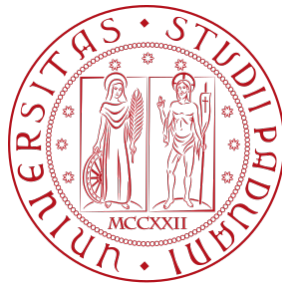


Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Scienze Statistiche

Corso di Laurea in Scienze Statistiche



**Algoritmo EM per la risoluzione di un problema di
imaging nella Tomografia Muonica per scattering**

Anna Bordignon

Supervisore: Tommaso Dorigo

26 ottobre 2022

1 Abstract

Nel campo della tomografia muonica per scattering, molti metodi sono reperibili in letteratura per ricavare informazioni riguardanti la composizione di volumi ignoti. Attualmente, nel pacchetto TomOpt, l'inferenza sulla composizione di volumi passivi viene realizzata con il metodo PoCA (*Point of Closest Approach*). Basandosi sull'assunzione che soltanto un singolo evento di scattering si verifichi durante l'attraversamento di un muone nel volume da ispezionare, esso assegna tutta l'informazione derivante dalla deviazione angolare ad un unico punto nello spazio tridimensionale. Perciò, trascurando le informazioni che derivano dai contributi di tutte le altre regioni del volume, la qualità dell'immagine che si ottiene non è ottimale. Al fine di migliorare la capacità di discriminazione di materiali diversi, perciò, si è implementato in R un algoritmo EM, utilizzando l'informazione derivante dallo scattering subito da un campione di muoni per aggiornare iterativamente la stima della composizione di ogni cella elementare del volume complessivo.

Indice

1 Abstract	1
2 Introduzione	4
3 Tomografia muonica	6
3.1 Muoni	6
3.2 Tecnica	7
3.3 Configurazione sperimentale e dati	8
3.4 Principio fisico	10
3.5 Applicazioni pratiche	11
3.5 TomOpt	12
4 Algoritmo EM	14
4.1 Introduzione	14
4.2 Generalizzazione	15
4.3 Definizione	16
4.4 Proprietà	21
4.4.1 Monotonia	21
4.4.2 Convergenza	21
5 Problema	22
5.1 Parametri fisici	22
5.1.1 Caso bidimensionale	22
5.1.2 Caso tridimensionale	25
5.2 Dati	32
4.3 E-step	36
4.4 M-step	37
6 Configurazione geometrica	41
6.1 Caso bidimensionale	41
6.2 Caso tridimensionale	42
7 Simulazione numerica	62

7.0.1	Algoritmo EM con informazione sulle coordinate del punto PoCA	72
7.0.2	Algoritmo EM senza informazione sulle coordinate del punto PoCA	78
7.0.3	Algoritmo PoCA	84
7.1	Confronto complessivo	86
8	Conclusioni	88

2 Introduzione

La tomografia è una tecnica non invasiva che permette di ispezionare volumi incogniti, indagandone il contenuto e fornendo una ricostruzione tridimensionale della composizione. Viene utilizzata in molti ambiti quali la vulcanologia, l'archeologia, il controllo di processo industriale, la sicurezza energetica e nucleare.

(a) .

(b) .

Figura 2.0.1: *Alcune applicazioni pratiche di utilizzo della tecnica tomografica.*

Una particolare tipologia è la tomografia muonica, nella quale vengono utilizzati i muoni, prodotti dai raggi cosmici, per identificare la composizione di materiali incogniti.

Nel presente lavoro, dato un campione di muoni, si intende ispezionare un volume, esemplificato per semplicità tramite un parallelepipedo rettangolo, al fine di determinare la localizzazione e la composizione dei diversi volumi di cui è formato.

Si suppongono note solamente le coordinate dei punti di incidenza e di uscita di ciascuna particella dal volume, così come gli angoli formati in questi due punti dalla traiettoria rispetto al piano verticale, parallelo all'altezza del parallelepipedo. Infine, si assume di conoscere il valore di momento per ciascun muone appartenente al campione considerato.

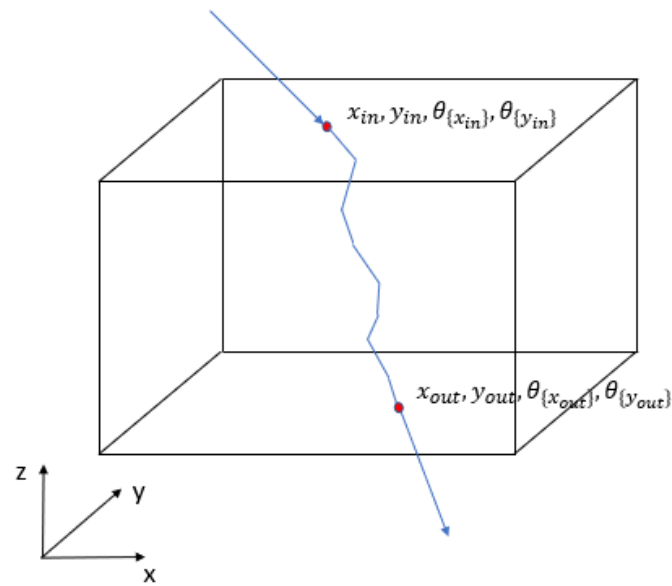


Figura 2.0.2: *Propagazione di un muone attraverso un volume passivo. Sono note le coordinate del punto di incidenza e del punto di uscita, $x_{in}, y_{in}, x_{out}, y_{out}$ e gli angoli formati rispetto all'asse verticale z in questi due punti, $\theta_{x_{in}}, \theta_{y_{in}}, \theta_{x_{out}}, \theta_{y_{out}}$.*

Il volume complessivo viene suddiviso in voxels, cubi elementari che permettono di creare una “mappa” tridimensionale discreta. Dal momento che materiali diversi comportano una deviazione angolare differente della traiettoria del muone durante l'attraversamento del volume, si valuta il contributo che ogni singola zona apporta allo scattering totale subito dalla particella.

L'obiettivo finale è ricostruire la composizione materiale di ogni cella elementare, con particolare interesse rivolto non tanto alla determinazione esatta dell'elemento componente, bensì alla discriminazione di aree adiacenti caratterizzate da diversa costituzione.

3 Tomografia muonica

La tecnica di tomografia muonica viene utilizzata per l'identificazione di materiali in volumi incogniti e per la ricostruzione di immagini tridimensionali. Data la presenza di un costante flusso di muoni dai raggi cosmici, tale tecnica può essere impiegata per l'ispezione di molteplici tipologie di oggetto, con dimensioni variabili dall'ordine $O(1m)$ a $O(1km)$.

3.1 Muoni

I muoni sono particelle pesanti cariche, la cui massa è pari circa 200 volte quella dell'elettrone, che colpiscono costantemente la superficie terrestre con un flusso approssimato pari a 10000 particelle per m^2 al minuto. Essi hanno origine dalla radiazione cosmica; quest'ultima, proveniente prevalentemente da sorgenti esterne al nostro sistema solare, incide regolarmente sugli strati superiori che compongono l'atmosfera terrestre, generando una cascata di particelle secondarie, tra le quali, appunto, si distinguono anche i muoni.

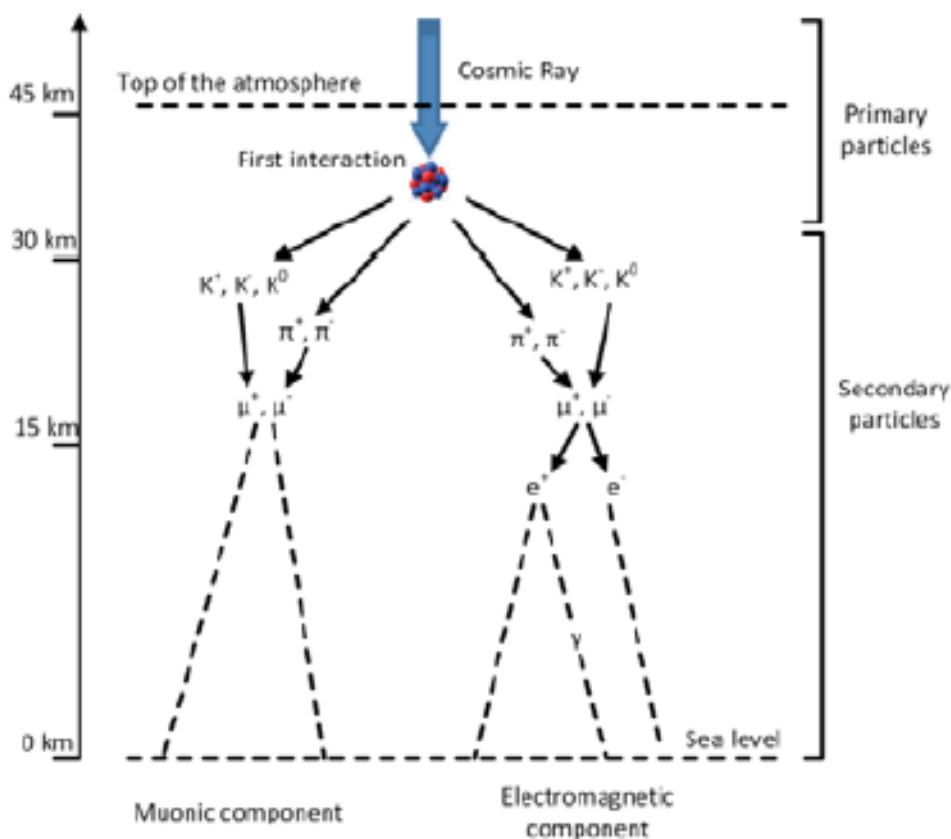


Figura 3.1.1: *Rappresentazione di una cascata di particelle secondarie derivante dall'interazione dei raggi cosmici con gli atomi presenti negli strati superiori dell'atmosfera terrestre.*

3.2 Tecnica

In base alle dimensioni e alla tipologia di oggetto da ispezionare, si distinguono due tipi principali di rivelatori per la radiografia muonica [3]. Come visibile in Figura 3.2.1, quando un singolo detector viene posto parallelamente alla superficie inferiore del volume da ispezionare si utilizza il principio di assorbimento, ovvero si misura la frazione di muoni che giungono al rivelatore, sopravvissuti alla perdita di energia in seguito all'interazione con il materiale. Se, invece, il volume di interesse viene cinto da pannelli adibiti alla misurazione del flusso di particelle entrante e uscente, si intende analizzare lo scattering subito nel passaggio all'interno del volume. Nel seguito per tomografia muonica ci si riferirà a questa seconda configurazione sperimentale e

la tecnica di scattering verrà approfondita con particolare riferimento ad un'applicazione di interesse pratico.

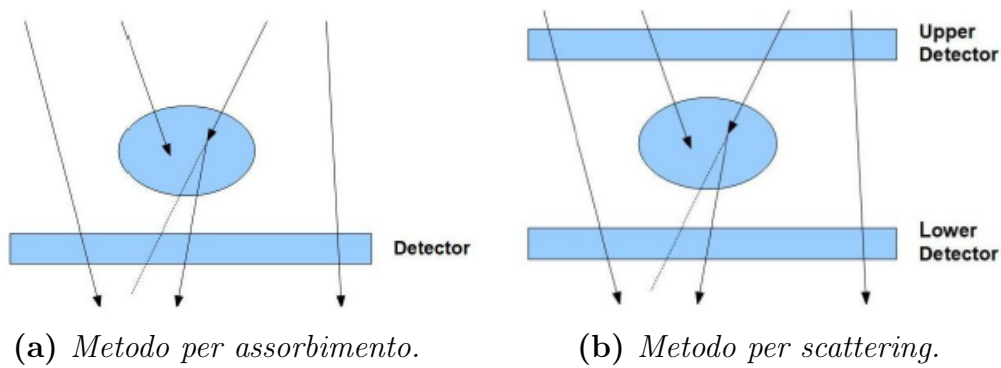


Figura 3.2.1: Configurazione sperimentale di detectors per la tomografia muonica.

In base al tipo di problema e al caso specifico per cui la tomografia viene utilizzata, la configurazione sperimentale viene adattata a rispondere all'esigenza di interesse.

Il detector deve essere ottimizzato in modo tale da minimizzare vincoli quali il tempo di acquisizione del dato e il costo dell'apparecchiatura utilizzata ed, al contempo, massimizzare vincoli riguardanti la performance di interesse e la portabilità dell'apparato. La configurazione ottimale per il detector dipende dallo scopo per il quale la tomografia muonica viene impiegata.

3.3 Configurazione sperimentale e dati

In figura 3.3.1 si riporta uno schema che descrive l'apparato sperimentale utilizzato per alcuni problemi di ricostruzione di immagine nell'ambito della tomografia muonica per scattering. Il caso esemplificato è analogo a quello che verrà trattato nel presente studio.

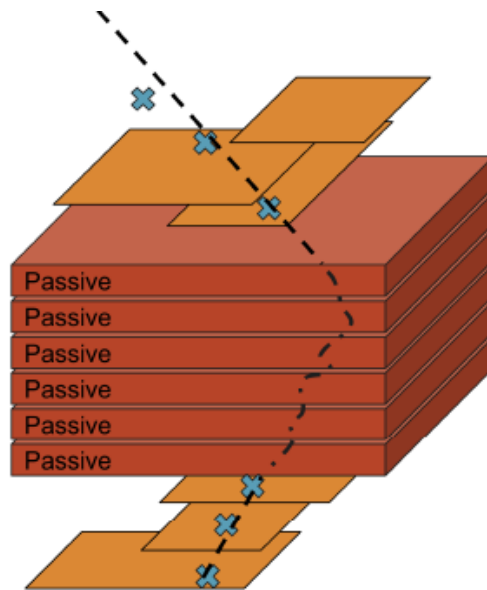


Figura 3.3.1: *Propagazione di un muone attraverso un volume passivo, con pannelli del detector per rilevare la posizione.*

Il volume di interesse viene delimitato superiormente e inferiormente con dei pannelli mobili, i quali vengono lasciati liberi di traslare orizzontalmente e verticalmente, ovvero sia parallelamente sia perpendicolarmente alla superficie del volume, finché non viene raggiunta la configurazione ottimale che massimizza la funzione di perdita associata.

Ciascun pannello registra le coordinate del punto in cui viene colpito dal muone durante la sua traiettoria discendente, con associata la relativa risoluzione in x , y e z . Vengono quindi adattati quattro modelli di regressione lineare distinti: i primi due modelli vengono adattati all'insieme di punti registrati dai pannelli sovrastanti il volume, mentre gli altri due modelli vengono adattati all'insieme di punti registrati dal gruppo di pannelli sottostanti al volume. Il primo modello di ogni tipologia è adibito a misurare la relazione che sussiste tra la coppia di variabili (x, z) , con z variabile dipendente e x variabile indipendente, mentre il secondo misura la relazione lineare tra le variabili (y, z) , dove z è la variabile dipendente e y la variabile indipendente. In seguito all'adattamento, si ricavano rispettivamente le coordinate di due punti di interesse per il problema: il primo punto, ottenibile dalle prime due regressioni, caratterizzato da valore della terza coordi-

nata pari a $z = 0.8m$, mentre il secondo punto, derivato dalle seconde due regressioni, relative al gruppo di pannelli sottostanti al volume, caratterizzato da $z = 0.2m$.

Inoltre, dalle rette di regressione adattate è ricavabile la pendenza di quest'ultime, corrispondente alla direzione del vettore orientato nello spazio bidimensionale associato. Perciò, per ciascuna delle due rette di ogni gruppo di pannelli, vengono ricavati due valori di angolo: θ_x , formato dalla retta nel piano xz con orientazione positiva definita in senso antiorario rispetto all'asse x ; analogamente, θ_y , definito nel piano yz , con orientazione positiva in senso antiorario rispetto all'asse y . Per il problema in esame, l'insieme dei dati noti è costituito dalle coordinate dei due punti precedentemente ricavati, ciascuno corredato dalla propria coppia di angoli θ_x e θ_y , i quali definiscono la direzione della traiettoria del muone nello spazio tridimensionale associato.

Per qualificare il punto caratterizzato dal valore della terza coordinata $z = 0.8m$ ci si riferirà nel seguito con $P_{in} = (X_{in}, Y_{in}, Z_{in})$, mentre per riferirsi al punto con $z = 0.2m$ si utilizzerà la seguente nomenclatura $P_{out} = (X_{out}, Y_{out}, Z_{out})$. Allo stesso modo, per denotare la coppia di angoli relativi alla traiettoria in ingresso ci si riferirà con $\theta_{x_{in}}$ e $\theta_{y_{in}}$, mentre la coppia dei due angoli in uscita verrà richiamata con $\theta_{x_{out}}$ e $\theta_{y_{out}}$.

3.4 Principio fisico

La tomografia muonica per scattering permette di fare assunzioni riguardanti la composizione materiale di volumi incogniti nello spazio. Infatti, in base al tipo di materiale attraversato, la traiettoria del muone viene deviata in maniera diversa. Lo scattering che avviene tra la particella e la carica contenuta all'interno dell'elemento incontrato dipende dalla lunghezza di radiazione X_0 , quantità inversamente proporzionale al numero atomico Z dell'elemento. Maggiore è il valore di X_0 del materiale che viene attraversato, minore sarà la deviazione angolare subita dalla traiettoria del muone. Conseguentemente, materiali caratterizzati da un elevato numero atomico comportano uno scattering più importante rispetto a materiali con numero atomico

inferiore. Nelle simulazioni in questo studio, verranno considerati a titolo esemplificativo due elementi: il piombo (Pb), caratterizzato da $Z = 82$ e lunghezza di radiazione $X_0 = 5.60 \times 10^{-3}m$, e il berillio (Be), avente $Z = 4$ e $X_0 = 0.35m$.

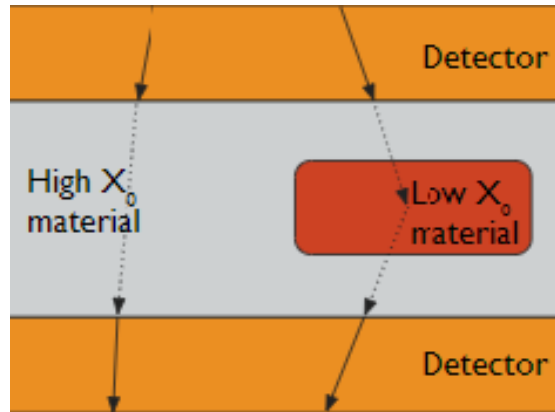
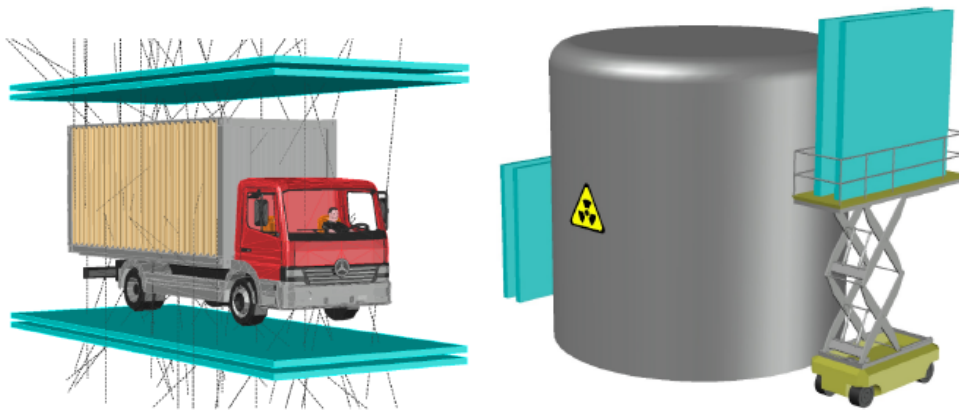


Figura 3.4.1: *Propagazione di muoni attraverso un volume; si distingue una piccola deviazione angolare nel caso di attraversamento del materiale con elevata lunghezza di radiazione X_0 , mentre un grande angolo di scattering nell'interazione del materiale caratterizzato da piccolo valore di X_0 .*

3.5 Applicazioni pratiche

Nell'ambito della tomografia muonica si annoverano svariate applicazioni pratiche di utilizzo. Un esempio concreto riguarda l'ambito dei controlli di frontiera, dove specifico interesse viene posto verso la rilevazione di merci di contrabbando all'interno di mezzi di trasporto, quali navi o containers su ruota. Inoltre, un'altra possibile applicazione riguarda i controlli in materia energetica, dove si intende ispezionare i contenitori adibiti allo stoccaggio di carburanti esausti. Lo scopo finale, in questo caso, è determinare l'eventuale presenza di scorie o sostanze radioattive al loro interno. Nell'ambito dell'archeologia, infine, è di interesse valutare la composizione di un sito, al fine di procedere ad un'eventuale lavoro di ristrutturazione o scavo solo in seguito ad un'adeguata caratterizzazione tridimensionale dello stesso.



(a) Rilevazione materiali di contrabbando. (b) Rilevazione di scorie radioattive.

Figura 3.5.1: Alcune applicazioni pratiche di utilizzo di detectors per la tomografia muonica.

3.5 TomOpt

TomOpt è un pacchetto software ideato e sviluppato per fornire soluzioni a problemi riguardanti la tomografia muonica. È frutto della collaborazione MODE (*Machine-learning Optimized Design of Experiments*), nata da un gruppo di fisici e data scientists riuniti con lo scopo di sviluppare soluzioni a problemi di ottimizzazione nella fisica delle particelle sperimentale tramite l'ausilio della programmazione differenziale. Al momento TomOpt non è ancora stato rilasciato, bensì è in fase di ultimazione. Si basa su un'interfaccia programmata tramite linguaggio Python e fa uso del software PyTorch per implementare molte delle funzioni che lo compongono. È pensato per investigare ogni aspetto della tomografia muonica in maniera esaustiva e completa, fornendo allo stesso tempo gli strumenti necessari a rispondere a esigenze pratiche di utilizzo.

Una sezione del pacchetto è dedicata alla modellizzazione e allo studio della configurazione di detectors per la tomografia muonica: si considerano i vincoli riguardanti efficienza, accuratezza e costi dell'apparecchiatura da utilizzare in base al caso di interesse. Tra le altre, inoltre, include funzioni riguardanti la generazione di muoni tramite

campionamento casuale, seguendo i noti modelli riguardanti le caratteristiche di un flusso di muoni proveniente dai raggi cosmici. Un'ulteriore sezione riguarda la generazione e simulazione di volumi passivi da ispezionare, suddivisi in aree di diversa composizione materiale. Infine, considerata la propagazione delle particelle all'interno del volume simulato, una sezione del pacchetto è dedicata all'inferenza relativa alla composizione materiale del volume. Attualmente si utilizza il metodo PoCA (*Point of Closest Approach*), sebbene altri metodi sono stati esplorati e verranno integrati a breve nel pacchetto.

4 Algoritmo EM

4.1 Introduzione

È un algoritmo iterativo che consiste nell'alternanza sequenziale tra un passo di "*Expectation*" e un passo di "*Maximization*". Nel primo passo si determina una funzione ausiliaria attraverso il calcolo di un valore atteso, mentre nel secondo passo si procede alla massimizzazione di tale funzione.

Viene utilizzato per calcolare iterativamente stime di massima verosimiglianza in presenza di dati mancanti, ovvero quando il campione a disposizione comprende soltanto una parte dei dati relativi al problema di interesse, mentre la rimanente parte non è osservabile.

Il primo passo consiste nel calcolo del valore atteso della log verosimiglianza associata al campione completo (comprensivo dei dati osservati e non osservati) rispetto alla funzione di densità dei dati mancanti, condizionata ai dati osservati e al parametro di interesse stimato all'iterazione precedente. Nel secondo passo si massimizza la funzione ausiliaria, ottenendo quindi un valore stimato del parametro all'iterazione corrente, che aggiorna l'informazione del passo precedente.

Per il problema di interesse, l'algoritmo si basa su un campione di dati osservati, un campione di dati non osservabili e un'assunzione iniziale riguardante il valore del parametro da stimare X_0 per ciascuno dei cubi in cui viene suddiviso il volume complessivo.

4.2 Generalizzazione

Si considerino due spazi campionari χ e ψ . Si assuma esistere una funzione che dallo spazio χ allo spazio ψ produce la mappa $x \rightarrow y(x)$. Il campione di dati osservati si assuma essere una realizzazione da ψ . Inoltre, sia noto che il dato "completo" x giace nello spazio $\chi(y)$, ovvero nel sottoinsieme di χ che viene determinato dall'equazione $y = y(x)$, con y dato osservato.

La densità relativa ad un campione di dati osservabili è esprimibile con riferimento ai dati non osservabili. Infatti, definita con $f(x|\phi)$ la famiglia di densità campionarie associata ai dati "completi", comprensivi sia dei dati osservabili che dei dati non osservabili, condizionata ai parametri ϕ , si ricava la famiglia di densità campionarie corrispondente, $g(y|\phi)$, relativa ai dati osservati. La relazione che sussiste tra le due famiglie parametriche è la seguente

$$g(y|\phi) = \int_{\chi(y)} f(x|\phi) dx \quad (4.1)$$

con $\chi(y) = \{x : y(x) = y\}$.

Dato un campione di n dati osservati $Y = (y_1, \dots, y_n)$, lo scopo dell'algoritmo EM è determinare il valore del parametro ϕ che massimizza la densità $g(y|\phi)$, quando la forma di quest'ultima è ignota o non specificabile completamente. I dati osservati vengono "completati" con l'aggiunta dei dati non osservati, ottenendo quindi il campione di dati completi $X = (x_1, \dots, x_n)$. Questo, infatti, può essere decomposto in due componenti distinte come $X = (Y, H)$, di cui Y noto e H non osservabile. La densità della variabile aleatoria X così ottenuta ha forma nota e completamente specificabile. Si utilizza quindi la specificazione nota di quest'ultima densità al fine di ricavare informazioni e determinare in modo univoco la densità $g(y|\phi)$, come espresso precedentemente in equazione 4.1.

4.3 Definizione

Si supponga inizialmente che la densità associata ai dati completi, ovvero al campione comprensivo dei dati osservati e non osservati, appartenga alla famiglia esponenziale regolare, quindi sia esprimibile nella forma generale seguente

$$f(x|\phi) = \frac{b(x)\exp(\phi t(x)^T)}{a(\phi)} \quad (4.2)$$

con ϕ vettore di parametri ($1 \times r$) e $t(x)$ vettore ($1 \times r$) della statistica sufficiente per i dati completi. La famiglia esponenziale si definisce regolare in quanto il vettore ϕ giace nell'insieme convesso r -dimensionale Ω , per il quale la 4.2 definisce una densità per tutti i possibili valori di ϕ in Ω .

