# ALJABAR LINEAR

Nama : Muh Ikbal

NIM : D121171317

Soal :

1. Cari implementasi vector pada bidang informatika
2. Contoh – contoh soal slide 11
3. Penjelasan dan contoh soal
   a. Perkalian titik
   b. Perkalian silang
4. Cari penjelasan dan contoh vector orthogonal
5. Cari penjelasan dan contoh kombinasi linier

Jawaban :

1. Dalam program desktop publishing

   Kategori dekstop publishing dihuni oleh program-program aplikasi yang digunakan untuk keperluan penerbitan, pembuatan media iklan informasi, serta pembuatan media cetak. Contoh program dekstop publishing adalah Adobe Page Maker dan Aldus Page Maker. Keduanya adalah program yang dikhususkan untuk membuat layout pada media cetak. Selain itu Corel Draw juga dapat di golongkan dalam kategori dekstop publishing karena dapat digunakan sebagai editor grafik vector sekaligus editor layout suatu dokumen.
2. **v** = (3,-2,4)                3**v** – 2**w** = ?

   **w=** (6,4,-2)

   = 3(3,-2,4) – 2(6,4,-2)

   = (9,-6,12) – (12,8,-4)

   = (-3,-14,16)

3.

**a. Perkalian titik**

Perkalian titik atau *dot product* dua buah vektor didefinisikan sebagai perkalian antara besar salah satu vektor (misal**A**) dengan komponen vektor kedua (**B**) pada arah vektor pertama (**A**). Pada gambar di atas, komponen vektor **B** pada arah vektor **A** adalah **B cos α**. Dari pengertian perkalian titik tersebut, maka rumus atau persamaan perkalian titik antara vektor **A** dan vektor **B** dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \alpha = |A||B| \cos \alpha$$

Keterangan:

α = sudut yang dibentuk oleh vektor **A** dan **B** dengan $0^o \leq \alpha \leq 180^o$

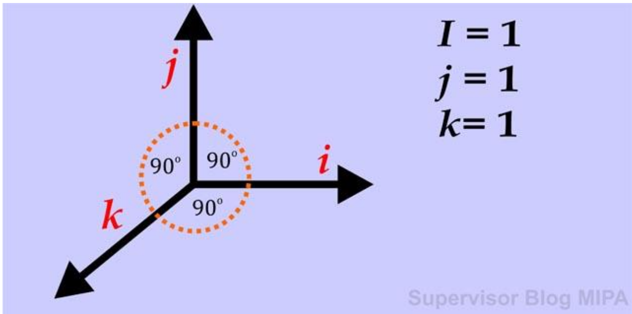
A = |A| besar vektor **A**

B = |B| besar vektor **B**

Dari persamaan perkalian titik di atas maka dapat disimpulkan bahwa hasil perkalian titik dua buah vektor adalah skalar. Simbol dari perkalian titik adalah "." (baca: dot). Karena hasil perkalian titik adalah skalar maka perkalian titik atau *dot product* disebut juga dengan perkalian skalar atau *skalar product*. Dalam perkalian titik ada tiga poin penting yang perlu kalian perhatikan.

1. Jika kedua vektor **A** dan **B** saling tegak lurus ($\alpha = 90^o$) maka
   $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0 \rightarrow \cos 90^o = 0$
2. Jika kedua vektor **A** dan **B** searah ($\alpha = 0^o$) maka
   $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \rightarrow \cos 0^o = 1$
3. Jika kedua vektor **A** dan **B** berlawanan searah ($\alpha = 180^o$) maka
   $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = -AB \rightarrow \cos 180^o = -1$

## Perkalian Titik Pada Vektor Satuan




Vektor satuan adalah vektor ruang yang telah diuraikan ke dalam sumbu *X(i)*,*Y(j)* dan *Z(k)* yang besarnya satu satuan. Perhatikan gambar di atas. vektor satuan *i*, *j*, dan *k* merupakan vektor yang saling tegak lurus satu sama lain dengan kata lain besar $\alpha = 90^o$ karena nilai ketiga vektor tersebut adalah 1, maka hasil perkalian titik pada vektor satuan tersebut adalah sebagai berikut:

> $i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1.1 \cos 0^o = 1$ (berhimpit)
> $i \cdot j = i \cdot k = j \cdot k = 1.1 \cos 90^o = 0$ (tegak lurus)

Dengan menggunakan hasil perkalian titik pada vektor satuan di atas, kita dapat mencari hasil perkalian titik suatu vektor yang dinyatakan dalam vektor satuan. misalkan terdapat dua vektor berikut ini:

$\mathbf{A} = A_x i + A_y j + A_z k$

$\mathbf{B} = B_x i + B_y j + B_z k$

Hasil perkalian titik antara vektor **A** dan **B** adalah sebagai berikut:

| | | |
|---|---|---|
| **A . B** | = | $(A_x i + A_y j + A_z k) \cdot (B_x i + B_y j + B_z k)$ |
| **A . B** | = | $A_x i \cdot B_x i + A_x i \cdot B_y j + A_x i \cdot B_z k + A_y j \cdot B_x i + A_y j \cdot B_y j + A_y j \cdot B_z k + A_z k \cdot B_x i + A_z k \cdot B_y j + A_z k \cdot$ B |
| | | $\rightarrow$ *karena* $i \cdot j = i \cdot k = j \cdot k = 1.1 \cos 90^o = 0$ *maka* |
| **A . B** | = | $A_x i \cdot B_x i + 0 + 0 + 0 + A_y j \cdot B_y j + 0 + 0 + 0 + A_z k \cdot B_z k$ |

| | | |
|---|---|---|
| **A . B** | = | $A_x i \cdot B_x i + A_y j \cdot B_y j + A_z k \cdot B_z k$ |
| | | → *karena i . i = j . j = k . k = 1.1 cos 0º = 1 maka* |
| **A . B** | = | $A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$ |

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa hasil perkalian titik antara dua vektor satuan dalam sistem koordinat tiga dimensi (*x*,*y*,*z*) adalah sebagai berikut:

| | | |
|---|---|---|
| **A** | = | $A_x i + A_y j + A_z k$ |
| **B** | = | $B_x i + B_y j + B_z k$ |

Maka

| | | |
|---|---|---|
| **A . B** | **=** | $\mathbf{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}$ |

Contoh Soal :

Tentukan hasil perkalian titik antara dua vektor satuan berikut ini.

**A** = 3i + 4j + 6k

**B** = 8i + 5j – 8k

**Penyelesaian:**

**A . B** = $A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$

**A . B** = 3 . 8 + 4 . 5 + 6 . (– 8)

**A . B** = 24 + 20 – 48

**A . B** = – 4

**b. Perkalian Silang**

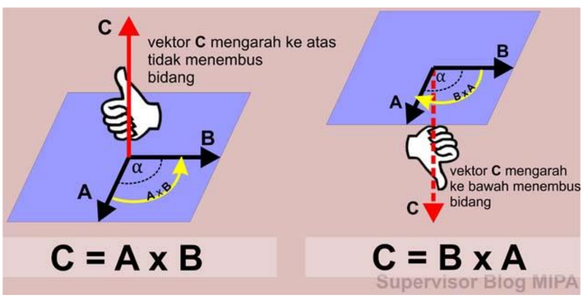
Perkalian silang atau *cross product* dua buah vektor, misalkan antara vektor **A** dan vektor **B** yang dituliskan sebagai **A** × **B** didefinisikan sebagai perkalian antara vektor **A** dengan komponen vektor **B** yang tegak lurus vektor **A**. Pada gambar di atas, komponen vektor **B** yang tegak lurus vektor **A** adalah **B sin α**. Dari definisi tersebut, secara matematis perkalian silang antara vektor **A** dan **B** dapat dituliskan dengan rumus atau persamaan sebagai berikut:

| | | |
|---|---|---|
| **A × B** | = | **C** |
| \|A × B\| | = | AB sin α |

Keterangan:

| | | |
|---|---|---|
| α | = | sudut yang dibentuk oleh vektor A dan B dengan 0o ≤ $\alpha$ ≤ 180o |
| C | = | vektor lain hasil perkalian silang antara vektor **A** dan **B** |
| \|A x B\| | = | besar vektor hasil perkalian silang antara vektor **A** dan **B** |

Dari persamaan perkalian silang di atas, dapat disimpulkan bahwa hasil perkalian silang dua buah vektor adalah sebuah vektor baru yang arahnya tegak lurus pada bidang yang dibentuk oleh dua vektor tersebut. Simbol dari perkalian silang adalah "×" (baca: cross). Karena hasil perkalian silang adalah vektor maka perkalian silang atau *cross product* disebut juga dengan perkalian vektor atau *vector product*. Untuk menentukan arah vektor hasil perkalian silang dapat digunakan aturan tangan kanan sebagai berikut.




Dengan menggunakan kaidah tangan kanan, arah vektor C hasil perkalian A terhadap B atau dapat kita tulis C = A × B adalah tegak lurus ke atas tidak menembus bidang yang dibentuk vektor A dan B. Perkalian vektor A × B ditunjukkan pada arah lipatan empat jari yaitu dari A ke B. Sedangkan ibu jari menunjukkan arah vektor C hasil perkalian antara vektor A terhadap vektor B. Konsep yang sama juga berlaku pada perkalian vektor B terhadap A.

Arah vektor C hasil perkalian B terhadap A atau kita tulis sebagai C = B× A adalah tegak lurus ke bawah menembus bidang yang dibentuk vektor A dan B. Perkalian vektor B × A ditunjukkan pada arah lipatan empat jari dari gengaman tangan kanan yang dibalik ke bawah yang menunjukkan arah dari B ke A. Dan ibu jari menunjukkan arah vektor C hasil perkalian antara vektor B terhadap A.

