

# Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice

## Laboratorium 1

### Arytmetyka Komputerowa

### Sprawozdanie

Yurii Vyzhha

5 listopada 2017

#### Zadanie 1 Metoda Gaussa-Jordana

```
function b = GaussJordan(A, b)
    [n,~] = size(A);
    for k = 1:n
        for i = k+1:n
            xmult = A(i,k)/A(k,k);
            for j = k+1:n
                A(i,j) = A(i,j) - xmult*A(k,j);
            end
            b(i) = b(i) - xmult*b(k);
        end
        for i = k-1:-1:1
            xmult = A(i,k)/A(k,k);
            for j = k+1:n
                A(i,j) = A(i,j) - xmult*A(k,j);
            end
            b(i) = b(i) - xmult*b(k);
        end
    end
    for k = 1:n
        b(k) = b(k)/A(k,k);
    end
end
```

Metoda ta działa w podobny sposób do zwykłej metody Gaussa. Różni się głównie tym, że w algorytmie Gaussa-Jordana eliminujemy elementy nie tylko "idąc w dół", a i "idąc w górę". Inną cechą też jest dzielenie elementów  $b_i$  przez odpowiednie im elementy  $A_{ii}$ , gdzie  $1 \leq i \leq n$ . Dla sprawdzenia poprawności tej funkcji używam następującej funkcji:

```
function a = CheckGaussJordan(A,b)
    x = GaussJordan(A,b);
    [~,n] = size(x);
    a = true;
    for i = 1:n
        sum = 0;
```

```

        for j = 1:n
            sum = sum + A(i,j)*x(j);
        end
        if abs(sum - b(i)) > 1e12*eps(min(abs(sum),abs(b(i))))
            disp(sum);
            disp(b(i));
            a = false;
            break
        end
    end
end
end

```

Funkcja ta podstawia znalezione pierwiastki do równań i sprawdza czy nie ma sprzeczności. Następną częścią tego zadania było porównanie szybkości działania napisanej oraz bibliotecznej funkcji dla macierzy rozmiaru  $500 \times 500$ . Niżej podaję wyniki dla pięciu różnych losowych macierzy:

Moja	Biblioteczna
0.805022	3.717958
0.724206	3.734668
0.717710	3.695297
0.703726	3.708560
0.690628	3.735460

To, że biblioteczna funkcja działa wolniej od napisanej przeze mnie można wyjaśnić tym faktem, że ta pierwsza prawdopodobnie sprawdza rozmiary macierzy, czy tą macierz da się obliczyć etc., czego nie robi moja funkcja.

## Zadanie 2 Faktoryzacja LU

```

function [p, A] = LU(A)
    [n,~] = size(A);
    s = zeros(1,n);
    p = zeros(1,n);
    for i = 1:n
        s(i) = max(abs(A(i,:)));
        p(i) = i;
    end
    for k = 1:n-1
        rmax = 0;
        for i = k+1:n
            r = abs(A(i,k)/s(i));
            if r > rmax
                rmax = r;
                imax = i;
            end
        end
        if k ~= imax
            tmp = P(k);
            p(k) = p(imax);
            p(imax) = tmp;
            A([k imax],:) = A([imax k],:);
        end
    end
end

```

```

        for i = k+1:n
            xmult = A(i,k)/A(k,k);
            A(i,k) = xmult;
            for j = k+1:n
                A(i,j) = A(i,j) - xmult*A(k,j);
            end
        end
    end
end
end

