הרצאה 7

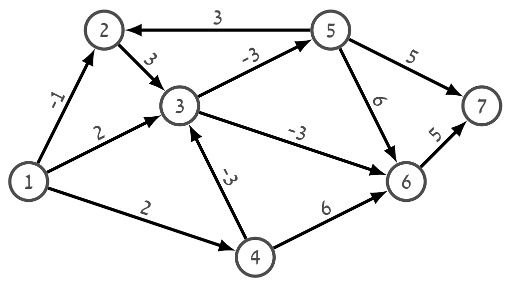
מסלולים קלים ביותר - אלגוריתם גנרי

הקדמה

נתון לנו גרף (מכוון או לא) $G=(V,E)$ וכן פונקציית משקל על הקשתות $w: E \to \mathbb{R}$. נסמן ב-$P_{st}=(s=v_0,\dots,v_k=t)$ מסלול מצומת s לצומת t וב-$\delta(s,t)$ את משקל המסלול הקל ביותר בין שני צמתים s ו-t. כלומר:

$$\delta(s,t)=\inf_{P_{st}} w(P_{st})$$

דוגמה: למה שווה $\delta(1,3)$ בגרף הבא ? למה שווה $\delta(1,7)$?



הערות:

- לאלגוריתמים למציאת מסלול קל ביותר שימושים רבים, אולי המידי שבהם הוא חישוב מסלול קצר ביותר בין שתי נקודות במפה.
- יתכנו משקלים שלילים על הקשתות, למשל אם אנחנו מעוניינים לתכנן מסלול לרכב חשמלי והמטרה שלנו היא לחסוך בסוללה.
- כאשר צומת t לא ישיג מצומת s נגדיר $\delta(s,t)=\infty$
- כאשר יש מעגל שלילי ישיג מצומת s, נגדיר $\delta(s,v)=-\infty$ לכל v שישיג מ-s (בדרך כלל במקרה כזה רק נרצה לזהות שזהו אכן המצב).

תכונות

טענה 1. אם אין בגרף מעגלים שלילים אז קיים מסלול פשוט קל ביותר

הוכחה. נסתכל על המסלול הקל ביותר עם הכי מעט מעגלים, נוריד מעגל אחד. $\square$

טענה 2. אם $p=(v_0,\dots,v_k)$ מסלול קל ביותר מ-v_0 ל-v_k אז לכל $0\le i\le j\le k$ מתקיים ש-$(v_i,\dots,v_j)$ מסלול קל ביותר בין v_i ל-v_j.

הוכחה. אם לא, נחליף את המסלול הקל ביותר בתת מסלול הקיים ונקבל מסלול קל יותר. $\square$

טענה 3 (אי שוויון המשולש)**.** לכל $u,v\in V, uv\in E$ מתקיים ש-$\delta(s,v)\le\delta(s,u)+w(uv)$

הוכחה. משקל המסלול הקל ביותר מ-s ל-u ומשם ל-v הוא $\delta(s,u)+w(uv)$ (אבל יתכנו מסלולים קלים יותר ממסלול זה). $\square$

מקור בודד

בהינתן גרף $G=(V,E)$ וצומת מקור s, נרצה לחשב את הערך $\delta(s,v)$ לכל $v\in V\setminus\{s\}$.

הגדרה 1 (פונקציית חסם עליון)**.** בהינתן גרף $G=(V,E)$, פונקציה $d: V\to\mathbb{R}$ תקרא פונקציית חסם עליון אם לכל $v\in V$ מתקיים ש-$d(v)\ge\delta(s,v)$

ניסיון שיפור: בהינתן גרף $G=(V,E)$ ופונקציית חסם עליון $d: V\to\mathbb{R}$ ניסיון שיפור של $d(v)$ לפי קשת uv מוגדר להיות $d(v)\leftarrow\min\{d(v),d(u)+w(uv)\}$

טענה 4. אם d היא פונקציית חסם עליון לפני ניסיון שיפור אז d היא פונקציית חסם עליון אחרי ניסיון השיפור.

הוכחה. אם אחרי ניסיון השיפור מתקיים ש-$d(v)<\delta(v)$ אז מתקיים ש:

$$d(v)<\delta(s,v)\le\delta(s,u)+w(uv)\le d(u)+w(uv)=d(v)$$

$\square$

הגדרה 2. (קשת משפרת) קשת uv תקרא משפרת אם $w(uv) < d(v) - d(u)$

אלגוריתם גנרי לחישוב ערך המסלול הקל ביותר ממקור בודד

1. אתחול: לכל $v \in V$ הצב $d(v) \leftarrow \infty$, הצב $d(s) \leftarrow 0$
2. כל עוד קיימת קשת משפרת uv
   (א) שפר את $d(v)$ לפי uv

טענה 5. אם האלגוריתם עוצר וצומת v ישיג מ-s אז $d(v) < \infty$

הוכחה. נניח בשלילה שלא ונסתכל על קשת uv במסלול מ-s ל-v כך ש-$d(u) < \infty$ ו-$d(v) = \infty$ - סתירה. □

טענה 6. אם קיים בגרף מעגל שלילי ישיג מ-s אז האלגוריתם לא עוצר.

הוכחה. נשים לב שקשת אינה משפרת אמ"מ $w(uv) \geq d(v) - d(u)$. נסתכל על מעגל שלילי $v_1, \ldots, v_k, v_1$ נשים לב ש:

$$0 = d(v_1) - d(v_k) + \sum_{i=1}^{k-1} d(v_{i+1}) - d(v_i) \leq w(v_1 v_k) + \sum_{i=1}^{k-1} w(v_{i+1} v_i) < 0$$

□

טענה 7. אם האלגוריתם עוצר אז $d(v) = \delta(v)$ לכל $v \in V$

הוכחה. נשים לב ש-d היא פונקציית חסם עליון והפעולה היחידה שהאלגוריתם מבצע היא ניסיון שיפור ולכן בסיום האלגוריתם d היא עדיין פונקציית חסם עליון, כלומר $d(v) \geq \delta(v)$ לכל $v \in V$.
נראה שמתקיים $d(v) \leq \delta(v)$. נניח בשלילה שקיים צומת ישיג מ-s, w, כך שהטענה לא מתקיימת עבורו. נסתכל על קשת uv במסלול קל ביותר מ-s ל-w כך ש-$d(u) = \delta(s,u)$ ו-$d(v) > \delta(s,v)$. מכיוון שזהו מסלול קל ביותר אז מתקיים ש-

$$w(uv) = \delta(v) - \delta(u) < d(v) - d(u)$$

ומכאן ש-uv קשת משפרת.

□