הרצאה 11

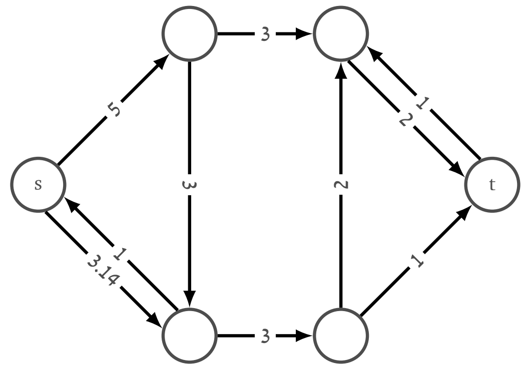
רשתות זרימה

אלגוריתם פורד פלקרסון

הקדמה

הגדרה 1 (רשת זרימה)**.** רשת זרימה היא גרף מכוון, $G=(V,E)$ עם קיבולים על הקשתות, $c:E\to\mathbb{R}_+$ צומת מקור, $s\in V$ וצומת בור, $t\in V$.

דוגמה:



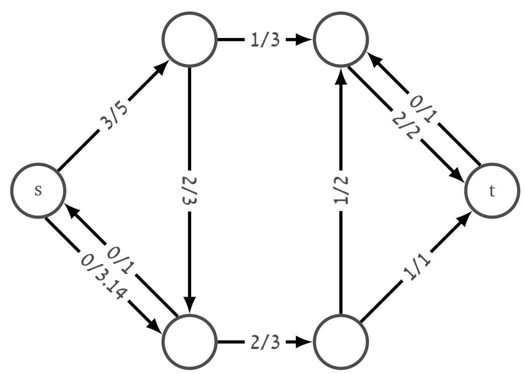
נסמן ב-$\delta(u):=\{uv:uv\in E\}$ את אוסף הקשתות שיוצאות מצומת u וב-$\rho(v):=\{uv:uv\in E\}$ את אוסף הקשתות שנכנסות לצומת v.

בהינתן פונקציה, $f:E\to\mathbb{R}_+$ נגדיר: $\forall v\in V\ f(v):=\sum_{e\in\delta(v)}f(e)-\sum_{e\in\rho(v)}f(e)$

הגדרה 2 (זרימה)**.** בהינתן רשת זרימה, (G,s,t,c) זרימה היא פונקציה, $f:E\to\mathbb{R}_+$ אשר מקיימת

1. **חוק הקשת** $\forall\ e\in E\quad 0\le f(e)\le c(e)$
2. **חוק הצומת** $\forall\ v\in V\setminus s,t\quad f(v)=0$

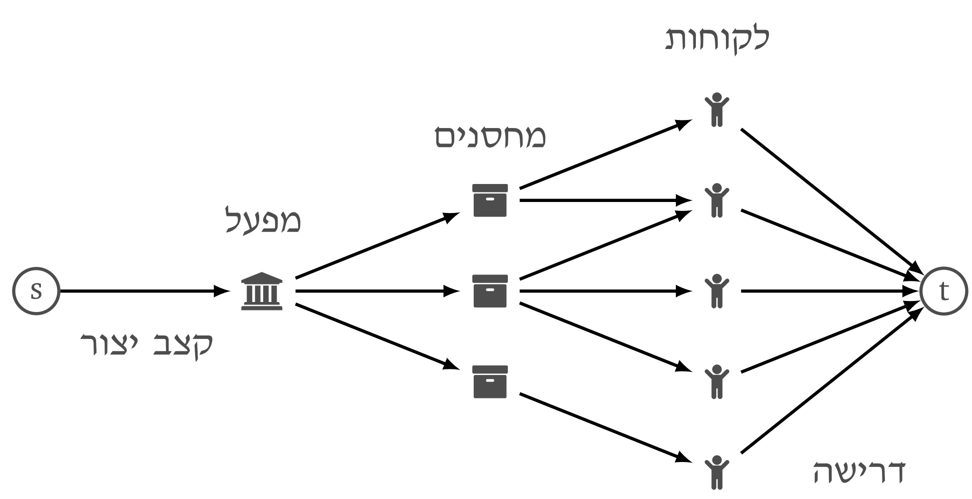
דוגמה:



נסמן ב-$|f|:=f(s)$ את ערך הזרימה. בדוגמה הקודמת מתקיים ש-$|f|=3$

מטרה: למצוא פונקציית זרימה חוקית עם ערך מקסימלי.

לבעיית זרימת המקסימום יישומים רבים בבעיות אופטימיזציה, למשל, רוצים לדעת איך להפיץ סחורה מהמפעל למחסנים ומשם ללקוחות.



