הרצאה 10

תכנון דינאמי

אופטימזציה של כפל מטריצות

תזכורת: כפל נאיבי של מטריצה בגודל $a \times b$ עם מטריצה בגודל $b \times c$ לוקח $O(a \cdot b \cdot c)$ פעולות. התוצאה של המכפלה היא מטריצה מגודל $a \times c$.

כאשר כופלים n מטריצות, $A_1, \ldots, A_n$ מגדלים $x_i \times y_i$ בהתאמה, אז תוצאת המכפלה תהיה מטריצה מגודל $x_1 \times y_n$. מספר הפעולות שיש לבצע תלוי בסדר בו נבחר לבצע את המכפלה.

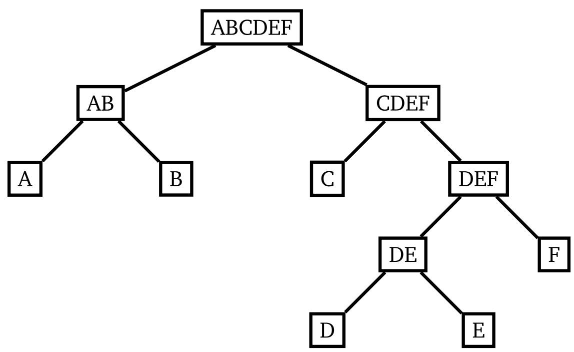
דוגמה: כמה פעולות נבצע כדי לבצע את המכפלה ABC ?

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{100} \end{pmatrix}$$

אם נבצע את המכפלה לפי הסדר משמאל לימין אז נזדקק ל-$100 \cdot 1 \cdot 100 = 10,000$ פעולות עבור הכפל של AB ו-$100 \cdot 1 \cdot 100 = 10,000$ פעולות נוספות עבור הכפל של $(AB)C$. אם נחשב את המכפלה $A(BC)$ אז נזדקק לסדר גודל של 200 פעולות בלבד !!!

בעיה: בהינתן n מטריצות, $A_1, \ldots, A_n$ מגדלים $x_i \times y_i$ בהתאמה, רוצים לחשב סדר מכפלות שדורש מינימום פעולות.

ייצוג סדר מכפלות ייצוג טבעי לסדר הפעולות הוא בעזרת עץ, למשל העץ הבא מתאים לחישוב $(AB)(C((DE)F))$:



נתייחס לעץ כזה כעץ ביטוי, עץ ביטוי הוא עץ בינרי מלא שבו העלים הם המטריצות מהקלט וכל צומת מייצג מכפלה של המטריצות המתאימות לעלים של תת העץ שלו.

אלגוריתם: עבור כל $1 \leq i \leq j \leq n$ נגדיר את $\alpha(i,j)$ להיות מספר הפעולות המינימלי שצריך כדי לבצע את המכפלה $A_i \cdot A_{i+1} \cdot \ldots \cdot A_j$

אז מתקיים ש:

$$\alpha(i,j) = \min_{i \leq k < j} \alpha(i,k) + \alpha(k+1,j) + x_i \cdot y_k \cdot y_j$$

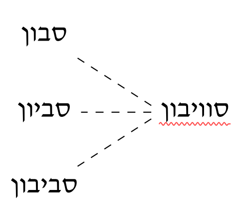
בנוסף מתקיים ש:

$$\forall\ 1 \leq i \leq n\ \alpha(i,i) = 0$$

סיבוכיות: אם מחשבים את ערכי נוסחת הנסיגה על ידי שימוש בטבלה, למשל, אז נדרש לחשב $O(n^2)$ ערכים. זמן החישוב של כל ערך הוא $O(n)$ ולכן בסך הכל זמן ריצת האלגוריתם הוא: $O(n^3)$.

התאמת מחרוזות

רוצים לבצע תיקון של שגיאות איות, למשל:



כדי לדעת אילו תיקונים להציע רוצים למדוד את המרחק בין המחרוזת שהוקלדה לבין המילה המוצעת.

בהינתן א"ב Σ נגדיר $\Sigma' = \Sigma \cup \{\varepsilon\}$. ונגדיר:

הגדרה 1 (הרחבה). מחרוזת $s' \in \Sigma'^*$ היא הרחבה של $s \in \Sigma^*$ אם לאחר מחיקת כל תווי ה-ε מ-s' מקבלים את s.

בהינתן פונקציית משקל $w : \Sigma' \times \Sigma' \to \mathcal{R}$ המרחק בין שתי הרחבות בעלות אורך זהה, l, הוא:

$$\sum_{i=1}^{l} w(s'_1[i], s'_2[i])$$

דוגמה 1.

ן	ו	ב	י	ו	ו	ס
ן	ו	ב	י	ε	ב	ס

דוגמה 2.

ן	ו	ε	ב	י	ו	ו	ס
ן	ו	י	ב	ε	ε	ε	ס

עבור פונקציית המשקל

$$w(\alpha, \beta) = \begin{cases} 0 & \text{if } \alpha = \beta \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

אז המרחק בדוגמה 1 הוא 2 ובדוגמה 2 הוא 4.

הגדרה 2 (מרחק)**.** המרחק בין שתי מחרוזות (לאו דווקא באורך זהה) מעל Σ הוא המרחק המינימלי האפשרי בין כל שתי הרחבות שלהן מאורך זהה.

הערה: אם מניחים שפונקציית המשקל אי שלילית אז מספר ההרחבות הרלוונטיות הוא סופי.
מטרה: בהינתן שתי מחרוזות רוצים לחשב את המרחק ביניהן.
פתרון: נסמן $|s| = m$, $|r| = n$ ו-$s_i = s[i] \dots s[m]$, $r_j =$ נגדיר $\alpha(s, r)$ להיות המרחק בין s ל-r.
ונחשב

$$\alpha(s, r) = \min \begin{cases} w(s[0], r[0]) + \alpha(s[1 \dots n-1], r[1 \dots m-1]) \\ w(\varepsilon, r[0]) + \alpha(s, r[1 \dots m-1) \\ w(s[0], \varepsilon) + \alpha(s[1 \dots n-1], r) \end{cases}$$

כמו כן מתקיים ש:

$$\begin{aligned} &\alpha(\varepsilon, \varepsilon) = 0 \\ &\alpha(\varepsilon, r) = w(\varepsilon, r[0]) + \alpha(\varepsilon, r[1 \dots m-1]) \\ &\alpha(s, \varepsilon) = w(s[0], \varepsilon) + \alpha(s[1 \dots n-1], \varepsilon) \end{aligned}$$