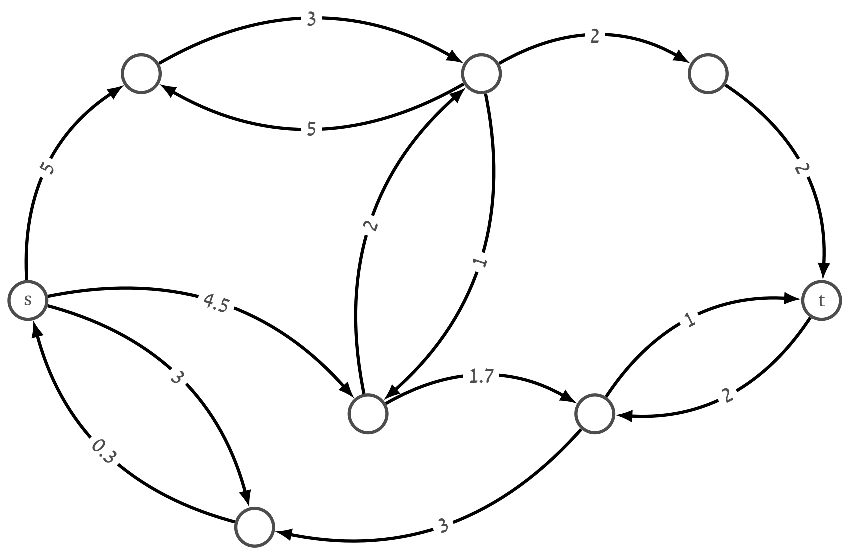
הרצאה 11

רשתות זרימה

הקדמה

הגדרה 1 (רשת זרימה)**.** רשת זרימה היא גרף מכוון, $G = (V, E)$ עם קיבולים על הקשתות, $c : E \to \mathbb{R}_+$ צומת מקור, $s \in V$ וצומת בור, $t \in V$.

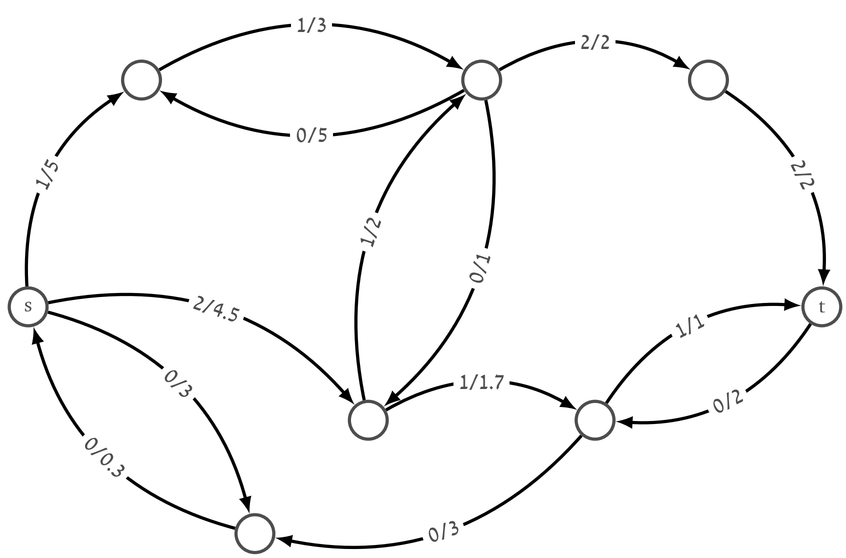
דוגמה:



הגדרה 2 (זרימה)**.** בהינתן רשת זרימה, (G, s, t, c) זרימה היא פונקציה, $f : E \to \mathbb{R}_+$ אשר מקיימת

1. **חוק הקשת** $\forall\ e \in E \quad 0 \leq f(e) \leq c(e)$
2. **חוק הצומת** $\forall\ v \in V \setminus s, t \quad \sum_{uvinE} f(uv) - \sum_{vw \in E} f(vw) = 0$

נסמן ב-$\delta(u) := \{uv : uv \in E\}$ את אוסף הקשתות שיוצאות מצומת u וב-$\rho(v) := \{uv : uv \in E\}$ את אוסף הקשתות שנכנסות לצומת v.
נגדיר: $f(v) := \sum_{e \in \delta(v)} f(e) - \sum_{e \in \rho(v)} f(e)$ ונסמן ב-$|f| := f(s)$ את ערך הזרימה.
דוגמה: $|f| = 3$



מטרה: למצוא פונקציית זרימה חוקית עם ערך מקסימלי.

חתך-st

הגדרה 3 (חתך-st)**.** חתך-st הוא תת קבוצה של צמתים שמכילה את s ואינה מכילה את t.

