הרצאה 12

רשתות זרימה

אלגוריתם אדמונדס קרפ, שידוך בגרף דו צדדי

תזכורת

האלגוריתם הגנרי של פורד פלקרסון:

1. אתחול: מציבים $f(e) \leftarrow 0$ לכל $e \in E$
2. כל עוד יש מסלול שיפור ברשת השיורית (G_f, s, t, c_f)
   (א) מציבים ב-f את הזרימה המשופרת לפי למת שיפור הזרימה
3. פולטים את f

ראינו שאלגוריתם זה אינו פולינומי אפילו כאשר כל הקיבולים שלמים (ואף במקרה הכללי הוא אינו עוצר כלל).

אלגוריתם אדמונדס קרפ

מקרה פרטי של אלגוריתם זה הוא האלגוריתם של אדמונדס וקרפ:

1. אתחול: מציבים $f(e) \leftarrow 0$ לכל $e \in E$
2. כל עוד יש מסלול שיפור ברשת השיורית (G_f, s, t, c_f)
   (א) יהי P מסלול קצר ביותר מ-s ל-t.
   (ב) שפר לפי P והצב ב-f את הזרימה המשופרת לפי למת שיפור הזרימה
3. פולטים את f

כעת נראה שאלגוריתם זה הוא פולינומי ללא תלות בפונקציית הקיבול.
נסמן ב-$f_1, f_2 \ldots$ את פונקציית הזרימה שמחשב האלגוריתם בכל איטרציה, וב-$d_{f_i}(v)$ את המרחק של הצומת v מהצומת s ברשת השיורית.

טענה 1. לכל i ולכל v מתקיים ש-$d_{f_i}(v) \leq d_{f_{i+1}}(v)$.

הוכחה. עבור i נתון, נוכיח באינדוקציה על k - המרחק של v מ-s ב-$G_{f_{i+1}}$.
בסיס: עבור $k = 0$ טריוויאלי.
צעד: עבור צומת v במרחק $k+1$ מ-s ומסלול $s = v_0, \ldots, v_k, v_{k+1} = v$ מתקיים (לפי הנחת האינדוקציה) ש:

$$d_{f_i}(v_k) \leq d_{f_{i+1}}(v_k)$$

אם הקשת $v_k v_{k+1}$ קיימת ב-G_{f_i} אז סיימנו.
אחרת במסלול השיפור ב-G_{f_i} קיימת הקשת $v_{k+1} v_k$ ומכאן:

$$d_{f_i}(v_{k+1}) = d_{f_i}(v_k) - 1 \leq d_{f_{i+1}}(v_k) - 1 = d_{f_{i+1}}(v_{k+1}) - 2$$

□

מסקנה 1. לכל v ולכל $i < j$ מתקיים $f_i(v) \leq f_j(v)$

מסקנה 2. אם $uv \in E_{f_{i+1}}$ ו-$uv \notin E_{f_i}$ אז $d_{f_{i+1}}(v) \geq d(f_i(v)) + 2$.

הגדרה 1 (קשת קריטית). בהינתן מסלול P נגיד שקשת e במסלול היא קריטית אם הקיבול שלה הוא המינימלי מבין כל הקשתות במסלול.

טענה 2. אם P מסלול שיפור ב-G_{f_i} ו-e קשת קריטית במסלול, אז $e \notin E_{fi+1}$.

הוכחה. נובע ישירות מהגדרת הרשת השיורית. □

מסקנה 3. במהלך ריצת האלגוריתם, קשת uv יכולה להיות קריטית $\frac{|V|}{2}$ פעמים לכל היותר.