Осенний коллоквиум курса «Теория вероятностей»
ФКН НИУ ВШЭ, 2-й курс ОП ПМИ, 2-й модуль, 2016 учебный год

Билет 6

Теорема Пуассона. Распределение Пуассона. Задача о булочках с изюмом. Пуассоновский процесс.

Теорема Пуассона и распределение Пуассона

Мы рассматриваем серии событий, причем N-я серия состоит из N событий и все N событий независимы в совокупности. Пусть в N-й серии вероятность события равна p_N, причем число $N \cdot p_N = \lambda$ не зависит от N. Нам интересна вероятность $P(A_{k,N})$ наступления ровно k событий в данной серии из N событий. Данная ситуация представляет собой схему Бернулли, следовательно, ее вероятность можно вычислить по формуле $C_N^k p_N^k (1-p_N)^{N-k}$.

Теорема 1. *(Пуассон) Пусть $N \cdot p_N = \lambda$ - не зависит от N. Тогда*

$$P(A_{k,N}) = C_N^k p_N^k (1-p_N)^{N-k} \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, N \to +\infty$$

Доказательство. Учитывая, что $N \cdot p_N = \lambda$, перепишем вероятность $P(A_{k,N})$ в следующем виде:

$$\frac{N(N-1)\ldots(N-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda}{N}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^{N-k} = \left[\frac{1\cdot\left(1-\frac{1}{N}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{N}\right)}{\left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^k}\right]\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\cdot\left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^N$$

Так как λ и k не зависят от N, то при $N \to +\infty$ данное выражение стремится к $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$. ☐

Определение 1. При этом набор вероятностей $\left\{\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right\}$ называется *распределением Пуассона*.

Задача о булочках с изюмом

Задача 1. Рассмотрим серийное производство булочек с изюмом. Сколько изюма в среднем должны содержать булочки, чтобы вероятность наличия хотя бы одной изюминки в случайно выбранной булочке была не меньше 0,99?

Предположим, что уже изготовлено тесто на некоторое количество булочек. В это тесто добавлено N изюминок так, что отношение числа изюминок к количеству булочек равно λ. Следовательно, количество булочек равно N/λ. Выделим в тесте кусок, из которого будет изготовлена булочка α. Вероятность попадания изюминки β в булочку α равна λ/N. Следовательно, вероятность того, что в булку не попало изюма, равна

$$\left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^N$$

А вероятность получить хотя бы одну изюминку в булочке

$$1-\left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^N$$

Так как мы рассматриваем серийное производство булочек, то можно предполагать, что $N \to \infty$, т. е. растет объем теста и количество изюма, но не меняется плотность λ. При $N \to +\infty$ получаем $\left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^N \to e^{-\lambda}$. Для решения задачи надо найти такое λ, что $e^{-\lambda} < 0,01$. $\lambda = 5$ подходит ($e^{-5} \approx 0,007, e^{-4} \approx 0,02$), то есть ответ 5.

Пуассоновский процесс

В случайные моменты времени регистрируются некоторые события. Будем отмечать эти моменты времени точками на луче $[0,+\infty)$. Обозначим через $X(t)$ число точек на временном промежутке длины t, а через $P_k(t)$ вероятность того, что $X(t)=k$. Будем предполагать, что:

(a) вероятность попадания k точек в данный промежуток зависит только от длины этого промежутка (не зависит от расположения)
(b) для любой конечной системы промежутков, которые могут попарно пересекаться только по концам, попадания точек в каждый из них являются независимыми в совокупности событиями
(c) вероятность попадания по крайней мере двух точек в интервал длины δ является $o(\delta)$

Определение 2. Если эти условия выполняются, то $X(t)$ называют Пуассоновским процессом.

Сначала рассмотрим $P_0(t)$. Разделим промежуток $[0,t]$ на N промежутков. По свойству (a) вероятность отсутствия событий на каждом промежутке разбиения равна $P_0(t/N)$. По свойству (b) регистрация события на каждом промежутке разбиения не зависит от регистрации событий на других промежутках, следовательно, мы находимся в ситуации схемы Бернулли и вероятность отсутствия событий на $[0,t]$ равна $P_0(t)=P_0(t/N)^N$ (*). Положим $P_0(1)=q$. Тогда, подставив в равенство (*) $t=1$, получим $P_0(\frac{1}{N})=q^{\frac{1}{N}}$. Подставив $t=m$ в (*), получим $(P_0(\frac{m}{N}))^N=P_0(m)$, подставив $t=m, N=m$ в (*), получим $P_0(m)=(P_0(1))^m$, следовательно $P_0(\frac{m}{N})=(P_0(1))^{\frac{m}{N}}=q^{\frac{m}{N}}$. Заметим, что $P_0(t+h)=P_0(t)P_0(h)\leqslant P_0(t)$, т. е. $P_0(t)$ не возрастает. Следовательно, для $\frac{m-1}{N}\leqslant t\leqslant\frac{m}{N}$ выполняются неравенства $q^{\frac{m-1}{N}}\geqslant P_0(t)\geqslant q^{\frac{m}{N}}$. Приближая t последовательностью дробей $\{\frac{m}{N}\}$, приходим к равенству $P_0(t)=q^t$. Положив $q=e^{-\lambda}$, получим $P_0(t)=e^{-\lambda t}$.

Теперь вычислим $P_k(t)$ при $k>0$. Разобьем $[0,t]$ на N промежутков. Пусть B - событие, состоящее в том, что хотя бы на одном из промежутков зарегистрированы по крайней мере два события. По свойству (c) $P(B)\leqslant N\cdot o(t/N)=o(t)\to 0$ при $N\to+\infty$. Теперь рассмотрим событие A_k, состоящее в том, что на промежутке $[0,t]$ зарегистрировано ровно k событий, при условии, что на каждом промежутке разбиения зарегистрировано не более одного события. Вероятность отсутствия события на одном промежутке разбиения равна $P_0(t/N)=e^{-\lambda t/N}$, мы опять находимся в ситуации схемы Бернулли. Следовательно, имеем

$$P(A_k)=C_N^k\left(e^{-\lambda t/N}\right)^{N-k}\left(1-e^{-\lambda t/N}\right)^k=$$

$$=\frac{e^{-\lambda t}}{e^{\lambda tk/N}}\cdot\frac{N\ldots(N-k+1)}{k!}\left(1-e^{-\lambda t/N}\right)^k\sim\frac{e^{-\lambda t}}{k!}\cdot\frac{N\ldots(N-k+1)}{e^{\lambda tk/N}}\left(\frac{\lambda t}{N}\right)^k\to\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}\qquad(N\to+\infty)$$

С учетом вышесказанного про $P(B)$ имеем

$$P_k(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t},$$

т. е. получаем распределение Пуассона. Число λ называется интенсивностью или параметром процесса $X(t)$.

Замечание 1. $P(A_k)$ является условной вероятностью (на промежутке $[0,t]$ зарегистрировано ровно k событий, при условии, что на каждом промежутке разбиения зарегистрировано не более одного события), но $1-P(B)$ является вероятностью этого самого условия, но в силу того, что $P(B)\sim 0$, $P(A_k)=P_k(t)$.