הרצאה 4

עץ פורש מינימלי

פרים, קרוסקל

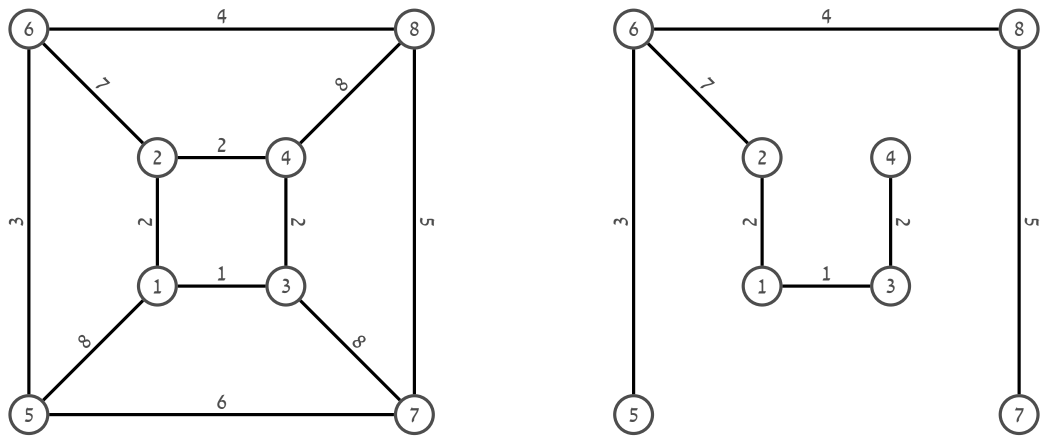
הגדרות ואבחנות

יער - גרף חסר מעגלים

עץ - יער קשיר

הגדרה 1 (עץ פורש מינימלי)**.** בהינתן זוג של גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ופונקציית משקל (אי שלילית) $w:E\to\mathbb{R}$ עץ פורש מינימלי הוא כל עץ $T=(V,F)$ שממזער את הערך $\sum_{e\in F} w(e)$.

דוגמה:



חתך - תת קבוצה של צמתים $S\subseteq V$

קשת חוצה - קשת uv חוצה חתך S אם $|\{u,v\}\cap S|=1$

אבחנה 1. גרף קשיר אמ"מ כל חתך לא טריוויאלי נחצה על ידי קשת אחת לפחות.

אבחנה 2. הוספת קשת uv לעץ סוגרת מעגל שמכיל את הקשת + המסלול מ-v ל-u בעץ. כעת ניתן להסיר כל קשת מהמעגל הנ"ל ולקבל בחזרה עץ.

אבחנה 3. אם קשת uv נמצאת על מעגל והיא חוצה חתך S אז את S חוצה קשת אחת נוספת (לפחות) ששייכת למעגל.

אבחנה 4. מחיקת קשת e מעץ יוצרת יער עם שני רכיבי קשירות. נסמן ב-U_e את החתך שהרכיבים הללו מגדירים (אחד הרכיבים באופן שרירותי). אם נוסיף לגרף קשת כלשהי שחוצה את החתך U_e קיבלנו שוב עץ.

הכלל הכחול

בחלק זה נראה אלגוריתם גנרי שפועל על פי הכלל הכחול.

הגדרה 2 (חתך לבן)**.** בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ותת קבוצה של קשתות כחולות $B\subseteq E$ חתך S יקרא לבן אם לא קיימת קשת כחולה שחוצה אותו.

הגדרה 3 (קשת קלה)**.** בהינתן חתך, S, ופונקציית משקל, $w:E\to\mathbb{R}$, קשת e שחוצה את S תקרא קלה אם לא קיימת קשת אחרת שחוצה את S, e' שמקיימת $w(e')<w(e)$.

