הרצאה 12

רשתות זרימה

אלגוריתם אדמונדס קרפ, שידוך בגרף דו צדדי, משפט הול

תזכורת

האלגוריתם הגנרי של פורד פלקרסון:

1. אתחול: מציבים $f(e) \leftarrow 0$ לכל $e \in E$
2. כל עוד יש מסלול שיפור ברשת השיורית (G_f, s, t, c_f)
   (א) מציבים ב-f את הזרימה המשופרת לפי למת שיפור הזרימה
3. פולטים את f

ראינו שאלגוריתם זה אינו פולינומי אפילו כאשר כל הקיבולים שלמים (ואף במקרה הכללי הוא אינו עוצר כלל).

אלגוריתם אדמונדס קרפ

מקרה פרטי של אלגוריתם זה הוא האלגוריתם של אדמונדס וקרפ:

1. אתחול: מציבים $f(e) \leftarrow 0$ לכל $e \in E$
2. כל עוד יש מסלול שיפור ברשת השיורית (G_f, s, t, c_f)
   (א) יהי P מסלול קצר ביותר מ-s ל-t.
   (ב) שפר לפי P והצב ב-f את הזרימה המשופרת לפי למת שיפור הזרימה
3. פולטים את f

כעת נראה שאלגוריתם זה הוא פולינומי ללא תלות בפונקציית הקיבול.
נסמן ב-$f_1, f_2 \ldots$ את פונקציית הזרימה שמחשב האלגוריתם בכל איטרציה, וב-$d_{f_i}(v)$ את המרחק של הצומת v מהצומת s ברשת השיורית.

טענה 1. לכל i ולכל v מתקיים ש-$d_{f_i}(v) \leq d_{f_{i+1}}(v)$.

הוכחה. עבור i נתון, נוכיח באינדוקציה על k - המרחק של v מ-s ב-$G_{f_{i+1}}$.
בסיס: עבור $k = 0$ טריוויאלי.
צעד: עבור צומת v במרחק $k+1$ מ-s ומסלול $s = v_0, \ldots, v_k, v_{k+1} = v$ מתקיים (לפי הנחת האינדוקציה) ש:

$$d_{f_i}(v_k) \leq d_{f_{i+1}}(v_k)$$

אם הקשת $v_k v_{k+1}$ קיימת ב-G_{f_i} אז סיימנו.
אחרת במסלול השיפור ב-G_{f_i} קיימת הקשת $v_{k+1} v_k$ ומכאן:

$$d_{f_i}(v_{k+1}) = d_{f_i}(v_k) - 1 \leq d_{f_{i+1}}(v_k) - 1 = d_{f_{i+1}}(v_{k+1}) - 2$$

□

מסקנה 1. לכל v ולכל $i < j$ מתקיים $d_{f_i}(v) \leq d_{f_j}(v)$

מסקנה 2. אם $uv \in E_{f_{i+1}}$ ו-$uv \notin E_{f_i}$ אז $d_{f_{i+1}}(v) \geq d(f_i(v)) + 2$.

הגדרה 1 (קשת קריטית)**.** בהינתן מסלול P נגיד שקשת e במסלול היא קריטית אם הקיבול שלה הוא המינימלי מבין כל הקשתות במסלול.

טענה 2. אם P מסלול שיפור ב-G_{f_i} ו-e קשת קריטית במסלול, אז $e \notin E_{fi+1}$.

הוכחה. נובע ישירות מהגדרת הרשת השיורית. □

מסקנה 3. במהלך ריצת האלגוריתם, קשת uv יכולה להיות קריטית $\frac{|V|}{2}$ פעמים לכל היותר.

סיבוכיות ריצה: נשים לב שבכל איטרציה קיימת קשת קריטית אחת לפחות ולכן מספר האיטרציות חסום על ידי $|E| \cdot \frac{|V|}{2}$
ניתן לממש כל איטרציה על ידי BFS ולקבל זמן כולל של $O(|E|^2|V|)$.

שידוך

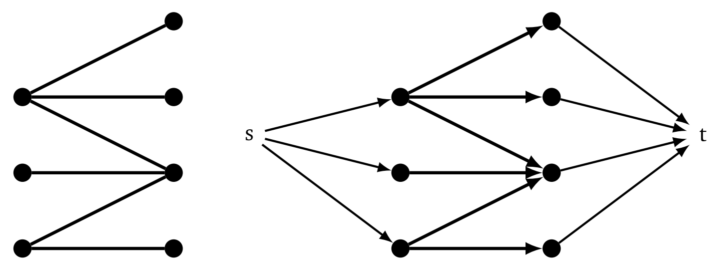
שידוך בגרף לא מכוון $G=(V,E)$ הוא תת קבוצה בלתי תלויה של קשתות $M\subseteq E$. כלומר, לכל שתי קשתות $e_1,e_2\in M$ מתקיים ש-$e_1\cap e_2=\emptyset$.

