

## הרצאה 9

### תכנון דינאמי

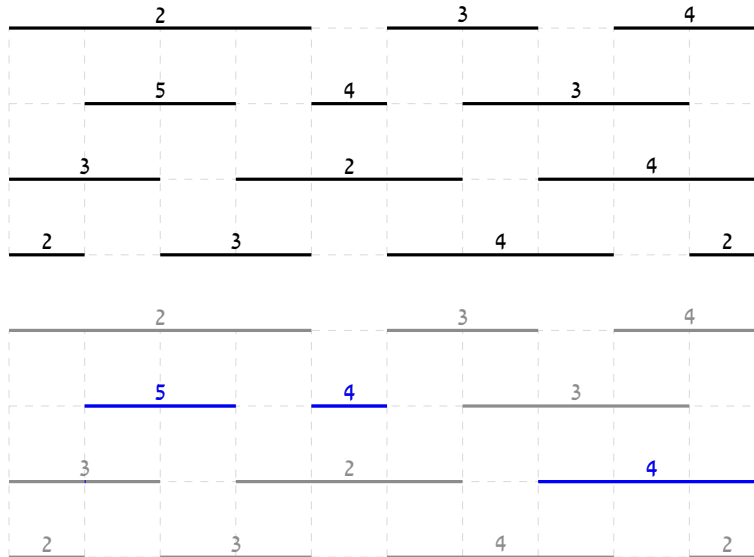
## קבוצה בלתי תלויה של אינטרוולים עם משקל מקסימלי

נתונים  $n$  אינטרוולים (נניח שכבר אחרי מיון לפי זמן סיום)  $A = (a_1, \dots, a_n)$  לכל אינטרוול זמן התחלה  $s(a_i)$ , זמן סיום  $e(a_i)$  ומשקל  $w(a_i)$ . תת קבוצה  $I \subseteq A$  של אינטרוולים נקראת בלתי תלויה אם לכל  $a_i, a_j \in I$  אחד מהשניים מתקיים:

$$1. s(a_j) > e(a_i)$$

$$2. s(a_i) > e(a_j)$$

רוצים למצוא קבוצה בלתי תלויה של אינטרוולים עם משקל מקסימלי.  
**דוגמה:** קלט לבעיה וקבוצה בלתי תלויה במשקל 13.



נסמן  $A_i = (a_1, \dots, a_i)$  נגדיר

$$p(i) = \max \begin{cases} \max\{j : e(a_j) < s(a_i)\} \\ 0 \end{cases}$$

כלומר  $j = p(i)$  הוא האינדקס המקסימלי כך ש- $a_j$  מסתיים לפני ש- $a_i$  מתחיל או 0 אם לא קיים כזה. נגדיר את  $\alpha(i)$  להיות משקל פתרון אופטימלי עבור  $A_i$  אז  $\alpha(n)$  הוא הערך אותו אנחנו מחפשים.

**טענה 1.**

$$\alpha(i) = \max \begin{cases} w(i) + \alpha(p(i)) \\ 0 + \alpha(i-1) \end{cases}$$

כמו כן מתקיים ש:

$$\alpha(0) = 0$$

הוכחה. באינדוקציה על  $i$ .

בסיס: עבור  $i = 0$  טריוויאלי.

עבור  $i$  כלשהו נקבע פתרון אופטימלי  $OPT$  ונסמן  $OPT_i = OPT \cap A_i$ . אם  $a_{i+1} \in OPT$  אז  $OPT$  לא יכול להכיל אף אינטרוול  $a_{p(i)+1}, \dots, a_{i+1}$  לפי הנחת האינדוקציה

$$\alpha(p(i) + 1) \geq w(OPT_{p(i)})$$

ולכן הטענה מתקיימת כי

$$\alpha(i) \geq \alpha(p(i)) + w(a_i) \geq w(OPT_{p(i)}) + w(a_i)$$

מצד שני, אם  $a_{i+1} \notin OPT$  אז לפי ההנחה

$$\alpha(i-1) \geq OPT_{i-1}$$

והטענה מתקיימת.

□

## חישוב יעיל של $O$

כיצד נחשב את  $O$  ביעילות? נשים לב שאם מחשבים את ערכי  $O$  מ-1 עד  $n$  ושומרים את הערכים (למשל במערך) אז חישוב של כל ערך לוקח  $O(1)$  זמן. זמן הריצה של האלגוריתם:

