

### §3. Пределы

1°. Предел последовательности. Число  $a$  называется *пределом последовательности*  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

если для любого  $\varepsilon > 0$  существует число  $N = N(\varepsilon)$  такое, что

$$|x_n - a| < \varepsilon \text{ при } n > N.$$

Пример 1. Показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2 \quad (1)$$

Решение. Составим разность

$$\frac{2n+1}{n+1} - 2 = -\frac{1}{n+1}$$

Оценивая эту разность по абсолютной величине, будем иметь:

$$\left| \frac{2n+1}{n+1} - 2 \right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon. \quad (2)$$

если

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 = N(\varepsilon).$$

Таким образом, для каждого положительного числа  $\varepsilon$  найдется число  $N + \frac{1}{\varepsilon} - 1$  такое, что при  $n > N$  будем иметь место неравенство (2). Следовательно, число 2 является пределом последовательности  $x_n = (2n+1)/(n+1)$ , т.е. справедлива формула (1).

2°. Предел функции. Говорят, что функция  $f(x) \rightarrow A$  при  $x \rightarrow a$  ( $A$  и  $a$  - числа), или

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A,$$

если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\sigma = \sigma(\varepsilon) > 0$  такое, что

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad \text{при} \quad 0 < |x - a| < \sigma$$

Аналогично

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A.$$

если  $|f(x) - A| < \varepsilon$  при  $|x| > N(\varepsilon)$ .

Употребляется также условная запись

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty,$$

которая обозначает, что  $|f(x)| > E$  при  $0 < |x - a| < \sigma(E)$ , где  $E$  - произвольное положительное число.

3°. **Односторонние пределы.** Если  $x < a$  и  $b \rightarrow a$ , то условно пишут  $x \rightarrow a - 0$ ; аналогично, если  $x > a$  и  $x \rightarrow a$ , то это записывается так:  $x \rightarrow a + 0$ . Числа

$$f(a - 0) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) \quad \text{и} \quad f(a + 0) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$$

называется соответственно *пределом слева* функции  $f(x)$  в точке  $a$  и *пределом справа* функции  $f(x)$  в точке  $a$  (если эти числа существуют).

Для существования предела функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow a$  необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство.

$$f(a - 0) = f(a + 0)$$

Если существует  $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)$  и  $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$  то имеют место следующие теоремы:

$$1) \lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) + f_2(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) + \lim_{x \rightarrow a} f_2(x);$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) \cdot f_2(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f_2(x);$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)}{\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)} \quad (\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \neq 0).$$

Частое применение находят следующие пределы:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{a \rightarrow 0} \sqrt[a]{1+a} = e = 2,71828 \dots$$

**Пример 2.** Найти пределы справа и слева функции

$$f(x) = \arctan \frac{1}{x} \quad \text{при } x \rightarrow 0.$$

**Решение.** Имеем:

$$f(+0) = \lim_{x \rightarrow +0} \left(\arctan \frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad f(-0) = \lim_{x \rightarrow -0} \left(\arctan \frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

Предела же функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow 0$  в этом случае, очевидно, не существует.

**166.** Доказать, что при  $n \rightarrow \infty$  предел последовательности

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots$$

равен нулю. Для каких значений  $n$  будет выполнено неравенство

$$\frac{1}{n^2} < \varepsilon \quad (\varepsilon - \text{произвольное положительное число})?$$

Произвести численный расчет, если

Решение: а)  $\varepsilon = 0.1$

$$\frac{1}{n^2} < 0.1 \longrightarrow n > \sqrt{10} \Leftrightarrow n \geq 4$$

б)  $\varepsilon = 0.01$

$$\frac{1}{n^2} < 0.01 \longrightarrow n > \sqrt{100} \Leftrightarrow n > 10$$

в)  $\varepsilon = 0.001$

$$\frac{1}{n^2} < 0.001 \longrightarrow n > \sqrt{1000} \Leftrightarrow n \geq 32$$

**167.** Доказать, что предел последовательности

$$x = \frac{n}{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

при  $n \longrightarrow \infty$  равен 1. При каких значениях  $n > N$  будет выполнено неравенство

$$|x_n - 1| < \varepsilon \quad (\varepsilon - \text{произвольное положительное число})?$$

Найти  $N$ , если

Решение: Нужно доказать  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$

$$|x_n - 1| < \varepsilon \longrightarrow \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon \longrightarrow \left| \frac{n - n - 1}{n+1} \right| < \varepsilon \longrightarrow \frac{1}{n+1} < \varepsilon \longrightarrow$$
$$n+1 > \frac{1}{\varepsilon} \longrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

а) При  $\varepsilon = 0.1$  получим  $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 = \frac{1}{0.1} - 1 = 10 - 1 = 9$

б) При  $\varepsilon = 0.01$  получим  $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 = \frac{1}{0.01} - 1 = 100 - 1 = 99$

в) При  $\varepsilon = 0.001$  получим  $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 = \frac{1}{0.001} - 1 = 1000 - 1 = 999$

