הרצאה 3

DFS

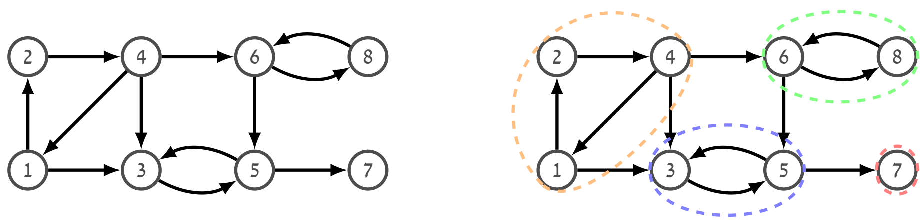
רכיבים קשירים היטב, צמתי הפרדה, רכיבים אי פריקים

רכיבים קשירים היטב

בהינתן גרף מכוון, $G = (V, E)$ נגדיר את היחס הבא: $R_{\mathcal{C}} = \{(u, v) : u \rightsquigarrow v \wedge v \rightsquigarrow u\}$, כלומר צמתים u ו-v ביחס אם קיים מסלול מ-u ל-v וקיים מסלול מ-v ל-u.
תזכורת: יחס, R, הוא יחס שקילות מעל $A \times A$ אם:

1. רפלקסיביות - לכל $a \in A$ מתקיים ש-$(a, a) \in R$.
2. סימטריות - $(a, b) \in R \implies (b, a) \in R$
3. טרנזיטיביות - $(a, b) \in R, (b, c) \in R \implies (a, c) \in R$

נשים לב ש-$R_{\mathcal{C}}$ הוא יחס שקילות ולכן הוא מגדיר מחלקות שקילות. למחלקות שקילות אלו נקרא קבוצת הרכיבים קשירים היטב (רק"ה) של G.
דוגמה:

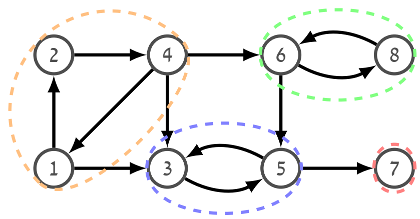


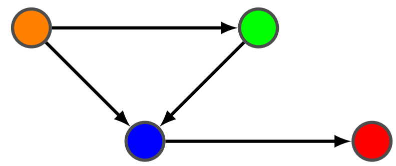
טענה 1. אם שני צמתים, u ו-v שייכים לאותו הרק"ה ובנוסף מתקיים ש-$v \rightsquigarrow w \rightsquigarrow u$ אז גם w שייך לאותו הרק"ה.

הוכחה. מספיק להראות ש-$u \rightsquigarrow w$ וזה נכון כיוון ש-$v \rightsquigarrow w$ (נתון) ו-$u \rightsquigarrow v$ (באותו הרק"ה). $\square$

נסמן את קבוצת הרק"ה של גרף ב-$\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_k\}$, אז לכל $i \neq j$ מתקיים $C_i \cap C_j = \emptyset$ וגם $\bigcup_{i=1}^{k} C_i = V$ (יחס שקילות). גרף הרק"ה של G יסומן ב-$G_{scc} = (\mathcal{C}, E_{scc})$ כאשר $E_{scc} = \{(C_i, C_j) : \exists\, (u, v) \in E, u \in C_i \wedge v \in C_j\}$. ניתן לחשוב על גרף זה כגרף המתקבל על ידי כיווץ הרק"ה של G וביטול קשתות מקבילות.

דוגמה:





אבחנה 1. גרף הרק"ה חסר מעגלים.

