

הרצאה 5

אלגוריתמים חמדניים

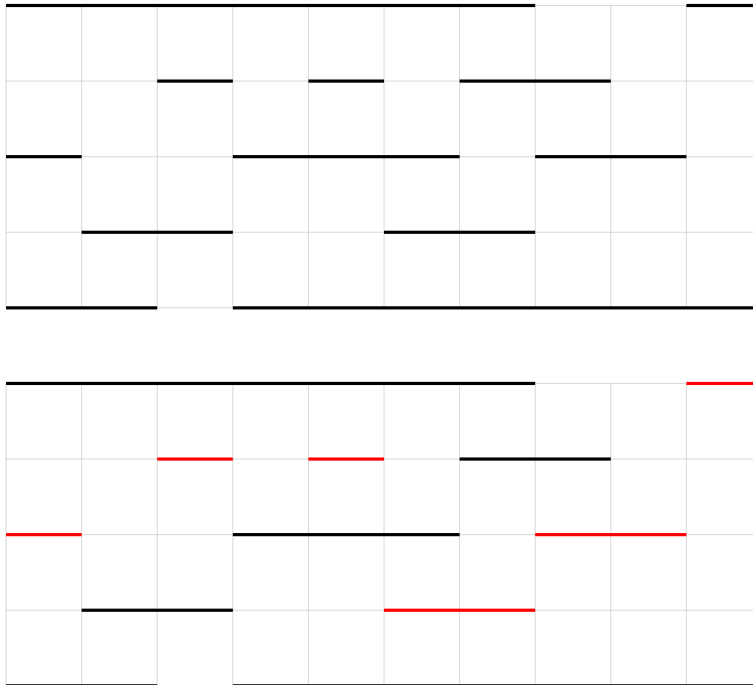
שיבוץ אינטרוולים, שיבוץ משימות

הקדמה

לעיתים קרובות אפשר לייצג בעיות אופטימיזציה כקבוצה של אלמנטים כאשר פתרון חוקי הוא תת קבוצה של אלמנטים שמקיימת תכונות מסוימות. למשל, עץ פורש מינימלי. בדרך כלל יש פונקציית מחיר / רווח לכל תת קבוצה והמטרה שלנו היא למזער / למקסם את הערך הזה. אלגוריתם חמדן, באופן לא פורמלי, הוא כזה שבונה פתרון (תת קבוצה של אלמנטים) באופן איטרטיבי ובכל שלב מוסיף / מסיר מהקבוצה

קבוצת אינטרוולים בלתי תלויה בגודל מקסימלי

נתונים n אינטרוולים $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, נסמן ב- $s(a_i)$ את זמן ההתחלה של האינטרוול a_i וב- $e(a_i)$ את זמן הסיום שלו. לכל אינטרוול מתקיים ש- $s(a_i), e(a_i) \in \mathbb{R}_+$ וכן $s(a_i) < e(a_i)$ רוצים למצוא תת קבוצה בגודל מקסימלי $I \subseteq A$ כך שהאינטרוולים ב- I זרים בזוגות, כלומר לכל $a, b \in I$ אחד התנאים מתקיים: $e(a) < s(b)$ או $s(a) < e(b)$.
דוגמה:



אלגוריתם חמדן:

1. אתחול: $I \leftarrow \emptyset, \bar{e} \leftarrow 0$

2. עבור כל אינטרוול a בסדר לא יורד של ערכי $e(a)$:

(א) אם $s(a) \geq \bar{e}$

i. $I \leftarrow I \cup \{a\}$

ii. $\bar{e} \leftarrow e(a)$

לפני שנוכיח נכונות נראה דוגמאות לגישות חמדניות שלא עובדות:
לבחור את האינטרוול עם זמן התחלה הכי מוקדם



לבחור את האינטרוול הכי קצר



לבחור את האינטרוול שנחתך עם הכי מעט אינטרוולים

[illegible]

בסיס: באתחול טריוויאלי

$$I' = \{\alpha_1, \dots, \alpha_i, \beta_1, \dots, \beta_k\}$$
$$I'' = \{\alpha_1, \dots, \alpha_i, \mathbf{\alpha}_{i+1}, \dots, \beta_k\}$$

שיבוץ משימות

$$\delta(a_i) = \sum_{i < \pi(a_i)} t(\pi^{-1}(i))$$
$$\arg \min_{\pi} \{ \max_i l(a_i) \}$$

A	t	d
a_1	2	7
a_2	3	10
a_3	5	5

a_1	a_2	a_3	a_3	a_1	a_2
-------	-------	-------	-------	-------	-------

$$b_{i+1}, \dots, b_{i-1}, a$$
$$a, b_{i+1}, \dots, b_{i-1}$$

3