Si supponga inoltre che $\phi^{(p)}$ rappresenti il valore stimato all'iterazione corrente del vettore ϕ , ottenuto dopo p repliche dell'algoritmo. L'iterazione successiva dell'algoritmo può essere descritta tramite i due seguenti passi:

- E-step: si stimi il valore atteso della statistica sufficiente $t(x)$ associata ai dati completi, come descritto dalla seguente

$$t^{(p)} = E(t(x)|y, \phi^{(p)}). \quad (4.3)$$

- M-step: si determini il valore del vettore di parametri $\phi^{(p+1)}$ risolvendo l'equazione

$$E(t(x)|\phi) = t^{(p)}. \quad (4.4)$$

Tramite l'applicazione consecutiva e ripetuta dei due passi menzionati precedentemente, si ottiene il valore ϕ^* che massimizza la log-verosimiglianza associata al campione di dati osservati, ovvero

$$L(\phi) = \log(g(y|\phi)) \quad (4.5)$$

con $g(y|\phi)$ definita in equazione 4.1 e $f(x|\phi)$ della forma in 4.2.

Un limite a cui è possibile andare incontro nel passo di massimizzazione precedentemente descritto, riguarda il fatto che l'equazione 4.4

non è risolvibile se ϕ^* giace sulla frontiera dell'insieme Ω , perciò la definizione deve essere generalizzata a funzioni di densità non appartenenti alla famiglia esponenziale regolare. In caso contrario, invece, se l'equazione in 4.4 ammette soluzione per ϕ in Ω , tale soluzione è unica poichè la funzione di log verosimiglianza associata ad una famiglia esponenziale regolare è convessa.

Generalizzando la trattazione per poter includere i casi in cui il vettore di parametri ϕ giace sulla frontiera dello spazio parametrico, si assume che la funzione di densità associata al campione di dati completi appartenga alla famiglia delle distribuzioni esponenziali curve. In questo caso la funzione di densità è ancora della forma in 4.2, ma il vettore di parametri ϕ giace in una sottovarietà curva Ω_0 della regione convessa r -dimensionale Ω . In questo caso, il passo di "expectation" rimane analogo a quello precedentemente esplicitato, mentre il passo di "maximization" si riduce al seguente

- M-step: si determini il valore del vettore di parametri $\phi^{(p+1)}$ in Ω_0 che massimizza l'espressione $-\log(a(\phi)) + \phi t^{(p)T}$.

Infine, per poter generalizzare la trattazione anche al caso di funzioni di densità non appartenenti all'usuale famiglia esponenziale regolare, si introduce la seguente funzione ausiliaria

$$Q(\phi'; \phi) = E(\log(p(x|\phi')|y, \phi)) \quad (4.6)$$

definita per tutte le coppie di parametri (ϕ', ϕ) in $\Omega \times \Omega$, con p funzione generica di densità di probabilità associata al campione di dati completo.

I due passi dell'algoritmo precedentemente illustrati vengono quindi estesi ai seguenti:

- E-step: si calcoli la funzione $Q(\phi; \phi^{(p)})$.
- M-step: si determini il valore $\phi^{(p+1)} \in \Omega$ che massimizza $Q(\phi; \phi^{(p)})$.

Anche in questo caso tramite la ripetizione alternata dei due passi descritti si ottiene al limite il valore del vettore di parametri ϕ^* che massimizza la log verosimiglianza associata al campione di dati osservati.

L'idea alla base di questa procedura, infatti, consiste nel fatto che, non conoscendo la funzione di densità associata ai dati completi, si procede massimizzando il valore atteso della log verosimiglianza condizionata ai dati osservati e al valore stimato all'iterazione corrente del parametro $\phi^{(p)}$.

Nel caso particolare di una funzione di densità appartenente alla famiglia esponenziale, si dimostra che il passo di massimizzazione nella sua formulazione generale appena esplicitata si riduce a quanto asserito nella trattazione per le famiglie esponenziali. Infatti, si osserva che

$$\begin{aligned} Q(\phi; \phi^{(p)}) &= E \left[\log \left(\frac{b(x) \exp(\phi t(x)^T)}{a(\phi)} \middle| y, \phi^{(p)} \right) \right] \\ &= -\log(a(\phi)) + E[\log(b(x)) | y, \phi^{(p)}] + \phi t^{(p)T} \end{aligned} \quad (4.7)$$

con $t^{(p)}$ definito in 4.3 e dove si è usato il fatto che il valore atteso di una costante è uguale alla costante stessa.

Massimizzare $Q(\phi; \phi^{(p)})$ in espressione 4.7 è equivalente a massimizzare $-\log(a(\phi)) + \phi t^{(p)T}$, il che conferma quindi l'equivalenza tra le due trattazioni presentate.

Nel seguito si descrive nel dettaglio il principio di funzionamento dei due passi precedentemente esplicitati.

Sia X l'insieme di dati completi per il problema, la sua distribuzione può essere fattorizzata nel modo seguente

$$p(x|\phi) = p(y, h|\phi) = p(y|\phi)p(h|y, \phi) \quad (4.8)$$

dove $p(y|\phi)$ è la funzione di densità dei dati osservati e $p(h|y, \phi)$ è la funzione di densità dei dati non osservati, condizionata al valore dei dati osservati e al parametro ϕ .

Di conseguenza, la log verosimiglianza associata viene espressa nel seguente modo

$$l(\phi|x) = l(\phi|y, h) = l(\phi|y) + \log(p(h|y, \phi)). \quad (4.9)$$

L'obiettivo dell'algoritmo EM consiste nella stima del parametro ϕ attraverso la massimizzazione della log verosimiglianza associata al campione di dati incompleto, corrispondente al campione di dati osservati Y .

Riordinando i termini in equazione 4.9 si ottiene la seguente

$$l(\phi|y) = l(\phi|x) + \log(p(h|y, \phi)). \quad (4.10)$$

Si può dimostrare la correttezza della precedente formulazione anche in un modo alternativo, partendo dalla log verosimiglianza associata al campione di dati osservati ed espandendo la densità associata nel modo riportato di seguito

$$\begin{aligned} l(\phi|y) &= \log(p(y|\phi)) \\ &= \log \int p(y, h|\phi) dh \\ &= \log \int \frac{p(y, h|\phi)}{p(h|y, \phi^{(p)})} p(h|y, \phi^{(p)}) dh \\ &= \log E \left[\frac{p(y, h|\phi)}{p(h|y, \phi^{(p)})} \middle| y, \phi^{(p)} \right] \\ &\geq E \left[\log \frac{p(y, h|\phi)}{p(h|y, \phi^{(p)})} \middle| y, \phi^{(p)} \right] \\ &= E[\log(p(y, h|\phi)|y, \phi^{(p)})] - E[\log(p(h|y, \phi^{(p)}))|y, \phi^{(p)}] \\ &= Q(\phi; \phi^{(p)}) - E[\log(p(h|y, \phi^{(p)}))|y, \phi^{(p)}] \end{aligned} \quad (4.11)$$

dove si è utilizzata la disuguaglianza di Jensen applicata ad una funzione convessa.

In definitiva, quindi, si ottiene la seguente equazione

$$l(\phi|y) \geq Q(\phi; \phi^{(p)}) - H(\phi; \phi^{(p)}) \quad (4.12)$$

dove

$$Q(\phi; \phi^{(p)}) = \int [l(\phi|x)] p(h|y, \phi^{(p)}) dh, \quad (4.13)$$

$$H(\phi; \phi^{(p)}) = \int [\log(p(h|y, \phi))] p(h|y, \phi^{(p)}) dh. \quad (4.14)$$

Sempre dalla disuguaglianza di Jensen, segue che

$$H(\phi; \phi^{(p)}) \leq H(\phi^{(p)}; \phi^{(p)}). \quad (4.15)$$

Quindi, considerata la sequenza ordinata di stime del parametro ottenute ad iterazioni consecutive, $\{\phi^{(1)}, \phi^{(2)}, \phi^{(3)}, \dots\}$, si calcola la differenza tra valori consecutivi della log verosimiglianza associata al campione incompleto nel seguente modo

$$l(\phi^{(p+1)}|y) - l(\phi^{(p)}|y) = [Q(\phi^{(p+1)}|\phi^{(p)}) - Q(\phi^{(p)}|\phi^{(p)})] - [H(\phi^{(p+1)}|\phi^{(p)}) - H(\phi^{(p)}|\phi^{(p)})]. \quad (4.16)$$

Ne deriva che condizione necessaria affinché la log verosimiglianza sia non decrescente all'aumentare delle iterazioni dell'algoritmo, ovvero $l(\phi^{(p+1)}|y) - l(\phi^{(p)}|y) \geq 0$, è che $Q(\phi^{(p+1)}; \phi^{(p)}) \geq Q(\phi^{(p)}; \phi^{(p)})$.

Da questa evidenza, perciò, segue la necessità del secondo passo dell'algoritmo (M-step), che richiede la massimizzazione della funzione $Q(\phi; \phi')$ rispetto a ϕ nello spazio parametrico Ω .

A seguito di tale risultato, infatti, Dempster, Laird e Rubin [2] dimostrano la non decrescenza della log verosimiglianza associata al campione di dati incompleti, mostrando come, a seguito dei risultati precedentemente presentati, tra iterazioni consecutive dell'algoritmo vale la seguente

$$l(\phi^{(p+1)}|y) \geq l(\phi^{(p)}|y). \quad (4.17)$$

Perciò, i consueti due passi dell'algoritmo E e M vengono alternati con ripetizione finché la differenza $l(\phi^{(p+1)}|y) - l(\phi^{(p)}|y)$ assume un valore piccolo, inferiore ad una soglia specificata a priori al fine di discriminare la convergenza dell'algoritmo.

La sequenza di iterazioni dell'algoritmo viene quindi fermata ed il parametro $\phi^{(p)}$ stimato all'iterazione corrente viene considerato il valore ricercato. Tale valore massimizza per costruzione la log verosimiglianza associata ai dati osservati, e, di conseguenza, anche quella associata ai dati completi.

Seguono numerose proprietà derivabili dalla precedente formalizzazione [4], di alcune delle quali si riporta un estratto, omettendo la

dimostrazione per brevità.

4.4 Proprietà

4.4.1 Monotonia

Ogni sequenza di stime $\{\phi^{(p)}\}$ aumenta la verosimiglianza e $L(\phi^{(p)})$, se limitato superiormente, converge ad un valore L^* .

4.4.2 Convergenza

Se la funzione $Q(\phi; \phi')$ è continua in ϕ e in ϕ' , allora L^* è un valore stazionario per L. Inoltre, sotto condizione che la funzione $Q(\phi; \phi')$ sia anche derivabile in ϕ e ϕ' , se la sequenza di stime $\{\phi^{(p)}\}$ converge in qualche punto ϕ^* , questo è un punto stazionario.

La proprietà di convergenza viene sempre verificata nel caso delle famiglie esponenziali curve.

5 Problema

5.1 Parametri fisici

Quando un muone attraversa un volume, la sua traiettoria può subire deviazioni a causa dell'interazione coulombiana tra la carica negativa di tale particella e la distribuzione di carica elettrica degli atomi del materiale attraversato. L'angolo di scattering tipicamente è dell'ordine di alcune decine di *mrad*, corrispondenti all'incirca ad un paio di gradi sessagesimali. Maggiore è il numero atomico Z del materiale attraversato, maggiore risulta essere la deviazione angolare della traiettoria del muone.

5.1.1 Caso bidimensionale

Indicata con $\Delta\theta$ l'ampiezza dell'angolo di scattering, misurato rispetto ad un sistema di riferimento solidale al volume, esso viene definito come la differenza tra l'angolo formato dalla traiettoria del muone successivamente e precedentemente alla deviazione. La distribuzione dell'angolo di scattering si può approssimare con una normale a media nulla e varianza dipendente dalle proprietà fisiche del materiale. Nello specifico, si ha che

$$\Delta\theta \sim N(0, \sigma_{\Delta\theta}^2) \quad (5.1)$$

dove la radice quadrata della varianza, che identifica l'ampiezza della distribuzione Gaussiana, viene definita in termini di parametri che rispecchiano le proprietà del materiale. Essa infatti è esprimibile come

$$\sigma_{\Delta\theta} \simeq \frac{15MeV}{\beta cp} \sqrt{\frac{H}{X_0}} \quad (5.2)$$

dove βc è la velocità della particella, p è il momento del muone incidente e H è l'altezza del materiale; si assume inoltre che $\beta = 1$. Si nota che lo standard error è inversamente proporzionale alla lunghezza di radiazione X_0 , dove quest'ultima diminuisce all'aumentare del numero atomico e della densità del materiale. Dalla conoscenza del valore X_0 è possibile quindi identificare il materiale incognito che compone il volume di interesse.

Per semplificare la notazione viene definita la densità di scattering di un materiale come

$$\lambda(X_0) \equiv \left(\frac{15}{p_0}\right)^2 \frac{1}{X_0} \quad (5.3)$$

dove p_0 è un valore nominale di momento, preso come riferimento.

La varianza della distribuzione può essere quindi riscritta come

$$\begin{aligned} \sigma_{\Delta\theta}^2 &= \lambda H \left(\frac{p_0}{p}\right)^2 \\ &= \lambda H p_r^2 \end{aligned} \quad (5.4)$$

con $p_r = \frac{p_0}{p}$ quantità adimensionale.

Assieme alla deviazione angolare subita dalla particella, è misurabile anche lo spostamento che avviene lungo ciascuno degli assi cartesiani durante l'attraversamento del volume.

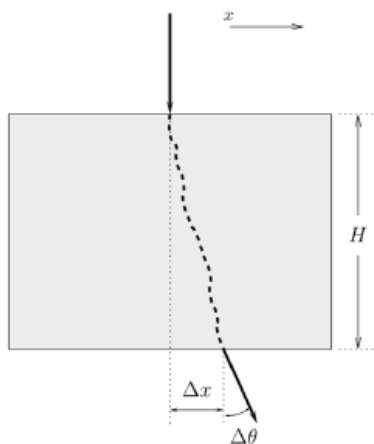


Figura 5.1.1: *Piano bidimensionale.*

Infatti, considerato un sistema cartesiano ortogonale bidimensionale, si assumono noti i valori $x_{in}, \theta_{x_{in}}, x_{out}, \theta_{x_{out}}$, corrispondenti rispettivamente alla posizione e angolo di incidenza del muone sulla superficie superiore del volume, e alla posizione e angolo di uscita dalla superficie inferiore dello stesso. Ven-

gono quindi ricavati la deviazione angolare e lo spostamento complessivo come $\Delta\theta_x = \theta_{x_{out}} - \theta_{x_{in}}$ e $\Delta x = x_{out} - x_{in}$. Essendo due quantità correlate, la loro distribuzione si può esprimere come una Gaussiana congiunta

$$f(\Delta x, \Delta\theta_x | X_0, p) \sim N(0, \Sigma). \quad (5.5)$$

Per ottenere un'espressione esplicita per la matrice di varianza e covarianza Σ si nota, in seguito a considerazioni empiriche, che la radice quadrata della varianza dello spostamento complessivo è esprimibile come

$$\begin{aligned} \sigma_{\Delta x} &= \frac{H}{\sqrt{3}} \sigma_{\Delta\theta} \\ &= \frac{H}{\sqrt{3}} \sqrt{\lambda H} p_r \\ &= \sqrt{\frac{\lambda}{3}} H^{3/2} p_r. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Elevando al quadrato il risultato ottenuto, si ottiene dunque l'espressione ricercata per la varianza dello spostamento, che risulta essere

$$\sigma_{\Delta x}^2 = \lambda \frac{H^3}{3} p_r^2. \quad (5.7)$$

Inoltre, sempre da considerazioni sperimentali, è noto in letteratura che la correlazione tra spostamento e deviazione angolare è pari a

$$\rho_{\Delta x \Delta\theta} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (5.8)$$

Dal momento che per definizione la correlazione tra due grandezze è esprimibile come

$$\rho_{\Delta x \Delta\theta} = \frac{\sigma_{\Delta x \Delta\theta}}{\sigma_{\Delta x} \sigma_{\Delta\theta}} \quad (5.9)$$

il termine fuori dalla diagonale principale della matrice di varianza e

covarianza viene ricavato nel modo seguente

$$\begin{aligned}
\sigma_{\Delta x \Delta \theta} &= \rho_{\Delta x \Delta \theta} \sigma_{\Delta x} \sigma_{\Delta \theta} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{3}} H^{3/2} p_r \sqrt{\lambda H} p_r \\
&= \frac{\lambda}{2} H^2 p_r^2.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Considerati i termini ricavati precedentemente nelle equazioni 5.4, 5.7, 5.10, la matrice di varianza e covarianza è data da

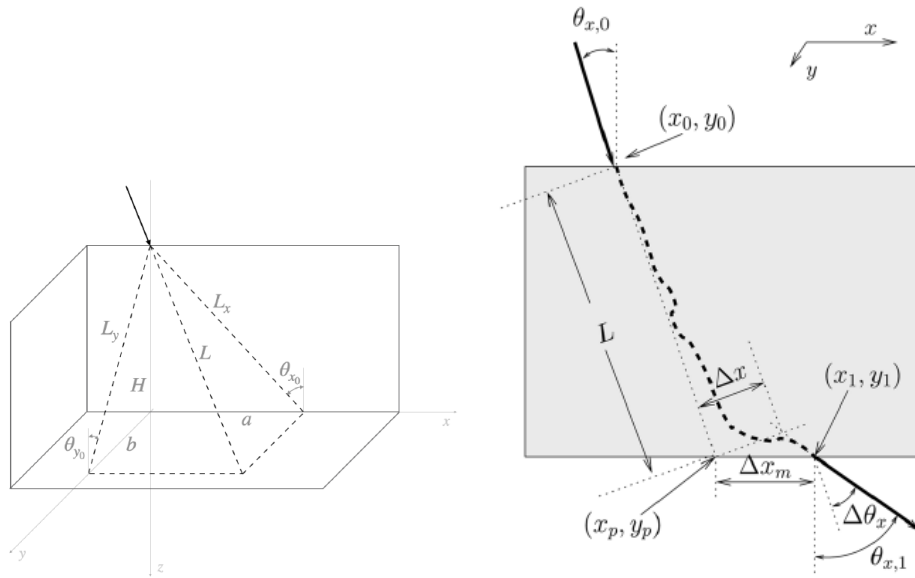
$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{\Delta \theta}^2 & \sigma_{\Delta x \Delta \theta} \\ \sigma_{\Delta x \Delta \theta} & \sigma_{\Delta x}^2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} H & \frac{H^2}{2} \\ \frac{H^2}{2} & \frac{H^3}{3} \end{pmatrix} p_r^2. \tag{5.11}$$

5.1.2 Caso tridimensionale

Estendendo la trattazione ad un contesto tridimensionale, il fenomeno di scattering bidimensionale discusso in precedenza avviene indipendentemente su due piani tra loro ortogonali. In questo caso si assumono noti i punti in ingresso e in uscita x_{in} , x_{out} , y_{in} , y_{out} per ciascuno dei due assi cartesiani considerati, così come gli angoli formati dalla traiettoria della particella rispetto alla superficie superiore e inferiore del volume, $\theta_{x_{in}}$, $\theta_{x_{out}}$, $\theta_{y_{in}}$, $\theta_{y_{out}}$.

In primo luogo si calcola la lunghezza di cammino tridimensionale del muone all'interno del volume, ovvero la lunghezza del segmento che collega il punto in entrata misurato e il punto di intersezione con il piano inferiore che si ottiene prolungando la traiettoria del muone incidente, assumendo che non sia avvenuta alcuna deviazione dell'angolo nel percorso all'interno del volume. Dalla Figura 5.1.2(a) si ricava la seguente espressione

$$L = H \sqrt{1 + \tan(\theta_{x_{in}})^2 + \tan(\theta_{y_{in}})^2} = H L_{xy}. \tag{5.12}$$



(a) Lunghezza di cammino tridimensionale. (b) Sezione di volume tridimensionale [9].

Figura 5.1.2

E' possibile a questo punto determinare lo spostamento totale e la deviazione angolare per ciascuno dei due assi considerati, ovvero Δx , Δy , $\Delta\theta_x$, $\Delta\theta_y$. Dato un sistema di riferimento cartesiano con un asse orientato parallelamente alla direzione del muone incidente alla superficie, lo spostamento totale viene misurato nel piano ortogonale alla traiettoria; considerata quindi la differenza tra il punto di ingresso e di uscita nel volume, questa viene ruotata e proiettata nel piano perpendicolare alla direzione della particella incidente. Si definisce con x_p il punto di intersezione tra la retta che individua il percorso del muone e la superficie inferiore del volume, supponendo la traiettoria invariata e quindi che non sia avvenuta alcuna deviazione all'interno del materiale. Esso viene calcolato come

$$\begin{aligned} x_p &= x_{in} + \tan(\theta_{x_{in}})(z_{out} - z_{in}) \\ &= x_{in} + \tan(\theta_{x_{in}})H. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Lo spostamento complessivo viene quindi ottenuto tramite l'espressione seguente, dove si considera la differenza tra il punto in uscita misurato x_{out} e il punto x_p e la si proietta nel piano ortogonale alla traiettoria incidente, riscalandolo poi il valore ottenuto rispetto alla

lunghezza di cammino tridimensionale

$$\Delta x = (x_{out} - x_p) \cos(\theta_{x_{in}}) L_{xy} \frac{\cos(\Delta\theta_x + \theta_{x_{in}})}{\cos(\Delta\theta_x)}. \quad (5.14)$$

L'angolo di scattering totale viene invece ricavato agevolmente come la differenza tra l'angolo in uscita e in entrata misurati, ovvero

$$\Delta\theta_x = \theta_{x_{out}} - \theta_{x_{in}}. \quad (5.15)$$

Considerato un volume non omogeneo, per semplificare la trattazione questo può essere suddiviso in voxels tridimensionali di dimensioni definite. Indagare la composizione del volume corrisponde quindi a determinare la densità di ciascun voxel che lo compone.

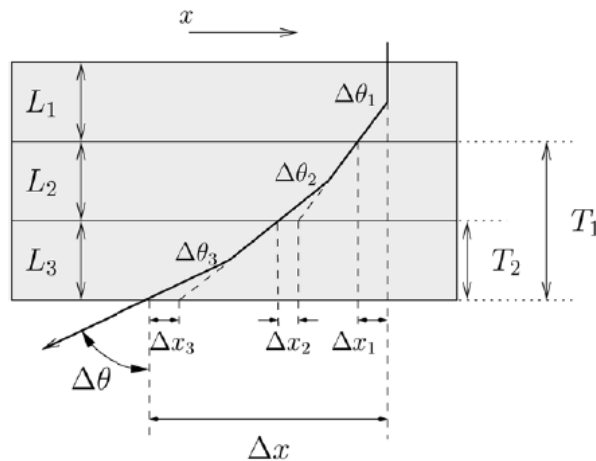


Figura 5.1.3: Volume tridimensionale suddiviso in tre strati sovrapposti [9].

Inizialmente si considera per semplicità il caso schematizzato in figura 5.1.3, dove il volume viene tagliato con due piani orizzontali paralleli all'asse delle ascisse, dando luogo quindi a tre strati sovrapposti aventi uguale altezza. L'angolo di scattering totale misurato viene definito come somma delle deviazioni angolari che avvengono all'interno di ogni strato

$$\Delta\theta = \Delta\theta_1 + \Delta\theta_2 + \Delta\theta_3. \quad (5.16)$$

Inoltre per piccoli valori dell'angolo di scattering vale l'approssimazione seguente per lo spostamento totale, ricavata considerando soltanto i

termini al primo ordine nello sviluppo in serie di Taylor della funzione tangente:

$$\begin{aligned}
\Delta x &= \Delta x_1 + L_2 \tan(\Delta\theta_1) + \Delta x_2 + L_3 \tan(\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2) + \Delta x_3 \\
&\simeq \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + (L_2 + L_3)\Delta\theta_1 + L_3\Delta\theta_2 \\
&\simeq \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + T_1\Delta\theta_1 + T_2\Delta\theta_2
\end{aligned} \tag{5.17}$$

dove T_j ($j=1,2$) rappresenta la lunghezza di cammino tridimensionale del muone dal punto di uscita del j -esimo voxel al punto di uscita del volume complessivo. Esso viene definito quindi in generale in termini della lunghezza di cammino della particella all'interno di ciascun voxel come

$$\begin{aligned}
T_j &= \sum_{k=j+1}^N L_k \quad 1 \leq j \leq N-1, \\
T_N &= 0.
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Generalizzando quanto riscontrato ad un volume con $j = 1, \dots, N$ voxels, valgono le seguenti espressioni per angolo di scattering e spostamento totali:

$$\Delta\theta = \sum_{j=1}^N \Delta\theta_j, \tag{5.19}$$

$$\Delta x = \sum_{j=1}^N (\Delta x_j + T_j \Delta\theta_j). \tag{5.20}$$

Per definizione, data una variabile aleatoria X , la sua varianza è esprimibile come differenza tra il momento secondo e il quadrato del valore atteso, ovvero come

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2. \tag{5.21}$$

Utilizzando le equazioni 5.19, si ricava la varianza per lo spostamento totale Δx definita in termini della lunghezza di cammino del muone

all'interno di ciascuno strato.

Infatti

$$Var(\Delta x) = E(\Delta x \Delta x) - E(\Delta x)E(\Delta x) \quad (5.22)$$

ma poichè $E(\Delta x) = 0$ dalla definizione di distribuzione Gaussiana per lo spostamento, la varianza si riduce a

$$\begin{aligned} Var(\Delta x) &= E(\Delta x \Delta x) \\ &= E \left[\sum_{j=1}^N (\Delta x_j + T_j \Delta \theta_j) \sum_{k=1}^N (\Delta x_k + T_k \Delta \theta_k) \right] \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N [E(\Delta x_j \Delta x_k) + T_j E(\Delta \theta_j \Delta x_k) + \\ &\quad T_k E(\Delta \theta_k \Delta x_j) + T_j T_k E(\Delta \theta_j \Delta \theta_k)] \\ &= \sum_{j=1}^N [E(\Delta x_j \Delta x_j) + 2T_j E(\Delta \theta_j \Delta x_j) + T_j^2 E(\Delta \theta_j \Delta \theta_j)] . \end{aligned} \quad (5.23)$$

Nel calcolo precedente si osserva che si annullano i prodotti incrociati tra termini con $j \neq k$, mentre rimangono solamente i prodotti misti con $j = k$. Infatti, dal momento che spostamento e deviazione angolare seguono una distribuzione Gaussiana congiunta a media nulla, si ha che $E(\Delta x_j) = E(\Delta \theta_j) = 0$. Inoltre la distribuzione di scattering e spostamento in ciascun voxel è indipendente identicamente distribuita rispetto a quella in ognuno degli altri voxels che compongono il volume.

