הרצאה 4

עץ פורש מינימלי

הגדרות ואבחנות

יער - גרף חסר מעגלים

עץ - יער קשיר

חתך - תת קבוצה של צמתים $S \subseteq V$

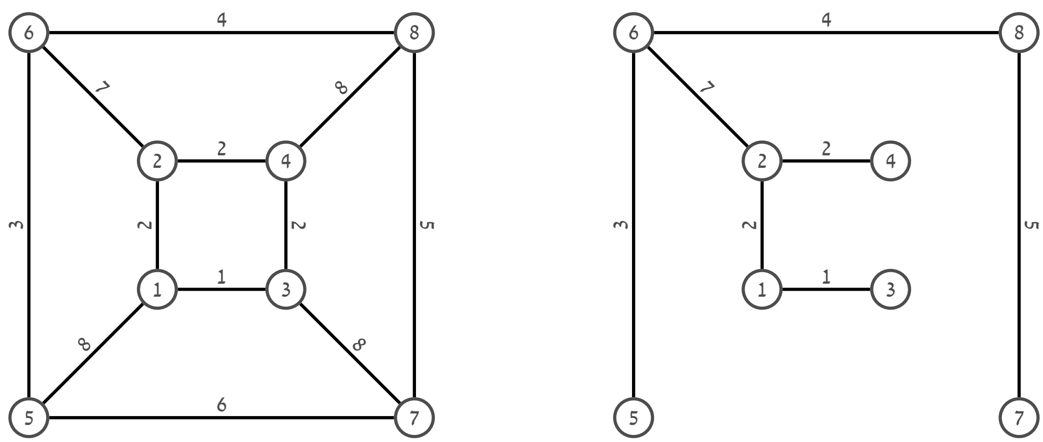
קשת חוצה - קשת uv חוצה חתך S אם $|\{u,v\} \cap S| = 1$

אבחנה 1. הוספת קשת uv לעץ סוגרת מעגל שמכיל את הקשת + המסלול מ-v ל-u בעץ. כעת ניתן להסיר כל קשת מהמעגל הנ"ל ולקבל בחזרה עץ.

אבחנה 2. אם קשת uv נמצאת על מעגל והיא חוצה חתך S אז את S חוצה קשת אחת נוספת (לפחות) ששייכת למעגל.

הגדרה 1 (עץ פורש מינימלי)**.** בהינתן זוג של גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ופונקצית משקל (אי שלילית) $w : E \to \mathbb{R}$ עץ פורש מינימלי הוא כל עץ $T=(V,F)$ שממזער את הערך $\sum_{e\in F} w(e)$.

דוגמה



הכלל הכחול

בחלק זה נראה אלגוריתם גנרי שפועל על פי הכלל הכחול.

הגדרה 2 (קשת קלה)**.** בהינתן חתך, S, ופונקצית משקל, $w : E \to \mathbb{R}$, קשת e שחוצה את S תקרא קלה אם לא קיימת קשת אחרת שחוצה את S, e' שמקיימת $w(e') < w(e)$.

1. אתחול: $B \leftarrow \emptyset$ (קשתות כחולות)
2. כל עוד $T=(V,B)$ אינו קשיר
   (א) בחר חתך לבן, S, וקשת קלה, e, שחוצה אותו
   (ב) $B \leftarrow B \cup \{e\}$

טענה 1. האלגוריתם מחזיר עץ

הוכחה. קשירות נובעת מיידית מהגדרת האלגוריתם. נניח בשלילה שנסגר מעגל. נסתכל על הנקודה בה האלגוריתם צובע את הקשת שסוגרת את המעגל הכחול. לפי אבחנה 2 קיימת קשת כחולה נוספת שחוצה את החתך - סתירה. □

טענה 2. האלגוריתם מחזיר עץ פורש מינימלי

הוכחה. נוכיח באינדוקציה שבכל שלב בריצת האלגוריתם אוסף הקשתות הכחולות מוכל בתוך עץ פורש מינימלי כלשהו:
בסיס: טריוויאלי באתחול
צעד: לפי ההנחה קיים עפ"מ שמכיל את i הקשתות הכחולות הראשונות. נניח שהקשת, e, שהוספנו בשלב ה-$i+1$ לא שייכת לעפ"מ הנ"ל (אחרת סיימנו). נוסיף את e לעפ"מ, סגרנו מעגל. במעגל זה קיימת קשת, $e' \neq e$, שחוצה את S, החתך (הלבן) שגרם להוספת e. לפי הגדרת האלגוריתם $w(e) \leq w(e')$ ולכן ניתן להחליף בין הקשתות הנ"ל ולקבל עפ"מ שמכיל גם את e. □

הכלל האדום

בחלק זה נראה אלגוריתם גנרי שפועל על פי הכלל האדום.

הגדרה 3 (קשת כבדה)**.** בהינתן מעגל, C, ופונקציית משקל, $w : E \to \mathbb{R}$, קשת e במעגל C תקרא כבדה אם לא קיימת קשת אחרת במעגל C, e' שמקיימת $w(e') > w(e)$.

1. אתחול: $R \leftarrow \emptyset$ (קשתות אדומות)
2. כל עוד ב-$T = (V, E \setminus R)$ יש מעגל
   (א) בחר מעגל לבן, C, וקשת כבדה, e, על המעגל
   (ב) $R \leftarrow R \cup \{e\}$

הערה: במקום לצבוע את הקשת באדום ניתן פשוט למחוק אותה מהגרף

טענה 3. האלגוריתם מחזיר עץ

הוכחה. חוסר מעגלים נובע מיידית מהגדרת האלגוריתם. נניח בשלילה שאלגוריתם פוגע בקשירות, כלומר קיים חתך כך שהאלגוריתם צובע באדום את כל הקשתות שחוצות אותו, נסתכל על הקשת האחרונה שנצבעה באדום ועל המעגל הלבן שגרם לה להיבחר לפי אבחנה 2 קיימת קשת לבנה נוספת שחוצה את החתך - סתירה. □

טענה 4. האלגוריתם מחזיר עץ פורש מינימלי

הוכחה. נוכיח באינדוקציה שבכל שלב בריצת האלגוריתם אוסף הקשתות הכחולות מוכל בתוך עץ פורש מינימלי כלשהו:
בסיס: טריוויאלי באתחול
צעד: לפי ההנחה קיים עפ"מ שמכיל את i הקשתות הכחולות הראשונות. נניח שהקשת, e, שהוספנו בשלב ה-$i+1$ לא שייכת לעפ"מ הנ"ל (אחרת סיימנו). נוסיף את e לעפ"מ, סגרנו מעגל. במעגל זה קיימת קשת, $e' \neq e$, שחוצה את S, החתך (הלבן) שגרם להוספת e. לפי הגדרת האלגוריתם $w(e) \leq w(e')$ ולכן ניתן להחליף בין הקשתות הנ"ל ולקבל עפ"מ שמכיל גם את e. □