Probabilidade e Estatística

Cruzeiro do Sul Virtual
Educação a Distância

Material Teórico

Medidas de Dispersão ou Variação

Responsável pelo Conteúdo:
Profa. Me. Rosangela Maura C. Bonici

Revisão Textual:
Profa. Dra. Selma Aparecida Cesarin

UNIDADE Medidas de Dispersão ou Variação

- Introdução
- Cálculo da Variância e Desvio Padrão
- Finalizando

OBJETIVO DE APRENDIZADO

- A proposta deste estudo é trabalhar com as medidas de dispersão. Nele você irá aprender como calcular a variância e o desvio padrão de dados brutos, de dados agrupados em distribuições de frequência variável discreta e de dados agrupados em distribuições de frequência variável contínua. Aprenderá também qual o significado do desvio padrão e em quais situações práticas ele poderá ser empregado.

ORIENTAÇÕES

Para um bom aproveitamento do Curso, leia o material teórico atentamente, antes de realizar as atividades. É importante, também, respeitar os prazos estabelecidos no Cronograma.

Contextualização

Entenda o que é média e desvio padrão de uma prova

O entendimento natural que grande parte dos candidatos utiliza para avaliar seus desempenhos nas provas é: “acertei mais ou menos questões do que a média?”. Claro que a premissa vigente é a de que os candidatos mais bem preparados superam, em número de acertos, a média das provas.

O resultado de uma prova, normalmente, é conhecido por meio de informações como média e desvio padrão, bem como pela distribuição de frequências do número de acertos dos candidatos, expressos em forma gráfica.

Esse gráfico, denominado histograma, mostra, no eixo dos X (abscissas), o número de questões e, no eixo dos Y, o número de candidatos que acertaram o referido número de questões.

O que significam essas informações?

Numa distribuição de frequências, há três medidas importantes: a moda, a mediana e a média. A primeira é o “pico”, isto é, o ponto no eixo das abscissas de maior frequência.

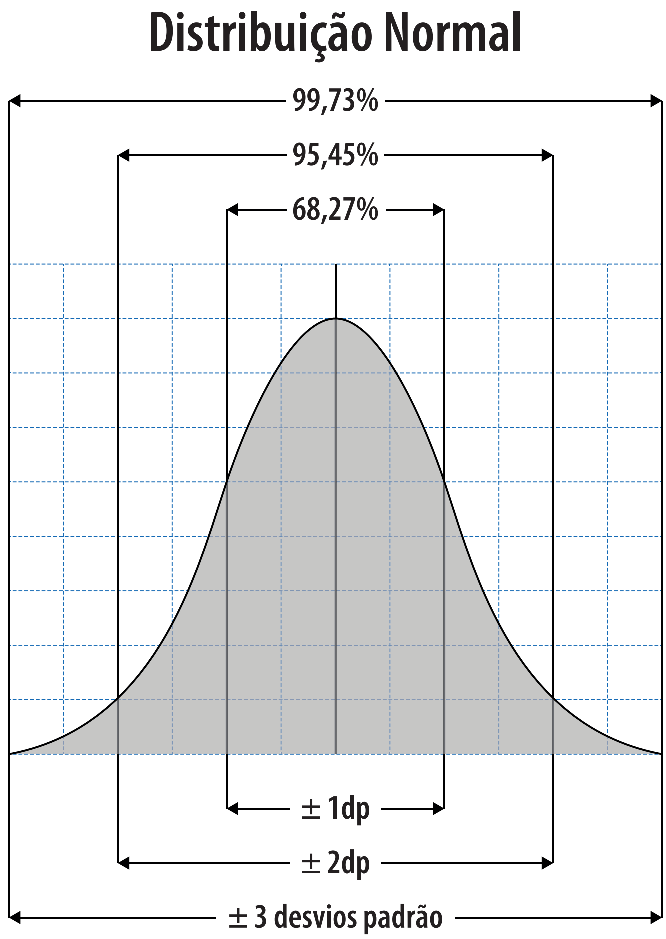
A mediana é o ponto, no eixo das abscissas, que divide as ocorrências em duas frações iguais, cada uma com 50% das frequências.