**168.** Доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$$

Как подобрать для заданного положительного числа  $\varepsilon$  какое-нибудь положительное число  $\sigma$ , чтобы из неравенства

$$|x - 2| < \sigma \quad \text{следовало неравенство} \quad |x^2 - 4| < \varepsilon$$

Вычислить  $\sigma$ , если

Решение:

$$|x^2 - 4| = |x^2 - 4x + 4 + 4x - 8| = |(|x - 2|)^2 + 4|x - 2|| = (|x - 2|)^2 + 4|x - 2|$$

$$(|x - 2|)^2 + 4|x - 2| < \varepsilon$$

$$(|x - 2|)^2 + 4|x - 2| - \varepsilon < \sigma^2 + 4\sigma - \varepsilon$$

**171.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1+2+3+\dots+n-1}{n^2} \right)$

$$1+2+3+\dots+n-1 = \frac{1+n-1}{2} \cdot (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

$$172. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 6n^2 + 11n + 6}{n^3} = 1$$

$$173. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1+3+5+7+\dots+(2n-1)}{n+1} - \frac{2n+1}{2} \right]$$

$$1+3+5+\dots+(2n-1) = \frac{1+2n-1}{2} \cdot n = n^2$$

$$\frac{n^2}{n+1} - \frac{2n+1}{2} = \frac{2n^2 - (2n+1)(n+1)}{2(n+1)} = \frac{2n^2 - (2n^2 + 3n + 1)}{2(n+1)} = \frac{-3n-1}{2(n+1)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n-1}{2n+2} = -1.5$$

$$175. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cdot 2 + 3^n \cdot 3}{2^n + 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1/3} = 3$$

$$\text{Докажем, что } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

$$|x_n - a| < \varepsilon \longrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n < \varepsilon \longrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^n > \frac{1}{\varepsilon} \longrightarrow n > \log_{3/2} \frac{1}{\varepsilon} = N(\varepsilon)$$

$$176. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 1}{2^n} \right)$$

$$1+2+\dots+2^{n-2}+2^{n-1} = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1} = \frac{2^n-1}{2-1} = 2^n-1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n-1}{2^n} = 1$$

$$177. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}} \right]$$

$$3^{n-1} - 3^{n-2} + 3^{n-3} + \dots + (-1)^{n+1} = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1} = \frac{3^{n-1} \left( \left(\frac{-1}{3}\right)^n - 1 \right)}{\frac{-1}{3} - 1} = \frac{3^{n-1} - \frac{(-1)^n}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{3^n - (-1)^n}{4}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - (-1)^n}{4 \cdot 3^{n-1}} = \frac{3}{4}$$

$$178. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3} = \frac{1}{3}$$

$$179. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$$

$$180. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sin(n!)}{n^2 + 1}$$

$$\frac{-n}{n^2 + 1} \leq \frac{n \sin(n!)}{n^2 + 1} \leq \frac{n}{n^2 + 1}$$

Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{n^2 + 1} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sin(n!)}{n^2 + 1} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + 1}$$

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sin(n!)}{n^2 + 1} \leq 0$$

Отсюда следует, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sin(n!)}{n^2 + 1} = 0$

$$181. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^2}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2x+1}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+0+0}{1+0} = 1$$

$$182. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1000x}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1000\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{0}{1-0} = 0$$

$$183. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-5x+1}{3x+7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-5+\frac{1}{x}}{3+\frac{7}{x}} = \infty$$

$$184. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-x+3}{x^3-8x+5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}}{1-\frac{8}{x^2}+\frac{5}{x^3}} = 0$$

$$185. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{x^5+5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 \cdot 9x^2 + \dots}{x^5+5} = 72$$

$$186. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2-\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}} = 2$$

$$187. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{3}{x}}{1+x^{-2/3}} = 2$$

$$188. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{10+x\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{10x^{-2/3}+1} = \infty$$

$$189. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^{-1/3}+x^{-1}}}{1+\frac{1}{x}} = 0$$

$$190. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}}} = 1$$

$$191. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+1}{x^2+1} = 0$$

$$192. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-5x+10}{x^2-25} = \infty$$

$$193. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{x+2} = -2$$

$$194. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-2x}{x^2-4x+4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x-2} = \infty$$

$$195. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-4x+x+2}{x^4-x-3(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-2)(x+2)+(x+2)}{x(x-1)(x^2+x+1)-3(x-1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x^2-2x+1)}{(x-1)(x^3+x^2+x-3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x-1)^2}{(x-1)(x^3-2x^2+x+3x^2-3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)^2+3(x^2-1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x(x-1)+3(x+1))} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2-x+3x+3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2+2x+3} = \frac{2}{1+2+3} = \frac{1}{3}$$

$$196. \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - (a+1)x + a}{x^3 - a^3} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x-1)}{(x-a)(x^2+ax+a^2)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x-1}{x^2+ax+a^2} = \frac{a-1}{3a^2}$$

$$197. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h-x)((x+h)^2 + x(x+h) + x^2)}{h} = (x+0)^2 + x(x+0) + x^2 = 3x^2$$

$$198. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{3}{(x-1)(x^2+x+1)} - \frac{1}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3-x^2-x-1}{(x-1)(x^2+x+1)} =$$

$$- \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x^2+x+1} = 1$$