

## הרצאה 9

### תכנון דינאמי

## קבוצה בלתי תלויה של אינטרוולים עם משקל מקסימלי

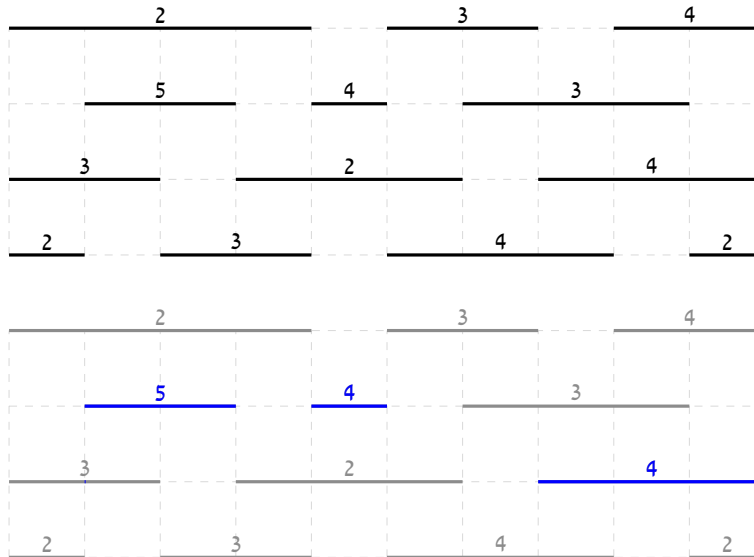
נתונים  $n$  אינטרוולים  $A = (a_1, \dots, a_n)$  לכל אינטרוול זמן התחלה  $s(a_i)$ , זמן סיום  $e(a_i) > s(a_i)$  ומשקל  $w(a_i)$ . תת קבוצה  $I \subseteq A$  של אינטרוולים נקראת בלתי תלויה אם לכל  $a_i, a_j \in I$  אחד מהשניים מתקיים:

$$1. s(a_j) > e(a_i)$$

$$2. s(a_i) > e(a_j)$$

רוצים למצוא קבוצה בלתי תלויה של אינטרוולים עם משקל מקסימלי.

**דוגמה:** קלט לבעיה וקבוצה בלתי תלויה במשקל 13.



**אלגוריתם:** נסתכל על קבוצת האינטרוולים ממוינת בסדר לא יורד של זמני הסיום  $A = (a_1, \dots, a_n)$  ונסמן  $A_i = (a_1, \dots, a_i)$  נגדיר

$$p(i) = \max \begin{cases} \max\{j : e(a_j) < s(a_i)\} \\ 0 \end{cases}$$

כלומר  $p(i)$  הוא האינדקס המקסימלי של אינטרוול  $a_j$  שמסתיים לפני שהאינטרוול  $a_i$  מתחיל או 0 אם לא קיים כזה. נגדיר את  $O(i)$  להיות המשקל של תת קבוצה בלתי תלויה של  $A_i$  עם משקל מקסימלי, אז  $O(n)$  הוא הערך אותו אנחנו מחפשים.

**טענה 1.**

$$O(i) = \max \begin{cases} w(i) + O(p(i)) \\ O(i-1) \end{cases}$$

כמו כן מתקיים  $O(0) = 0$ .

הוכחה. באינדוקציה על  $i$ .

בסיס: עבור  $i = 0$  טריוויאלי.

עבור  $i + 1$  נקבע פתרון אופטימלי  $OPT$  ונסמן  $OPT \cap A_i$ .

אם  $a_{i+1} \in OPT$  אז  $OPT$  לא יכול להכיל אף אינטרוול  $a_{p(i)+1}, \dots, a_{i+1}$  לפי הנחת האינדוקציה

$$O(p(i+1)) \geq OPT(p(i+1))$$

ולכן הטענה מתקיימת כי

$$O(p(i+1)) + w(a_{i+1}) \geq OPT(p(i+1)) + w(a_{i+1})$$

מצד שני, אם  $a_{i+1} \notin OPT$  אז לפי ההנחה

$$O(i) \geq OPT(i)$$

והטענה מתקיימת.

□

חישוב יעיל של  $O$ 

כיצד נחשב את  $O$  ביעילות? נשים לב שאם מחשבים את ערכי  $O$  מ-1 עד  $n$  ושומרים את הערכים (למשל במערך) אז חישוב של כל ערך לוקח  $O(1)$  זמן. זמן הריצה של האלגוריתם:

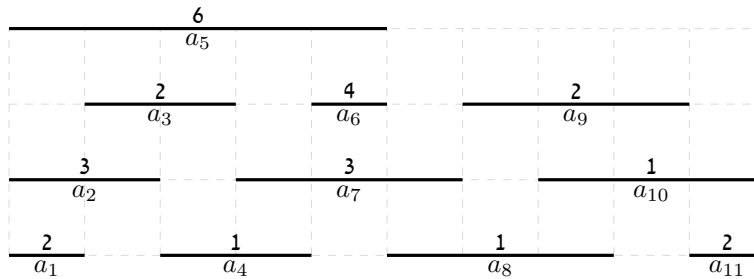
1. מיון -  $O(n \log n)$

2. חישוב  $p$  -  $O(n \log n)$  (חיפוש בינארי לכל  $i$ )

3. חישוב  $O$  -  $O(n)$

סך הכל  $O(n \log n)$

**דוגמת הרצה:**



נחשב:

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$p$	0	0	1	2	0	4	3	6	7	7	9

ו-

$i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$O$	0	2	3	5	5	6	9	9	10	11	11	13

נמצא את הקבוצה עצמה:

$i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$O$	0	2	3	5	5	6	9	9	10	11	11	13

מה יקרה אם לכל תא במערך נזכור גם את הקבוצה שמתאימה לערך התא?