חתך-st

נרחיב את הסימונים δ, ρ, f ו-c עבור קבוצת צמתים, כלומר

$$\delta(S) := \{uv \in E : u \in S \wedge v \notin S\}$$
$$\rho(S) := \{uv \in E : u \notin S \wedge v \in S\}$$
$$f(S) := \sum_{e \in \delta(S)} f(e) - \sum_{e \in \rho(S)} f(e)$$
$$c(S) := \sum_{e \in \delta(S)} c(e)$$

ונשים לב שלכל $S \subseteq V$ מתקיים

אבחנה 1. $f(S) = \sum_{v \in S} f(v)$

הגדרה 3 (חתך-st)**.** חתך-st הוא תת קבוצה של צמתים שמכילה את s ואינה מכילה את t.

למה 1. לכל חתך-st, S, מתקיים $f(S) = |f|$.

הוכחה. נשים לב שלכל צומת, $v \in S$, שאינו s מתקיים $f(v) = 0$ ובנוסף, לפי ההגדרה, מתקיים ש-$|f| = f(s)$. □

בפרט מתקיים ש:

$$|f| = f(V \setminus \{t\}) = -f(t)$$

טענה 1. לכל חתך-st, S, מתקיים $|f| \leq c(S)$

הוכחה. לפי למה 1 ולפי הגדרת פונקציית זרימה מתקיים ש-$|f| = f(S) \leq c(S)$. □

הטענה האחרונה מאפשרת לנו למצוא חסם עליון על זרימת המקסימום. בהמשך נראה כי זהו חסם עליון הדוק.

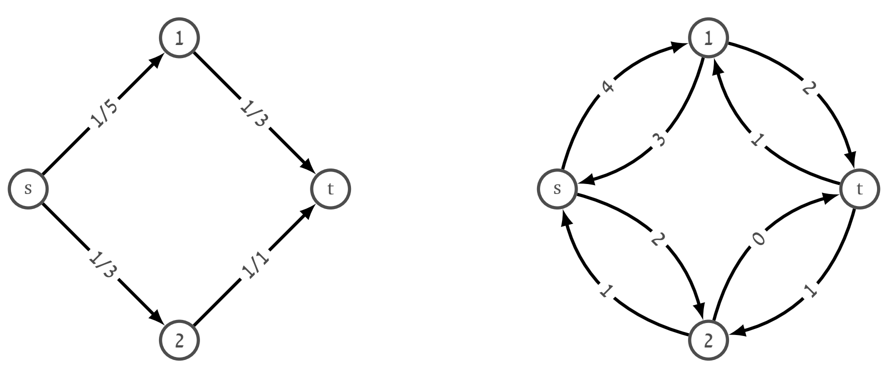
רשת שיורית

הנחה: נניח בלי הגבלת הכלליות (למה?) שברשת הזרימה (המקורית) אין קשתות אנטי-מקבילות.

הגדרה 4 (רשת שיורית)**.** בהינתן רשת זרימה, $N = (G, s, t, c)$ וזרימה, f, הרשת השיורית היא $N_f = (G_f, s, t, c_f)$ כאשר אם $G = (V, E)$ אז

$$G_f = (V, E_f = E \cup \overline{E})$$
$$\overline{E} = \{\overline{e} = vu : e = uv \in E\}$$
$$c_f(\overline{e}) := f(e)$$
$$c_f(e) := c(e) - f(e)$$

דוגמה:



נשים לב שאם g זרימה ברשת שיורית N_f אז מתקיים:

$$\begin{aligned} g(v) = \\ &\sum_{vu\in E_f} g(vu) - \sum_{uv\in E_f} g(uv) = \\ &\sum_{vu\in E} g(vu) + \sum_{uv\in E} g(vu) - \sum_{uv\in E} g(uv) - \sum_{vu\in E} g(uv) = \\ &\sum_{vu\in E} (g(vu) - g(uv)) - \sum_{uv\in E} (g(uv) - g(vu)) \end{aligned}$$

הגדרה 5 (חיבור זרימות)**.** אם f זרימה ב- N ו-g זרימה ב- N_f נגדיר את הסכום שלהן להיות:

$$\forall e\in E:\ \ h(e) = f(e) + g(e) - g(\overline{e})$$

למה 2. h היא פונקציית זרימה ב-N ומתקיים $|h| = |f| + |g|$.

