Метод математической индукции

Утверждение (*Метод математической индукции*):
Пусть $M \subset N$ - такое множество, что:
1) $1 \in M$ (*база индукции*)
2) $\forall n \in N$ из того, что $n \in M$ следует, что $(n+1) \in M$ (*индукционный переход*);

Тогда $M = N$

1.1.(*2*) • Докажите, что

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Как найти сумму квадратов, если ответ неизвестен?

Доказательство:

1) Докажем, что данное утверждение верно при $n = 1$

$$1^2 = 1 \equiv \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2+1)}{6} = \frac{\cancel{2 \cdot 3}}{\cancel{6}} = 1$$

На всякий случай докажем данное утверждение при $n = 2$

$$1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5 \equiv \frac{2 \cdot (2+1) \cdot (2 \cdot 2 + 1)}{6} = \frac{\cancel{2 \cdot 3} \cdot 5}{\cancel{6}} = 5$$

2) Предположим, что данное утверждение верно при n, то оно верно при $n+1$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = (n+1) \cdot \left(\frac{n(2n+1)}{6} + n + 1 \right) =$$
$$\frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}$$

$$D = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 49 - 48 = 1 = 1^2$$

$$x_1 = \frac{-7 + \sqrt{D}}{4} = \frac{-7+1}{4} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2} \qquad x_2 \frac{-7-1}{4} = -2$$

$$\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1}{6}$$

Доказано.

1.2. Докажите, что сумма кубов $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ является точным квадратом. Например, $1 = 1^3$, $1 + 2^3 = 1 + 8 = 9 = 3^2$, $1 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36 = 6^2$

Доказательство:

Или другими словами, докажем данное утверждение:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$$

1) Докажем, что данное утвеждение верно при $n = 1$

$1^3 = 1 \equiv 1^2 = 1$

2) Предположим, что данное утверждение верно при n, то оно верно при $n + 1$

$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n + 1)^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 + (n + 1)^3$

Докажем данное утверждение:

$1 + 2 + \dots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

1) Предположим, что данное утверждение верно при $n = 1$

$1 \equiv \dfrac{1 \cdot (1+1)}{2} = \dfrac{\cancel{2}}{\cancel{2}} = 1$

2) Предположим, что данное утверждение верно при n, то оно верно при $n + 1$

$1 + 2 + \dots + n + (n + 1) = \dfrac{n(n+1)}{2} + (n + 1) = (n + 1)\left(\dfrac{n}{2} + 1\right) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$

Доказано

$(1 + 2 + \dots + n)^2 + (n + 1)^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n + 1)^3 = (n + 1)^2\left(\dfrac{n^2}{4} + (n + 1)\right) =$
$\dfrac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left(\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 = (1 + 2 + \dots + n + (n + 1))^2$

Доказано

1.3 (*Бином Ньютона*)

(a) • Докажите, что данное $\forall n \in N$; $a,b \in R$ выполнено равенство:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k},$$

где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ - *биноминальный коэффициент*

<u>**Замечание:**</u> Биноминальные коэффициенты легко получаются из *трегольника Паскаля*. В этом треугольнике на вершине и по бокам стоят единицы. Каждое число равно сумме двух, расположенных над ним чисел. Продолжать теугольник можно бесконечно.

(б) $*$ Сформулируйте и докажите бином Ньютона для **отрицательных** целых n.

Доказательство:

1) Докажем, что данное утверждение верно при $n = 1$

$(a + b)^1 = a + b \equiv \sum_{k=0}^{1} C_1^k a^k b^{1-k} = C_0^1 a^0 b^1 + C_1^1 a^1 b^0 = a + b$

2) Предположим, что данное утверждение верно при n, то оно верно при $n + 1$

$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} = (a+b)(C_n^0 a^0 b^n + C_n^1 a^1 b^{n-1} + \dots + C_n^n a^n b^0) =$
$C_n^0 a^1 b^n + C_n^1 a^2 b^{n-1} + C_n^2 a^3 b^{n-2} + \dots C_n^{n-1} a^n b^1 + C_n^n a^{n+1} b^0 + C_n^0 b^{n+1} + C_n^1 a b^n + \dots + C_n^{n-1} a^{n-1} b^2 + C_n^n a^n b =$

В доказательстве используем данные утверждения:

1) $C_n^0 = \dfrac{n!}{0!(n-0)!} = \dfrac{n!}{n!} = 1$

2) $C_n^1 = \dfrac{n!}{1!(n-1)!} = \dfrac{n!}{(n-1)!} = n$

3) $C_n^{n-1} = \dfrac{n!}{(n-1)!(n-(n-1))!} = \dfrac{n!}{(n-1)!} = n$

4) $C_n^m = C_n^{n-m}$

5) $C_n^{k-1} + C_n^k = \dfrac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\dfrac{1}{n-k+1} + \dfrac{1}{k}\right) =$
$\dfrac{n!(k+n-k+1)}{k(k-1)!(n-k)!(n-k+1)} = \dfrac{n!(n+1)}{k!(n-k+1)!} = \dfrac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = C_{n+1}^k$

$C_n^0 b^{n+1} + ab^n(C_n^0 + C_n^1) + a^2b^{n-1}(C_n^1 + C_n^2) + a^3b^{n-2}(C_n^2 + C_n^3) + \cdots + a^{n-1}b^2(C_n^{n-2} + C_n^{n-1}) + a^nb(C_n^{n-1} + C_n^n) + C_n^n a^{n+1} = C_{n+1}^0 b^{n+1} + ab^nC_{n+1}^1 + \cdots + a^{n-1}b^2C_{n+1}^{n-1} + a^nbC_{n+1}^n + C_{n+1}^{n+1}a^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_n^k a^k b^{n-k}$

Доказано

1.4. (*неравенство Бернулли*)

Пусть $x_i \cdot x_j \geq 0$, $x_i > -1$, для всех $i,j = 1, \ldots, n$. Докажите, что

$$(1+x_1)\cdot(1+x_2)\cdot\cdots\cdot(1+x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

Доказательство:

1) Докажем, что данное утверждение верно при $n = 1$

$(1+x_1) = 1 + x_1 \geq 1 + x_1$

2) Предположим, что данное неравенство верно при n, докажем для $n+1$

$(1+x_1)\cdot(1+x_2)\cdot\cdots\cdot(1+x_n)\cdot(1+x_{n+1}) \geq (1+x_1+x_2+\cdots+x_n)\cdot(1+x_{n+1}) = 1+x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1}+x_1\cdot x_{n+1}+x_2\cdot x_{n+1}+\cdots+x_n\cdot x_{n+1} \geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1}$

Доказано

1.5. • Пусть $x_1, \ldots, x_n$ - строго положительные числа, такие что $x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n = 1$. Докажите, что $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n$.

1.6. Пусть $n \in N$ и $n \geq 2$. Докажите, что

a) $\dfrac{1}{n!} \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$ b) • $2 < \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n < 3$ (*неравенство числа e*).

Доказательство

a)

1) Докажем, что данное утвеждение верно при $n = 2$

$$\frac{1}{2!}=\frac{1}{2}\leq\frac{1}{2^{2-1}}=\frac{1}{2^1}=\frac{1}{2}$$

2) Предположим, что данное утверждение верно при n, докажем для $n+1$

$\frac{1}{(n+1)!}\leq\frac{1}{(n+1)\cdot 2^{n-1}}$ (При n>1 верно, поэтому $\frac{1}{(n+1)}\leq\frac{1}{2}$) $\leq\frac{1}{2^n}$

Доказано

b)

1) Предположим, что данное утверждение верно при $n=2$

$2<\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}<3$

2) Предположим, что утверждение $(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>2)$ верно при n, докажем для $n-1$

1.7. *(a)* • Докажите, используя метод математической индукции, что

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}<2, \text{ для } \forall n\in N$$

(б) Докажите данное неравенство без использования метода математической индукции.

(в) Усильте неравенство из пункта (а)б доказав равенство

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}=2-\frac{1}{2^n}$$

Доказательство

а) 1) Докажем, что данное утверждение верно при $n=1$

$$1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}<2$$

2) Предположим, что данное утверждение верно при n, то оно верно при $n-1$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}+\frac{1}{2^{n-1}}<2-\frac{1}{2^n}<2$$

Доказано

б,в) $a_1=1,\ a_2=\frac{1}{2},\ \ldots,\ a_{n+1}=\frac{1}{2^n},\ d=\frac{1}{2}$

$$S_{n+1}=\frac{a_1(1-d^{n+1})}{1-d}=\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}=2\cdot\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}=\frac{2^{n+1}-1}{2^n}=2-\frac{1}{2^n}<2$$

Доказано

1.9 • Докажите, что $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2$ для $\forall n\in N$.

1) Докажем, что данное утверждение верно при $n=1$

$1<2$

2) Предположим, что данное утверждение верно при n, то оно верно при $n-1$

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{(n-2)^2}+\frac{1}{(n-1)^2}<2-\frac{1}{n^2}<2$$

1.10. *(неравенства между "обыкновенными средними")*

Пусть $a_i \in R$, $a_i > 0$, $\forall i = 1,\ldots,n$. Обозначим

$$A_n = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\ , \quad G_n = \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n}, \quad \Gamma_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$$

Докажите, что $A_n \geq G_n \geq \Gamma_n$ для $\forall n \in N$, $n \geq 2$

Замечание: Выражения A_n называется *средним арифметическим*, G_n - *средним геометрическим*, Γ_n - *средним гармоническим* чисел $a_1,a_2,\ldots,a_n$.

Замечание: Отметим, что равенство в данных неравенствах возможно тогда и только тогда, когда выполнено: $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Доказательство

1) Докажем первую часть данного сложного неравентсва при $n = 2$

$$\frac{a_1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_1\cdot a_2}$$

$$a_1^2+2a_1a_2+a_2^2 \geq 4a_1a_2 \iff a_1^2-2a_1a_2+a_2^2 \geq 0 \iff (a_1-a_2)^2 \geq 0$$

$$\sqrt{a_1a_2} \geq \frac{2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}} = \frac{2a_1a_2}{a_1+a_2} \iff (a_1a_2)(a_1+a_2)^2 \geq (4a_1^2a_2^2) \iff a_1^2+2a_1a_2+a_2^2 \geq 4a_1a_2$$

$$\iff a_1^2-2a_1a_2+a_2^2 \geq 0 \iff (a_1-a_2)^2 \geq 0$$

---

1) Докажите неравенство для $n = 4$

Доказательство

В доказательстве мы используем Неравенство Коши (Данную теорему для двух переменных)

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} = \frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}}{2} \geq \frac{\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_3a_4}}{2} \geq \sqrt{\sqrt{a_1a_2}\cdot\sqrt{a_3a_4}} = \sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}$$

2) Докажите неравенство для $n = 2m$, предположив что оно верно для $n = m$

Так как мы предположили что данное неавенство верно при $n = m$, а доказательство базы находится сверху, то приступим сразу ко второму шагу математической индукции.

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2m-1}a_{2m}}{2m} = \frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}+\cdots+\frac{a_{2m-1}+a_{2m}}{2}}{m} \geq \frac{\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_3a_4}+\cdots+\sqrt{a_{2m-1}a_{2m}}}{m} \geq$$
$$\sqrt[m]{\sqrt{a_1a_2}\cdot\sqrt{a_3a_4}\ldots\sqrt{a_{2m-3}a_{2m-2}}\sqrt{a_{2m-1}a_{2m}}} = (a_1a_2a_3\ldots a_{2m-1}a_{2m})^{\frac{1}{2m}} = \sqrt[2m]{a_1a_2a_3\cdot\cdots\cdot a_{2m-1}a_{2m}}$$

Доказано

3) Докажем неравенство для $n = 2^k$

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2^k}}{2^k} = \frac{\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2^{k-1}}}{2^{k-1}} + \frac{a_{2^{k-1}+1} + \dots + a_{2^k}}{2^{k-1}}}{2} \geq \frac{\sqrt[2^{k-1}]{a_1 a_2 \dots a_{2^{k-1}}} + \sqrt[2^{k-1}]{a_{2^{k-1}+1} \dots a_{2^k}}}{2} \geq$$
$$\sqrt{\sqrt[2^{k-1}]{a_1 a_2 \dots a_{2^{k-1}}} \cdot \sqrt[2^{k-1}]{a_{2^{k-1}+1} \dots a_{2^k}}} = \sqrt{\sqrt[2^{k-1}]{a_1 a_2 \dots a_{2^{k-1}} \cdot a_{2^{k-1}+1} \dots a_{2^k}}} = \sqrt[2^k]{a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_{2^{k-1}} \cdot \dots \cdot a_{2^k}}$$

Доказано

4) Докажем неравенство для $n < 2^k$

Таким образом, если мы имеем n членов, то обозначим их среднее арифметическое через k, поэтому расширим список значений.

$a_{n+1} = a_{n+2} = \dots = a_m = k$

Тогда мы имеем:

$k = \dfrac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{\frac{m}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)}{m} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n + \frac{m-n}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)}{m} =$$
$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n + (m-n)k}{m} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots + a_m}{m} > \sqrt[m]{a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1} \dots a_m} =$$
$\sqrt[m]{a_1 a_2 \dots a_n \cdot k^{m-n}}$, поэтому $a^m > a_1 a_2 \dots a_n k^{m-n}$ и $a > \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$

Доказано

---

2) Докажем вторую часть данного неравенства при $n = 2$

$$\sqrt{a_1 \cdot a_2} \geq \frac{2}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}}$$

Немного преобразуем Неравенство Коши:

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2} \iff \frac{1}{(a_1 + a_2)/2} \leq \frac{1}{\sqrt{a_1 a_2}} \iff \frac{2}{a_1 + a_2} \leq \frac{1}{\sqrt{a_1 a_2}}$$

$$\frac{2}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}} = \frac{2a_1 a_2}{a_1 + a_2} \leq \frac{a_1 a_2}{\sqrt{a_1 a_2}} = \sqrt{a_1 a_2}$$

Докажем $G_n \geq \Gamma_n$ с помощью небольшого преобразования:

$b_1 = \dfrac{1}{a_1}$, $b_2 = \dfrac{1}{a_2}$ ... $b_n = \dfrac{1}{a_n}$

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{n}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} = \frac{n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{b_1 b_2 \dots b_n}} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

Доказано

1.11. *(8)* Пусть $n \in N$, $n \geq 2$. Докажите, что $n! < \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$.

Доказательство

1) Докажем, что данное утверждение верно при $n = 2$

$2! = 2 < \left(\frac{2+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

2) Предположим, что данное утверждение верно при n, то оно верно при $n + 1$

$(n+1)! < (n+1)\left(\frac{n+1}{2}\right)^n = \frac{(n+1)^{n+1}}{2^n} = 2 \cdot \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}$

$$\begin{aligned}
2 \cdot \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1} &\vee \quad \left(\frac{n+2}{2}\right)^{n+1} \\
2 \cdot (n+1)^{n+1} &\vee \quad (n+2)^{n+1} \\
2 &\vee \quad \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \\
2 &< \quad \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}
\end{aligned}$$

Это верно из упражнения 1.6.

1.12. *(7)* Докажите, что если $x > -1$, то справедливо неравенство

$$(1+x)^n \geq 1 + nx,\ (n \in N,\ n > 1)$$

причем знак равенства имеет место лишь при $x = 0$

Доказательство

1) Докажем, что данное утверждение верно при $n = 2$

$$\begin{aligned}
(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 \geq &\ 1 + 2x \\
x^2 \geq &\ 0
\end{aligned}$$

2) Предположим, что данное утверждение верно при n, то оно верно при $n + 1$

$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1 + x + nx + nx^2 = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$

Доказано

1.13. *(9)* Докажите следующие неравенства:

(a) $2! \cdot 4! \cdot \dots \cdot (2n)! > [(n+1)!]^n$ при $n \in N,\ n > 1$

(б) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ при $n \in N$

Доказательство

а) 1) Докажем, что данное утверждение верно при $n = 2$

$2! \cdot 4! = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 48 > [(2+1)!]^2 = [(3)!]^2 = (6)^2 = 36$

2) Предположим, что данное утверждение верно при n, то оно верно при $n+1$

$2! \cdot 4! \cdot \dots \cdot (2n)! \cdot (2n+2)! > [(n+1)!]^n \cdot (2n+2)!$

$$\begin{array}{rcl} [(n+1)!]^n \cdot (2n+2)! & \vee & [(n+2)!]^{n+1} \\ \dfrac{(2n+2)!}{(n+2)!} & \vee & \left(\dfrac{(n+2)!}{(n+1)!}\right)^n \\ \dfrac{(2n+2)!}{(n+2)!} & \vee & (n+2)^n \\ \underbrace{(n+3) \cdot (n+4) \cdot \dots \cdot (2n+2)}_{n} & > & \underbrace{(n+2 \dots (n+2)}_{n} \end{array}$$

$$[(n+1)!]^n (2n+2)! > [(n+2)!]^{n+1}$$

Доказано

б) 1) Докажем, что данное утверждение верно при $n=1$

$\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{4}} < \dfrac{1}{\sqrt{1+2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

2) Предположим, что данное утверждение верно при n, то оно верно при $n+1$

$\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \dots \dfrac{2n-1}{2n} \cdot \dfrac{2n+1}{2n+2} < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot \dfrac{2n+1}{2n+2}$

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{2n+1}{(2n+2)\sqrt{2n+1}} & \vee & \dfrac{1}{\sqrt{2n+3}} \\ \left(\dfrac{2n+1}{2n+2}\right)^2 & \vee & \dfrac{2n+1}{2n+3} \\ (2n+1)(2n+3) & \vee & (2n+2)^2 \\ 4b^2 + 6n + 2n + 3 & \vee & 4n^2 + 8n + 4 \\ 3 & < & 4 \end{array}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$$

Доказано

1.14. Докажите, что для любых $x \in (0; 2\pi)$ и $n \in N$ выполнется тождество:

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin\left(n + \dfrac{1}{2}\right) x}{2 \sin \dfrac{x}{2}}$$

Доказательство

1) Докажем, что данное утвердение верно при $n = 1$

$$\frac{1}{2}+\cos x=\frac{\sin\frac{3x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} \iff \sin\frac{x}{2}+2\cos x\cdot\sin\frac{x}{2}=\sin\frac{3x}{2} \iff \sin\frac{x}{2}+\sin\frac{3x}{2}-\sin\frac{x}{2}=\sin\frac{3x}{2}$$

$\sin\frac{x}{2}=\sin\frac{x}{2}$ *Доказано*

2) Предположим, что данное утверждение верно при n, то оно верно при $n+1$

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx+\cos(n+1)x=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}+\cos(n+1)x=$$

$$\frac{\sin\left(nx+\frac{x}{2}\right)+\cos(xn+x)\cdot 2\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{\sin(nx+\frac{x}{2})+\sin(nx+x+\frac{x}{2})-\sin(nx+x-\frac{x}{2})}{2\sin\frac{x}{2}}=$$

$$\frac{\sin(nx+\frac{x}{2})+\sin(nx+\frac{3x}{2})-\sin(nx+\frac{x}{2})}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{\sin\left((n+1)+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

Доказано

1.15. Докажите, что для $n\in N$ выполняется неравенство:

$$\sqrt{n+\sqrt{n-1+\sqrt{n-2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}}<\sqrt{n}+1$$

1) Докажем, что данное утверждение верно при $n=1$

$\sqrt{1}<\sqrt{1}+1=1+1=2$

2) Предположим, что данное утверждение верно при n, то оно верно при $n+1$

$$\sqrt{n+1+\sqrt{n+\sqrt{n-1+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}}<\sqrt{n+1+\sqrt{n}+1}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{n+1+\sqrt{n}+1} &\quad\vee\quad \sqrt{n+1}+1\\ n+2+\sqrt{n} &\quad\vee\quad n+1+2\sqrt{n+1}+1\\ \sqrt{n} &\quad<\quad 2\sqrt{n+1}\end{aligned}$$

$\sqrt{n+2+\sqrt{n}}<\sqrt{n+1}+1$

Доказано

1.16. $*$ Пусть k,$n\in N$. Докажите, что $C_n^k\le\left(\frac{e\cdot n}{k}\right)^k$, где e - *основание натурального логарифма.*

Доказательство

1) Докажем данное неравенство для $n = 2$

$$C_2^k = \frac{2!}{k!(2-k)!} = \frac{2}{k!(2-k)!} \le \left(\frac{e \cdot 2}{k}\right)^k$$

$$\frac{2}{k!(2-k)!} \le \frac{2}{k!} \vee \left(\frac{2e}{k}\right)^k \le \frac{(2e)^k}{k!} \iff 2 \le (2e)^k \qquad \textit{Доказано}$$

