הרצאה 5

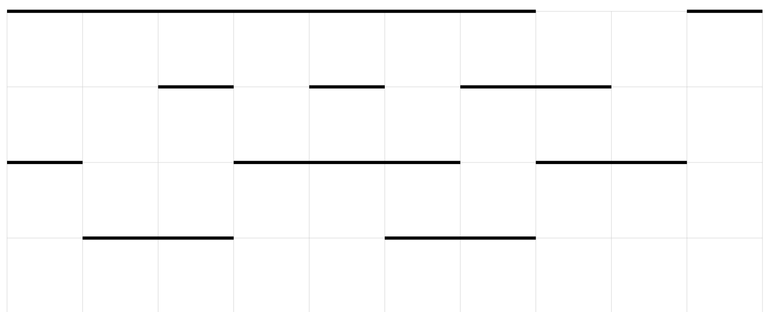
אלגוריתמים חמדניים

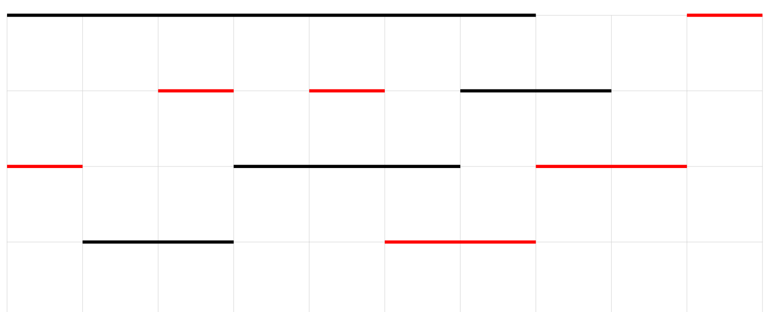
הקדמה

לעיתים קרובות אפשר לייצג בעיות אופטימיזציה כקבוצה של אלמנטים כאשר פתרון חוקי הוא תת קבוצה של אלמנטים שמקיימת תכונות מסויימות. למשל, עץ פורש מינימלי. בדרך כלל יש פונקציית מחיר / רווח לכל תת קבוצה והמטרה שלנו היא למזער / למקסם את הערך הזה.
אלגוריתם חמדן, באופן לא פורמלי, הוא כזה שבונה פתרון (תת קבוצה של אלמנטים) באופן איטרטיבי ובכל שלב מוסיף / מסיר מהקבוצה

שיבוץ אינטרוולים

נתונים n אינטרוולים $A=\{(a_1,b_1),\ldots,(a_n,b_n)\}$, $a_i,b_i\in\mathbb{R}_+$ וכן $a_i\leq b_i$ רוצים למצוא תת קבוצה בגודל מקסימלי $I\subseteq A$ כך שהאינטרוולים ב-I זרים בזוגות, כלומר לכל $i\leq j$, כך ש-$(a_i,b_i),(a_j,b_j)\in I$ אחד התנאים מתקיימים: $b_i<a_j$ או ש-$a_i>b_j$. דוגמה:

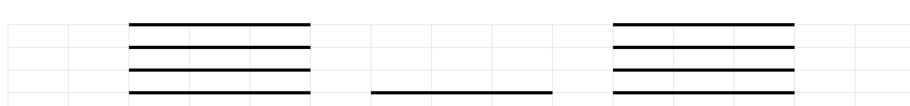




דוגמאות לגישות חמדניות שלא עובדות:
לבחור את האינטרוול עם זמן התחלה הכי מוקדם

לבחור את האינטרוול הכי קצר

לבחור את האינטרוול שנחתך עם הכי מעט אינטרוולים



אלגוריתם חמדן:

1. אתחול: $I\leftarrow\emptyset$, $b\leftarrow 0$
2. עבור כל אינטרוול (a_i,b_i) בסדר לא יורד של ערכי b_i:

(א) אם $a_i \geq b$

i. $I \leftarrow I \cup \{(a_i, b_i)\}$

ii. $b \leftarrow b_i$

הוכחת נכונות: נוכיח את הטענה הבאה, בכל צעד של האלגוריתם קיימת קבוצה בגודל מקסימלי, I' כך ש-I רישא שלה ביחס למיון ע"פ ערכי b.