```

Funkcja działa w następujący sposób. Najpierw tworzymy dwa wektory:  $s$  oraz  $p$ .  $s$  jest wektorem skalowania takim, że  $s_i = \max_{1 \leq j \leq n} |A_{ij}|$ .  $p$  jest wektorem reprezentującym macierz zamiany rzędów  $P$ . Tą macierz można otrzymać najpierw tworząc macierz zerową  $n \times n$  oraz w miejscach tej macierzy  $(i, p(i))$  wpisać jedynki. W głównej pętli  $1 \leq k \leq n-1$ , gdzie  $n$  to rozmiar macierzy  $A$ , szukamy elementu  $rmax$  takiego, że  $rmax = \max_{k+1 \leq i \leq n} \left| \frac{A_{ik}}{s_i} \right|$ . W danej interakcji pętli,  $rmax$  jest pivotem, a  $imax$  jest indexem rzędu, w którym go znaleźliśmy. Jeśli  $imax \neq k$  to zamieniamy rzędy miejscami, zapisując zmiany w vector  $P$ . Następnie w pętlin  $i = k+1 : n$  obliczamy współczynnik  $xmult$ , za pomocą którego redukujemy rzędy od  $k+1$  do  $n$ . Ten współczynnik wpisujemy na miejsce  $A_{ik}$ ; on będzie elementem macierzy  $L$ . Po wykonaniu się programu dostajemy na wyjściu wektor  $P$  oraz macierz zmienioną macierz  $A$ , w której są jednocześnie zapisane macierze  $L$  oraz  $U$ .

Dla sprawdzenia poprawności danej funkcji, napisałem program, który sprawdza, czy dla  $P$ ,  $L$  i  $U$ , otrzymanych jako wyniki funkcji faktoryzującej, zachodzi  $P * A = L * U$ .

```

function a = CheckLU(A)
    [n,~] = size(A);
    [p, lu] = LU(A);
    P = zeros(n);
    for i = 1:n
        P(i,p(i)) = 1;
    end
    L = eye(n);
    U = zeros(n);
    for i = n:-1:1
        for j = n:-1:i
            U(n-j+1,n-i+1) = lu(n-j+1,n-i+1);
        end
    end
    for i = 2:n
        for j = 1:i-1
            L(i,j) = lu(i,j);
        end
    end
    X = P*A;
    Y = L*U;
    a = true;
    for i = 1:n
        for j = 1:n
            if abs(X(i,j)-Y(i,j)) > 1e12*eps(min(abs(X(i,j)),abs(Y(i,j))))
                a = false;
                break
            end
        end
    end
end

```

```

        end
    end
end
end

```

W tej funkcji oblicamy  $P$ ,  $L$  i  $U$  za pomocą wspomnianej wyżej funkcji oraz tworzymy nowe macierze  $X = P * A$  i  $Y = L * U$ . Dalej porównujemy każdy odpowiedni element macierzy  $X$  oraz  $Y$  i zwracamy "prawdę", jeśli  $X_{ij}$  jest prawie równe  $Y_{ij}$  dla każdego  $1 \leq i \leq n$  oraz  $1 \leq j \leq n$ .

### Zadanie 3 Analiza obwodu elektrycznego

Działanie programu, który rozwiązuje dane zadanie, krótko można opisać w następujący sposób:

1. Wczytaj z pliku wierzchołki i krawędzie i stwórz z nich graf opisujący obwód elektryczny.
2. Znajdź wszystkie cykle w grafie.
3. Załóż kierunek przepływu prądu sprowadzając wygenerowane cykle do postaci skierowanej.
4. Posortuj te cykle według ich długości.
5. Zostaw tylko te cykle, które zawierają nowe krawędzie.
6. Dla każdej krawędzi zapamiętaj cykl, które przechodzą przez nią.
7. Stwórz macierz  $A$  uwzględniając wszystkie prądy płynące przez każdy obwód (cykl) oraz wektor  $b$  uwzględniając wszystkie źródła napięcia w obwodzie.
8. Rozwiąż układ  $A * b = x$ . W wektorze  $x$  mamy prądy, które płyną w obwodach.
9. Policz napięcie na każdej krawędzi, uwzględniając wszystkie prądy płynące przez tę krawędź. Jeśli napięcie jest ujemne, odwróć jej kierunek.
10. Narysuj wczytany graf dopisując wartości napięć na krawędziach.

Niżej podaję krokowe rozwiązanie problemu wraz z kodem.