Sostituendo quindi le espressioni in equazione 5.11, dove il termine H viene sostituito da L_j , lunghezza di cammino tridimensionale

all'interno del j-esimo voxel, si ottiene

$$\begin{aligned}\sigma_{\Delta x}^2 &= \sum_{j=1}^N \left[\frac{L_j^3}{3} \lambda_j p_r^2 + 2T_j \frac{L_j^2}{2} \lambda_j p_r^2 + T_j^2 L_j \lambda_j p_r^2 \right] \\ &= \left[\left(\frac{L_j^3}{3} + T_j L_j^2 + T_j^2 L_j \right) \lambda_j p_r^2 \right].\end{aligned}\quad (5.24)$$

Si procede quindi in modo analogo per ricavare un'espressione per il termine di covarianza tra spostamento e scattering

$$\begin{aligned}Cov(\Delta x \Delta \theta) &= E(\Delta x \Delta \theta) - E(\Delta x)E(\Delta \theta) \\ &= E(\Delta x \Delta \theta) \\ &= E \left[\sum_{j=1}^N (\Delta x_j + T_j \Delta \theta_j) \sum_{k=1}^N (\Delta \theta_k) \right] \\ &= E \left[\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N (\Delta x_j \Delta \theta_k + T_j \Delta \theta_j \Delta \theta_k) \right] \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N [E(\Delta x_j \Delta \theta_k) + T_j E(\Delta \theta_j \Delta \theta_k)] \\ &= \sum_{j=1}^N [E(\Delta x_j \Delta \theta_j) + T_j E(\Delta \theta_j \Delta \theta_j)] \\ &= \sum_{j=1}^N \left[\frac{L_j^2}{2} \lambda_j p_r^2 + T_j L_j \lambda_j p_r^2 \right].\end{aligned}\quad (5.25)$$

Per cui l'espressione finale per il termine di covarianza risulta

$$\sigma_{\Delta x \Delta \theta} = \left[\left(\frac{L_j^2}{2} + T_j L_j \right) \lambda_j p_r^2 \right]. \quad (5.26)$$

Infine si ricava l'espressione della varianza per l'angolo di scattering

nel modo seguente

$$\begin{aligned}
Var(\Delta\theta) &= E(\Delta\theta\Delta\theta) - E(\Delta\theta)E(\Delta\theta) \\
&= E(\Delta\theta\Delta\theta) \\
&= E \left[\sum_{j=1}^N \Delta\theta_j \sum_{k=1}^N \Delta\theta_k \right] \\
&= E \left[\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \Delta\theta_j \Delta\theta_k \right] \\
&= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N E[\Delta\theta_j \Delta\theta_k] \\
&= \sum_{j=1}^N E[\Delta\theta_j \Delta\theta_j] \\
&= \sum_{j=1}^N L_j \lambda_j p_r^2.
\end{aligned} \tag{5.27}$$

Riscrivendo quanto ottenuto, si ottiene quindi

$$\sigma_{\Delta\theta}^2 = \sum_{j=1}^N L_j \lambda_j p_r^2. \tag{5.28}$$

Per un determinato muone, quindi, la matrice di varianza e covarianza è esprimibile come

$$\Sigma_i = p_{r,i}^2 \sum_{j \leq N} \lambda_j W_{ij} \tag{5.29}$$

dove nella sommatoria il pedice $j \leq N$ si riferisce agli indici dei voxels colpiti dal muone nel suo percorso attraverso il volume, mentre la matrice di pesi W_{ij} è pari a

$$W_{ij} = \begin{pmatrix} L_{ij} & L_{ij}^2/2 + L_{ij}T_{ij} \\ L_{ij}^2/2 + L_{ij}T_{ij} & L_{ij}^3/3 + L_{ij}^2T_{ij} + L_{ij}T_{ij}^2 \end{pmatrix}. \tag{5.30}$$

5.2 Dati

Per ciascuno degli M muoni nel campione, si definiscono i vettori bi-dimensionali di dati osservati D_{x_i}, D_{y_i} ; questi comprendono lo scattering e la deviazione misurati rispettivamente nei piani xz e yz tra loro ortogonali e vengono indicati nel modo seguente

$$D_{x_i} = (\Delta\theta_{x_i}, \Delta x_i), \quad (5.31)$$

$$D_{y_i} = (\Delta\theta_{y_i}, \Delta y_i). \quad (5.32)$$

Per ogni muone si ha quindi a disposizione la matrice di dati osservati

$$D_i = (D_{x_i}, D_{y_i}). \quad (5.33)$$

La distribuzione per ciascuna riga delle matrici di dati osservati D_{x_i} e D_{y_i} si assume essere Gaussiana congiunta con vettore delle medie nullo e matrice di varianza e covarianza Σ_i . In forma matriciale, la densità dei dati osservati condizionata al parametro di interesse λ è esprimibile nel modo seguente

$$p(D_i|\lambda) = \frac{1}{2\pi|\Sigma_i|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}D_i^T \Sigma_i^{-1} D_i\right). \quad (5.34)$$

Infatti, data la coppia di variabili aleatorie $(\Delta\theta_x, \Delta x)$, si definisce distribuzione normale bivariata con vettore delle medie $\mu = (\mu_{\Delta\theta_x}, \mu_{\Delta x})$ e matrice di varianza e covarianza $\Sigma = [\sigma_{ij}]$, con $i, j = 1, 2$, dove $\sigma_{11} = \sigma_{\Delta\theta_x}^2$, $\sigma_{22} = \sigma_{\Delta x}^2$, $\sigma_{12} = \sigma_{21} = \rho\sigma_{\Delta\theta_x}\sigma_{\Delta x}$, la distribuzione di probabilità di $(\Delta\theta_x, \Delta x)$, dove

$$\begin{aligned} \Delta\theta_x &= \mu_{\Delta\theta_x} + \sigma_{\Delta\theta_x} U, \\ \Delta x &= \mu_{\Delta x} + \sigma_{\Delta x} V, \end{aligned} \quad (5.35)$$

con (U, V) normale bivariata con componenti standardizzate, ovvero con media nulla e varianza unitaria [8].

Dal momento che l'inversa della trasformazione $(u, v) \rightarrow (\Delta\theta_x, \Delta x)$

ha componenti

$$\begin{aligned} u &= \frac{\Delta\theta_x - \mu_{\Delta\theta_x}}{\sigma_{\Delta\theta_x}}, \\ v &= \frac{\Delta x - \mu_{\Delta x}}{\sigma_{\Delta x}}, \end{aligned} \quad (5.36)$$

il determinante jacobiano associato risulta

$$|J(\Delta\theta_x, \Delta x)| = \frac{1}{\sigma_{\Delta\theta_x} \sigma_{\Delta x}}. \quad (5.37)$$

La funzione di densità di probabilità di $(\Delta\theta_x, \Delta x)$ è

$$\begin{aligned} p_{\Delta\theta_x, \Delta x}(\Delta\theta_x, \Delta x) &= c \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\left(\frac{\Delta\theta_x - \mu_{\Delta\theta_x}}{\sigma_{\Delta\theta_x}} \right)^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{\Delta x - \mu_{\Delta x}}{\sigma_{\Delta x}} \right)^2 - 2\rho \frac{\Delta\theta_x - \mu_{\Delta\theta_x}}{\sigma_{\Delta\theta_x}} \frac{\Delta x - \mu_{\Delta x}}{\sigma_{\Delta x}} \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.38)$$

dove

$$c = \frac{1}{2\pi \sigma_{\Delta\theta_x} \sigma_{\Delta x} \sqrt{1-\rho^2}}. \quad (5.39)$$

In notazione matriciale la funzione di densità $p_{\Delta\theta_x, \Delta x}(z)$ può essere quindi scritta come

$$p_{\Delta\theta_x, \Delta x}(z) = \frac{1}{2\pi |\Sigma|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (z - \mu)^T \Sigma^{-1} (z - \mu) \right\} \quad (5.40)$$

dove $z = (\Delta\theta_x, \Delta x)$ e $|\Sigma|$ è il determinante di Σ .

Si nota che tale distribuzione appartiene alla famiglia esponenziale multiparametrica, essendo un modello statistico parametrico per l'osservazione bivariata $z = (\Delta\theta_{x_i}, \Delta x_i)$ con funzione di densità associata scrivibile nella forma consueta

$$p_Z(z; \omega) = c(\omega) h(z) \exp \left(\sum_{j=1}^k \psi_j(\omega) t_j(z) \right) \quad (5.41)$$

con il parametro $\omega = (\mu_{\Delta\theta_x}, \mu_{\Delta x}, \sigma_{\Delta\theta_x}^2, \sigma_{\Delta x}^2, \rho)$.

Infatti la densità espressa in equazione 5.38 può essere riscritta come

$$\begin{aligned}
 p_{\Delta\theta_x, \Delta x}(\Delta\theta_x, \Delta x; \omega) = c(\omega) \exp \left\{ \frac{1}{1 - \rho^2} \left(\frac{\mu_{\Delta\theta_x}}{\sigma_{\Delta\theta_x}^2} - \rho \frac{\mu_{\Delta x}}{\sigma_{\Delta x}^2} \right) \Delta\theta_x \right. \\
 + \frac{1}{1 - \rho^2} \left(\frac{\mu_{\Delta x}}{\sigma_{\Delta x}^2} - \rho \frac{\mu_{\Delta\theta_x}}{\sigma_{\Delta\theta_x}^2} \right) \Delta x \\
 - \frac{1}{2(1 - \rho^2)\sigma_{\Delta\theta_x}^2} \Delta\theta_x^2 \\
 - \frac{1}{2(1 - \rho^2)\sigma_{\Delta x}^2} \Delta x^2 \\
 \left. + \frac{\rho}{1 - \rho^2} \frac{1}{\sigma_{\Delta\theta_x} \sigma_{\Delta x}} \Delta\theta_x \Delta x \right\}
 \end{aligned} \tag{5.42}$$

con

$$\begin{aligned}
 c(\omega) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\Delta\theta_x}\sigma_{\Delta x}\sqrt{1 - \rho^2}} \exp \left\{ - \frac{1}{2(1 - \rho^2)} \left(\frac{\mu_{\Delta\theta_x}^2}{\sigma_{\Delta\theta_x}^2} + \frac{\mu_{\Delta x}^2}{\sigma_{\Delta x}^2} \right. \right. \\
 \left. \left. - 2\rho \frac{\mu_{\Delta\theta_x}\mu_{\Delta x}}{\sigma_{\Delta\theta_x}\sigma_{\Delta x}} \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{5.43}$$

e statistica canonica pari a

$$t(\Delta\theta_x, \Delta x) = (\Delta\theta_x, \Delta x, \Delta\theta_x^2, \Delta x^2, \Delta\theta_x \Delta x). \tag{5.44}$$

Avendo dimostrato che la funzione di densità del campione di dati a disposizione appartiene alla famiglia esponenziale regolare, risulta quindi legittima l'applicazione dell'algoritmo EM illustrato nel capitolo precedente.

Per il problema in esame, infatti, si dispone di una matrice di dati osservati, composta dai termini in equazione 5.33, ossia deviazione e spostamento osservati in ciascuno dei due piani cartesiani ortogonali,

e di una matrice di dati non osservati, composta dall'angolo di scattering e dallo spostamento che avvengono all'interno di ciascuno degli N voxels in cui viene suddiviso il volume di interesse. Le due matrici vengono denotate con $D = \{D_i : 1 \leq i \leq M\}$ per "Data" e $H = \{H_{ij} : 1 \leq i \leq M; 1 \leq j \leq N\}$ per "Hidden data".

Volendo applicare quindi l'algoritmo EM nella sua formulazione più generale, si procede con l'alternanza dei consueti due passi:

- E-step: si calcola la funzione ausiliaria

$$Q(\lambda; \lambda^{(n)}) = E_{H|D, \lambda^{(n)}}[\log(P(H|\lambda))], \quad (5.45)$$

- M-step: si ottiene una stima del parametro di interesse all'iterazione corrente massimizzando la funzione determinata al passo precedente, ovvero come

$$\lambda^{(n+1)} = \operatorname{argmax}_{\lambda} Q(\lambda; \lambda^{(n)}). \quad (5.46)$$

Si noti che la funzione $Q(\lambda; \lambda^{(n)})$ riportata nel passo di "Expectation" risulta leggermente modificata rispetto alla definizione data in equazione 4.6. Si è infatti operata una semplificazione, essendo i dati osservati per il problema in esame determinabili univocamente dai dati non osservabili. Conoscendo scattering e spostamento totale all'interno di ogni voxel sono infatti ricavabili angolo e spostamento complessivi misurati per ciascun muone. Per questo motivo si può tralasciare il termine di dati osservati nella definizione di densità di probabilità in quanto ridondante, ovvero non fornisce informazioni aggiuntive rispetto a quanto già contenuto nei dati non osservati. In formule, è valida la seguente equivalenza per la funzione ausiliaria

$$Q(\lambda; \lambda^{(n)}) = E_{H|D, \lambda^{(n)}}[\log(p(D, H|\lambda))] = E_{H|D, \lambda^{(n)}}[\log(p(H|\lambda))] \quad (5.47)$$

da cui appunto l'espressione in 5.45.

4.3 E-step

Per determinare la funzione ausiliaria come in equazione 5.45, si osserva innanzitutto che la densità della variabile casuale bidimensionale $H_{ij} = (\Delta\theta_{x_{ij}}, \Delta x_{ij})$ condizionata al parametro λ , ovvero al valore della densità di scattering del materiale, è una normale congiunta esprimibile come di seguito

$$p(H_{ij}|\lambda) = \frac{1}{2\pi(|\Sigma_{ij}|)^{1/2}} \exp\left(\frac{-H_{ij}^T \Sigma_{ij}^{-1} H_{ij}}{2}\right) \quad (5.48)$$

con

$$\Sigma_{ij} = \lambda_j A_{ij} p_{r,i}^2 \quad (5.49)$$

e

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} L_{ij} & L_{ij}^2/2 \\ L_{ij}^2/2 & L_{ij}^3/3 \end{pmatrix}. \quad (5.50)$$

Dal momento che scattering e spostamento totale all'interno di ogni voxel hanno distribuzione indipendente identicamente distribuita rispetto a quella in ciascuno degli altri voxels che compongono il volume, la funzione di probabilità per l'insieme complessivo di dati non osservabili, ovvero scattering e spostamento per ognuno degli M muoni e in ciascuno degli N voxels, si esprime come il prodotto delle singole funzioni di densità marginali

$$p(H|\lambda) = \prod_{i \leq M} \prod_{j \leq N} p(H_{ij}|\lambda). \quad (5.51)$$

La log verosimiglianza associata risulta dunque la seguente

$$\log(p(H|\lambda)) = \sum_{j \leq N} \sum_{i: L_{ij} \neq 0} \left(-\log(\lambda_j) - \frac{H_{ij}^T A_{ij}^{-1} H_{ij}}{2\lambda_j p_{r,i}^2} \right) + C \quad (5.52)$$

con C termine non contenente valori dipendenti dal parametro λ . Si procede quindi calcolando il valore atteso della log verosimiglianza ottenuta, determinato rispetto alla funzione di densità dei dati non osservabili, condizionatamente ai dati osservati e al valore del parametro

all'iterazione corrente.

$$\begin{aligned}
Q(\lambda; \lambda^{(n)}) &= E_{H|D, \lambda^{(n)}} [\log(p(H|\lambda))] \\
&= E_{H|D, \lambda^{(n)}} \left[\sum_{j \leq N} \sum_{i: L_{ij} \neq 0} \left(-\log(\lambda_j) - \frac{H_{ij}^T A_{ij}^{-1} H_{ij}}{2\lambda_j p_{r,i}^2} \right) \right] + \\
&\quad + E_{H|D, \lambda^{(n)}}(C) \\
&= \sum_{j \leq N} \left(-M_j \log(\lambda_j) - \frac{1}{2\lambda_j} \sum_{i: L_{ij} \neq 0} S_{ij}^{(n)} \right)
\end{aligned} \tag{5.53}$$

dove M_j è il numero di traiettorie per le quali $L_{ij} \neq 0$, ovvero il numero di muoni che attraversano un determinato voxel e il valore atteso del termine C, in quanto non dipendente dal parametro λ , viene tralasciato; infine il termine $S_{ij}^{(n)}$ è pari a

$$S_{ij}^{(n)} \equiv E_{H|D, \lambda^{(n)}} [p_{r,i}^{-2} H_{ij}^T A_{ij}^{-1} H_{ij}]. \tag{5.54}$$

4.4 M-step

Per determinare il valore del parametro che massimizza l'espressione in equazione 5.53 all'iterazione corrente, si calcola la derivata rispetto al parametro λ_j e la si pone uguale a zero. Si ottiene dunque il seguente risultato

$$\lambda_j^{(n+1)} = \frac{1}{2M_j} \sum_{i: L_{ij} \neq 0} S_{ij}^{(n)}. \tag{5.55}$$

Resta quindi da determinare il valore atteso esplicitato in equazione 5.54.

Dopo opportuni passaggi si ottiene la seguente espressione

$$S_{ij}^{(n)} = \frac{(S_{ij_x}^{(n)} + S_{ij_y}^{(n)})}{2} \tag{5.56}$$

dove

$$S_{ij_x}^{(n)} = 2\lambda_j^{(n)} + (D_{ix}^T \Sigma_{D_i}^{-1} W_{ij} \Sigma_{D_i}^{-1} D_{ix} - \text{Tr}(\Sigma_{D_i}^{-1} W_{ij})) p_{r_i}^2 (\lambda_j^{(n)})^2, \quad (5.57)$$

$$S_{ij_y}^{(n)} = 2\lambda_j^{(n)} + (D_{iy}^T \Sigma_{D_i}^{-1} W_{ij} \Sigma_{D_i}^{-1} D_{iy} - \text{Tr}(\Sigma_{D_i}^{-1} W_{ij})) p_{r_i}^2 (\lambda_j^{(n)})^2. \quad (5.58)$$

Per cui il parametro di interesse all'iterazione corrente si ricava come

$$X_{0j}^{(n+1)} = \left(\frac{15}{p_0} \right)^2 \frac{1}{\lambda_j^{(n+1)}}. \quad (5.59)$$

Infatti, considerata una variabile aleatoria X , il valore atteso della forma quadratica $X^T A^{-1} X$ è dato dalla seguente

$$E[X^T A^{-1} X] = \text{Tr}(A^{-1} \Sigma_x) + \mu_X^T A^{-1} \mu_X. \quad (5.60)$$

Dimostrazione:

Per definizione, date due variabili aleatorie W e Z , la covarianza tra le due si calcola come

$$\text{cov}(W, Z) = E(W, Z^T) - E(W)E(Z^T) \quad (5.61)$$

da cui si ricava l'espressione esplicita per il valore atteso del prodotto delle due variabili aleatorie come

$$E(W, Z^T) = \text{cov}(W, Z) + E(W)E(Z^T). \quad (5.62)$$

Operando la sostituzione $W = X^T$ e $Z = X^T A^T$ si ottiene dunque

$$\begin{aligned} E(X^T A X) &= \text{cov}(X^T, X^T A^T) + E(X^T)E(X^T A^T)^T \\ &= \text{cov}(X^T, X^T A^T) + \mu_X^T (\mu_X^T A^T)^T \\ &= \text{cov}(X^T, X^T A^T) + \mu_X^T A \mu_X. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Procedendo separatamente al calcolo del termine $\text{cov}(X^T, X^T A^T)$, si

osserva quanto segue

$$\begin{aligned}
cov(X^T, X^T A^T) &= E[(X^T - E(X^T))(X^T A^T - E(X^T A^T))^T] \\
&= E[(X^T - \mu_X^T)(X^T A^T - \mu_X^T A^T)^T] \\
&= E[(X - \mu_X)^T (AX - A\mu_X)].
\end{aligned} \tag{5.64}$$

Calcolando quindi la traccia di quanto ottenuto, si ha che

$$\begin{aligned}
Tr[E[(X - \mu_X)^T (AX - A\mu_X)]] &= Tr[E[(X - \mu_X)^T A(X - \mu_X)]] \\
&= Tr[E(A(X - \mu_X)(X - \mu_X)^T)] \\
&= Tr[AE((X - \mu_X)(X - \mu_X)^T)] \\
&= Tr[A\Sigma_X]
\end{aligned} \tag{5.65}$$

dove si è utilizzata la proprietà della traccia di invarianza per permutazione ciclica delle variabili, ovvero $Tr(ABC) = Tr(BCA) = Tr(CAB)$. Quindi, sostituendo l'espressione appena ottenuta in 5.63, si ottiene il risultato di interesse, ovvero

$$E[X^T AX] = Tr(A\Sigma_X) + \mu_X^T A\mu_X. \tag{5.66}$$

Ponendo quindi $X = H_{ij}|D_i$, la forma esplicita per μ_X e Σ_X viene espressa come

$$\mu_X = \Sigma_{D_i H_{ij}}^T \Sigma_{D_i}^{-1} D_i, \tag{5.67}$$

$$\Sigma_X = \Sigma_{H_{ij}} - \Sigma_{D_i H_{ij}}^T \Sigma_{D_i}^{-1} \Sigma_{D_i H_{ij}}, \tag{5.68}$$

dove Σ_{D_i} rappresenta la matrice di varianza e covarianza dei dati osservati, data dall'espressione in equazione 5.29, mentre $\Sigma_{H_{ij}}$ rappresenta la matrice di varianza e covarianza dei dati nascosti, data in equazione 5.49. Infine, il termine $\Sigma_{D_i H_{ij}}$ rappresenta la matrice di varianza e covarianza per l'insieme formato da dati osservati e nascosti. Si dimostra che vale la seguente equivalenza

$$\Sigma_{D_i H_{ij}} A_{ij}^{-1} \Sigma_{D_i H_{ij}}^T = W_{ij} (p_{r,i}^2 \lambda_j)^2. \tag{5.69}$$

Per cui, sostituendo le espressioni ottenute in equazione 5.54, si ottiene la forma esplicita riportata in equazione 5.57 nel modo seguente

$$\begin{aligned}
S_{ij}^{(n)} &= p_{r,i}^{-2} \text{Tr}(A_{ij}^{-1} \Sigma_{H_{ij}} - A_{ij}^{-1} \Sigma_{D_i H_{ij}}^T \Sigma_{D_i}^{-1} \Sigma_{D_i H_{ij}}) \\
&\quad + p_{r,i}^{-2} D_{ix}^T \Sigma_{D_i}^{-1} W_{ij} \Sigma_{D_i}^{-1} D_{ix} (p_{r,i}^2 \lambda_j^{(n)})^2 \\
&= 2\lambda_j^{(n)} + (D_{ix}^T \Sigma_{D_i}^{-1} W_{ij} \Sigma_{D_i}^{-1} D_{ix} - \text{Tr}(\Sigma_{D_i}^{-1} W_{ij})) p_{r,i}^2 (\lambda_j^{(n)})^2.
\end{aligned} \tag{5.70}$$

Analogo procedimento viene utilizzato per ricavare l'espressione in equazione 5.58.

6 Configurazione geometrica

Dato un sistema di riferimento cartesiano tridimensionale ortogonale, si è considerato un volume suddiviso in cubetti di dimensioni note. Si conoscono la posizione e l'angolo di incidenza in entrata e uscita per ciascun muone, così come si assume noto il valore di momento per ciascun muone. Vengono quindi fatte alcune assunzioni geometriche riguardanti la conformazione e la suddivisione del volume di interesse.

6.1 Caso bidimensionale

In questo caso si assume il volume tridimensionale sezionato con tagli paralleli al piano xy , quindi con strati continui lungo l'asse z . Il parallelepipedo rettangolo considerato per il problema in esame risulta quindi suddiviso in tanti sotto-parallelepipedi con dimensioni analoghe a quelle del volume originale lungo gli assi x e y , ma altezza inferiore, individuata nello spazio con riferimento all'asse z del sistema di coordinate orientato introdotto. Si veda la figura 6.1.1 per una migliore comprensione del problema.

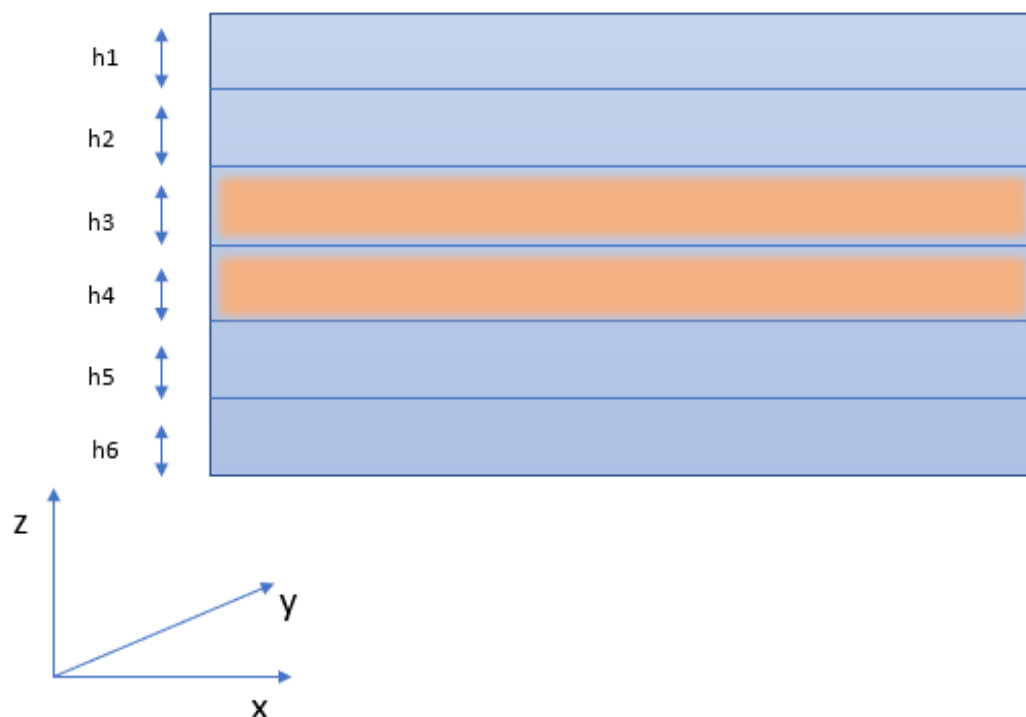


Figura 6.1.1: Sezione bidimensionale del parallelepipedo rettangolo corrispondente al volume da analizzare, con strati di materiale a diversa composizione continui lungo il piano perpendicolare all'asse delle z di un sistema di coordinate sinistrorso.

