

הרצאה 9

תכנון דינאמי

קבוצה בלתי תלויה של אינטרוולים עם משקל מקסימלי

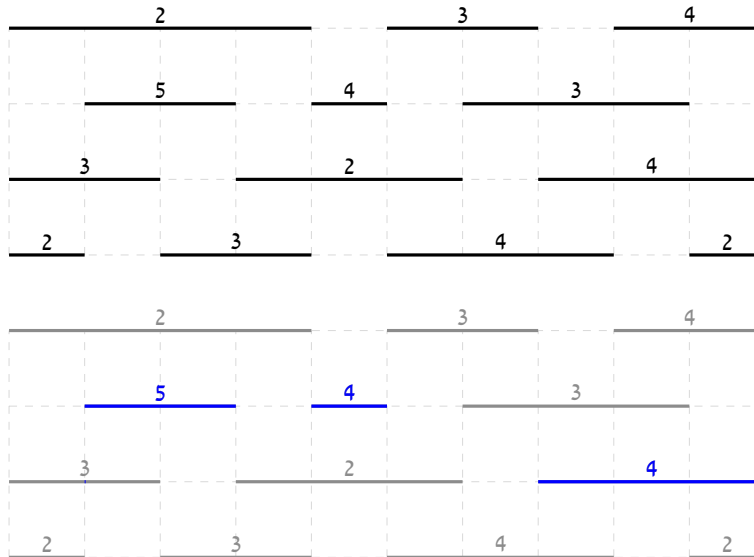
נתונים n אינטרוולים $A = (a_1, \dots, a_n)$ לכל אינטרוול זמן התחלה $s(a_i)$, זמן סיום $e(a_i) > s(a_i)$ ומשקל $w(a_i)$. תת קבוצה $I \subseteq A$ של אינטרוולים נקראת בלתי תלויה אם לכל $a_i, a_j \in I$ אחד מהשניים מתקיים:

$$1. s(a_j) > e(a_i)$$

$$2. s(a_i) > e(a_j)$$

רוצים למצוא קבוצה בלתי תלויה של אינטרוולים עם משקל מקסימלי.

דוגמה: קלט לבעיה וקבוצה בלתי תלויה במשקל 13.



אלגוריתם: נסתכל על קבוצת האינטרוולים ממוינת בסדר לא יורד של זמני הסיום $A = (a_1, \dots, a_n)$ ונסמן $A_i = (a_1, \dots, a_i)$. נגדיר

$$p(i) = \max \begin{cases} \max\{j : e(a_j) < s(a_i)\} \\ 0 \end{cases}$$

כלומר $p(i)$ הוא האינדקס המקסימלי של אינטרוול a_j שמסתיים לפני שהאינטרוול a_i מתחיל או 0 אם לא קיים כזה. נגדיר את $O(i)$ להיות המשקל של תת קבוצה בלתי תלויה של A_i עם משקל מקסימלי, אז $O(n)$ הוא הערך אותו אנחנו מחפשים.

טענה 1.

$$O(i) = \max \begin{cases} w(i) + O(p(i)) \\ O(i-1) \end{cases}$$

כמו כן מתקיים $O(0) = 0$.

הוכחה. באינדוקציה על i .

בסיס: עבור $i = 0$ טריוויאלי.

עבור $i + 1$ נקבע פתרון אופטימלי OPT ונסמן $OPT \cap A_i$.

אם $a_{i+1} \in OPT$ אז OPT לא יכול להכיל אף אינטרוול $a_{p(i)+1}, \dots, a_{i+1}$ לפי הנחת האינדוקציה

$$O(p(i+1)) \geq OPT(p(i+1))$$

ולכן הטענה מתקיימת כי

$$O(p(i+1)) + w(a_{i+1}) \geq OPT(p(i+1)) + w(a_{i+1})$$

מצד שני, אם $a_{i+1} \notin OPT$ אז לפי ההנחה

$$O(i) \geq OPT(i)$$

□

והטענה מתקיימת.

חישוב יעיל של O

כיצד נחשב את O ביעילות? נשים לב שאם מחשבים את ערכי O מ-1 עד n ושומרים את הערכים (למשל במערך) אז חישוב של כל ערך לוקח $O(1)$ זמן. זמן הריצה של האלגוריתם:

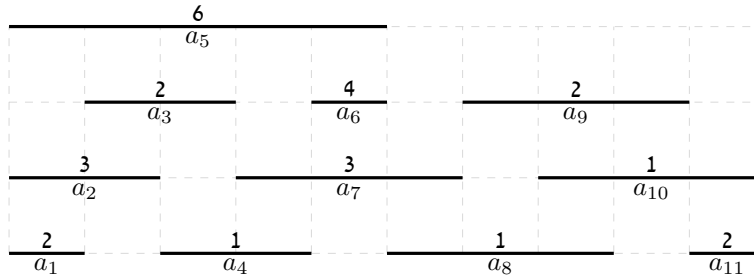
1. מיון - $O(n \log n)$

2. חישוב p - $O(n \log n)$ (חיפוש בינארי לכל i)

3. חישוב O - $O(n)$

סך הכל $O(n \log n)$

דוגמת הרצה:



נחשב:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p	0	0	0	1	2	0	4	3	6	7	7	9
O	0	2	3	5	5	6	9	9	10	11	11	13

נמצא את הקבוצה עצמה:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p	0	0	0	1	2	0	4	3	6	7	7	9
O	0	2	3	5	5	6	9	9	10	11	11	13

מה יקרה אם לכל תא במערך נזכור גם את הקבוצה שמתאימה לערך התא?

מסלולים קלים ביותר