in V$  הצב  $d(v) \leftarrow \infty$ , הצב  $d(s) \leftarrow 0$

2. כל עוד קיימת קשת משפרת  $uv$

$$(א) \quad d(v) \leftarrow d(u) + w(uv)$$

**טענה 5.** אם האלגוריתם עוצר וצומת  $v$  ישיג מ- $s$  אז  $d(v) < \infty$

□

הוכחה. נניח בשלילה שלא ונסתכל על קשת  $uv$  במסלול מ- $s$  ל- $v$  כך ש- $d(u) < \infty$  ו- $d(v) = \infty$  - סתירה.

**טענה 6.** אם קיים בגרף מעגל שלילי ישיג מ- $s$  אז האלגוריתם לא עוצר.

הוכחה. נשים לב שקשת אינה משפרת אם  $w(uv) \geq d(v) - d(u)$ . נסתכל על מעגל שלילי  $v_1, \dots, v_k, v_1$  נשים לב ש:

$$0 = d(v_1) - d(v_k) + \sum_{i=1}^{k-1} d(v_{i+1}) - d(v_i) \leq w(v_1 v_k) + \sum_{i=1}^{k-1} w(v_{i+1} v_i) < 0$$

□

**טענה 7.** אם האלגוריתם עוצר אז  $d(v) = \delta(v)$  לכל  $v \in V$

הוכחה. נשים לב ש- $d$  היא פונקציית חסם עליון והפעולה היחידה שהאלגוריתם מבצע היא ניסיון שיפור ולכן בסיום האלגוריתם  $d$  היא עדיין פונקציית חסם עליון, כלומר  $d(v) \geq \delta(v)$  לכל  $v \in V$ .

נראה שמתקיים  $d(v) \leq \delta(v)$ . נניח בשלילה שקיים צומת ישיג מ- $s$ ,  $w$ , כך שהטענה לא מתקיימת עבורו. נסתכל על קשת  $uv$  במסלול קל ביותר מ- $s$  ל- $w$  כך ש- $d(u) = \delta(s, u)$  ו- $d(v) > \delta(s, v)$ . מכיוון שזהו מסלול קל ביותר אז מתקיים ש-

$$w(uv) = \delta(v) - \delta(u) < d(v) - d(u)$$

ומכאן ש- $uv$  קשת משפרת.

□

**מציאת עץ המסלולים הקלים ביותר** נעדכן את האלגוריתם כך שלכל צומת יהיה מצביע לצומת הקודם אליו במסלול הקל ביותר אליו מ- $s$ .

1. אתחול: לכל  $v \in V$  הצב  $p(v) \leftarrow nil$ ,  $d(v) \leftarrow \infty$ , הצב  $d(s) \leftarrow 0$

2. כל עוד קיימת קשת משפרת  $uv$

$$(א) \quad d(v) \leftarrow d(u) + w(uv)$$

$$(ב) \quad p(v) \leftarrow u$$

נגדיר  $E' = \{uv : p(v) = u\}$  ו- $V' = \{v : p(v) \neq nil\} \cup \{s\}$

**טענה 8.** בכל שלב בזמן ריצת האלגוריתם הגרף  $T = (V', E')$  הוא עץ ומשקל המסלול מ- $s$  ל- $v$  שווה ל- $d(v)$  לכל  $v \in V'$

הוכחה. באינדוקציה.

בסיס: נכון

צעד: אם ניסיון שיפור לפי  $uv$  סגר מעגל משקל המעגל הוא  $d(u) - d(v) + w(uv) < d(u) - d(v) + d(v) - d(u) = 0$  לכן לא יבוצע שיפור. אם ניסיון שיפור לא סגר מעגל אז הטענה עדיין מתקיימת

□