1. Definicja grafu, wierzchołków i krawędzi.

```

public class Vertex {
    private int id;

    Vertex(int id) {
        this.id = id;
    }

    int getId() {
        return this.id;
    }

    @Override
    public String toString() {
        return "(" + id + ")";
    }
}

```

```

@Override
public int hashCode() {
    final int prime = 31;
    int result = 1;
    result = prime * result + id;
    return result;
}

@Override
public boolean equals(Object obj) {
    if (this == obj)
        return true;
    if (obj == null)
        return false;
    if (getClass() != obj.getClass())
        return false;
    Vertex other = (Vertex) obj;
    return id == other.id;
}
}

```

Każdy wierzchołek ma unikalne id, stąd przyjąłem że dwa wierzchołki są sobie równe jeżeli ich id są równe.

```

public class Edge {
    private final Vertex source;
    private final Vertex destination;
    private double weight;
    private boolean isVoltage;
    private int voltageDirection;

    public Edge(Vertex source, Vertex destination) {
        this.source = source;
        this.destination = destination;
        this.weight = 0.0;
        this.isVoltage = false;
        this.voltageDirection = 0; // - -> + == > 0; + -> - == < 0
    }

    public Edge(Vertex source, Vertex destination, double weight) {
        this.source = source;
        this.destination = destination;
        this.weight = weight;
        this.isVoltage = false;
        this.voltageDirection = 0;
    }

    int getVoltageDirection() {
        return voltageDirection;
    }

    void setVoltageDirection(int voltageDirection) {
        this.voltageDirection = voltageDirection;
    }
}

```

```

public Vertex getDestination() {
    return destination;
}

public Vertex getSource() {
    return source;
}

public double getWeight() {
    return weight;
}

public boolean isVoltage() {
    return isVoltage;
}

void setVoltage() {
    isVoltage = true;
}

@Override
public String toString() {
    return source + "-" + destination;
}

@Override
public int hashCode() {
    int x = source.getId();
    int y = destination.getId();
    return ((x + y)*(x + y + 1))/2 + y;
}

@Override
public boolean equals(Object obj) {
    if (this == obj)
        return true;
    if (obj == null)
        return false;
    if (getClass() != obj.getClass())
        return false;
    Edge other = (Edge) obj;
    if (destination == null) {
        if (other.destination != null)
            return false;
    } else if (!destination.equals(other.destination))
        return false;
    if (source == null) {
        if (other.source != null)
            return false;
    } else if (!source.equals(other.source))
        return false;
    return true;
}

```

```
}
```

```
}
```

Pole `isVoltage` mówi o tym, czy na krawędzi znajduje się źródło napięcia czy rezystor. Jeśli na krawędzi znajduje się źródło napięcia, to `voltageDirection` wskazuje kierunek napięcia.

Jako funkcję hashującą wybrałem funkcję pary Kantora.

Klasa odpowiedzialna za wczytywanie grafu:

```
public class GraphReader {
    private File file;
    private MyGraph graph;

    public GraphReader(File file) {
        this.file = file;
        graph = new MyGraph();
    }

    public void readFromFile() throws FileNotFoundException {
        Scanner scanner = new Scanner(new FileInputStream(file));
        boolean isVoltageEdge = false;
        while (scanner.hasNextLine()) {
            String line = scanner.nextLine();
            if (line.trim().length() == 0) {
                isVoltageEdge = true;
                continue;
            }
            String[] data = line.split(" ");
            int vertex1Id = Integer.parseInt(data[0]);
            int vertex2Id = Integer.parseInt(data[1]);
            double weight = Double.parseDouble(data[2]);
            if (isVoltageEdge) {
                graph.addBidirectionalVoltageEdge(vertex1Id, vertex2Id, weight);
            } else {
                graph.addBidirectionalEdge(vertex1Id, vertex2Id, weight);
            }
        }
    }

    public MyGraph getGraph() {
        return graph;
    }
}
```

Mój program pozwala na wczytanie więcej niż jednego źródła napięcia.

**2** Dla znalezienia wszystkich cykli wykorzystałem klasę *CycleUtil* napisaną przez *lucaslouca*, znajdująca się pod adresem: <https://github.com/lucaslouca/graph-cycles>. Metoda *listAllCycles()* zwraca listę cykli jako listę grafów nieskierowanych.

