הרצאה 4

עץ פורש מינימלי

פרים, קרוסקל

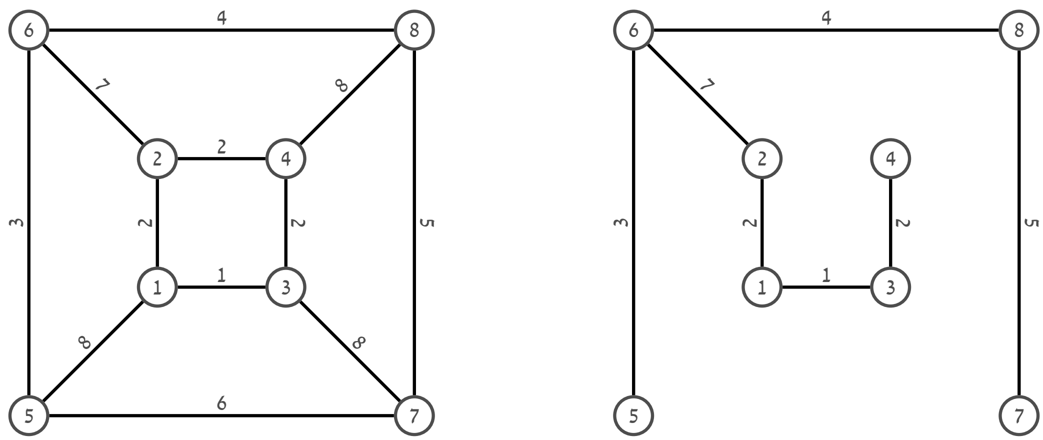
הגדרות ואבחנות

יער - גרף חסר מעגלים

עץ - יער קשיר

הגדרה 1 (עץ פורש מינימלי)**.** בהינתן זוג של גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ופונקצית משקל (אי שלילית) $w:E\to\mathbb{R}$ עץ פורש מינימלי הוא כל עץ $T=(V,F)$ שממזער את הערך $\sum_{e\in F} w(e)$.

דוגמה:



חתך - תת קבוצה של צמתים $S\subseteq V$

קשת חוצה - קשת uv חוצה חתך S אם $|\{u,v\}\cap S|=1$

אבחנה 1. גרף קשיר אמ"מ כל חתך לא טריוויאלי נחצה על ידי קשת אחת לפחות.

אבחנה 2. הוספת קשת uv לעץ סוגרת מעגל שמכיל את הקשת + המסלול מ-v ל-u בעץ. כעת ניתן להסיר כל קשת מהמעגל הנ"ל ולקבל בחזרה עץ.

אבחנה 3. אם קשת uv נמצאת על מעגל והיא חוצה חתך S אז את S חוצה קשת אחת נוספת (לפחות) ששייכת למעגל.

אבחנה 4. מחיקת קשת e מעץ יוצרת יער עם שני רכיבי קשירות. נסמן ב-U_e את החתך שהרכיבים הללו מגדירים (אחד הרכיבים באופן שרירותי). אם נוסיף לגרף קשת כלשהי שחוצה את החתך U_e קיבלנו שוב עץ.

הכלל הכחול והאדום

נניח שנתון לנו גרף לא מכוון וקשיר, $G=(V,E)$, כך שהקשתות שלו צבועות בכחול, אדום ולבן. נסמן ב-R,B-ו W-את החלוקה של E בהתאם. בנוסף, נתונה לנו פונקציית משקל $w:E\to\mathbb{R}$
נגדיר שני כללים:

- הכלל האדום: בחר מעגל שלא מכיל קשתות אדומות, מבין הקשתות הלבנות על המעגל בחר אחת עם משקל מקסימלי וצבע אותה באדום.
- הכלל הכחול: בחר חתך שלא נחצה על ידי קשתות כחולות, מבין הקשתות הלבנות שחוצות את החתך בחר אחת עם משקל מינימלי וצבע אותה בכחול.

נניח בנוסף שקיים עפ"מ, $T\subseteq E$, שמכיל את כל הקשתות הכחולות ולא מכיל קשתות אדומות, כלומר: $B\subseteq T$ וגם $T\cap R=\emptyset$.
נוכיח את שתי הטענות הבאות:

טענה 1. אם ניתן להפעיל את הכלל האדום אז קיים עפ"מ שמקיים את התנאים הנ"ל גם אחרי הפעלת הכלל האדום.

הוכחה. נניח שהפעלנו את הכלל האדום וצבענו את הקשת e באדום. אם $e\notin T$ סיימנו. אחרת, נסתכל על החתך שנוצר על ידי הסרה של e מ-T. מכיוון ש-e קשת על מעגל אז קיימת קשת נוספת, e' שחוצה את החתך (ולא שייכת ל-T). מכיוון של-e משקל מקסימלי, העץ $T\setminus\{e\}\cup\{e'\}$ הוא עפ"מ. □

טענה 2. אם ניתן להפעיל את הכלל הכחול אז קיים עפ"מ שמקיים את התנאים הנ"ל גם אחרי הפעלת הכלל הכחול.

