

הרצאה 9

תכנון דינאמי

שיבוץ אינטרוולים, מסלולים קלים ביותר

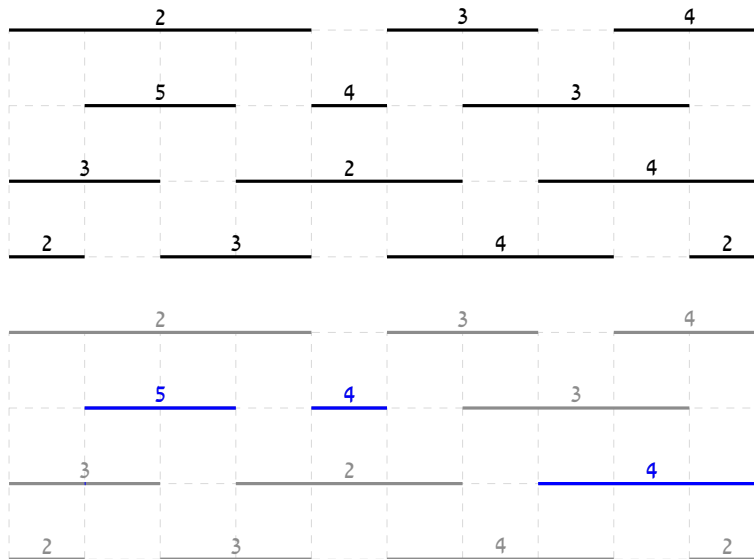
קבוצה בלתי תלויה של אינטרוולים עם משקל מקסימלי

נתונים n אינטרוולים (נניח שכבר אחרי מיון לפי זמן סיום) $A = (a_1, \dots, a_n)$ לכל אינטרוול זמן התחלה $s(a_i)$, זמן סיום $e(a_i)$ ומשקל $w(a_i)$. תת קבוצה $I \subseteq A$ של אינטרוולים נקראת בלתי תלויה אם לכל $a_i, a_j \in I$ אחד מהשניים מתקיים:

$$1. s(a_j) > e(a_i)$$

$$2. s(a_i) > e(a_j)$$

רוצים למצוא קבוצה בלתי תלויה של אינטרוולים עם משקל מקסימלי.
דוגמה: קלט לבעיה וקבוצה בלתי תלויה במשקל 13.



נסמן $A_i = (a_1, \dots, a_i)$ נגדיר

$$p(i) = \max \begin{cases} \max\{j : e(a_j) < s(a_i)\} \\ 0 \end{cases}$$

כלומר $j = p(i)$ הוא האינדקס המקסימלי כך ש- a_j מסתיים לפני ש- a_i מתחיל או 0 אם לא קיים כזה. נגדיר את $\alpha(i)$ להיות משקל פתרון אופטימלי עבור A_i אז $\alpha(n)$ הוא הערך אותו אנחנו מחפשים.

טענה 1.

$$\alpha(i) = \max \begin{cases} w(i) + \alpha(p(i)) \\ 0 + \alpha(i-1) \end{cases}$$

כמו כן מתקיים ש:

$$\alpha(0) = 0$$

הוכחה. באינדוקציה על i .

בסיס: עבור $i = 0$ טריוויאלי.

עבור i כלשהו נקבע פתרון אופטימלי OPT ונסמן $OPT_i = OPT \cap A_i$. אם $a_{i+1} \in OPT$ אז OPT לא יכול להכיל אף אינטרוול $a_{p(i)+1}, \dots, a_{i+1}$ לפי הנחת האינדוקציה

$$\alpha(p(i) + 1) \geq w(OPT_{p(i)})$$

ולכן הטענה מתקיימת כי

$$\alpha(i) \geq \alpha(p(i)) + w(a_i) \geq w(OPT_{p(i)}) + w(a_i)$$

מצד שני, אם $a_{i+1} \notin OPT$ אז לפי ההנחה

$$\alpha(i-1) \geq OPT_{i-1}$$

והטענה מתקיימת.

