## 10 הרצאה

## תכנון דינאמי

כפל מטריצות, התאמת מחרוזות

## אופטימזציה של כפל מטריצות

תזכורת: כפל נאיבי של מטריצה בגודל a imes b עם מטריצה בגודל כפל לוקח לוקח a imes b עם מטריצה של מטריצה בגודל כפל מטריצה מ

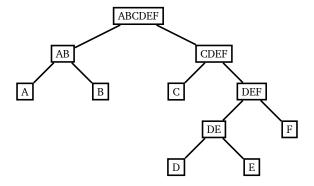
כאשר כופלים n מטריצה מגודל  $x_i imes y_i$  בהתאמה, אז תוצאת המכפלה תהיה מטריצה מגודל  $A_1, \dots, A_n$  מספר כופלים n מספר כופעולות שיש לבצע תלוי בסדר בו נבחר לבצע את המכפלה.

? ABC ממה פעולות נבצע כדי לבצע את המכפלה דוגמה: כמה פעולות נבצע כדי לבצע את

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{100} \end{pmatrix}$$

ו- AB אם נבצע את המכפלה לפי הסדר משמאל לימין אז נזדקק ל- $100\cdot 1\cdot 100=10,000\cdot 1\cdot 100$  פעולות עבור הכפל של אז נזדקק לסדר גודל של אז נזדקק לסדר גודל של A(BC) אז נזדקק לסדר גודל של A(BC). אם נחשב את המכפלה A(BC) אז נזדקק לסדר גודל של 200 פעולות בלבד A(BC)

בעיה: בהינתן n מטריצות,  $A_1,\dots,A_n$  מגדלים  $x_i imes y_i$  בהתאמה, רוצים לחשב סדר מכפלות שדורש מינימום פעולות (AB)(C((DE)F)) ייצוג סדר מכפלות ייצוג טבעי לסדר הפעולות הוא בעזרת עץ, למשל העץ הבא מתאים לחישוב



נתייחס לעץ כזה כעץ ביטוי, עץ ביטוי הוא עץ בינרי מלא שבו העלים הם המטריצות מהקלט וכל צומת מייצג מכפלה של המטריצות המתאימות לעלים של תת העץ שלו.

אלגוריתם: עבור כדי לבצע את מספר המכפלה מספר להיות מספר נגדיר את נגדיר את בור כל ו $1 \leq i \leq j \leq n$  אלגוריתם: עבור כל  $A_i \cdot A_{i+1} \cdot \ldots \cdot A_j$ 

אז מתקיים ש:

$$\alpha(i,j) = \min_{i \le k < j} \alpha(i,k) + \alpha(k+1,j) + x_i \cdot y_k \cdot y_j$$

בנוסף מתקיים ש:

$$\forall 1 \leq i \leq n \ \alpha(i, i) = 0$$

סיבוביות: אם מחשבים את ערכי נוסחת הנסיגה על ידי שימוש בטבלה, למשל, אז נדרש לחשב  $O(n^2)$  ערכים. זמן החישוב של כל ערך הוא  $O(n^3)$  ולכן בסך הכל זמן ריצת האלגוריתם הוא:

דוגמת הרצה:

$$A_1^{9\times 2}A_2^{2\times 10}A_3^{10\times 4}A_4^{4\times 3}$$

## התאמת מחרוזות

רוצים לבצע תיקון של שגיאות איות, למשל:

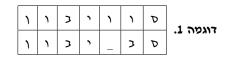


כדי לדעת אילו תיקונים להציע רוצים למדוד את המרחק בין המחרוזת שהוקלדה לבין המילה המוצעת. בדי לדעת אילו גגדיר  $\Sigma' = \Sigma \cup \{\_\}$  ונגדיר:

s אם לאחר פחיקת כל תווי ה-  $s' \in \Sigma'^*$  מקבלים את  $s' \in \Sigma'^*$  אם לאחר פחיקת כל תווי ה- מ- $s' \in \Sigma'^*$ 

בהינתן פונקציית משקל  $w:\Sigma' imes\Sigma' o\mathcal{R}$  המרחק בין שתי הרחבות בעלות אורך זהה, l , הוא:

$$\sum_{i=1}^{l} w(s_1'[i], s_2'[i])$$



١	١	_	3	,	١	١	D	דוגמה 2.
١	١	,	3	_	_	_	D	וגעוו ב.

עבור פונקציית המשקל

$$w(\alpha, \beta) = \begin{cases} 0 & \text{if } \alpha = \beta \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

.4 אז המרחק בדוגמה 1 הוא 2 ובדוגמה 2 הוא 4.

הגדרה 2 (מרחק). הפרחק בין שתי פחרוזות (לאו דווקא באורך זהה) פעל  $\Sigma$  הוא הפרחק הפיניפלי האפשרי בין כל שתי הרחבות שלהן פאורך זהה.

הערה: אם מניחים שפונקציית המשקל אי שלילית אז מספר ההרחבות הרלוונטיות הוא סופי.

מטרה: בהינתן שתי מחרוזות רוצים לחשב את המרחק ביניהן.

 $\lfloor x[j\ldots n-1]$  ל-[l=n , |s|=m נסמן פתרון: נסמן המרחק וי-(l=n , |s|=m ל-(l=n

. ונחשב

$$\alpha(i,j) = \min \begin{cases} w(s[i], r[j]) + \alpha(i+1, j+1]) \\ w(\_, r[j]) + \alpha(i, j+1) \\ w(s[i],\_) + \alpha(i+1, j) \end{cases}$$

כמו כן מתקיים ש:

$$\alpha(m, n) = 0$$
 $\alpha(m, k) = w(\_, r[k]) + \alpha(m, k + 1]) \quad \forall \ 0 \le k < n$ 
 $\alpha(k, n) = w(s[k], \_) + \alpha(k + 1, n]) \quad \forall \ 0 \le k < m$ 

סיבוכיות: אם מחשבים את ערכי נוסחת הנסיגה על ידי שימוש בטבלה, למשל, אז נדרש לחשב mn ערכים וחישוב של כל ערך לוקח O(mn) פעולות. בסך הכל מקבלים O(mn) פעולות.