**3** Klasa *CycleTransform* jest odpowiedzialna za sprowadzanie cykli do postaci, z której możemy już wczytać informacje do macierzy.

```

public class CycleTransform {
    private List<MyGraph> cyclesAsGraphList;

    public CycleTransform(List<MyGraph> cyclesList) {
        this.cyclesAsGraphList = cyclesList;
    }

    public List<List<Edge>> getCyclesFromGraphs() {
        List<List<Edge>> cycles = new ArrayList<>();
        for(MyGraph g : cyclesAsGraphList) {
            cycles.add(g.getEdges());
        }
        return cycles;
    }

    public List<List<Edge>> removeRedundantEdges(List<List<Edge>> rawCycles) {
        int currentSourceId;
        int currentDestinationId;
        List<List<Edge>> resultCycles = new ArrayList<>();
        for (int i = 0; i < rawCycles.size(); i++) {
            List<Edge> currentRawCycle = rawCycles.get(i);
            resultCycles.add(new ArrayList<>());
            List<Edge> currentResultCycle = resultCycles.get(i);
            currentSourceId = currentRawCycle.get(0).getSource().getId();
            currentDestinationId = currentRawCycle.get(0).getDestination().getId();
            int loopInv = currentRawCycle.size() / 2;

            for (int k = 0; k < loopInv; k++) {
                for (int j = 0; j < currentRawCycle.size(); j++) {
                    if(currentRawCycle.get(j).getSource().getId() == currentSourceId &&
                        currentRawCycle.get(j).getDestination().getId() == currentDestinationId) {
                        currentResultCycle.add(currentRawCycle.remove(j));
                        break;
                    }
                }
            }
            for (int j = 0; j < currentRawCycle.size(); j++) {
                if(currentRawCycle.get(j).getDestination().getId() == currentSourceId
                    currentRawCycle.get(j).getSource().getId() == currentDestinationId) {
                    currentRawCycle.remove(j);
                    break;
                }
            }
            for (Edge aCurrentRawCycle : currentRawCycle) {
                if (aCurrentRawCycle.getSource().getId() == currentDestinationId) {
                    currentSourceId = aCurrentRawCycle.getSource().getId();
                    currentDestinationId = aCurrentRawCycle.getDestination().getId();
                    break;
                }
            }
        }
        return resultCycles;
    }
}

```



```

public void sortCyclesByLength(List<List<Edge>> cycles) {
    cycles.sort((l1, l2) -> (l1.size() - l2.size()));
}

public void removeRedundantCycles(List<List<Edge>> cycles) {
    Set<Edge> appearedEdgesSet = new HashSet<>();
    boolean foundNewEdge = false;
    for (int i = 0; i < cycles.size(); i++) {
        for (Edge e : cycles.get(i)) {
            if(isNewEdge(appearedEdgesSet, e)) {
                appearedEdgesSet.add(e);
                foundNewEdge = true;
            }
        }
        if(!foundNewEdge) {
            cycles.remove(i);
            i--;
        }
        foundNewEdge = false;
    }
}

boolean isNewEdge(Set<Edge> appearedEdgesSet, Edge e) {
    return !(appearedEdgesSet.contains(e) ||
        appearedEdgesSet.contains(new Edge(e.getDestination(), e.getSource())));
}
}

```

Metoda *removeRedundantEdges()* usuwa powtarzające się krawędzie oraz ustawia ich w kierunku, który wybieramy losowo. Ta losowość nie ma wpływu na poprawność działania programu, musimy po prostu zapamiętać kierunek dla tego cyklu względem innych.

4 Metoda *sortCyclesByLength()* sortuje krawędzi według długości. Robimy to dla tego, żeby zostawić tylko najkrótsze cykle z tych, które nam potrzebne. To trochę przyspiesza działanie programu.

5 Metoda *removeRedundantCycles()* przechodzi po wszystkich cyklach i zapamiętuje napotkane krawędzie. Jeśli w kolejnej iteracji pętli programu napotkaliśmy cykl, który zawiera wyłącznie już napotkane krawędzie to usuwamy go. W taki sposób pozbawiamy się nadmiarowości przy tworzeniu macierzy.

