1. Parte A

1.1. Demostración de la ecuación diferencial

Tenemos que β es inversamente proporcional a $\sqrt{P}$, igual que δ

$\beta = \frac{b}{\sqrt{P}} \quad y \quad \delta = \frac{d}{\sqrt{P}}$

Y que el crecimiento poblacional es proporcional a la población

$\frac{dP}{dt} = mP$

Dicha constante de proporcionalidad será la diferencia de las tasas de natalidad y mortalidad

$m = \beta - \delta$

Sustituyendo beta y delta

$\frac{dP}{dt} = (\frac{b}{\sqrt{P}} - \frac{d}{\sqrt{P}})P$

$\frac{dP}{dt} = (\frac{b-d}{\sqrt{P}})P$

Digamos que k = b - d

$\frac{dP}{dt} = \frac{kP}{\sqrt{P}}$

Racionalizando queda

$\frac{dP}{dt} = k\sqrt{P}$

$\frac{dP}{\sqrt{P}} = kdt$

Integrando ambos miembros respecto a x

$\int \frac{dP}{\sqrt{P}} = \int kdt$

$2\sqrt{P} = kt + C$

$\sqrt{P} = \frac{kt+C}{2}$

$P = (\frac{kt+C}{2})^2$

$P = (\frac{kt}{2} + \frac{C}{2})^2$

$P(0) = (\frac{k0}{2} + \frac{C}{2})^2$

$P(0) = \frac{C^2}{4}$

$C = 2\sqrt{P(0)}$

Sustituyendo C

$P = (\frac{kt}{2} + \sqrt{P(0)})^2$

Por lo que queda demostrada la ecuación diferencial.

1.2. Valores iniciales

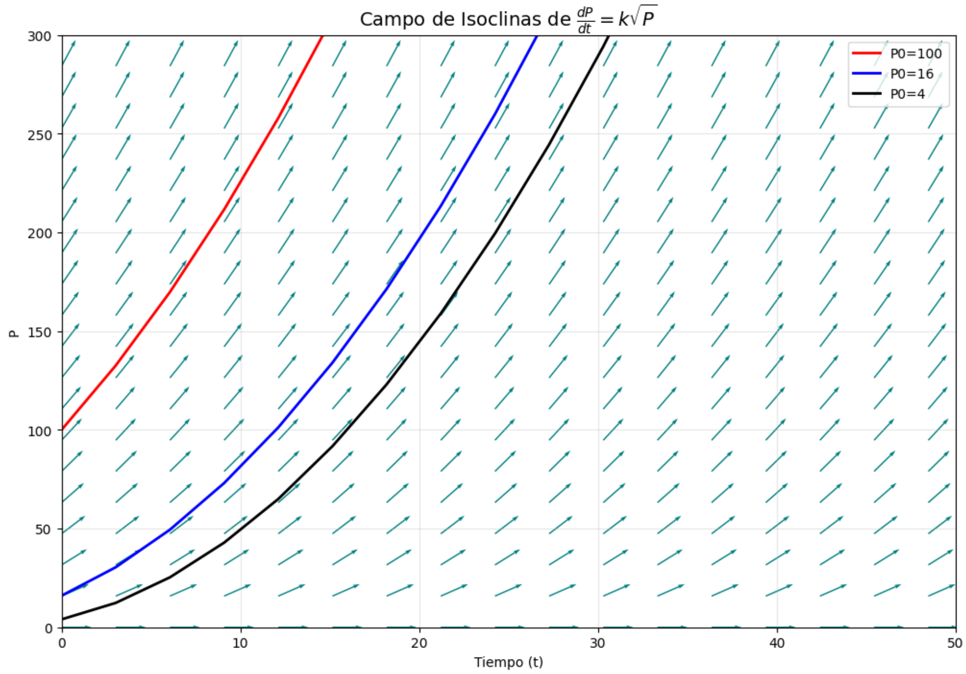
Tenemos que P(0) = 100 y que P(6) = 169.
Entonces P(12) = ¿?
El objetivo es hallar la k que permite que la función pase por esos 3 puntos.
Como P(6) = 169 y P(0) = 100:
$P(6) = (\frac{k6}{2} + \sqrt{P(0)})^2 = 169$
$(3k + \sqrt{100})^2 = 169$
$(3k + 10)^2 = 169$
$\sqrt{(3k + 10)^2} = \sqrt{169}$
$3k + 10 = 13$
$3k = 3$
$k = 1$
Teniendo k, tenemos la ecuación completamente en funcion de t
Evaluando P(12):
$P(12) = (\frac{12}{2} + 10)^2$
$P(12) = (16)^2$
$P(12) = 256$

