הרצאה 5

אלגוריתמים חמדניים

הקדמה

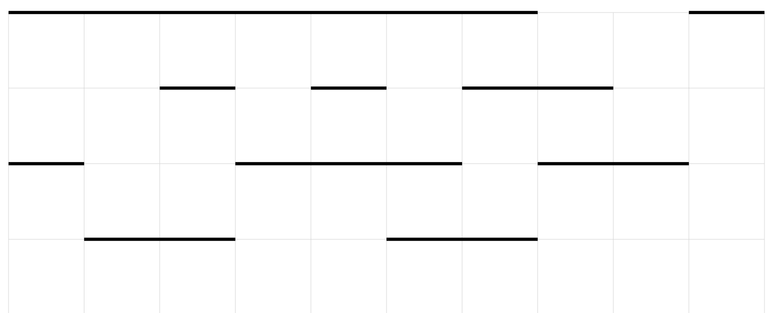
לעיתים קרובות אפשר לייצג בעיות אופטימזציה כקבוצה של אלמנטים כאשר פתרון חוקי הוא תת קבוצה של אלמנטים שמקיימת תכונות מסויימות. למשל, עץ פורש מינימלי. בדרך כלל יש פונקציית מחיר / רווח לכל תת קבוצה והמטרה שלנו היא למזער / למקסם את הערך הזה.

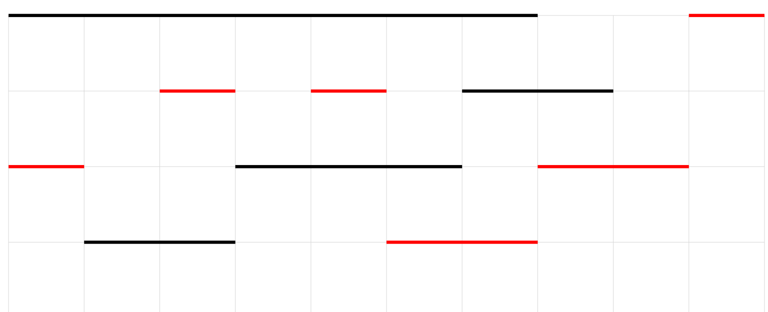
אלגוריתם חמדן, באופן לא פורמלי, הוא כזה שבונה פתרון (תת קבוצה של אלמנטים) באופן איטרטיבי ובכל שלב מוסיף / מסיר מהקבוצה

שיבוץ אינטרוולים

נתונים n אינטרוולים $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, נסמן ב-$s(a_i)$ את זמן ההתחלה של האינטרוול a_i וב-$e(a_i)$ את זמן הסיום שלו. לכל אינטרוול מתקיים ש-$s(a_i), e(a_i) \in \mathbb{R}_+$ וכן $s(a_i) < e(a_i)$ רוצים למצוא תת קבוצה בגודל מקסימלי $I \subseteq A$ כך שהאינטרוולים ב-I זרים בזוגות, כלומר לכל $a, b \in I$, אחד התנאים מתקיים: $e(a) < s(b)$ או ש-$e(b) < s(a)$.

דוגמה:





אלגוריתם חמדן:

1. אתחול: $I \leftarrow \emptyset$, $\bar{e} \leftarrow 0$
2. עבור כל אינטרוול a בסדר לא יורד של ערכי $e(a)$:
   (א) אם $s(a) \geq \bar{e}$
      i. $I \leftarrow I \cup \{a\}$
      ii. $\bar{e} \leftarrow e(a)$

לפני שנוכיח נכונות נראה דוגמאות לגישות חמדניות שלא עובדות:

לבחור את האינטרוול עם זמן התחלה הכי מוקדם

לבחור את האינטרוול הכי קצר

לבחור את האינטרוול שנחתך עם הכי מעט אינטרוולים

הוכחת נכונות: נוכיח את הטענה הבאה, בכל צעד של האלגוריתם קיימת קבוצה בגודל מקסימלי, I' כך ש-I רישא שלה ביחס למיון ע"פ ערכי e.

בסיס: באתחול טריוויאלי

צעד: נבחן את הקבוצות I ו-I' בצעד ה-$i+1$. לפי הנחת האינדוקציה הקבוצות, ממוינות על פי ערכי e נראות כך:

$$\begin{aligned} I &= \{\alpha_1, \dots, \alpha_i, \alpha_{i+1}\} \\ I' &= \{\alpha_1, \dots, \alpha_i, \beta_1, \dots, \beta_k\} \end{aligned}$$

נסתכל על הפתרון

$$I'' = \{\alpha_1, \dots, \alpha_i, \boldsymbol{\alpha_{i+1}}, \dots, \beta_k\}$$

מכיוון ש-I' פתרון חוקי האינטרוולים שם זרים בזוגות ולכן גם האינטרוולים ב-I'' למעט אולי α_{i+1}. מכיוון שהאלגוריתם בונה פתרון חוקי אז אנחנו יודעים ש-α_{i+1} זר ל-$\alpha_1, \dots, \alpha_i$ וכן $e(\alpha_{i+1}) \le e(\beta_1) \le s(beta_2) \le, \dots, \le s(\beta_k)$ ולכן I'' פתרון בגודל מקסימלי כך ש-I רישא שלו.