הרצאה 8

מסלולים קלים ביותר

בלמן פורד, דייקסטרה

אלגוריתם בלמן-פורד

1. אתחול: לכל $v \in V$ מציבים $d(v) \leftarrow \infty$, $p(v) \leftarrow nil$. מציבים $d(s) \leftarrow 0$
2. מבצעים $|V|-1$ פעמים:
   (א) לכל קשת $e \in E$ בצע ניסיון שיפור לפי e
3. אם עדיין יש קשתות משפרות קבע כי יש מעגל שלילי, אחרת החזר את d ו-p

זמן הריצה של האלגוריתם הוא $O(|V||E|)$.

טענה 1. אם אין מעגלים שליליים אז בסיום האלגוריתם $d(v) = \delta(s,v)$ לכל צומת $v \in V$.

הוכחה. באינדוקציה על עומק הצומת בעץ לפי p. □

טענה 2. אם קיים מעגל שלילי האלגוריתם קובע שקיים כזה.

הוכחה. נובע מהגדרת האלגוריתם והטענות על האלגוריתם הגנרי. □

משפט 1. אלגוריתם בלמן פורד פולט עץ מסלולים קלים ביותר אם בגרף אין מעגלים שליליים, אחרת הוא מודיע כי קיים כזה.

הוכחה. מיידי מטענות 2 ו-1. □

אלגוריתם דייקסטרה

אלגוריתם דייקסטרה מניח שבגרף אין משקלים שליליים.

1. אתחול: לכל $v \in V$ מציבים $d(v) \leftarrow \infty$, $p(v) \leftarrow nil$. מציבים $d(s) \leftarrow 0$, וכן $Q \leftarrow V$
2. כל עוד Q לא ריק
   (א) יהי $u \in Q$ צומת עם ערך d מינימלי
   (ב) הוצא את u מ-Q ולכל $uv \in E$ בצע ניסיון שיפור לפי uv

אם ממשים את Q על ידי ערימת מינימום אז זמן הריצה של האלגוריתם הוא $O(|V| + |E| \log |V|)$.

טענה 3. ערכי d של הצמתים לפי סדר הוצאתם מ-Q הם פונקציה מונוטונית לא יורדת.

הוכחה. באינדוקציה על צעד האלגוריתם + שימוש בנתון שלא קיימים משקלים שליליים. □

מסקנה 1. ברגע שצומת יצא מ-Q, ערך d שלו לא משתנה.

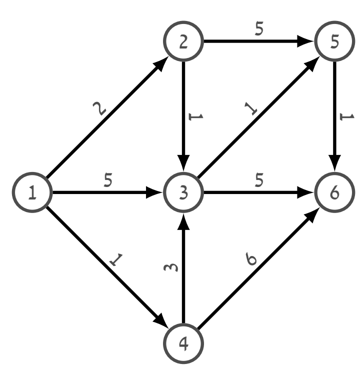
טענה 4. בסיום ריצת האלגוריתם אין בגרף קשתות משפרות.

הוכחה. הוכחה באינדוקציה על צעד האלגוריתם שאין קשתות משפרות בין צמתים מחוץ ל-Q. □

משפט 2. אלגוריתם דייקסטרה פולט את עץ המסלולים הקלים ביותר.

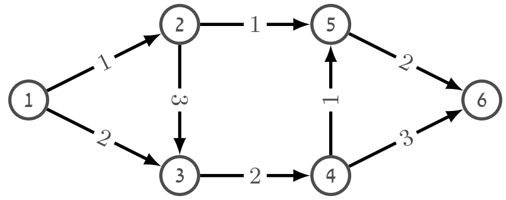
הוכחה. לפי טענה 4 והטענות על האלגוריתם הגנרי. □

דוגמה

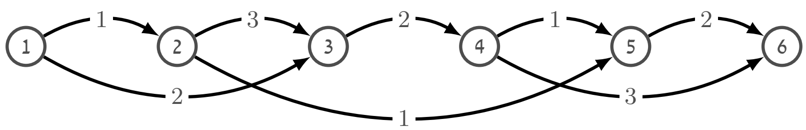


מסלולים קלים ביותר בגרף חסר מעגלים

כאשר הגרף חסר מעגלים ניתן למצוא את משקל המסלול הקל ביותר על ידי נוסחה רקורסיבית פשוטה.
דוגמה: נתון גרף חסר מעגלים.



ונתון מיון טופולוגי שלו:



טענה 5.

$$\delta(j) = \min_{ij \in E} \delta(i) + w(ij)$$

הוכחה. באינדוקציה על j. □

נשים לב שאם מחשבים את הערך של δ לפי סדר המיון הטופולוגי אז סיבוכיות החישובי היא $O(|E| + |V|)$.
הערה: ניתן גם לשחזר את המסלולים הקלים ביותר על ידי שמירת מצביע לאבא של כל צומת.
שאלה: מדוע אי אפשר להשתמש באותה טכניקה גם עבור גרפים שמכילים מעגלים?