In [1]:
```python
from concurrent.futures import ProcessPoolExecutor
%config InlineBackend.figure_format = "svg"
import matplotlib.pyplot as plt
from tqdm import tqdm
import numpy as np
from z3 import *
import time
```

Problema 2: Pidgeon Hole Principle

Se dispusermos de N pombos e $N-1$ poleiros, é impossível colocar um pombo em cada poleiro.

Condições Lógica Inteira

Para resolver este problema, foi criado um grupo de variáveis binárias que tomam valores inteiros:

- $p_{n,m}$: variável que representa a presença do pombo n no poleiro m.

Onde n e m são inteiros tais que $n \in [0, N-1]$ e $m \in [0, N-2]$.

As restrições impostas nas variáveis são as seguintes:

1. Cada pombo deve ocupar sempre um e um só poleiro:

$$\sum_{m=0}^{N-2} p_{n,m} = 1, \forall_n$$

2. Cada poleiro pode apenas ter no máximo um pombo:

$$\sum_{n=0}^{N-1} p_{n,m} \leq 1, \forall_m$$

In [2]:
```python
def php_int(N):
    start = time.time()

    # Criar o solver e as variáveis
    solver = Solver()
    p = [[Int(f'{n},{m}') for m in range(N-1)] for n in range(N)]

    # Condição 1: Cada pombo deve ocupar sempre um poleiro
    for n in p:
        solver.add(sum([m for m in n]) == 1)

    # Condição 2: Cada poleiro deve conter no máximo um pombo
    p = list(np.array(p).transpose())
    for m in p:
        solver.add(sum([n for n in m]) <= 1)

    # Verificar que é insatisfazível
    assert solver.check() == unsat

    return time.time() - start
```

Condições Lógica Proposicional

Para resolver este problema, foi criado um grupo de variáveis binárias booleanas:

- $p_{n,m}$: variável que representa a presença do pombo n no poleiro m.

Onde n e m são inteiros tais que $n \in [0, N-1]$ e $m \in [0, N-2]$

1. Cada pombo deve ocupar sempre um e um só poleiro, ou seja, cada pombo deve ocupar pelo menos um poleiro (1) e cada pombo deve ocupar no máximo um poleiro (2):

$$\bigvee_{m=0}^{N-2} p_{n,m}, \forall_n$$

$$p_{n,m} \rightarrow \bigwedge_{i=0, i \neq m}^{N-2} \left(\neg p_{n,i}\right) \forall_{n,m}$$

1. Cada poleiro tem no máximo um pombo:

$$p_{n,m} \rightarrow \bigwedge_{i=0, i \neq n}^{N-1} \left(\neg p_{i,m}\right), \forall_{n,m}$$

In [3]:
```python
def php_bool(N):
    start = time.time()

    # Criar o solver e as variáveis
    solver = Solver()
    p = [[Bool(f'{n},{m}') for m in range(N-1)] for n in range(N)]

    # Condição 1: Cada pombo deve ocupar sempre um poleiro
    for i in range(len(p)):
        solver.add(Or([p[i][j] for j in range(len(p[i]))]))
        for j in range(len(p[i])):
            conds = []
            for k in range(len(p[i])):
                if j != k:
                    conds.append(Not(p[i][k]))
            solver.add(Implies(p[i][j], And(conds)))

    # Condição 2: Cada poleiro deve conter no máximo um pombo
    for i in range(len(p)):
        for j in range(len(p[i])):
            conds = []
            for k in range(len(p)):
                if i != k:
                    conds.append(Not(p[k][j]))
            solver.add(Implies(p[i][j], And(conds)))

    # Verificar que é insatisfazível
    assert solver.check() == unsat

    return time.time() - start
```

In [4]:
```python
# Calcular os tempos de execução de PHP Int
num_max_int, times_int = 100, []
for i in tqdm(range(1, num_max_int+1), total=num_max_int, desc="PHP Int"):
    times_int.append(php_int(i))
```

