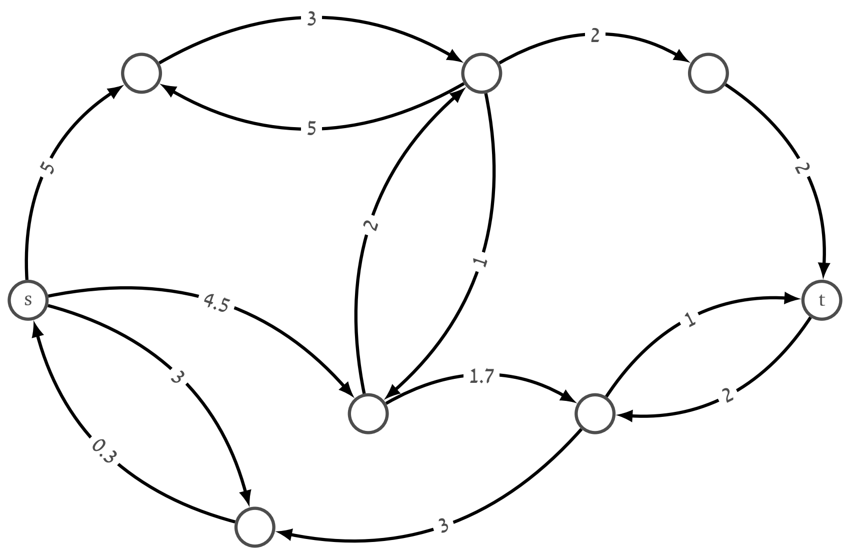
הרצאה 11

רשתות זרימה

הקדמה

הגדרה 1 (רשת זרימה)**.** רשת זרימה היא גרף מכוון, $G=(V,E)$ עם קיבולים על הקשתות, $c:E\to\mathbb{R}_+$ צומת מקור, $s\in V$ וצומת בור, $t\in V$.

דוגמה:



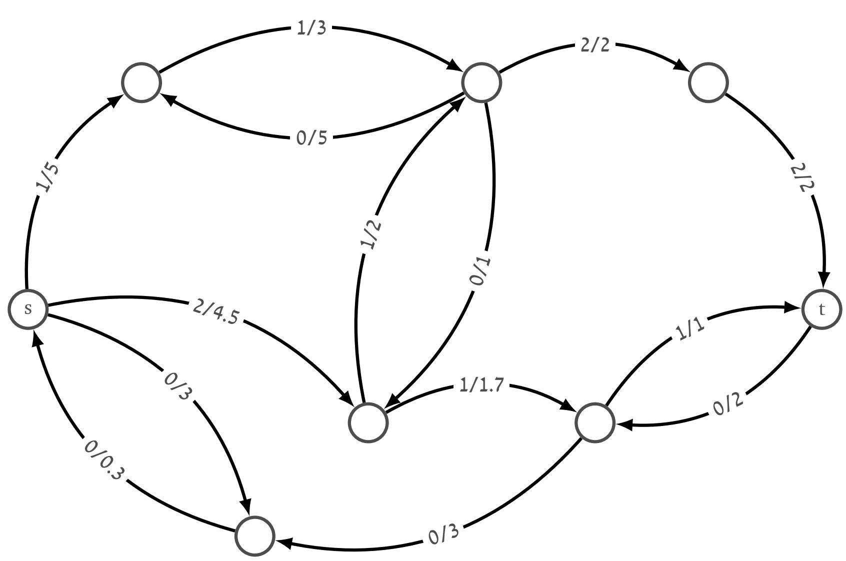
הגדרה 2 (זרימה)**.** בהינתן רשת זרימה, (G,c,s,t) זרימה היא פונקציה, $f:E\to\mathbb{R}_+$ אשר מקיימת

1. **חוק הקשת** $\forall\, e\in E \quad 0\le f(e)\le c(e)$
2. **חוק הצומת** $\forall\, v\in V\setminus s,t \quad \sum_{uvinE} f(uv)-\sum_{vw\in E} f(vw)=0$

נסמן ב-$\delta(u):=\{uv : uv\in E\}$ את אוסף הקשתות שיוצאות מצומת u וב-$\rho(v):=\{uv : uv\in E\}$ את אוסף הקשתות שנכנסות לצומת v.

נגדיר: $f(v):=\sum_{e\in\delta(v)} f(e)-\sum_{e\in\rho(v)} f(e)$ ונסמן ב-$|f|:=f(s)$ את ערך הזרימה.

דוגמה: $|f|=3$



חתך-st

הגדרה 3 (חתך-st)**.** חתך-st הוא תת קבוצה של צמתים שמכילה את s ואינה מכילה את t.

נרחיב את הסימונים δ, ρ ו-f עבור קבוצת צמתים, כלומר

$$\delta(S) := \{uv \in E : u \in S \wedge v \notin S\}$$

$$\rho(S) := \{uv \in E : u \notin S \wedge v \in S\}$$

ו-

$$f(S) := \sum_{e\in\delta(S)} f(e) - \sum_{e\in\rho(S)} f(e)$$

ונשים לב שלכל $S \subseteq V$ מתקיים

אבחנה 1. $f(S) = \sum_{v\in S} f(v)$

למה 1. לכל חתך-st, S, מתקיים $f(S) = |f|$.

הוכחה. נשים לב שלכל צומת, $v \in S$, שאינו s מתקיים $f(v) = 0$ ובנוסף, לפי ההגדרה, מתקיים ש-$|f| = f(s)$. □

בפרט מתקיים ש:

$$|f| = f(V \setminus \{t\}) = -f(t)$$

נסמן

$$c(S) := \sum_{e\in\delta(S)} c(e)$$

טענה 1. לכל חתך-st, S, מתקיים $|f| \leq c(S)$

הוכחה. לפי למה 1 ולפי הגדרת פונקציית זרימה מתקיים ש-$|f| = f(S) \leq c(S)$. □

הטענה האחרונה מאפשרת לנו למצוא חסם עליון על זרימת המקסימום. בהמשך נראה כי זהו חסם עליון הדוק.