הוכחה.
חוק הקשת:
$$c(e) \geq f(e) + c(e) - f(e) - g(\overline{e}) \geq f(e) + g(e) - g(\overline{e}) \geq f(e) + g(e) - f(e) \geq 0$$
חוק הצומת:

$$\begin{aligned} h(v) = \sum_{vu\in E} h(vu) - \sum_{uv\in E} h(uv) = \\ &\sum_{vu\in E} f(vu) + g(vu) - g(uv) - \sum_{uv\in E} f(uv) + g(uv) - g(vu) = \\ &\sum_{vu\in E} f(vu) - \sum_{uv\in E} f(uv) + \\ &\sum_{vu\in E} (g(vu) - g(uv)) - \sum_{uv\in E} (g(uv) - g(vu)) = \\ &0 + 0 \end{aligned}$$

ערך הזרימה:

$$\begin{aligned} h(s) = \sum_{su\in E} h(su) - \sum_{us\in E} h(us) = \\ &\sum_{su\in E} f(su) + g(su) - g(us) - \sum_{us\in E} f(us) + g(us) - g(su) = \\ &\sum_{su\in E} f(su) - \sum_{us\in E} f(us) + \\ &\sum_{su\in E} (g(su) - g(us)) - \sum_{us\in E} (g(us) - g(su)) = \\ &f(s) + g(s) \end{aligned}$$

□

למה 3. אם P מסלול (פשוט) מ-s ל-t ברשת זרימה (G,s,t,c) ו-ε הקיבול המינימלי של קשת ב-P אז הפונקציה:

$$f_P(e) = \begin{cases} \varepsilon & \text{if } e\in P \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

היא פונקציית זרימה.

הוכחה. חוק הקשת מתקיים לפי ההגדרה של f ושל ε. עבור צומת פנימי במסלול, v, מתקיים ש-$f(v) = f(vw) - f(uv) = 0$ כאשר u ו-w הצמתים לפני ואחרי v במסלול בהתאמה. □

נסמן ב- $G_f^+ = (V, E_f^+)$ כאשר $E_f^+ = \{e\in E_f : c(e) > 0\}$.

הגדרה 6 (מסלול שיפור)**.** בהינתן רשת זרימה, (G,s,t,c), וזרימה, f, מסלול שיפור הוא מסלול (פשוט) מ-s ל-t ב-G_f^+.

למה 4. אם P הוא מסלול שיפור ביחס לרשת זרימה (G,s,t,c) וזרימה f אז $h = f + f_P$ זרימה חוקית ו-$|h| = |f| + \varepsilon$.

הוכחה. נובע ישירות מלמות 2 ו-3. □

חתך מינימום זרימת מקסימום

המשפט המרכזי על רשתות זרימה קובע ש:

משפט 1. תהי f פונקציית זרימה ברשת (G,s,t,c). התנאים הבאים שקולים:

1. f היא זרימת מקסימום.
2. לא קיים מסלול שיפור (ב-G_f^+).
3. קיים חתך-st ברשת שהקיבול שלו שווה ל-$|f|$.

הוכחה.
$1 \Rightarrow 2$
נניח בשלילה שקיים ונקבל סתירה לפי למה 4.
$2 \Rightarrow 3$
נסמן ב-S את קבוצת הצמתים הישיגים מ-s ב-G_f^+. מלמה 1 נובע כי $f(S)=|f|$ ולפי ההגדרה של רשת שיורית נובע כי ב-G מתקיים:

$$\forall e \in \delta(S) \quad f(e)=c(e)$$
$$\forall e \in \rho(S) \quad f(e)=0$$

$3 \Rightarrow 1$
מיידי מטענה 1. □

אלגוריתם פורד פלקרסון

אלגוריתם גנרי למציאת זרימת מקסימום:

1. אתחול: מציבים $f(e) \leftarrow 0$ לכל $e \in E$
2. כל עוד יש מסלול שיפור ברשת השיורית (G_f,s,t,c_f)
   (א) מציבים ב-f את הזרימה המשופרת לפי למת שיפור הזרימה
3. פולטים את f

טענה 2. אם וכאשר האלגוריתם עוצר, פלט האלגוריתם הוא זרימת מקסימום.

הוכחה. מיידית ממשפט 1. □

מסקנה 1. ברשת זרימה בה כל הקיבולים שלמים, קיימת זרימת מקסימום עם ערכים שלמים.

סיבוכיות: בשביל לנתח את הסיבוכיות של האלגוריתם יש לדעת:

1. לאחר כמה איטרציות האלגוריתם עוצר (אם בכלל)
2. מה הסיבוכיות של כל איטרציה

נתמקד בסעיף 1. אם כל הערכים הם שלמים אז ברור שמספר האיטרציות חסום על ידי ערך זרימת המקסימום. אם הערכים רציונליים אפשר להכפיל אותם כך שכל הערכים יהיו שלמים. הדוגמה הבאה מראה שבמקרה הגרוע זהו חסם עליון הדוק.