הוכחה. אם קיים מעגל אז קיבלנו סתירה להגדרה של הגרף. □

שאלה: איך נראה גרף הרק"ה של רשת כבישים? כיצד נראה גרף הרק"ה של ויקיפדיה? של דפי האינטרנט?
מטרה: בהינתן גרף מכוון נרצה למצוא את גרף הרק"ה שלו. פלט האלגוריתם צריך להיות מיפוי של כל צומת לרכיב קשיר היטב שמכיל אותה (מספר בין 1 ל-k).
נשים לב שבהינתן מיפוי כנ"ל ניתן לבנות את גרף הרק"ה על ידי מעבר בודד על קשתות הגרף המקורי.
עבור קבוצת צמתים $C \subseteq V$ נרחיב את זמן הסיום של אלגוריתם DFS לקבוצת צמתים כך: $f(C) = \max_{v \in C} f(v)$. כלומר זמן הסיום המאוחר ביותר של צומת בקבוצה.

טענה 2. לכל גרף ולכל ריצת DFS הצומת הראשון שמתגלה בכל רק"ה הוא אב קדמון של כל שאר הצמתים באותו הרק"ה ביער ה-DFS.

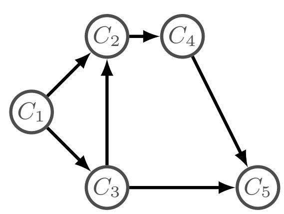
הוכחה. נסתכל על רק"ה, C, ועל הצומת הראשון שמתגלה בו, v. מכיוון ש-C רק"ה אז בזמן גילוי v קיים מסלול לבן מ-v לכל צומת אחר ברק"ה וההוכחה נובעת ישירות ממשפט המסלול הלבן. □

הטענה הבאה מתייחסת לגרף רק"ה.

טענה 3. אם $(C_i, C_j) \in E_{scc}$ אז לכל ריצת DFS על הגרף המקורי G מתקיים ש-$f(C_i) > f(C_j)$.

הוכחה. נפריד לשני מקרים:
מקרה ראשון: מבקרים ב-C_i לפני שמבקרים ב-C_j. אז קיים מסלול לבן מהצומת הראשון שמתגלה ב-C_i לכל שאר הצמתים ב-C_i וגם ב-C_j ולפי משפט המסלול הלבן צומת זה יהיה אב קדמון של כל הצמתים הנ"ל ולכן יהיה עם זמן סיום המאוחר ביותר מבניהם.
מקרה שני: מבקרים בצומת מ-C_j לפני שמבקרים בצומת מ-C_i. אז מכיוון שגרף הרק"ה חסר מעגלים אין מסלול מצומת ב-C_j לצומת ב-C_i. ולכן זמן הסיום של הצומת הראשון שמתגלה ב-C_j יהיה מוקדם יותר מזמן הגילוי (ולכן גם הסיום) של כל צומת ב-C_i. מצד שני, בזמן גילוי הצומת הראשון ב-C_j קיים מסלול לבן לכל שאר הצמתים ב-C_j ולכן הצומת הראשון יהיה אב קדמון של כל הצמתים ב-C_j וזמן הסיום שלו יהיה המאוחר ביותר מבניהם. □

דיון: נניח שעבור גרף G גרף הרק"ה, G_{scc}, נראה כך:



כעת, נניח שהרצנו DFS על G. לאיזה רק"ה שייך הצומת עם זמן הסיום המקסימלי? מה יקרה אם נבחר בו בתור הצומת הראשון בהרצת DFS?

הגדרה 1 (גרף משוחלף). הגרף המשוחלף של גרף מכוון, $G = (V, E)$, הוא הגרף המתקבל על ידי הפיכת כיוון הקשתות, כלומר $G^T = (V, E^T)$ כאשר $E^T = \{(u, v) : (v, u) \in E\}$.