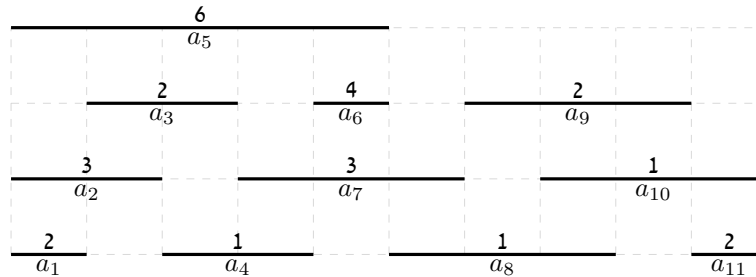
1. מיון -  $O(n \log n)$

2. חישוב  $p$  -  $O(n \log n)$  (חיפוש בינארי לכל  $i$ )

3. חישוב  $O$  -  $O(n)$

סך הכל  $O(n \log n)$

**דוגמת הרצה:**



נחשב:

$i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$p$	0	0	0	1	2	0	4	3	6	7	7	9
$\alpha$	0	2	3	4	4	6	8	8	9	10	10	12

נמצא את הקבוצה עצמה:

$i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$p$	0	0	0	1	2	0	4	3	6	7	7	9
$\alpha$	0	2	3	4	4	6	8	8	9	10	10	12

**נקודות חשובות:**

- מה יקרה אם במקום לחשב את ערכי  $\alpha$  בסדר עולה ושמירת הערכים במערך נחשב את ערכי  $\alpha$  באופן רקורסיבי על המחשנית?
- מה יקרה אם לכל תא במערך נזכור גם את הקבוצה שמתאימה לערך התא?

## מסלולים קלים ביותר

כעת נפתור את בעיית המסלול הקל ביותר.

**תזכורת:** בהינתן גרף (מכוון או לא)  $G = (E, V)$ , פונקציית משקל  $w: E \rightarrow \mathcal{R}$ , צומת מקור  $s \in V$ , וצומת יעד  $t \in V$  רוצים למצוא מסלול מ- $s$  ל- $t$  במשקל מינימלי.

### ניסיון ראשון

נגדיר את  $a(v)$  להיות המסלול הקל ביותר מ- $s$  ל- $v$ , אז מתקיים ש:

$$a(v) = \min_{uv \in E} a(u) + w(uv)$$

מה הבעיה?

### ניסיון שני

נגדיר את  $a(v, U)$  להיות המסלול הקל ביותר מ- $s$  ל- $v$  בגרף  $G[U]$ , אז מתקיים ש:

$$a(v, U) = \min_{uv \in E} a(u, U \setminus \{v\}) + w(uv)$$

מה הבעיה?

## פתרון

נגדיר את  $a(v, k)$  להיות מסלול קל ביותר מ- $s$  ל- $v$  עם  $k$  קשתות לכל היותר, ונחשב:

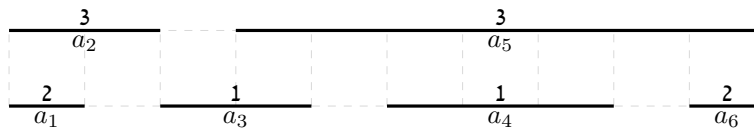
$$\begin{aligned} \forall v \neq s, 1 \leq k \leq n-1 \quad & a(v, k) = \min_{uv \in E} a(u, k-1) + w(uv) \\ \forall u \neq s \quad & a(u, 0) = \infty \\ & a(s, 0) = 0 \end{aligned}$$

**טענה 2.** אם  $G$  אין מעגלים שליליים אז לכל  $v$ ,  $a(v, n-1)$  הוא משקל המסלול הקל ביותר מ- $s$  ל- $v$ .

**הוכחת נכונות:** כתרגיל.

## גרף החישוב

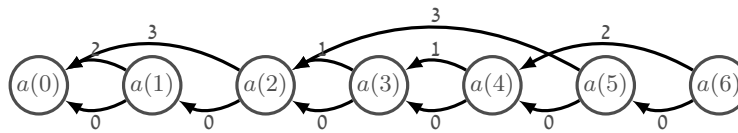
בהינתן נוסחת נסיגה,  $f$ , נסתכל על גרף החישוב שלה,  $G_f$  זהו גרף מכוון שבו כל צומת מתאימה למצב (ערך פרמטרים מסוים לנוסחה) וקיימת קשת ממצב  $s_i$  למצב  $s_j$  אם"מ לצורך חישוב מצב  $s_i$  יש צורך לחשב את מצב  $s_j$ . למשל עבור הקלט הבא לבעיית האינטרוולים:



ונוסחת הנסיגה

$$\alpha(i) = \max \begin{cases} w(i) + \alpha(p(i)) \\ 0 + \alpha(i-1) \end{cases}$$

גרף החישוב יראה כך (ניתן אף לשים משקלים מתאימים על הקשתות):



מה נדרוש מגרף החישוב ?

1. חסר מעגלים

2. לא גדול מדי

3. ניתן לחשב את הערכים של הבורות

דוגמה נוספת, כיצד יראה גרף החישוב עבור נוסחת הנסיגה של מסלולים קלים ביותר והקלט הבא:

