При нахождении пределов вида

$$\lim_{x\to a}[\varphi(x)]^{\psi(x)} = C \tag{1}$$

следует иметь в виду, что:

1) если существуют конечные пределы

$$\lim_{x\to a}\varphi(x) = A \quad \text{и} \quad \lim_{x\to a}\psi(x) = B,$$

то $C = A^B$

2) если $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = A \neq 1$ и $\lim\limits_{x\to a}\psi(x) = \pm\infty$, то вопрос о нахождении предела (1) решается непосредственно;

3) если $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = 1$ и $\lim\limits_{x\to a}\psi(x) = \infty$, то полагают $\varphi(x) = 1 + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to \alpha$ и, следовательно,

$$C = \lim_{x\to a}[[1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}}]^{\alpha(x)\psi(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)\psi(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}[\varphi(x)-1]\psi(x)}, \tag{2}$$

где $e = 2{,}718\ldots$ - число Эйлера.

Пример 7. Найти

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}$$

Решение. Здесь

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right) = 2 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 0}(1+x) = 1$$

следовательно

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x} = 2^1 = 2$$

Пример 8. Найти

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{x^2}$$

Решение. Имеем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{2+\frac{1}{x}} = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \lim_{x\to\infty}x^2 = +\infty$$

Поэтому

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{x^2} = 0$$

Пример 9. Найти

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}$$

Решение. Имеем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = 1$$

Произведя указанное выше преобразование, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[1+\left(\frac{x-1}{x+1}-1\right)\right]^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left[1+\left(\frac{-2}{x+1}\right)\right]^{\frac{x+1}{-2}}\right]^{-\frac{2x}{x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x}{x+1}}=e^{-2}$$

В данном случае, не прибегая к общему приему, можно найти предел проще:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{-1}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=\frac{e^{-1}}{e}=e^{-2}$$

Вообще, полезно помнить, что

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=e^k \tag{3}$$

241. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2+x}{3-x}\right)^x$. Отсюда верно

$$\lim_{x\to0}\frac{2+x}{3-x}=\frac{2}{3}\quad\text{и}\quad\lim_{x\to0}x=0,$$

следовательно

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{2+x}{3-x}\right)^x=\left(\frac{2}{3}\right)^0=1$$

242. $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+1}$. Отсюда верно

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}\quad\text{и}\quad\lim_{x\to1}(x+1)=2$$

следовательно

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

243. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2x}{x+1}}$. Отсюда верно

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0\quad\text{и}\quad\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{x}}=2,$$

следовательно

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2x}{x+1}}=0^2=0$$

244. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{\sin x}{x}}$. Отсюда верно

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}=\frac{3}{2}\quad\text{и}\quad\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

следовательно

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{\sin x}{x}}=\left(\frac{3}{2}\right)^1=\frac{3}{2}$$

245. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{2x^2+1}\right)^{x^2}$. Отсюда верно

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{2x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}\quad\text{и}\quad\lim_{x\to\infty}x^2=\infty,$$

следовательно

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{2x^2+1}\right)^{x^2}=0$$

246. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$. Отсюда следует

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=0\quad\text{и}\quad\lim_{n\to\infty}n=\infty.$$

Воспользуемся формулой (2). Получим

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}-1\right)n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n}}=e^1=e$$

247. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}$. Отсюда следует

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)=1\quad\text{и}\quad\lim_{x\to\infty}x=\infty.$$

Воспользуемся формулой (2). Получим

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}-1\right)x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x}}=e^2$$

248. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}$. Отсюда следует

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=1\quad\text{и}\quad\lim_{x\to\infty}x=\infty.$$

Воспользуемся формулой (2). Получим

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}-1\right)x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x-x-1)x}{x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x}{x+1}}=e^{-1}$$

249. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$. Отсюда следует

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}}=1 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to\infty}(x+2)=\infty$$

Воспользуемся формулой (2). Получим

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}-1\right)(x+2)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x-1-x-3)(x+2)}{x+3}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4(x+2)}{x+3}}=e^{-4}$$

250. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{n}$. Отсюда следует

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)=1 \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty}n=\infty$$

Воспользуемся формулой (2). Получим

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}-1\right)n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x\cdot n}{n}}=e^{x}$$

251. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$. Отсюда следует

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)=1+0=1 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$$

Воспользуемся формулой (2). Получим

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x-1)\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=e^{1}=e$$

252. а) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$. Отсюда следует

$$\lim_{x\to 0}\cos x=\cos 0=1 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$$

Воспользуемся формулой (2). Получим

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}(\cos x-1)\frac{1}{x}}=e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)x}}=e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)}}=e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{(1+\cos x)}}=e^{-\frac{0}{2}}=e^{0}=1$$

б) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$. Отсюда следует

$$\lim_{x\to 0}\cos x=\cos 0=1 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$$

Воспользуемся формулой (2). Получим

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}(\cos x-1)\frac{1}{x^2}}=e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)x^2}}=e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{(1+\cos x)x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

При вычислении приведенных ниже пределов полезно знать, что если существует и положителен $\lim\limits_{x\to a}[\ln f(x)] = \ln[\lim\limits_{x\to a} f(x)]$.

`Пример` 10. Доказать, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \tag{4}$$

`Решение.` Имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}] = \ln[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}] = \ln e = 1$$

253. $\lim\limits_{x\to\infty}[\ln(2x+1)-\ln(x+2)] = \lim\limits_{x\to\infty}\ln\dfrac{2x+1}{x+2} = \ln\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x+2} = \ln 2$

254. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\lg(1+10x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+10x)}{x\ln 10} = \lg e\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+10x)^{\frac{1}{x}} = \lg e\ln e^{10} = 10\lg e$

255. $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\ln\sqrt{\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}} = \dfrac{1}{2}\ln\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}} = \dfrac{1}{2}\ln e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-x}-1\right)\frac{1}{x}} = \dfrac{1}{2}\ln e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{(1-x)x}} =$
$= \dfrac{1}{2}\ln e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{1-x}} = \dfrac{1}{2}\ln e^{\frac{2}{1-0}} = \dfrac{1}{2}\ln e^2 = \dfrac{1}{2}\cdot 2 = 1$

256. $\lim\limits_{x\to+\infty} x[\ln(1+x)-\ln x] = \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\dfrac{1+x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^x = \ln\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$

257. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \ln\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \ln e^{-\frac{1}{2}} = -\dfrac{1}{2}$

258. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$. Заменим $t = e^x - 1$. Получим $x = \ln(t+1)$

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^{\ln(t+1)}-1}{\ln(t+1)} = \lim_{t\to 0}\frac{t+1-1}{\ln(t+1)} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(t+1)}{t}} = 1$$

259. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$ $(a>0)$. Заменим $t = a^x - 1$. Получим $x = \log_a(t+1)$

$$\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(t+1)} = \lim_{t\to 0}\frac{t\ln a}{\ln(t+1)} = \lim_{t\to 0}\frac{\ln a}{\ln(t+1)^{\frac{1}{t}}} = \ln a$$

260. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a}-1)$ $(a>0)$. Заменим $t = \sqrt[n]{a}-1$. Получим $n = \dfrac{1}{\log_a(t+1)}$

$$\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(t+1)} = \lim_{t\to 0}\frac{t\ln a}{\ln(t+1)} = \lim_{t\to 0}\frac{\ln a}{\ln(t+1)^{\frac{1}{t}}} = \ln a$$

261. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} a\dfrac{e^{ax}-1}{ax} - \lim\limits_{x\to 0} b\dfrac{e^{bx}-1}{bx} = a-b$

262. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{-x}}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-1)x}{xe^x\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{xe^x}$. Заменим $t = e^x-1$. Получим $x = \ln(t+1)$

$$\lim_{t\to 0}\frac{t}{(t+1)\ln(t+1)} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t+1}\cdot\frac{t}{\ln(t+1)} = \frac{1}{1+0} = 1$$

263. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sh}x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{2e^x x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^x+e^x-1}{2e^x x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{2x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{2e^x x}$.
Заменим $t=e^x-1$. Получим $x=\ln(t+1)$

$$\lim_{t\to 0}\frac{t}{2\ln(t+1)}+\lim_{t\to 0}\frac{t}{2(t+1)\ln(t+1)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch}x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}+1-2e^x}{2e^x x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-1)^2}{2e^x x^2}$.
Заменим $t=e^x-1$. Получим $x=\ln(t+1)$

$$\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{2(t+1)\ln^2(t+1)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{2(t+1)(\ln(t+1)^{\frac{1}{t}})^2}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{2(1+0)}=\frac{1}{2}$$

Найти следующие односторонние пределы:

264. а) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Заменим $t=-x$. Получим

$$\lim_{t\to +\infty}\frac{-t}{\sqrt{t^2+1}}=\lim_{t\to +\infty}\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}=\frac{1}{1}=1$$

б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\dfrac{1}{1}=1$

265. а) $\lim\limits_{x\to -\infty}th(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$. Заменим $t=-x$. Получим

$$\lim_{t\to +\infty}\frac{e^{-t}-e^t}{e^{-t}+e^t}=\lim_{t\to +\infty}\frac{1-e^{2t}}{1+e^{2t}}=\lim_{t\to +\infty}\frac{\frac{1}{e^{2t}}-1}{\frac{1}{e^{2t}}+1}=\frac{-1}{1}=-1$$

б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1-\frac{1}{e^{2x}}}{1+\frac{1}{e^{2x}}}=\dfrac{1}{1}=1$

266. а) $\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$. Заменим $t=-\dfrac{1}{x}$. Получим

$$\lim_{t\to +\infty}\frac{1}{1+e^{-t}}=\lim_{t\to +\infty}\frac{e^t}{e^t+1}=\lim_{t\to +\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{e^t}}=\frac{1}{1}=1$$

б) $\lim\limits_{t\to +0}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$. Заменим $t=\dfrac{1}{x}$. Получим

$$\lim_{t\to +\infty}\frac{1}{1+e^t}=\lim_{t\to +\infty}\frac{\frac{1}{e^t}}{\frac{1}{e^t}+1}=\frac{0}{1+0}=0$$

267. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$. Заменим $t=-x$. Получим

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(1+e^{-t})}{-t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(1+e^{t})-t}{-t}=1-\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(1+e^{t})}{t}=1-1=0$$

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+e^x)^{\frac{1}{x}}=1$

268. а) $\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{|\sin x|}{x}$. Заменим $t=-x$. Получим

$$\lim_{t\to+0}\frac{|\sin(-t)|}{-t}=-\lim_{t\to+0}\frac{\sin t}{t}=-1$$

б) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{|\sin x|}{x}=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

269. а) $\lim\limits_{x\to1-0}\dfrac{x-1}{|x-1|}$. Заменим $t=-x+1$. Получим

$$\lim_{t\to+0}\frac{-t}{|-t|}=-\lim_{t\to+0}\frac{t}{t}=-1$$

б) $\lim\limits_{x\to1+0}\dfrac{x-1}{|x-1|}$. Заменим $t=x-1$. Получим

$$\lim_{t\to+0}\frac{t}{|t|}=\lim_{t\to+0}\frac{t}{t}=1$$

270. а) $\lim\limits_{x\to+2-0}\dfrac{x}{x-2}$. Заменим $t=2-x$. Получим

$$\lim_{t\to+0}\frac{2-t}{-t}=\lim_{t\to+0}\frac{t-2}{t}=1-\lim_{t\to+0}\frac{2}{t}=-\infty$$

б) $\lim\limits_{x\to2+0}\dfrac{x}{x-2}$. Заменим $t=x-2$. Получим

$$\lim_{t\to+0}\frac{t+2}{t}=1+\lim_{t\to+0}\frac{1}{t}=+\infty$$