6.2 Caso tridimensionale

In un secondo momento si procede alla discretizzazione del volume tridimensionale da ispezionare in cubetti di dimensione nota. Finora infatti l'algoritmo trattato considerava il volume sezionato solo orizzontalmente, con tagli lungo l'asse z , quindi con strati continui lungo le altre due dimensioni. Questo problema era semplificato in quanto consentiva di affermare come ogni muone incidente sulla superficie superiore attraversasse esattamente ogni strato (omettendo per semplicità i muoni uscenti dai bordi laterali del volume), quindi come ogni traiettoria misurata contribuisse all'aggiornamento della stima di X_0 di ogni strato di volume. Inoltre era anche facilmente ricavabile la lunghezza tridimensionale di cammino di ciascun muone all'interno di

ogni strato, con riferimento all'altezza di ciascuno strato lungo l'asse z .

Quando il volume viene sezionato anche verticalmente, invece, non tutti i cubetti vengono attraversati da ogni muone. Nello specifico, è necessario marcare ciascun voxel attraversato dalla particella nel suo cammino all'interno del volume in modo tale da poter distinguere tra cubetti colpiti e cubetti non colpiti da ogni muone.

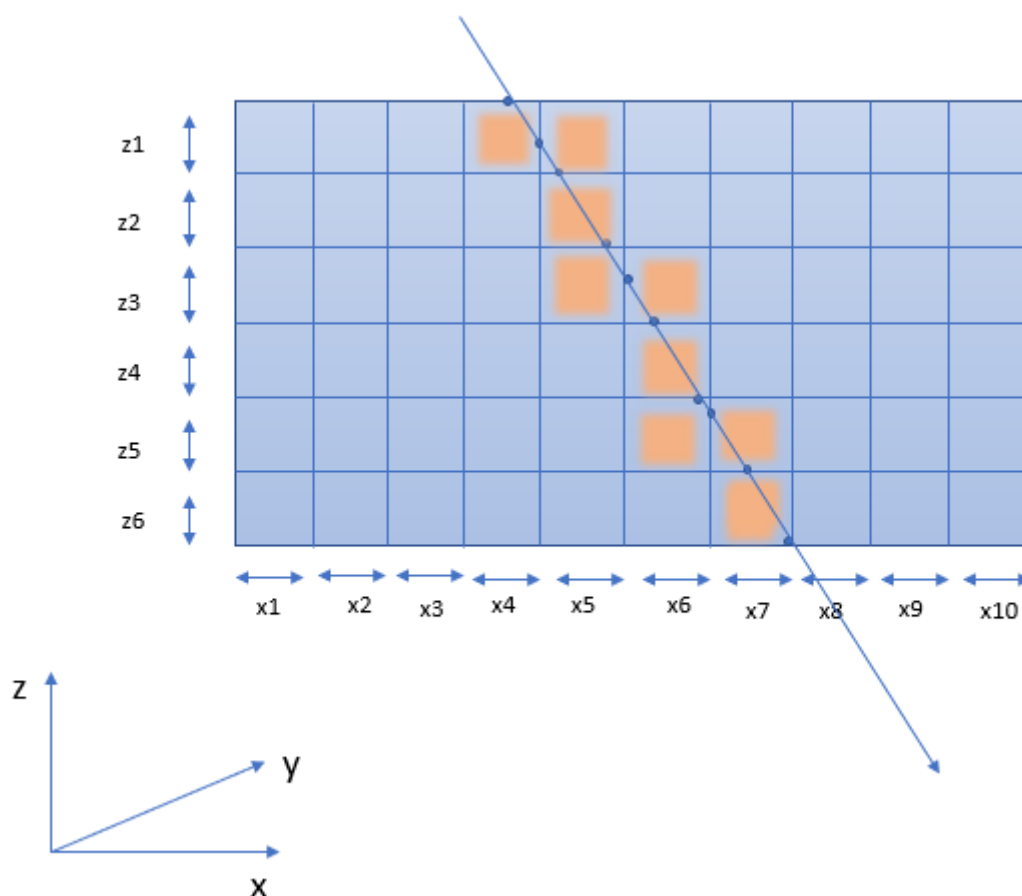


Figura 6.2.1: Schema di sezione bidimensionale di volume, con evidenziati i voxels colpiti da un generico muone nella sua traiettoria.

Una prima formulazione semplificata del problema consiste nel considerare una linea retta che collega il punto di ingresso e di uscita del muone dal volume, ignorando quindi la presenza di scattering all'interno dello stesso. Questa approssimazione risulta plausibile in quanto la deviazione angolare subita dal muone nel suo percorso all'interno del volume passivo è nel complesso esigua, pari, come esplicitato in

precedenza, ad alcune decine di milliradiani; la lunghezza di cammino tridimensionale del muone si assume perciò non variare in modo considerevole in seguito a questa restrizione. Ovviamente si tratta di una assunzione piuttosto stringente, che in un secondo momento verrà rilassata con l'aggiunta al dataset complessivo delle coordinate del punto PoCA (*point of closest approach*). Si veda la Figura 6.2.2 per una più chiara evidenza grafica della questione.

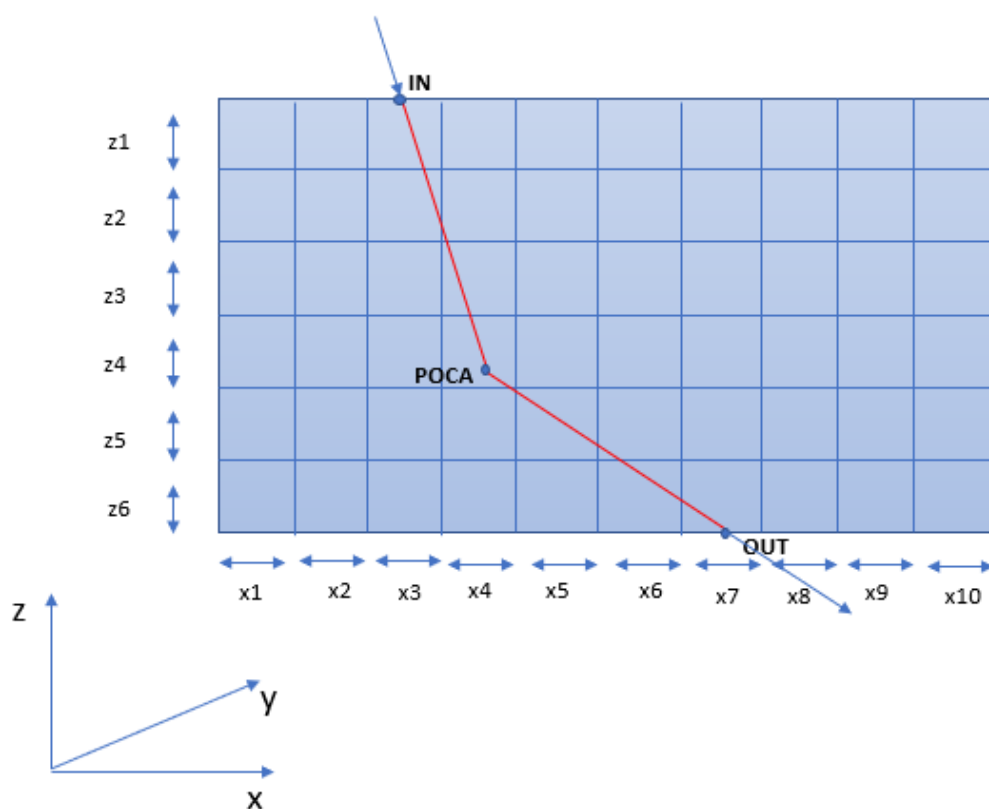


Figura 6.2.2: Schema di sezione bidimensionale di volume, con lunghezza di cammino del muone nel caso di aggiunta del punto PoCA (linea rossa).

1) Trattazione semplificata

Inizialmente si sono calcolati il valore dell'estremo laterale sinistro e destro di ogni cubo, per ciascuna coordinata cartesiana. Ciascun voxel, in seguito a questa operazione, viene identificato dalla terna di

valori $[X_{l_k}, Y_{l_k}, Z_{l_k}]$, dove ogni elemento specifica il valore della coordinata cartesiana dell'estremo laterale sinistro che delimita tale voxel. Analogamente si ottiene la terna $[X_{r_k}, Y_{r_k}, Z_{r_k}]$, i cui valori identificano gli estremi laterali destri del voxel associato. Il pedice k si riferisce alla numerazione progressiva del cubetto all'interno dell'insieme complessivo. Per il problema in esame, k assume valori all'interno dell'intervallo $[1, 10]$ per quanto riguarda i bordi destri e sinistri paralleli ai piani yz e xz , mentre $[1, 6]$ per quanto riguarda gli estremi paralleli al piano xy .

Si ricorda, infatti, che il volume per il problema di interesse ha dimensioni $[0, 1]m \times [0, 1]m \times [0.8, 0.2]m$ rispettivamente lungo gli assi x, y, z , con suddivisioni equispaziate lungo ciascun asse, con ampiezza pari a $0.1m$. La numerazione degli indici dei voxels va da sinistra a destra, dall'alto verso il basso. Ad esempio, il voxel identificato dalla terna di indici $(I_x, I_y, I_z) = (1, 1, 1)$ corrisponde al cubetto in alto nello strato superiore del parallelepipedo rettangolo, contenente il vertice laterale sinistro, come visibile in Figura 6.2.3.

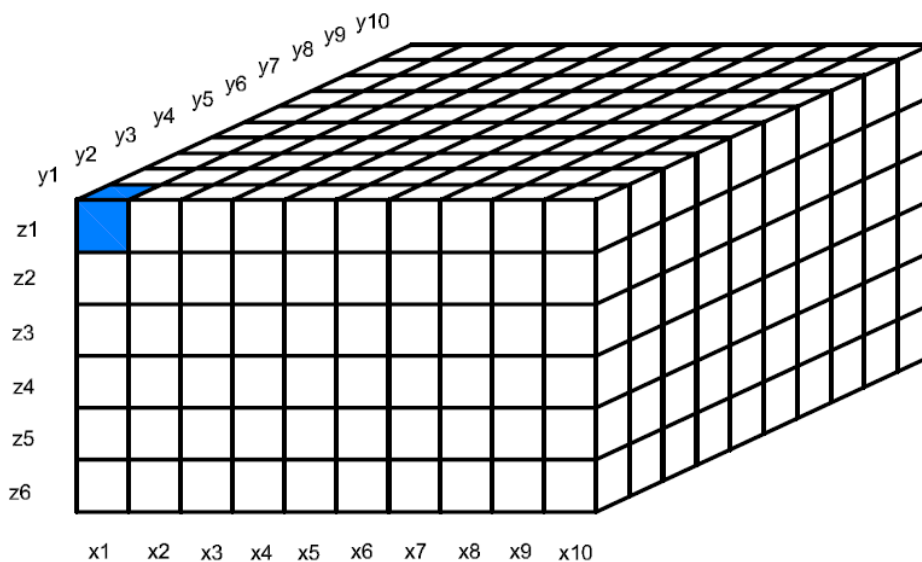


Figura 6.2.3: Schema del parallelepipedo rettangolo corrispondente al volume da analizzare, suddiviso in cubetti equispaziati lungo ciascuno degli assi cartesiani.

Successivamente, è stata considerata l'equazione parametrica della traiettoria nello spazio di una retta passante per due punti noti, rispettivamente di coordinate (X_{in}, Y_{in}, Z_{in}) e $(X_{out}, Y_{out}, Z_{out})$, corrispondenti, in questo caso, al punto di ingresso nella superficie superiore del volume e al punto di uscita dalla superficie inferiore. Ciascun punto appartenente alla traiettoria viene individuato dal sistema di equazioni seguente

$$\begin{aligned} X(t) &= X_{in} + (X_{out} - X_{in}) * t \\ Y(t) &= Y_{in} + (Y_{out} - Y_{in}) * t \\ Z(t) &= Z_{in} + (Z_{out} - Z_{in}) * t \end{aligned} \quad (6.1)$$

con t parametro che assume valori compresi nell'intervallo $[0, 1]$.

Vengono quindi simulati casualmente dei punti appartenenti alla retta, rappresentativi del percorso della particella all'interno del volume, ottenendo un campione di dimensione costante distinto per ciascun muone considerato. Nel seguito un generico punto simulato viene indicizzato dal pedice j , con $0 \leq j \leq R$, dove R è il numero fissato di punti considerati per ciascuna traiettoria del muone.

Si può affermare che il muone ha attraversato un determinato voxel se ognuna delle tre coordinate che identificano il punto sulla traiettoria è compresa tra il bordo laterale sinistro e destro di ogni voxel.

Nelle tre dimensioni del sistema di riferimento cartesiano adottato ciò si traduce nel seguente sistema

$$\begin{aligned} X_{l_k} &\leq X_j \leq X_{r_k} \\ Y_{l_k} &\leq Y_j \leq Y_{r_k} \\ Z_{l_k} &\leq Z_j \leq Z_{r_k} \end{aligned} \quad (6.2)$$

dove condizione necessaria e sufficiente affinché un voxel sia stato colpito dal muone nella sua traiettoria all'interno del volume passivo è che vengano soddisfatte contemporaneamente le tre equazioni lineari riportate, con (X_j, Y_j, Z_j) terna generica di coordinate cartesiane di un punto simulato appartenente alla traiettoria della particella.

Per ogni muone considerato, perciò, si ottiene un insieme contenente gli indici dei voxels che sono stati attraversati nel cammino all'interno del volume. La terna di indici (I_x, I_y, I_z) si ricava sostituendo a ciascuna entrata il numero progressivo k associato alla coordinata del relativo bordo intersecato. Per agevolare la trattazione seguente, inoltre, dall'insieme complessivo si ricavano tre liste separate di indici, $\{I_x\}$, $\{I_y\}$ e $\{I_z\}$, ciascuna contenente i valori ordinati in modo crescente per ogni singola dimensione.

Data la terna di indici (I_x, I_y, I_z) , è di interesse associarvi la lunghezza di cammino tridimensionale del muone. Utilizzando i coseni direttori, l'equazione parametrica di una retta può analogamente essere espressa tramite il seguente sistema di equazioni

$$\begin{aligned} X &= X_{in} + \alpha * \cos(\theta_x) \\ Y &= Y_{in} + \alpha * \cos(\theta_y) \\ Z &= Z_{in} + \alpha * \cos(\theta_z) \end{aligned} \tag{6.3}$$

Si considera inoltre di seguito il sistema di equazioni lineari che identificano gli estremi laterali sinistro e destro in ognuna delle tre dimensioni di ciascun voxel che compone il volume di interesse,

$$\begin{aligned} X_l &= 0.1 * (I_x - 1) \\ X_r &= 0.1 * (I_x) \\ Y_l &= 0.1 * (I_y - 1) \\ Y_r &= 0.1 * (I_y) \\ Z_l &= 0.1 * (9 - I_z) \\ Z_r &= 0.1 * (8 - I_z) \end{aligned} \tag{6.4}$$

dove il pedice l si riferisce al bordo sinistro, mentre il pedice r al bordo destro.

Si procede quindi ricavando il valore del parametro α che corrisponde all'intersezione tra la retta nello spazio e un generico bordo laterale del voxel tridimensionale.

Uguagliando membro a membro la prima equazione del sistema in 6.3

con la prima equazione del sistema in 6.4, ad esempio, per l'estremo laterale sinistro, parallelo al piano yz, si ottiene la seguente equazione

$$X_{in} + \alpha * \cos(\theta_x) = 0.1 * (I_x - 1) \quad (6.5)$$

da cui si ricava il valore del parametro α corrispondente

$$\alpha_{x_l}^{(I_x)} = \frac{0.1 * (I_x - 1) - X_{in}}{\cos(\theta_x)}. \quad (6.6)$$

Questo viene poi sostituito in tutte le equazioni che compongono il sistema 6.3, ottenendo una terna di coordinate. Queste corrispondono, in questo caso, al punto di intersezione tra la traiettoria del muone e l'estremo laterale sinistro del volume, parallelo al piano yz. Si nota inoltre che, nella notazione precedente, si è utilizzato l'apice (I_x) per indicare l'indice riferito al parametro ricavato.

Si procede allo stesso modo per ricavare il valore del parametro che corrisponde all'intersezione tra il bordo laterale destro, parallelo al piano yz, e la traiettoria della particella, ottenendo

$$\alpha_{x_r}^{(I_x)} = \frac{0.1 * (I_x) - X_{in}}{\cos(\theta_x)}. \quad (6.7)$$

Questo viene quindi sostituito nel sistema di equazioni parametriche della linea per ottenere la terna di coordinate corrispondenti. Espressioni analoghe vengono ottenute sia per i bordi laterali sinistri e destri giacenti su piani paralleli al piano xz, sia per i bordi laterali sinistri e destri appartenenti a piani paralleli al piano contenente l'asse delle ascisse e delle ordinate.

Ad ogni muone, in definitiva, vengono associate sei liste di valori di parametri $\alpha_{x_{li}}$, $\alpha_{x_{ri}}$, $\alpha_{y_{li}}$, $\alpha_{y_{ri}}$, $\alpha_{z_{li}}$, $\alpha_{z_{ri}}$, dove i è l'indice che identifica il muone all'interno del campione osservato. Ciascuna lista è formata dai valori ordinati del parametro α ricavati dall'intersezione di una specifica tipologia di estremo con la traiettoria della particella; ad esempio, per le intersezioni del muone i -esimo con il bordo laterale sinistro parallelo al piano xz, si ricava la lista seguente

$\alpha_{x_i} = \{\alpha_{x_i}^{(I_{x_1})}, \alpha_{x_i}^{(I_{x_2})}, \dots, \alpha_{x_i}^{(I_{x_N})}\}$, con N numero totale di cubetti elementari attraversati dal muone nel suo percorso all'interno del volume.

Dal momento che, in linea di principio, ciascun voxel viene colpito in due estremi distinti dal muone nella sua traiettoria, risulta necessario determinare univocamente quest'ultimi scegliendo i due parametri corrispondenti all'interno delle sei liste di valori precedentemente determinate. Si vogliono ricavare, infatti, le coordinate cartesiane dei punti associati all'intersezione tra la retta e i bordi del cubetto elementare attraversati.

Per il problema in analisi, inoltre, si assume che il campione di muoni segua una traiettoria "discendente", ovvero provenga da una sorgente sovrastante l'estremità superiore del volume da ispezionare e si diriga esclusivamente verso valori negativi dell'asse delle z (con riferimento ad un sistema di coordinate sinistrorso solidale al volume incognito). Nel complesso, quindi, con i dati a disposizione non è possibile che si verifichino casi in cui un muone attraversa il volume dal basso verso l'alto (lungo la coordinata z); tutte le particelle, infatti, hanno una traiettoria orientata con un angolo rispetto all'asse z appartenente all'intervallo $[-90, 0]^\circ \cup [0, 90]^\circ$, ovvero procedono con diverse inclinazioni dall'alto al basso, o al massimo si muovono parallelamente al piano xy .

In seguito a questa osservazione, quindi, si procede formulando il seguente ragionamento: date le tre liste ordinate di indici $\{I_x\}$, $\{I_y\}$ e $\{I_z\}$, le quali contengono, per ogni coordinata, il numero intero k associato ai voxels attraversati dal muone nella sua traiettoria, si procede inizialmente ispezionando l'insieme di indici associato al vettore orientato z . Poiché la lista è ordinata, l'indice unitario si riferisce allo strato più alto di volume, ed a seguire, con numerazione intera crescente, vengono individuati gli strati posti inferiormente in maniera sequenziale. Perciò l'indice 2 sarà associato al secondo strato, l'indice 3 al terzo strato e così via, fino ad un massimo valore di 6, associato allo strato inferiore del parallelepipedo rettangolo.

Partendo dal primo valore nella lista $\{I_z\}$, si procede ad un controllo seriale nel modo seguente: se l'indice I_z corrente risulta diverso dall'indice successivo, significa che la particella ha attraversato uno strato completamente ed è entrata nello strato successivo, colpendo solamente un cubetto. La conseguenza è che avrà attraversato necessariamente il bordo superiore e inferiore del voxel, mentre allo stesso tempo non avrà intersecato in alcun modo gli estremi destri e sinistri paralleli ai piani yz e xz. In sostanza, quindi, non si sarà verificato il caso in cui due o più cubetti aventi lo stesso indice I_z vengano colpiti dal muone nella sua traiettoria. Il problema in questo caso, infatti, è come se si riducesse al caso bidimensionale discusso in precedenza, dove tutti gli strati di materiale venivano necessariamente attraversati dalla particella ed inoltre non si riteneva necessario marcare i cubetti colpiti da quelli non colpiti, proprio perché non esistevano suddivisioni elementari del volume che non venissero attraversate dalla traiettoria del muone.

Quando l'indice I_z corrente risulta uguale al successivo, invece, è necessario chiedersi quale tra gli estremi sinistri e destri abbia colpito il muone nel suo percorso, ovvero se il bordo parallelo al piano yz oppure il bordo parallelo al piano xz. In questo caso la conclusione non appare più immediata come nel caso precedente, bensì necessita di ulteriori considerazioni. La strategia elementare rimane però sempre la stessa, ovvero procedere in maniera sequenziale controllando i valori di indici contenuti all'interno delle liste ricavate.

Per semplificare la discussione, a ciascun indice appartenente alla lista ordinata viene associato il rango corrispondente, pari al numero d'ordine intero associato, che coincide dunque con il posto occupato da tale indice una volta che i valori nella lista sono stati ordinati in modo crescente.

Ispezionando in un primo momento la lista $\{I_y\}$, si considera l'indice avente rango pari alla posizione occupata nella lista $\{I_z\}$ dall'indice che, quando esaminato, risultava ripetuto due volte in successione all'interno di tale lista. Se tale indice risulta di valore inferiore a quello immediatamente successivo nella lista, si sceglie il parametro all'inter-

no della lista $\{\alpha_{y_i}\}$ avente rango pari a quello dell'indice in questione. Infatti la conseguenza è che, almeno da un punto di vista intuitivo, la particella si sta muovendo da sinistra verso destra, con verso coincidente a quello del vettore orientato y e direzione con angolatura acuta rispetto a quest'ultimo, perciò interseca l'estremo laterale destro del voxel associato. Se invece si verifica il caso opposto, ovvero l'indice corrente è superiore all'indice successivo, è come se la traiettoria fosse orientata da destra a sinistra, perciò il muone attraversa l'estremo sinistro associato a tale indice. Si sceglierà, quindi, in questo caso, il valore del parametro di rango coincidente all'interno della lista $\{\alpha_{y_i}\}$. Infine, se si verifica il caso in cui l'indice corrente risulta uguale al successivo, si procede, con analogo ragionamento, andando ad ispezionare l'indice di rango coincidente all'interno della lista $\{I_x\}$.

Essere giunti fino a questo controllo, in sintesi, significa che la particella ha attraversato due o più cubetti appartenenti allo stesso strato lungo l'asse delle z , ed allo stesso tempo due o più cubetti con stesso indice per la dimensione y .

Una trattazione particolareggiata, infine, va riservata ai casi in cui il muone esce lateralmente dal parallelepipedo rettangolo, intersecando una delle quattro facce laterali, perpendicolari al piano xy . In altre parole, la traiettoria non attraversa completamente il volume dalla faccia superiore a quella inferiore, bensì il punto noto misurato, caratterizzato dal valore della terza coordinata pari a $z = 0.2m$, si trova al di fuori dell'area di base del parallelepipedo rettangolo. Inoltre, allo stesso modo devono essere trattate le casistiche per le quali il punto di incidenza si collochi in una delle facce laterali del volume, quindi non sulla faccia superiore parallela al piano xy .

In questi casi, prima di tutto è necessario determinare quali facce laterali del parallelepipedo rettangolo vengono intersecate dalla traiettoria del muone. In base al fatto se la traiettoria del muone intersecherà una delle due facce laterali parallele al piano xz oppure una delle due facce laterali parallele al piano yz , infatti, le considerazioni da attuare sono differenti. Per quanto riguarda i casi in cui la traiettoria interseca una delle facce laterali in uscita dal volume, si fa riferimento al punto

noto $P_{out} = (X_{out}, Y_{out}, Z_{out})$ e si va a verificare quale tra le prime due coordinate assume valori esterni all'intervallo che delimita gli estremi del volume. Tradotto in formule, si testano congiuntamente le due condizioni $X_{out} \in [0, 1]m$ e $Y_{out} \in [0, 1]m$. Qualora entrambe le condizioni non fossero soddisfatte, una ulteriore trattazione deve essere presa in considerazione, la quale verrà illustrata nel dettaglio in coda a questo paragrafo. Nel caso, invece, in cui soltanto una delle due precedenti inclusioni non fosse soddisfatta, si hanno indicazioni dirette relative a quale tra le facce laterali del volume venga intersecata. Infatti, il problema tridimensionale in questione diventa riconducibile ad un problema bidimensionale. La traiettoria nello spazio viene proiettata sul piano di base del parallelepipedo rettangolo e se, ad esempio, si ha che $X_{out} \notin [0, 1]m$, allora si può affermare che l'ultimo punto di intersezione tra la traiettoria del muone e il volume è avvenuto in una delle facce laterali parallele al piano yz . Allo stesso modo, qualora si verificasse la condizione opposta per cui $Y_{out} \notin [0, 1]m$, è immediato giungere alla conclusione che il parallelepipedo rettangolo è stato attraversato in una delle due facce parallele al piano xz dalla traiettoria uscente del muone. In Figura 6.2.4 sono schematizzati i due casi appena illustrati.

