Зимний коллоквиум курса «Теория вероятностей»

ФКН НИУ ВШЭ, 2-й курс ОП ПМИ, 2-й модуль, 2016 учебный год
Дата последнего обновления: 04.12.2016

Билет 1

Совместное распределение двух случайных величин. Свойства функции распределения.

Совместное распределение двух случайных величин

Для начала напомним определение случайной величины.

Определение 1. ξ называется *случайной величиной*, если

$$\{\omega : \xi(\omega) \in \langle a, b\rangle\} \in \mathfrak{A},$$

то есть множество исходов таких, что случайная величина принадлежит некоторому промежутку, является событием. Можно доказать, что это верно не только для промежутков, но и для любых элементов из $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Ранее мы рассматривали распределения и функции распределения случайных величин, взятых по отдельности. Теперь мы подросли, стали большими и сильными и поэтому можем перейти к более серьезным вещам.
Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ и две случайные величины $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ и $\eta : \Omega \to \mathbb{R}$.
Пусть $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, рассмотрим множество $\{(\xi, \eta) \in B_1 \times B_2\} = \{(\xi \in B_1)\&(\eta \in B_2)\} = \{\xi \in B_1\} \cap \{\eta \in B_2\}$, а так как $\{\xi \in B_1\} \in \mathfrak{A}$ и $\{\eta \in B_2\} \in \mathfrak{A}$, то и $\{(\xi \in B_1)\&(\eta \in B_2)\} \in \mathfrak{A}$, то есть $\{(\xi, \eta) \in B_1 \times B_2\}$ является событием.
Так как $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ порождена всеми множествами вида $B_1 \times B_2$, где $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, то $\{\omega : (\xi(\omega), \eta(\omega)) \in B\} \in \mathfrak{A}$, то есть для него можно определить вероятность.

Определение 2. Для любых $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ мы можем определить вероятностную меру

$$\mu_{\xi\eta}(B) = P(\{\omega : (\xi(\omega), \eta(\omega)) \in B\}).$$

Такую меру называют *совместным распределением* случайных величин ξ и η.

Доказательство. Докажем, что $\mu_{\xi\eta}$ является вероятностной мерой:

(a) $\mu_{\xi\eta}(\mathbb{R}^2) = P(\Omega) = 1$, очевидно
(b) Пусть $B_1 \cap B_2 = \varnothing$, тогда $P(\omega : (\xi(\omega), \eta(\omega)) \in B_1 \cup B_2) = \mu_{\xi\eta}(B_1 \cup B_2) = \mu_{\xi\eta}(B_1) + \mu_{\xi\eta}(B_2) = P(B_1) + P(B_2)$

□

Определение 3. Функцию

$$F_{\xi\eta}(x, y) = P(\xi \leqslant x, \eta \leqslant y) = \mu_{\xi\eta}((-\infty, x], (-\infty, y])$$

называют *функцией совместного распределения* случайных величин ξ и η или функцией распределения случайного вектора (ξ, η).

Дискретный ака ебучий случай

Если случайная величина принимает конечное число значений, то совместным распределением является функция

$$\mu_{\xi\eta}(x_0, y_0) = P(\{\omega : (\xi(\omega), \eta(\omega)) = (x_0, y_0)\}),$$

или же можно определить распределение через индикаторную функцию:

$$\mu_{\xi\eta}(x, y) = \sum_{i,j} p_{ij} \cdot I_{(x=x_i, y=y_j)}(x, y),$$

где p_{ij} - вероятность, что случайный вектор (ξ, η) примет значение (x_i, x_j).

Свойства функции распределения

Функция совместного распределения обладает рядом свойств, аналогичных свойствам функции распределения одной случайной величины:

Свойство 1. *Для любых $a < c$ и $b < d$ верно*

$$F_{\xi\eta}(c,d) - F_{\xi\eta}(a,d) - F_{\xi\eta}(c,b) + F_{\xi\eta}(a,b) \geqslant 0$$

Доказательство. $P((\xi,\eta) \in (a,c] \times (b,d]) = F_{\xi\eta}(c,d) - F_{\xi\eta}(a,d) - F_{\xi\eta}(c,b) + F_{\xi\eta}(a,b)$ есть вероятность попадания в прямоугольник, а вероятность неотрицательна, что и требовалось доказать. □