נרחיב את הסימונים δ, ρ ו-f עבור קבוצת צמתים, כלומר

$$\delta(S) := \{uv \in E : u \in S \land v \notin S\}$$

$$\rho(S) := \{uv \in E : u \notin S \land v \in S\}$$

ו-

$$f(S) := \sum_{e\in\delta(S)} f(e) - \sum_{e\in\rho(S)} f(e)$$

ונשים לב שלכל $S \subseteq V$ מתקיים

אבחנה 1. $f(S) = \sum_{v\in S} f(v)$

למה 1. לכל חתך-st, S, מתקיים $f(S) = |f|$.

הוכחה. נשים לב שלכל צומת, $v \in S$, שאינו s מתקיים $f(v) = 0$ ובנוסף, לפי ההגדרה, מתקיים ש-$|f| = f(s)$. □

בפרט מתקיים ש:

$$|f| = f(V \setminus \{t\}) = -f(t)$$

נסמן

$$c(S) := \sum_{e\in\delta(S)} c(e)$$

טענה 1. לכל חתך-st, S, מתקיים $|f| \leq c(S)$

הוכחה. לפי למה 1 ולפי הגדרת פונקציית זרימה מתקיים ש-$|f| = f(S) \leq c(S)$. □

הטענה האחרונה מאפשרת לנו למצוא חסם עליון על זרימת המקסימום. בהמשך נראה כי זהו חסם עליון הדוק.

רשת שיורית

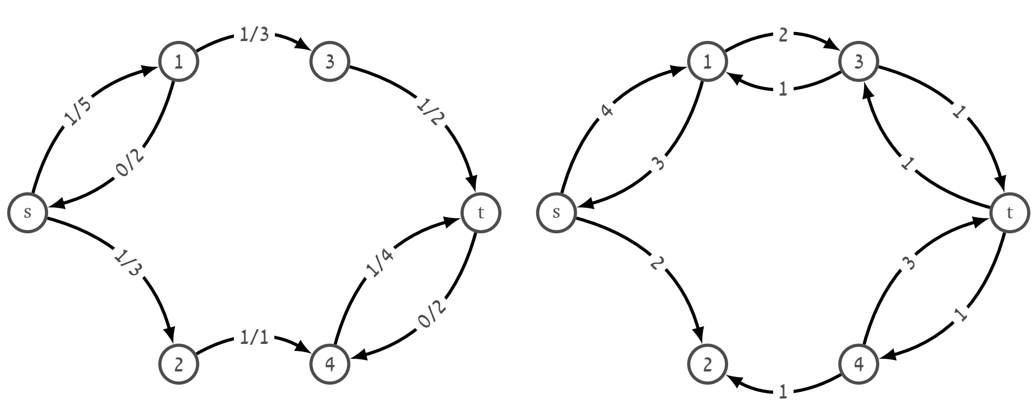
הערות והנחות:

- נרחיב את פונקציית הקיבול ופונקציית הזרימה להיות מוגדרות עבור כל זוג צמתים.
- נניח כי לכל זוג צמתים מתקיים ש-$\min\{f(uv), f(vu)\} = 0$ אחרת ניתן לחסר את המינימום משני הערכים.

הגדרה 4 (רשת זרימה שיורית)**.** בהינתן רשת זרימה, (G, s, t, c) וזרימה, f, הרשת השיורית היא (G_f, s, t, c_f) כאשר

$$c_f(uv) := c(uv) - f(uv) + f(vu)$$
$$G_f = (V, E_f)$$
$$E_f = \{uv : c_f(uv) > 0\}$$

דוגמה:



הגדרה 5 (חיבור זרימות)**.** בהינתן שתי פונקציות זרימה, f ו-g, נגדיר את הסכום שלהן להיות:

$$h(uv) = \max\{0, f(uv) + g(uv) - f(vu) - g(vu)\}$$

למה 2. אם f זרימה ב-(G,s,t,c) ו-g זרימה ב-(G_f,s,t,c_f) אז $h=f+g$ זרימה ב-(G,s,t,c) ומתקיים $|h|=|f|+|g|$.

הוכחה. **חוק הקשת:** מהגדרה מתקיים $h(uv)\geq 0$. כמו כן מתקיים ש-$g(uv)\leq c_f(uv)=c(uv)-f(uv)+f(vu)$ ולכן, אם $h(uv)\neq 0$ אז $h(uv)=f(uv)+g(uv)-f(vu)-g(vu)\leq c(uv)-g(vu)\leq c(uv)$.
חוק הצומת: נסמן ב-$\phi(uv):=f(uv)+g(uv)-f(vu)-g(vu)$ ונשים לב ש-$\phi(uv)=-\phi(vu)$ ו-

$$h(uv)-h(vu)=\max\{0,\phi(uv)\}-\max\{0,-\phi(uv)\}=f(uv)+g(uv)-f(vu)-g(vu)$$

□