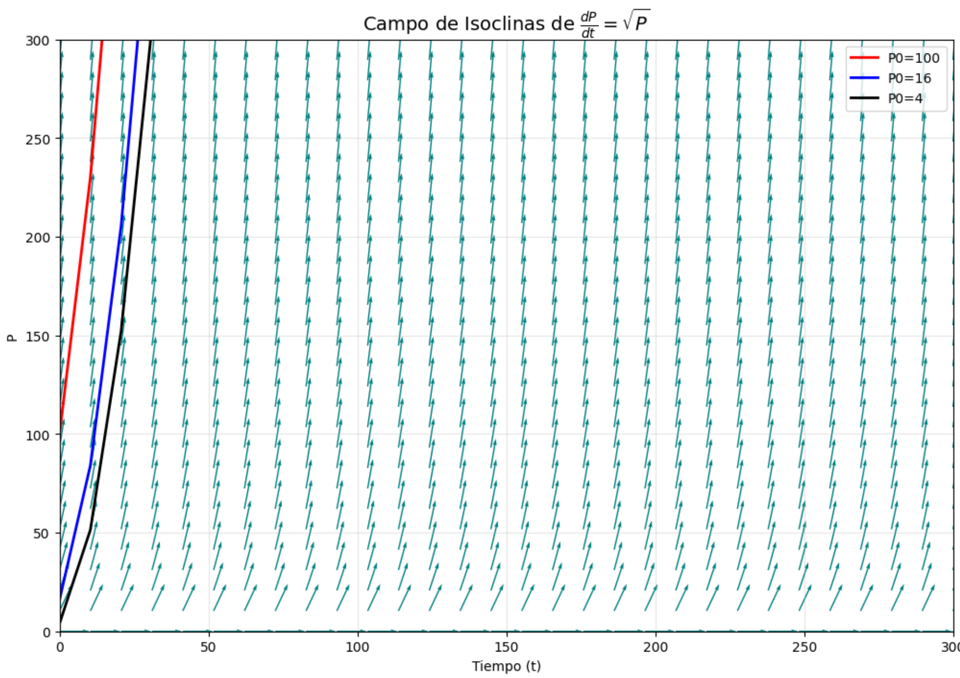
Dentro de un año (12 meses) habrán 256 peces en el lago.

1.3. Campo de isoclinas

A continuación, se ilustra el campo de isoclinas de la ecuación diferencial $\frac{dP}{dt} = k\sqrt{P}$ donde se tomó k = 1.

Se muestran varias soluciones con diferentes valores de poblacion inicial
Como la pobación de peces aumenta con el paso del tiempo, la tasa de natalidad es mayor que la de mortalidad, por lo que la constante k debe ser positiva para que las isoclinas sean crecientes. En la figura se muestra como la función del ejercicio, con P(0) = 100 y k = 1, cumple además las otras dos condiciones, P(6) = 169 y P(12) = 256
Para poblaciones pequeñas el cecimiento es demasiado lento, y acelerado para poblaciones medianas o grandes. Los únicos puntos criticos son P=0, donde la población se extingue. No hay límite superior en el modelo.
Ver Isoclinas.ipynb


Campo de Isoclinas de $\frac{dP}{dt} = k\sqrt{P}$
P0=100
P0=16
P0=4
P
Tiempo (t)


Campo de Isoclinas de $\frac{dP}{dt} = \sqrt{P}$
P0=100
P0=16
P0=4
P
Tiempo (t)

1.4. Planteamiento del Problema

Para cada solución particular del problema, o sea, para un k y P(0) específicos, sabemos que:

- La función solución $P(t) = (kt/2 + \sqrt{P(0)})^2$ tiene como dominio todas las t $> t_0$, ya que no tiene límite superior, por lo que para cualquier t habrá una P solución.
- P(t) es inyectiva, como muestra la gráfica, garantizando la unicidad de las soluciones.
- P(t) es continua y diferenciable, descartando cualquier inestabilidad en las soluciones

Pero en P = 0 es una zona de puntos criticos, llegar aquí significa la extinción de la especie y la función se volvería constante en 0 como muestran los isoclinas(P(t)=0), esto descartaría la unicidad.

En resumen: El problema estará bien planteado siempre que ningún factor lleve a P(t)=0, por ejemplo: k = 0 o P(0) = 0.

1.5. Condicionamiento del Problema

Dado: $\frac{dP}{dt} = \sqrt{P}$, $P(0) = 100$ Solución: $P(t) = \left(\frac{t}{2} + 10\right)^2$

Para la solución $P(t) = \left(\frac{t}{2} + 10\right)^2$, el número de condición respecto a perturbaciones en t es:

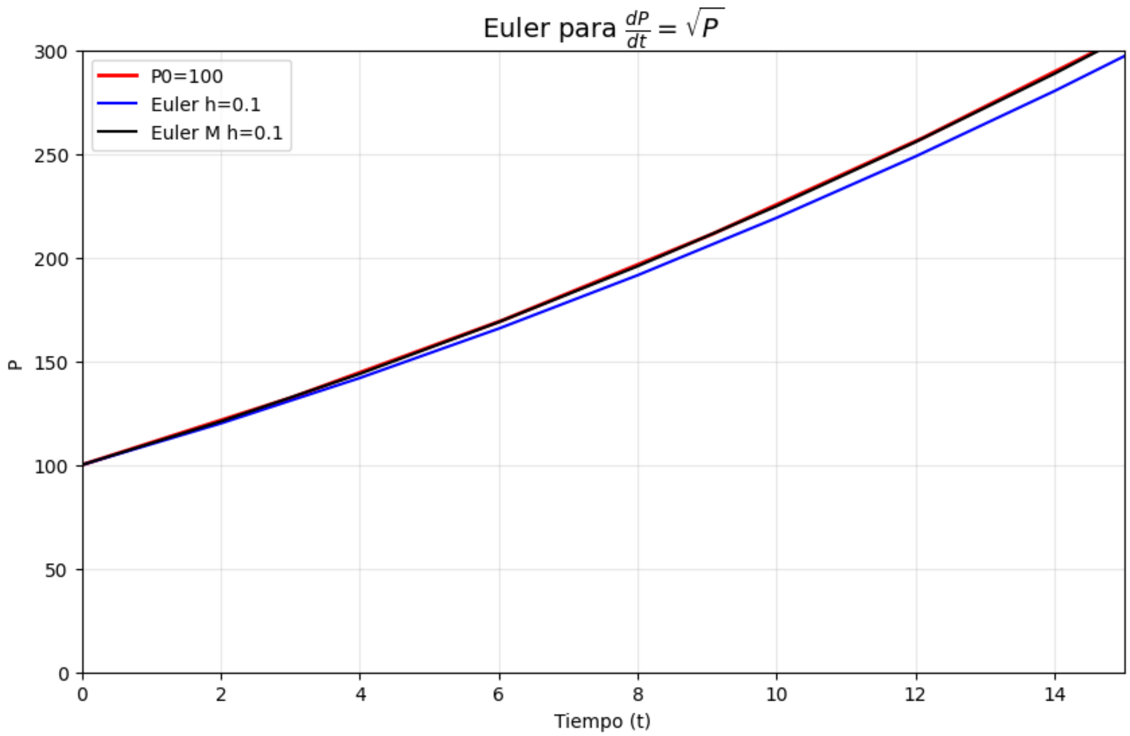
$$\text{cond}(P, t) = \left|\frac{t \cdot P'(t)}{P(t)}\right| = \frac{2t}{t + 20}$$

- $t = 0$: cond = 0 (insensible)
- $t = 10$: cond $\approx$ 0,67 (buen condicionamiento)
- $t \to \infty$: cond $\to$ 2 (condicionamiento moderado)

Interpretación: Para t grandes, un error del 1 % en t produce aproximadamente un 2 % de error en $P(t)$.