A média é o ponto, no eixo das abscissas, que faria com que o gráfico ficasse equilibrado, não inclinando nem para a esquerda nem para a direita; em suma, a média é o ponto, no eixo das abscissas, situado na vertical que passa pelo centro de gravidade da figura.

O que se deseja em uma prova do Concurso Vestibular é um histograma formando uma curva simétrica, distribuído entre 0 e 25 acertos, concentrando moda, mediana e média próximas a 15 acertos, exibindo distribuição balanceada de acertos, tanto à esquerda quanto à direita do centro de distribuição, de acordo com o gráfico apresentado na figura da página a seguir.

O Gráfico mostra uma distribuição normal rigorosamente simétrica. No centro da distribuição, coincidem média, mediana e moda. Uma curva de distribuição normal (ou Curva de Gauss) tem como característica englobar 99,73% das ocorrências no intervalo compreendido entre a média e ± 3 desvios padrão, conforme detalhado no mesmo Gráfico.

O desvio padrão de uma prova mede o grau de dispersão dos candidatos em relação à média, isto é, o quanto o conjunto de candidatos se distanciou da média, tanto além como aquém do centro de distribuição. Isso significa que os escores obtidos por 99,73% dos candidatos estarão compreendidos entre a média e ± 3 desvios padrão, ou seja, salvo raras exceções, todos os candidatos estarão neste intervalo.



Ao se elaborar uma prova, espera-se que o resultado da aplicação dessa prova gere uma "curva de distribuição normal", isto é, essa prova deve gerar uma média de 15 acertos e os candidatos devem estar distribuídos simetricamente entre zero e 30 acertos (ou entre dois limites internos desse intervalo, equidistantes de 15).

A obtenção de uma distribuição simétrica com 100% das ocorrências entre 0 e 30 acertos, em uma prova de 30 questões e média de 15 acertos, pode ser possível quando se obtém um desvio padrão de 5 acertos. Nesse caso, se o histograma assumir formato semelhante ao da curva normal, todos os escores possíveis de serem obtidos pelos candidatos ficariam simetricamente contidos no intervalo entre a média e ± 3 desvios padrão, ou seja, entre O acertos (15 - (3 x 5)) e 30 acertos (15 + (3 x 5)).

Infelizmente, não é fácil obter uma curva de distribuição normal. O resultado obtido pelos candidatos em uma prova depende de muitos fatores, entre os quais pode ser destacada a preparação deles e o grau de dificuldade da prova. Por isso mesmo, é importante poder avaliar uma prova pelo resultado obtido na sua aplicação.

A informação da média permite verificar o grau de facilidade da prova para a população que a realizou. Quanto menor a média (abaixo de 15 acertos), menor a facilidade dos candidatos com as questões. Quanto maior a média (acima dos 15 acertos), maior a facilidade dos candidatos com as questões propostas.

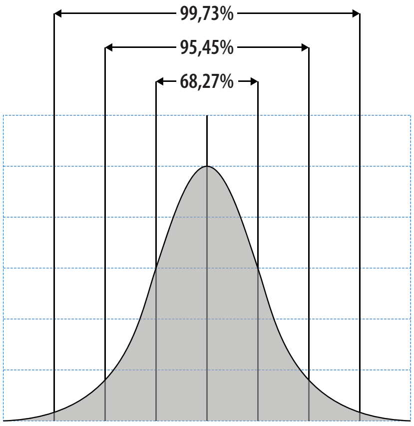
Uma prova, com histograma normal, com média de 15 acertos e desvio padrão de 4 acertos significa que 99,73% dos candidatos serão encontrados entre os escores 3 e 27 acertos, (15 - (3 x 4)) e (15 + (3 x 4)). Isso significa que os candidatos com escores 0, 1, 2, 28, 29 e 30 acertos serão 0,23% da população; portanto, pouquíssimos, conforme mostrado na figura a seguir, correspondente à distribuição com desvio 4.

Enquanto que numa prova, também com histograma normal, com média de 15 acertos, mas desvio padrão de 2 acertos, significa que 99,73% dos candidatos serão encontrados entre os escores 9 e 21 acertos, (15 - (3 x 2)) e (15 + (3 x 2)). Isto é, também haverá poucos candidatos (0,23%) com escores de 0 até 8 e de 22 até 30 acertos, conforme mostrado na figura correspondente à distribuição com desvio 2.