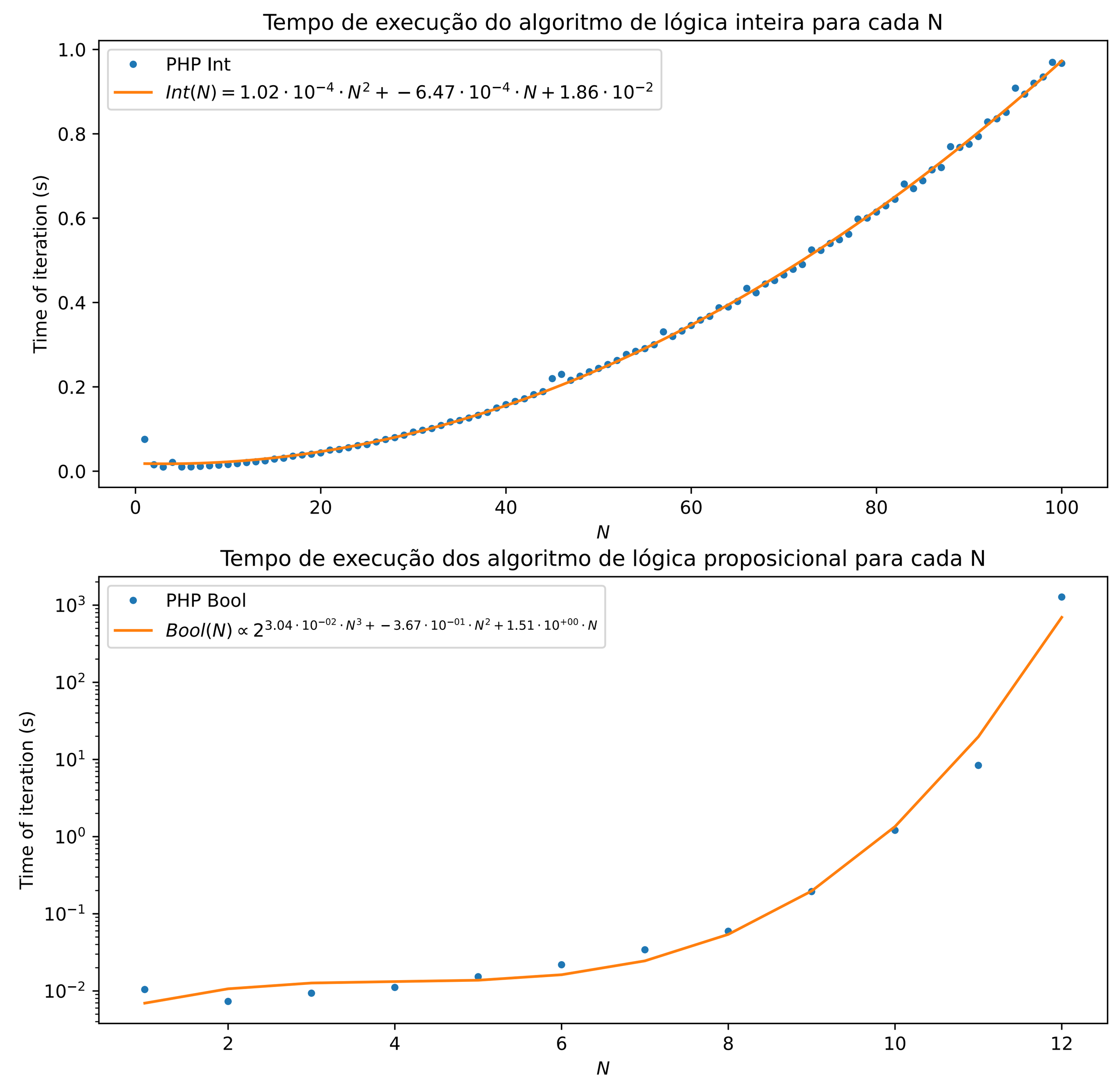
```
PHP Int: 100%|██████████| 100/100 [00:33<00:00,  2.98it/s]
```