1.6. Métodos numéricos y errores

En este apartado se emplean dos métodos numericos para el mayor análisis del problema, y como otras vías de solución. Estos son el método de Euler y el método de Euler Mejorado, también conocido como método de Heun.
Ver Euler y Euler Mejorado.ipynb



Del gráfico comparativo se aprecia como Euler mejorado (línea negra) logra mucha mayor precisión que el de Euler (línea azul). Euler mejorado es más preciso siendo de orden 2, calcuando dos pendientes y hallando su promedio en cada iteración, si se reduce h a la mitad, el error se reduce a la cuarta parte. En cambio, el método de Euler es de orden 1 y es más sencillo el cálculo de cada iteración, calculando solo una pendiente, si h se reduce a la mitad, el error también se reduce a la mitad. Ambos métodos tienen complejidad temporal O(n), donde n es el número de iteraciones a realizar, aunque Euler mejorado realice más trabajo por iteración.

Ahora, analizaremos los errores absolutos, relativos, hacia adelante y hacia atrás de estos métodos comparados con la solución exacta.

- Error absoluto: Se calcula como la diferencia entre la solución exacta y la aproximada: $\Delta y = |y - \widehat{y}|$
  El error absoluto de las primeras 5 iteraciones de ambos métodos:
  0.000000 0.000000
  0.062500 0.000762
  0.126525 0.001525
  0.192038 0.002288
  0.259006 0.003052

- Error relativo: Es el cociente del error absoluto con la solución exacta: $\Delta y = \left|\frac{y - \widehat{y}}{y}\right|$
  El error relativo de las primeras 5 iteraciones de ambos métodos:
  0.000000 0.000000
  0.000595 0.000007
  0.001148 0.000014
  0.001662 0.000020
  0.002141 0.000025

- Error hacia adelante: Diferencia entre la solución exacta y la solución aproximada perturbada: $\Delta y = |y(x) - \widehat{y}(x + \epsilon)|$
  Ya sabemos que P(12) = 256 con P(0) = 100, veamos con $\epsilon = 0{,}1$:
  $P_\epsilon(t + \epsilon) = (\frac{t}{2} + \sqrt{100})^2$
  $P_\epsilon(12{,}1) = (\frac{12{,}1}{2} + 10)^2$
  $P_\epsilon(12{,}1) = (16{,}05)^2$
  $P_\epsilon(12{,}1) = 257{,}6025$
  $\Delta y = |y(P(0)) - \widehat{y}(P(0) + \epsilon)|$
  $\Delta y = |256 - 257{,}6025|$
  $\Delta y = 1{,}6025$
  El error de 0.1 mes se amplifica a 1.6 peces después de un año.

- Error hacia atrás: Dado un resultado aproximado $\widehat{P}$, buscar la perturbación ϵ en la entrada tal que: $P(t + \epsilon) = \widehat{P}$
  Tomemos el mismo ejemplo del error hacia adelante

$P(12+\epsilon) = 257{,}6025$
$P(t) = (\frac{t}{2} + 10)^2$
$t = 2(\sqrt{P(t)} - 10)$
$12 + \epsilon = 2(\sqrt{257{,}6025} - 10)$
$\epsilon = 2(16{,}05 - 10) - 12$
$\epsilon = 12{,}1 - 12$
$\epsilon = 0{,}1$
La perturbación de 0.1 meses es el error hacia atrás para lograr la población de 257.6025.

2. Parte B

2.1. Determinación de si el problema está bien planteado

El problema está bien planteado en términos de existencia, unicidad y estabilidad de soluciones:

- **Existencia y unicidad:** La función $f(z) = \mu z - z^2$ es un polinomio, por lo tanto es continuamente diferenciable (de clase C^1) y continua en cualquier intervalo acotado. Por el teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales ordinarias, para cualquier condición inicial $z(0) = z_0$, existe una solución única definida en un intervalo alrededor de $t = 0$.

