הרצאה 4

עץ פורש מינימלי

הגדרות ואבחנות

יער - גרף חסר מעגלים

עץ - יער קשיר

חתך - תת קבוצה של צמתים $S \subseteq V$

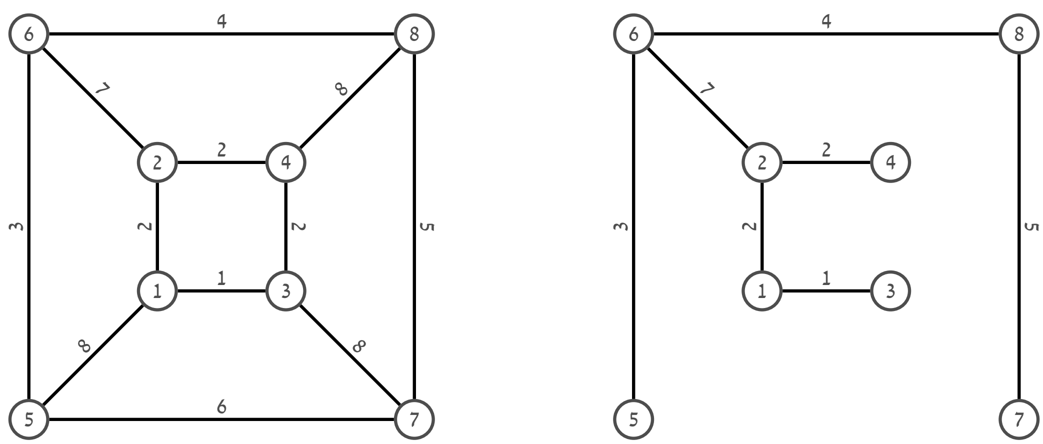
קשת חוצה - קשת uv חוצה חתך S אם $|\{u,v\} \cap S| = 1$

אבחנה 1. הוספת קשת uv לעץ סוגרת מעגל שמכיל את הקשת + המסלול מ-v ל-u בעץ. כעת ניתן להסיר כל קשת מהמעגל הנ"ל ולקבל בחזרה עץ.

אבחנה 2. אם קשת uv נמצאת על מעגל והיא חוצה חתך S אז את S חוצה קשת אחת נוספת (לפחות) ששייכת למעגל.

הגדרה 1 (עץ פורש מינימלי)**.** בהינתן זוג של גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ופונקציית משקל (אי שלילית) $w : E \to \mathbb{R}$ עץ פורש מינימלי הוא כל עץ $T=(V,F)$ שממזער את הערך $\sum_{e \in F} w(e)$.

דוגמה



הכלל הכחול

בחלק זה נראה אלגוריתם גנרי שפועל על פי הכלל הכחול.

הגדרה 2 (קשת קלה)**.** בהינתן חתך, S, ופונקציית משקל, $w : E \to \mathbb{R}$, קשת uv שחוצה את S תקרא קלה אם לא קיימת קשת אחרת שחוצה את S, $u'v'$ שמקיימת $w(u'v') < w(uv)$.

1. אתחול: $F \leftarrow \emptyset$ (קשתות כחולות)
2. כל עוד $T=(V,F)$ אינו קשיר
   (א) בחר חתך לבן, S, וקשת קלה, uv, שחוצה אותו
   (ב) $F \leftarrow F \cup \{uv\}$

טענה 1. האלגוריתם מחזיר עץ

הוכחה. קשירות נובעת מיידית מהגדרת האלגוריתם. נניח בשלילה שנסגר מעגל. נסתכל על הנקודה בה האלגוריתם צובע את הקשת שסוגרת את המעגל הכחול. לפי אבחנה 2 קיימת קשת כחולה נוספת שחוצה את החתך - סתירה. □

טענה 2. האלגוריתם מחזיר עץ פורש מינימלי

הוכחה. נוכיח באינדוקציה שבכל שלב בריצת האלגוריתם אוסף הקשתות הכחולות מוכל בתוך עץ פורש מינימלי כלשהו:
בסיס: טריוויאלי באתחול
צעד: לפי ההנחה קיים עפ"מ שמכיל את i הקשתות הכחולות הראשונות. נניח שהקשת, e, שהוספנו בשלב ה-$i+1$ לא שייכת לעפ"מ הנ"ל (אחרת סיימנו). נוסיף את e לעפ"מ, סגרנו מעגל. במעגל זה קיימת קשת, $e' \neq e$, שחוצה את S, החתך (הלבן) שגרם להוספת e. לפי הגדרת האלגוריתם $w(e) \leq w(e')$ ולכן ניתן להחליף בין הקשתות הנ"ל ולקבל עפ"מ שמכיל גם את e. □