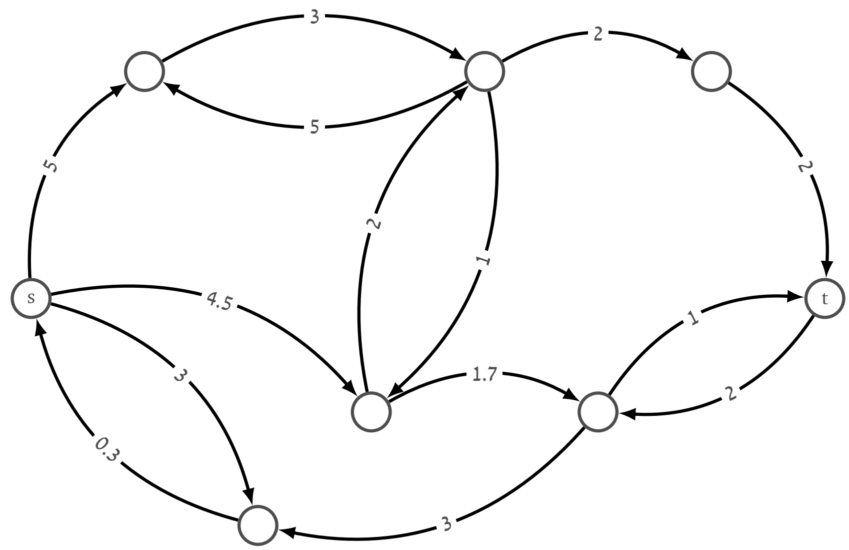
הרצאה 11

רשתות זרימה

הקדמה

הגדרה 1 (רשת זרימה)**.** רשת זרימה היא גרף מכוון, $G = (V, E)$ עם קיבולים על הקשתות, $c : E \to \mathbb{R}_+$, צומת מקור, $s \in V$ וצומת בור, $t \in V$.

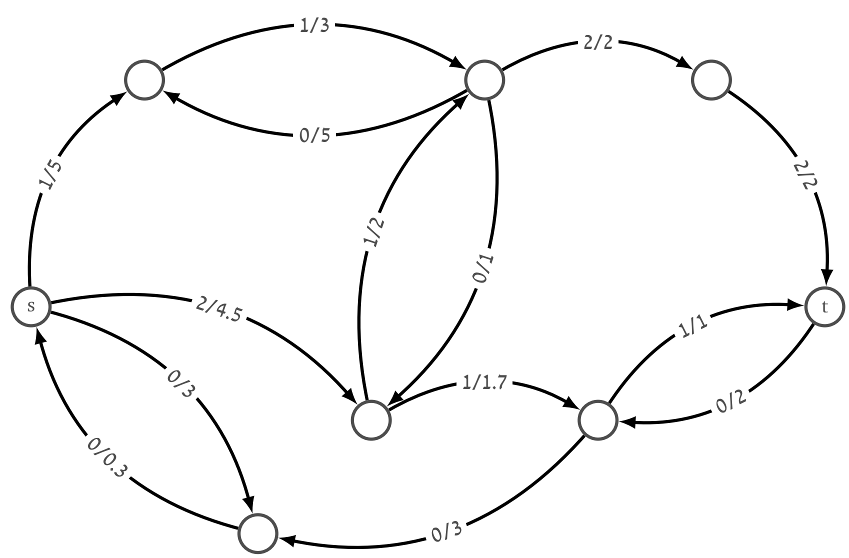
דוגמה:



הגדרה 2 (זרימה)**.** בהינתן רשת זרימה, (G, s, t, c) זרימה היא פונקציה, $f : E \to \mathbb{R}_+$ אשר מקיימת

1. **חוק הקשת** $\forall\, e \in E \quad 0 \le f(e) \le c(e)$
2. **חוק הצומת** $\forall\, v \in V \setminus s, t \quad \sum_{uvinE} f(uv) - \sum_{vw \in E} f(vw) = 0$

נסמן ב-$\delta(u) := \{uv : uv \in E\}$ את אוסף הקשתות שיוצאות מצומת u וב-$\rho(v) := \{uv : uv \in E\}$ את אוסף הקשתות שנכנסות לצומת v.
נגדיר: $f(v) := \sum_{e \in \delta(v)} f(e) - \sum_{e \in \rho(v)} f(e)$ ונסמן ב-$|f| := f(s)$ את ערך הזרימה.
דוגמה: $|f| = 3$



מטרה: למצוא פונקציית זרימה חוקית עם ערך מקסימלי.

