

**Classe :  
terminale**
**LYCÉE INTERNATIONAL COURS LUMIÈRE**
**séquence 4**

# Calculabilité et décidabilité

**Mr BANANKO K.**
**Objectifs :**

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Notion de programme en tant que donnée. Calculabilité, décidabilité.	Comprendre que tout programme est aussi une donnée. Comprendre que la calculabilité ne dépend pas du langage de programmation utilisé. Montrer, sans formalisme théorique, que le problème de l'arrêt est indécidable.	L'utilisation d'un interpréteur ou d'un compilateur, le téléchargement de logiciel, le fonctionnement des systèmes d'exploitation permettent de comprendre un programme comme donnée d'un autre programme.

Référence Manuels hachette Education :

## I- La notion de programme en tant que donnée

Certains programmes utilisent comme données le code source d'autres programmes. Les compilateurs sont des bons exemples. Nous avons eu l'année dernière l'occasion de travailler sur le langage C , et nous avons vu que ce langage est un langage compilé : une fois le code source terminée, le compilateur (qui est un logiciel comme un autre) "transforme" ce code source en langage machine.

Il existe d'autres exemples de programmes qui utilisent comme données d'autres programmes :

- Un système d'exploitation peut être vu comme un programme qui fait "tourner" d'autres programmes
- Pour télécharger un logiciel on utilise un gestionnaire de téléchargement qui est lui-même un logiciel.

On trouve même des programmes capables de détecter certaines erreurs dans le code source d'autres programmes ou même encore des programmes capables de prouver (mathématiquement parlant) qu'un autre programme est correct (qu'il fait bien ce pour quoi il a été conçu). Le développement de programmes de "détection d'erreurs" ou encore de "preuve de correction" a connu une forte croissance en France, notamment depuis [l'accident du vol 501 d'Ariane 5](#) du 4 juin 1996 ou encore de la mise au point du métro automatique Meteor (ligne 14 à Paris).

### Propriété 1

Il est important de comprendre qu'un programme utilise des données sur lesquelles il travaille. Ces données peuvent être également des programmes.

## Exemple

Le compilateur Python (ou les autres langages) est un programme (Edupython, Jupyter, idle de python, etc) qui utilise votre programme comme une donnée.

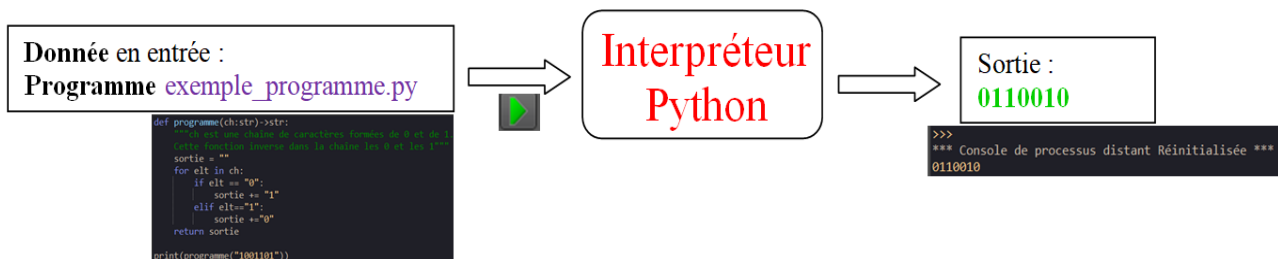
Voici par exemple le contenu d'un programme écrit en langage Python stocké dans un fichier nommé `exemple_programme.py`

```
def programme(ch:str)->str:
    """ch est une chaîne de caractères formées de 0 et de 1.
    Cette fonction inverse dans la chaîne les 0 et les 1"""
    sortie = ""
    for elt in ch:
        if elt == "0":
            sortie += "1"
        elif elt=="1":
            sortie += "0"
    return sortie

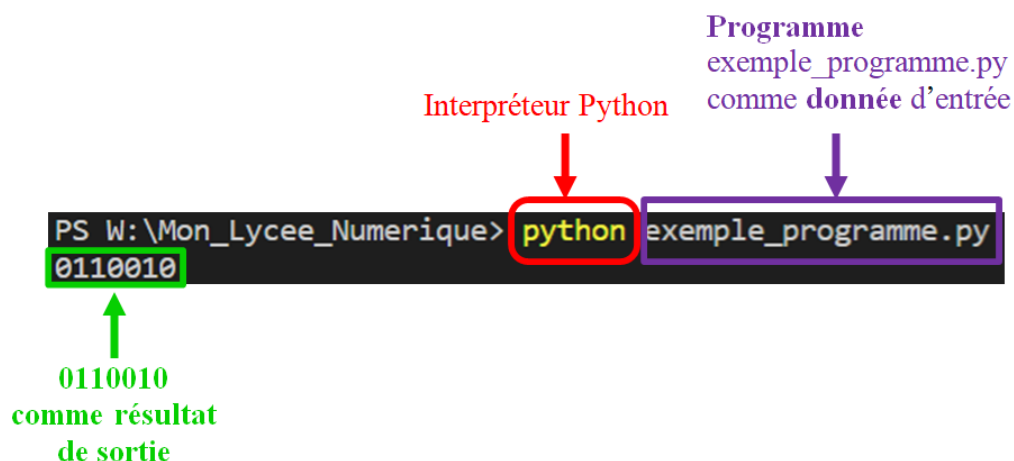
print(programme("1001101"))
```

