

הרצאה 12

רשתות זרימה

אלגוריתם אדמונדס קרפ, שידוך בגרף דו צדדי, משפט הול

תזכורת

האלגוריתם הגנרי של פורד פלקרסון:

1. אתחול: מציבים $f(e) \leftarrow 0$ לכל $e \in E$
 2. כל עוד יש מסלול שיפור ברשת השיורית (G_f, s, t, c_f)
 - (א) מציבים ב- f את הזרימה המשופרת לפי למת שיפור הזרימה
 3. פולטים את f
- ראינו שאלגוריתם זה אינו פולינומי אפילו כאשר כל הקיבולים שלמים (ואף במקרה הכללי הוא אינו עוצר כלל).

אלגוריתם אדמונדס קרפ

מקרה פרטי של אלגוריתם זה הוא האלגוריתם של אדמונדס וקרפ:

1. אתחול: מציבים $f(e) \leftarrow 0$ לכל $e \in E$
2. כל עוד יש מסלול שיפור ברשת השיורית (G_f, s, t, c_f)
- (א) יהי P מסלול קצר ביותר מ- s ל- t .
- (ב) שפר לפי P והצב ב- f את הזרימה המשופרת לפי למת שיפור הזרימה
3. פולטים את f

כעת נראה שאלגוריתם זה הוא פולינומי ללא תלות בפונקציית הקיבול. נסמן ב- f_1, f_2, \dots את פונקציית הזרימה שמחשב האלגוריתם בכל איטרציה, וב- $d_{f_i}(v)$ את המרחק של הצומת v מהצומת s ברשת השיורית.

- טענה 1.** לכל i ולכל v מתקיים $d_{f_i}(v) \leq d_{f_{i+1}}(v)$.
- הוכחה. עבור i נתון, נוכיח באינדוקציה על k - המרחק של v מ- s ב- $G_{f_{i+1}}$.
- בסיס:** עבור $k = 0$ טריוויאלי.
- צעד:** עבור צומת v במרחק $k + 1$ מ- s ומסלול $s = v_0, \dots, v_k, v_{k+1} = v$ מתקיים (לפי הנחת האינדוקציה) ש:

$$d_{f_i}(v_k) \leq d_{f_{i+1}}(v_k)$$

אם הקשת $v_k v_{k+1}$ קיימת ב- G_{f_i} אז סיימנו. אחרת במסלול השיפור ב- G_{f_i} קיימת הקשת $v_{k+1} v_k$ ומכאן:

$$d_{f_i}(v_{k+1}) = d_{f_i}(v_k) - 1 \leq d_{f_{i+1}}(v_k) - 1 = d_{f_{i+1}}(v_{k+1}) - 2$$

□

- מסקנה 1.** לכל v ולכל $j < i$ מתקיים $f_i(v) \leq f_j(v)$
- מסקנה 2.** אם $uv \in E_{f_{i+1}}$ ו- $uv \notin E_{f_i}$ אז $d_{f_{i+1}}(v) \geq d_{f_i}(v) + 2$
- הגדרה 1** (קשת קריטית). בהינתן מסלול P נגיד שקשת e במסלול היא קריטית אם הקיבול שלה הוא המינימלי מבין כל הקשתות במסלול.

טענה 2. אם P מסלול שיפור ב- G_{f_i} ו- e קשת קריטית במסלול, אז $e \notin E_{f_{i+1}}$.

□

הוכחה. נובע ישירות מהגדרת הרשת השיורית.

מסקנה 3. במהלך ריצת האלגוריתם, קשת uv יכולה להיות קריטית $\frac{|V|}{2}$ פעמים לכל היותר.

סיבוכיות ריצה: נשים לב שבכל איטרציה קיימת קשת קריטית אחת לפחות ולכן מספר האיטרציות חסום על ידי $|E| \cdot \frac{|V|}{2}$. ניתן לממש כל איטרציה על ידי BFS ולקבל זמן כולל של $O(|E|^2|V|)$.

שידוך

שידוך בגרף לא מכוון $G = (V, E)$ הוא תת קבוצה בלתי תלויה של קשתות $M \subseteq E$. כלומר, לכל שתי קשתות $e_1, e_2 \in M$ מתקיים $e_1 \cap e_2 = \emptyset$.

הגדרה 2 (שידוך מקסימום). שידוך M יקרא שידוך מקסימום אם לכל שידוך אחר M' , מתקיים $|M'| \leq |M|$.