Свойство 2. *$F_{\xi\eta}$ непрерывна справа по совокупности переменных, то есть*

$$\lim_{\substack{x \to x_0+0 \\ y \to y_0+0}} F_{\xi\eta}(x,y) = F_{\xi\eta}(x_0,y_0)$$

Сначала докажем лемму

Лемма 1. *В вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ верно:*

(a) $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \ldots \subseteq C_n \subseteq C_{n+1} \subseteq \ldots$
$C = \bigcup\limits_n C_n \Rightarrow P(C_n) \to P(C)$

(b) $C_1 \supseteq C_2 \supseteq \ldots \supseteq C_n \supseteq C_{n+1} \supseteq \ldots$
$C = \bigcap\limits_n C_n \Rightarrow P(C_n) \to P(C)$

Доказательство.

(a) Пусть $A_1 = C_1$ и $A_n = C_n \setminus C_{n-1}$ для $n > 1$.
Тогда $C = \bigcup\limits_n A_n$ и $P(C) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.
Но тогда $P(C_n) = \sum\limits_{n=1}^{n} P(A_n)$ стремится к $P(C)$ как частичная сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

(b) Сведем к первому случаю, пусть $A_1 = \Omega \setminus C_1$ и $A_n = C_{n-1} \setminus C_n$ для $n > 1$.
Тогда $C = \Omega \setminus \bigcup\limits_n A_n$ и все рассуждения аналогичны.

□

Используя лемму, сможем доказать свойство

Доказательство. Так как функция распределения монотонна по обеим переменным (первое свойство) и ограничена (так как является вероятностью), то существует предел

$$\lim_{\substack{x \to x_0+0 \\ y \to y_0+0}} F_{\xi\eta}(x,y) = L.$$

Тогда требуется доказать, что $L = F_{\xi\eta}(x_0,y_0)$.
Пусть $C_n = \{\omega : \xi(\omega) \leqslant x_0 + \frac{1}{n}, \eta(\omega) \leqslant y_0 + \frac{1}{n}\}$ и пусть $C = \bigcap\limits_n C_n = \{\omega : \xi(\omega) \leqslant x_0, \eta(\omega) \leqslant y_0\}$, тогда из леммы 1 следует, что

$$L = \lim_{\substack{x \to x_0+0 \\ y \to y_0+0}} F_{\xi\eta}(x,y) = \lim_{n \to \infty} P(C_n) = P(C) = F_{\xi\eta}(x_0,y_0)$$

□

Свойство 3. *Если хотя бы одно из a или b равно $-\infty$, то*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} F_{\xi\eta}(x,y) = 0$$

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} F_{\xi\eta}(x,y) = 1$$

Доказательство. С очевидностью следует из леммы, в первом случае последовательность множеств C_n стремится к пустому множеству, тогда вероятность пересечения равна $P(\varnothing) = 0$, а во втором случае C_n стремится ко всей плоскости, поэтому вероятность объединения равна $P(\Omega) = 1$. □

Замечание 1. Если функция $F_{\xi\eta}(x,y)$ удовлетворяет свойствам 1-3, то существует единственная вероятностная мера $\mu_{\xi\eta}$ на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ такая, что
$$F_{\xi\eta}(x,y) = \mu_{\xi\eta}((-\infty, x], (-\infty, y]).$$

Билет 2

Независимые случайные величины. Характеризация независимости в терминах функций распределения и плотностей. Плотность распределения суммы двух независимых случайных величин.

Независимые случайные величины, характеризация независимости в терминах функций распределения и плотностей

Определение 1. Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ называются независимыми, если выполняется

$$P(\xi_1 \in B_1, \ldots, \xi_n \in B_n) = P(\xi_1 \in B_1) \cdot \ldots \cdot P(\xi_n \in B_n)$$

Замечание 1. Если у нас есть меры $\mu_\xi(B_1)$ и $\mu_\eta(B_2)$, где B_1, B_2 — полуинтервалы, то мы можем определить новую меру $\mu(B_1 \times B_2) = \mu_\xi(B_1) \cdot \mu_\eta(B_2) = \mu_\xi \otimes \mu_\eta$ и такую меру можно продолжить на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Замечание 2. Определение независимости можно переписать в терминах распределения (для двух случайных величин):

$$\mu_{\xi\eta}(B_1 \times B_2) = \mu_\xi(B_1) \cdot \mu_\eta(B_2)$$

а значит, мы можем переписать определение, как

$$\begin{gathered}\xi \text{ и } \eta \text{ независимы}\\ \Updownarrow \\ \mu_{\xi\eta} = \mu_\xi \otimes \mu_\eta\end{gathered}$$