2) Предположим, что данное неравенство верно для n, то оно верно для $n + 1$

$$C_{n+1}^k = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \cdot \frac{n+1}{n+1-k} \le \left(\frac{e \cdot n}{k}\right)^k \cdot \frac{n+1}{n+1-k} = \frac{e^k n^k (n+1)}{k^k (n+1-k)}$$

1.19. $*$ Пусть $p \ge 1$ - произвольное действительное число. Докажите, что для любых неотрицательных a_1,$a_2 \dots a_n$ справедливо неравенство

$$a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p \le (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^p$$

Доказательство

1) Докажем данное неравенство для $n = 2$

$$a_1^p + a_2^p \le (a_1 + a_2)^p = a_1^p + C_p^1 a_1^{p-1} a_2 + \dots + a_2^p \iff C_p^1 a_1^{p-1} a_2 + C_p^2 a_2^2 a_2^{p-2} + \dots + C_p^{p-1} a_1^{p-1} a_2 \ge 0$$

2) Предположим, что данное неравенство верно при n, то оно верно при $n + 1$

$$a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p + a_{n+1}^p \le (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^p + a_{n+1}^p \le (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^p + C_n^1 a_{n+1} (a_1 + \dots + a_n)^p +$$
$$C_n^2 a_{n+1}^2 (a_1 + \dots + a_n)^{p-1} + \dots + C_n^{p-1} a_{n+1}^{p-1} (a_1 + \dots + a_n) + a_{n+1}^p \le (a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1})^p$$

Доказано

Неравенство Коши-Буняковского-Шварца (КБШ). Для произвольных вещественных чисел x_i, y_j докажите

$$(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) \geq (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n)^2$$

1) Докажем, что данное утверждение верно при $n = 1$

$x_1^2 \cdot y_1^2 \geq (x_1 y_1)^2 = x_1^2 \cdot y_1^2$

2) Предположим, что данное неравенство верно при n, докажем что данное неравенство верно при $n + 1$

$(x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n + x_{n+1} y_{n+1})^2 = (x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n)^2 + 2(x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n) x_{n+1} y_{n+1} + x_{n+1}^2 y_{n+1}^2 \leq$

$(x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2) + x_{n+1}^2 y_{n+1}^2 + 2(x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n) x_{n+1} y_{n+1}$

Преобразуем левую часть неравенства при $n + 1$

$((x_1^2 + \cdots + x_n^2) + x_{n+1}^2)((y_1^2 + \cdots + y_n^2) + y_{n+1}^2) = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2) + x_{n+1}^2 (y_1^2 + \cdots + y_n^2) +$

$+ y_{n+1}^2 (x_1^2 + \cdots + x_n^2) + x_{n+1}^2 y_{n+1}^2$

Обозначим $A_n = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2)$

Сравним:

$$\begin{aligned}
\cancel{A_n^2} + + \cancel{x_{n+1}^2 y_{n+1}^2} + 2(x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n) x_{n+1} y_{n+1} \quad &\vee \quad \cancel{A_n^2} + \cancel{x_{n+1}^2 y_{n+1}^2} + x_{n+1}^2 (y_1^2 + \cdots + y_n^2) + y_{n+1}^2 (x_1^2 + \cdots + x_n^2) \\
2(x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n) x_{n+1} y_{n+1} \quad &\vee \quad x_{n+1}^2 (y_1^2 + \cdots + y_n^2) + y_{n+1}^2 (x_1^2 + \cdots + x_n^2)
\end{aligned}$$

Перенесем левую часть в правую

$x_{n+1}^2 y_1^2 - 2 x_1 y_1 x_{n+1} y_{n+1} + y_{n+1}^2 x_1^2 + x_{n+1}^2 y_2^2 - 2 x_2 y_2 x_{n+1} y_{n+1} + y_{n+1}^2 x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 y_n^2 - 2 x_n y_n x_{n+1} y_{n+1} + y_{n+1}^2 x_n^2 = (x_{n+1} y_1 - y_{n+1} x_1)^2 + (x_{n+1} y_2 - y_{n+1} x_2)^2 + \cdots + (x_{n+1} y_n - y_{n+1} x_n)^2 \geq 0$

Доказано