שידוך בגרף דו צדדי:

בהינתן גרף דו צדדי, $G = (L, R, E)$ נגדיר את רשת הזרימה, $N = (G', c)$ כאשר

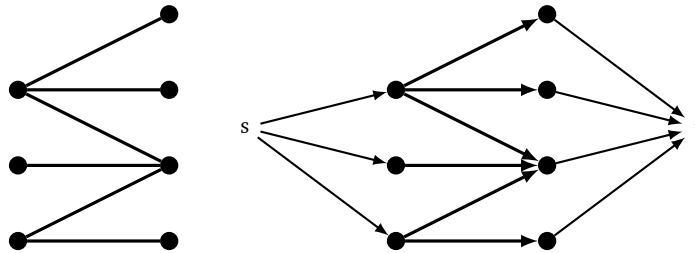
$$G' = (L \cup R \cup \{s, t\}, E')$$

$$E' = \{uv : uv \in E, u \in L, v \in R\} \cup \{s\} \times L \cup R \times \{t\}$$

$$c(e) = 1$$

$$\forall e \in E'$$

דוגמה:



טענה 3. אם M שידוך ב- G אז קיימת זרימה f ב- N כך ש- $|f| = |M|$.

הוכחה. לכל $uv \in M$ נציב $f(su) = f(uv) = f(vt) = 1$ ולכל שאר הקשתות נציב זרימה 0. קל לוודא שזו אכן פונקציית זרימה עם ערך $|M|$. \square

טענה 4. אם f זרימה בשלמים ב- N אז קיים שידוך M , ב- G כך ש- $|f| = |M|$.

הוכחה. נגדיר $M = \{uv : u \in L, v \in R, f(uv) = 1\}$. קל לוודא שזהו אכן שידוך ו- $|M| = |f|$. \square

מסקנה 4. קיים אלגוריתם פולינומי שמוצא שידוך מקסימום.

שידוך מושלם

הגדרה 3 (שידוך מושלם). שידוך יקרא מושלם אם $|M| = \frac{|V|}{2}$.

הגדרה 4 (גרף רגולרי). גרף לא מכוון יקרא d -רגולרי אם הדרגה של כל צומת היא d .

טענה 5. לכל $d \geq 1$ בגרף דו צדדי d -רגולרי קיים שידוך מושלם.

הוכחה. ראשית נשים לב שבגרף דו צדדי רגולרי מתקיים ש- $|L| = |R|$. נסמן $|L| = n$ ומספיק להראות שקיימת זרימה (לאו דווקא שלמה) שערכה n . נגדיר:

$$f(sv) = 1 \quad \forall v \in L$$

$$f(vt) = 1 \quad \forall v \in R$$

$$f(uv) = \frac{1}{d} \quad \forall uv \in E : u \in L, v \in R$$

אפשר לוודא שזו אכן זרימה עם ערך n . \square

משפט הול

עבור תת קבוצה של צמתים $U \subseteq V$ בגרף $G = (V, E)$ נסמן ב- $N(U)$ את קבוצת השכנים של U , כלומר:

$$N(U) := \{v : uv \in E, u \in U, v \notin U\}$$

משפט 1 (משפט הול). בגרף דו צדדי $G = (L \cup R, E)$ שמקיים $|L| = |R| = n$ קיים שידוך מושלם אם ורק אם לכל $U \subseteq L$ מתקיים ש- $|U| \leq |N(U)|$.

נוכיח את המשפט באמצעות טיעונים על זרימה.

בהינתן גרף דו צדדי $G = (L \cup R, E)$ רשת זרימה מתאימה $N = (G', c)$ ו-חתך st של S נסמן ב- $U := S \cap L$ וב- $W := S \cap R$.

טענה 6. אם S חתך st מינימום אז לא קיים צומת $v \in W \setminus N(U)$.

□

הוכחה. אם קיים אז $S \setminus \{v\}$ חתך קטן יותר.

טענה 7. קיים חתך st מינימום כך ש- $W = N(U)$.

הוכחה. נסתכל על חתך st מינימום, S שממזער את $|N(U) \setminus W|$ (השכנים של U שלא ב- S) נניח בשלילה שקיים צומת $v \in N(U) \setminus W$ אז $S \cup \{v\}$ חתך עם ערך לא גדול מ- S - סתירה.

□

הוכחת משפט הול. אם S חתך st מינימום כך ש- $W = N(U)$ ומתקיים $|W| \geq |U|$ אז ערך החתך הוא לפחות n .

□

דוגמה: בדוגמה הבאה החתך הכתום מקווקו הוא חתך מינימום אבל אינו מכיל את כל השכנים של U , אם מוסיפים את השכן של U שמחוץ לחתך נקבל שוב חתך מינימום. החתך המנוקד הכחול אינו חתך מינימום ומכיל צומת שאינו שכן של U , אם נוציא את הצומת מהחתך נקבל חתך מינימום.

