Осенний коллоквиум курса «Теория вероятностей»

ФКН НИУ ВШЭ, 2-й курс ОП ПМИ, 2-й модуль, 2016 учебный год

Билет 4

Формула полной вероятности. Формула Байеса. Задача о сумасшедшей старушке.

Формула полной вероятности

Теорема 1. *(Формула полной вероятности)*
Пусть $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ и $A_i \cap A_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$). Тогда для всякого события B имеет место равенство

$$P(B) = \sum_i P(B|A_i)P(A_i).$$

Доказательство.

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n) =$$
$$\text{Переписываем каждую } P(B \cap A_i) \text{ как } P(B|A_i) \cdot P(A_i)$$
$$= P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) + \ldots + P(B|A_n) \cdot P(A_n).$$

□

Формула Байеса

Теорема 2. *(Формула Байеса) Пусть* $P(A) > 0$ *и* $P(B) > 0$. *Тогда имеет место равенство*

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}.$$

Доказательство. Достаточно заметить, что

$$P(A|B)P(B) = P(A \cap B) = P(B|A)P(A).$$

□

Задача о сумасшедшей старушке

Задача 1. На посадку в самолет стоят $N \geqslant 2$ пассажиров, среди которых сумасшедшая старушка. Старушка расталкивает всех пассажиров и садится в самолет на произвольное место. Затем пассажиры, когда заходят в самолет, садятся на свое место, если оно свободно, и на произвольное свободное место в противном случае. Какова вероятность того, что последний пассажир сядет на свое место?

Решение.
Пусть эта вероятность равна P_N.
Докажем методом математической индукции, что верно следующее равенство:

$$P_N = \frac{1}{2}$$

База: Если $N = 2$, то $P_N = \frac{1}{2}$.
Шаг индукции:
Предположим, что уже для всех $k \leqslant N$ доказано, что $P_k = \frac{1}{2}$. Докажем равенство $P_{N+1} = \frac{1}{2}$:
Событие B состоит из тех исходов, когда последний пассажир садится на свое место. Событие A_m состоит из тех исходов, когда старушка села на место m-го пассажира. По формуле полной вероятности

$$P_{N+1} = P(B) = \sum_m P(B|A_m)P(A_m). \text{ (*)}$$

Заметим, что $P(A_m) = \frac{1}{N+1}$ и все, кроме двух (когда старушка села на свое место (в этом случае $P(B|A_m) = 1$) или на место последнего пассажира (в этом случае $P(B|A_m) = 0$)), вероятности $P(B|A_m) = \frac{1}{2}$ (когда старушка садится на место m-го пассажира, m-ый пассажир фактически превращается в сумасшедшую старушку и мы получаем задачу для N пассажиров, а по предположению индукции $P_N = \frac{1}{2}$). Таких $P(B|A_m)$, что $P(B|A_m) = \frac{1}{2}$, будет ровно $N - 1$, так как всего слагаемых в (*) $N + 1$. Следовательно, имеем

$$P_{N+1} = \frac{N-1}{2(N+1)} + \frac{1}{N+1} = \frac{1}{2}.$$

Шаг индукции доказан. Значит, верно утверждение

$$P_N = \frac{1}{2}.$$