§3. Пределы

1°. Предел последовательности. Число a называется *пределом последовательности* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N = N(\varepsilon)$ такое, что

$$|x_n - a| < \varepsilon \text{ при } n > N.$$

Пример 1. Показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2 \tag{1}$$

Решение. Составим разность

$$\frac{2n+1}{n+1} - 2 = -\frac{1}{n+1}$$

Оценивая эту разность по абсолютной величине, будем иметь:

$$\left|\frac{2n+1}{n+1} - 2\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon. \tag{2}$$

если

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 = N(\varepsilon).$$

Таким образом, для каждого положительного числа ε найдется число $N + \frac{1}{\varepsilon} - 1$ такое, что при $n > N$ будем иметь место неравенство (2). Следовательно, число 2 является пределом последовательности $x_n = (2n+1)(n+1)$, т.е. справедлива формула (1).

2°. Предел функции. Говорят, что функция $f(x) \longrightarrow A$ при $x \longrightarrow a$ (A и a - числа), или

$$\lim_{x\to a} f(x) = A,$$

если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\sigma = \sigma(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad \text{при} \quad 0 < |x - a| < \sigma$$

Аналогично

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A.$$

если $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $|x| > N(\varepsilon)$.

Употребляется также условная запись

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty,$$

которая обозначает, что $|f(x)| > E$ при $0 < |x - a| < \sigma(E)$, где E - произвольное положительное число.

3°. `Односторонние пределы`. Если $x < a$ и $b \longrightarrow a$, то условно пишут $x \longrightarrow a - 0$; аналогично, если $x > a$ и $x \longrightarrow a$, то это записывается так: $x \longrightarrow a + 0$. Числа

$$f(a-0) = \lim_{x \to a-0} f(x) \quad \text{и} \quad f(a+0) = \lim_{x \to a+0} f(x)$$

называется соответственно *пределом слева* функции f(x) в точке a и *пределом справа* функции f(x) в точке a (если эти числа существуют).

Для существования предела функции f(x) при $x \longrightarrow a$ необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство.

$$f(a-0) = f(a+0)$$

Если существует $\lim\limits_{x \to a} f_1(x)$ и $\lim\limits_{x \to a} f_2(x)$ то имеют место следующие теоремы:

1) $\lim\limits_{x \to a}[f_1(x) + f_2(x)] = \lim\limits_{x \to a} f_1(x) + \lim\limits_{x \to a} f_2(x)$;

2) $\lim\limits_{x \to a}[f_1(x) \cdot f_2(x)] = \lim\limits_{x \to a} f_1(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} f_2(x)$;

3) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x \to a} f_2(x)} \qquad (\lim\limits_{x \to a} f_2(x) \neq 0)$.

Частое применение находят следующие пределы:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{a \to 0} \sqrt[a]{1+a} = e = 2{,}71828\ldots$$

`Пример 2`. Найти пределы справа и слева функции

$$f(x) = \arctan\frac{1}{x} \quad \text{при } x \longrightarrow 0.$$

`Решение`. Имеем:

$$f(+0) = \lim_{x \to +0}\left(\arctan\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad f(-0) = \lim_{x \to -0}\left(\arctan\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

Предела же функции f(x) при $x \longrightarrow 0$ в этом случае, очевидно, не существует.

166. Доказать, что при $n \longrightarrow \infty$ предел последовательности

$$1\,,\ \frac{1}{4}\,,\ \frac{1}{9}\ ,\ldots,\frac{1}{n^2},\ldots$$

равен нулю. Для каких значений n будем выполнено неравенство

$$\frac{1}{n^2} < \varepsilon \qquad (\varepsilon - \text{произвольное положительное число})?$$

Произвести численный расчет, если

`Решение:` а) $\varepsilon = 0.1$

$\dfrac{1}{n^2} < 0.1 \longrightarrow n > \sqrt{10} \quad \Leftrightarrow n \geq 4$

б) $\varepsilon = 0.01$

$\dfrac{1}{n^2} < 0.01 \longrightarrow n > \sqrt{100} \Leftrightarrow n > 10$

в) $\varepsilon = 0.001$

$\dfrac{1}{n^2} < 0.001 \longrightarrow n > \sqrt{1000} \quad \Leftrightarrow n \geq 32$

167. Доказать, что предел последовательности

$$x = \frac{n}{n+1} \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

при $n \longrightarrow \infty$ равен 1. При каких значениях $n > N$ будет выполнено неравенство

$$|x_n - 1| < \varepsilon \qquad (\varepsilon - \text{ произвольное положительное число})?$$

Найти N, если

`Решение:` Нужно доказать $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$

$|x_n - 1| < \varepsilon \longrightarrow \left|\dfrac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon \longrightarrow \left|\dfrac{n-n-1}{n+1}\right| < \varepsilon \longrightarrow \dfrac{1}{n+1} < \varepsilon \longrightarrow$

$n + 1 > \dfrac{1}{\varepsilon} \longrightarrow n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$

а) При $\varepsilon = 0.1$ получим $n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1 = \dfrac{1}{0.1} - 1 = 10 - 1 = 9$

б) При $\varepsilon = 0.01$ получим $n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1 = \dfrac{1}{0.01} - 1 = 100 - 1 = 99$

в) При $\varepsilon = 0.001$ получим $n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1 = \dfrac{1}{0.001} - 1 = 1000 - 1 = 999$

