Пример 4. Найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$$

Решение. Полагая, что $1+x=y^6$ имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}=\lim_{y\to 1}\frac{y^3-1}{y^2-1}=\lim_{y\to 1}\frac{y^2+y+1}{y+1}=\frac{3}{2}$$

199. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$. Полагая, что $y=\sqrt{x}$ имеем: $\lim\limits_{y\to 1}\dfrac{y-1}{y^2-1}=\lim\limits_{y\to 1}\dfrac{1}{y+1}=\dfrac{1}{2}$

200. $\lim\limits_{x\to 64}\dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$. Полагая, что $y=\sqrt[6]{x}$ имеем: $\lim\limits_{y\to 2}\dfrac{y^3-8}{y^2-4}=\lim\limits_{y\to 2}\dfrac{y^2+2y+2}{y+2}=\dfrac{4+4+2}{2+2}=\dfrac{5}{2}$

201. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$. Полагая, что $y=\sqrt[12]{x}$ имеем: $\lim\limits_{y\to 1}\dfrac{y^4-1}{y^3-1}=\lim\limits_{y\to 1}\dfrac{(y-1)(y+1)(y^2+1)}{(y-1)(y^2+y+1)}=$
$=\lim\limits_{y\to 1}\dfrac{(y+1)(y^2+1)}{y^2+y+1}=\dfrac{2\cdot 2}{1+1+1}=\dfrac{4}{3}$

202. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$. Полагая, что $y=\sqrt[3]{x}$ имеем: $\lim\limits_{y\to 1}\dfrac{y^2-2y+1}{(y^3-1)^2}=\lim\limits_{y\to 1}\dfrac{(y-1)^2}{(y-1)^2(y^2+y+1)^2}=$
$=\lim\limits_{y\to 1}\dfrac{1}{(y^2+y+1)^2}=\dfrac{1}{(1+1+1)^2}=\dfrac{1}{3^2}=\dfrac{1}{9}$

203. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{4-x+3}{(x-7)(x+7)(2+\sqrt{x-3})}=-\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{1}{(x+7)(2+\sqrt{x-3})}=-\dfrac{1}{56}$

204. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}=\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{(x-8)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{x-8}=\lim\limits_{x\to 8}(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)=2^2+2\cdot 2+4=12$

205. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{3}{2}$

206. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(9-5-x)(1+\sqrt{5-x})}{(1-5+x)(3+\sqrt{5+x})}=-\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-4)(1+\sqrt{5-x})}{(x-4)(3+\sqrt{5+x})}=-\dfrac{1+1}{3+3}=-\dfrac{1}{3}$

207. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x-1+x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=1$

208. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

209. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{x+h-x}{h(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x(x+h)}+\sqrt[3]{x^2})}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x(x+h)}+\sqrt[3]{x^2}}=$
$=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x)^2}+\sqrt[3]{x(x)}+\sqrt[3]{x^2}}=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

210. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x+6-x^2-2x+6}{(x^2-4x+3)(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6})}=$
$=-\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4(x-3)}{(x-3)(x-1)(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6})}=-\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4}{(x-1)(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6})}=$

$$= \frac{-4}{2(\sqrt{9-6+6}+\sqrt{9+6-6})} = \frac{-2}{3+3} = -\frac{1}{3}$$

211. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+a-x}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}} = 0$

212. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x(x+a)}-x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+ax-x^2}{\sqrt{x(x+a)}+x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+1} = \dfrac{a}{2}$

213. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-5x+6}-x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-5x+6-x^2}{\sqrt{x^2-5x+6}+x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{6}{x}-5}{\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}+1} = \dfrac{-5}{2}$

214. $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x(x^2+1-x^2)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} = \dfrac{1}{2}$

215. $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sqrt[3]{1-x^3}) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1-x^3}{x^2+x\sqrt[3]{1-x^3}+\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2+x\sqrt[3]{1-x^3}+\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} =$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}}{1+\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}-1}+\sqrt[3]{(\frac{1}{x^3}-1)^2}} = 0$$

При вычислении пределов во многих случаях используется формула. Первый замечательный предел.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

и предполагается известным, что $\lim\limits_{x\to a}\sin x = \sin a$ и $\lim\limits_{x\to a}\cos x = \cos a$.

216. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{\sin 2}{2}$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$, т.к $\quad -1 \le \sin x \le 1$, то

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{x} = 0 \le \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} \le \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$$

поэтому $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x} = 0$

217. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x} = 3\lim\limits_{3x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{3x} = 3\cdot 1 = 3$

218. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 2x} = \dfrac{5}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin 5x}{5x}}{\frac{\sin 2x}{2x}} = \dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{1}{1} = \dfrac{5}{2}$

219. $\lim\limits_{x\to 1}$. Полагая, что $y = x-1$ имеем: $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin(\pi(y+1))}{\sin(3\pi(y+1))} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin\pi y}{\sin 3\pi y} = \dfrac{1}{3}\dfrac{\frac{\sin\pi y}{\pi y}}{\frac{\sin 3\pi y}{3\pi y}} = \dfrac{1}{3}$

220. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(n\sin\dfrac{\pi}{n}\right) = \pi\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = \pi\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin\pi y}{\pi y} = \pi$

221. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \dfrac{1}{2}$

222. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin(\frac{x-a}{2})\cos(\frac{x+a}{2})}{\frac{x-a}{2}}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}=\dfrac{1}{2}\cos a$

223. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}=-\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin\frac{x-a}{2}\sin\frac{x+a}{2}}{x-a}=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to a}\sin\frac{x+a}{2}=-\dfrac{1}{2}\sin a$

224. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\tan\pi x}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\tan\pi(x+2)}{x+2}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\tan\pi y}{y}=\pi$

225. $\lim\limits_{h\to 0}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin x\cos h+\sin h\cos x-\sin x}{h}=$
$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin x(\cos h-1)}{h}+\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin h\cos x}{h}=-\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h\sin x(1-\cos^2 h)}{h\cdot h}+\cos x=-\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h\sin x\sin^2 h}{h^2}+$
$+\cos x=-\lim\limits_{h\to 0}h\sin x+\cos x=\cos x$

226. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{1-\tan x}=-\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x(\sin x-\cos x)}{\sin x-\cos x}=-\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\cos x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

227. а) $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$. Полагая, что $y=\frac{1}{x}$ имеем: $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}=1$

228. $-\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\tan\dfrac{\pi x}{2}$. Полагая, что $y=x-1$ имеем: $-\lim\limits_{y\to 0}y\tan\dfrac{\pi(y+1)}{2}=\lim\limits_{y\to 0}y\operatorname{ctg}\dfrac{\pi y}{2}=$
$=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\cos\frac{\pi y}{2}}{\frac{\sin\frac{\pi y}{2}}{y}}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{2}{\pi}\dfrac{\cos\frac{\pi y}{2}}{\frac{\sin\frac{\pi y}{2}}{\frac{\pi y}{2}}}=\dfrac{2}{\pi}$

229. $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{ctg}2x\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x}{\sin 2x}\operatorname{tg}x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x\sin x}{2\sin x\cos^2 x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 0}{\cos 0}=\dfrac{1}{2}$

230. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi-x}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin\frac{x}{2}-1}{x-\pi}$. Полагая, что $y=x-\pi$ имеем: $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin\frac{y+\pi}{2}-1}{y}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\cos\frac{y}{2}-1}{y}=$
$=-\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1-\cos^2\frac{y}{2}}{y(\cos\frac{y}{2}+1)}=-\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{y}{2}}{y(\cos\frac{y}{2}+1)}=-\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin\frac{y}{2}}{\cos\frac{y}{2}+1}=0$

231. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{2\cos x-1}{3(x-\frac{\pi}{3})}$. Полагая, что $y=x-\frac{\pi}{3}$ имеем: $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{2\cos(y+\frac{\pi}{3})-1}{3y}=$
$=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{2(\cos y\cos\frac{\pi}{3}-\sin y\sin\frac{\pi}{3})-1}{3y}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{2(\frac{1}{2}\cos y-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin y)-1}{3y}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\cos y-\sqrt{3}\sin y-1}{3y}=$
$=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\cos y-1}{3y}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}=-\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1-\cos^2 y}{3y(\cos y+1)}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}=-\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin^2 y}{3y(\cos y+1)}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}=$
$=-\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{3(\cos y+1)}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}=-\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin 0}{3\cos 0+1}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

232. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos mx-\cos nx}{x^2}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}\sin\frac{mx+nx}{2}\sin\frac{mx-nx}{2}}{x^2}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x\frac{m+n}{2})\sin(x\frac{m-n}{2})}{2x^2}=$
$=\dfrac{n^2-m^2}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x\frac{m+n}{2})\sin(x\frac{m-n}{2})}{x^2\frac{m-n}{2}\frac{m+n}{2}}=\dfrac{n^2-m^2}{2}$

233. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x^2\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1$

234. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$. Полагая, что $x=\sin y$ имеем: $\lim\limits_{\sin y\to 0}\dfrac{\arcsin\sin y}{\sin y}=\lim\limits_{\sin y\to 0}\dfrac{y}{\sin y}=1$

235. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan 2x}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan 2x}{3x\frac{\sin 3x}{3x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan 2x}{3x}$. Полагая, что $2x=\tan y$ имеем:
$\dfrac{2}{3}\lim\limits_{\tan y\to 0}\dfrac{\arctan\tan y}{\tan y}=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{\tan y\to 0}\dfrac{y}{\tan y}=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{\tan y\to 0}\dfrac{\cos y}{(\sin y)/y}=\dfrac{2}{3}$

236. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin\pi x}$. Полагая, что $y=x-1$ имеем: $-\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y(y+2)}{\sin\pi(y+1)}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y(y+2)}{\sin\pi y}=$
$=\dfrac{1}{\pi}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\pi y(y+2)}{\sin\pi y}=\dfrac{1}{\pi}\lim\limits_{y\to 0}(y+2)=\dfrac{2}{\pi}$

237. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-2\frac{\sin 2x}{2x}}{1+3\frac{\sin 3x}{3x}}=\dfrac{1-2\cdot 1}{1+3\cdot 1}=\dfrac{1-2}{1+3}=-\dfrac{1}{4}$

238. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}(1+\sqrt{x})}{1-x}$. Полагая, что $y=x-1$ имеем: $-\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\cos\frac{\pi(y+1)}{2}(1+\sqrt{y+1})}{y}=$
$=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin\frac{\pi y}{2}(1+\sqrt{y+1})}{y}=\dfrac{\pi}{2}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin\frac{\pi y}{2}(1+\sqrt{y+1})}{\frac{\pi y}{2}}=\pi$

239. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2(1+\sqrt{\cos x})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\sqrt{\cos x})(1+\cos x)}=$
$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2(1+\sqrt{\cos x})(1+\cos x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{(1+\sqrt{\cos x})(1+\cos x)}=\dfrac{1}{2\cdot 2}=\dfrac{1}{4}$

240. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-1+\sin x}{x(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x}{x(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x})}=$
$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}=\dfrac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=1$