

הרצאה 10

תכנון דינאמי

אופטימיזציה של כפל מטריצות

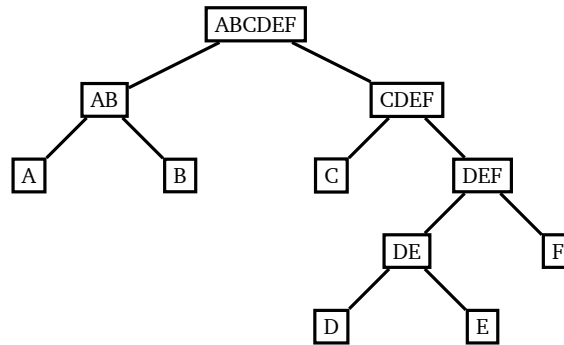
תיזכורת: כפל נאיבי של מטריצה בגודל $a \times b$ עם מטריצה בגודל $b \times c$ לוקח $O(a \cdot b \cdot c)$ פעולות. התוצאה של המכפלה היא מטריצה בגודל $a \times c$.

כאשר כופלים n מטריצות, A_1, \dots, A_n מגדלים $x_i \times y_i$ בהתאמה, אז תוצאת המכפלה תהיה מטריצה בגודל $x_1 \times y_n$. מספר הפעולות שיש לבצע תלוי בסדר בו נבחר לבצע את המכפלה.
דוגמה: כמה פעולות נבצע כדי לבצע את המכפלה ABC ?

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{100} \end{pmatrix} (b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_{100}) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{100} \end{pmatrix}$$

אם נבצע את המכפלה לפי הסדר משמאל לימין אז נזדקק ל- $100 \cdot 1 \cdot 100 = 10,000$ פעולות עבור הכפל של AB ו- $100 \cdot 1 \cdot 100 = 10,000$ פעולות נוספות עבור הכפל של $(AB)C$. אם נחשב את המכפלה $A(BC)$ אז נזדקק לסדר גודל של 200 פעולות בלבד !!!

בעיה: בהינתן n מטריצות, A_1, \dots, A_n מגדלים $x_i \times y_i$ בהתאמה, רוצים לחשב סדר מכפלות שדורש מינימום פעולות. **ייצוג סדר מכפלות** ייצוג טבעי לסדר הפעולות הוא בעזרת עץ, למשל העץ הבא מתאים לחישוב $(AB)(C((DE)F))$:



אלגוריתם: עבור כל $1 \leq i \leq j \leq n$ נגדיר את $\alpha(i, j)$ להיות מספר הפעולות המינימלי שצריך כדי לבצע את המכפלה $A_i \cdot A_{i+1} \cdot \dots \cdot A_j$ אז מתקיים ש:

$$\alpha(i, j) = \min_{i \leq k \leq j} \alpha(i, k) + \alpha(k+1, j) + x_i \cdot y_k \cdot y_j$$

בנוסף מתקיים ש:

$$\forall 1 \leq i \leq n \quad \alpha(i, i) = 0$$

סיבוכיות: אם מחשבים את ערכי נוסחת הנסיגה על ידי שימוש בטבלה אז נדרש לחשב $O(n^2)$ ערכים. זמן החישוב של כל ערך הוא $O(n)$ ולכן בסך הכל זמן ריצת האלגוריתם הוא: $O(n^3)$.

התאמת מחרוזות