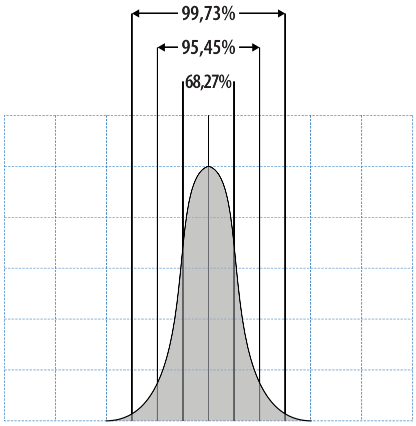
Analisando as duas figuras que seguem, é possível concluir que quanto maior for o desvio padrão, mais aberta é a curva (maior dispersão), ou seja, maior variedade de escores obtidos pelos candidatos e melhores condições de discriminar a qualificação dos candidatos.

Curvas muito fechadas (pequeno desvio padrão) significam menor dispersão, ou seja, grande concentração de escores e menor variedade deles (muitos empates). Em outras palavras, se houver muitos empates, a prova poderá não avaliar devidamente a preparação dos candidatos. Ao mesmo tempo, provas muito difíceis não diferenciam escores obtidos unicamente por meio de acerto casual

Distribuição com desvio 4



Distribuição com desvio 2



Fonte: Vestibular da UFRGS 2005
Provas Comentadas - Processo de Avaliação
Publicado pela COPERSE - UFRGS
Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
Disponível em: http://goo.gl/lmLus2

Introdução

As medidas de variação ou dispersão avaliam a dispersão ou a variabilidade da sequência numérica em análise. São medidas que fornecem informações complementares à informação da média aritmética. As principais medidas de dispersão são a variância e o desvio padrão.

Usaremos as letras **s^2** para denotar a variância de uma amostra e **s** para denotar o seu desvio padrão.

Cálculo da Variância e Desvio Padrão

Para calcular a variância e o desvio padrão, vamos analisar três casos:

I. Quando os dados ainda não foram agrupados em tabelas de frequência, ou seja, estão na forma de dados brutos ou rol;

II. Quando os dados estão agrupados em distribuições de frequência variável discreta; e

III. Quando os dados estão agrupados em distribuições de frequência variável contínua.

Dados brutos ou rol

Para podermos calcular a variância e o desvio padrão de dados brutos, vamos usar as fórmulas a seguir.

Fórmula para o Cálculo da Variância de Dados Brutos

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

- s^2= Variância
- x_i = Cada um dos valores assumidos pela variável
- $\bar{x}$ = Média aritmética dos dados brutos
- n = Total de elementos observados

Fórmula para o Cálculo do Desvio padrão de Dados Brutos

$$s = \sqrt{s^2}$$

- s = Desvio-padrão
- s^2= Variância

Vejamos um exemplo de utilização da variância e desvio padrão. Calcule a variância e o desvio padrão das notas de três turmas de estudantes.

Quadro 1: Notas de estudantes das Turmas A, B e C

Turma	Notas dos alunos								Média	Desvio padrão
A	4	5	5	6	6	7	7	8	6	**1,31**
B	1	2	4	6	6	9	10	10	6	**3,51**
C	**0**	**6**	**7**	**7**	**7**	**7,5**	**7,5**		**6**	**2,69**

Observe no quadro que a média e o desvio padrão das notas já estão calculados.

Vamos ver como isso foi feito.

O desvio padrão da turma A foi calculado da seguinte forma:

1º) Determinar a média aritmética das notas, pois a variância depende dela. Como são dados brutos, vamos relembrar a fórmula para o cálculo da média.

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

Usando as notas da turma A para fazer os cálculos, temos:

$$\bar{x} = \frac{4+5+5+6+6+7+7+8}{8}$$

$$\bar{x} = \frac{48}{8} = 6$$

Concluímos que a média aritmética das notas vale 6.

2º) Vamos calcular a variância das notas da turma A. Para isso, vamos usar a fórmula para o cálculo da variância de dados brutos, que é:

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

Vamos entender o que a fórmula está dizendo...
$\sum (x_i - \bar{x})^2$ (faça a diferença entre cada nota e a média aritmética e eleve ao quadrado; depois, some cada uma dessas diferenças).
Depois, divida o valor que encontrou pelo total de notas menos 1.

Turma	Notas dos alunos							
A	4	5	5	6	6	7	7	8

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{(4-6)^2 + (5-6)^2 + (5-6)^2 + (6-6)^2 + (6-6)^2 + (7-6)^2 + (7-6)^2 + (8-6)^2}{8-1}$$

$$= \frac{4+1+1+0+0+1+1+4}{7} = \frac{12}{7} \cong 1{,}71$$

Temos que a variância das notas vale $1{,}71$.

3º) Vamos calcular o desvio padrão das notas usando a fórmula:

$$s = \sqrt{s^2}$$

Substituindo a variância na fórmula e fazendo o cálculo, temos:

$$s = \sqrt{1{,}71} = 1{,}31$$

Temos que o desvio padrão vale $1{,}31$.

Para calcular o desvio padrão das turmas B e C,procedeu-se da mesma forma.

Considerações

Quadro 1 – Notas de estudantes das Turmas A, B e C

Turma	Notas dos alunos								Média	Desvio padrão
A	4	5	5	6	6	7	7	8	6	**1,31**
B	1	2	4	6	6	9	10	10	6	**3,51**
C	**0**	**6**	**7**	**7**	**7**	**7,5**	**7,5**		**6**	**2,69**

Observando o Quadro1, podemos fazer as seguintes considerações:

- As notas que geraram média 6 nas três turmas são bastante diferentes.
- Os desvios padrão são bem diferentes. O menor está na turma A, o intermediário na turma C e o maior na turma B.
- O desvio padrão nos mostra a variabilidade dos dados em relação à média. Grosso modo, dizemos que o desvio padrão nos mostra se a média aritmética sofreu pouca ou muita influência dos valores extremos (muito grandes ou muito pequenos). Nesse caso, podemos afirmar que:
- A turma A foi a menos influenciada por valores extremos;
- A turma C foi medianamente influenciada por valores extremos;
- A turma B foi a mais influenciada por valores extremos.

Distribuição de frequência variável discreta

Para calcular a variância e o desvio padrão de uma distribuição de frequência variável discreta, vamos usar as fórmulas a seguir:

Fórmula para o Cálculo da Variância da Distribuição de Frequência Variável Discreta

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 . f_i}{\sum f_i - 1}$$

- s^2= Variância
- x_i = Cada um dos valores assumidos pela variável
- f_i = frequência absoluta
- $\bar{x}$ = Média aritmética da variável discreta
- $\sum fi - 1 =$ Soma do total de elementos observados menos 1.

Fórmula para o cálculo do desvio padrão

Distribuição de frequência variável discreta

$$s = \sqrt{s^2}$$

- s = Desvio-padrão
- s^2= Variância

Vejamos um exemplo.

O quadro 2 representa as notas de Matemática. Calcule a variância e o desvio padrão.

Notas de Matemática (x_i)	f_i
2	3
3	5
4	8
5	4
Totais	20

As notas de Matemática estão agrupadas em uma distribuição de frequência variável discreta. Para calcular a variância e o desvio padrão, temos de usar as fórmulas correspondentes.

1º Vamos calcular a variância usando a fórmula.

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 . f_i}{\sum f_i - 1}$$

Vamos entender o que ela significa

$\sum (x_i - \bar{x})^2 . f_i =$ devemos subtrair cada nota da média aritmética. Esse resultado deve ser elevado ao quadrado. Depois, deve ser multiplicado pela respectiva frequência.

Ao final, fazer o somatório desses valores

$\sum f_i - 1 =$somar o total de notas e subtrair 1

> Primeiro, devemos calcular a média aritmética.
>
> Para podermos depois usar a fórmula da variância.

Lembra-se da fórmula da média aritmética ponderada?

É ela que iremos usar!

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i . f_i}{\sum f_i}$$

Vamos usar a distribuição das notas de Matemática e abrir uma coluna para podermos multiplicar x_i por f_i e calcular a média.

