

הרצאה 12

רשתות זרימה

אלגוריתם אדמונדס קרפ, שידוך בגרף דו צדדי

תזכורת

האלגוריתם הגנרי של פורד פלקרסון:

1. אתחול: מציבים $f(e) \leftarrow 0$ לכל $e \in E$

2. כל עוד יש מסלול שיפור ברשת השוורית (G_f, s, t, c_f)

(א) מציבים ב- f את הזרימה המשופרת לפי למת שיפור הזרימה

3. פולטים את f

ראינו שאלגוריתם זה אינו פולינומי אפילו כאשר כל הקיבולים שלמים (ואף במקרה הכללי הוא אינו עוצר כלל).

אלגוריתם אדמונדס קרפ

מקרה פרטי של אלגוריתם זה הוא האלגוריתם של אדמונדס וקרפ:

1. אתחול: מציבים $f(e) \leftarrow 0$ לכל $e \in E$

2. כל עוד יש מסלול שיפור ברשת השוורית (G_f, s, t, c_f)

(א) יהי P מסלול קצר ביותר מ- s ל- t .

(ב) שפר לפי P והצב ב- f את הזרימה המשופרת לפי למת שיפור הזרימה

3. פולטים את f

כעת נראה שאלגוריתם זה הוא פולינומי ללא תלות בפונקציית הקיבול.

נסמן ב- f_1, f_2, \dots את פונקציית הזרימה שמחשב האלגוריתם בכל איטרציה, וב- $d_{f_i}(v)$ את המרחק של הצומת v מהצומת s ברשת השוורית.

טענה 1. לכל i ולכל v מתקיים $d_{f_i}(v) \leq d_{f_{i+1}}(v)$.

הוכחה. עבור i נתון, נוכיח באינדוקציה על k - המרחק של v מ- s ב- $G_{f_{i+1}}$.

בסיס: עבור $k = 0$ טריוויאלי.

צעד: עבור צומת v במרחק $k + 1$ מ- s ומסלול $s = v_0, \dots, v_k, v_{k+1} = v$ מתקיים (לפי הנחת האינדוקציה) ש:

$$d_{f_i}(v_k) \leq d_{f_{i+1}}(v_k)$$

אם הקשת $v_k v_{k+1}$ קיימת ב- G_{f_i} אז סיימנו.

אחרת במסלול השיפור ב- G_{f_i} קיימת הקשת $v_{k+1} v_k$ ומכאן:

$$d_{f_i}(v_{k+1}) = d_{f_i}(v_k) - 1 \leq d_{f_{i+1}}(v_k) - 1 = d_{f_{i+1}}(v_{k+1}) - 2$$

□

מסקנה 1. לכל v ולכל $i < j$ מתקיים $f_i(v) \leq f_j(v)$

מסקנה 2. אם $uv \in E_{f_{i+1}}$ ו- $uv \notin E_{f_i}$ אז $d_{f_{i+1}}(v) \geq d_{f_i}(v) + 2$

הגדרה 1 (קשת קריטית). בהינתן מסלול P נגיד שקשת e במסלול היא קריטית אם הקיבול שלה הוא המינימלי מבין כל הקשתות במסלול.

טענה 2. אם P מסלול שיפור ב- G_{f_i} ו- e קשת קריטית במסלול, אז $e \notin E_{f_{i+1}}$.

□

הוכחה. נובע ישירות מהגדרת הרשת השוורית.

מסקנה 3. במהלך ריצת האלגוריתם, קשת uv יכולה להיות קריטית $\frac{|V|}{2}$ פעמים לכל היותר.

סיבוכיות ריצה: נשים לב שבכל איטרציה קיימת קשת קריטית אחת לפחות ולכן מספר האיטרציות חסום על ידי $|E| \cdot \frac{|V|}{2}$. ניתן לממש כל איטרציה על ידי BFS ולקבל זמן כולל של $O(|E|^2 |V|)$.

שידוך