- **Estabilidad:** Las soluciones dependen continuamente de las condiciones iniciales y del parámetro μ debido a la suavidad de f. Además, la estabilidad de los puntos de equilibrio está clasificada como se muestra anteriormente, lo que confirma que el comportamiento cualitativo es predecible.

2.2. Puntos de Equilibrio y Estabilidad

1. **Puntos de equilibrio**:

$$\frac{dz}{dt} = 0 \Rightarrow \mu z - z^2 = z(\mu - z) = 0$$

$$\Rightarrow z = 0 \quad \text{y} \quad z = \mu$$

2. **Estabilidad**: Usando $f'(z) = \mu - 2z$:

- En $z = 0$: $f'(0) = \mu$
    - Estable si $\mu < 0$
    - Inestable si $\mu > 0$
- En $z = \mu$: $f'(\mu) = -\mu$
    - Estable si $\mu > 0$
    - Inestable si $\mu < 0$

2.3. Visualización: Diagrama de Bifurcación

El diagrama de bifurcación en el plano (μ, z) muestra una **bifurcación transcrítica** en $\mu = 0$.

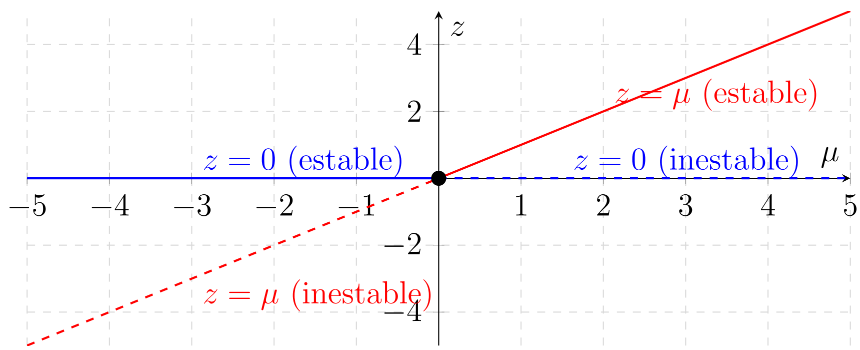


Figura 1: Diagrama de bifurcación transcrítica

- Para $\mu < 0$: $z = 0$ es estable (población se extingue) y $z = \mu$ es inestable
- Para $\mu > 0$: $z = 0$ es inestable y $z = \mu$ es estable (población se estabiliza en μ)

Interpretación: $\mu = 0$ es el umbral donde ocurre un cambio cualitativo en el comportamiento. Si la tasa de crecimiento neto es positiva, la población sobrevive; si es negativa, se extingue.

2.4. Validación con Benchmarks

Para validar métodos numéricos, se utiliza la solución analítica de la ecuación logística:

$$z(t) = \frac{\mu z_0}{z_0 + (\mu - z_0)e^{-\mu t}}, \quad \mu > 0$$

- **Benchmark**: Para $\mu = 1$, $z_0 = 0{,}5$, la solución analítica se compara con métodos numéricos (Euler y Runge-Kutta 4)
- **Métrica**: Error cuadrático medio entre solución numérica y analítica
- **Resultado**:
  - Runge-Kutta 4: Error $\epsilon < 10^{-5}$
  - Método de Euler: Error $\epsilon < 10^{-2}$

Tabla 1: Comparación de errores para $\mu = 1$, $z_0 = 0{,}5$

Método	**Error Cuadrático Medio**	**Error Máximo**
Euler	$2{,}3 \times 10^{-3}$	$4{,}7 \times 10^{-3}$
Runge-Kutta 4	$1{,}2 \times 10^{-6}$	$2{,}8 \times 10^{-6}$

2.5. Análisis de Bifurcación

El diagrama de bifurcación confirma:

- Punto de bifurcación en $\mu = 0$
- Cambio de estabilidad en los puntos fijos
- Comportamiento cualitativamente diferente para $\mu < 0$ y $\mu > 0$