

## הרצאה 12

### רשתות זרימה

אלגוריתם אדמונדס קרפ, שידוך בגרף דו צדדי, משפט הול

## תזכורת

האלגוריתם הגנרי של פורד פלקרסון:

1. אתחול: מציבים  $f(e) \leftarrow 0$  לכל  $e \in E$
  2. כל עוד יש מסלול שיפור ברשת השיורית  $(G_f, s, t, c_f)$
  - (א) מציבים ב- $f$  את הזרימה המשופרת לפי למת שיפור הזרימה
  3. פולטים את  $f$
- ראינו שאלגוריתם זה אינו פולינומי אפילו כאשר כל הקיבולים שלמים (ואף במקרה הכללי הוא אינו עוצר כלל).

## אלגוריתם אדמונדס קרפ

מקרה פרטי של אלגוריתם זה הוא האלגוריתם של אדמונדס וקרפ:

1. אתחול: מציבים  $f(e) \leftarrow 0$  לכל  $e \in E$
  2. כל עוד יש מסלול שיפור ברשת השיורית  $(G_f, s, t, c_f)$
  - (א) יהי  $P$  מסלול קצר ביותר מ- $s$  ל- $t$ .
  - (ב) שפר לפי  $P$  והצב ב- $f$  את הזרימה המשופרת לפי למת שיפור הזרימה
  3. פולטים את  $f$
- כעת נראה שאלגוריתם זה הוא פולינומי ללא תלות בפונקציית הקיבול. נסמן ב- $f_1, f_2, \dots$  את פונקציית הזרימה שמחשב האלגוריתם בכל איטרציה, וב- $d_{f_i}(v)$  את המרחק של הצומת  $v$  מהצומת  $s$  ברשת השיורית.

**טענה 1.** לכל  $i$  ולכל  $v$  מתקיים  $d_{f_i}(v) \leq d_{f_{i+1}}(v)$ .

הוכחה. עבור  $i$  נתון, נוכיח באינדוקציה על  $k$  - המרחק של  $v$  מ- $s$  ב- $G_{f_{i+1}}$ .

**בסיס:** עבור  $k = 0$  טריוויאלי.

**צעד:** עבור צומת  $v$  במרחק  $k + 1$  מ- $s$  ומסלול  $s = v_0, \dots, v_k, v_{k+1} = v$  מתקיים (לפי הנחת האינדוקציה) ש:

$$d_{f_i}(v_k) \leq d_{f_{i+1}}(v_k)$$

אם הקשת  $v_k v_{k+1}$  קיימת ב- $G_{f_i}$  אז סיימנו. אחרת במסלול השיפור ב- $G_{f_i}$  קיימת הקשת  $v_{k+1} v_k$  ומכאן:

$$d_{f_i}(v_{k+1}) = d_{f_i}(v_k) - 1 \leq d_{f_{i+1}}(v_k) - 1 = d_{f_{i+1}}(v_{k+1}) - 2$$

□

**מסקנה 1.** לכל  $v$  ולכל  $j < i$  מתקיים  $d_{f_i}(v) \leq d_{f_j}(v)$

**מסקנה 2.** אם  $uv \in E_{f_i}, E_{f_{j+1}}$  ו- $uv \notin E_{f_{i+1}}, E_{f_j}$  עבור  $j + 1 < i$  כלשהם אז  $d_{f_{j+1}}(v) \geq d_{f_i}(v) + 2$ .

הוכחה. נשים לב שקשת  $uv$  נעלמת/חוזרת רק אם הקשת  $vu/uv$  נמצאת על מסלול שיפור בהתאמה, ולכן מתקיים ש-  
□  $d_{f_j}(u) = d_{f_j}(v) + 1 \geq d_{f_i}(v) + 1 = d_{f_i}(u) + 2$ .

**הגדרה 1** (קשת קריטית). בהינתן מסלול  $P$  נגיד שקשת  $e$  במסלול היא קריטית אם הקיבול שלה הוא המינימלי מבין כל הקשתות במסלול.

**טענה 2.** אם  $P$  מסלול שיפור ב- $G_{f_i}$  ו- $e$  קשת קריטית במסלול, אז  $e \notin E_{f_{i+1}}$ .

□

הוכחה. נובע ישירות מהגדרת הרשת השיורית.

**מסקנה 3.** בפהלץ ריצת האלגוריתם, קשת  $uv$  יכולה להיות קריטית  $\frac{|V|}{2}$  פעמים לכל היותר.

**סיבוכיות ריצה:** נשים לב שבכל איטרציה קיימת קשת קריטית אחת לפחות ולכן מספר האיטרציות חסום על ידי  $|E| \cdot \frac{|V|}{2}$ . ניתן לממש כל איטרציה על ידי BFS ולקבל זמן כולל של  $O(|E|^2|V|)$ .

## שידוך

שידוך בגרף לא מכוון  $G = (V, E)$  הוא תת קבוצה בלתי תלויה של קשתות  $M \subseteq E$ . כלומר, לכל שתי קשתות  $e_1, e_2 \in M$  מתקיים  $e_1 \cap e_2 = \emptyset$ .

