הרצאה 12

רשתות זרימה

אלגוריתם אדמונדס קרפ, שידוך בגרף דו צדדי, משפט הול

תזכורת

האלגוריתם הגנרי של פורד פלקרסון:

1. אתחול: מציבים $f(e) \leftarrow 0$ לכל $e \in E$
2. כל עוד יש מסלול שיפור ברשת השיורית (G_f, s, t, c_f)
   (א) מציבים ב-f את הזרימה המשופרת לפי למת שיפור הזרימה
3. פולטים את f

ראינו שאלגוריתם זה אינו פולינומי אפילו כאשר כל הקיבולים שלמים (ואף במקרה הכללי הוא אינו עוצר כלל).

אלגוריתם אדמונדס קרפ

מקרה פרטי של אלגוריתם זה הוא האלגוריתם של אדמונדס וקרפ:

1. אתחול: מציבים $f(e) \leftarrow 0$ לכל $e \in E$
2. כל עוד יש מסלול שיפור ברשת השיורית (G_f, s, t, c_f)
   (א) יהי P מסלול קצר ביותר מ-s ל-t.
   (ב) שפר לפי P והצב ב-f את הזרימה המשופרת לפי למת שיפור הזרימה
3. פולטים את f

כעת נראה שאלגוריתם זה הוא פולינומי ללא תלות בפונקציית הקיבול.
נסמן ב-$f_1, f_2 \ldots$ את פונקציית הזרימה שמחשב האלגוריתם בכל איטרציה, וב-$d_{f_i}(v)$ את המרחק של הצומת v מהצומת s ברשת השיורית.

טענה 1. לכל i ולכל v מתקיים ש-$d_{f_i}(v) \leq d_{f_{i+1}}(v)$.

הוכחה. עבור i נתון, נוכיח באינדוקציה על k - המרחק של v מ-s ב-$G_{f_{i+1}}$.
בסיס: עבור $k = 0$ טריוויאלי.
צעד: עבור צומת v במרחק $k+1$ מ-s ומסלול $s = v_0, \ldots, v_k, v_{k+1} = v$ מתקיים (לפי הנחת האינדוקציה) ש:

$$d_{f_i}(v_k) \leq d_{f_{i+1}}(v_k)$$

אם הקשת $v_k v_{k+1}$ קיימת ב-G_{f_i} אז סיימנו.
אחרת במסלול השיפור ב-G_{f_i} קיימת הקשת $v_{k+1}v_k$ ומכאן:

$$d_{f_i}(v_{k+1}) = d_{f_i}(v_k) - 1 \leq d_{f_{i+1}}(v_k) - 1 = d_{f_{i+1}}(v_{k+1}) - 2$$

□

מסקנה 1. לכל v ולכל $i < j$ מתקיים $d_{f_i}(v) \leq d_{f_j}(v)$

מסקנה 2. אם $uv \in E_{f_i}, E_{f_{j+1}}$ ו-$uv \notin E_{f_{i+1}}, E_{f_j}$ עבור $i + 1 < j$ כלשהם אז $d_{f_{j+1}}(v) \geq d(f_i(v)) + 2$.

הוכחה. נשים לב שקשת uv נעלמת/חוזרת רק אם הקשת vu/uv נמצאת על מסלול שיפור בהתאמה, ולכן מתקיים ש-$d_{f_j}(u) = d_{f_j}(v) + 1 \geq d_{f_i}(v) + 1 = d_{f_i}(u) + 2$. □

הגדרה 1 (קשת קריטית)**.** בהינתן מסלול P נגיד שקשת e במסלול היא קריטית אם הקיבול שלה הוא המינימלי מבין כל הקשתות במסלול.

טענה 2. אם P מסלול שיפור ב-G_{f_i} ו-e קשת קריטית במסלול, אז $e \notin E_{fi+1}$.

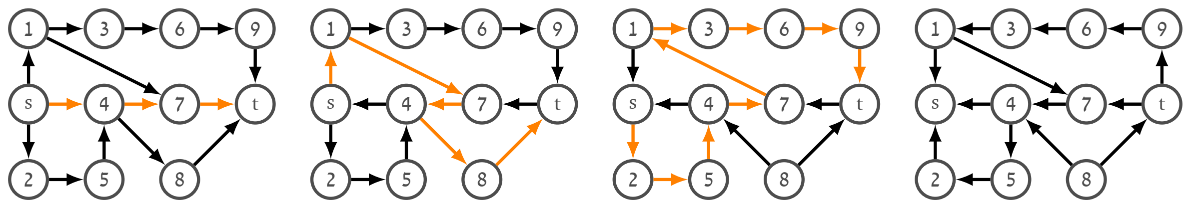
הוכחה. נובע ישירות מהגדרת הרשת השיורית. □

מסקנה 3. במהלך ריצת האלגוריתם, קשת uv יכולה להיות קריטית $\frac{|V|}{2}$ פעמים לכל היותר.

סיבוכיות ריצה: נשים לב שבכל איטרציה קיימת קשת קריטית אחת לפחות ולכן מספר האיטרציות חסום על ידי $|E| \cdot \frac{|V|}{2}$ ניתן לממש כל איטרציה על ידי BFS ולקבל זמן כולל של $O(|E|^2|V|)$.

דוגמה

הדוגמה הבאה ממחישה את הטענה על מרחק הצמתים מ-s. מסלול השיפור בכל איטרציה מסומן בכתום, הניחו כי כל הקיבולים שווים. שימו לב למרחק הצמתים 4 ו-7 מ-s.