הגדרה 2 (שידוך מקסימום)**.** שידוך M יקרא שידוך מקסימום אם לכל שידוך אחר, M', מתקיים $|M'|\le|M|$.

שידוך בגרף דו צדדי:
בהינתן גרף דו צדדי, $G=(L,R,E)$ נגדיר את רשת הזרימה, $N=(G',c)$ כאשר

$$\begin{aligned} &G'=(L\cup R\cup\{s,t\},E') \\ &E'=\{uv: uv\in E, u\in L, v\in R\}\cup\{s\}\times L\cup R\times\{t\} \\ &c(e)=1 \qquad\qquad \forall e\in E' \end{aligned}$$

דוגמה:



טענה 3. אם M שידוך ב-G אז קיימת זרימה f ב-N כך ש-$|f|=|M|$.

הוכחה. לכל $uv\in M$ נציב $f(su)=f(uv)=f(vt)=1$ ולכל שאר הקשתות נציב זרימה 0. קל לוודא שזו אכן פונקציית זרימה עם ערך $|M|$. □

טענה 4. אם f זרימה בשלמים ב-N אז קיים שידוך, M, ב-G כך ש-$|M|=|f|$

הוכחה. נגדיר $M=\{uv: u\in L, v\in R, f(uv)=1\}$. קל לוודא שזהו אכן שידוך וש-$|M|=|f|$. □

מסקנה 4. קיים אלגוריתם פולינומי שמוצא שידוך מקסימום.

שידוך מושלם

הגדרה 3 (שידוך מושלם)**.** שידוך יקרא מושלם אם $|M|=\frac{|V|}{2}$.

הגדרה 4 (גרף רגולרי)**.** גרף לא מכוון יקרא d-רגולרי אם הדרגה של כל צומת היא d.

טענה 5. לכל $d\ge 1$ בגרף דו צדדי d-רגולרי קיים שידוך מושלם.

הוכחה. ראשית נשים לב שבגרף דו צדדי רגולרי מתקיים ש-$|L|=|R|$. נסמן $|L|=n$ ומספיק להראות שקיימת זרימה (לאו דווקא שלמה) שערכה n.
נגדיר:

$$\begin{aligned} &f(sv)=1 \quad \forall v\in L \\ &f(vt)=1 \quad \forall v\in R \\ &f(uv)=\tfrac{1}{d} \quad \forall uv\in E: u\in L, v\in R \end{aligned}$$

אפשר לוודא שזו אכן זרימה עם ערך n. □

משפט הול

עבור תת קבוצה של צמתים $U\subseteq V$ בגרף $G=(V,E)$ נסמן ב-$N(U)$ את קבוצת השכנים של U, כלומר:

$$N(U):=\{v: uv\in E, u\in U, v\notin U\}$$

משפט 1 (משפט הול)**.** בגרף דו צדדי $G=(L\cup R,E)$ שמקיים $|L|=|R|=n$ קיים שידוך מושלם אם ורק אם לכל $U\subseteq L$ מתקיים ש-$|U|\le N(U)$.

נוכיח את המשפט באמצעות טיעונים על זרימה.
בהינתן גרף דו צדדי $G = (L \cup R, E)$ רשת זרימה מתאימה $N = (G', c)$ ו-חתך-st S נסמן ב-$U := S \cap L$ וב-$W := S \cap R$.

טענה 6. אם S חתך-st מיינימום אז לא קיים צומת $v \in W \setminus N(U)$.

הוכחה. אם קיים אז $S \setminus \{v\}$ חתך קטן יותר. $\square$

טענה 7. קיים חתך-st מיינימום כך ש-$W = N(U)$.

הוכחה. נסתכל על חתך-st מינימום, S שממזער את $|N(U) \setminus W|$ (השכנים של U שלא ב-S). נניח בשלילה שקיים צומת $v \in N(U) \setminus W$ אז $S \cup \{v\}$ חתך עם ערך לא גדול משל S - סתירה. $\square$

הוכחת משפט הול. אם S חתך-st מינימום כך ש-$W = N(U)$ ומתקיים $|W| \geq |U|$ אז ערך החתך הוא לפחות n. $\square$

דוגמה: בדוגמה הבאה החתך הכתום מקווקו הוא חתך מינימום אבל אינו מכיל את כל השכנים של U, אם מוסיפים את השכן של U שמחוץ לחתך נקבל שוב חתך מינימום. החתך המנוקד הכחול אינו חתך מינימום ומכיל צומת שאינו שכן של U, אם נוציא את הצומת מהחתך נקבל חתך מינימום.