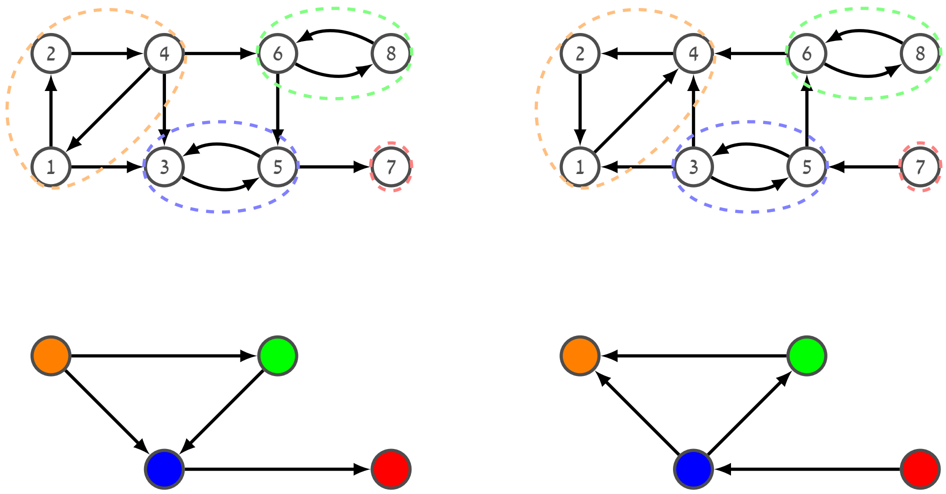
טענה 4. $(G_{scc})^T = (\mathcal{C}, (E_{scc})^T) = (\mathcal{C}, (E^T)_{scc}) = (G^T)_{scc}$.

הוכחה. נשים לב שהפיכת כיווני הקשתות לא משנה את היחס $R_{\mathcal{C}}$. בנוסף על פי הגדרה

$$\begin{aligned}(E_{scc})^T = \quad & \{(C_i, C_j) : (C_j, C_i) \in E_{scc}\} = \\ & \{(C_i, C_j) : \exists\, (v, u) \in E, u \in C_i \wedge v \in C_j\} = \\ & \{(C_i, C_j) : \exists\, (u, v) \in E^T, u \in C_i \wedge v \in C_j\} = \quad (E^T)_{scc}\end{aligned}$$

. □

דוגמה:

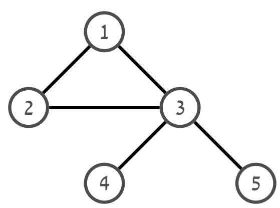


צמתי הפרדה (תלוי סמסטר)

מעתה נעסוק רק בגרפים לא מכוונים וקשירים (בלי הגבלת הכלליות).

הגדרה 2 (צומת הפרדה)**.** צומת v יקרא <u>צומת הפרדה</u> אם $G[V \setminus \{v\}]$ אינו קשיר

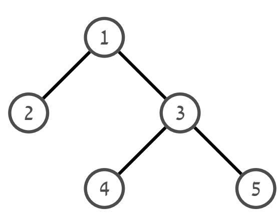
דוגמה: צומת 3 בגרף הבא הוא צומת הפרדה (ורק הוא)



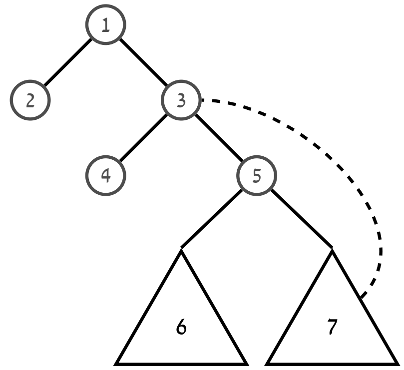
מה המשמעות של צמתי הפרדה ? ברשת כבישים ? רשת תקשורת ? רשת חברתית ?
אלגוריתם טריוויאלי למציאת צמתי הפרדה:

1. עבור כל צומת v
   (א) מחק את v מ-G
   (ב) בדוק אם G קשיר

מה הסיבוכיות ? נרצה לעשות יותר טוב.
שאלה: מי הם צמתי ההפרדה בעצים?



נסתכל על גרף לא מכוון כאיחוד של עץ DFS וקבוצת קשתות אחוריות. מה יכול לקרות כאשר מוציאים קשת שאינו עלה מהגרף ?
למשל מה יקרה אם נסיר את צומת 5 מהגרף הבא ?