שידוך

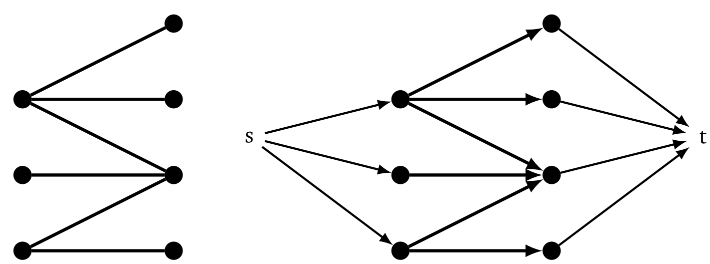
שידוך בגרף לא מכוון $G=(V,E)$ הוא תת קבוצה בלתי תלויה של קשתות $M \subseteq E$. כלומר, לכל שתי קשתות $e_1, e_2 \in M$ מתקיים ש-$e_1 \cap e_2 = \emptyset$.

הגדרה 2 (שידוך מקסימום)**.** שידוך M יקרא שידוך מקסימום אם לכל שידוך אחר, M', מתקיים $|M'| \leq |M|$.

שידוך בגרף דו צדדי:
בהינתן גרף דו צדדי, $G=(L,R,E)$ נגדיר את רשת הזרימה, $N=(G',c)$ כאשר

$$G' = (L \cup R \cup \{s,t\}, E')$$
$$E' = \{uv : uv \in E, u \in L, v \in R\} \cup \{s\} \times L \cup R \times \{t\}$$
$$c(e) = 1 \qquad \forall e \in E'$$

דוגמה:



טענה 3. אם M שידוך ב-G אז קיימת זרימה f ב-N כך ש-$|f| = |M|$.

הוכחה. לכל $uv \in M$ נציב $f(su) = f(uv) = f(vt) = 1$ ולכל שאר הקשתות נציב זרימה 0. קל לוודא שזו אכן פונקציית זרימה עם ערך $|M|$. □

טענה 4. אם f זרימה בשלמים ב-N אז קיים שידוך, M, ב-G כך ש-$|f| = |M|$

הוכחה. נגדיר $M = \{uv : u \in L, v \in R, f(uv) = 1\}$. קל לוודא שזהו אכן שידוך וש-$|f| = |M|$. □

מסקנה 4. קיים אלגוריתם פולינומי שמוצא שידוך מקסימום.

שידוך מושלם

הגדרה 3 (שידוך מושלם)**.** שידוך יקרא מושלם אם $|M| = \frac{|V|}{2}$.

הגדרה 4 (גרף רגולרי)**.** גרף לא מכוון יקרא d-רגולרי אם הדרגה של כל צומת היא d.

טענה 5. לכל $d \geq 1$ בגרף דו צדדי d-רגולרי קיים שידוך מושלם.

הוכחה. ראשית נשים לב שבגרף דו צדדי רגולרי מתקיים ש-$|R| = |L|$. נסמן $|L| = n$ ומספיק להראות שקיימת זרימה (לאו דווקא שלמה) שערכה n.
נגדיר:

$$f(sv) = 1 \qquad \forall v \in L$$
$$f(vt) = 1 \qquad \forall v \in R$$
$$f(uv) = \frac{1}{d} \qquad \forall uv \in E : u \in L, v \in R$$

אפשר לוודא שזו אכן זרימה עם ערך n. □

משפט הול

עבור תת קבוצה של צמתים $U \subseteq V$ בגרף $G = (V, E)$ נסמן ב-$N(U)$ את קבוצת השכנים של U, כלומר:

$$N(U) := \{v : uv \in E, u \in U, v \notin U\}$$

משפט 1 (משפט הול)**.** בגרף דו צדדי $G = (L \cup R, E)$ שמקיים $|L| = |R| = n$ קיים שידוך מושלם אם ורק אם לכל $U \subseteq L$ מתקיים ש-$|U| \leq N(U)$.

נוכיח את המשפט באמצעות טיעונים על זרימה.
בהינתן גרף דו צדדי $G = (L \cup R, E)$ רשת זרימה מתאימה $N = (G', c)$ ו-חתך-st S נסמן ב-$U := S \cap L$ וב-$W := S \cap R$.

טענה 6. אם S חתך-st מינימום אז לא קיים צומת $v \in W \setminus N(U)$.

הוכחה. אם קיים אז $S \setminus \{v\}$ חתך קטן יותר. □

טענה 7. קיים חתך-st מינימום כך ש-$W = N(U)$.

הוכחה. נסתכל על חתך-st מינימום, S שממזער את $|N(U) \setminus W|$ (השכנים של U שלא ב-S) נניח בשלילה שקיים צומת $v \in N(U) \setminus W$ אז $S \cup \{v\}$ חתך עם ערך לא גדול משל S - סתירה. □

הוכחת משפט הול. אם S חתך-st מינימום כך ש-$W = N(U)$ ומתקיים $|W| \geq |U|$ אז ערך החתך הוא לפחות n. □

דוגמה: בדוגמה הבאה החתך הכתום מקווקו הוא חתך מינימום אבל אינו מכיל את כל השכנים של U, אם מוסיפים את השכן של U שמחוץ לחתך נקבל שוב חתך מינימום. החתך המנוקד הכחול אינו חתך מינימום ומכיל צומת שאינו שכן של U, אם נוציא את הצומת מהחתך נקבל חתך מינימום.