Осенний коллоквиум курса «Теория вероятностей»

ФКН НИУ ВШЭ, 2-й курс ОП ПМИ, 2-й модуль, 2016 учебный год

Билет 2

Свойства вероятностной меры. Формула включений и исключений. Парадокс распределения подарков.

Свойства вероятностной меры
Формула включений и исключений

Теорема 1. *$\Omega = \{w_1, \ldots, w_n\}$ — множество всех элементарных исходов. Функция $P\colon 2^\Omega \to [0,1]$ — вероятностная мера. Свойства вероятностной меры:*

(1) $P(\Omega) = 1$. *С этой точки зрения Ω называется достоверным событием.*

(2) $P(\varnothing) = 0$.

(3) *Если $A \subseteq B$, то $P(A) \leqslant P(B)$.*

(4) *Пусть $A \sqcup B$ (это дизъюнктное объединение, это значит, что события предполагаются непересекающимися). Тогда*
$$P(A \sqcup B) = P(A) + P(B)$$

(5) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(6) $P(A_1 \cup \ldots \cup A_k) \leqslant P(A_1) + \ldots + P(A_k)$

(7) *Формула включений и исключений*
$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + \ldots + P(A_n) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - \ldots - P(A_{n-1} \cap A_n) + \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$$
или
$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{i_1 < \ldots < i_k} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}),$$
что то же самое.

(8) *$\overline{A}$ — отрицание события A, то есть это те исходы, которые не благоприятствуют событию A. Тогда*
$$\overline{A} = \Omega \setminus A \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Доказательство.

(1) Следует из определения.

(2) Аналогично.

(3) $B = A \cup (B \setminus A)$. Тогда
$$P(B) = P(A) + \underbrace{P(B \setminus A)}_{\geqslant 0} \geqslant P(A).$$

(4) Следует из определения.

(5) $P(A \cup B) = \underbrace{P(A \setminus B) + P(A \cap B)}_{P(A)} + \underbrace{P(B \setminus A) + P(A \cap B)}_{P(B)} - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(6) Докажем по индукции:
База: $n = 1 : P(A_1) \leqslant P(A_1)$ очевидно.
Пусть для n доказано. Докажем для $n + 1$:
$$P((A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \cup A_{n+1}) \leqslant P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) + P(A_{n+1}) \overset{\text{(шаг индукции)}}{\leqslant} P(A_1) + \ldots + P(A_{n+1}).$$

(7) Докажем по индукции:
База: для $n = 1$ и $n = 2$ очевидно (смотри пункт 5).
Пусть для n уже доказано. Докажем для $n+1$:

$$P((A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cup A_{n+1}) \overset{(5)}{=} P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) + P(A_{n+1}) - P(\underbrace{\underbrace{(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cap A_{n+1}}_{(A_1 \cap A_{n+1}) \cup \ldots \cup (A_n \cap A_{n+1})}}_{\text{n штук}})$$

$$\overset{\text{(шаг индукции)}}{=} P(A_1) + \ldots + P(A_n) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) -$$

$$- \ldots + P(A_{n+1}) - \left(P(A_1 \cap A_{n+1}) + \ldots + P(A_n \cap A_{n+1}) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_i \cap A_j \cap A_{n+1}) + \ldots \right)$$

$$= P(A_1) + \ldots + P(A_{n+1}) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - \ldots - P(A_n \cap A_{n+1}) + \ldots + (-1)^n P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n+1})$$

(8) Следует из определения.

□

Замечание 1. В классическом определении вероятности все элементарные исходы равновероятны. Из ровно одного свойства (свойства (4)) следует определение вероятности произвольного события A, состоящего из k элементов, — $P(A) = \frac{k}{n}$.

Доказательство. Заметим, что из свойства (4) следует аналогичное свойство для k непересекающихся событий $A_1, \ldots, A_k$:

$$P(A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_k) = P(A_1) + \ldots P(A_k).$$

Пусть $A = \{w_{i_1}, \ldots, w_{i_k}\}$. Тогда

$$P(A) = P(w_{i_1}) + \ldots + P(w_{i_k}) = \underbrace{\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{k} = \frac{k}{n}.$$

□

Парадокс распределения подарков

Задача 1. N человек принесли подарки друг для друга. Затем эти подарки сложили в мешок и каждый вынул себе из мешка подарок. Какова вероятность того, что конкретный человек вынул подарок, который он принес? Какова вероятность того, что никто не вытащил подарок, который сам принес?

Решение.
Пространство исходов Ω состоит из всех возможных перестановок чисел $1, 2, \ldots, N$, причем все перестановки являются равновозможными. Значит, вероятность конкретной перестановки равна $\frac{1}{N!}$. Событие, состоящее в том, что конкретный человек вытащил подарок, который сам принес, состоит из $(N-1)!$ исходов. Следовательно, вероятность такого события равна $\frac{(N-1)!}{N!} = \frac{1}{N}$. При больших N эта вероятность стремится к нулю.
Можно было бы думать, что вероятность события: ни один человек не вытащил подарок, который сам принес, стремится к единице, но это ошибочное мнение.
Пусть A_k - событие, состоящее в том, что k-й человек вытащил свой подарок. Тогда $A_1 \cup \ldots \cup A_N$ - событие, состоящее в том, что хотя бы один вытащил свой подарок. По формуле включений и исключений

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_N) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant N} P(A_i) \; - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant N} P(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{N-1} P(A_1 \cap \ldots \cap A_N)$$

$$\begin{cases} P(A_i) = \frac{1}{N}, \\ P(A_i \cap A_j) = \frac{(N-2)!}{N!}, \\ \ldots \\ P(A_{i_1} \cap \ldots A_{i_k}) = \frac{(N-k)!}{N!}, \\ \ldots \\ P(A_1 \cap \ldots \cap A_N) = \frac{1}{N!}, \end{cases} \quad \Rightarrow P(A_1 \cup \ldots \cup A_N) = N \cdot \frac{1}{N} - C_N^2 \cdot \frac{(N-2)!}{N!} - C_N^3 \cdot \frac{(N-3)!}{N!} + \ldots + (-1)^{N-1} \frac{1}{N!}$$

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_N) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^{N-1}}{N!}$$

Таким образом, вероятность того, что ни один человек не вытащил подарок, который сам принес, равна

$$1 - P(A_1 \cup \ldots \cup A_N) = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots - \frac{(-1)^{N-1}}{N!}$$

и стремится к $\frac{1}{e}$ при $N \to +\infty$.

Замечание 2. Вспомним разложение e^x в ряд Тейлора:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Подставляя вместо x число -1, получаем искомую вероятность $1 - P(A_1 \cup \ldots \cup A_N)$.