Теорема 1. *Случайные величины ξ и η независимы $\Leftrightarrow F_{\xi\eta}(x,y) = F_\xi(x) \cdot F_\eta(y)$*

Доказательство. В одну сторону ($\Rightarrow$):

$$F_{\xi\eta}(x,y) = P(\xi \leqslant x, \eta \leqslant y) = P(\xi \leqslant x) \cdot P(\eta \leqslant y) = F_\xi(x) \cdot F_\eta(y)$$

В другую сторону ($\Leftarrow$):
Пусть $\mu(B) = \mu_\xi \otimes \mu_\eta(B)$, где B — углы, учитывая при этом, что определив такую меру на углах, можно определить с ее помощью прямоугольники, а после продолжить на любые множества из $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Тогда

$$F_{\xi\eta}(x,y) = F_\xi(x) \cdot F_\eta(y) = \mu_\xi((-\infty, x])) \cdot \mu_\eta((-\infty, y])) = \mu((-\infty, x] \times (-\infty, y]) = \mu_\xi \otimes \mu_\eta((-\infty, x] \times (-\infty, y]),$$

а так как для $F_{\xi\eta}(x,y)$ существует единственная вероятностная мера $\mu_{\xi\eta}$ такая, что

$$F_{\xi\eta}(x,y) = \mu_{\xi\eta}((-\infty, x], (-\infty, y]),$$

то $\mu = \mu_{\xi\eta}$, а значит, ξ и η независимы. □

Теорема 2. *Пусть случайные величины ξ и η имеют плотности ρ_ξ и ρ_η соответственно, тогда ξ и η независимы $\Leftrightarrow \rho_{\xi\eta}(x,y) = \rho_\xi(x) \cdot \rho_\eta(y)$.*

Доказательство. В одну сторону ($\Rightarrow$):

$$\rho_{\xi\eta}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{\xi\eta}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_\xi(x) \cdot F_\eta(y) = \rho_\xi(x) \cdot \rho_\eta(y)$$

В другую сторону ($\Leftarrow$):

$$F_{\xi\eta}(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} \rho_\xi(u) \rho_\eta(v) du dv = \int\limits_{-\infty}^{x} \rho_\xi(u) du \cdot \int\limits_{-\infty}^{y} \rho_\eta(v) dv = F_\xi(x) \cdot F_\eta(y)$$

□

Плотность распределения суммы двух независимых случайных величин

Теорема 3. *Пусть случайные величины ξ и η имеют плотности ρ_ξ и ρ_η соответственно и являются независимыми. Тогда*

$$\rho_{\xi+\eta}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho_\xi(x)\rho_\eta(t-x)dx.$$

Доказательство.

$$F_{\xi+\eta}(t) = P(\xi+\eta \leqslant t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{t-x} \rho_\xi(x)\rho_\eta(y)dy \right) dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho_\xi(x) \left(\int\limits_{-\infty}^{t-x} \rho_\eta(y)dy \right) dx = \left\{ \begin{array}{c} y = v - x \\ dy = dv \end{array} \right\} =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho_\xi(x) \left(\int\limits_{-\infty}^{t} \rho_\eta(v-x)dv \right) dx = \int\limits_{-\infty}^{t} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho_\xi(x)\rho_\eta(v-x)dx \right) dv$$

Тогда

$$\rho_{\xi+\eta}(t) = F^{'}_{\xi+\eta}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho_\xi(x)\rho_\eta(y)dx.$$

$\square$

Билет 3

Математическое ожидание случайной величины и его свойства: линейность, монотонность, неравенство Чебышёва. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин.

