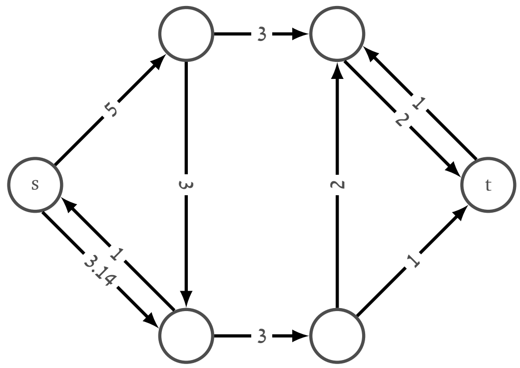
הרצאה 11

רשתות זרימה

הקדמה

הגדרה 1 (רשת זרימה)**.** רשת זרימה היא גרף מכוון, $G=(V,E)$ עם קיבולים על הקשתות, $c:E\to\mathbb{R}_+$ צומת מקור, $s\in V$ וצומת בור, $t\in V$.

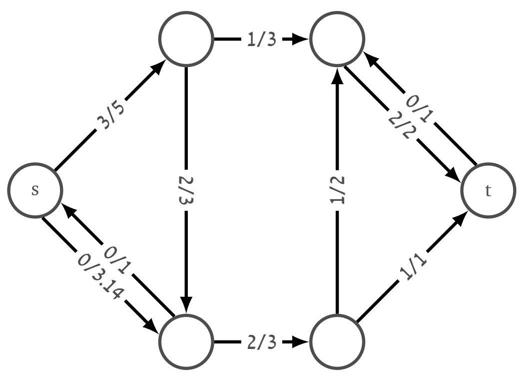
דוגמה:



הגדרה 2 (זרימה)**.** בהינתן רשת זרימה, (G,s,t,c) זרימה היא פונקציה, $f:E\to\mathbb{R}_+$ אשר מקיימת

1. **חוק הקשת** $\forall\, e\in E \quad 0\le f(e)\le c(e)$
2. **חוק הצומת** $\forall\, v\in V\setminus s,t \quad \sum_{uvinE} f(uv)-\sum_{vw\in E} f(vw)=0$

דוגמה:



נסמן ב-$\delta(u):=\{uv:uv\in E\}$ את אוסף הקשתות שיוצאות מצומת u וב-$\rho(v):=\{uv:uv\in E\}$ את אוסף הקשתות שנכנסות לצומת v.
נגדיר: $f(v):=\sum_{e\in\delta(v)} f(e)-\sum_{e\in\rho(v)} f(e)$ ונסמן ב-$|f|:=f(s)$ את ערך הזרימה. בדוגמה הקודמת מתקיים ש-$|f|=3$
מטרה: למצוא פונקציית זרימה חוקית עם ערך מקסימלי.

חתך-st

הגדרה 3 (חתך-st)**.** חתך-st הוא תת קבוצה של צמתים שמכילה את s ואינה מכילה את t.

נרחיב את הסימונים δ, ρ ו-f עבור קבוצת צמתים, כלומר

$$\delta(S):=\{uv\in E:u\in S\wedge v\notin S\}$$

$$\rho(S):=\{uv\in E:u\notin S\wedge v\in S\}$$

ו-

$$f(S):=\sum_{e\in\delta(S)} f(e)-\sum_{e\in\rho(S)} f(e)$$

ונשים לב שלכל $S\subseteq V$ מתקיים

אבחנה 1. $f(S)=\sum_{v\in S} f(v)$

למה 1. לכל חתך-st, S, מתקיים $f(S)=|f|$.

