

הרצאה 8

מסלולים קלים ביותר - בלמן פורד, דייקסטרה

אלגוריתם בלמן-פורד

1. אתחול: לכל $v \in V$ מציבים $d(v) \leftarrow \infty$, $p(v) \leftarrow nil$. מציבים $d(s) \leftarrow 0$.

2. מבצעים $|V| - 1$ פעמים:

לכל קשת $e \in E$ בצע ניסיון שיפור לפי e

3. אם עדיין יש קשתות משפרות קבע כי יש מעגל שלילי, אחרת החזר את d ו- p

זמן הריצה של האלגוריתם הוא $O(|V||E|)$.

טענה 1. אם אין מעגלים שלילים אז בסיום האלגוריתם $d(v) = \delta(s, v)$ לכל צומת $v \in V$.

□ הוכחה. באינדוקציה על עומק הצומת בעץ המסלולים הקצרים ביותר

טענה 2. אם קיים מעגל שלילי האלגוריתם קובע שקיים כזה.

□ הוכחה. נובע מהגדרת האלגוריתם והטענות על האלגוריתם הגנרי.

משפט 1. אלגוריתם בלמן פורד פולט עץ מסלולים קלים ביותר אם בגרף אין מעגלים שלילים, אחרת הוא מודיע כי קיים כזה.

□ הוכחה. מיידי מטענות 2 ו-1.

אלגוריתם דייקסטרה

אלגוריתם דייקסטרה מניח שבגרף אין משקלים שלילים.

1. אתחול: לכל $v \in V$ מציבים $d(v) \leftarrow \infty$, $p(v) \leftarrow nil$. מציבים $d(s) \leftarrow 0$, וכן $Q \leftarrow V$

2. כל עוד Q לא ריק

(א) יהי $u \in Q$ צומת עם ערך d מינימלי

(ב) הוצא את u מ- Q ולכל $uv \in E$ בצע ניסיון שיפור לפי uv

אם ממשיך את Q על ידי ערימת מינימום אז זמן הריצה של האלגוריתם הוא $O(|V| + |E| \log |V|)$.

טענה 3. ערכי d של הצמתים לפי סדר הוצאתם מ- Q הם פונקציה מונוטונית לא יורדת.

□ הוכחה. באינדוקציה על צעד האלגוריתם + שימוש בנתון שלא קיימים משקלים שלילים.

מסקנה 1. ברגע שצומת יצא מ- Q , ערך d שלו לא משתנה.

טענה 4. בסיום ריצת האלגוריתם אין בגרף קשתות משפרות.

□ הוכחה. הוכחה באינדוקציה על צעד האלגוריתם שאין קשתות משפרות בין צמתים מחוץ ל- Q .

משפט 2. אלגוריתם דייקסטרה פולט את עץ המסלולים הקלים ביותר.

□ הוכחה. לפי טענה 4 והטענות על האלגוריתם הגנרי.