Математическое ожидание случайной величины и его свойства: линейность и монотонность

Пусть дано вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ и пусть $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ — случайная величина, принимающая конечное число различных значений.
Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — различные значения ξ и пусть $A_i = \{\omega\colon \xi(\omega) = x_i\}$, где A_i — непересекающиеся множества и $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$.
Также определим $\xi = x_1 I_{A_1} + x_2 I_{A_2} + \ldots + x_n I_{A_n}$, где I_{A_i} — индикатор, который определяется как:

$$I_{A_i}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A_i \\ 0, & \omega \notin A_i \end{cases}$$

Определение 1. Математическое ожидание ξ — это число, равное

$$\mathbb{E}[\xi] = x_1 P(A_1) + x_2 P(A_2) + \ldots + x_n P(A_n)$$

Утверждение 1. *Если $\forall i \neq j$ $B_i \cap B_j = \varnothing$ и*

$$\xi = y_1 I_{B_1} + y_2 I_{B_2} + \ldots + y_n I_{B_n},$$

где y_i могут быть равны (в отличие от сложности билетов), то

$$\mathbb{E}[\xi] = y_1 P(B_1) + y_2 P(B_2) + \ldots + y_n P(B_n)$$

Доказательство. $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — различные значения случайной величины ξ и пусть $A_k = \{\omega\colon \xi(\omega) = x_k\}$. Пусть $M_k = \{i\colon y_i = x_k\}$ $(1 \leqslant k \leqslant m)$, тогда $\bigcup\limits_{i \in M_k} B_i = A_k$ и $\sum\limits_{i \in M_k} P(B_i) = P(A_k)$

$$\mathbb{E}[\xi] = \sum_{k=1}^{m} x_k P(A_k) = \sum_{k=1}^{m} x_k \left(\sum_{i \in M_k} P(B_i) \right) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i \in M_k} y_i P(B_i) = y_1 P(B_1) + y_2 P(B_2) + \ldots + y_n P(B_n)$$

□

Свойства математического ожидания

(1) Линейность:

$$\mathbb{E}[\alpha\xi + \beta\eta] = \alpha\mathbb{E}[\xi] + \beta\mathbb{E}[\eta]$$

(2) Монотонность:

$$\xi \leqslant \eta \Rightarrow \mathbb{E}[\xi] \leqslant \mathbb{E}[\eta]$$

Доказательство. (1) Докажем линейность:

$$\xi = x_1 I_{A_1} + x_2 I_{A_2} + \ldots + x_n I_{A_n}, \forall i \neq j \ A_i \cap A_j = \varnothing$$

$$\Omega = \bigcup_{n} A_i$$

$$\eta = y_1 I_{B_1} + y_2 I_{B_2} + \ldots + y_m I_{B_m}, \forall i \neq j \ B_i \cap B_j = \varnothing$$

$$\Omega = \bigcup_{m} B_i$$

$$\alpha\xi + \beta\eta = \sum_{i,j} (\alpha x_i + \beta y_j) I_{A_i \cap B_j}$$

$$\mathbb{E}[\alpha\xi + \beta\eta] = \sum_{i,j} (\alpha x_i + \beta y_j) P(A_i \cap B_j) = \alpha \sum_{i,j} x_i P(A_i \cap B_j) + \beta \sum_{i,j} y_j P(A_i \cap B_j)$$

При фиксированном i сумма всех B_j равна Ω, при фиксированном j сумма всех A_i равна Ω, поэтому получаем, что сумма равна

$$\alpha \sum_{i} x_i P(A_i) + \beta \sum_{j} y_j P(B_j) = \alpha\mathbb{E}[\xi] + \beta\mathbb{E}[\eta].$$

(2) Докажем монотонность:
Если $\xi \geqslant 0$, то $\mathbb{E}[\xi] \geqslant 0$. Из свойства линейности следует, что $\mathbb{E}[\xi - \eta] = \mathbb{E}[\xi] - \mathbb{E}[\eta]$, пусть $\xi \geqslant \eta$, это значит, что $\mathbb{E}[\xi - \eta] \geqslant 0$, тогда $\mathbb{E}[\xi] - \mathbb{E}[\eta] \geqslant 0 \Rightarrow \mathbb{E}[\xi] \geqslant \mathbb{E}[\eta]$. □

Неравенство Чебышева

Неравенство Чебышёва является следствием из свойств математического ожидания.

Теорема 1. *Пусть $\xi \geqslant 0$. Тогда верно следующее неравенство:*

$$P(\xi \geqslant C) \leqslant \frac{\mathbb{E}[\xi]}{C}$$

для некоторого числа C.