Pour exécuter ce programme, il vous suffit :

- Sur Edupython, de saisir ce contenu dans la partie édition, puis d'appuyer sur la flèche verte pour exécuter le programme.  
Ce programme est alors pris en charge, en tant que données, par l'interpréteur Python, interpréteur qui renverra la réponse affichée.



- Sur VSCode, de saisir ce contenu puis d'exécuter dans le terminal ce code. Là encore, le programme est une donnée prise en charge par l'interpréteur python.



## Exemple 2

Voici d'autres exemples dans lesquels un programme est une donnée d'un autre programme :

- Tous les **systèmes d'exploitation** (Windows, Linux, Unix, MacOS, Android) sont des programmes gigantesques qui utilisent et font tourner des programmes, appelées souvent applications, comme données.
- Le **téléchargement de logiciels** : tout logiciel est un programme. Le gestionnaire de téléchargement prend comme donnée le programme à télécharger.
- Un **débogueur** : pour repérer une éventuelle erreur dans le code source d'un programme, l'éditeur de programmation exécute un débogueur qui prend comme donnée le programme à tester.

## II- Calculabilité et décidabilité

### A- Calculabilité

Une fonction calculable est une fonction que l'on peut écrire sous forme d'algorithme.

#### Propriété 1

La calculabilité ne dépend pas du langage utilisé.

Ainsi, si une fonction est calculable, il existe un algorithme dans le langage que vous utilisez qui permet de la calculer.

#### Exemple

Écrire la fonction `successeur` qui prend en paramètre un entier et qui renvoie son successeur en langage Python.

```
def successeur(entier):  
    return entier + 1  
  
# Exemple d'utilisation  
nombre = 5  
succ = successeur(nombre)  
print("Le successeur de", nombre, "est", succ)
```

Écrire la fonction `successeur` qui prend en paramètre un entier et qui renvoie son successeur en langage JavaScript.

```
function successeur(entier) {  
    return entier + 1;  
}  
  
// Exemple d'utilisation  
  
var nombre = 5;  
  
var succ = successeur(nombre);  
  
console.log("Le successeur de", nombre, "est", succ);
```

## Propriété 2

Fonctions non-calculables : contrairement à ce que l'on pourrait imaginer, il existe des fonctions qui ne sont pas calculables. Il y en a même une infinité "plus grande" que de fonctions calculables.

## B- Décidabilité

Une propriété est décidable s'il existe un algorithme qui la confirme ou l'infirme en un nombre fini d'étapes. L'algorithme doit répondre par oui ou par non à la question posée par le problème. On parle dans ce cas de problème de décision.

## C- Le problème de l'arrêt est non décidable

Il nous est arrivé à tous d'écrire une boucle infinie. C'est le drame car notre programme ne s'arrête jamais. Dans certains domaines, ce problème devient un problème essentiel. Pensez aux problèmes de sécurité (centrale nucléaire, aviation, transports, etc). Il est donc naturel de se poser cette question : Peut-on écrire un algorithme capable de prédire que n'importe quel programme va s'arrêter ? La réponse est non. On dit que le problème de l'arrêt d'un programme est indécidable.

Le "**cauchemar**" d'un programmeur est que son programme, dans certains cas, "tombe" dans une boucle infinie et ne s'arrête jamais. Dans ce cas, le logiciel est incapable de fournir la réponse attendue par l'utilisateur. Un programme qui permettrait de tester si un autre programme va finir par s'arrêter, quel que soit le cas traité, serait d'une grande aide pour tous les développeurs du monde ! Pourtant, depuis 1937 et les travaux d'Alonzo Church et d'Alan Turing, on sait qu'un tel programme ne peut pas exister.