חתך-st

הגדרה 3 (חתך-st)**.** חתך-st הוא תת קבוצה של צמתים שמכילה את s ואינה מכילה את t.

נרחיב את הסימונים δ, ρ ו-f עבור קבוצת צמתים, כלומר

$$\delta(S) := \{uv \in E : u \in S \wedge v \notin S\}$$

$$\rho(S) := \{uv \in E : u \notin S \wedge v \in S\}$$

ו-

$$f(S) := \sum_{e \in \delta(S)} f(e) - \sum_{e \in \rho(S)} f(e)$$

ונשים לב שלכל $S \subseteq V$ מתקיים

אבחנה 1. $f(S) = \sum_{v \in S} f(v)$

למה 1. לכל חתך-st, S, מתקיים $f(S) = |f|$.

הוכחה. נשים לב שלכל צומת, $v \in S$, שאינו s מתקיים $f(v) = 0$ ובנוסף, לפי ההגדרה, מתקיים ש-$|f| = f(s)$. □

בפרט מתקיים ש:

$$|f| = f(V \setminus \{t\}) = -f(t)$$

נסמן

$$c(S) := \sum_{e \in \delta(S)} c(e)$$

טענה 1. לכל חתך-st, S, מתקיים $|f| \leq c(S)$

הוכחה. לפי למה 1 ולפי הגדרת פונקציית זרימה מתקיים ש-$|f| = f(S) \leq c(S)$. □

הטענה האחרונה מאפשרת לנו למצוא חסם עליון על זרימת המקסימום. בהמשך נראה כי זהו חסם עליון הדוק.

רשת שיורית

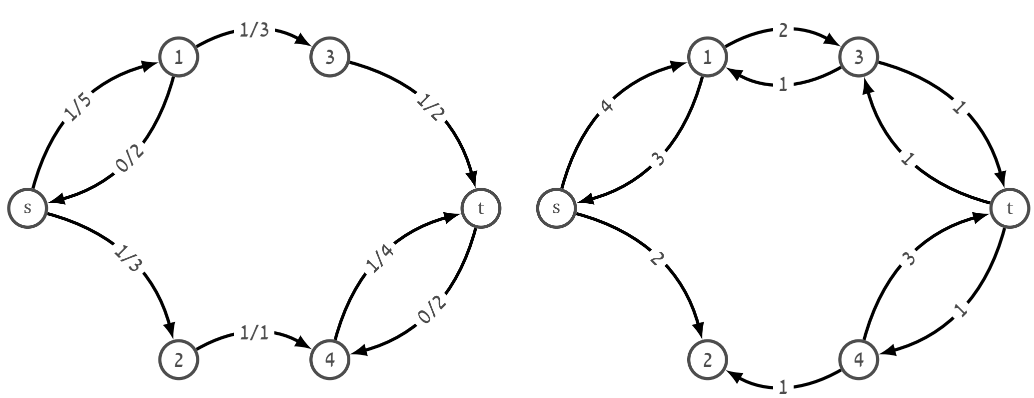
הערות והנחות:

- נרחיב את פונקציית הקיבול ופונקציית הזרימה להיות מוגדרות עבור כל זוג צמתים.
- נניח כי לכל זוג צמתים מתקיים ש-$\min\{f(uv), f(vu)\} = 0$ אחרת ניתן לחסר את המינימום משני הערכים.