Доказательство. Пусть $A = \{\omega \colon \xi(\omega) \geqslant C\}$. Тогда

$$\xi \geqslant C I_A$$

Если $I_A = 0$, то так как $\xi \geqslant 0$ неравенство выполненно. Если же $I_A = 1$, то так как $\xi(\omega) \geqslant C$ неравенство выполнено. Воспользуемся свойствами монотонности и линейности

$$\mathbb{E}[\xi] \geqslant C\mathbb{E}(I_A) = CP(A) \Rightarrow \frac{\mathbb{E}[\xi]}{C} \geqslant P(A).$$

□

Следствие 1. *Из неравенства Чебышёва, например, следует неравенство:*

$$\mathbb{E}[\xi] \leqslant \sup_{\Omega} \xi$$

Доказательство.

$$\xi \leqslant \sup_{\Omega} \xi \Rightarrow -\xi \geqslant -\sup_{\Omega} \xi.$$

По неравенству Чебышёва и свойству линейности получаем

$$1 = P\left(-\xi \geqslant -\sup_{\Omega} \xi\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}[-\xi]}{-\sup_{\Omega} \xi} \Rightarrow -\sup_{\Omega} \xi \leqslant (-1) \cdot \mathbb{E}[\xi] \Rightarrow \sup_{\Omega} \xi \geqslant \mathbb{E}[\xi].$$

(вообще говоря, это очевидно, но ведь тебе надо выебнуться хоть как-то)

□

Математическое ожидание независимых случайных величин

Теорема 2. *Пусть ξ и η - независимые случайные величины. Тогда $\mathbb{E}[\xi\eta] = \mathbb{E}[\xi] \cdot \mathbb{E}[\eta]$ (обратное утверждение неверно).*

Доказательство. Пусть $A_i = \{\omega \colon \xi(\omega) = x_i\}$, $B_j = \{\omega \colon \eta(\omega) = y_j\}$, тогда

$$\xi = \sum_i x_i I_{A_i}$$

$$\eta = \sum_j y_j I_{B_j}$$

$$\xi \cdot \eta = \sum_{i,j} x_i y_j I_{A_i} I_{B_j} = \sum_{i,j} x_i y_j I_{A_i \cap B_j}$$

$$\mathbb{E}[\xi\eta] = \sum_{i,j} x_i y_j P(A_i \cap B_j) = \sum_{i,j} x_i y_j P(A_i) P(B_j) = \left(\sum_i x_i P(A_i)\right) \cdot \left(\sum_j y_j P(B_j)\right) = \mathbb{E}[\xi] \cdot \mathbb{E}[\eta]$$

□

Билет 4

Общее определение математического ожидания и его корректность. Математическое ожидание случайной величины, распределение которой задано плотностью.

Общее определение математического ожидания и его корректность

Все свойства математического ожидания в общем случае сохраняются, в отличие от определений.

Определение 1. Пусть ξ принимает значения $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ на множествах $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$ и их вероятности равны $P(A_1), P(A_2), \ldots, P(A_k), \ldots$ соответственно. Тогда, если ряд $\sum\limits_n |x_n| P(A_n)$ сходится, то математическим ожиданием называется сумма ряда $\mathbb{E}[\xi] = \sum\limits_n x_n P(A_n)$ (она существует, так как этот ряд сходится абсолютно).

Замечание 1. Так как ряд сходится абсолютно, то слагаемые можно переставлять.

Замечание 2. $\mathbb{E}[\xi]$ существует, если существует $\mathbb{E}[|\xi|]$ (это следует из абсолютной сходимости ряда)

Утверждение 1. *Пусть $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ - случайная величина (не обязательно дискретная). Тогда существует последовательность дискретных случайных величин (с не более чем счетным числом значений) ξ_n таких, что*

$$\xi_n \overset{\Omega}{\rightrightarrows} \xi\colon (\sup_{\Omega} |\xi_n - \xi| \to 0)$$

.

Доказательство. $\xi_n = 10^{-n} \cdot [10^n \xi] \Rightarrow \{$т. к. целая часть отличается не более, чем на $1\} \Rightarrow |\xi_n - \xi| \leqslant 10^{-n}$. Таким образом любую случайную величину можно приблизить с помощью ξ_n. □

Утверждение 2. *Пусть ξ_n - дискретная величина, $\exists \mathbb{E}[\xi_n]$ и $\xi_n \overset{\Omega}{\rightrightarrows} \xi$. Тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}[\xi_n]$.*

Доказательство. Воспользуемся признаком Коши, рассмотрим модуль разности:

$$|\mathbb{E}[\xi_n] - \mathbb{E}[\xi_m]| = |\mathbb{E}[\xi_n - \xi_m]| \leqslant \mathbb{E}[|\xi_n - \xi_m|]$$