קל להשתכנע שתת העץ 7 ישאר מחובר לגרף בעוד שתת העץ 6 יתנתק מהגרף.
בעץ מושרש, T, נסמן ב-T_v את תת העץ ששורשו הוא v. כלומר תת העץ שמכיל את v ואת כל צאצאיו.

הגדרה 3 (קשת עוקפת)**.** נגיד שקשת בגרף מצאצא של u לאב קדמון של u (שניהם לא u עצמו) עוקפת את u

הגדרה 4 (בן מפריד)**.** צומת v עם אבא u יקרא בן מפריד אם לא קיימת ב-T_v קשת שעוקפת את u

טענה 5. צומת u בעץ DFS שאינו עלה הוא מפריד אם ורק אם יש לו בן מפריד. בפרט שורש העץ הוא צומת מפריד אמ"מ הוא אינו עלה (יש לו יותר מבן אחד)

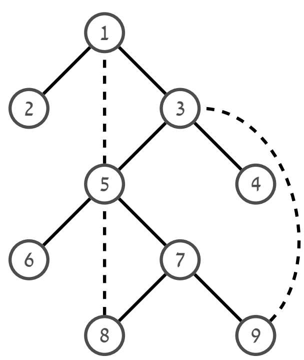
הוכחה. נזכיר שבגרף אין קשתות חוצות, כמו כן נניח ש-u אינו השורש (ניתן להוכיח נכונות לגבי השורש בנפרד)
כיוון ראשון: נניח שמ-T_v אין קשת לאב קדמון של u אזי כל מסלול מהאבא של u ל-T_v חייב לעבור ב-u.
כיוון שני: נניח שלכל בן v של u קיימת קשת עוקפת מ-T_v, wx נשים לב שהוספת הקשת wx סוגרת מעגל שמכיל את הקשת uv ולכן אם נסיר את הקשת uv נקבל שוב עץ, נחזור על הפעולה הזאת לכל בן של u ולבסוף נסיר את u מהעץ. קיבלנו שוב עץ ולכן u אינו צומת הפרדה.

□

הגדרה 5. נגדיר

$$L(u) := \min_{vw\in E: v\in T_u} \alpha(w)$$

כלומר הצומת עם ערך α מינימלי שהוא שכן של T_u.
דוגמה: מה ערכי L בגרף הבא ?



אבחנה 2. צומת v הוא בן מפריד של u אמ"מ $L(v) \geq \alpha(u)$

כלומר, כדי למצוא אלגוריתמית את צמתי ההפרדה כל שעלינו לעשות הוא לחשב את ערכי L. נשים לב שמתקיימת הנוסחה (הרקורסיבית) הבאה:

$$L(u) = \min \begin{cases} \min_{uv\in E} \alpha(v) \\ \min_{v\in C(u)} L(v) \end{cases}$$

נעדכן את המימוש של DFS כך שבריצת האלגוריתם נחשב גם את ערכי L

1. אתחול: ... לכל $v \in V$ מציבים $L(v) \leftarrow \infty$
2. כל עוד המחסנית לא ריקה
   (א) $u \leftarrow S.top()$
   (ב) אם קיימת קשת uv שחוצה את U ($u \in U$)
      i. $U \leftarrow U \cup \{v\}, F \leftarrow F \cup \{uv\}$
      ii. $p(v) \leftarrow u$
      iii. $\alpha(v) \leftarrow i$
      iv. $S.push(v)$
   (ג) אחרת
      i. $L(u) \leftarrow \min_{uv \in E} \alpha(v)$
      ii. $L(p(u)) \leftarrow \min\{L(u), L(p(u))\}$
      iii. $u \leftarrow S.pop()$
      iv. $\beta(u) \leftarrow i$
   (ד) $i \leftarrow i + 1$

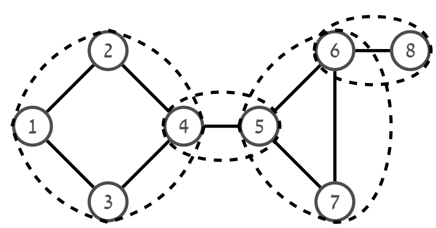
רכיבים אי פריקים

הגדרה 6 (גרף אי פריק). גרף (קשיר) יקרא אי פריק אם אין בו צמתי הפרדה

במילים אחרות, הגרף נשאר קשיר גם אחרי הסרת צומת כלשהו ממנו.

