הרצאה 13

רשתות זרימה

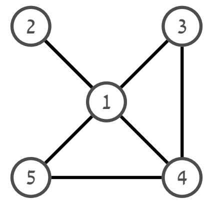
תת גרף צפוף ביותר.

בעיה

הגדרה 1 (צפיפות). צפיפות של גרף לא מכוון, $G=(V,E)$, היא $\frac{|E|}{|V|}$.

בהינתן גרף לא מכוון רוצים למצוא תת-גרף שלו צפוף ביותר. מה תת גרף כזה מייצג ברשת חברתית למשל?

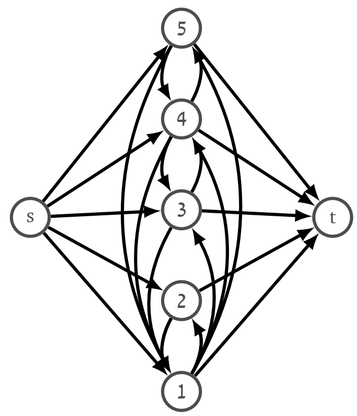
דוגמה 1. מהי הצפיפות של הגרף הבא? מה התת-גרף הצפוף ביותר של הגרף הבא?



מציאת תת גרף צפוף ביותר על ידי חתך מינימום

בהינתן גרף לא מכוון, $G=(V,E)$, נבנה את רשת הזרימה $N=(D,s,t,c)$ כאשר $D=(\{s,t\}\cup V, s\times V\cup\{uv,vu : uv\in E\}, V\times t)$ ואת c נגדיר בהמשך.

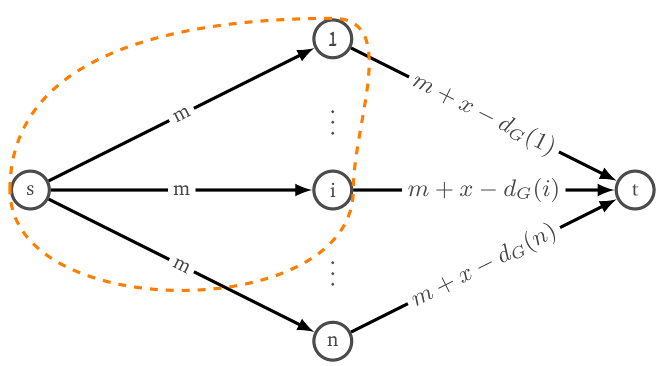
דוגמה 2. עבור הגרף מהדוגמה הקודמת, רשת הזרימה המתאימה היא:



עבור x כלשהו נגדיר את פונקציית הקיבול להיות

$$\begin{aligned} &\forall\, i && c(s,i)=m \\ &\forall\, i && c(i,t)=m+x-d_G(i) \\ &\forall\, uv\in E && c(u,v)=1 \end{aligned}$$

עבור תת קבוצה של צמתים, $S\subseteq V$, מה הערך של חתך-st $S\cup\{s\}$?



נסמן ב- $D(S):=\frac{|E\cap(S\times S)|}{|S|}$ את הצפיפות של הגרף המושרה $G[S]$.
אז אפשר להשתכנע שקיבול החתך $S\cup\{s\}$ הוא $nm+|S|(x-2D(S))$.
נסמן ב-S^* קבוצת צמתים כך של-$G[S^*]$ צפיפות מקסימלית.

טענה 1. עבור ערך $x<2D(S^*)$ מתקיים שקיבול חתך מינימום ברשת הזרימה הנ"ל קטן מ- nm.

הוכחה. נובע מכך שקיבול החתך $S^* \cup \{s\}$ קטן מ-mn. □

טענה 2. עבור ערך $x > 2D(S^*)$ מתקיים שקיבול חתך מינימום ברשת הזרימה הנ"ל גדול או שווה ל- nm.

הוכחה. נובע מכך שהביטוי $|S|(x - 2D(S)) \geq 0$ לכל $S \subseteq V$. □

טענה 3. עבור ערך $x = 2D(S^*)$ מתקיים שקיבול חתך מינימום ברשת הזרימה הנ"ל הוא nm.

הוכחה. נובע מכך שהביטוי $|S|(x - 2D(S)) \geq 0$ לכל $S \subseteq V$ ו- $|S^*|(x - 2D(S^*)) = 0$. □

אלגוריתם: מהטענות הנ"ל ומהעובדה שמספר הצפיפויות האפשרויות הוא פולינומי ניתן לגזור את האלגוריתם הבא:

1. "נחש" (בצע חיפוש בינרי) ערך x ובדוק שקיים חתך מינימום עם ערך nm שמכיל יותר מצומת אחד, $S \cup \{s\}$.
2. החזר את S.