

## הרצאה 5

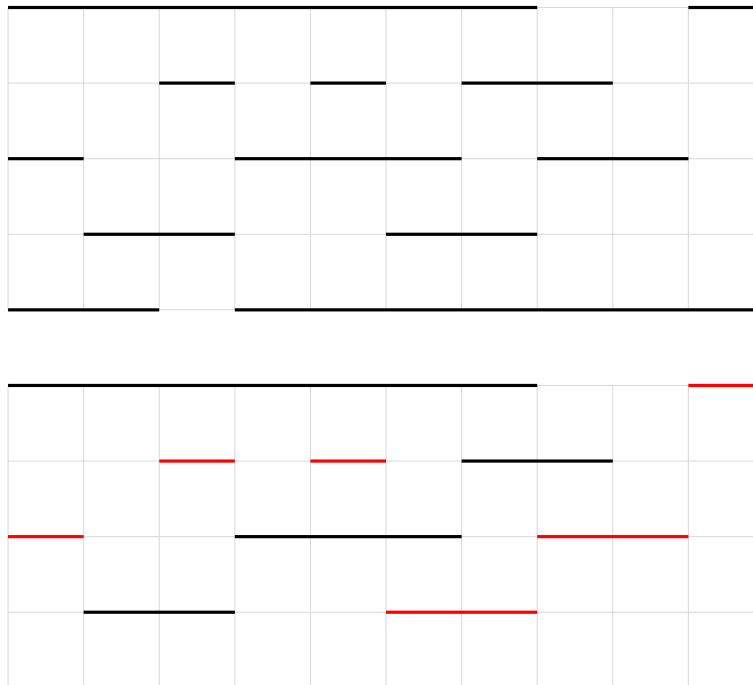
### אלגוריתמים חמדניים

## הקדמה

לעיתים קרובות אפשר לייצג בעיות אופטימיזציה כקבוצה של אלמנטים כאשר פתרון חוקי הוא תת קבוצה של אלמנטים שמקיימת תכונות מסוימות. למשל, עץ פורש מינימלי. בדרך כלל יש פונקציית מחיר / רווח לכל תת קבוצה והמטרה שלנו היא למצוא / למקסם את הערך הזה. אלגוריתם חמדן, באופן לא פורמלי, הוא כזה שבונה פתרון (תת קבוצה של אלמנטים) באופן איטרטיבי ובכל שלב מוסיף / מסיר מהקבוצה

## קבוצת אינטרוולים בלתי תלויה בגודל מקסימלי

נתונים  $n$  אינטרוולים  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ , נסמן ב- $s(a_i)$  את זמן ההתחלה של האינטרוול  $a_i$  וב- $e(a_i)$  את זמן הסיום שלו. לכל אינטרוול מתקיים ש- $s(a_i), e(a_i) \in \mathbb{R}_+$  וכן  $s(a_i) < e(a_i)$  רוצים למצוא תת קבוצה בגודל מקסימלי  $I \subseteq A$  כך שהאינטרוולים ב- $I$  זרים בזוגות, כלומר לכל  $a, b \in I$  אחד התנאים מתקיים:  $e(a) < s(b)$  או  $s(a) < e(b)$ .  
דוגמה:



אלגוריתם חמדן:

1. אתחול:  $I \leftarrow \emptyset, \bar{e} \leftarrow 0$

2. עבור כל אינטרוול  $a$  בסדר לא יורד של ערכי  $e(a)$ :

(א) אם  $s(a) \geq \bar{e}$

i.  $I \leftarrow I \cup \{a\}$

ii.  $\bar{e} \leftarrow e(a)$

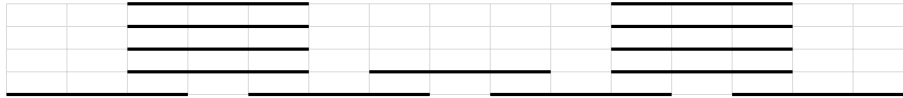
לפני שנוכיח נכונות נראה דוגמאות לגישות חמדניות שלא עובדות:  
לבחור את האינטרוול עם זמן התחלה הכי מוקדם



לבחור את האינטרוול הכי קצר



לבחור את האינטרוול שנחתך עם הכי מעט אינטרוולים



הוכחת נכונות: נוכיח את הטענה הבאה, בכל צעד של האלגוריתם קיימת קבוצה בגודל מקסימלי,  $I'$  כך ש- $I$  רישא שלה ביחס למיון ע"פ ערכי  $e$ .