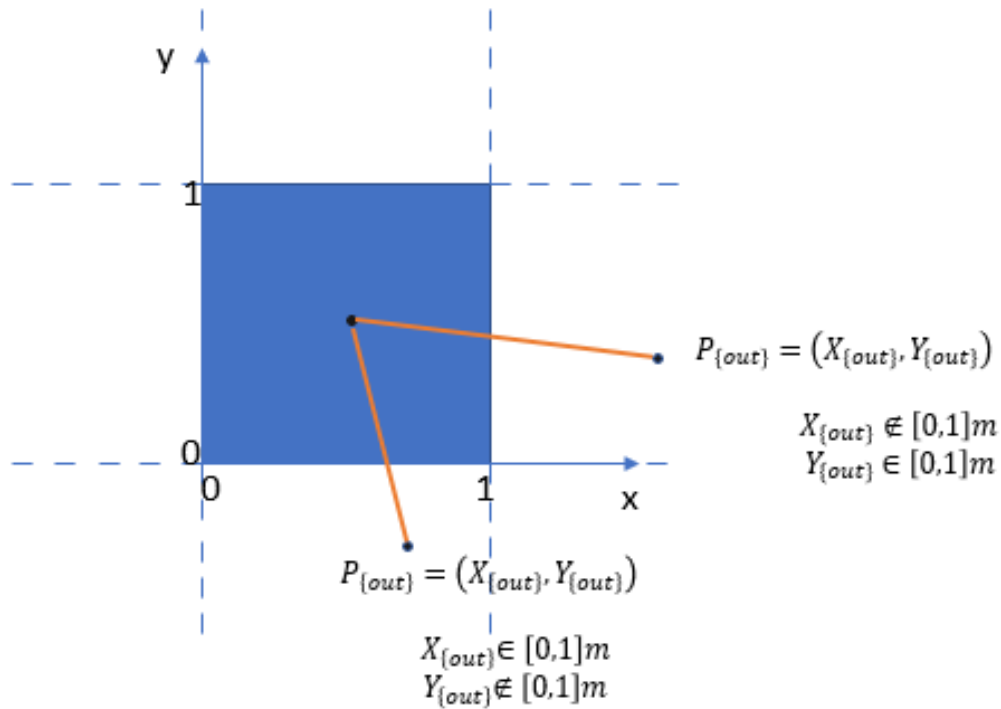


Figura 6.2.4: Schema bidimensionale che illustra due casi particolari in cui il punto P_{out} giace al di fuori dell'area di base del volume.

Infine, qualora ci si trovasse nel caso in cui congiuntamente $X_{out} \notin [0, 1]m$ e $Y_{out} \notin [0, 1]m$, si considerano le coordinate in x e y del centro dell'ultimo voxel attraversato dal muone prima della dipartita dal volume. Per ciascuna lista $\{I_x\}$ e $\{I_y\}$ si considera l'ultimo valore, e dalla coppia di indici ottenuta si derivano facilmente le coordinate appartenenti al centro del voxel indicizzato in tale modo, denotate nel seguito con $P_{c_{fin}} = (X_{c_{fin}}, Y_{c_{fin}}, Z_{c_{fin}})$. Per determinare quale tra le coppie di possibili facce laterali è stata intersecata, quindi, si procede valutando separatamente le due quantità $|X_{out} - X_{c_{fin}}|$ e $|Y_{out} - Y_{c_{fin}}|$. Una volta nota la distanza euclidea tra i punti P_{out} e $P_{c_{fin}}$, infatti, $|X_{out} - X_{c_{fin}}|$ corrisponde alla proiezione sull'asse delle ascisse di tale distanza, mentre $|Y_{out} - Y_{c_{fin}}|$ corrisponde alla proiezione della stessa distanza sull'asse delle ordinate. In Figura 6.2.5 si riporta un caso illustrato a titolo esemplificativo.

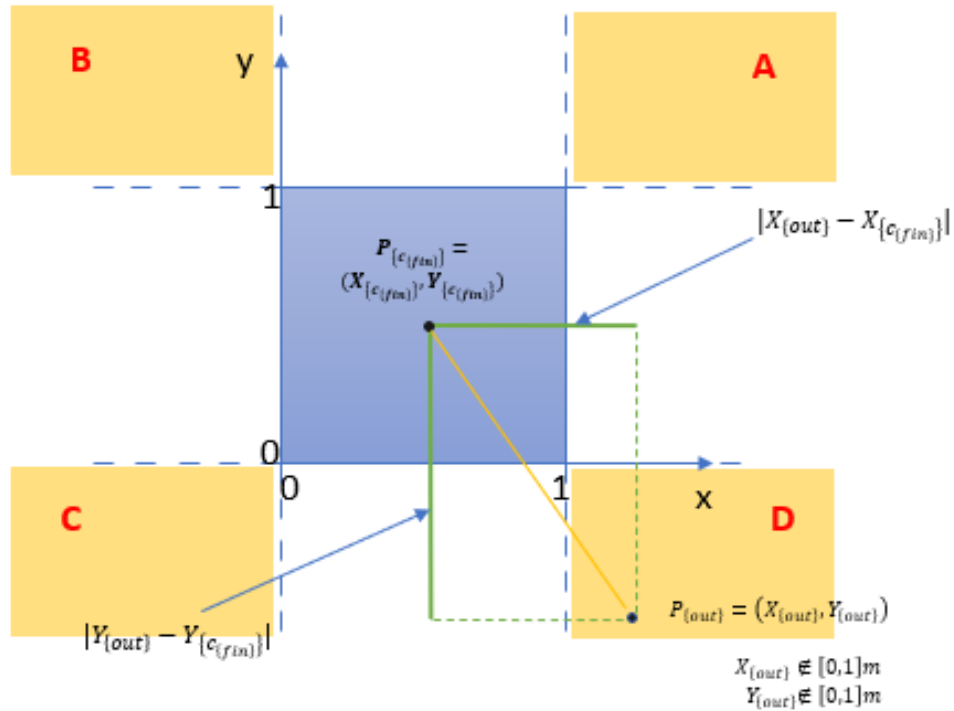


Figura 6.2.5: Schema bidimensionale che illustra un caso particolare in cui il punto P_{out} giace al di fuori dell'area di base del volume.

Qualora $|X_{out} - X_{c_{fin}}| > |Y_{out} - Y_{c_{fin}}|$, si conclude che il muone ha attraversato una delle due facce laterali parallele al piano yz . Se si verifica la condizione opposta $|X_{out} - X_{c_{fin}}| < |Y_{out} - Y_{c_{fin}}|$, si ha un'indicazione del fatto che ad essere attraversata è stata una delle facce laterali parallele al piano xz .

Si nota che in figura si distinguono quattro aree, colorate in giallo, denominate con A, B, C, D . In base a quale tra queste quattro regioni appartiene il punto $P_{out} = (X_{out}, Y_{out}, Z_{out})$, si riesce a determinare con esattezza la faccia attraversata dal muone. Nel caso del punto P_{out} in figura, ad esempio, si osserva che esso giace nella regione D , inoltre si può facilmente notare che $|X_{out} - X_{c_{fin}}| < |Y_{out} - Y_{c_{fin}}|$. Da queste considerazioni si conclude che il muone avrà attraversato una delle facce laterali parallele al piano xz , e più precisamente il bordo laterale inferiore del rettangolo.

E' possibile riproporre i ragionamenti precedenti per includere i casi in cui il punto di incidenza della traiettoria del muone si collochi in una delle quattro facce laterali del parallelepipedo rettangolo. L'unica accortezza da considerare il punto $P_{in} = (X_{in}, Y_{in}, Z_{in})$ e testare in questo caso le condizioni $X_{in} \in [0, 1]m$ e $Y_{in} \in [0, 1]m$. Nel caso particolare in cui entrambi tali vincoli non venissero esauditi, si fa riferimento alle coordinate del centro del primo voxel intersecato dal muone $P_{cin} = (X_{cin}, Y_{cin}, Z_{cin})$, e si valutano separatamente le due quantità $|X_{in} - X_{cin}|$ e $|Y_{in} - Y_{cin}|$, come nel caso precedente.

2) *Trattazione con inclusione del punto PoCA*

In questa discussione, per ogni muone appartenente al campione considerato, vengono introdotte le coordinate appartenenti al punto denominato PoCA, acronimo inglese per *Point Of Closest Approach*, nel seguito $(X_{poca}, Y_{poca}, Z_{poca})$. Queste sono state estratte dal pacchetto TomOpt, all'interno del quale, fra le altre cose, è stato ottimizzato un metodo per fare inferenza sulle proprietà del volume passivo. Si utilizza l'algoritmo PoCA, da cui prende nome il punto sopra menzionato, il quale assume che avvenga soltanto un singolo fenomeno di scattering durante l'interazione del muone con il materiale. Tale metodo, basandosi essenzialmente su considerazioni di tipo geometrico, per ogni muone ricerca il punto responsabile dello scattering complessivo subito dalla traiettoria.

Nello specifico, si considerano solamente due traiettorie nello spazio tridimensionale. La prima, passante per il punto di ingresso nel volume e avente direzione pari all'angolo di incidenza misurato, e la seconda, passante per il punto di uscita dal volume e con direzione pari alla misura nota di angolo in quel punto. Il punto PoCA è quello che minimizza la distanza euclidea tra le due rette nello spazio. Si possono osservare due casi: o le due rette si intersecano nello spazio tridimensionale, oppure sono sghembe, ovvero non si intersecano mai. Nel primo caso il punto PoCA viene identificato immediatamente come il punto di incontro, mentre nel secondo caso è necessario individuare il punto che minimizza la distanza euclidea tra queste. In figura 6.2.6

è illustrata una sezione bidimensionale di volume dove si distinguono questi due casi.

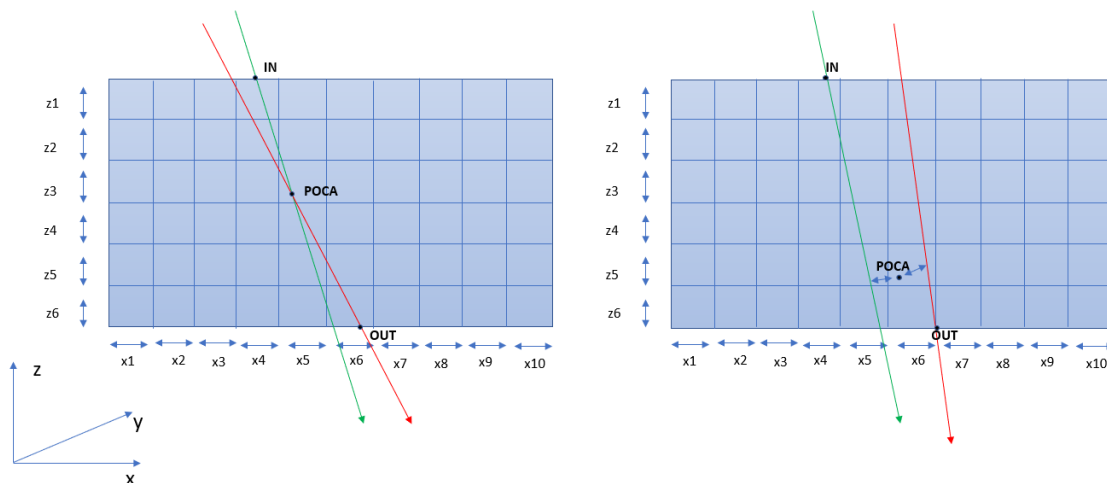


Figura 6.2.6: Schema di sezione bidimensionale di volume, con traiettoria ricostruita passante per il punto incidente (linea verde) e per il punto uscente (linea rossa). Il punto PoCA è quello che minimizza la distanza nello spazio tra le due rette.

A sinistra il caso di due rette incidenti, a destra il caso di due rette sghembe.

In questo caso la lunghezza tridimensionale di cammino all'interno del volume viene calcolata suddividendo la traiettoria del muone in due parti distinte. La prima parte collega il punto incidente nel volume al punto PoCA, mentre la seconda parte connette il punto PoCA al punto in uscita dal volume. Si ripete il ragionamento precedente separatamente per ciascuna di queste due parti, e i risultati ottenuti vengono poi uniti in un'unica lista.

La trattazione non è banale, però, dal momento che è necessario tenere in considerazione il fatto che il punto PoCA non sempre è localizzato all'interno del volume di interesse, bensì può anche sovrastare o giacere in posizione sottostante alla base del parallelepipedo rettangolo. Inoltre, allo stesso modo, il punto PoCA può trovare locazione a destra o a sinistra rispetto alle facce laterali che delimitano il volume da ispezionare. Per questi motivi, nel determinare la traiettoria di ogni singolo muone all'interno del volume e ricavare la lista associata di voxels attraversati, è necessario prestare particolare attenzione a

quale tra le alternative precedenti si colloca il caso in questione. La trattazione, di conseguenza, va adeguata al caso specifico.

3) *Trattazione alternativa*

In letteratura è reperibile una trattazione analoga a quella proposta in precedenza, proposta da R. L. Siddon [11], il quale ha sviluppato un algoritmo per il calcolo della lunghezza tridimensionale di un vettore all'interno di un volume noto. Nello specifico, l'algoritmo proposto restituisce sia l'indice dei voxels attraversati dal vettore, sia la lunghezza di cammino all'interno di quest'ultimi. Gli indici dei voxels attraversati coincidono in larga parte con quelli ottenuti dal metodo discusso in precedenza, implementato per marcare i cubetti attraversati da quelli non attraversati, a controprova e conferma della coerenza dei risultati. Con questo metodo si ottiene immediatamente in aggiunta l'informazione sulla lunghezza del percorso.

Se ne riporta quindi un breve estratto per completezza, al fine di fornire un approccio alternativo. I risultati con questo metodo sono ottimizzati in modo tale da snellire l'onere computazionale e fornire una soluzione al problema in tempi più rapidi. In seguito a diverse prove, però, è risultato comunque preferibile in termini di performance il metodo precedente, in quanto più accurato nella determinazione del percorso della particella all'interno del volume tridimensionale.

Per calcolare la lunghezza di cammino percorsa dal muone all'interno di ciascun voxel in cui viene suddiviso il volume tridimensionale si procede calcolando separatamente l'intersezione del raggio con l'insieme formato dai piani paralleli equispaziati per ciascuna delle tre coordinate. Nello specifico, considerato un volume di dimensioni $1m \times 1m \times 0.6m$, suddiviso in 600 cubetti da $0.1m \times 0.1m \times 0.1m$, ciascuno con volume pari a $1dm^3$, si calcola l'equazione della retta che individua gli estremi della suddivisione del volume in voxels.

La traiettoria dal punto incidente $P_{in} = (X_1, Y_1, Z_1)$ al punto uscente $P_{out} = (X_2, Y_2, Z_2)$ si può rappresentare parametricamente tramite il

sistema di equazioni seguente

$$\begin{aligned} X(\alpha) &= X_1 + \alpha * (X_2 - X_1) \\ Y(\alpha) &= Y_1 + \alpha * (Y_2 - Y_1) \\ Z(\alpha) &= Z_1 + \alpha * (Z_2 - Z_1) \end{aligned} \quad (6.8)$$

dove il parametro α assume valore nullo nel punto P_{in} e valore unitario nel punto P_{out} . I punti di intersezione tra la traiettoria del muone e i bordi del volume sono definiti dal valore del parametro α_{min} per quanto riguarda il bordo superiore e α_{max} per quanto riguarda il bordo inferiore. Tutte le altre intersezioni della traiettoria con i piani individuali vengono individuate da valori del parametro α appartenenti all'intervallo $(\alpha_{min}, \alpha_{max})$.

Si procede quindi determinando l'insieme di valori parametrici di intersezione della retta con ciascuno dei piani ortogonali, contenuti nell'intervallo precedentemente determinato, per ciascuna delle tre coordinate a disposizione. Si costruisce in questo modo un insieme di valori per il parametro α . La lunghezza di cammino del muone all'interno di un determinato voxel viene calcolata come la differenza tra due valori consecutivi del parametro α all'interno dell'insieme complessivo.

In generale, per un volume suddiviso rispettivamente in (N_x, N_y, N_z) voxels, l'insieme di piani paralleli ortogonali equispaziati che individuano gli estremi laterali in cui ciascun cubetto viene separato dal successivo sono esprimibili con il sistema di equazioni seguente

$$\begin{aligned} X_{plane}(i) &= X_{plane}(1) + (i - 1)h_x \\ Y_{plane}(i) &= Y_{plane}(1) + (j - 1)h_y \\ Z_{plane}(i) &= Z_{plane}(1) + (k - 1)h_z \end{aligned} \quad (6.9)$$

con $i = 1, \dots, (N_x + 1)$, $j = 1, \dots, (N_y + 1)$, $k = 1, \dots, (N_z + 1)$ e h_x , h_y e h_z ampiezza dei voxels lungo ciascuno degli assi cartesiani considerati. Dal sistema di equazioni 6.8 si ricavano i valori del parametro α corrispondente all'estremo inferiore e superiore dell'insieme di piani paralleli per ciascuna delle tre coordinate cartesiane considerate,

ovvero

$$\begin{aligned}
\alpha_x(1) &= (X_{plane}(1) - X_1)/(X_2 - X_1) \\
\alpha_x(N_x + 1) &= (X_{plane}(N_x + 1) - X_1)/(X_2 - X_1) \\
\alpha_y(1) &= (Y_{plane}(1) - Y_1)/(Y_2 - Y_1) \\
\alpha_y(N_y + 1) &= (Y_{plane}(N_y + 1) - Y_1)/(Y_2 - Y_1) \\
\alpha_z(1) &= (Z_{plane}(1) - Z_1)/(Z_2 - Z_1) \\
\alpha_z(N_z + 1) &= (Z_{plane}(N_z + 1) - Z_1)/(Z_2 - Z_1).
\end{aligned} \tag{6.10}$$

In particolare, ogni termine in ciascuno degli insiemi di indici ricavati $\{\alpha_x\}$, $\{\alpha_y\}$ e $\{\alpha_z\}$ corrisponde all'intersezione della traiettoria del muone con uno dei piani paralleli in cui viene suddiviso il volume.

Si costruisce quindi un unico insieme contenente i valori ordinati per il parametro α ottenuto

$$\begin{aligned}
\alpha_{min} = \mathbf{max}(0, \min[\alpha_x(1), \alpha_x(N_x + 1)], \\
\min[\alpha_y(1), \alpha_y(N_y + 1)], \min[\alpha_z(1), \alpha_z(N_z + 1)])
\end{aligned} \tag{6.11}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{max} = \mathbf{min}(1, \max[\alpha_x(1), \alpha_x(N_x + 1)], \\
\max[\alpha_y(1), \alpha_y(N_y + 1)], \max[\alpha_z(1), \alpha_z(N_z + 1)]).
\end{aligned} \tag{6.12}$$

Per ciascun asse coordinato vengono quindi ricavati l'estremo inferiore e superiore degli indici che compaiono nella definizione di piano in equazione 6.9, coerenti con l'intervallo di valori $(\alpha_{min}, \alpha_{max})$ ricavato in precedenza.

In particolare, considerando il piano xz a titolo esemplificativo, vengono distinti i due casi seguenti:

- Se $(X_2 - X_1) \geq 0$

$$\begin{aligned} i_{min} &= (N_x + 1) - [X_{plane}(N_x + 1) - \alpha_{min} * (X_2 - X_1) - X_1]/h_x \\ i_{max} &= 1 + [X_1 + \alpha_{max} * (X_2 - X_1) - X_{plane}(1)]/h_x \end{aligned} \quad (6.13)$$

- Se $(X_2 - X_1) < 0$

$$\begin{aligned} i_{min} &= (N_x + 1) - [X_{plane}(N_x + 1) - \alpha_{max} * (X_2 - X_1) - X_1]/h_x \\ i_{max} &= 1 + [X_1 + \alpha_{max} * (X_2 - X_1) - X_{plane}(1)]/h_x \end{aligned} \quad (6.14)$$

Analoghe espressioni vengono utilizzate per ricavare i valori degli indici j_{min} , j_{max} , k_{min} e k_{max} associati rispettivamente alle coordinate y e z.

Date le sequenze ordinate di indici (i_{min}, i_{max}) , (j_{min}, j_{max}) e (k_{min}, k_{max}) , gli insiemi di valori parametrici $\{\alpha_x\}$, $\{\alpha_y\}$ e $\{\alpha_z\}$ per ciascuna delle tre coordinate cartesiane vengono ottenuti nel seguente modo

- Se $(X_2 - X_1) \geq 0$

$$\{\alpha_x\} = \{\alpha_x(i_{min}), \dots, \alpha_x(i_{max})\} \quad (6.15)$$

- Se $(X_2 - X_1) < 0$

$$\{\alpha_x\} = \{\alpha_x(i_{max}), \dots, \alpha_x(i_{min})\} \quad (6.16)$$

dove

$$\begin{aligned} \alpha_x(i) &= [X_{plane}(i) - X_1]/(X_2 - X_1) \\ &= \alpha_x(i - 1) + [d_x/(X_2 - X_1)]. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Si costruisce quindi un unico insieme unendo gli insiemi $\{\alpha_x\}$, $\{\alpha_y\}$ e $\{\alpha_z\}$ ricavati, aggiungendo anche i termini α_{min} e α_{max} per comple-

tezza.

$$\begin{aligned}\alpha &= \{\alpha_{min}, merged[\{\alpha_x\}, \{\alpha_y\}, \{\alpha_z\}], \alpha_{max}\} \\ &= \{\alpha(0), \dots, \alpha(n)\}.\end{aligned}\quad (6.18)$$

Termini consecutivi all'interno dell'insieme di parametri $\{\alpha\}$ appena definito corrispondono all'intersezione della traiettoria del muone con un determinato voxel.

Considerati $i = 1, \dots, M$ muoni e $j = 1, \dots, N$ voxels, la lunghezza di cammino percorsa da ogni muone all'interno di ciascun voxel viene definita come

$$L_{ij} = d_{12} * [\alpha(m) - \alpha(m - 1)] \quad (6.19)$$

dove

$$d_{12} = [(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2]^{1/2} \quad (6.20)$$

rappresenta la distanza rispettivamente tra il punto in ingresso nel volume della traiettoria del muone e il punto in uscita. Gli indici $[i(m), j(m), k(m)]$ che identificano il voxel attraversato nel volume si ricavano come

$$\begin{aligned}i(m) &= 1 + [X_1 + \alpha_{mid} * (X_2 - X_1) - X_{plane}(1)]/h_x \\ j(m) &= 1 + [Y_1 + \alpha_{mid} * (Y_2 - Y_1) - Y_{plane}(1)]/h_y \\ k(m) &= 1 + [Z_1 + \alpha_{mid} * (Z_2 - Z_1) - Z_{plane}(1)]/h_z\end{aligned}\quad (6.21)$$

dove

$$\alpha_{mid} = \frac{[\alpha(m) + \alpha(m - 1)]}{2}.\quad (6.22)$$

7 Simulazione numerica

Vengono riportati alcuni studi di simulazione effettuati, ritenuti particolarmente interessanti a titolo esemplificativo per la generalità delle ipotesi sottostanti. Per ogni caso, i risultati vengono riportati seguendo la seguente struttura: inizialmente si presentano delle immagini di confronto tra i risultati ottenuti all'iterazione finale dell'algoritmo e i valori reali da cui si è simulato. Nel dettaglio, per ciascuno dei sei strati in cui viene suddiviso il parallelepipedo rettangolo lungo l'asse verticale, si riporta una mappa di calore, ovvero una sezione bidimensionale orizzontale che mostra la suddivisione in quadrati dell'area di base del volume. Colori diversi corrispondono a valori diversi della lunghezza di radiazione X_0 . Idealmente si vorrebbe ottenere un'equivalenza tra ciascuna immagine simulata e reale, sia dal punto di vista della scala di colori visualizzata, sia dal punto di vista della discriminazione "netta" di oggetti a composizione diversa. Si vorrebbe osservare, infatti, un contorno chiaro di separazione tra aree contenenti materiali differenti.

In questo studio, perciò, ci si è concentrati maggiormente su questo secondo aspetto, essendo di particolare rilevanza da un punto di vista pratico e applicativo la capacità di individuazione di corpi estranei all'interno di un volume incognito. Si è data minore importanza, invece, alla stima esatta del valore di X_0 associato a ciascun voxel, ovvero alla determinazione univoca del materiale componente ogni cubo. Per ottenere questo tipo di equivalenza, infatti, è necessario adottare le stesse convenzioni univocamente, sia per quanto concerne le costanti matematiche implicate nelle varie formulazioni, sia riguardo le unità di misura adottate.

Per valutare il numero di iterazioni necessarie per raggiungere convergenza si è utilizzata la statistica test

$$T_{test}(it) = \frac{E[X_{0_{Be},it}] - E[X_{0_{Pb},it}]}{\sqrt{\sigma_{X_{0_{Be},it}}^2 + \sigma_{X_{0_{Pb},it}}^2}} \quad (7.1)$$

dove il pedice *Be* denota il berillio, *Pb* il piombo e *it* l'iterazione corrente. Essa, ad ogni iterazione, valuta quanto si “differenziano” le due popolazioni formate dai voxels contenenti piombo e dai voxels contenenti berillio, rispettivamente.

Idealmente, valori maggiori assunti da tale statistica denotano una migliore discriminazione tra le due aree a diversa composizione, ragione per cui si cerca il valore che massimizza tale quantità. Questo sarà il numero di iterazioni che verrà adottato per ogni simulazione riportata nel seguito. Da studi di simulazione, infatti, si è verificato fondamentale adottare una regola di “stop” per l'algoritmo, in quanto all'aumentare del numero di iterazioni considerato non corrisponde un miglioramento indiscriminato della qualità dell'immagine. Al contrario, si assiste ad un deterioramento della qualità dell'immagine al tendere del numero di iterazioni verso valori elevati.

Questo si verifica perché, superata una certa soglia per il numero di ripetizioni dei due passi dell'algoritmo, si ha un rallentamento della capacità di discriminazione di elementi diversi all'interno del volume. Raggiunto un valore vicino a quello reale per il parametro da stimare, infatti, ad ogni iterazione successiva l'algoritmo continua a ricercare il valore ottimale del parametro per ciascun voxel considerato, subendo localmente delle derive che comportano un offuscamento dell'immagine. Questo avviene, nel complesso, anche perché i valori dei parametri reali distano soltanto di pochi ordini di grandezza tra loro. Mantenendo un range di valori ragionevole da assegnare alla mappa di calore per identificare i valori associati alle varie gradazioni, perciò, si rischia di ottenere un'immagine poco informativa, in cui diventa difficile distinguere un oggetto dall'altro. Dal momento che, come più volte sottolineato in precedenza, l'obiettivo non riguarda la stima corretta del valore di X_0 di ogni voxel, bensì l'identificazione

di materiali diversi all'interno del volume incognito, si ottiene la migliore performance generalmente entro le prime decine di iterazioni, dove l'algoritmo risponde agevolmente all'intento di delineare, almeno in modo abbozzato, il contorno degli oggetti componenti.