Так как ξ_n сходится равномерно, то $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0\colon \forall m, n > N \Rightarrow \sup |\xi_n - \xi_m| < \varepsilon$. Это означает, что $|\mathbb{E}[\xi_n] - \mathbb{E}[\xi_m]| \leqslant \mathbb{E}[|\xi_n - \xi_m|] < \varepsilon$, а значит, $\mathbb{E}[\xi_n]$ сходится по признаку Коши. □

Определение 2. Предположим, что для последовательности ξ_n, где ξ_n — дискретная случайная величина и $\xi_n \overset{\Omega}{\rightrightarrows} \xi$, существует математическое ожидание $\mathbb{E}[\xi_n]$. Тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}[\xi_n]$ и он обозначается $\mathbb{E}[\xi]$.

Утверждение 3. *Если $\xi_n \overset{\Omega}{\rightrightarrows} \xi$ и $\eta_n \overset{\Omega}{\rightrightarrows} \xi$, то из существования $\mathbb{E}[\xi_n]$ следует существование $\mathbb{E}[\eta_n]$ (начиная с некоторого n) и $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}[\xi_n] = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}[\eta_n]$*

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0\colon \forall n > N \sup |\xi_n - \eta_n| = \sup |\xi_n - \xi - \eta_n + \xi| \leqslant \sup |\xi_n - \xi| + \sup |\xi - \eta_n| < 2\varepsilon$$

Из этого следует, что эти случайные величины отличаются не более чем на 2ε:

$$|\eta_n| \leqslant |\xi_n| + 2\varepsilon.$$

Но $\mathbb{E}[|\xi_n| + 2\varepsilon] = \mathbb{E}[|\xi_n|] + \mathbb{E}[2\varepsilon] = \mathbb{E}[|\xi_n|] + 2\varepsilon$, и из существования $\mathbb{E}[\xi_n]$ по монотонности следует, что существует и $\mathbb{E}[\eta_n]$, а значит

$$|\mathbb{E}[\xi_n] - \mathbb{E}[\eta_n]| = |\mathbb{E}[\xi_n - \eta_n]| \leqslant \mathbb{E}[|\xi_n - \eta_n|] \leqslant 2\varepsilon.$$

А из этого следует, что предел разности $\mathbb{E}[\xi_n]$ и $\mathbb{E}[\eta_n]$ равен нулю, а так как их пределы по отдельности конечны, то имеем

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\xi_n] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\eta_n].$$

□

Упражнение 1. Найти в доказательстве опечатку.

Так как мы приближаем с помощью дискретных величин, а для них известны все определения и доказаны все свойства, то для недискретных величин верны все выше указанные свойства.

Математическое ожидание случайной величины, распределение которой задано плотностью

Теорема 1. *Пусть φ — кусочно-непрерывная функция на $\mathbb{R}$ и $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ - случайная величина, распределение которой задано плотностью ρ_ξ, тогда*

$$\exists \mathbb{E}[\varphi(\xi)] \Leftrightarrow \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)\rho_\xi(x)| dx \text{ сходится}$$

В случае сходимости $\mathbb{E}[\varphi(\xi)] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\rho_\xi(x)dx$.

Доказательство. Так как мы не Боги тервера (я не Бог, и в матане я тоже не шарю), то мы докажем утверждение для кусочно-постоянной функции, а потом проведем некоторые приблизительные рассуждения касательно кусочно-непрерывной.
Пусть f — кусочно-постоянная функция, а это значит, что $f(\xi)$ — дискретная величина, тогда

$$\mathbb{E}[f(\xi)] = \sum_n C_n P(A_n) = \sum_n C_n \int\limits_{\Delta n} \rho_\xi(x)dx = \sum_n \int\limits_{\Delta n} C_n \rho_\xi(x)dx = \sum_n \int\limits_{\Delta n} f(x)\rho_\xi(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\rho_\xi(x)dx.$$

В общем случае мы можем разбивать числовую прямую на счетное число промежутков таким образом, чтобы каждое такое разбиение задавало кусочно-постоянную функцию $f_n(x)$, и при этом $f_n(\xi) \rightrightarrows \varphi(\xi)$, тогда получить то же утверждение для кусочно-непрерывной функции $\varphi(x)$. $\square$