בסיס: באתחול טריוויאלי

צעד: נבחן את הקבוצות  $I$  ו- $I'$  בצעד ה- $i+1$ . לפי הנחת האינדוקציה הקבוצות, ממוינות על פי ערכי  $e$  נראות כך:

$$\begin{aligned} I &= \{\alpha_1, \dots, \alpha_i, \alpha_{i+1}\} \\ I' &= \{\alpha_1, \dots, \alpha_i, \beta_1, \dots, \beta_k\} \end{aligned}$$

נסתכל על הפתרון

$$I'' = \{\alpha_1, \dots, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \beta_k\}$$

מכיוון ש- $I'$  פתרון חוקי האינטרוולים שם זרים בזוגות ולכן גם האינטרוולים ב- $I''$  למעט אולי  $\alpha_{i+1}$ . מכיוון שהאלגוריתם בונה פתרון חוקי אז אנחנו יודעים ש- $\alpha_{i+1}$  זר ל- $\alpha_1, \dots, \alpha_i$  ובגלל האופי החדמני של האלגוריתם מתקיים ש- $e(\alpha_{i+1}) \leq e(\beta_1) \leq s(\beta_1) \leq s(\beta_2) \leq \dots \leq s(\beta_k)$  ולכן  $I''$  פתרון בגודל מקסימלי כך ש- $I$  רישא שלו.

## שיבוץ משימות

נתונות  $n$  משימות  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  נסמן ב- $t(a_i)$  את הזמן הנדרש לביצוע משימה  $a_i$  וב- $d(a_i)$  את זמן הסיום הרצוי של המשימה. בהינתן סדר ביצוע המשימות (פרמוטציה)  $\pi: A \rightarrow [n]$  נסמן ב- $\delta(a_i)$  את זמן הסיום של המשימה  $a_i$ , כלומר

$$\delta(a_i) = \sum_{i \leq \pi(a_i)} t(\pi^{-1}(i))$$

נסמן ב- $l(a_i) := \delta(a_i) - d(a_i)$  את האיחור בביצוע משימה  $a_i$ . רוצים למצוא סדר שממזער את האיחור המקסימלי, כלומר

$$\arg \min_{\pi} \{ \max_i l(a_i) \}$$

האלגוריתם החמדן יבצע את המשימות בסדר לא יורד של זמני הסיום הרצויים.

### הוכחת נכונות

נוכיח באינדוקציה את הטענה הבאה:

לכל  $i$  קיים פתרון אופטימלי שמבצע את  $i$  המשימות הראשונות לפי זמני הסיום שלהן.

בסיס: טריוויאלי

צעד: נסתכל על המשימה  $a$ , שזמן הסיום שלה הוא ה- $i+1$  לפי סדר לא יורד. אם הפתרון האופטימלי מבצע את המשימה הזאת בזמן  $i+1$  סיימנו, אחרת הוא מבצע אותה בזמן  $j > i+1$  נסתכל על סדר ביצוע המשימות מזמן  $i+1$  עד זמן  $j$ :

$$b_{i+1}, \dots, b_{j-1}, a$$

נבחן פתרון שמבצע את המשימות הללו בסדר הבא:

$$a, b_{i+1}, \dots, b_{j-1}$$

נבדוק את האיחור המקסימלי של משימות אלו (האיחור המקסימלי של יתר המשימות לא השתנה) ונניח בשלילה שהוא גדל (אחרת סיימנו). אם זמן הסיום גדל זה חייב להיות בגלל אחת מהמשימות  $b_{i+1}, \dots, b_{j-1}$  נסמן אותה ב- $b$ . נסמן את זמן הסיום שלה לפי הסדר החדש ב- $\delta'(b)$  אנחנו יודעים אבל ש- $\delta(b) \leq \delta'(b)$  וגם ש- $d(a) \leq d(b)$  ולכן  $\delta'(b) - d(b) \leq \delta(a) - d(a)$