הרצאה 2

חיפוש לעומק - Depth First Search (DFS)

תזכורת

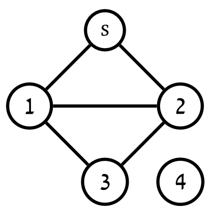
בהינתן גרף G וצומת s רוצים למצוא עץ T שפורש את כל הצמתים שישיגים מ-s.

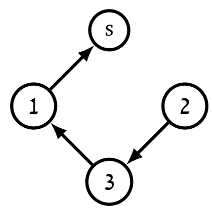
- אלגוריתם כללי
- BFS
- מימוש BFS באמצעות תור

DFS

1. אתחול: $F \leftarrow \emptyset$, $U \leftarrow \{s\}$, לכל $v \in V$ מציבים $\alpha(v) \leftarrow -1$, $p(v) \leftarrow nil$, $\alpha(s) \leftarrow 0$, $i \leftarrow 0$
2. כל עוד ישנה קשת uv שחוצה את U ($u \in U$) בחר קשת עם $\alpha(u)$ מקסימלי
   (א) $U \leftarrow U \cup \{v\}, F \leftarrow F \cup \{uv\}$
   (ב) $p(v) \leftarrow u$
   (ג) $\alpha(v) \leftarrow i$
   (ד) $i \leftarrow i + 1$

דוגמה





מימוש על ידי מחסנית

1. אתחול:
   (א) $U \leftarrow \{s\}$
   (ב) $F \leftarrow \emptyset$
   (ג) לכל $v \in V$ מציבים $p(v) \leftarrow nil, \alpha(v) \leftarrow -1$
   (ד) $\alpha(s) \leftarrow 0$,
   (ה) $i \leftarrow 0$
   (ו) $S \leftarrow (s)$
2. כל עוד המחסנית לא ריקה
   (א) $u \leftarrow S.top()$
   (ב) אם קיימת קשת uv שחוצה את U ($u \in U$)
      i. $U \leftarrow U \cup \{v\}, F \leftarrow F \cup \{uv\}$
      ii. $p(v) \leftarrow u$
      iii. $\alpha(v) \leftarrow i$
      iv. $S.push(v)$
   (ג) אחרת
      i. $u \leftarrow S.pop()$
      ii. $\beta(u) = i$
   (ד) $i \leftarrow i + 1$

טענה 1. בזמן ריצת האלגוריתם, כל הצמתים הגבוליים נמצאים במחסנית

הוכחה. באינדוקציה על צעד האלגוריתם □

טענה 2. המחסנית מונוטונית עולה ביחס ל-α

הוכחה. באינדוקציה על צעד האלגוריתם $\square$

מסקנה 1. זהו מימוש של DFS

הערה: מכיוון שזמני הגילוי של הצמתים הם יחודיים (בשונה מהמרחקים שלהם למשל) אזי המימוש באמצעות מחסנית שקול לכל מימוש אחר של DFS (הדבר אינו נכון לגבי מימוש של BFS באמצעות תור). לכן, כל טענה לגבי המימוש באמצעות מחסנית תקפה עבור DFS באופן כללי.

תכונות

טענה 3. בזמן ריצת DFS, הצמתים במחסנית, $v,\dots,s$ הם המסלול ב-T מ-s ל-v

הוכחה. באינדוקציה על צעד האלגוריתם $\square$

מסקנה 2. עבור שני צמתים u ו-v, v צאצא של u ב-T אם ורק אם u נמצא במחסנית כאשר v מוכנס אליה.

הוכחה. כיוון ראשון מיידי מטענה 3.
כיוון שני גם מטענה 3 כאשר האבחנה היא שבעץ, צומת u הוא אב קדמון של v אם ורק אם הוא נמצא על המסלול מ-s ל-v $\square$

הגדרה 1 (צומת לבן)**.** בזמן ריצת האלגוריתם, צומת v יקרא לבן אם $v \notin U$

למה 1 (המסלול הלבן)**.** צומת v צאצא של צומת u ב-T אמ"מ כאשר u מוכנס למחסנית קיים ממנו מסלול של צמתים לבנים לצומת v

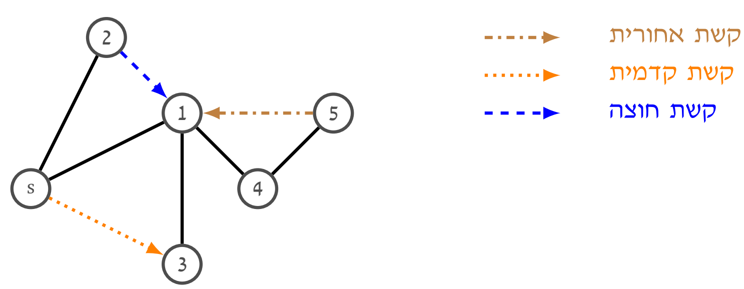
הוכחה. כיוון 'אם' באינדוקציה על אורך המסלול, כאשר האבחנה היא שכאשר הצומת הראשון במסלול מוכנס למחסנית, u עדיין שם.
כיוון 'רק אם' מניחים בשלילה וסותרים את טענה 3 $\square$

סיווג קשתות

בהינתן גרף מכוון ותת עץ (מושרש) שלו מסווגים את קשתות הגרף ל-4 סוגים:

1. קשתות עץ
2. קשתות קדמיות
3. קשתות אחוריות
4. קשתות חוצות

הערה: בגרף לא מכוון נתייחס לקשתות קדמיות וקשתות אחוריות כקשתות אחוריות.



טענה 4. בגרף לא מכוון ועץ שהוא פלט של DFS אין קשתות חוצות

הוכחה. באמצעות למת המסלול הלבן $\square$

יער DFS

נכליל את אלגוריתם ה-DFS. הקלט הוא גרף (מכוון או לא) הפלט הוא יער של עצים מושרשים כאשר כל עץ מקיים את כל התכונות עליהן דיברנו עד כה.

1. אתחול: $F \leftarrow \emptyset, U \leftarrow \emptyset$, לכל $v \in V$ מציבים $\alpha(v) \leftarrow -1$, $p(v) \leftarrow nil$, $i \leftarrow 0$
2. כל עוד $U \neq V$
   (א) בחר צומת $s \in V \setminus U$
   (ב) $U \leftarrow U \cup \{s\}$, $\alpha(s) \leftarrow i$
   (ג) כל עוד ישנה קשת uv שחוצה את U ($u \in U$) בחר קשת עם $\alpha(u)$ מקסימלי
      i. $U \leftarrow U \cup \{v\}, F \leftarrow F \cup \{uv\}$
      ii. $p(v) \leftarrow u$
      iii. $\alpha(v) \leftarrow i$
      iv. $i \leftarrow i + 1$

נראה בהמשך שזהו בדרך כלל האלגוריתם שנרצה להריץ.

סיכום

DFS משמש כאבן בניין לאלגוריתמים יותר מורכבים (רכיבים בלתי פריקים, רכיבים קשירים היטבת מיון טופולוגי).

דוגמה 1 (מיון טופולוגי). הרץ DFS, פלוט את הצמתים לפי סדר הוצאתם מהמחסנית.