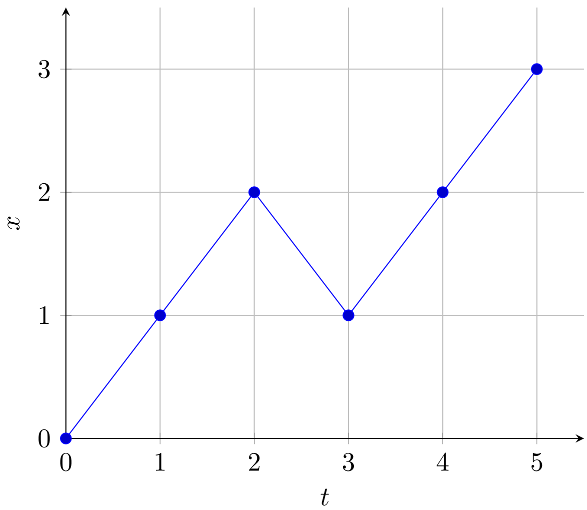
Осенний коллоквиум курса «Теория вероятностей»
ФКН НИУ ВШЭ, 2-й курс ОП ПМИ, 2-й модуль, 2016 учебный год

Билет 7

Случайное блуждание: принцип отражения, задача о баллотировке и задача о возвращении в начало координат

Случайное блуждание

Схема Бернулли имеет геометрическую интерпретацию.
По числовой прямой двигается частица, которая каждую секунду перемещается на единицу вправо или на единицу влево, причем выбор обоих направлений равновозможен и не зависит от соответствующего выбора на других шагах. Мы считаем, что в начальный момент времени частица находится в точке $x = 0$.
Ясно, что траекторию движения частицы за N перемещений можно закодировать последовательностью из 1 или -1 длины N. Набор таких последовательностей - пространство элементарных исходов. Вероятность каждой траектории равна $\frac{1}{2^N}$. Таким образом, с точностью до обозначений мы получим схему Бернулли, описывающую бросание правильной монеты.
Такая интерпретация называется *случайным блужданием*.
При исследовании случайного блуждания нас будет интересовать вероятность того, что траектория движения частицы обладает некоторым свойством. Для этого будет полезно следующее:
Траектории частицы будем изображать на координатной плоскости переменных (t, x) в виде ломанных, соединяющих точки с целочисленными координатами t и x. Здесь x — положение частицы, а t — время.
Например:



Замечание 1. Количество путей из (t_0, x_0) в (t_1, x_1) вычисляется по формуле

$$C_{t_1-t_0}^{\frac{t_1-t_0+x_1-x_0}{2}}.$$

(Чтобы понять, как возникла такая формула, достаточно представить траекторию именно как последовательность из нулей и единиц длины $t_1 - t_0$.)

Принцип отражения

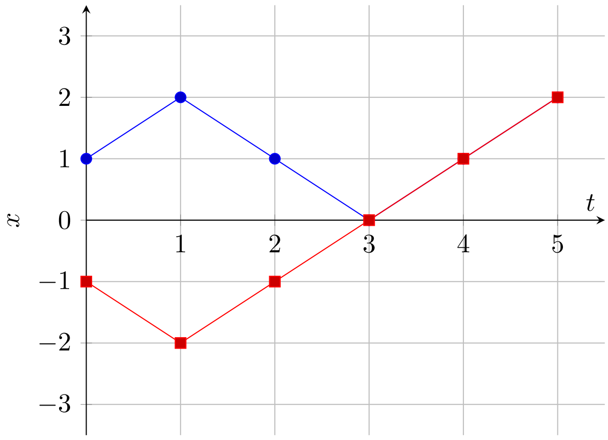
Предложение 1. *(Принцип отражения)*
Пусть $x_0 > 0$, $x_1 > 0$ и $t_0 < t_1$. Число путей из (t_0, x_0) в (t_1, x_1), которые касаются или пересекают ось времени, равно числу путей из $(t_0, -x_0)$ в (t_1, x_1).