□

חישוב יעיל של O

כיצד נחשב את O ביעילות? נשים לב שאם מחשבים את ערכי O מ-1 עד n ושומרים את הערכים (למשל במערך) אז חישוב של כל ערך לוקח $O(1)$ זמן. זמן הריצה של האלגוריתם:

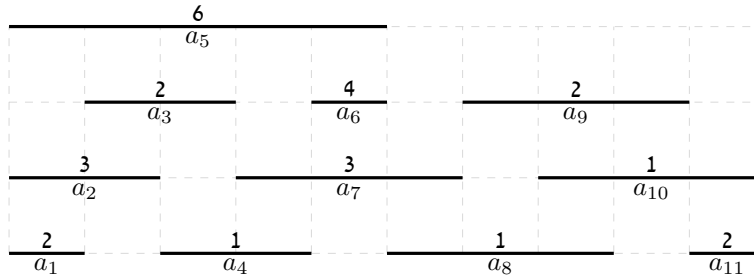
1. מיון - $O(n \log n)$

2. חישוב p - $O(n \log n)$ (חיפוש בינארי לכל i)

3. חישוב O - $O(n)$

סך הכל $O(n \log n)$

דוגמת הרצה:



נחשב:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p	0	0	0	1	2	0	4	3	6	7	7	9
α	0	2	3	4	4	6	8	8	9	10	10	12

נמצא את הקבוצה עצמה:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p	0	0	0	1	2	0	4	3	6	7	7	9
α	0	2	3	4	4	6	8	8	9	10	10	12

נקודות חשובות:

- מה יקרה אם במקום לחשב את ערכי α בסדר עולה ושמירת הערכים במערך נחשב את ערכי α באופן רקורסיבי על המחשנית?

- מה יקרה אם לכל תא במערך נזכור גם את הקבוצה שמתאימה לערך התא?

מסלולים קלים ביותר

כעת נפתור את בעיית המסלול הקל ביותר.

תיכונה: בהינתן גרף (מכוון או לא) $G = (E, V)$, פונקציית משקל $w : E \rightarrow \mathcal{R}$, צומת מקור $s \in V$, וצומת יעד $t \in V$ רוצים למצוא מסלול מ- s ל- t במשקל מינימלי.

ניסיון ראשון

נגדיר את $a(v)$ להיות המסלול הקל ביותר מ- s ל- v , אז מתקיים ש:

$$a(v) = \min_{uv \in E} a(u) + w(uv)$$

מה הבעיה?

ניסיון שני

נגדיר את $a(v, U)$ להיות המסלול הקל ביותר מ- s ל- v בגרף $G[U]$, אז מתקיים ש:

$$a(v, U) = \min_{uv \in E} a(u, U \setminus \{v\}) + w(uv)$$

מה הבעיה ?

פתרון

נגדיר את $a(v, k)$ להיות מסלול קל ביותר מ- s ל- v עם k קשתות לכל היותר, ונחשב:

$$\forall v \neq s, 1 \leq k \leq n-1 \quad a(v, k) = \min_{uv \in E} a(u, k-1) + w(uv)$$

$$\forall u \neq s \quad a(u, 0) = \infty$$

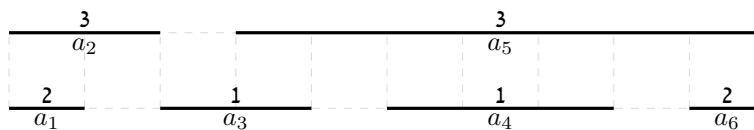
$$a(s, 0) = 0$$

טענה 2. אם G אין מעגלים שליליים אז לכל v , $a(v, n-1)$ הוא משקל המסלול הקל ביותר מ- s ל- v .

הוכחת נכונות: כתרגיל.

גרף החישוב

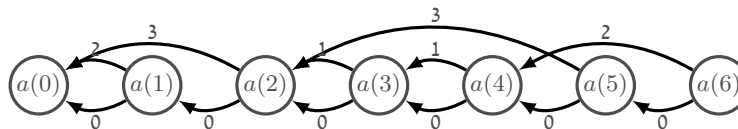
בהינתן נוסחת הנסיגה, f , נסתכל על גרף החישוב שלה, G_f זהו גרף מכוון שבו כל צומת מתאימה למצב (ערך פרמטרים מסוים לנוסחה) וקיימת קשת ממצב s_i למצב s_j אם "מ" לצורך חישוב מצב s_i יש צורך לחשב את מצב s_j . למשל עבור הקלט הבא לבעיית האינטרוולים:



ונוסחת הנסיגה

$$\alpha(i) = \max \begin{cases} w(i) + \alpha(p(i)) \\ 0 + \alpha(i-1) \end{cases}$$

גרף החישוב יראה כך (ניתן אף לשים משקלים מתאימים על הקשתות):



מה נדרוש מגרף החישוב ?

1. חסר מעגלים

2. לא גדול מדי

3. ניתן לחשב את הערכים של הבורות

דוגמה נוספת, כיצד יראה גרף החישוב עבור נוסחת הנסיגה של מסלולים קלים ביותר והקלט הבא:

