Nama **: Gilang Dwi Yuwana**
NIM **2311081016**
Kelas **: TRPL 3D**
Matkul **: Teori Statistika dan Probabilitas**

1. Dalam sebuah keluarga dengan 4 anak, a) Tentukan peluang keluarga tersebut memiliki paling sedikit 1 anak laki-laki dengan asumsi peluang kelahiran anak laki-laki adalah ½. b) Dari 2000 keluarga dengan 4 anak, berapa banyak keluarga yang memiliki paling sedikit 1 anak laki-laki?

Diketahui:

- $n = 4$
- $p = 0.5$ (peluang lahir anak laki-laki)
- $q = 1 - 0.5 = 0.5$ (peluang lahir anak perempuan)

Rumus: $b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$.

Penyelesaian: a) Peluang memiliki paling sedikit 1 anak laki-laki ($X \geq 1$) Kita gunakan prinsip komplemen: Total peluang (1) dikurangi peluang tidak ada anak laki-laki sama sekali ($X = 0$).

$$P(X \geq 1) = 1 - b(0; 4, 0.5)$$

$$b(0; 4, 0.5) = \binom{4}{0} (0.5)^0 (0.5)^4 = 1 \cdot 1 \cdot 0.0625 = 0.0625$$

$$P(X \geq 1) = 1 - 0.0625 = \mathbf{0.9375}$$

b) Banyaknya keluarga yang memiliki paling sedikit 1 anak laki-laki dari 2000 keluarga

$$\text{Frekuensi Harapan} = N \times P(X \geq 1)$$

$$\text{Frekuensi Harapan} = 2000 \times 0.9375 = \mathbf{1875} \text{ keluarga}$$

2. Jika 20% dari baut-baut yang diproduksi oleh suatu mesin rusak, tentukan peluang bahwa dari 4 baut yang dipilih secara acak terdapat: a) 1 b) 0 c) kurang dari 2 yang rusak

Diketahui:

- $p = 0.2$ (peluang rusak atau 20%)
- $q = 0.8$ (peluang bagus)
- $n = 4$ (sampel yang diambil)

Rumus: $b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$.

Penyelesaian: a) Tepat 1 baut rusak ($x = 1$)

$$b(1; 4, 0.2) = \binom{4}{1}(0.2)^1(0.8)^3$$

$$= 4 \cdot 0.2 \cdot 0.512 = \mathbf{0.4096}$$

b) 0 baut rusak ($x = 0$)

$$b(0; 4, 0.2) = \binom{4}{0}(0.2)^0(0.8)^4$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 0.4096 = \mathbf{0.4096}$$

c) Kurang dari 2 baut rusak ($X < 2$) Artinya baut yang rusak berjumlah 0 atau 1.

$$P(X < 2) = b(0; 4, 0.2) + b(1; 4, 0.2)$$

$$= 0.4096 + 0.4096 = \mathbf{0.8192}$$

3. Sepuluh persen dari alat-alat yang diproduksi dalam suatu proses fabrikasi tertentu ternyata rusak. Tentukan peluang bahwa dalam suatu sampel dari 10 alat yang dipilih secara acak, tepat ada 2 alat yang rusak dengan menggunakan: a) Distribusi binomial b) Aproksimasi Poisson terhadap distribusi binomial

Diketahui:

- $p = 0.1$ (peluang rusak 10%)
- $n = 10$ (sampel)
- Ditanya: Tepat 2 alat rusak ($x = 2$)

a) Menggunakan Distribusi Binomial

$$b(2; 10, 0.1) = \binom{10}{2}(0.1)^2(0.9)^8$$

$$= 45 \cdot 0.01 \cdot 0.430467 = \mathbf{0.1937}$$

b) Menggunakan Aproksimasi Poisson terhadap Binomial Distribusi Poisson dapat digunakan untuk menghampiri binomial jika n besar dan p kecil, dengan $\mu = np$.

- Rata-rata (μ) = $n \cdot p = 10 \cdot 0.1 = 1$.
- Rumus Poisson: $p(x; \mu) = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}$.

$$p(2; 1) = \frac{e^{-1}(1)^2}{2!} = \frac{0.36788 \cdot 1}{2} = \mathbf{0.1839}$$

4. Sebuah kotak berisi 5 bola merah, 4 bola putih, dan 3 bola biru. Sebuah bola dipilih secara acak dari kotak, warnanya dicatat, dan kemudian bolanya dimasukkan kembali. Tentukan peluang bahwa dari 6 bola yang diambil secara acak dengan cara ini, 3 diantaranya berwarna merah, 2 adalah putih, dan 1 biru.

Diketahui:

- Total bola = 5 Merah + 4 Putih + 3 Biru = 12 bola.
- Peluang: $p_M = 5/12$, $p_P = 4/12$, $p_B = 3/12$.
- Sampel (n) = 6.
- Target kejadian (x): 3 Merah, 2 Putih, 1 Biru.

Rumus: $f(x_1, \dots) = \binom{n}{x_1, \dots, x_k} p_1^{x_1} \dots p_k^{x_k}$.

Penyelesaian:

$$P = \frac{6!}{3!2!1!}\left(\frac{5}{12}\right)^3\left(\frac{4}{12}\right)^2\left(\frac{3}{12}\right)^1$$

$$= 60 \cdot (0.0723) \cdot (0.1111) \cdot (0.25)$$

$$= \mathbf{0.1206}$$

5. Mengacu pada soal 4, jika bola yang telah diambil tidak dikembalikan ke dalam kotak. Tentukan peluang bahwa dari 6 bola yang diambil secara acak dengan cara ini, 3 diantaranya berwarna merah, 2 adalah putih, dan 1 biru.