Notas de Matemática (x_i)	f_i	$x_i.f_i$
2	3	2.3=6
3	5	3.5=15
4	8	4.8=32
5	4	5.5=20
Totais	20	73

Calculando a média, temos:

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i . f_i}{\sum f_i} = \frac{73}{20} = 3,65$$

A média aritmética das notas de Matemática é **3,65**.

Vamos calcular agora a Variância, usando a fórmula.

Para podermos fazer $\sum(x_i - \bar{x})^2.f_i$, vamos abrir uma nova coluna na distribuição de frequência das notas de Matemática, para poder facilitar nossos cálculos.

Notas de Matemática (x_i)	f_i	$(x_i - \bar{x})^2 . f_i$
2	3	$(2 - 3{,}65)^2 . 3 = 8{,}17$
3	5	$(3 - 3{,}65)^2 . 5 = 2{,}11$
4	8	$(4 - 3{,}65)^2 . 8 = 0{,}98$
5	4	$(5 - 3{,}65)^2 . 4 = 7{,}29$
Totais	**20**	**18,55**

Concluímos daí que $\sum(x_i - \bar{x})^2.f_i$ vale 18,55, completando a resolução.

$$\sum f_i - 1 = 20 - 1 = 19$$

Calculando, temos $\frac{18{,}55}{19} = 0{,}98$.

A variância das notas de Matemática vale 0,98.

2º Vamos calcular o desvio padrão usando a fórmula.

$$s = \sqrt{s^2}$$

- s = Desvio-padrão
- s^2= Variância

$$s = \sqrt{0{,}98} \Rightarrow s = 0{,}99 \text{ (desvio padrão)}$$

Considerações

Podemos concluir pelos cálculos que o desvio padrão vale 0,99, o que nos demonstra uma variabilidade pequena nas notas de Matemática.

Cálculo da variância e do desvio padrão da distribuição de frequência variável contínua

Para calcular a variância e o desvio padrão de variáveis contínuas, devemos proceder como para as variáveis discretas, tomando somente o cuidado de substituir o **xi pelos pontos médios de cada classe**, vez que a variável está agrupada com intervalos de classe.

Fórmula para o cálculo da variância da distribuição de frequência variável contínua

$$s^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2.f_i}{\sum f_i - 1}$$

- s^2= Variância
- x_i = Cada um dos valores assumidos pela variável
- f_i = frequência absoluta
- $\bar{x}$ = Média aritmética da variável discreta
- $\sum f_i - 1$ = Soma do total de elementos observados menos 1

Fórmula para o cálculo do desvio padrão

Distribuição de frequência variável contínua

$$s = \sqrt{s^2}$$

- s = Desvio-padrão
- s^2= Variância

Vamos ver um exemplo.

O Quadro 3 representa um banco de horas de uma pequena empresa. Calcule a variância e o desvio padrão.

Quadro 3 – Banco de horas dos empregados de uma empresa

Banco de horas (h)	fi
0 |- 4	1
4 |- 8	3
8 |- 12	5
12 |- 16	1
Total	10

1º) Para calcular a variância, a primeira coisa que temos de conhecer é a média aritmética desse banco de horas; caso contrário, não há como usar a fórmula da variância.

Importante!

Lembra-se da fórmula da média aritmética ponderada? É ela que iremos usar!

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i . f_i}{\sum f_i}$$

Na variável contínua, para podermos calcular a média, temos de fazer aparecer os x_i**, calculando o ponto médio** entre cada uma das horas. Para isso, vamos abrir uma coluna para distribuição, para colocar o ponto médio, e outra, para podermos multiplicar x_i por f_i.