Si riportano, infine, le funzioni di densità relative alla popolazione composta dai voxels di berillio e a quella composta dai voxels di piombo, separatamente. Sull'asse delle ascisse si riporta il logaritmo del parametro X_0 stimato all'iterazione corrente, specificata nella didascalia relativa. Alla prima iterazione si nota che entrambe le popolazioni si concentrano attorno ad uno stesso valore del parametro X_0 ; in questo caso, infatti, per costruzione, tutti i voxels vengono inizializzati con lo stesso valore. All'aumentare del numero di iterazioni, invece, si assiste ad un allontanamento tra le mode delle due distribuzioni relative a ciascuna popolazione. All'iterazione finale di ciascuna simulazione, infine, si osserva una evidente traslazione sull'asse delle ascisse del valore medio della densità associata. In tutti i casi riportati, la moda della popolazione di berillio si colloca attorno ad un valore superiore rispetto a quella del piombo, coerentemente con i veri valori dei parametri X_0 da stimare. Si ricorda, infatti, che l'interesse non riguarda la stima precisa della lunghezza di radiazione per i due elementi, quanto piuttosto la discriminazione tra le due popolazioni di voxels.

1) Prima simulazione

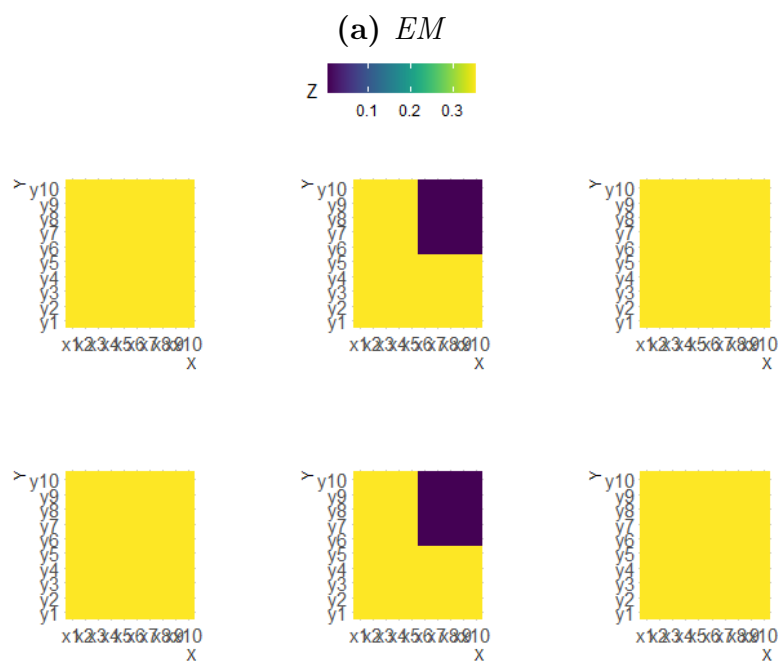
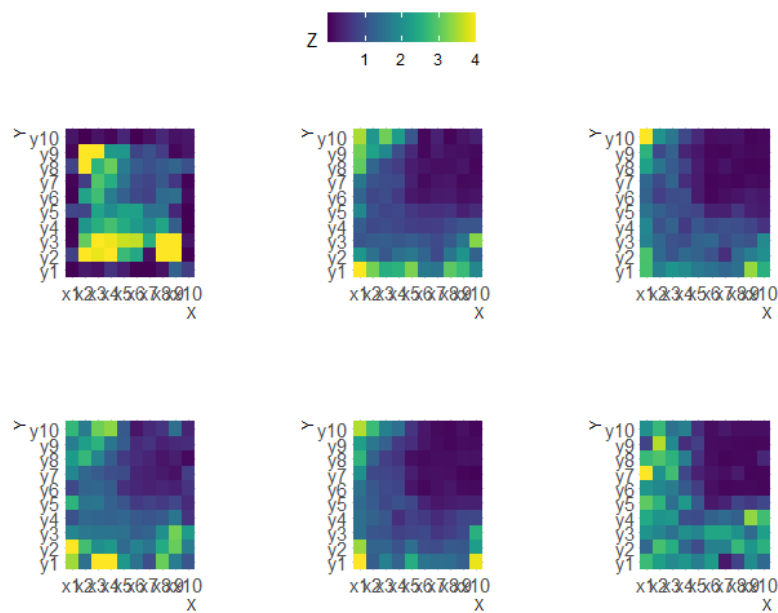
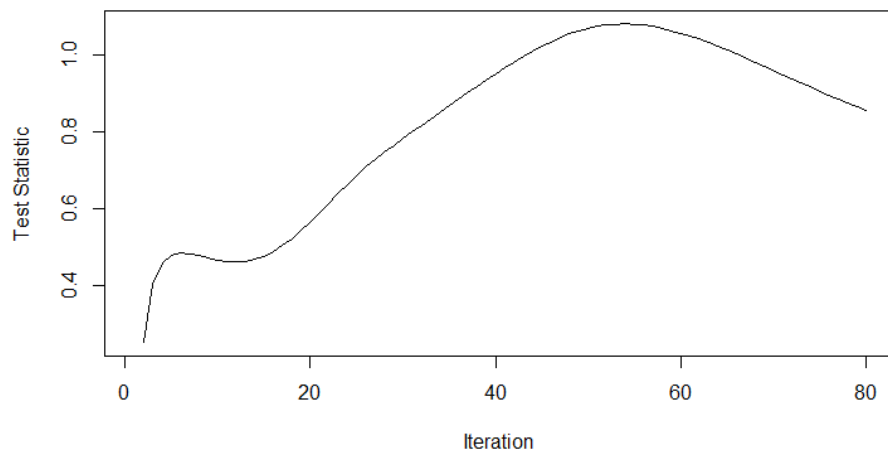
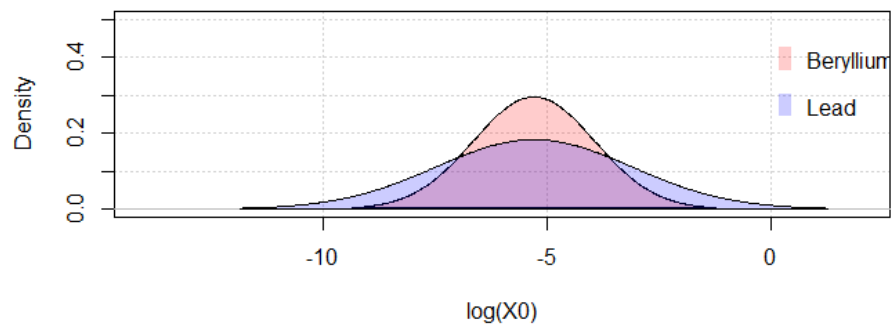


Figura 7.0.1: Mappe di calore relative al confronto tra i risultati ottenuti dall'algoritmo EM e i dati simulati per il volume. L'algoritmo EM è stato ripetuto per 55 iterazioni e per il parametro X_0 si è assunto un valore iniziale pari a $0.005m$ per tutti i voxels.

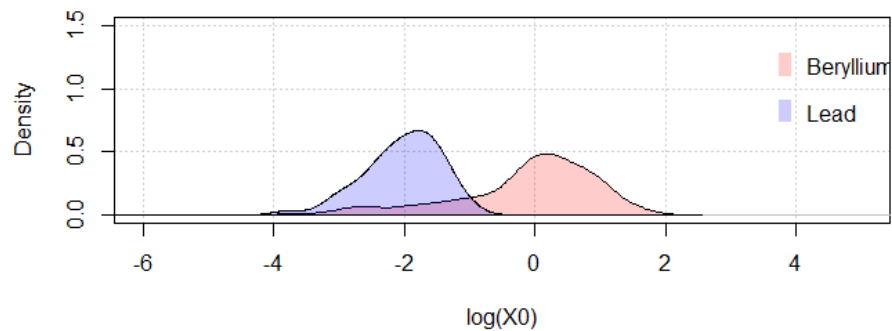


(a) *Statistica test.*

Iteration 1



Iteration 55



(b) *Distribuzione del $\log(X_0)$ stimato per le due popolazioni composte dai voxels simulati di berillio e piombo.*

2) Seconda simulazione

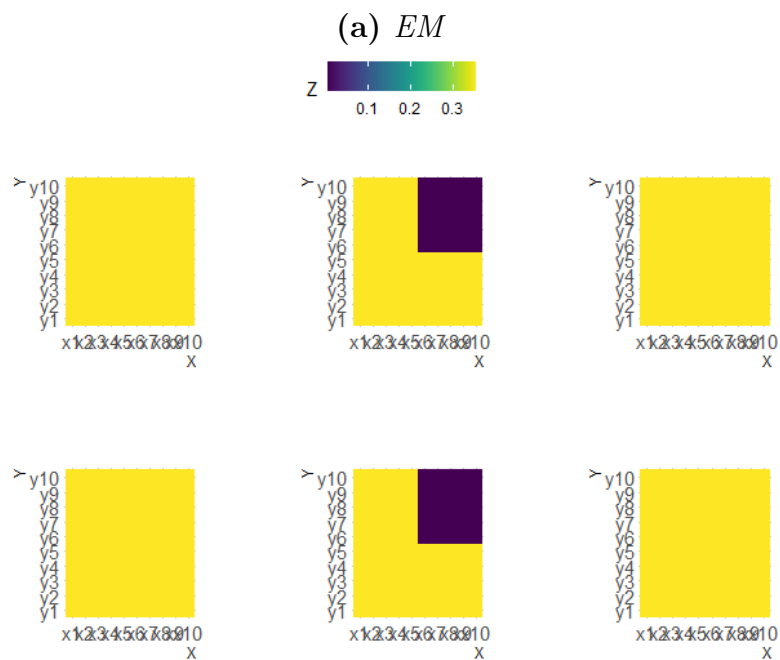
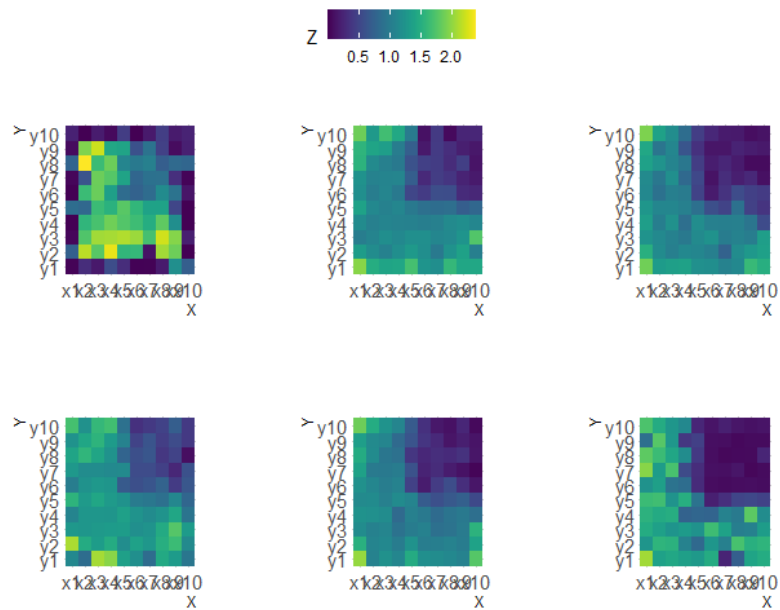
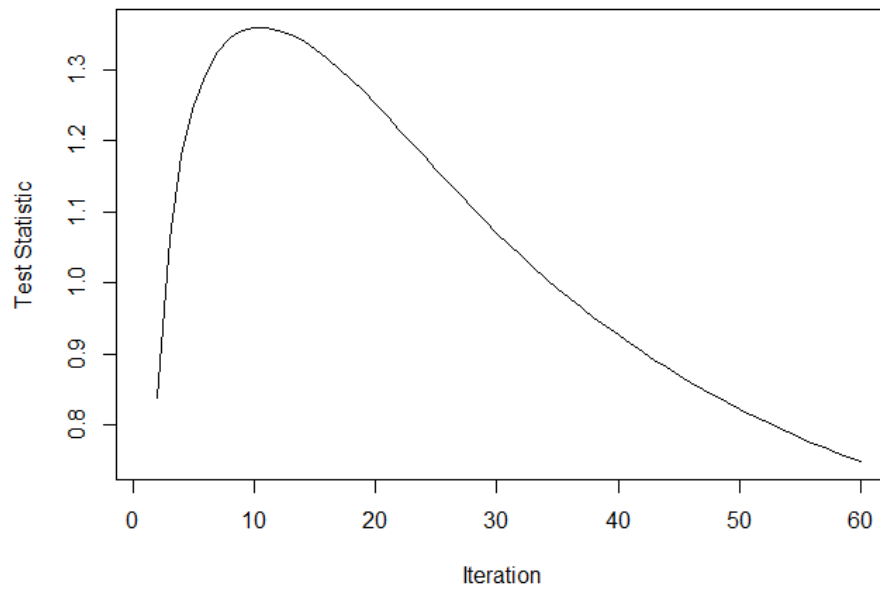
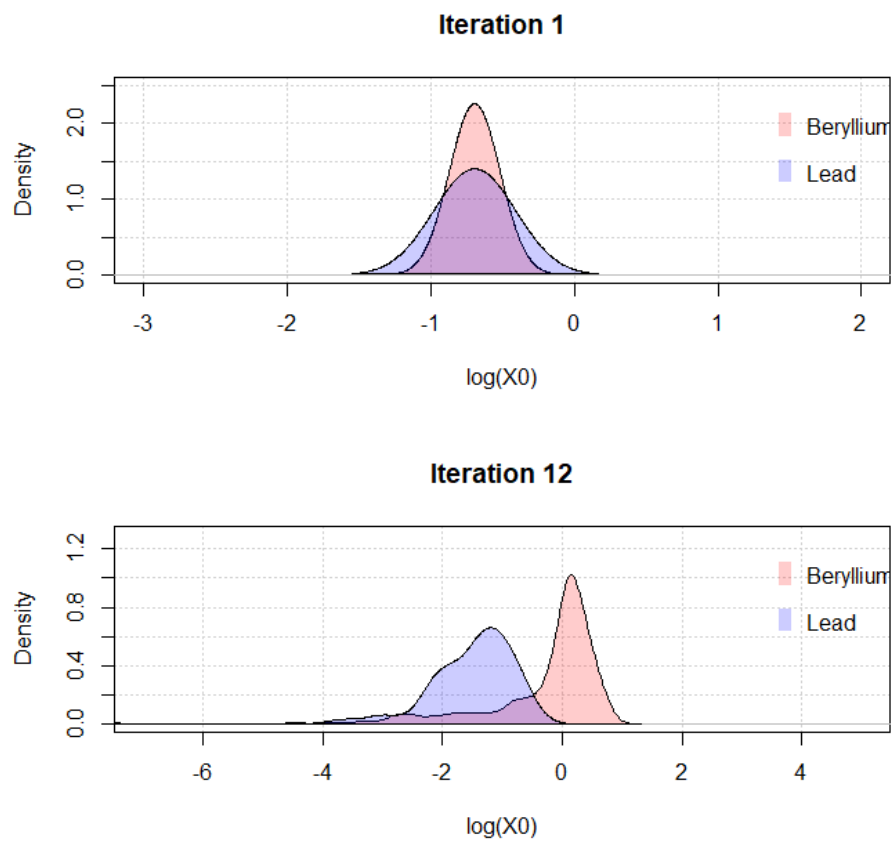


Figura 7.0.3: Mappe di calore relative al confronto tra i risultati ottenuti dall'algoritmo EM e i dati simulati per il volume. L'algoritmo EM è stato ripetuto per 12 iterazioni e per il parametro X_0 si è assunto un valore iniziale pari a 0.5m per tutti i voxels.

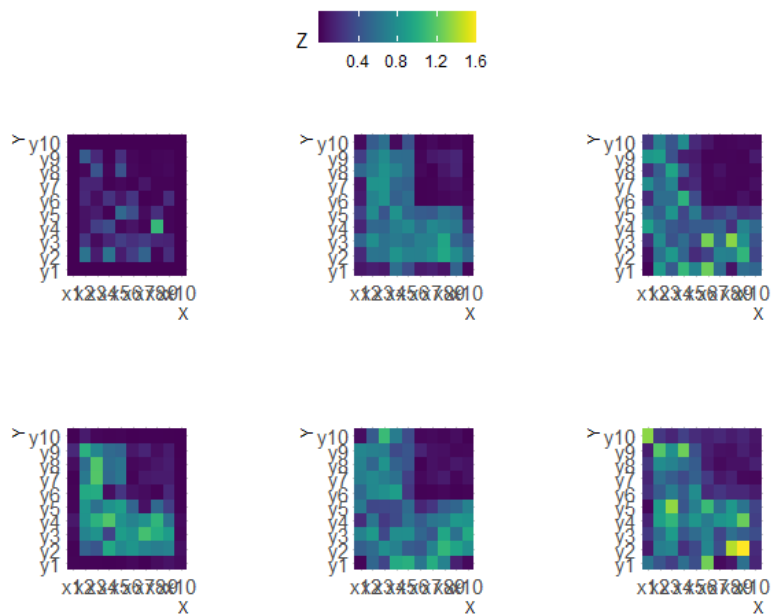


(a) *Statistica test.*

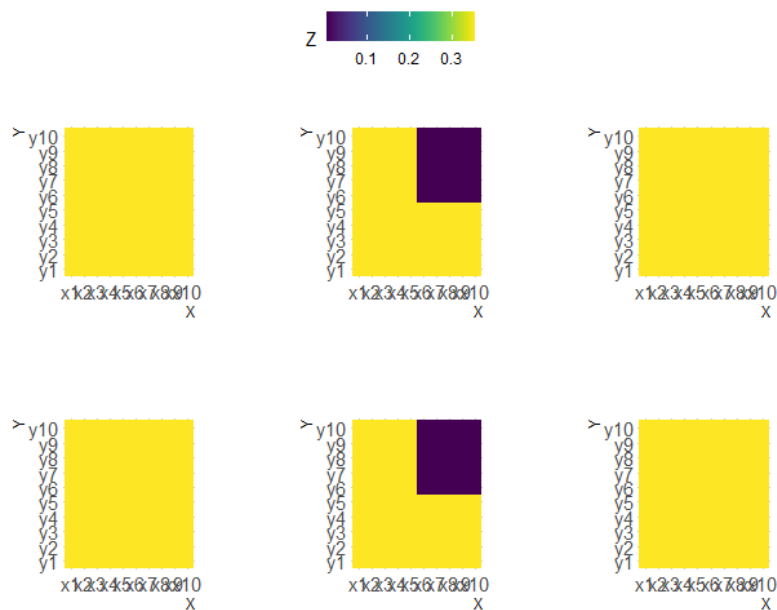


(b) *Distribuzione del $\log(X_0)$ stimato per le due popolazioni composte dai voxels simulati di berillio e piombo.*

3) Terza simulazione

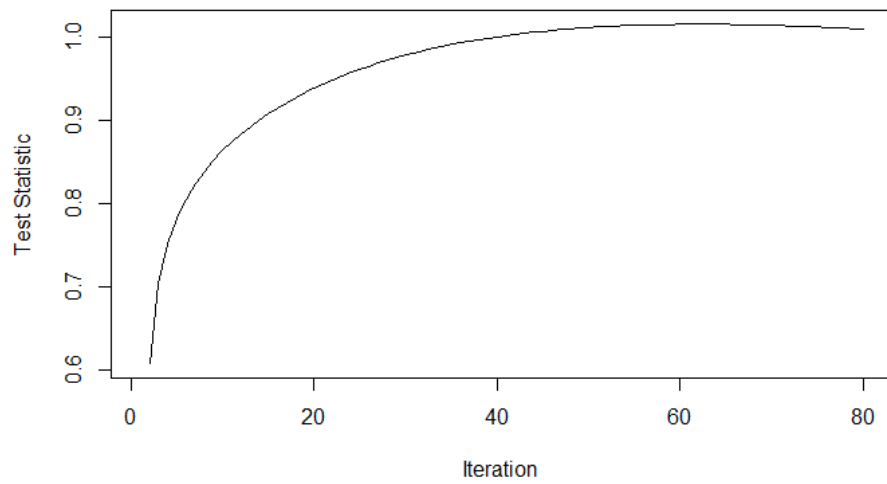


(a) EM con coordinate del punto PoCA



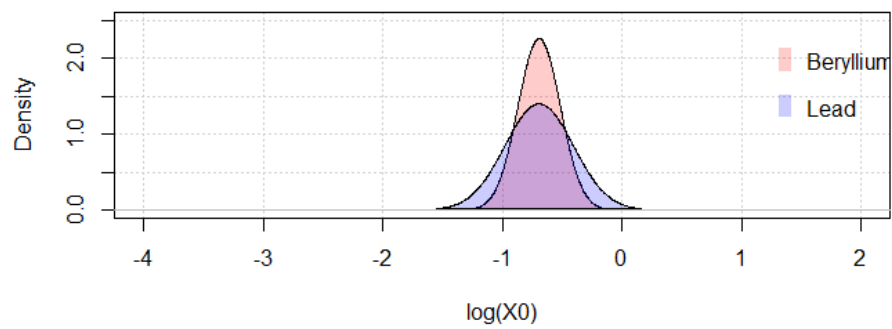
(b) Reale

Figura 7.0.5: Mappe di calore relative al confronto tra i risultati ottenuti dall'algoritmo EM (con l'inclusione dell'informazione relativa alle coordinate del punto PoCA) e i dati simulati per il volume. L'algoritmo EM è stato ripetuto per 60 iterazioni e per il parametro X_0 si è assunto un valore iniziale pari a 0.5m per tutti i voxels.

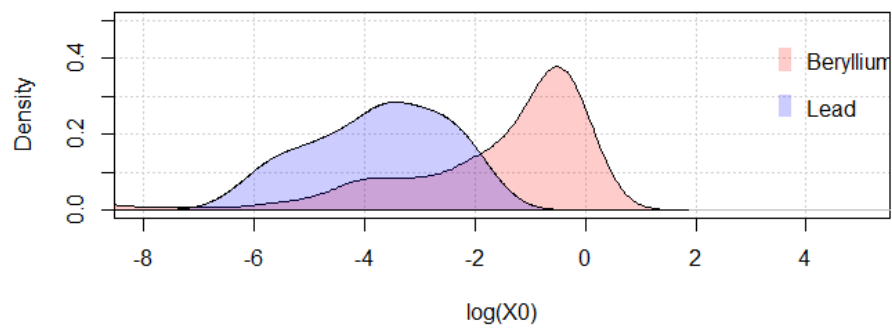


(a) *Statistica test.*

Iteration 1



Iteration 60



(b) *Distribuzione del $\log(X_0)$ stimato per le due popolazioni composte dai voxels simulati di berillio e piombo.*

Un problema riscontrato nelle mappe di calore riportate per tutti gli studi di simulazione effettuati riguarda la presenza di una sorta di “cornicetta” visibile in alcuni strati del volume. Al fine di attenuare tali artefatti si è effettuato uno studio statistico considerando la media dei valori dopo troncamento o winsorizzazione dei valori più estremi a diversi livelli.

La performance di ciascuna simulazione viene valutata considerando la potenza come indice riassuntivo della bontà di verifica d’ipotesi. La potenza corrisponde alla probabilità di rifiutare l’ipotesi nulla quando questa è effettivamente falsa, quindi la probabilità di individuare correttamente una situazione di scostamento dall’ipotesi nulla formulata. Il problema che si intende risolvere è analogo al problema di Behrens-Fisher: si dispone di due campioni di numerosità campionaria differente, composti dai voxels contenenti berillio ($N_{Be} = 550$) e da quelli contenenti piombo ($N_{Pb} = 50$). Si assume che le distribuzioni da cui provengono entrambe le popolazioni siano Gaussiane, con media pari al vero valore del parametro X_0 tabulato per ogni elemento, e varianze differenti. Si intende testare l’ipotesi nulla che la differenza tra le medie delle due popolazioni costituite dai voxels di berillio e di piombo sia pari a $X_{0_{Be}} - X_{0_{Pb}}$. I veri valori della lunghezza di radiazione per i due elementi, infatti, sono noti e pari a $X_{0_{Be}} = 0.35m$ e $X_{0_{Pb}} = 5.60 \times 10^{-3}m$. A tal fine si utilizza la statistica test di Welch, la quale si distribuisce approssimativamente come una t di Student per un numero di gradi di libertà calcolati in maniera opportuna [12]. La potenza può essere quindi facilmente ricavata in riferimento alla distribuzione t di Student con df gradi di libertà. Considerando un’ipotesi alternativa bilaterale, questa viene quindi formalizzata nel seguente modo

$$Power = P(T' < t_{\alpha/2,df}) + P(T' > t_{1-\alpha/2,df}) \quad (7.2)$$

dove $t_{\alpha/2,df}$ è il quantile di livello $\alpha/2$ di una distribuzione t di Student con df gradi di libertà e T' è la vera distribuzione di T calcolata sotto l’ipotesi nulla, centrata nel valore

$$\xi = \frac{E[X_{0_{Be}}] - E[X_{0_{Pb}}]}{\sqrt{\sigma_{X_{0_{Be}}}^2 + \sigma_{X_{0_{Pb}}}^2}}. \quad (7.3)$$

Il numero di gradi di libertà è approssimabile con la seguente

$$df \simeq \frac{\left(\frac{S_{Be}^2}{N_{Be}} + \frac{S_{Pb}^2}{N_{Pb}}\right)^2}{\frac{1}{(N_{Be}-1)}\left(\frac{S_{Be}^2}{N_{Be}}\right)^2 + \frac{1}{(N_{Pb}-1)}\left(\frac{S_{Pb}^2}{N_{Pb}}\right)^2} \quad (7.4)$$

con S_{Be}^2 e S_{Pb}^2 varianze campionarie corrette relative ai voxels di berillio e piombo, rispettivamente.

7.0.1 Algoritmo EM con informazione sulle coordinate del punto PoCA

Inizialmente si è svolto il confronto tra i risultati ottenuti dopo troncamento di varie percentuali dei valori estremi appartenenti a ciascun lato, pari rispettivamente al 5%, 10%, 20%, 30% e 40%. Lo stesso procedimento è stato poi ripetuto winsorizzando a diversi livelli i valori estremi appartenenti a ciascuna coda della distribuzione. In questa e nelle successive simulazioni il valore del parametro X_0 è stato inizializzato al valore di $0.5m$ in tutti i voxels. In Tabella 7.0.1 si riporta un riassunto della performance nei vari casi analizzati.