Доказательство. Установим биективное соответствие между этими путями. Возьмем путь из (t_0, x_0) в (t_1, x_1), который касается или пересекает ось времени. Пусть t^* — первый момент времени, когда $x = 0$. Отразим часть пути, соответствующую отрезку времени $[t_0, t^*]$, относительно оси времени, а оставшуюся часть оставим без изменений. Получаем путь, соединяющий точки $(t_0, -x_0)$ и (t_1, x_1). $\square$

Замечание 2. Количество таких путей вычисляется по формуле

$$C_{t_1-t_0}^{\frac{t_1-t_0+x_1+x_0}{2}}.$$

Пример:



Задача о баллотировке

Какова вероятность того, что частица, которая вышла из нуля и пришла в точку $k > 0$ за N шагов, все время находилась в точках с положительными координатами? Рассматриваемая задача имеет интересную интерпретацию и называется «теоремой о баллотировке».

Задача 1. Если на выборах один кандидат набрал q голосов, а другой — r голосов и $r > q$, то какова вероятность того, что победивший кандидат все время был впереди? Предполагается, что голосовавшие не имели предпочтений и отдавали свой голос случайно, в подсчет голосов происходил последовательно.

Решение.
Заметим, что первым шагом частица обязана подняться наверх. Начиная со второго шага, необходимая траектория частицы исходит из точки $(1, 1)$ и идет в точку (N, k), не касаясь и не пересекая ось времени. По принципу отражения мы умеем считать число остальных траекторий, соединяющих $(1, 1)$ и (N, k). Таких траекторий ровно столько же, сколько всего траекторий из $(1, -1)$ в (N, k), а их количество равно $C_{N-1}^{\frac{N+k}{2}}$. Всего траекторий из $(1, 1)$ в (N, k) равно $C_{N-1}^{\frac{N+k}{2}-1}$. Следовательно, число нужных траекторий частицы равно

$$C_{N-1}^{\frac{N+k}{2}-1} - C_{N-1}^{\frac{N+k}{2}} = \frac{k}{N} C_N^{\frac{N+k}{2}}.$$

Здесь $C_N^{\frac{N+k}{2}}$ — количество путей, соединяющих начало координат и точку (N, k). Значит, искомая вероятность равна $\frac{k}{N}$. В условиях задачи о баллотировке соответствующая вероятность равна $\frac{r-q}{r+q}$.

Задача о возвращении в начало координат

Пусть частица вышла из начала координат. Обозначим через u_{2n} вероятность того, что в момент времени $t = 2n$ частица вернулась в точку $x = 0$, а через f_{2n} вероятность того, что это произошло в первый раз.
Ясно, что $u_{2n} = C_{2n}^n 2^{-2n}$ (в таких траекториях частица n раз поднимается и столько же спускается, тогда достаточно найти количество исходов, в которых ровно n раз частица выбирает подъем, и разделить на количество всех возможных исходов).
Найдем теперь f_{2n}. Частица приходит в точку x_0 в момент времени $2n$ из точек $x = 1$ или $x = -1$ (в момент времени $t = 2n - 1$). Число путей в точку $(2n - 1, 1)$ из начала координат таких, что все координаты точек, через которые проходит путь, положительные, равно $\frac{1}{2n-1} C_{2n-1}^n$ (смотри задачу о баллотировке). Столько же путей в точку $(2n-1, -1)$ из начала координат таких, что все координаты точек, через которые проходит путь, отрицательные (так как этот случай фактически симметричен предыдущему). Следовательно, всего нужных нам путей $\frac{2}{2n-1} C_{2n-1}^n$ и

$$f_{2n} = \frac{2}{2n-1} C_{2n-1}^n \cdot 2^{-2n} = \frac{1}{2n} u_{2n-2}.$$

Формула Стирлинга позволяет найти асимптотику таких вероятностей:

$$f_{2n} = \frac{1}{2n} \cdot u_{2n-2} \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}}.$$