Alonzo Church (1903-1995)



Alan Turing (1912-1954)

Des exemples de programmes qui ne s'arrêtent pas.  
Exemple

Que pensez-vous du script suivant ?

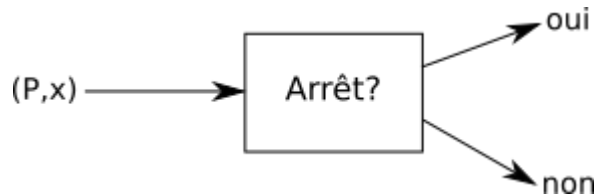
```
def est_pair(n:int)->bool :  
    """Renvoie true si n est pair"""  
    assert(isinstance(n, int)) # Test si n est entier  
    test = False  
    if n%2 == 0 : test = True  
    return test  
  
def infini(n: int) :  
    while est_pair(n):  
        n = n*2  
    return n  
  
print(infini(5))  
print(infini(4))
```

Nous allons essayer de démontrer qu'un programme capable de répondre à la question "**ce programme va-t-il s'arrêter**" (réponse oui/non) ne peut pas exister :

Soit un programme (ou un algorithme, cela revient au même) que l'on va nommer "Arrêt?", ce programme prend en entrée un programme P et des données x (les données x sont les données qui vont être utilisées par le programme P).

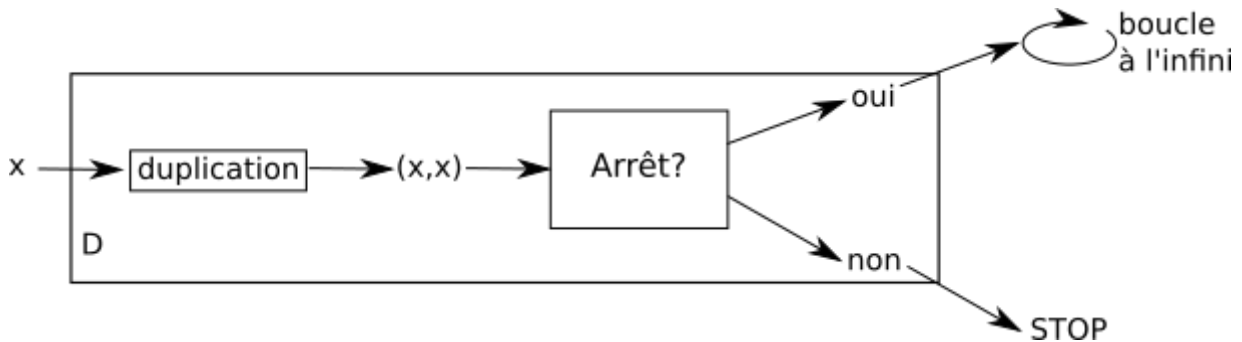
Le programme "Arrêt?" répond "oui" si le programme P (qui utilise les données x) s'arrête.

Le programme "Arrêt?" répond "non" si le programme P (qui utilise les données x) ne s'arrête jamais.



Partons du principe que ce programme "Arrêt?" existe (raisonnement par l'absurde).

Imaginons un autre programme que nous appellerons D. D utilise, entre autres, le programme "Arrêt?" :

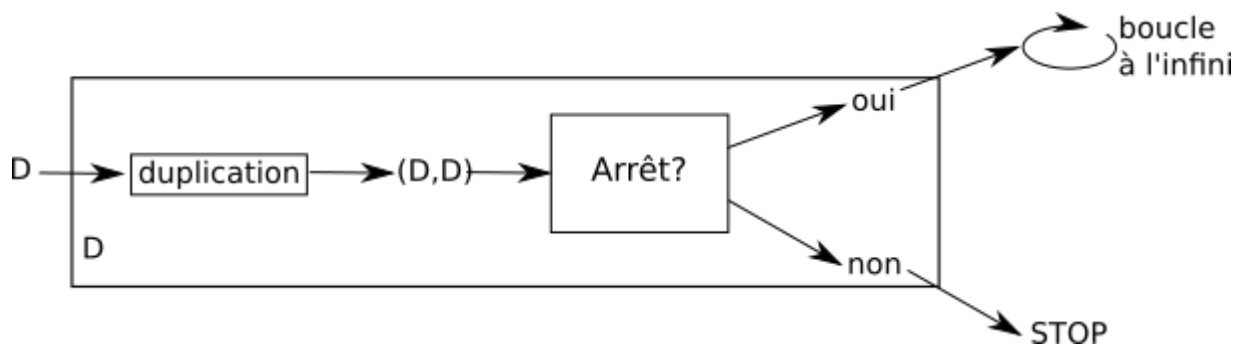


D prend en entrée une donnée x (une chaîne de caractères). La donnée x est d'abord dupliquée (on obtient (x,x)).