הגדרה 7 (רכיב אי פריק). רכיב אי פריק H של G הוא תת גרף (קשיר) אי פריק מקסימלי של G

דוגמה:



טענה 6. לשני רכיבים אי פריקים H_1 ו-H_2 צומת אחד משותף לכל היותר

הוכחה. נניח בשלילה שישנם שני רכיבים כאלו שחולקים את הצמתים u ו-v. נשים לב שלאחר שהסרה של צומת כלשהו כל רכיב בנפרד נשאר קשיר. מעבר לכך הרכיבים עדיין חולקים צומת משותף ולכן הרכיב שמתקבל מאיחוד שני הרכיבים גם הוא אי פריק. סתירה למקסימליות. □

טענה 7. הרכיבים האי פריקים מהווים חלוקה של קשתות הגרף

הוכחה. קשת היא גרף אי פריק ולכן מוכלת ברכיב אי פריק אחד לפחות. מטענה 6 נובע שגם לכל היותר □

טענה 8. כל מעגל ב-G מוכל ברכיב פריק של G

הוכחה. נובע ישירות מכך שמעגל הוא גרף אי פריק □

נרצה למצוא את הרכיבים האי פריקים של גרף G.

טענה 9. עבור צומת הפרדה u עם בן מפריד v, כל צמתי הרכיב האי פריק שמכיל את uv (פרט ל-u) נמצאים ב-T_v

הוכחה. נשים לב ש-u מפריד את T_v משאר הגרף □

נסמן ב-S את קבוצת הבנים המפרידים אז

מסקנה 1. צמתי הרכיב האי פריק שמכיל את uv הוא $T_v \cup \{v\} \setminus \bigcup_{w \in S: w \neq v} T_w$

נעדכן את המימוש של DFS כך שבריצת האלגוריתם נחשב גם את הרכיבים האי פריקים (נרצה לשמור לכל צומת את מספר הרכיב אליו הוא שייך)

1. אתחול: ... $S' \leftarrow (s)$, $b \leftarrow 0$, לכל צומת $v \in V$ $B(v) \leftarrow -1$
2. כל עוד המחסנית לא ריקה
   (א) $u \leftarrow S.top()$
   (ב) אם קיימת קשת uv שחוצה את U ($u \in U$)
      i. ...
      ii. $S'.push(v)$
   (ג) אחרת
      i. $v \leftarrow S.pop()$
      ii. $\beta(v) \leftarrow i$
      iii. אם v בן מפריד של u
         א'. $w \leftarrow S'.pop()$
         ב'. כל עוד $w \neq v$
            - $B(w) = b$
            - $w \leftarrow S'.pop()$
         ג'. $b \leftarrow b + 1$
   (ד) $i \leftarrow i + 1$

עץ רכיבים אי פריקים

עבור גרף G נגדיר את גרף הרכיבים האי פריקים, $B(G)$, כגרף הדו צדדי על קבוצות הצמתים B ו-S כאשר ב-B צומת עבור כל רכיב אי פריק ב-G וב-S צומת עבור כל צומת הפרדה ב-G. בגרף הנ"ל תהיה קשת bs, $b \in B$, $s \in S$, אמ"מ הרכיב שמתאים ל-b מכיל את הצומת s.
נשים לב שכל מסלול ב-G מתאים למסלול (יחיד) ב-$B(G)$ ולכן $B(G)$ קשיר. כמו כן נשים לב שב-$B(G)$ לא קיימים מעגלים כי זה יגרור שקיים מעגל ב-G שאינו שעובר ביותר מרכיב אי פריק אחד.

מסקנה 2. $B(G)$ הוא עץ