הוכחה. נשים לב שלכל צומת, $v\in S$, שאינו s מתקיים $f(v)=0$ ובנוסף, לפי ההגדרה, מתקיים ש-$|f|=f(s)$. $\square$

בפרט מתקיים ש:

$$|f|=f(V\setminus\{t\})=-f(t)$$

נסמן

$$c(S):=\sum_{e\in\delta(S)}c(e)$$

טענה 1. לכל חתך-st, S, מתקיים $|f|\le c(S)$

הוכחה. לפי למה 1 ולפי הגדרת פונקציית זרימה מתקיים ש-$|f|=f(S)\le c(S)$. $\square$

הטענה האחרונה מאפשרת לנו למצוא חסם עליון על זרימת המקסימום. בהמשך נראה כי זהו חסם עליון הדוק.

רשת שיורית

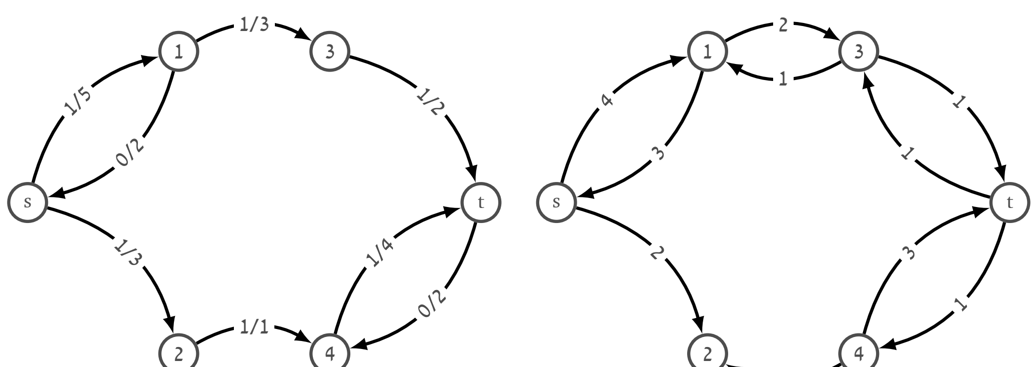
הערות והנחות:

- נרחיב את פונקציית הקיבול ופונקציית הזרימה להיות מוגדרות עבור כל זוג צמתים.
- נניח כי לכל זוג צמתים מתקיים ש-$\min\{f(uv),f(vu)\}=0$ אחרת ניתן לחסר את המינימום משני הערכים.

הגדרה 4 (רשת זרימה שיורית)**.** בהינתן רשת זרימה, (G,s,t,c) וזרימה, f, הרשת השיורית היא (G_f,s,t,c_f) כאשר

$$\begin{aligned}c_f(uv)&:=c(uv)-f(uv)+f(vu)\\G_f&=(V,E_f)\\E_f&=\{uv:c_f(uv)>0\}\end{aligned}$$

דוגמה:



הגדרה 5 (חיבור זרימות)**.** בהינתן שתי פונקציות זרימה, f ו-g, נגדיר את הסכום שלהן להיות:

$$h(uv)=\max\{0,f(uv)+g(uv)-f(vu)-g(vu)\}$$

למה 2. אם f זרימה ב-(G,s,t,c) ו-g זרימה ב-(G_f,s,t,c_f) אז $h=f+g$ זרימה ב-(G,s,t,c) ומתקיים $|h|=|f|+|g|$.

הוכחה.
חוק הקשת: מהגדרה מתקיים $0\le h(uv)$. כמו כן מתקיים ש-$g(uv)\le c_f(uv)=c(uv)-f(uv)+f(vu)$ ולכן, אם $h(uv)\neq 0$ אז $h(uv)=f(uv)+g(uv)-f(vu)-g(vu)\le c(uv)-g(vu)\le c(uv)$.
חוק הצומת: נסמן ב-$\phi(uv):=f(uv)+g(uv)-f(vu)-g(vu)$ ונשים לב ש-$\phi(uv)=-\phi(vu)$ ו-

$$h(uv)-h(vu)=\max\{0,\phi(uv)\}-\max\{0,-\phi(uv)\}=f(uv)+g(uv)-f(vu)-g(vu)$$

ולכן לכל u מתקיים

$$\sum_{v\in V}h(uv)-\sum_{v\in V}h(vu)=\sum_{v\in V}f(uv)-\sum_{v\in V}f(vu)+\sum_{v\in V}g(uv)-\sum_{v\in V}g(vu)=0$$