Tipologia	Percentuale	Iterazioni	Potenza
Troncamento	5%	20	0.2515
	10%	17	0.2824
	20%	10	0.3349
	30%	7	0.3870
	40%	6	0.4122
Winsorizzazione	5%	29	0.2092
	10%	20	0.2366
	20%	13	0.2854
	30%	11	0.3392
	40%	9	0.4088
Mediana	-	6	0.4202

Tabella 7.0.1: *Numero di iterazioni che massimizzano la statistica test per ciascuna delle simulazioni considerate. Si riporta inoltre la potenza calcolata al valore di iterazione specificato.*

Si nota che, all'aumentare di valori troncati o winsorizzati, il numero di iterazioni necessarie per massimizzare la statistica test considerata tende a diminuire, mentre la potenza aumenta. Il massimo valore di potenza si ottiene per il caso relativo alla mediana di tutti i dati considerati. Questo si traduce in una migliore capacità di discriminazione da parte dell'algoritmo di zone del volume a composizione diversa. Ciò è particolarmente evidente osservando le mappe di calore per i due casi relativi alla media dopo troncamento e winsorizzazione dei valori più estremi, riportate nelle Figure 7.0.7 e 7.0.9. Infatti, all'aumentare della percentuale di valori manipolati, si assiste ad una "pulizia" dell'immagine, che appare più nitida e dai contorni maggiormente definiti. Il bordo che caratterizzava gli strati superiori del volume svanisce proporzionalmente all'aumentare della percentuale di valori trattati, fino a risultare pressoché impercettibile nel caso in cui si consideri la mediana di tutti i valori.

Troncamento dei valori estremi

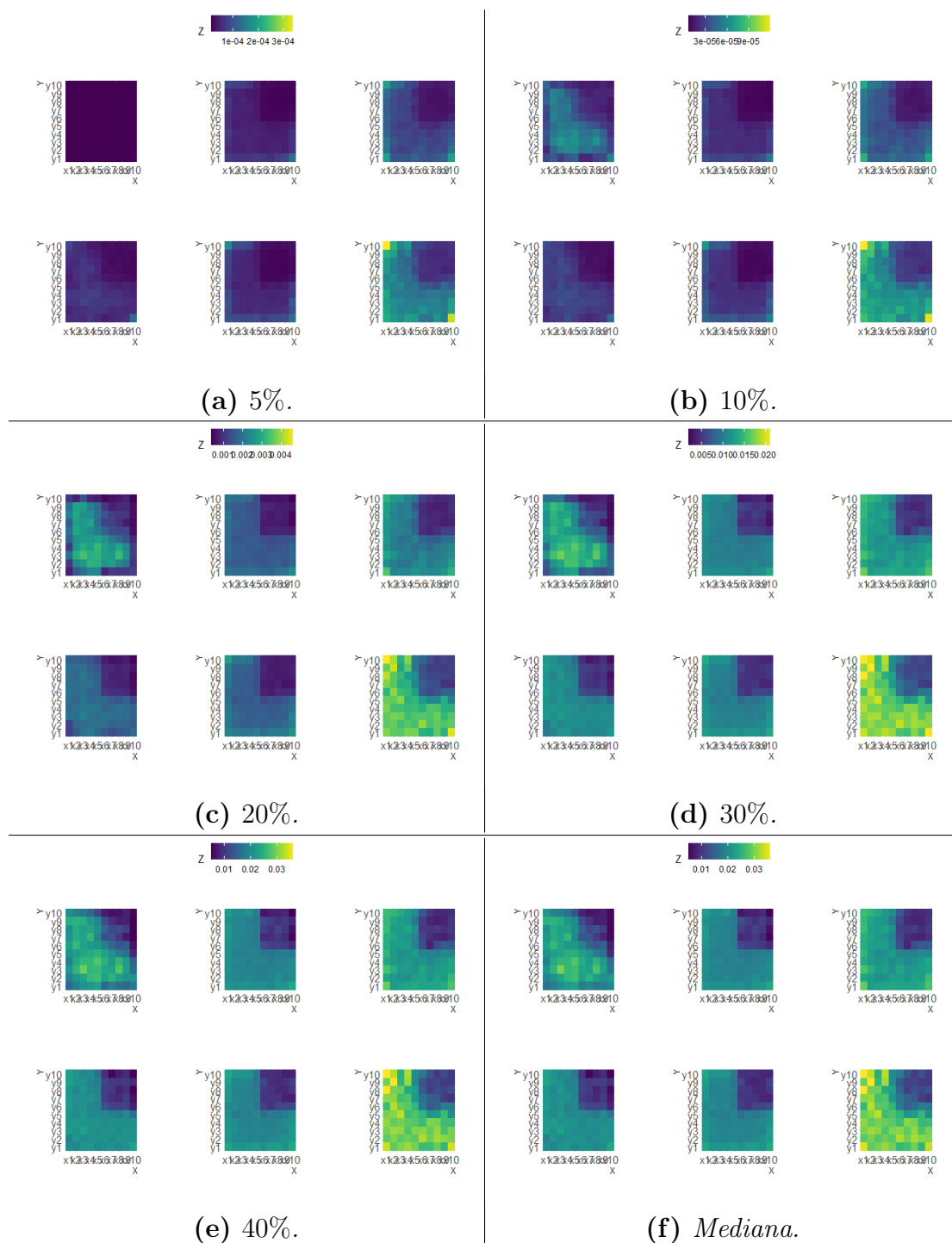


Figura 7.0.7: Mappe di calore relative ai risultati ottenuti dall'algoritmo EM dopo troncamento in ciascuna coda della percentuale di valori estremi riportata in didascalia. Ciascuna immagine è prodotta per un numero di iterazioni specifico, tale da massimizzare la statistica test associata.

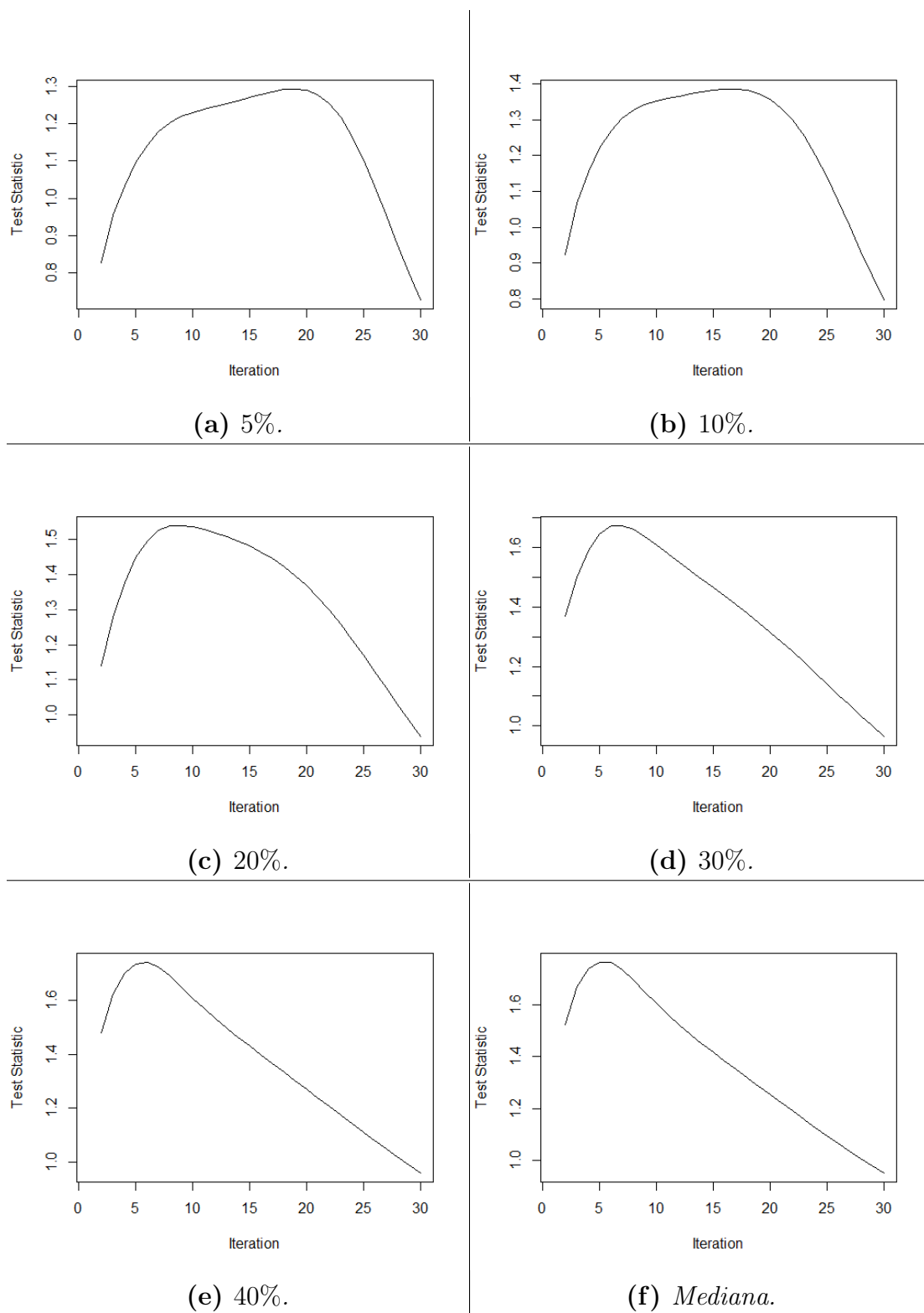


Figura 7.0.8: *Statistica test in funzione del numero di iterazioni dopo troncamento in ciascuna coda della percentuale di valori estremi riportata in didascalia. Si riporta inoltre anche il caso relativo alla mediana di tutti i valori considerati.*

Winsorizzazione dei valori estremi

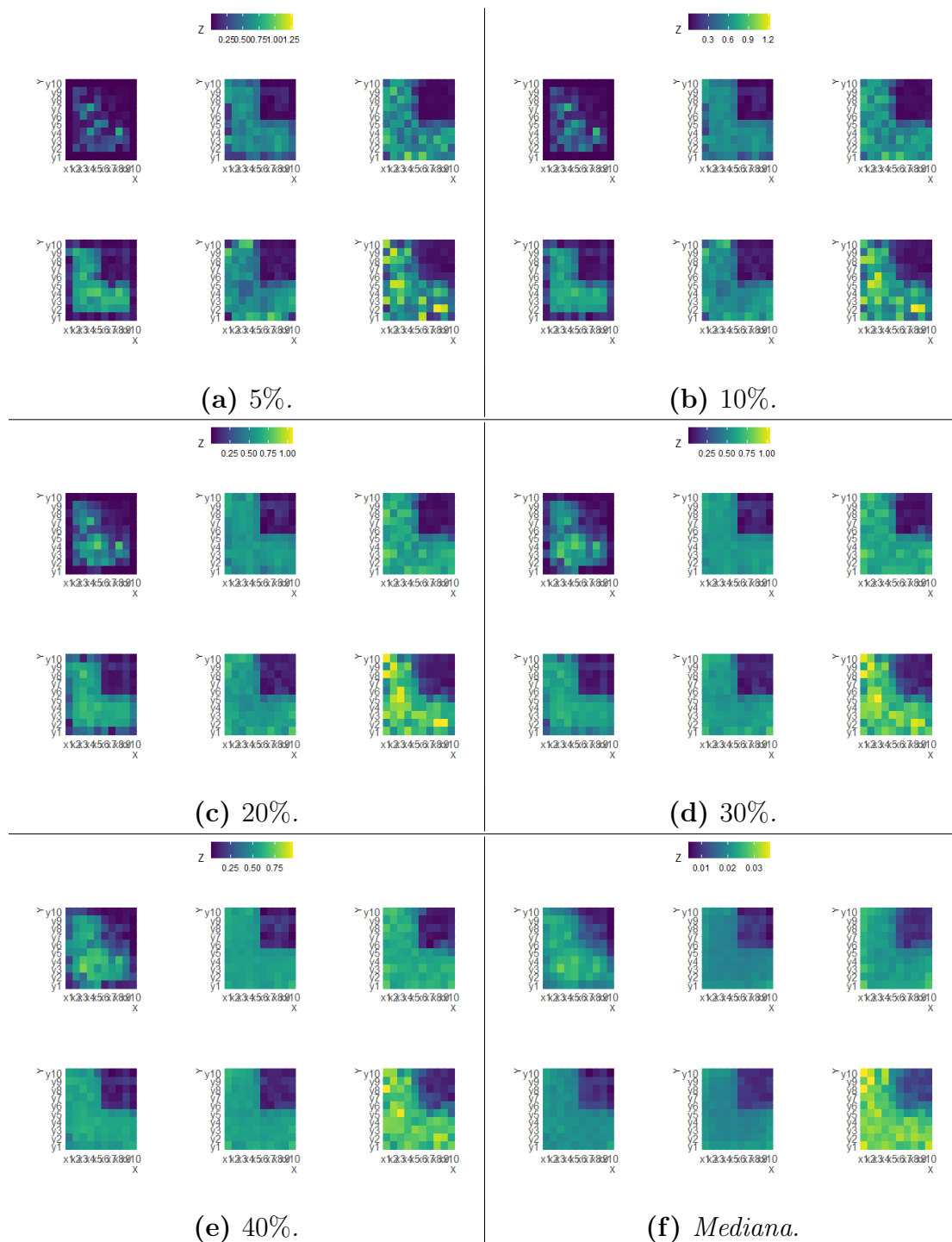


Figura 7.0.9: Mappe di calore relative ai risultati ottenuti dall'algoritmo EM dopo winsorizzazione in ciascuna coda della percentuale di valori estremi riportata in didascalia. Ciascuna immagine è prodotta per un numero di iterazioni specifico, tale da massimizzare la statistica test associata.

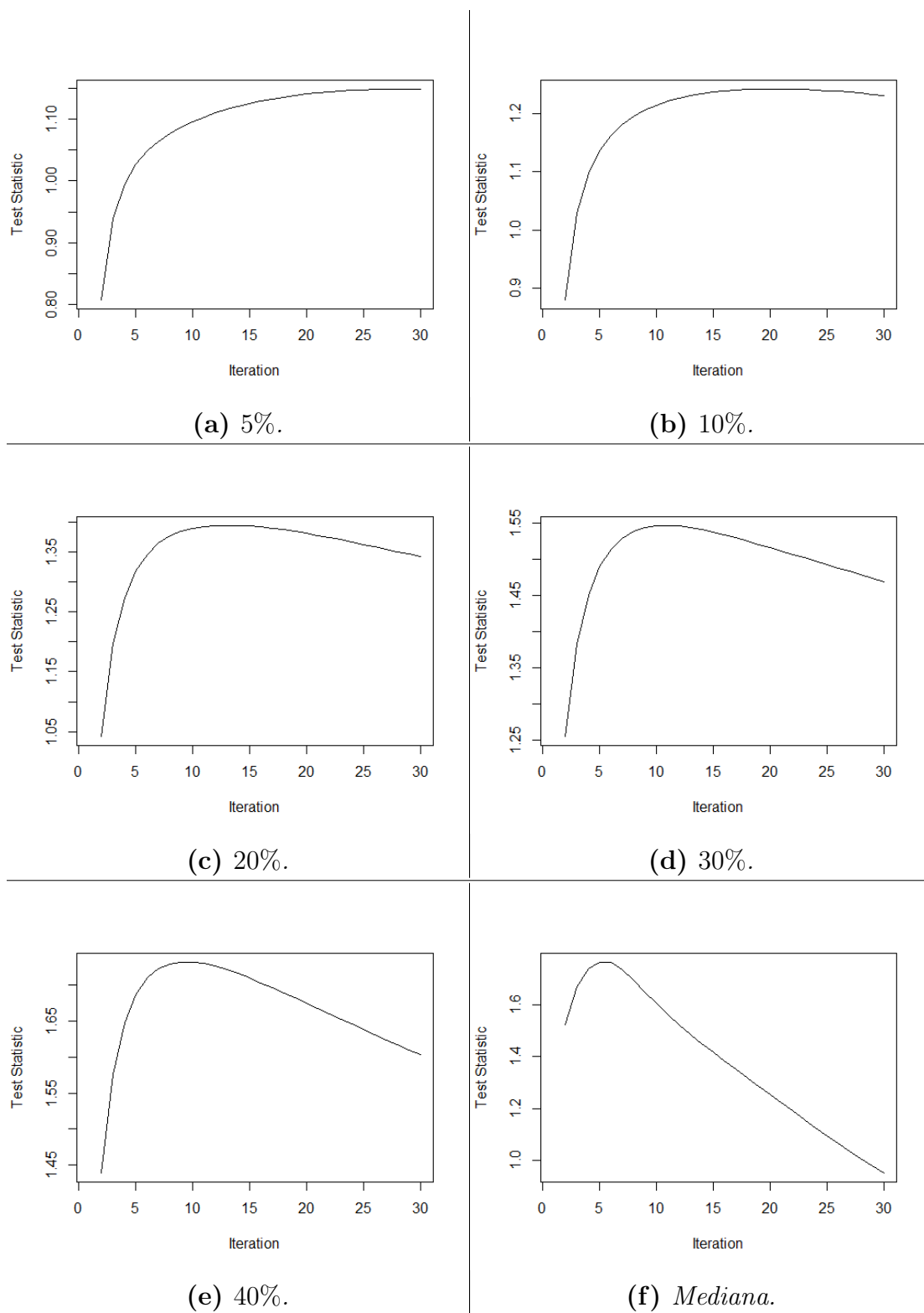


Figura 7.0.10: *Statistica test in funzione del numero di iterazioni dopo winsorizzazione in ciascuna coda della percentuale di valori estremi riportata in didascalìa. Si riporta inoltre anche il caso relativo alla mediana di tutti i valori considerati.*

7.0.2 Algoritmo EM senza informazione sulle coordinate del punto PoCA

Tipologia	Percentuale	Iterazioni	Potenza
Troncamento	5%	4	0.2603
	10%	4	0.2461
	20%	4	0.2453
	30%	4	0.2544
	40%	3	0.2741
Winsorizzazione	5%	11	0.3337
	10%	8	0.3042
	20%	9	0.2608
	30%	15	0.2542
	40%	9	0.2669
Mediana	-	3	0.2783

Tabella 7.0.2: Numero di iterazioni che massimizzano la statistica test per ciascuna delle simulazioni considerate. Si riporta inoltre la potenza calcolata al valore di iterazione specificato.

In questo caso, invece, non si nota un evidente miglioramento all'aumentare del numero di valori troncati o winsorizzati nel campione. Guardando le mappe di calore riportate nelle figure 7.0.11 e 7.0.13, la differenza tra i vari casi appare molto meno marcata rispetto alla trattazione precedente, tendendo alle volte ad essere addirittura impercettibile. Inoltre, anche osservando l'indice potenza associato ai vari casi considerati, non è corretto concludere che l'operazione di troncamento o winsorizzazione apporta un miglioramento al problema considerato nel suo complesso. La "cornicetta" era, infatti, in questo caso specifico già poco evidente nell'immagine originale; partendo da questa considerazione, perciò, è spiegabile la scarsa capacità di affinamento dei risultati ottenuti.

Sebbene permanga soltanto un'esigua componente di rumore nell'immagine prodotta, gli artefatti visibili, comunque, possono essere imputati al processo di ricostruzione e calcolo della traiettoria tridimen-

sionale della particella. Infatti, nel caso precedente, la traiettoria considerata passava per il punto PoCA, la cui localizzazione non necessariamente si trova all'interno del volume da analizzare. Se il punto PoCA si trova all'esterno del volume da ispezionare, ma con terza coordinata avente valore $z \in [0.8, 0.2]m$, il calcolo della lunghezza di cammino della particella nello spazio non è immediato, dal momento che la traiettoria viene suddivisa in due parti separate. Si considera, infatti, il segmento che unisce il punto di incidenza del muone sulla superficie con il punto PoCA e, successivamente il punto che connette il punto PoCA al punto uscente dal volume, caratterizzato da valore della terza coordinata $z = 0.2m$. Perciò, la traiettoria interseca più di una volta la faccia laterale del volume, da cui la possibilità di creazione di artefatti dovuti all'incertezza sulla vera posizione del punto PoCA e, di conseguenza, sul punto di attraversamento del bordo estremo del volume.

Ciò non accade, al contrario, nel caso semplificato dell'algoritmo, dove la lunghezza di cammino del muone viene calcolata connettendo i punti incidente ed uscente con una linea retta. La traiettoria, infatti, viene localizzata in quasi tutti i casi all'interno del volume, interagendo meno frequentemente con le facce laterali del volume.

Troncamento dei valori estremi

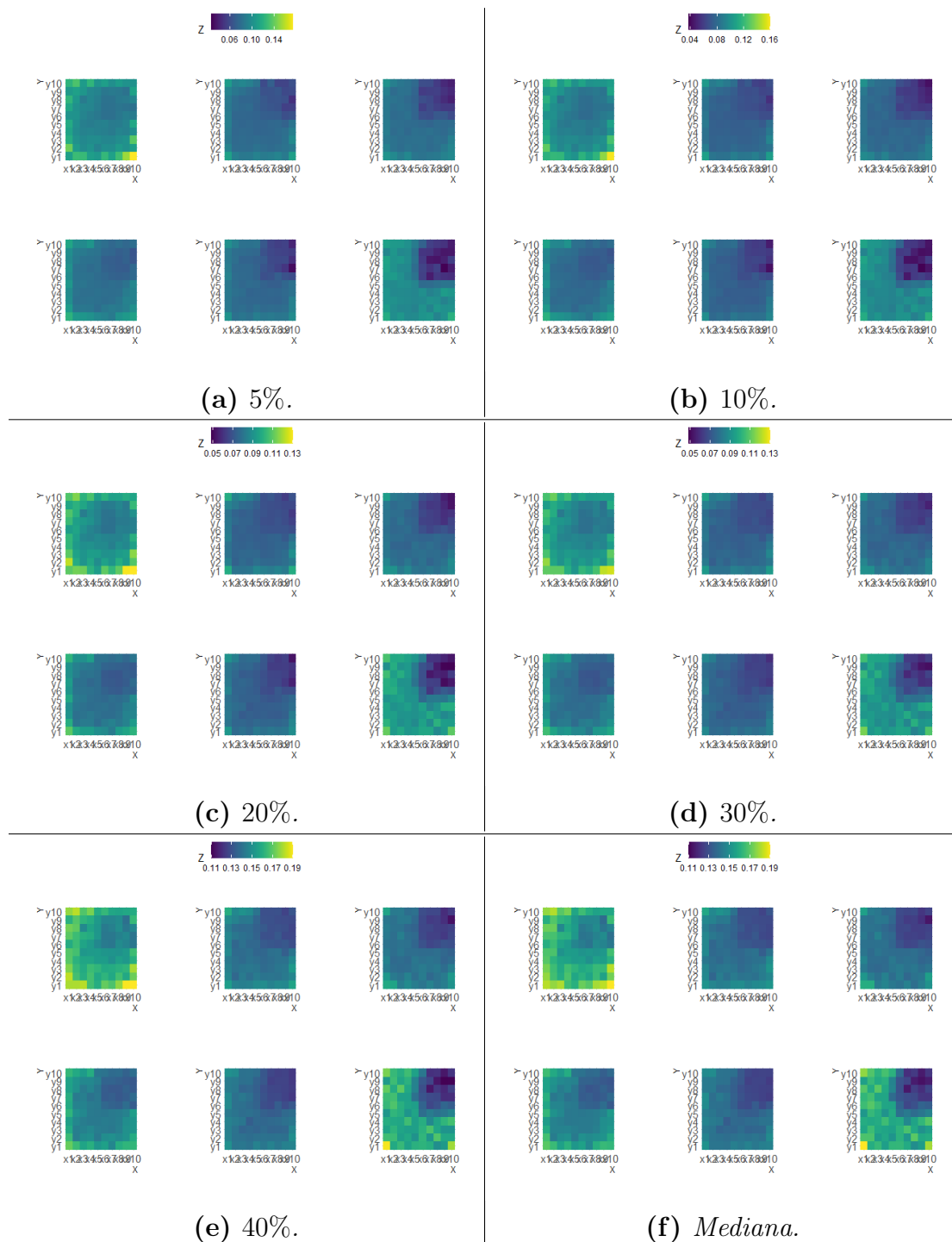
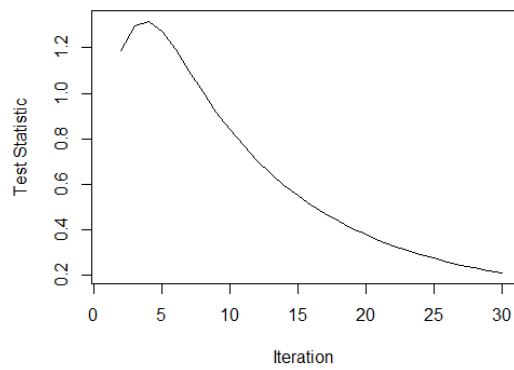
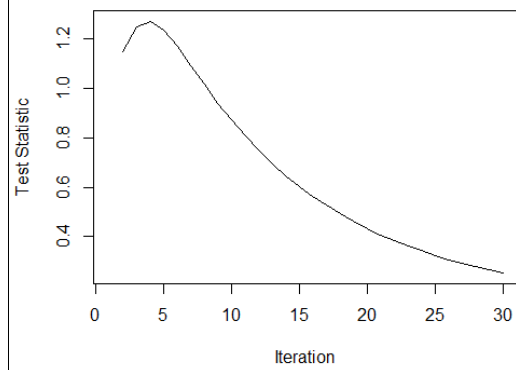


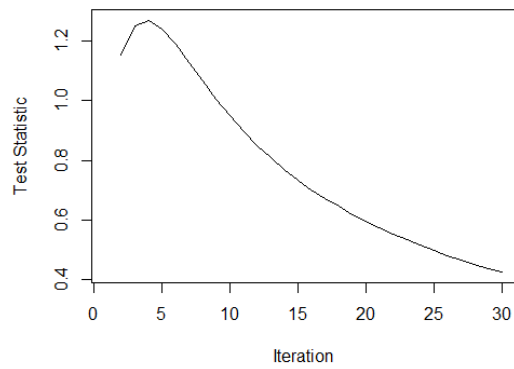
Figura 7.0.11: Mappe di calore relative ai risultati ottenuti dall'algoritmo EM dopo troncamento in ciascuna coda della percentuale di valori estremi riportata in didascalia. Ciascuna immagine è prodotta per un numero di iterazioni specifico, tale da massimizzare la statistica test associata.