הגדרה 4 (רשת זרימה שיורית)**.** בהינתן רשת זרימה, (G, s, t, c) וזרימה, f, הרשת השיורית היא (G_f, s, t, c_f) כאשר

$$\begin{aligned} c_f(uv) &:= c(uv) - f(uv) + f(vu) \\ G_f &= (V, E_f) \\ E_f &= \{uv : c_f(uv) > 0\} \end{aligned}$$

דוגמה:



הגדרה 5 (חיבור זרימות)**.** בהינתן שתי פונקציות זרימה, f ו-g, נגדיר את הסכום שלהן להיות:

$$h(uv) = \max\{0, f(uv) + g(uv) - f(vu) - g(vu)\}$$

למה 2. אם f זרימה ב-(G,s,t,c) ו-g זרימה ב-(G_f,s,t,c_f) אז $h=f+g$ זרימה ב-(G,s,t,c) ומתקיים $|h|=|f|+|g|$.

הוכחה.
חוק הקשת: מהגדרה מתקיים $0 \leq h(uv)$. כמו כן מתקיים ש-$g(uv) \leq c_f(uv) = c(uv) - f(uv) + f(vu)$ ולכן, אם $h(uv) \neq 0$ אז $h(uv) = f(uv) + g(uv) - f(vu) - g(vu) \leq c(uv) - g(vu) \leq c(uv)$.
חוק הצומת: נסמן ב-$\phi(uv) := f(uv) + g(uv) - f(vu) - g(vu)$ ונשים לב ש-$\phi(uv) = -\phi(vu)$ ו-

$$h(uv) - h(vu) = \max\{0, \phi(uv)\} - \max\{0, -\phi(uv)\} = f(uv) + g(uv) - f(vu) - g(vu)$$

ולכן לכל u מתקיים

$$\sum_{v\in V} h(uv) - \sum_{v\in V} h(vu) = \sum_{v\in V} f(uv) - \sum_{v\in V} f(vu) + \sum_{v\in V} g(uv) - \sum_{v\in V} g(vu) = 0$$

כאשר השוויון האחרון נובע מחוקיות f ו-g.
ערך הזרימה: נחשב

$$|h| = \sum_{v\in V} h(sv) - \sum_{v\in V} h(vs) = \sum_{v\in V} f(sv) - \sum_{v\in V} f(vs) + \sum_{v\in V} g(sv) - \sum_{v\in V} g(vs) = |f| + |g|$$

□

למה 3. אם P מסלול (פשוט) מ-s ל-t ברשת זרימה (G,s,t,c) ו-ε הקיבול המינימלי של קשת ב-P אז הפונקציה:

$$f_P(e) = \begin{cases} \varepsilon & \text{if } e \in P \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

היא פונקציית זרימה.

הוכחה. חוק הקשת מתקיים לפי ההגדרה של f ושל ε. עבור צומת פנימי במסלול, v, מתקיים ש-$f(v) = f(vw) - f(uv) = 0$ כאשר u ו-w הצמתים לפני ואחרי v במסלול בהתאמה. □

הגדרה 6 (מסלול שיפור)**.** בהינתן רשת זרימה, (G,s,t,c), וזרימה, f, מסלול שיפור הוא מסלול (פשוט) מ-s ל-t ב-G_f.

למה 4. אם P הוא מסלול שיפור ביחס לרשת זרימה (G,s,t,c) וזרימה f אז $h = f + f_P$ זרימה חוקית ו-$|h| = |f| + \varepsilon$.

הוכחה. נובע ישירות מלמות 2 ו-3. □

חתך מינימום זרימת מקסימום

המשפט המרכזי על רשתות זרימה קובע ש:

משפט 1. תהי f פונקציית זרימה ברשת (G,s,t,c). התנאים הבאים שקולים:

1. f היא זרימת מקסימום.
2. לא קיים מסלול שיפור (ב-G_f).
3. קיים חתך-st ברשת שהקיבול שלו שווה ל-$|f|$.

הוכחה.
$\mathbf{1 \Rightarrow 2}$
נניח בשלילה שקיים ונקבל סתירה לפי למה 4.
$\mathbf{2 \Rightarrow 3}$
נסמן ב-S את קבוצת הצמתים הישיגים מ-s ב-G_f. מלמה **??** נובע כי $f(S) = |f|$ ולפי ההגדרה של רשת שיורית נובע כי ב-G מתקיים:

$$\forall e \in \delta(S) \quad f(e) = c(e)$$
$$\forall e \in \rho(S) \quad f(e) = 0$$

$\mathbf{3 \Rightarrow 1}$
מיידי מטענה 1. □