In [5]:
```python
# Calcular os tempos de execução de PHP Int
num_max_bool, times_bool = 12, []
for i in tqdm(range(1, num_max_bool+1), total=num_max_bool, desc="PHP Int"):
    times_bool.append(php_bool(i))
```

```
PHP Int: 100%|██████████| 12/12 [21:24<00:00, 107.08s/it]
```

Fazendo plot e escrevendo os respetivos polinómios de ajuste (obtidos através do numpy) dos tempos de execução, obtemos a seguinte figura: polinómios

In [7]:
```python
# Obtenção dos polinómios de ajuste
x_axis = [i for i in range(1, num_max_int+1)]
poly2_c = np.polyfit(x_axis,times_int,2)
poly2 = [sum([poly2_c[i] * x ** (2-i) for i in range(len(poly2_c))]) for x in x_axis]
poly2_c = [f'{p:.2e}'.split('e')[0] + " \\cdot 10^{" + f"{p:.2e}".split('e')[1].replace('0','') + "}" for p in poly2
_c]

# Função de ajuste do PHP_Bool
x_axis_bool = [i for i in range(1, num_max_bool+1)]
log_bool = np.log2(times_bool)
coefs = np.polyfit(x_axis_bool, log_bool, 3)
poly = [2 ** (coefs[0] * x**3 + coefs[1] * x**2 + coefs[2] * x + coefs[3]) for x in x_axis_bool]
coefs = [f'{p:.2e}'.split('e')[0] + " \\cdot 10^{" + f"{p:.2e}".split('e')[1].replace('e', '0') + "}" for p in coefs
]

# Representação dos tempos de execução e dos polinómios de ajuste
fig, (ax, ax2) = plt.subplots(2, 1, figsize=(10,10))

# Plot do PHP Int
ax.set_title("Tempo de execução do algoritmo de lógica inteira para cada N")
ax.plot(x_axis, times_int,'.', label="PHP Int")
ax.plot(x_axis, poly2,label=f"$Int(N) = {poly2_c[0]} \\cdot N^2 + {poly2_c[1]} \\cdot N + {poly2_c[2]}$")
ax.set_ylabel("Time of iteration (s)")
ax.set_xlabel("$N$")
ax.legend()

# Plot do PHP Bool
ax2.set_title("Tempo de execução dos algoritmo de lógica proposicional para cada N")
ax2.plot(x_axis_bool, times_bool,'.', label="PHP Bool")
ax2.plot(x_axis_bool, poly, label="$Bool(N) \\propto 2^{" + f"{coefs[0]} \\cdot N^3 + {coefs[1]} \\cdot N^2 + {coefs
[2]} \\cdot N" + "}$")
ax2.set_ylabel("Time of iteration (s)")
ax2.set_xlabel("$N$")
ax2.set_yscale("log")
ax2.legend()

plt.show()
```



Por análise das figuras anteriores e das funções de ajuste pode-se verificar que:

- Para o algoritmo com lógica inteira, verifica-se um tempo de execução $T(N) \in \mathcal{O}(N^2)$ para os inputs testados. Este tempo de execução é polinomial, tal como seria de esperar de um algoritmo de lógica inteira linear.
- Para o algoritmo com lógica proposicional, verifica-se que o seu crescimento aparenta ser exponencial - cujo expoente é uma função polinomial $g(N)$ - sendo então o seu tempo de execução $T(N) \in \mathcal{O}\left(2^{g(N)}\right)$ para os inputs testados

Como tal, interpolando as funções anteriores com o aumento de N, rapidamente se verifica um grande aumento do tempo de execução do algoritmo de lógica proposicional, devido a este ser exponencial.

O algoritmo de lógica inteira linear, no entanto, é mais rapidamente computável e eficiente para esta tarefa, dado o seu tempo de execução polinomial.