

הרצאה 2

חיפוש לעומק - Depth First Search (DFS)

תזכורת

בהינתן גרף G וצומת s רוצים למצוא עץ T שפורש את כל הצמתים ששייכים ל- s .

• אלגוריתם כללי

• BFS

• מימוש BFS באמצעות תור

DFS

1. אתחול: $U \leftarrow \{s\}, F \leftarrow \emptyset$, לכל $v \in V$ מציבים $p(v) \leftarrow nil, \alpha(v) \leftarrow -1$, $i \leftarrow 0, \alpha(s) \leftarrow 0$

2. כל עוד ישנה קשת uv שחוצה את U ($u \in U$) בחר קשת עם $\alpha(u)$ מקסימלי

(א) $U \leftarrow U \cup \{v\}, F \leftarrow F \cup \{uv\}$

(ב) $p(v) \leftarrow u$

(ג) $\alpha(v) \leftarrow i$

(ד) $i \leftarrow i + 1$

דוגמה

מימוש על ידי מחסנית

1. אתחול:

(א) $U \leftarrow \{s\}$

(ב) $F \leftarrow \emptyset$

(ג) לכל $v \in V$ מציבים $p(v) \leftarrow nil, \alpha(v) \leftarrow -1$

(ד) $\alpha(s) \leftarrow 0$

(ה) $i \leftarrow 0$

(ו) $S \leftarrow (s)$

2. כל עוד המחסנית לא ריקה

(א) $u \leftarrow S.top()$

(ב) אם קיימת קשת uv שחוצה את U ($u \in U$)

i. $U \leftarrow U \cup \{v\}, F \leftarrow F \cup \{uv\}$

ii. $p(v) \leftarrow u$

iii. $\alpha(v) \leftarrow i$

iv. $i \leftarrow i + 1$

v. $S.push(v)$

(ג) אחרת $S.pop()$

טענה 1. בזמן ריצת האלגוריתם, כל הצמתים הגבוליים נמצאים במחסנית

□

הוכחה. באינדוקציה על צעד האלגוריתם

טענה 2. המחסנית מונוטונית עולה ביחס ל- α

□

הוכחה. באינדוקציה על צעד האלגוריתם

מסקנה 1. זהו מימוש של DFS

הערה: מכיוון שזמני הגילוי של הצמתים הם יחודיים (בשונה מהמרחקים שלהם למשל) אזי המימוש באמצעות מחסנית שקול לכל מימוש אחר של DFS (הדבר אינו נכון לגבי מימוש של BFS באמצעות תור). לכן, כל טענה לגבי המימוש באמצעות מחסנית תקפה עבור DFS באופן כללי.

תכונות

טענה 3. בזמן ריצת DFS, הצמתים בפחסיית s, \dots, v , הם המסלול ב- T מ- s ל- v

□

הוכחה. באינדוקציה על צעד האלגוריתם

מסקנה 2. עבור שני צמתים u ו- v , v צאצא של u ב- T אם ורק אם u נמצא בפחסיית כאשר v מוכנס אליה.

הוכחה. כיוון ראשון מידי מטענה 3.

כיוון שני גם מטענה 3 כאשר האבחנה היא שבעץ, צומת u הוא אב קדמון של v אם ורק אם הוא נמצא על המסלול מ- s ל- v

□

הגדרה 1 (צומת לבן). בזמן ריצת האלגוריתם, צומת v יקרא לבן אם $v \notin U$

למה 1 (המסלול הלבן). צומת v צאצא של צומת u ב- T אם"כ כאשר u מוכנס למחסיית קיים ממנו מסלול של צמתים לבנים לצומת v

הוכחה. כיוון 'אם' באינדוקציה על אורך המסלול, כאשר האבחנה היא שכאשר הצומת הראשון במסלול מוכנס למחסיית, u עדיין שם.

□

כיוון 'רק אם' מניחים בשלילה וסותרים את טענה 3

סיווג קשתות

בהינתן גרף מכוון ותת עץ (מושרש) שלו מסווגים את קשתות הגרף ל-4 סוגים:

1. קשתות עץ

2. קשתות קדמיות

3. קשתות אחוריות

4. קשתות חוצות

הערה: בגרף לא מכוון נתייחס לקשתות קדמיות וקשתות אחוריות כקשתות אחוריות.

יער DFS**סיכום**

מיון טופולוגי באמצעות DFS