הרצאה 10

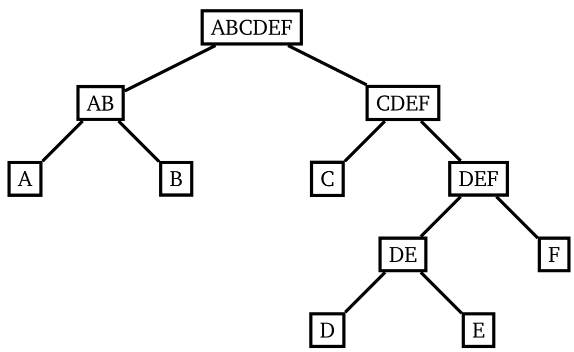
תכנון דינאמי

אופטימזציה של כפל מטריצות

תזכורת: כפל נאיבי של מטריצה בגודל $a \times b$ עם מטריצה בגודל $b \times c$ לוקח $O(a \cdot b \cdot c)$ פעולות. התוצאה של המכפלה היא מטריצה מגודל $a \times c$.
כאשר כופלים n מטריצות, $A_1, \ldots, A_n$ מגדלים $x_i \times y_i$ בהתאמה, אז תוצאת המכפלה תהיה מטריצה מגודל $x_1 \times y_n$. מספר הפעולות שיש לבצע תלוי בסדר בו נבחר לבצע את המכפלה.
דוגמה: כמה פעולות נבצע כדי לבצע את המכפלה ABC ?

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{100} \end{pmatrix}$$

אם נבצע את המכפלה לפי הסדר משמאל לימין אז נזדקק ל-$100 \cdot 1 \cdot 100 = 10,000$ פעולות עבור הכפל של AB ו-$100 \cdot 1 \cdot 100 = 10,000$ פעולות נוספות עבור הכפל של $(AB)C$. אם נחשב את המכפלה $A(BC)$ אז נזדקק לסדר גודל של 200 פעולות בלבד !!!
בעיה: בהינתן n מטריצות, $A_1, \ldots, A_n$ מגדלים $x_i \times y_i$ בהתאמה, רוצים לחשב סדר מכפלות שדורש מינימום פעולות.
ייצוג סדר מכפלות ייצוג טבעי לסדר הפעולות הוא בעזרת עץ, למשל העץ הבא מתאים לחישוב $(AB)(C((DE)F))$:



אלגוריתם: עבור כל $1 \leq i \leq j \leq n$ נגדיר את $\alpha(i,j)$ להיות מספר הפעולות המינימלי שצריך כדי לבצע את המכפלה $A_i \cdot A_{i+1} \cdot \ldots \cdot A_j$
אז מתקיים ש:

$$\alpha(i,j) = \min_{i \leq k \leq j} \alpha(i,k) + \alpha(k+1,j) + x_i \cdot y_k \cdot y_j$$

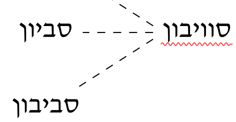
בנוסף מתקיים ש:

$$\forall 1 \leq i \leq n \; \alpha(i,i) = 0$$

סיבוכיות: אם מחשבים את ערכי נוסחת הנסיגה על ידי שימוש בטבלה למשל אז נדרש לחשב $O(n^2)$ ערכים. זמן החישוב של כל ערך הוא $O(n)$ ולכן בסך הכל זמן ריצת האלגוריתם הוא: $O(n^3)$.

התאמת מחרוזות

רוצים לבצע תיקון של שגיאות איות, למשל:



כדי לדעת אילו תיקונים להציע רוצים למדוד את המרחק בין המחרוזת שהוקלדה לבין המילה המוצעת.
בהינתן א"ב Σ נגדיר $\Sigma' = \Sigma \cup \{\varepsilon\}$. ונגדיר:

הגדרה 1 (הרחבה)**.** מחרוזת $s' \in \Sigma'^*$ היא הרחבה של $s \in \Sigma^*$ אם לאחר מחיקת כל תווי ה-ε מ-s' מקבלים את s.

בהינתן פונקציית משקל $w : \Sigma' \times \Sigma' \rightarrow \mathcal{R}$ המרחק בין שתי הרחבות בעלות אורך זהה, n, הוא:

$$\sum_{i=1}^{n} w(s'_1[i], s'_2[i])$$

דוגמה 1.

ס	ו	ו	י	ב	ו	ן
ס	ב	ε	י	ב	ו	ן

דוגמה 2.

ס	ו	ו	י	ב	ε	ו	ן
ס	ε	ε	ε	ב	י	ו	ן

עבור פונקציית המשקל

$$w(\alpha, \beta) = \begin{cases} 0 & \text{if } \alpha = \beta \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

אז המרחק בדוגמה 1 הוא 2 ובדוגמה 2 הוא 4.

הגדרה 2 (מרחק)**.** המרחק בין שתי מחרוזות (לאו דווקא באורך זהה) מעל Σ הוא המרחק המינימלי האפשרי בין כל שתי הרחבות שלהן מאורך זהה.

הערה: אם מניחים שפונקציית המשקל אי שלילית אז מספר ההרחבות הרלוונטיות הוא סופי.
בהינתן שתי מחרוזות רוצים לחשב את המרחק ביניהן.
פתרון: נסמן $|s| = m$ ו-$|r| = n$ נגדיר $\alpha(i, j)$ להיות המרחק בין $s[i] \dots s[m]$ ל-$r[j] \dots r[n]$ כלומר בין הסיפות של s ו-r.
ונחשב

$$\alpha(i, j) = \min \begin{cases} w(s[i], r[j]) + \alpha(i+1, j+1) \\ w(\varepsilon, r[j]) + \alpha(i, j+1) \\ w(s[i], \varepsilon) + \alpha(i+1, j) \end{cases}$$

כמו כן מתקיים ש:

$$\alpha(i, n+1) = \sum_{l=i}^{m} w(s[i], \varepsilon)$$

וגם:

$$\alpha(m+1, j) = \sum_{l=j}^{m} w(\varepsilon, s[j])$$