הוכחה. נניח שהפעלנו את הכלל הכחול על חתך S וצבענו את הקשת e בכחול. אם $e \in T$ סיימנו. אחרת, נוסיף את e ל-T, אז e נמצאת על מעגל שאינו מכיל קשתות אדומות ולכן את S חוצה קשת לבנה, e'. מכיוון של-e משקל מינימלי בחתך אז $T \setminus \{e'\} \cup \{e\}$ עפ"מ. □

הטענות הבאות מראות שניתן להפעיל את הכללים לפי הצורך:

טענה 3. ניתן להפעיל את הכלל הכחול כל עוד הקשתות הכחולות אינן עץ.

הוכחה. נניח שהקשתות הכחולות לא מהוות עץ, אז ביחס לקשתות הכחולות קיימים ב-G שני רכיבי קשירות (לפחות) כל רכיב קשירות כזה מהווה חתך מתאים. □

טענה 4. ניתן להפעיל את הכלל האדום כל עוד הקשתות **הלא** אדומות אינן עץ.

הוכחה. אם הקשתות הלא אדומות אינן עץ אז קיים לפחות מעגל אחד לא אדום. □

מסקנה 1. ניתן להפעיל את הכלל הכחול והאדום בסדר כלשהו כדי לקבל עפ"מ.

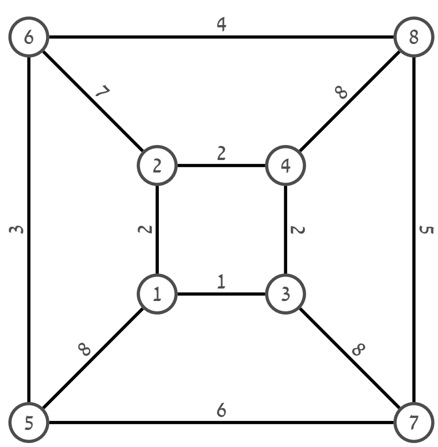
אלגוריתם פרים (Prim)

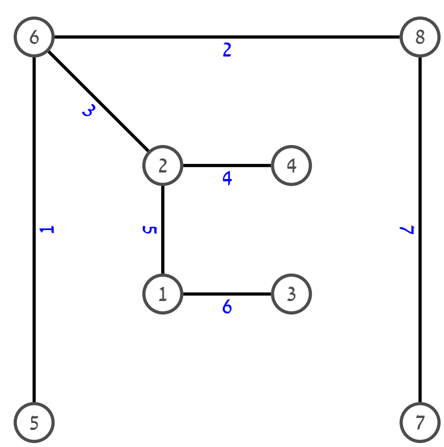
אלגוריתם פרים מתחיל מעץ שמכיל צומת אחד ובכל איטרציה מוסיף לעץ את הקשת הכי זולה שקצה אחד שלה בדיוק נוגע בעץ. פורמלית:

1. אתחול: $U \leftarrow \{u\}, B \leftarrow \emptyset$, כאשר u צומת שרירותי.
2. כל עוד $(U \neq V)$ הפעל את הכלל הכחול:
   (א) בחר את החתך U, וצבע בכחול את הקשת עם המשקל המינימלי שחוצה אותו, uv.
   (ב) $B \leftarrow B \cup \{uv\}$, $U \leftarrow U \cup \{v, u\}$

אבחנה 5. אלגוריתם פרים הוא מימוש של האלגוריתם הכללי שמפעיל את הכלל הכחול.

דוגמה:





הערות:

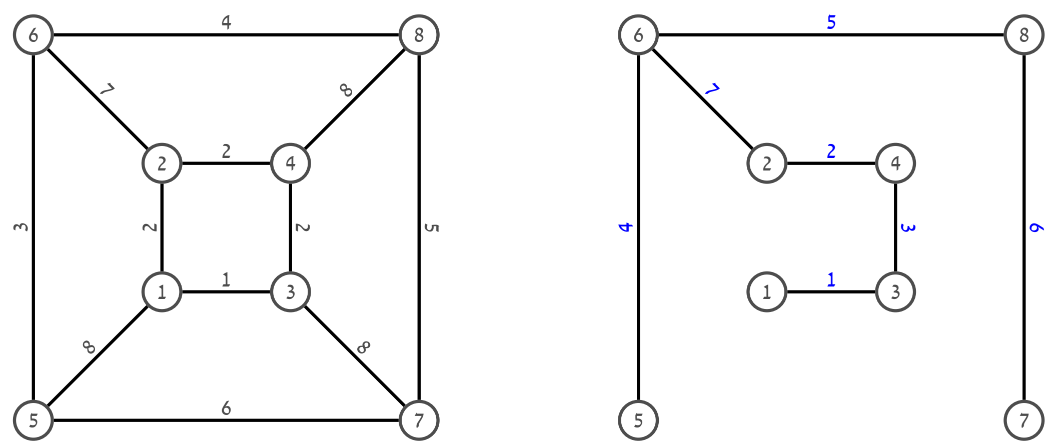
- כדי לממש את האלגוריתם צריך לדעת בכל שלב אילו קשתות חוצות את החתך ולבחור מהן את הקלה ביותר
- כאשר מוסיפים צומת לחתך יתכנו השינויים הבאים:
  - קשת שחצתה את החתך עכשיו היא פנימית לחתך
  - קשת חיצונית לחתך עכשיו חוצה את החתך
- השינויים היחידים הם עבור קשתות שנוגעות בצומת שהוסף לחתך ולכן בכל פעם שמוסיפים צומת לחתך מעדכנים רק את הקשתות שנוגעות בו, סך הכל מעדכנים כל קשת פעמיים לכל היותר.
- נשים לב שאם שומרים את הקשתות שחוצות את החתך בערימת מינימום אז אנחנו מבצעים $|E|$ הכנסות ו-$|V|$ הוצאות. הוצאה והכנסה של כל קשת לוקחת $O(\log |E|)$ לכל היותר.
- סך הכל זמן הריצה של האלגוריתם הוא $O(|E| \log |E|) = O(|E| \log |V|)$
- קיימים מבני נתונים יותר יעילים עם פונקציונליות של ערימת מינימום שתומכים בהכנסה בזמן ממוצע $O(1)$ והוצאה בזמן $O(\log |E|)$ ולכן ניתן לממש את האלגוריתם בזמן $O(|E| + |V| \log |V|)$

אלגוריתם קרוסקל (Kruskal)

אלגוריתם קרוסקל מתחיל מיער ללא קשתות, בכל שלב באלגוריתם נמזג שני רכיבי קשירות באמצעות הקשת הקלה ביותר שמחברת שני רכיבי קשירות. פורמלית:

1. אתחול: $\mathcal{C} \leftarrow \{\{v\} : v \in V\}$,
2. כל עוד $T = (V, B)$ אינו קשיר הפעל את הכלל הכחול:
   (א) תהי e הקשת הקלה ביותר שמחברת שני רכיבי קשירות, C_i, C_j
   (ב) עדכן $B \leftarrow B \cup \{e\}$, $\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C} \setminus \{C_i, C_j\} \cup \{C_i \cup C_j\}$

דוגמה:



הערות:

- ניתן לממש את האלגוריתם באופן הבא:
  - מיין את הקשתות בסדר לא יורד של משקלן
  - עבור כל קשת לפי הסדר, אם היא מחברת שני רכיבי קשירות הפעל עליה את הכלל הכחול ועדכן את C
- זמן הריצה של מימוש כזה הוא $O(|E| \log |E|)$ עבור המיון ובנוסף לכל קשת צריך לבדוק אם היא מחברת שני רכיבים שונים ואם כן לעדכן את מבנה הרכיבים. כזכור מקורס מבני נתונים קיים מימוש פשוט שעושה זאת בזמן ממוצע של $O(\log |V|)$ ולכן הזמן הריצה הכולל הוא $O(|E| \log |E|) = O(|E| \log |V|)$.

משפט האפיון של עצים פורשים מינימלים

הגדרה 2. בהינתן עץ $T = (V, F)$ וקשת $e \notin F$ נסמן ב-C_e את המעגל שמכיל את e בגרף $(V, F \cup \{e\})$

הגדרה 3. בהינתן עץ $T = (V, F)$ וקשת $e = uv \in F$ נסמן ב-U_e את החתך שמכיל את כל הצמתים שישיגים מ-u בגרף $(V, F \setminus \{e\})$

משפט 1. עץ פורש $T = (V, F)$ של גרף $G = (V, E)$ הוא מינימלי אמ"מ לכל $e \in F$ מתקיים ש-e קשת במשקל מינימלי שחוצה את U_e. באופן שקול, T מינימלי אמ"מ לכל $e \in E \setminus F$ מתקיים ש-e קשת במשקל מקסימלי במעגל C_e

הוכחה. נוכיח כיוון אחד. נניח שמתקיים שלכל $e \in F$ מתקיים ש-e קשת במשקל מינימלי שחוצה את U_e. אז עץ כזה מתקבל על ידי הפעלה של הכלל הכחול על אוסף החתכים $\{U_e : e \in F\}$. באופן דומה, נניח שלכל $e \in E \setminus F$ מתקיים ש-e קשת במשקל מקסימלי במעגל C_e אז עץ כזה מתקבל על ידי הפעלת הכלל האדום על אוסף המעגלים $\{C_e : e \in E \setminus F\}$ □