

הרצאה 2

חיפוש לעומק - Depth First Search (DFS)

תזכורת

בהינתן גרף G וצומת s רוצים למצוא עץ T שפורש את כל הצמתים ששייכים ל- s .

- אלגוריתם כללי
- BFS
- מימוש BFS באמצעות תור

DFS

1. אתחול: $U \leftarrow \{s\}, F \leftarrow \emptyset$, לכל $v \in V$ מציבים $p(v) \leftarrow nil, d(v) \leftarrow -1$, $d(s) \leftarrow 0, i \leftarrow 0$

2. כל עוד ישנה קשת uv שחוצה את U ($u \in U$) בחר קשת עם $d(u)$ מקסימלי

(א) $U \leftarrow U \cup \{v\}, F \leftarrow F \cup \{uv\}$

(ב) $p(v) \leftarrow u$

(ג) $d(v) \leftarrow i$

(ד) $i \leftarrow i + 1$

דוגמה



מימוש על ידי מחסנית

1. אתחול: $U \leftarrow \{s\}, F \leftarrow \emptyset$, לכל $v \in V$ מציבים $p(v) \leftarrow nil, d(v) \leftarrow -1$, $d(s) \leftarrow 0, i \leftarrow 0$, $S \leftarrow (s)$

כל עוד המחסנית לא ריקה

1. $u \leftarrow S.top()$

2. אם קיימת קשת uv שחוצה את U ($u \in U$)

(א) $U \leftarrow U \cup \{v\}, F \leftarrow F \cup \{uv\}$

(ב) $p(v) \leftarrow u$

(ג) $d(v) \leftarrow i$

(ד) $S.push(v)$

3. אחרת

(א) $u \leftarrow S.pop()$

(ב) $\beta(u) = i$

4. $i \leftarrow i + 1$

טענה 1. בזמן ריצת האלגוריתם, כל הצמתים הגבוליים נמצאים במחסנית

□

הוכחה. באינדוקציה על צעד האלגוריתם

טענה 2. המחסנית פונוטונית עולה ביחס ל- d

□

הוכחה. באינדוקציה על צעד האלגוריתם

מסקנה 1. זהו מימוש של DFS

הערה: מכיוון שזמני הגילוי של הצמתים הם יחודיים (בשונה מהמרחקים שלהם למשל) אזי המימוש באמצעות מחסנית שקול לכל מימוש אחר של DFS (הדבר אינו נכון לגבי מימוש של BFS באמצעות תור). לכן, כל טענה לגבי המימוש באמצעות מחסנית תקפה עבור DFS באופן כללי.

תכונות

טענה 3. בזמן ריצת DFS, הצמתים בפחסיית s, \dots, v , הם המסלול T -מ- s ל- v

□

הוכחה. באינדוקציה על צעד האלגוריתם

מסקנה 2. עבור שני צמתים u ו- v , צאצא של u ב- T אם ורק אם u נמצא בפחסיית כאשר v מוכנס אליה.

הוכחה. כיוון ראשון מידי מטענה 3.

כיוון שני גם מטענה 3 כאשר האבחנה היא שבעץ, צומת u הוא אב קדמון של v אם ורק אם הוא נמצא על המסלול s -מ- v

□

הגדרה 1 (צומת לבן). בזמן ריצת האלגוריתם, נקרא לצמתים ב- U שחורים ולשאר הצמתים לבנים

אבחנה 1. צומת יוצא מהפחסיית רק אחרי שכל שכניו שחורים.

למה 1 (המסלול הלבן). צומת v צאצא של צומת u ב- T אם"כ כאשר u מוכנס לפחסיית קיים מפניו מסלול של צמתים לבנים לצומת v

הוכחה. כיוון 'אם' באינדוקציה על אורך המסלול. הצומת הראשון במסלול שנכנס לפחסיית מחלק את המסלול לשני מסלולים קצרים יותר. פרט קטן אך חשוב אחד הצמתים במסלול אכן נכנס לפחסיית.

כיוון 'רק אם' נניח בשלילה ש- v צאצא של u אבל כל מסלול בניהם מכיל צומת שחור אחד לפחות אז בזמן הכנסת v לפחסיית תוכן הפחסיית מכיל את המסלול u -ל- v ולכן הכנסנו לפחסיית צומת שחור - סתירה.

□

יער DFS

נכליל את אלגוריתם ה-DFS. הקלט הוא גרף (מכוון או לא) הפלט הוא יער של עצים מושרשים כאשר כל עץ מקיים את כל התכונות עליהן דיברנו עד כה.

1. אתחול: $i \leftarrow 0, p(v) \leftarrow nil, \alpha(v) \leftarrow -1$ לכל $v \in V, U \leftarrow \emptyset, F \leftarrow \emptyset$

2. כל עוד $U \neq V$

(א) בחר צומת $s \in V \setminus U$

(ב) $\alpha(s) \leftarrow i, U \leftarrow U \cup \{s\}$

(ג) כל עוד ישנה קשת uv שחוצה את U ($u \in U$) בחר קשת עם $\alpha(u)$ מקסימלי

i. $U \leftarrow U \cup \{v\}, F \leftarrow F \cup \{uv\}$

ii. $p(v) \leftarrow u$

iii. $\alpha(v) \leftarrow i$

iv. $i \leftarrow i + 1$

נראה בהמשך שזהו בדרך כלל האלגוריתם שנרצה להריץ.

סיכום

DFS משמש כאבן בניין לאלגוריתמים יותר מורכבים (רכיבים בלתי פריקים, רכיבים קשירים היטב, מיון טופולוגי).

דוגמה 1 (מיון טופולוגי). הרץ, DFS, פלוט את הצמתים לפי סדר הוצאתם מהפחסיית.

סיווג קשתות

בהינתן גרף מכוון ותת עץ (מושרש) שלו מסווגים את קשתות הגרף ל-4 סוגים:

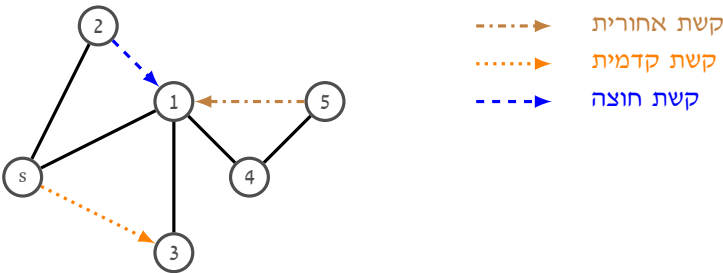
1. קשתות עץ

2. קשתות קדמיות

3. קשתות אחוריות

4. קשתות חוצות

הערה: בגרף לא מכוון נתייחס לקשתות קדמיות וקשתות אחוריות כקשתות אחוריות.



טענה 4. בגרף לא מכוון ועץ שהוא פלט של DFS אין קשתות חוצות

הוכחה. באמצעות למת המסלול הלבן

□