

## הרצאה 8

מסלולים קלים ביותר - בלמן פורד, דייקסטרה

## אלגוריתם בלמן-פורד

1. אתחול: לכל  $v \in V$  מציבים  $d(v) \leftarrow \infty$ ,  $p(v) \leftarrow nil$ . מציבים  $d(s) \leftarrow 0$ .

2. מבצעים  $|V| - 1$  פעמים:

לכל קשת  $e \in E$  בצע ניסיון שיפור לפי  $e$

3. אם עדיין יש קשתות משפרות קבע כי יש מעגל שלילי, אחרת החזר את  $d$  ו- $p$

זמן הריצה של האלגוריתם הוא  $O(|V||E|)$ .

**טענה 1.** אם אין מעגלים שלילים אז בסיום האלגוריתם  $d(v) = \delta(s, v)$  לכל צומת  $v \in V$ .

□

הוכחה. באינדוקציה על עומק הצומת בעץ לפי  $p$ .

**טענה 2.** אם קיים מעגל שלילי האלגוריתם קובע שקיים כזה.

□

הוכחה. נובע מהגדרת האלגוריתם והטענות על האלגוריתם הגנרי.

**משפט 1.** אלגוריתם בלמן פורד פולט עץ מסלולים קלים ביותר אם בגרף אין מעגלים שלילים, אחרת הוא מודיע כי קיים כזה.

□

הוכחה. מיידי מטענות 2 ו-1.

## אלגוריתם דייקסטרה

אלגוריתם דייקסטרה מניח שבגרף אין משקלים שלילים.

1. אתחול: לכל  $v \in V$  מציבים  $d(v) \leftarrow \infty$ ,  $p(v) \leftarrow nil$ . מציבים  $d(s) \leftarrow 0$ , וכן  $Q \leftarrow V$ .

2. כל עוד  $Q$  לא ריק

(א) יהי  $u \in Q$  צומת עם ערך  $d$  מינימלי

(ב) הוצא את  $u$  מ- $Q$  ולכל  $uv \in E$  בצע ניסיון שיפור לפי  $uv$

אם ממשיכים את  $Q$  על ידי ערימת מינימום אז זמן הריצה של האלגוריתם הוא  $O(|V| + |E| \log |V|)$ .

**טענה 3.** ערכי  $d$  של הצמתים לפי סדר הוצאתם מ- $Q$  הם פונקציה מונוטונית לא יורדת.

□

הוכחה. באינדוקציה על צעד האלגוריתם + שימוש בנתון שלא קיימים משקלים שלילים.

**מסקנה 1.** ברגע שצומת יצא מ- $Q$ , ערך  $d$  שלו לא משתנה.

**טענה 4.** בסיום ריצת האלגוריתם אין בגרף קשתות משפרות.

□

הוכחה. הוכחה באינדוקציה על צעד האלגוריתם שאין קשתות משפרות בין צמתים מחוץ ל- $Q$ .

**משפט 2.** אלגוריתם דייקסטרה פולט את עץ המסלולים הקלים ביותר.

□

הוכחה. לפי טענה 4 והטענות על האלגוריתם הגנרי.

## דוגמה