**הגדרה 2** (שידוך מקסימום). שידוך  $M$  יקרא שידוך מקסימום אם לכל שידוך אחר,  $M'$ , מתקיים  $|M'| \leq |M|$ .

**שידוך בגרף דו צדדי:**

בהינתן גרף דו צדדי,  $G = (L, R, E)$  נגדיר את רשת הזרימה,  $N = (G', c)$  כאשר

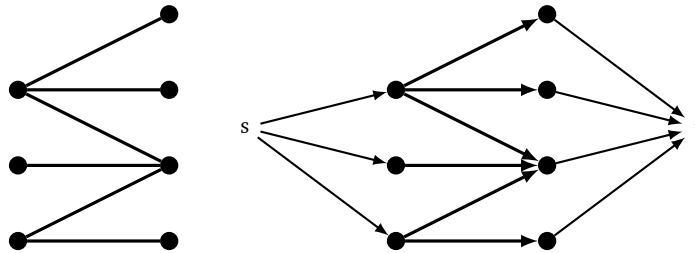
$$G' = (L \cup R \cup \{s, t\}, E')$$

$$E' = \{uv : uv \in E, u \in L, v \in R\} \cup \{s\} \times L \cup R \times \{t\}$$

$$c(e) = 1$$

$$\forall e \in E'$$

**דוגמה:**



**טענה 3.** אם  $M$  שידוך ב- $G$  אז קיימת זרימה  $f$  ב- $N$  כך ש- $|f| = |M|$ .

הוכחה. לכל  $uv \in M$  נציב  $f(su) = f(uv) = f(vt) = 1$  ולכל שאר הקשתות נציב זרימה 0. קל לוודא שזו אכן פונקציית זרימה עם ערך  $|M|$ .  $\square$

**טענה 4.** אם  $f$  זרימה בשלמים ב- $N$  אז קיים שידוך,  $M$ , ב- $G$  כך ש- $|f| = |M|$ .

הוכחה. נגדיר  $M = \{uv : u \in L, v \in R, f(uv) = 1\}$ . קל לוודא שזהו אכן שידוך ו- $|M| = |f|$ .  $\square$

**מסקנה 4.** קיים אלגוריתם פולינומי שמוצא שידוך מקסימום.

**שידוך מושלם**

**הגדרה 3** (שידוך מושלם). שידוך יקרא מושלם אם  $|M| = \frac{|V|}{2}$ .

**הגדרה 4** (גרף רגולרי). גרף לא מכוון יקרא  $d$ -רגולרי אם הדרגה של כל צומת היא  $d$ .

**טענה 5.** לכל  $d \geq 1$  בגרף דו צדדי  $d$ -רגולרי קיים שידוך מושלם.

הוכחה. ראשית נשים לב שבגרף דו צדדי רגולרי מתקיים ש- $|L| = |R|$ . נסמן  $|L| = n$  ומספיק להראות שקיימת זרימה (לאו דווקא שלמה) שערכה  $n$ . נגדיר:

$$f(sv) = 1 \quad \forall v \in L$$

$$f(vt) = 1 \quad \forall v \in R$$

$$f(uv) = \frac{1}{d} \quad \forall uv \in E : u \in L, v \in R$$

אפשר לוודא שזו אכן זרימה עם ערך  $n$ .  $\square$

## משפט הול

עבור תת קבוצה של צמתים  $U \subseteq V$  בגרף  $G = (V, E)$  נסמן ב- $N(U)$  את קבוצת השכנים של  $U$ , כלומר:

$$N(U) := \{v : uv \in E, u \in U, v \notin U\}$$

**משפט 1** (משפט הול). בגרף דו צדדי  $G = (L \cup R, E)$  שמקיים  $|L| = |R| = n$  קיים שידוך מושלם אם ורק אם לכל  $U \subseteq L$  מתקיים ש- $|U| \leq |N(U)|$ .

נוכיח את המשפט באמצעות טיעונים על זרימה.

בהינתן גרף דו צדדי  $G = (L \cup R, E)$  רשת זרימה מתאימה  $N = (G', c)$  ו-חתך  $st$  של  $S$  נסמן ב- $U := S \cap L$  וב- $W := S \cap R$ .

**טענה 6.** אם  $S$  חתך  $st$  מינימום אז לא קיים צומת  $v \in W \setminus N(U)$ .

□

הוכחה. אם קיים אז  $S \setminus \{v\}$  חתך קטן יותר.

**טענה 7.** קיים חתך  $st$  מינימום כך ש- $W = N(U)$ .

הוכחה. נסתכל על חתך  $st$  מינימום,  $S$  שממזער את  $|N(U) \setminus W|$  (השכנים של  $U$  שלא ב- $S$ ) נניח בשלילה שקיים צומת  $v \in N(U) \setminus W$  אז  $S \cup \{v\}$  חתך עם ערך לא גדול משל  $S$  - סתירה.

□

הוכחת משפט הול. אם  $S$  חתך  $st$  מינימום כך ש- $W = N(U)$  ומתקיים  $|W| \geq |U|$  אז ערך החתך הוא לפחות  $n$ .

□

**דוגמה:** בדוגמה הבאה החתך הכתום מקווקו הוא חתך מינימום אבל אינו מכיל את כל השכנים של  $U$ , אם מוסיפים את השכן של  $U$  שמחוץ לחתך נקבל שוב חתך מינימום. החתך המנוקד הכחול אינו חתך מינימום ומכיל צומת שאינו שכן של  $U$ , אם נוציא את הצומת מהחתך נקבל חתך מינימום.