6 Tworzeniem i wypełnianiem macierzy  $A$  oraz wektora  $b$  zajmuje się klasa *MatrixPreparer*.

```

public class MatrixPreparer {
    private List<List<Edge>> cycles;
    private double[][] matrix;
    private double[][] vector;
    private LinkedHashMap<Edge, List<CurrentDirection>> edgeCurrentsMap;

    public MatrixPreparer(List<List<Edge>> cycles) {
        this.cycles = cycles;
    }
}

```

```

        int n = cycles.size();
        matrix = new double[n][n];
        vector = new double[n][n];
        for (int i = 0; i < matrix.length; i++) {
            for (int j = 0; j < matrix[i].length; j++) {
                matrix[i][j] = 0.0;
            }
            vector[i][0] = 0.0;
        }
        edgeCurrentsMap = new LinkedHashMap<>();
    }

    public void fillMap() {
        for (int i = 0; i < cycles.size(); i++) {
            List<Edge> cycle = cycles.get(i);
            for (Edge edge : cycle) {
                if (!edgeCurrentsMap.containsKey(edge)) {
                    List<CurrentDirection> currentDirections = new ArrayList<>();
                    currentDirections.add(new CurrentDirection(i, edge.getWeight()));
                    edgeCurrentsMap.put(edge, currentDirections);
                } else {
                    edgeCurrentsMap.get(edge).add(new CurrentDirection(i, edge.getWeight()));
                }
            }
        }
    }

    public void fillMatrix() {
        for (int i = 0; i < cycles.size(); i++) {
            fillRow(i);
        }
    }

    void fillRow(int i) {
        List<Edge> currentRow = cycles.get(i);
        for (Edge currentEdge : currentRow) {
            if (currentEdge.isVoltage()) {
                if (currentEdge.getVoltageDirection() < 0) {
                    vector[i][0] = currentEdge.getWeight();
                } else {
                    vector[i][0] = -currentEdge.getWeight();
                }
            } else {
                if (currentEdge.getWeight() != 0.0) {
                    matrix[i][i] += currentEdge.getWeight();
                    checkInfoAboutEdge(i, currentEdge);
                }
            }
        }
    }

    void checkInfoAboutEdge(int i, Edge currentEdge) {

```

```

        Edge reversedEdge = new Edge(
            currentEdge.getDestination(),
            currentEdge.getSource(),
            currentEdge.getWeight()
        );
        List<CurrentDirection> currents;
        if (edgeCurrentsMap.containsKey(currentEdge)) {
            currents = edgeCurrentsMap.get(currentEdge);
            for (CurrentDirection current : currents) {
                int j = current.getCurrentNum();
                if (i != j) {
                    matrix[i][j] += current.getWeight();
                }
            }
        }
        if (edgeCurrentsMap.containsKey(reversedEdge)) {
            currents = edgeCurrentsMap.get(reversedEdge);
            for (CurrentDirection current : currents) {
                int j = current.getCurrentNum();
                if (i != j) {
                    matrix[i][j] -= current.getWeight();
                }
            }
        }
    }

    public LinkedHashMap<Edge, List<CurrentDirection>> getEdgeCurrentsMap() {
        return edgeCurrentsMap;
    }

    public double[][] getMatrix() {
        return matrix;
    }

    public double[][] getVector() {
        return vector;
    }
}

```

*fillMap()* zapamiętuje numery cykliów dla każdego wierzchołka. Przechowywanie numerów odbywa się w obiektach klasy *CurrentDirection*.

```

public class CurrentDirection {
    private int currentNum;
    private double weight;

    CurrentDirection(int c, double w) {
        this.currentNum = c;
        this.weight = w;
    }

    public int getCurrentNum() {
        return currentNum;
    }
}

```

```

    double getWeight() {
        return weight;
    }
}

```

7 Metoda *fillMatrix()* wypełnia macierz  $A$  i wektor  $b$  przez wywołanie pomocniczych metod *fillRow()* oraz *checkInfoAboutEdge()*. *fillRow()* wypełnia pozycję  $A_{ii}$  oraz  $b_i$ , gdzie  $0 \leq i < n$ . *checkInfoAboutEdge()* wypełnia pozostałe pozycje.