Di dalam perkalian silang (*cross product*) antara dua vektor ada beberapa point penting yang perlu kalian ingat. Point-point penting tersebut adalah sebagai berikut.

| | |
|---|---|
| 1 | Pada perkalian silang tidak berlaku sifat komutatif sehingga |
| | $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \times \mathbf{A}$ |
| 2 | Pada perkalian silang berlaku sifat anti komutatif yaitu |
| | $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ |
| 3 | Jika kedua vektor **A** dan **B** saling tegak lurus ($\alpha = 90^o$) maka |
| | $\lvert\mathbf{A} \times \mathbf{B}\rvert = \mathbf{AB} \rightarrow \sin\ 90^o = 1$ |
| 4 | Jika kedua vektor **A** dan **B** searah ($\alpha = 0^o$) maka |
| | $\lvert\mathbf{A} \times \mathbf{B}\rvert = \mathbf{0} \rightarrow \sin\ 0^o = 0$ |
| 5 | Jika kedua vektor **A** dan **B** berlawanan arah ($\alpha = 180^o$) maka |
| | $\lvert\mathbf{A} \times \mathbf{B}\rvert = \mathbf{0} \rightarrow \sin\ 180^o = 0$ |

Contoh Soal :

Hitunglah hasil perkalian silang dua verktor **A** = i + j + k dan **B** = 3i + j + 2k. Kemudian tentukan besar sudut yang dibentuk (diapit) kedua vektor tersebut.

**Penyelesaian:**

<u>Hasil perkalian</u>

$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_yB_z - A_zB_y)i + (A_zB_x - A_xB_z)j + (A_xB_y - A_yB_x)k$

$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (1\times2 - 1\times1)i + (1\times3 - 1\times2)j + (1\times1 - 1\times3)k$

$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (2 - 1)i + (3 - 2)j + (1 - 3)k$

$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = i + j - 2k$

<u>Sudut yang dibentuk</u>

$|A \times B| = AB \sin \alpha$

$A = \sqrt{(1^2 + 1^2 + 1^2)} = \sqrt{3}$

$B = \sqrt{(3^2 + 1^2 + 2^2)} = \sqrt{14}$

$|A \times B| = \sqrt{\{(1^2 + 1^2 + (-2^2)\}} = \sqrt{6}$

maka

$\sqrt{6} = (\sqrt{3})(\sqrt{14}) \sin \alpha$

$\sqrt{6} = \sqrt{42} \sin \alpha$

$\sin \alpha = \sqrt{6}/\sqrt{42}$

$\sin \alpha = 0,378$

$\alpha \approx 22,21^o$

4. Vector orthogonal

Vektor orthogonal adalah vector yang tegak lurus. Dua vector **u** dan **v** dikatakan tegak lurus jika dan hanya jika **uv = 0**. Untuk menunjukkan bahwa **u** dan **v** adalah vector – vector yang orthogonal maka kita tuliskan **u** ⊥ **v**

Contoh soal :

Diketahui vektor $a = 4i - 2j + 2k$ dan vektor $b = 2i - 6j + 4k$. Tentukan proyeksi vektor ortogonal vektor *a* terhadap vektor *b*

Jika *c* yaitu proyeksi orthogonal vektor *a* terhadap vektor *b* maka berlaku hubungan:

$$\begin{aligned}
\vec{c} &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}\,\vec{b} \\
&= \frac{8 + 12 + 8}{2^2 + (-6)^2 + 4^2}\left(2\bar{\imath} - 6\bar{\jmath} + 4\bar{k}\right) \\
&= \frac{28}{56}\left(2\bar{\imath} - 6\bar{\jmath} + 4\bar{k}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(2\bar{\imath} - 6\bar{\jmath} + 4\bar{k}\right) \\
&= \bar{\imath} - 3\bar{\jmath} + 2\bar{k}
\end{aligned}$$

5. Kombinasi linier

Vektor V dikatakan merupakan kombinasi linier dari vektor – vektor $v_1, v_2, \ldots, v_n$ bila **w** bisa dinyatakan sebagai :

$$\mathbf{w} = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \ldots + k_n v_n \text{ , dengan } k_1, k_2, \ldots, k_n \text{ adalah skalar.}$$

Diketahui a = (1, 2), b = (-2, -3), dan c = (1, 3). Apakah c merupakan kombinasi linear dari a dan b?

**Jawab:**

Misalkan c merupakan kombinasi linear dari a dan b maka dapat ditentukan dengan $c = k_1a + k_2b$

$(1, 3) = k_1(1, 2) + k_2(-2, -3)$

$(1, 3) = (1k_1, 2k_1) + (-2k_2, -3k_2)$

Maka dapat dinyatakan $1 = k_1 - 2k_2$ dan $3 = 2k_1 - 3k_2$ Sehingga diperoleh penyelesaian $k_1 = 3$ dan $k_2 = 1$

Jadi c merupakan kombinasi linear dari a dan b, dan dinyatakan dengan c = 3a + b