**Осенний коллоквиум курса «Теория вероятностей»**
ФКН НИУ ВШЭ, 2-й курс ОП ПМИ, 2-й модуль, 2016 учебный год

## Теорема Муавра-Лапласа
(формулировка, доказательство только локальной теоремы и только для симметричного случая)

*Замечание* 1. *(Формула Стирлинга)*

$$n! = \sqrt{2\pi n}^{\,n+\frac{1}{2}} e^{-n+\frac{\varepsilon_n}{12n}}, \text{ где } \varepsilon_n \in (0,1).$$

**Определение 1.** Функция

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

называется *функцией Гаусса*.

**Теорема 1.** *(Теорема Муавра-Лапласа)*
*У нас есть схема Бернулли:*

*$N$ подбрасываний*
*$k$ - число успехов*
*$p$ - вероятность успеха*
$q = 1 - p$

$$X_{N,k} = \frac{k - Np}{\sqrt{Npq}}$$

*1 случай. (Локальная теорема Муавра-Лапласа)*
*Если $k$ выбирается так, что*

$$|X_{N,k}| \leqslant C, \text{ где } C \text{ не зависит от } N,$$

*то* $P_{N,k} = \frac{1}{\sqrt{Npq}} \varphi(X_{N,k}) \cdot (1 + O(\frac{1}{\sqrt{N}}))$.

*2 случай. (Интегральная теорема Муавра-Лапласа)*
*Для любых чисел $a < b$ имеем*

$$P\left(a \leqslant \frac{k - Np}{\sqrt{Npq}} \leqslant b\right) \xrightarrow[N\to\infty]{} \int\limits_a^b \varphi(x)dx.$$

*Здесь в левой части написана вероятность того, что число единиц $k$ лежит в диапазоне от $Np + a\sqrt{Npq}$ до $Np + b\sqrt{Npq}$.*
*Отметим, что во втором случае разница между вероятностью и интегралом оценивается через $\frac{p^2+q^2}{\sqrt{Npq}}$ и эта оценка точна. Следовательно, если $p$ близко к нулю или к единице, то вероятность плохо приближается интегралом от $\varphi$.*

*Доказательство. (Доказательство локальной теоремы только для симметричного случая)*
Пусть $N = 2n$. Найдем вероятность того, что в последовательности длины N ровно n единиц (ровно половина):

$$P_{2n,n} = C_{2n}^n \cdot \frac{1}{2^{2n}} = \frac{(2n)!}{(n!)^2 \cdot 2^{2n}}$$

Раскрываем по формуле Стирлинга и получаем следующее:

$$\frac{\sqrt{2\pi} \cdot (2n)^{2n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-2n+O(\frac{1}{2n})}}{(\sqrt{2\pi})^2 \cdot n^{2n+1} \cdot e^{-2n+O(\frac{1}{n})} \cdot 2^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} e^{O(\frac{1}{n})} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Таким образом, $P_{2n,n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{2n \cdot \frac{1}{4}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(n-n)^2}{(2n\cdot\frac{1}{4})}}$ (что и требовалось).
Найдем теперь $P_{2n,k}$.
Заметим, что

$$P_{2n,n+a} = P_{2n,n-a} \text{ (следует из равенства } C_N^k = C_N^{N-k}).$$

Тогда будет достаточно найти одну из этих вероятностей. Найдем $P_{2n,n+a}$.

$$\frac{P_{2n,n+a}}{P_{2n,n}} = \frac{C_{2n}^{n+a} \cdot (\frac{1}{2})^{2n}}{C_{2n}^n \cdot (\frac{1}{2})^{2n}} = \frac{C_{2n}^{n+a}}{C_{2n}^n} = \frac{n! \cdot n!}{(n+a)!(n-a)!} =$$

$$= \frac{(n-a+1)\cdot(n-a+2)\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+a)} =$$

$$= \frac{(1-\frac{a-1}{n})\cdot(1-\frac{a-2}{n})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{1}{n})\cdot 1}{(1+\frac{1}{n})\cdot(1+\frac{2}{n})\cdot\ldots\cdot(1+\frac{a}{n})} =$$

$$= e^{ln(1-\frac{a-1}{n})+ln(1-\frac{a-2}{n})+\ldots+ln(1-\frac{1}{n})-ln(1+\frac{1}{n})-\ldots-ln(1+\frac{a}{n})}$$

Вспомним, что $ln(1+x) = x + O(x^2)$ при $-1 < x \leqslant 1$. Тогда найдем оценку степени, которую мы нашли:

$$ln\left(1-\frac{a-1}{n}\right)+ln\left(1-\frac{a-2}{n}\right)+\ldots+ln\left(1-\frac{1}{n}\right)-ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ldots-ln\left(1+\frac{a}{n}\right) =$$

$$= \left(-\frac{a-1}{n}-\frac{a-2}{n}-\ldots-\frac{1}{n}\right)+\left(-\frac{1}{n}-\frac{2}{n}-\ldots-\frac{a-1}{n}-\frac{a}{n}\right)+O\left(\frac{a^3}{n^2}\right) =$$

$$= -\frac{2(1+2+\ldots+(a-1))+a}{n}+O\left(\frac{a^3}{n^2}\right) = -\frac{a(a-1)+a}{n}+O\left(\frac{a^3}{n^2}\right) = -\frac{a^2}{n}+O\left(\frac{a^3}{n^2}\right)$$

Итак,

$$P_{2n,n+a} = P_{2n,n}\cdot e^{-\frac{a^2}{n}+O\left(\frac{a^3}{n^2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\cdot e^{-\frac{a^2}{n}+O\left(\frac{a^3}{n^2}\right)}$$

Пусть $|a| \leqslant c\cdot\sqrt{n}$.

$$P_{2n,n+a} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}e^{\frac{-a^2}{n}}\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)\right)$$

$\square$