En sortie :

- dans le cas où le programme "Arrêt?" renvoie "OUI", le programme D "tombe" dans une boucle infinie (il ne s'arrête jamais)
- dans le cas où le programme "Arrêt?" renvoie "NON", le programme D s'arrête.

Le programme D possède un code source (une chaîne de caractère), il est donc tout à fait possible de "placer" le code source de D à l'entrée du programme D :



Analysons ce qui se passe :

- supposons que D s'arrête quand on lui donne D => "Arrêt?" répond "OUI", donc D tombe dans une boucle infinie, donc D ne s'arrête pas. Donc quand D s'arrête, D ne s'arrête pas... ce qui est une contradiction
- supposons que D ne s'arrête pas quand on lui donne D => "Arrêt?" répond "NON", donc D s'arrête. Donc quand D ne s'arrête pas, D s'arrête...ici aussi nous avons une contradiction !

Dans les 2 cas, nous avons une contradiction, nous pouvons donc en conclure que le programme D ne peut pas exister. Mais du coup, si le programme D ne peut pas exister, cela signifie que le programme "Arrêt?" ne peut pas exister (puisque le programme D se base sur le programme "Arrêt?").

Nous venons donc bien de démontrer que le programme "Arrêt?" ne peut pas exister.

Cette idée d'avoir un problème (problème de l'arrêt) qui ne peut pas être résolu par un algorithme peut être généralisée : il existe en effet une série de problèmes qui ne peuvent pas être résolus par un algorithme. On dit que ces problèmes sont "indécidables". Le problème de l'arrêt est donc indécidable. A contrario, les problèmes qui peuvent être résolus par un algorithme sont dits décidables.

Nous venons de voir qu'un algorithme peut permettre de résoudre des problèmes (par exemple répondre à une question par oui ou non), à condition que le problème soit décidable. Un algorithme peut aussi réaliser des calculs et donner un résultat. Un algorithme peut donc aussi calculer l'image d'une valeur  $x$  par une fonction  $f$  (si on prend une fonction  $f$  telle que  $f(x)=5x+3$ , il est aisé de programmer un algorithme qui donnera l'image de  $x$  par  $f$  quel que soit  $x$ ). Pourtant Church et Turing ont démontré que pour certaines fonctions il n'existait pas d'algorithme capable de calculer l'image de  $x$ . Ces fonctions sont dites non-calculables. Attention, ce n'est pas parce qu'une fonction  $f$  n'est pas calculable qu'il n'est possible de trouver l'image de  $x$  par  $f$ . Cela veut juste dire qu'il n'existe pas d'algorithme capable d'effectuer ce calcul. Au contraire, s'il existe un algorithme capable de calculer l'image de  $x$  par une fonction  $f$ , alors cette fonction  $f$  est dite calculable.

Les notions de décidabilité et de calculabilité sont étroitement liées, mais cela sort du cadre de ce cours.

### Ce qu'il faut savoir

- en 1937 Alonzo Church et Alan Turing ont démontré que certains problèmes ne pouvaient pas être résolus avec un algorithme

- s'il n'existe pas d'algorithme capable de résoudre un problème et que la réponse attendue à ce problème est "oui" ou "non", on dira que ce problème est indécidable. Quand ce genre de problème peut être résolu à l'aide d'un algorithme, on dit que ce problème est décidable.
- s'il n'existe pas d'algorithme capable de résoudre un problème et que la réponse attendue à ce problème est une valeur (issue d'un calcul), on dira que ce problème est non-calculable. Quand ce genre de problème peut être résolu à l'aide d'un algorithme, on dit que ce problème est calculable
- si un problème est indécidable (ou non-calculable) cela ne veut pas dire que l'on n'est pas capable de résoudre ce problème, cela veut juste dire qu'il n'existe pas d'algorithme capable de résoudre ce problème.
- le problème dit de l'arrêt est indécidable

### **Ce qu'il faut savoir faire**

vous devez être capable de montrer que le problème dit de l'arrêt est indécidable