168. Доказать, что

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4$$

Как подобрать для заданного положительного числа ε какое-нибудь положительное число σ, чтобы из неравенства

$$|x - 2| < \sigma \quad \text{следовало неравентво} \quad |x^2 - 4| < \varepsilon$$

Вычислить σ, если

`Решение:`

$|x^2 - 4| = |x^2 - 4x + 4 + 4x - 8| = |(|x-2|)^2 + 4|x-2|| = (|x-2|)^2 + 4|x-2|$

$(|x-2|)^2 + 4|x-2| < \varepsilon$

$(|x-2|)^2 + 4|x-2| - \varepsilon < \sigma^2 + 4\sigma - \varepsilon$

171. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{3}{n^2} + \dots + \dfrac{n-1}{n^2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1+2+3+\dots+n-1}{n^2}\right)$

$1 + 2 + 3 + \dots + n - 1 = \dfrac{1+n-1}{2} \cdot (n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$$

172. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+6n^2+11n+6}{n^3}=1$

173. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1+3+5+7+\cdots+(2n-1)}{n+1}-\dfrac{2n+1}{2}\right]$

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=\frac{1+2n-1}{2}\cdot n=n^2$$

$$\frac{n^2}{n+1}-\frac{2n+1}{2}=\frac{2n^2-(2n+1)(n+1)}{2(n+1)}=\frac{2n^2-(2n^2+3n+1)}{2(n+1)}=\frac{-3n-1}{2(n+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-3n-1}{2n+2}=-1.5$$

175. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n\cdot 2+3^n\cdot 3}{2^n+3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1/3}=3$

Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n=0$

$$|x_n-a|<\varepsilon\longrightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^n<\varepsilon\longrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^n>\frac{1}{\varepsilon}\longrightarrow n>\log_{3/2}\frac{1}{\varepsilon}=N(\varepsilon)$$

---

176. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+1}{2^n}\right)$

$$1+2+\cdots+2^{n-2}+2^{n-1}=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}=\frac{2^n-1}{2-1}=2^n-1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^n}=1$$

177. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{27}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}\right]$

$$3^{n-1}-3^{n-2}+3^{n-3}+\cdots+(-1)^{n+1}=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}=\frac{3^{n-1}\left(\left(\frac{-1}{3}\right)^n-1\right)}{\frac{-1}{3}-1}=\frac{3^{n-1}-\dfrac{(-1)^n}{3}}{\frac{4}{3}}=\frac{3^n-(-1)^n}{4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-(-1)^n}{4\cdot 3^{n-1}}=\frac{3}{4}$$

178. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}=\dfrac{1}{3}$

179. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$

180. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sin(n!)}{n^2+1}$

$$\frac{-n}{n^2+1}\le\frac{n\sin(n!)}{n^2+1}\le\frac{n}{n^2+1}$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{n^2+1}\le\lim_{n\to\infty}\frac{n\sin(n!)}{n^2+1}\le\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}$$

$$0 \le \lim_{n\to\infty} \frac{n\sin(n!)}{n^2+1} \le 0$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sin(n!)}{n^2+1} = 0$

181. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+2x+1}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+0+0}{1+0} = 1$

182. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1000x}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1000\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{0}{1-0} = 0$

183. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-5x+1}{3x+7} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-5+\frac{1}{x}}{3+\frac{7}{x}} = \infty$

184. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-x+3}{x^3-8x+5} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}}{1-\frac{8}{x^2}+\frac{5}{x^3}} = 0$

185. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{x^5+5} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8x^3\cdot 9x^2+\dots}{x^5+5} = 72$

186. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2-\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}} = 2$

187. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2+\frac{3}{x}}{1+x^{-2/3}} = 2$

188. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{10+x\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{10x^{-2/3}+1} = \infty$

189. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^{-1/3}+x^{-1}}}{1+\frac{1}{x}} = 0$

190. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}}} = 1$

191. $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^3+1}{x^2+1} = 0$

192. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-5x+10}{x^2-25} = \infty$

193. $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2} = \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x-1}{x+2} = -2$

194. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x(x-2)}{(x-2)^2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x}{x-2} = \infty$

195. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-4x+x+2}{x^4-x-3(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x(x-2)(x+2)+(x+2)}{x(x-1)(x^2+x+1)-3(x-1)} =$
$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x+2)(x^2-2x+1)}{(x-1)(x^3+x^2+x-3)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x+2)(x-1)^2}{(x-1)(x^3-2x^2+x+3x^2-3)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)^2+3(x^2-1)} =$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x(x-1)+3(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x^2-x+3x+3} = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x^2+2x+3} = \frac{2}{1+2+3} = \frac{1}{3}$$

196. $\lim_{x\to a} \frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x-1)}{(x-a)(x^2+ax+a^2)} = \lim_{x\to a} \frac{x-1}{x^2+ax+a^2} = \frac{a-1}{3a^2}$

197. $\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h-x)((x+h)^2+x(x+h)+x^2)}{h} = (x+0)^2+x(x+0)+x^2 = 3x^2$

198. $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right) = \lim_{x\to 1} \left(\frac{3}{(x-1)(x^2+x+1)} - \frac{1}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{3-x^2-x-1}{(x-1)(x^2+x+1)} =$
$-\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x^2+x+1} = 1$