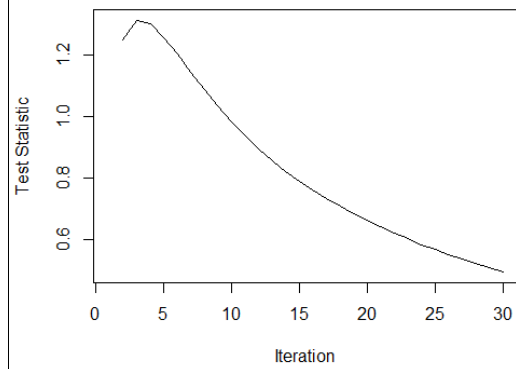
(a) 5%.



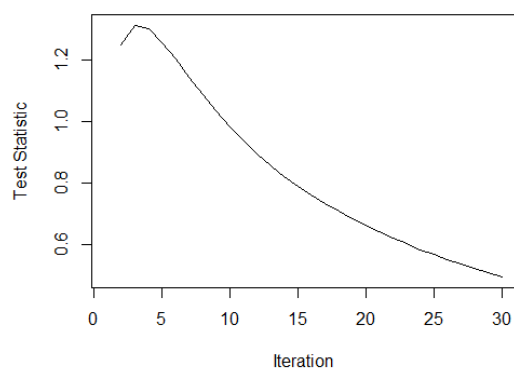
(b) 10%.



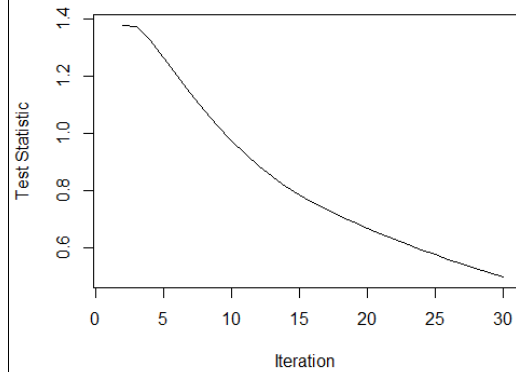
(c) 20%.



(d) 30%.



(e) 40%.



(f) Mediana.

Figura 7.0.12: *Statistica test in funzione del numero di iterazioni dopo troncamento in ciascuna coda della percentuale di valori estremi riportata in didascalia. Si riporta inoltre anche il caso relativo alla mediana di tutti i valori considerati.*

Winsorizzazione dei valori estremi

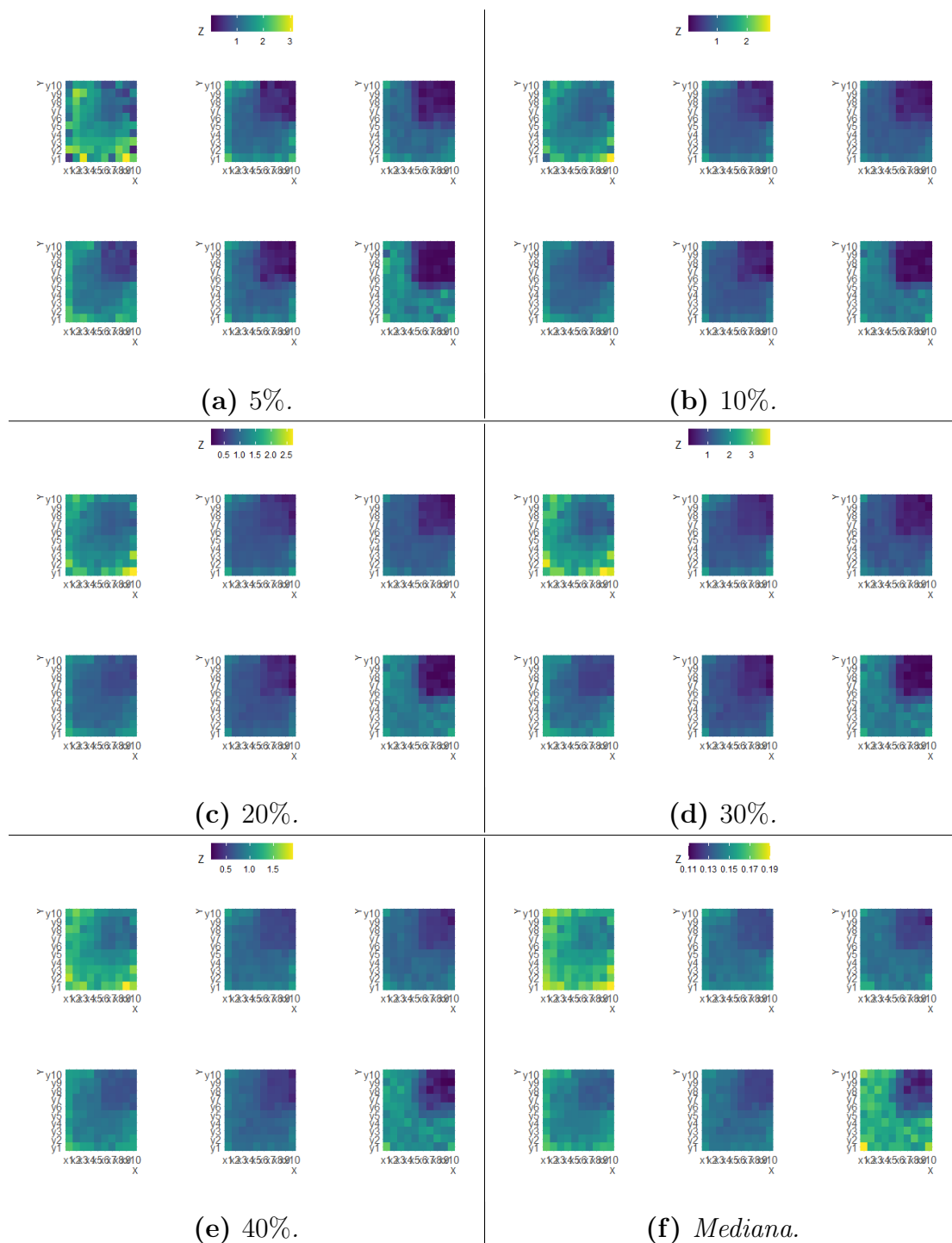


Figura 7.0.13: Mappe di calore relative ai risultati ottenuti dall'algoritmo EM dopo winsorizzazione in ciascuna coda della percentuale di valori estremi riportata in didascalia. Ciascuna immagine è prodotta per un numero di iterazioni specifico, tale da massimizzare la statistica test associata.

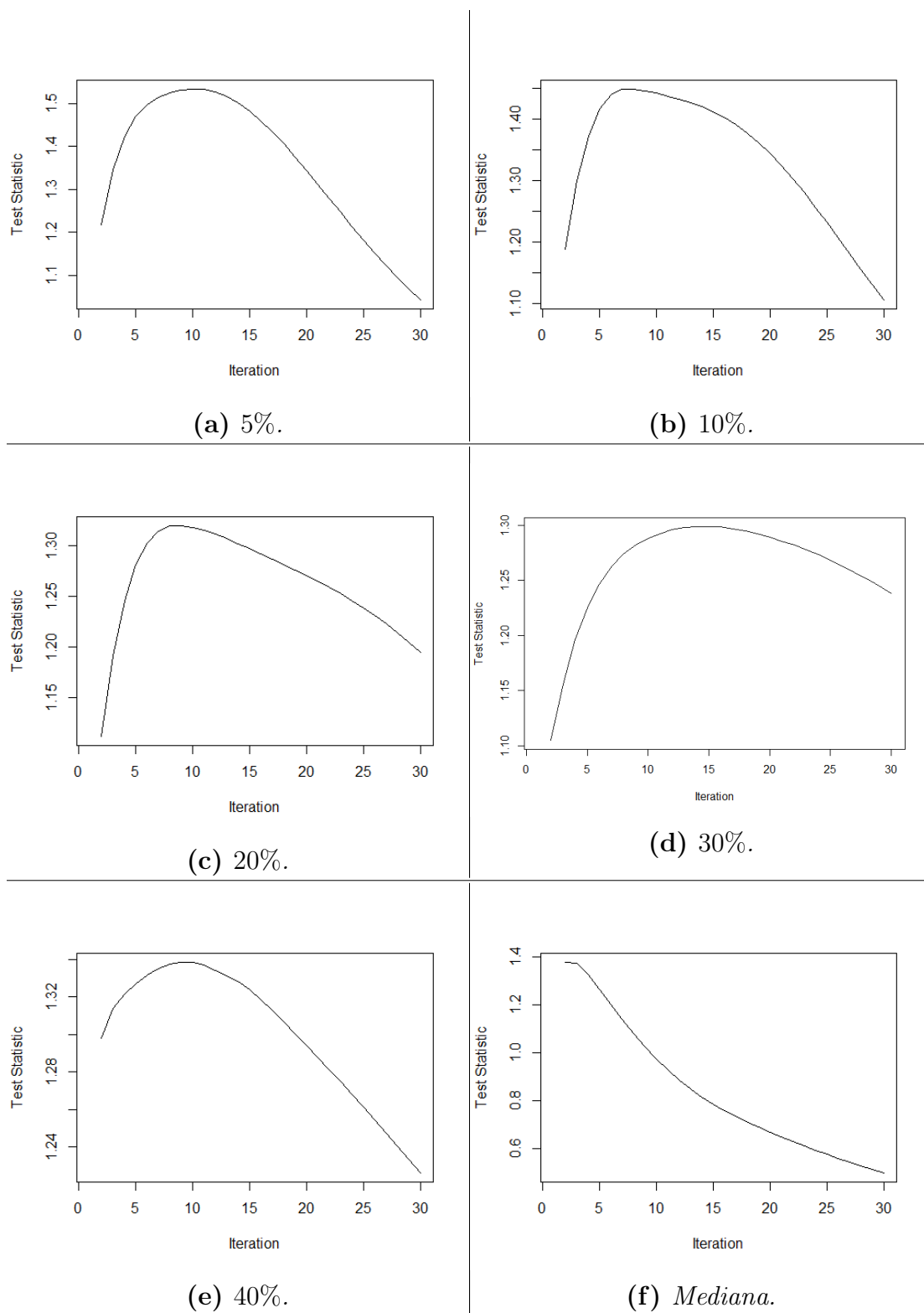
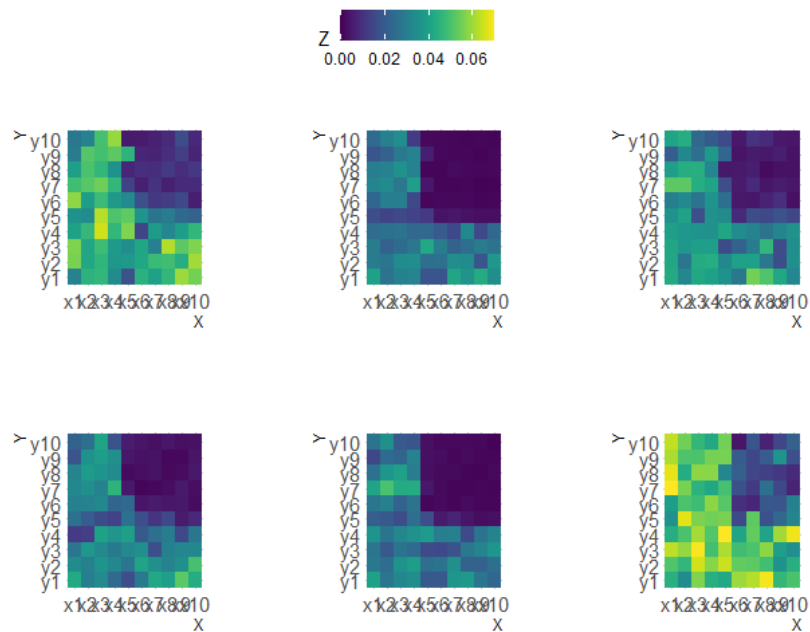
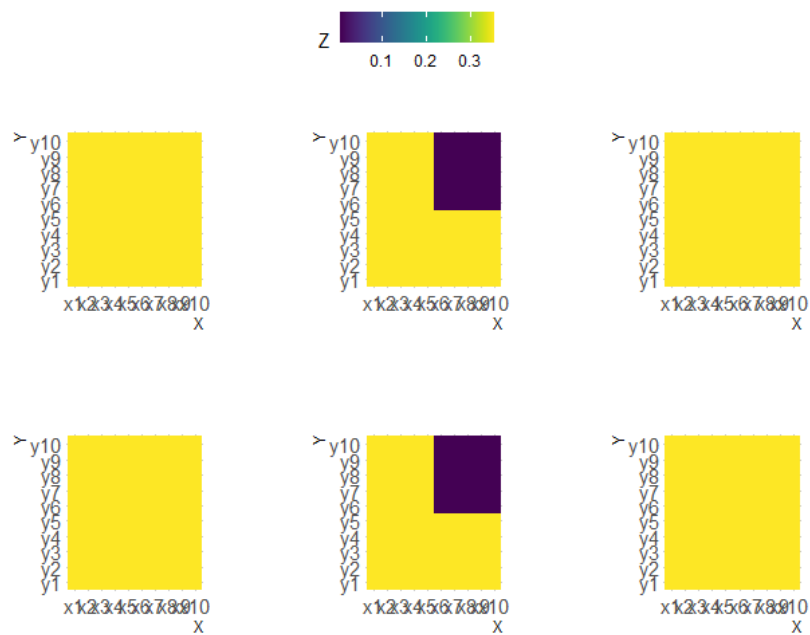


Figura 7.0.14: *Statistica test in funzione del numero di iterazioni dopo winsorizzazione in ciascuna coda della percentuale di valori estremi riportata in didascalia. Si riporta inoltre anche il caso relativo alla mediana di tutti i valori considerati.*

7.0.3 Algoritmo PoCA



(a) *PoCA*



(b) *Reale*

Figura 7.0.15: Mappe di calore relative al confronto tra i risultati ottenuti dall'algoritmo *PoCA* e i dati simulati per il volume.

Le mappe di calore riportate in Figura 7.0.15 si riferiscono all'output ottenuto dall'algoritmo PoCA, in riferimento ad un problema analogo a quello precedentemente esplorato. Anche in questo caso si assiste ad una risoluzione non ottimale per quanto riguarda i valori lungo l'asse z . Il cubo di composizione differente, collocato nella realtà nel terzo e quarto strato, viene rilevato e visualizzato indiscriminatamente all'interno di tutti gli strati verticali in cui viene suddiviso il volume. Ciò si traduce in un'incapacità concreta dell'algoritmo in questione di localizzare con precisione un corpo estraneo all'interno del volume da analizzare. Infatti, imputando l'evento totale di scattering soltanto ad un unico punto, viene persa inevitabilmente molta informazione utile alla ricostruzione tridimensionale dell'oggetto. Ciascuna traiettoria contribuisce solamente alla stima di un voxel, mentre il segnale dei rimanenti cubi elementari rimane essenzialmente nullo.

Intuitivamente, perciò, è necessario considerare un campione molto numeroso di muoni incidenti per ottenere una ragionevole risoluzione dell'immagine. Al contempo, però, permarrà inevitabilmente una componente di rumore dovuta all'incertezza che caratterizza il punto PoCA. Per costruzione, infatti, questo viene determinato minimizzando la distanza tra le due traiettorie ricostruite nello spazio, incidente e uscente. Ma posizione e angolo dei punti di incidenza e uscita, esito di un adattamento lineare, sono affetti da incertezza di misurazione; questa viene di conseguenza propagata anche alle coordinate che localizzano il punto PoCA, da cui la scarsa risoluzione osservata.

7.1 Confronto complessivo

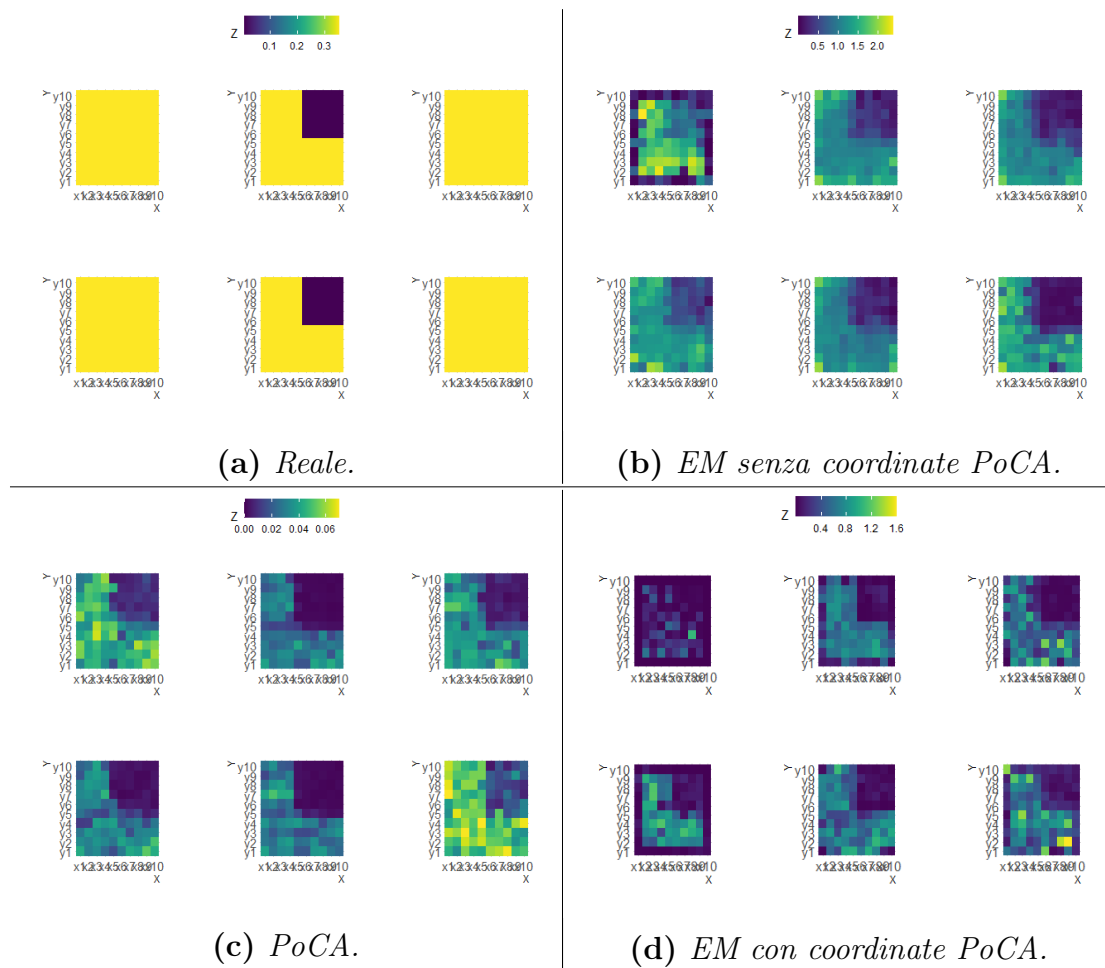


Figura 7.1.1: Mappe di calore relative al confronto complessivo tra i risultati ottenuti dall' algoritmo PoCA, dall' algoritmo EM in entrambe le versioni esplicitate e i dati simulati per il volume.

Vengono riportate le mappe di calore relative al confronto tra il metodo PoCA e l' algoritmo EM.

Innanzitutto, in entrambi i casi è discernibile la presenza di un cubo a diversa composizione all' interno del volume totale composto da berillio. Quello che si può rilevare, nel caso dell' algoritmo EM, riguarda una lieve diminuzione dell' incertezza legata alla risoluzione lungo l' asse verticale del volume. Tralasciando gli artefatti visibili al bordo di alcune immagini, infatti, si può appurare l' assenza del quadrato relativo al volume di piombo nel primo strato di volume.

Ciò può essere dovuto alla migliore capacità intrinseca dell'algoritmo EM di sfruttare l'informazione a disposizione relativa alla traiettoria di ciascun muone considerato. Ogni particella, infatti, contribuisce all'aggiornamento della stima del parametro X_0 di ciascun voxel intersecato durante l'interazione con il volume. L'algoritmo PoCA, al contrario, assegna l'esito dello scattering al massimo ad un cubo elementare, perdendo inevitabilmente molta informazione utile alla ricostruzione d'immagine.

Sebbene entrambi gli algoritmi rispondano positivamente allo scopo di rilevare la presenza di volumi estranei all'interno di volumi più grandi, l'algoritmo EM, nel complesso, si è rilevato più esaustivo del metodo PoCA. Esso, infatti, è più accurato nel fornire la localizzazione del volume estraneo nello spazio tridimensionale.

8 Conclusioni

Il presente lavoro si inserisce nel contesto dell'ottimizzazione di apparati per la tomografia muonica. La configurazione studiata e presentata è stata scelta in modo tale da consentire lo sviluppo di uno strumento compatibile con il pacchetto TomOpt della collaborazione MODE. Si tratta di un pacchetto molto esteso che comprende varie sezioni, finalizzate all'ottimizzazione del processo di acquisizione e processazione del dato nel campo della muografia.

Ciò che è di interesse, in questo caso specifico, riguarda la discriminazione di volumi a composizione diversa. Si analizza l'esito del fenomeno di scattering, corrispondente a deviazione angolare e spostamento della traiettoria del muone a seguito dell'interazione con un volume passivo. Nel contesto della tomografia muonica per scattering, infatti, molti algoritmi per la ricostruzione di immagine sono stati esplorati e sono reperibili in letteratura. Generalmente, questi utilizzano informazioni quali le caratteristiche della traiettoria incidente e di quella uscente della particella dal volume da analizzare. Lo scopo spesso riguarda l'inferenza sulle proprietà e caratteristiche del volume attraversato.

Attualmente in TomOpt l'inferenza sulla composizione del volume passivo avviene tramite il metodo PoCA. Basandosi su considerazioni essenzialmente geometriche, tale algoritmo imputa il fenomeno di scattering unicamente ad un punto nello spazio. Questa rappresenta una semplificazione del problema in quanto nella realtà il muone segue un percorso stocastico, esito delle molteplici deviazioni che avvengono durante l'attraversamento del volume passivo.

Il fine ultimo di questa ricerca è la produzione di un algoritmo che possa essere integrato nel pacchetto, come alternativa comparabile con

il già presente metodo PoCA. Si intende, perciò, produrre un algoritmo per l'inferenza sulla composizione del volume passivo, generato da un modello già implementato in TomOpt. Si utilizzano le informazioni relative a un flusso di muoni proveniente da diverse angolazioni rispetto allo zenit e incidente sulla superficie superiore del volume. Lo scopo è ottenere una ricostruzione dell'immagine tridimensionale, discriminando volumi a composizione diversa.

Per la risoluzione del problema di imaging sopracitato, in questo lavoro si è studiato e si è implementato un algoritmo EM. L'algoritmo richiede di inizializzare il valore del parametro X_0 da stimare per ciascuno dei voxels elementari che compongono il volume complessivo. La stima viene quindi aggiornata iterativamente durante le ripetizioni del ciclo che compone l'algoritmo. Dagli studi di simulazione presentati si assiste progressivamente alla definizione e discriminazione di zone adiacenti a composizione diversa. Nel complesso, quindi, l'algoritmo EM proposto si è rivelato competitivo con l'alternativo metodo PoCA.

Possibili sviluppi futuri riguardano la generalizzazione del modello per includere il caso più realistico di distribuzione non perfettamente Gaussiana. È noto, infatti, che la distribuzione congiunta di deviazione angolare e spostamento, esito del processo di scattering, è caratterizzata da code più pesanti della normale. Qui, invece, la trattazione è stata semplificata considerando una Gaussiana congiunta. Inoltre, un eventuale miglioramento del modello contemplerebbe l'inclusione di una priori nella verosimiglianza sul valore del momento di un singolo muone. Nel presente lavoro il momento è stato incluso come costante per ciascuna particella appartenente al fascio generato dal modello.

Bibliografia

- [1] S. Chatzidakis, S. Chrysikopoulou, and L. H. Tsoukalas. *Developing a cosmic ray muon sampling capability for muon tomography and monitoring applications*. Nucl. Instr. Meth. A, 804: 33–42, 2015. doi:<http://dx.doi.org/10.1016/j.nima.2015.09.033>.
- [2] A. P. Dempster, N. M. Laird, and D. B. Rubin. *Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm*.
- [3] T. Dorigo, A. Giammanco, P. Vischia (editors) MODE Collaboration. *Toward the End-to-End Optimization of Particle Physics Instruments with Differentiable Programming: a White Paper*. 2022. arXiv:2203.13818v1.
- [4] C. F. Jeff Wu. *On the convergence properties of the EM algorithm*. The Annals of Statistics, Vol. 11, No. 1, 95-103. 1983.
- [5] R. J. A. Little and D. B. Rubin. *Statistical Analysis with Missing Data, Second Edition*. Wiley, 2002. DOI:10.1002/9781119013563.
- [6] Z. Liu, S. Chatzidakis, et al. *Muon-computed tomography using PoCA trajectory for imaging spent nuclear fuel in dry storage casks*. ICAPP, 8-11, 2018.
- [7] G. J. McLachlan and T. Krishnan. *The EM Algorithm and Extensions, Second Edition*. Wiley, 2007. DOI:10.1002/9780470191613.
- [8] L. Pace, A. Salvan. *Introduzione alla Statistica - II - Inferen-*

za, verosimiglianza, modelli. CEDAM. 2001.

[9] L. J. Schultz et al. *Statistical Reconstruction for Cosmic Ray Muon Tomography*. IEEE transactions on image processing, Vol. 16, No. 8, 1985-1993. 2007.

[10] L. J. Schultz et al. *Image reconstruction and material z discrimination via cosmic ray muon radiography*. Nucl. Instr. Meth. A, 519(3): 687–694, 2004. doi:<https://doi.org/10.1016/j.nima.2003.11.035>.

[11] R. L. Siddon. *Fast calculation of the exact radiological path for a three-dimensional CT array*. Medical Physics, Vol. 12, No. 2, 252-255. 1985.

[12] B. L. Welch. *The Significance of the Difference Between Two Means when the Population Variances are Unequal*. Biometrika Vol. 29, No. 3/4, 350-362, 1938. <https://doi.org/10.2307/2332010>.