1. אתחול: $B\leftarrow\emptyset$ (קשתות כחולות)
2. כל עוד $T=(V,B)$ אינו קשיר הפעל את הכלל הכחול:
   (א) בחר חתך לבן, S, וקשת קלה, e, שחוצה אותו
   (ב) $B\leftarrow B\cup\{e\}$

טענה 1. בסיום האלגוריתם T הוא עץ

הוכחה. קשירות נובעת מיידית מהגדרת האלגוריתם. נניח בשלילה שנסגר מעגל. נסתכל על הנקודה בה האלגוריתם צובע את הקשת שסוגרת את המעגל הכחול. לפי אבחנה 3 קיימת קשת כחולה נוספת שחוצה את החתך - סתירה. □

טענה 2. האלגוריתם מחזיר עץ פורש מינימלי

הוכחה. נוכיח באינדוקציה שבכל שלב בריצת האלגוריתם אוסף הקשתות הכחולות מוכל בתוך עץ פורש מינימלי כלשהו:
בסיס: טריוויאלי באתחול
צעד: לפי ההנחה קיים עפ"מ שמכיל את i הקשתות הכחולות הראשונות. נניח שהקשת, e, שהוספנו בשלב ה-$i+1$ לא שייכת לעפ"מ הנ"ל (אחרת סיימנו). נוסיף את e לעפ"מ, סגרנו מעגל. במעגל זה קיימת קשת, $e' \neq e$, שחוצה את S, החתך (הלבן) שגרם להוספת e. לפי הגדרת האלגוריתם $w(e) \leq w(e')$ ולכן ניתן להחליף בין הקשתות הנ"ל ולקבל עפ"מ שמכיל גם את e. □

הכלל האדום

בחלק זה נראה אלגוריתם גנרי שפועל על פי הכלל האדום.

הגדרה 4 (מעגל לבן)**.** בהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$ ותת קבוצה של קשתות אדומות $R \subseteq E$ מעגל C יקרא לבן אם לא הוא לא מכיל קשת אדומה.

הגדרה 5 (קשת כבדה)**.** בהינתן מעגל, C, ופונקצית משקל, $w : E \to \mathbb{R}$, קשת e במעגל C תקרא כבדה אם לא קיימת קשת אחרת במעגל C, e' שמקיימת $w(e') > w(e)$.

1. אתחול: $R \leftarrow \emptyset$ (קשתות אדומות)
2. כל עוד ב-$T = (V, E \setminus R)$ יש מעגל הפעל את הכלל האדום:
   (א) בחר מעגל לבן, C, וקשת כבדה, e, על המעגל
   (ב) $R \leftarrow R \cup \{e\}$

הערה: במקום לצבוע את הקשת באדום ניתן פשוט למחוק אותה מהגרף

טענה 3. בסיום האלגוריתם T הוא עץ

הוכחה. חוסר מעגלים נובע מיידית מהגדרת האלגוריתם. נניח בשלילה שאלגוריתם פוגע בקשירות, כלומר קיים חתך כך שהאלגוריתם צובע באדום את כל הקשתות שחוצות אותו, נסתכל על הקשת האחרונה שנצבעה באדום ועל המעגל הלבן שגרם לה להיבחר לפי אבחנה 3 קיימת קשת לבנה נוספת שחוצה את החתך - סתירה. □

טענה 4. האלגוריתם מחזיר עץ פורש מינימלי

הוכחה. נוכיח באינדוקציה שבכל שלב בריצת האלגוריתם אוסף הקשתות הלבנות מכילות עץ פורש מינימלי כלשהו:
בסיס: טריוויאלי באתחול
צעד: לפי ההנחה אוסף הקשתות הלבנות בצעד ה-i מכילות עפ"מ כלשהו. נניח שהקשת, e, שמחקנו בשלב ה-$i+1$ שייכת לעפ"מ הנ"ל (אחרת סיימנו). נסתכל על החתך שמחיקת הקשת יוצרת, ועל המעגל (הלבן) שגרם למחיקת הקשת, אז קיימת קשת נוספת על המעגל שחוצה את החתך, $e' \neq e$ כך ש-$w(e) \geq w(e')$ ולכן ניתן להחליף בין הקשתות הנ"ל כך שהעפ"מ החדש מוכל כולו בקשתות לבנות. □

כחול + אדום

נשים לב שבהוכחה של טענה 2 הוכחנו שאם בשלב מסויים אוסף הקשתות הכחולות מוכלות בעמ"פ אז ניתן להפעיל את הכלל הכחול ולשמר את הטענה. באותו אופן, בהוכחה של טענה 4 הוכחנו שאם בשלב מסויים אוסף הקשתות שאינן אדומות מכילות עמ"פ אז ניתן להפעיל את הכלל האדום ולשמר את הטענה. נובע מכך שניתן להפעיל סדרה של כללים כחולים ואדומים בסדר שרירותי ולשמר את שתי הטענות.