כאשר השוויון האחרון נובע מחוקיות f ו-g.
ערך הזרימה: נחשב

$$|h| = \sum_{v\in V} h(sv) - \sum_{v\in V} h(vs) = \sum_{v\in V} f(sv) - \sum_{v\in V} f(vs) + \sum_{v\in V} g(sv) - \sum_{v\in V} g(vs) = |f| + |g|$$

$\square$

למה 3. אם P מסלול (פשוט) מ-s ל-t ברשת זרימה (G, s, t, c) ו-ε הקיבול המינימלי של קשת ב-P אז הפונקציה:

$$f_P(e) = \begin{cases} \varepsilon & \text{if } e \in P \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

היא פונקציית זרימה.

הוכחה. חוק הקשת מתקיים לפי ההגדרה של f ושל ε. עבור צומת פנימי במסלול, v, מתקיים ש-$f(v) = f(vw) - f(uv) = 0$ כאשר u ו-w הצמתים לפני ואחרי v במסלול בהתאמה. $\square$

הגדרה 6 (מסלול שיפור)**.** בהינתן רשת זרימה, (G, s, t, c), וזרימה, f, מסלול שיפור הוא מסלול (פשוט) מ-s ל-t ב-G_f.

למה 4. אם P הוא מסלול שיפור ביחס לרשת זרימה (G, s, t, c) וזרימה f אז $h = f + f_P$ זרימה חוקית ו-$|h| = |f| + \varepsilon$.

הוכחה. נובע ישירות מלמות 2 ו-3. $\square$

חתך מינימום זרימת מקסימום

המשפט המרכזי על רשתות זרימה קובע ש:

משפט 1. תהי f פונקציית זרימה ברשת (G, s, t, c). התנאים הבאים שקולים:

1. f היא זרימת מקסימום.
2. לא קיים מסלול שיפור (ב-G_f).
3. קיים חתך-st ברשת שהקיבול שלו שווה ל-$|f|$.

הוכחה.
$\mathbf{1 \Rightarrow 2}$
נניח בשלילה שקיים ונקבל סתירה לפי למה 4.
$\mathbf{2 \Rightarrow 3}$
נסמן ב-S את קבוצת הצמתים הישיגים מ-s ב-G_f. מלמה **??** נובע כי $|f| = f(S)$ ולפי ההגדרה של רשת שיורית נובע כי ב-G מתקיים:

$$\forall e \in \delta(S) \quad f(e) = c(e)$$
$$\forall e \in \rho(S) \quad f(e) = 0$$

$\mathbf{3 \Rightarrow 1}$
מיידי מטענה 1. $\square$

אלגוריתם פורד פלקרסון

אלגוריתם גנרי למציאת זרימת מקסימום:

1. אתחול: מציבים $f(e) \leftarrow 0$ לכל $e \in E$
2. כל עוד יש מסלול שיפור ברשת השיורית (G_f, s, t, c_f)
   (א) מציבים ב-f את הזרימה המשופרת לפי למת שיפור הזרימה
3. פולטים את f

טענה 2. אם וכאשר האלגוריתם עוצר, פלט האלגוריתם הוא זרימת מקסימום.

הוכחה. מיידית ממשפט 1. □

סיבוכיות: בשביל לנתח את הסיבוכיות של האלגוריתם יש לדעת:

1. לאחר כמה איטרציות האלגוריתם עוצר (אם בכלל)
2. מה הסיבוכיות של כל איטרציה

נתמקד בסעיף 1. אם כל הערכים הם שלמים אז ברור שמספר האיטרציות חסום על ידי ערך זרימת המקסימום. אם הערכים רציונליים אפשר להכפיל אותם כך שכל הערכים יהיו שלמים. הדוגמה הבאה מראה שבמקרה הגרוע זהו חסם עליון הדוק.