8 Dla rozwiązywania otrzymanego układu równań, korzystałem z metody *solve()* z biblioteki algebry liniowej JAMA.

```

Matrix a = new Matrix(matrixPreparer.getMatrix());
Matrix b = new Matrix(matrixPreparer.getVector());
Matrix x = a.solve(b);

```

9 Dla tworzenia grafu dla wizualizacji stosuję klasę *VisualGraphMaker*.

```

public class VisualGraphMaker {
    private Graph<Vertex, Edge> resultGraph;
    private List<Vertex> vertices;
    private Matrix b;
    private LinkedHashMap<Edge, List<CurrentDirection>> edgeCurrentsMap;

    public VisualGraphMaker(
        Matrix b,
        List<Vertex> vertices,
        LinkedHashMap<Edge, List<CurrentDirection>> edgeCurrentsMap
    )
    {
        this.b = b;
        resultGraph = new DirectedSparseGraph<>();
        this.vertices = vertices;
        this.edgeCurrentsMap = edgeCurrentsMap;
    }

    public void createGraph() {
        for (Vertex v : vertices) {
            resultGraph.addVertex(v);
        }
        Set<Edge> visitedEdges = new HashSet<>();
        for (Map.Entry<Edge, List<CurrentDirection>> entry : edgeCurrentsMap.entrySet()) {
            Edge edge = entry.getKey();
            Edge reversedEdge = new Edge(
                edge.getDestination(),
                edge.getSource(),
                edge.getWeight()
            );
            if(!visitedEdges.contains(reversedEdge)) {
                visitedEdges.add(edge);
                List<CurrentDirection> directions = entry.getValue();
                double result = 0.0;
            }
        }
    }
}

```

```

        if(edge.isVoltage()) {
            result = edge.getWeight();
        } else {
            for (CurrentDirection direction : directions) {
                int i = direction.getCurrentNum();
                result += b.get(i, 0);
            }
            if(edgeCurrentsMap.containsKey(reversedEdge)) {
                List<CurrentDirection> otherDirections =
                    edgeCurrentsMap.get(reversedEdge);
                for (CurrentDirection direction : otherDirections) {
                    int i = direction.getCurrentNum();
                    result -= b.get(i, 0);
                }
            }
            result = result * edge.getWeight();
        }
        if (result > 0) {
            resultGraph.addEdge(
                new Edge(edge.getSource(), edge.getDestination(), result),
                edge.getSource(),
                edge.getDestination()
            );
        } else {
            resultGraph.addEdge(
                new Edge(edge.getDestination(), edge.getSource(), -result),
                edge.getDestination(),
                edge.getSource()
            );
        }
    }
}

public Graph<Vertex, Edge> getResultGraph() {
    return resultGraph;
}
}

```

W tej klasie metoda *createGraph()* przechodzi po wszystkich krawędziach, oblicza sumę wszystkich prądów, przechodzących przez tę krawędź, i tworzy nową krawędź z wagą równą obliczonej sumie razy rezystancji. Kierunek krawędzi zależy o tego czy otrzymany wynik jest większy od zera. W taki sposób mamy możliwość graficznie reprezentować kierunek przepływu prądu.

**10** Dla rysowania grafu korzystam z biblioteki Jung. Wszystkie sprawy związane z rysowaniem grafu wykonują się w klasie *Visualizer*.

```

public class Visualizer {

    private BasicVisualizationServer<Vertex, Edge> basicVisualizationServer;

    public Visualizer(Graph<Vertex, Edge> graph) {
        Layout<Vertex, Edge> layout = new FRLayout<>(graph);
        this.basicVisualizationServer = new BasicVisualizationServer<>(layout);
    }
}

```

```

    }

    public void setContext() {
        DecimalFormat df = new DecimalFormat("#.##");
        basicVisualizationServer
            .getRenderContext()
            .setEdgeLabelTransformer(edge -> df.format(edge.getWeight()));
        basicVisualizationServer
            .getRenderContext()
            .setVertexLabelTransformer(Vertex::toString);
        basicVisualizationServer.setPreferredSize(new Dimension(900, 700));
    }

    public void initializeFrame() {
        JFrame frame = new JFrame("graph");
        frame.setDefaultCloseOperation(WindowConstants.EXIT_ON_CLOSE);
        frame.getContentPane().add(basicVisualizationServer);
        frame.pack();
        frame.setLocationRelativeTo(null);
        frame.setVisible(true);
    }
}

```

Niżej przedstawiam przykładowy rysunek grafu.