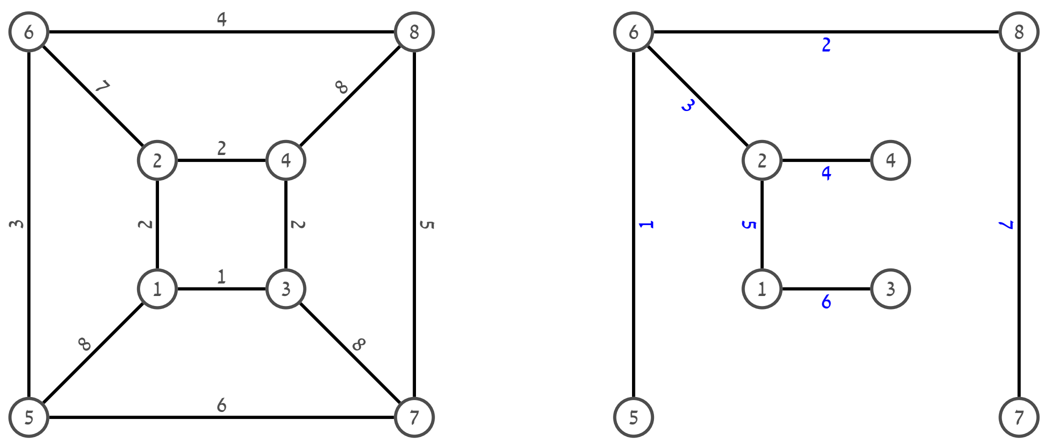
אלגוריתם פרים Prim

אלגוריתם פרים מתחיל מעץ שמכיל צומת אחד ובכל איטרציה מוסיף לעץ את הקשת הכי זולה שקצה אחד שלה בדיוק נוגע בעץ. פורמלית:

1. אתחול: $U \leftarrow \{u\}, B \leftarrow \emptyset$, כאשר u צומת שרירותי.
2. כל עוד $T = (V, B)$ אינו קשיר הפעל את הכלל הכחול:
   (א) בחר את החתך הלבן, U, וקשת קלה, uv, שחוצה אותו
   (ב) $B \leftarrow B \cup \{uv\}$, $U \leftarrow U \cup \{v, u\}$

אבחנה 5. אלגוריתם פרים הוא מימוש של האלגוריתם הכללי שמפעיל את הכלל הכחול.

דוגמה:



הערות:

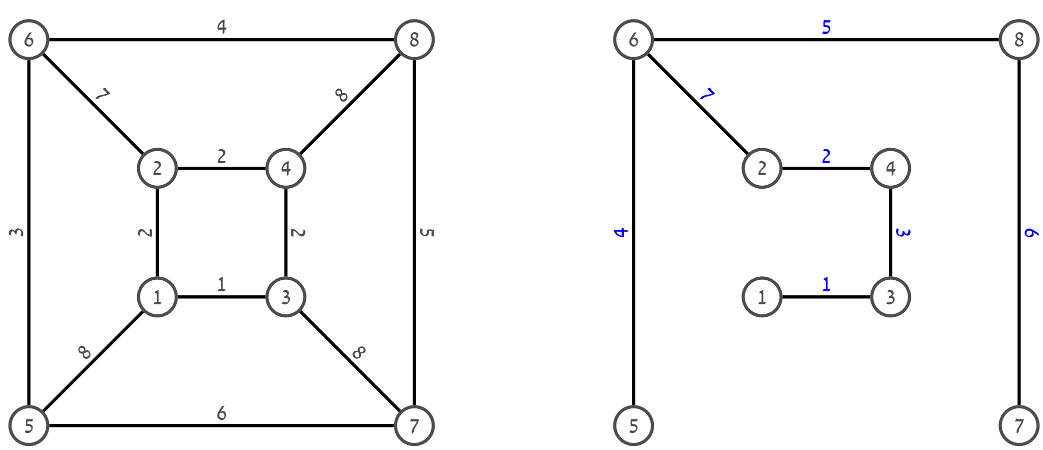
- כדי לממש את האלגוריתם צריך לדעת בכל שלב אילו קשתות חוצות את החתך ולבחור מהן את הקלה ביותר
- כאשר מוסיפים צומת לחתך יתכנו השינויים הבאים:
  - קשת שחצתה את החתך עכשיו היא פנימית לחתך
  - קשת חיצונית לחתך עכשיו חוצה את החתך
- השינויים היחידים הם עבור קשתות שנוגעות בצומת שהוסף לחתך ולכן בכל פעם שמוסיפים צומת לחתך מעדכנים רק את הקשתות שנוגעות בו, סך הכל מעדכנים כל קשת פעמיים לכל היותר.
- נשים לב שאם שומרים את הקשתות שחוצות את החתך בערימת מינימום אז אנחנו מבצעים $|E|$ הכנסות ו-$|V|$ הוצאות. הוצאה והכנסה של כל קשת לוקחת $O(\log|E|)$ לכל היותר.
- סך הכל זמן הריצה של האלגוריתם הוא $O(|E|\log|E|) = O(|E|\log|V|)$
- קיימים מבני נתונים יותר יעילים עם פונקציונליות של ערימת מינימום שתומכים בהכנסה בזמן ממוצע $O(1)$ והוצאה בזמן $O(\log|E|)$ ולכן ניתן לממש את האלגוריתם בזמן $O(|E| + |V|\log|V|)$