Diketahui:

- $N = 12$ (Total populasi).
- $n = 6$ (Ukuran sampel).
- Jumlah benda per kelompok (a_i): $a_M = 5, a_P = 4, a_B = 3.$
- Jumlah target terambil (x_i): $x_M = 3, x_P = 2, x_B = 1.$

Rumus: $f(\dots) = \frac{\binom{a_1}{x_1}\binom{a_2}{x_2}\binom{a_3}{x_3}}{\binom{N}{n}}.$

Penyelesaian:

$$\text{Peluang} = \frac{\binom{5}{3}\binom{4}{2}\binom{3}{1}}{\binom{12}{6}}$$

- $\binom{5}{3} = 10$
- $\binom{4}{2} = 6$
- $\binom{3}{1} = 3$
- $\binom{12}{6} = 924$

$$\text{Hasil} = \frac{10 \cdot 6 \cdot 3}{924} = \frac{180}{924} = \mathbf{0.1948}$$

6. Pengalaman menunjukkan bahwa pada setiap penstensilan kertas koran, dari 1500 yang distensil telah terjadi kerusakan sebanyak 150 lembar. Bila distensil sebanyak 10 lembar, tentukan peluang banyaknya kertas yang rusak paling sedikit 3 lembar.

Diketahui:

- Rasio kerusakan (p) = $150/1500 = 0.1$.
- $n = 10$ (lembar yang distensil).
- Ditanya: Paling sedikit 3 lembar rusak ($P(X \geq 3)$).

Penyelesaian: Lebih mudah menghitung 1 dikurangi peluang kejadian sebaliknya (rusak kurang dari 3, yaitu 0, 1, atau 2).

$$P(X \geq 3) = 1 - [P(0) + P(1) + P(2)]$$

Menggunakan tabel atau rumus binomial:

- $b(0; 10, 0.1) = 0.3487$
- $b(1; 10, 0.1) = 0.3874$
- $b(2; 10, 0.1) = 0.1937$
- Total kumulatif ($X < 3$) = 0.9298

$$P(X \geq 3) = 1 - 0.9298 = \mathbf{0.0702}$$

7. Seorang pengusaha sepatu memproduksi 2000 pasang sepatu dan ternyata 2 pasang sepatu diantaranya tidak memenuhi standard mutu. Pengusaha itu mendapat pesanan sebanyak 3000 pasang sepatu dari pak Togar yang akan menjualnya kembali. Berapa peluang a) Pak Togar mendapat paling banyak 2 pasang sepatu yang tidak memenuhi standard mutu? b) Pak Togar mendapat lebih dari 3 pasang sepatu yang tidak memenuhi standard mutu? c) Berapa rata-rata dan simpangan baku dari sepatu yang tidak memenuhi standard mutu yang diperoleh Pak Togar?

Diketahui:

- $n = 3000.$
- $p = 2/2000 = 0.001.$
- Rata-rata (μ) = $n \cdot p = 3000 \cdot 0.001 = 3.$

Penyelesaian:

a) Paling banyak 2 pasang tidak memenuhi standar ($X \leq 2$)

$$P(X \leq 2) = p(0; 3) + p(1; 3) + p(2; 3)$$

- $p(0; 3) = \frac{e^{-3}3^0}{0!} = 0.0498$
- $p(1; 3) = \frac{e^{-3}3^1}{1!} = 0.1494$
- $p(2; 3) = \frac{e^{-3}3^2}{2!} = 0.2240$

$$\text{Total Peluang} = 0.0498 + 0.1494 + 0.2240 = \mathbf{0.4232}$$

b) Lebih dari 3 pasang tidak memenuhi standar ($X > 3$)

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3)$$

Kita tambahkan $p(3)$ ke hasil poin (a):

- $p(3; 3) = \frac{e^{-3}3^3}{3!} = 0.2240$
- $P(X \leq 3) = 0.4232 + 0.2240 = 0.6472$

$$P(X > 3) = 1 - 0.6472 = \mathbf{0.3528}$$

c) Rata-rata dan Simpangan Baku Pada distribusi Poisson, rataan dan variansi nilainya sama.

- Rata-rata (μ) = $\mathbf{3}$.
- Variansi (σ^2) = 3.
- Simpangan Baku (σ) = $\sqrt{3} \approx \mathbf{1.732}$.

8. Sekelompok orang terdiri dari 50 orang dan 3 orang diantaranya lahir pada tanggal 31 Desember. Bila secara acak dipilih 5 orang, berapa peluang orang yang terpilih itu: a) tidak terdapat yang lahir pada tanggal 31 Desember. b) tidak lebih dari 1 orang yang lahir pada tanggal 31 Desember.

Diketahui:

- $N = 50$ (Total orang).
- $k = 3$ (Jumlah sukses/lahir 31 Des).
- $n = 5$ (Jumlah sampel yang dipilih).

Rumus: $h(x; N, n, k) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$.

Penyelesaian:

a) Tidak terdapat yang lahir pada tanggal 31 Desember ($x = 0$)

$$h(0; 50, 5, 3) = \frac{\binom{3}{0}\binom{47}{5}}{\binom{50}{5}}$$

$$= \frac{1 \cdot 1,533,939}{2,118,760} = \mathbf{0.724}$$

b) Tidak lebih dari 1 orang yang lahir pada tanggal 31 Desember ($X \leq 1$)

$$P(X \leq 1) = h(0) + h(1)$$

Hitung $h(1)$:

$$h(1; 50, 5, 3) = \frac{\binom{3}{1}\binom{47}{4}}{\binom{50}{5}} = \frac{3 \cdot 178,365}{2,118,760} = 0.2525$$

$$\text{Total Peluang} = 0.724 + 0.2525 = \mathbf{0.9765}$$