Banco de horas (h)	f_i	x_i (ponto médio)	$x_i \cdot f_i$
0 |- 4	1	$\frac{0+4}{2}=2$	2 . 1=2
4 |- 8	3	$\frac{4+8}{2}=6$	3 . 6=18
8 |- 12	5	$\frac{8+12}{2}=10$	5 . 10=50
12 |- 16	1	$\frac{12+16}{2}=14$	1 . 14=14
Total	**10**	-	**84**

$\overline{X}=\frac{\sum x_i.f_i}{\sum f_i} \Rightarrow \overline{X}=\frac{84}{10}=8,4$ **Temos que a média do banco de horas é 8,4 h.**

Agora sim, estamos em condições de calcular a variância.

$$s^2=\frac{\sum(x_i-\overline{x})^2.f_i}{\sum f_i-1}$$

Vamos usar a distribuição e abrir uma coluna para podermos calcular.

$$\sum(x_i-\overline{x})_2.f_i$$

Banco de horas (h)	f_i	x_i (ponto médio)	$(x_i - \overline{x})_2 \cdot f_i$
0 |- 4	1	2	$(2-8,4)_2 . 1 = 40,96$
4 |- 8	3	6	$(6-8,4)_2 . 3 = 17,28$
8 |- 12	5	10	$(10-8,4)_2 . 5 = 12,80$
12 |- 16	1	14	$(14-8,4)_2 . 1 = 31,36$
Total	**10**	-	**102,4**

Temos que $\sum(x_i-\overline{x})_2.f_i=102,4$ e $\sum f_i-1=10-1=9$

Aplicando os valores na fórmula, vem: $s^2=\frac{\sum(x_i-\overline{x})_2.f_i}{\sum f_i-1} \Rightarrow s^2=\frac{102,4}{9}=11,38$

Chegamos à conclusão de que a variância vale 11,38.

2º Agora vamos calcular o desvio padrão usando $s = \sqrt{s^2}$

Substituindo os valores, temos: $s = \sqrt{11,38} = 3,37$

Considerações

Feitos os cálculos, verificamos que a variância do banco de horas é 3,37, o que demonstra uma variabilidade média nas horas.

Importante!

Quanto maior o desvio padrão, maior a variação ou dispersão dos dados.
Quanto menor o desvio padrão, menor a variação ou dispersão dos dados.

Finalizando

Finalizamos mais uma Unidade na qual aprendemos a calcular a variância, calcular e interpretar o desvio padrão.

Como vimos, o desvio padrão fornece informações que complementam a informação da média aritmética, mostrando se a variação dos dados que geraram a média aritmética é pequena, média ou grande.

Só conseguimos identificar se um desvio padrão é pequeno ou grande se tivermos dois conjuntos que tenham médias iguais para podermos comparar seus desvios padrão.

Estou confiante e tenho certeza de que vocês conseguiram acompanhar e que estão satisfeitos por terem conseguido vencer mais esta etapa.

Agradeço a todos, continuem se esforçando sempre e até a próxima!

Material Complementar

Indicações para saber mais sobre os assuntos abordados nesta Unidade:

Sites

UOL educação
http://educacao.uol.com.br/disciplinas/matematica

Infoescola
http://www.infoescola.com/estatistica/variancia-e-desvio-padrao

Site da ADVFN
http://wiki.advfn.com/pt/Desvio_Padr%C3%A3o

Vídeos

Vídeo sobre cálculo da media e do desvio padrão
Descrição do vídeo.
http://www.youtube.com/watch?v=8X9apoqlbgs

Referências

CRESPO, A. A. **Estatística Fácil.** 11.ed. São Paulo: Saraiva, 1994.

DOWNING, D. **Estatística Aplicada**. 2.ed. São Paulo: Saraiva, 2002.

MORETTIN, L. G. **Estatística Básica.** 7.ed. São Paulo: Pearson, 2000.

NEUFELD, J. L. **Estatística Aplicada à Administração Usando o Excel**. São Paulo: Pearson, 2003.

SPIEGEL, M. R. **Estatística**. 3.ed. Coleção Schaum. São Paulo: Pearson, 1994.

______. **Probabilidade e Estatística.** Coleção Schaum. São Paulo: Pearson, 1977.

SILVA, E. M. **Estatística Para os Cursos de: Economia, Administração e Ciências Contábeis.** 3.ed. São Paulo:Atlas, 1999.

Cruzeiro do Sul Virtual
Educação a Distância

www.cruzeirodosulvirtual.com.br
Campus Liberdade
Rua Galvão Bueno, 868
CEP 01506-000
São Paulo - SP - Brasil
Tel: (55 11) 3385-3000

Cruzeiro do Sul
Educacional