אלגוריתם קרוסקל Kruskal

אלגוריתם קרוסקל מתחיל מיער ללא קשתות, בכל שלב באלגוריתם נמזג שני רכיבי קשירות באמצעות הקשת הקלה ביותר שמחברת שני רכיבי קשירות. פורמלית:

1. אתחול: $\mathcal{C} \leftarrow \{\{v\} : v \in V\}$,
2. כל עוד $T = (V, B)$ אינו קשיר הפעל את הכלל הכחול:
   (א) תהי e הקשת הקלה ביותר שמחברת שני רכיבי קשירות, C_i, C_j
   (ב) עדכן $B \leftarrow B \cup \{e\}$, $\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C} \setminus \{C_i, C_j\} \cup \{C_i \cup C_j\}$

דוגמה:



הערות:

- ניתן לממש את האלגוריתם באופן הבא:
  - מיין את הקשתות בסדר לא יורד של משקלן
  - עבור כל קשת לפי הסדר, אם היא מחברת שני רכיבי קשירות הפעל עליה את הכלל הכחול ועדכן את C
- זמן הריצה של מימוש כזה הוא $O(|E|\log|E|)$ עבור המיון ובנוסף לכל קשת צריך לבדוק אם היא מחברת שני רכיבים שונים ואם כן לעדכן את מבנה הרכיבים. כזכור מקורס מבני נתונים קיים מימוש פשוט שעושה זאת בזמן ממוצע של $O(\log|V|)$ ולכן הזמן הריצה הכולל הוא $O(|E|\log|E|) = O(|E|\log|V|)$.

משפט האפיון של עצים פורשים מינימלים

הגדרה 6. בהינתן עץ $T = (V, F)$ וקשת $e \notin F$ נסמן ב-C_e את המעגל שמכיל את e בגרף $(V, F \cup \{e\})$

הגדרה 7. בהינתן עץ $T = (V, F)$ וקשת $e = uv \in F$ נסמן ב-U_e את החתך שמכיל את כל הצמתים שישיגים מ-u בגרף $(V, F \setminus \{e\})$

משפט 1. עץ פורש $T = (V, F)$ של גרף $G = (V, E)$ הוא מינימלי אמ"מ לכל $e \in F$ מתקיים ש-e קשת במשקל מינימלי שחוצה את U_e. באופן שקול, T מינימלי אמ"מ לכל $e \in E \setminus F$ מתקיים ש-e קשת במשקל מקסימלי במעגל C_e

הוכחה. נוכיח כיוון אחד. נניח שמתקיים שלכל $e \in F$ מתקיים ש-e קשת במשקל מינימלי שחוצה את U_e. אז עץ כזה מתקבל על ידי הפעלה של הכלל הכחול על אוסף החתכים $\{U_e : e \in F\}$. באופן דומה, נניח שלכל $e \in E \setminus F$ מתקיים ש-e קשת במשקל מקסימלי במעגל C_e אז עץ כזה מתקבל על ידי הפעלת הכלל האדום על אוסף המעגלים $\{C_e : e \in E \setminus F\}$ $\square$