

БИЛЕТ 1

*Совместное распределение двух случайных величин. Свойства функции распределения.*

СОВМЕСТНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДВУХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Для начала напомним определение случайной величины.

**Определение 1.**  $\xi$  называется *случайной величиной*, если

$$\{\omega : \xi(\omega) \in \langle a, b \rangle\} \in \mathfrak{A},$$

то есть множество исходов таких, что случайная величина принадлежит некоторому промежутку, является событием. Можно доказать, что это верно не только для промежутков, но и для любых элементов из  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

Ранее мы рассматривали распределения и функции распределения случайных величин, взятых по отдельности. Теперь мы подросли, стали большими и сильными и поэтому можем перейти к более серьезным вещам. Рассмотрим вероятностное пространство  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  и две случайные величины  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  и  $\eta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

Пусть  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , рассмотрим множество  $\{(\xi, \eta) \in B_1 \times B_2\} = \{(\xi \in B_1) \& (\eta \in B_2)\} = \{\xi \in B_1\} \cap \{\eta \in B_2\}$ , а так как  $\{\xi \in B_1\} \in \mathfrak{A}$  и  $\{\eta \in B_2\} \in \mathfrak{A}$ , то и  $\{(\xi \in B_1) \& (\eta \in B_2)\} \in \mathfrak{A}$ , то есть  $\{(\xi, \eta) \in B_1 \times B_2\}$  является событием.

Так как  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$  порождена всеми множествами вида  $B_1 \times B_2$ , где  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , то  $\{\omega : (\xi(\omega), \eta(\omega)) \in B\} \in \mathfrak{A}$ , то есть для него можно определить вероятность.

**Определение 2.** Для любых  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$  мы можем определить вероятностную меру

$$\mu_{\xi\eta}(B) = P(\{\omega : (\xi(\omega), \eta(\omega)) \in B\}).$$

Такую меру называют *совместным распределением* случайных величин  $\xi$  и  $\eta$ .

*Доказательство.* Докажем, что  $\mu_{\xi\eta}$  является вероятностной мерой:

(а)  $\mu_{\xi\eta}(\mathbb{R}^2) = P(\Omega) = 1$ , очевидно

(б) Пусть  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ , тогда  $P(\omega : (\xi(\omega), \eta(\omega)) \in B_1 \cup B_2) = \mu_{\xi\eta}(B_1 \cup B_2) = \mu_{\xi\eta}(B_1) + \mu_{\xi\eta}(B_2) = P(B_1) + P(B_2)$

□

**Определение 3.** Функцию

$$F_{\xi\eta}(x, y) = P(\xi \leq x, \eta \leq y) = \mu_{\xi\eta}((-\infty, x], (-\infty, y])$$

называют *функцией совместного распределения* случайных величин  $\xi$  и  $\eta$  или функцией распределения случайного вектора  $(\xi, \eta)$ .

ДИСКРЕТНЫЙ АКА ЕБУЧИЙ СЛУЧАЙ

Если случайная величина принимает конечное число значений, то совместным распределением является функция

$$\mu_{\xi\eta}(x_0, y_0) = P(\{\omega : (\xi(\omega), \eta(\omega)) = (x_0, y_0)\}),$$

или же можно определить распределение через индикаторную функцию:

$$\mu_{\xi\eta}(x, y) = \sum_{i,j} p_{ij} \cdot I_{(x=x_i, y=y_j)}(x, y),$$

где  $p_{ij}$  - вероятность, что случайный вектор  $(\xi, \eta)$  примет значение  $(x_i, x_j)$ .

## СВОЙСТВА ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Функция совместного распределения обладает рядом свойств, аналогичных свойствам функции распределения одной случайной величины:

**Свойство 1.** Для любых  $a < c$  и  $b < d$  верно

$$F_{\xi\eta}(c, d) - F_{\xi\eta}(a, d) - F_{\xi\eta}(c, b) + F_{\xi\eta}(a, b) \geq 0$$

*Доказательство.*  $P((\xi, \eta) \in (a, c] \times (b, d]) = F_{\xi\eta}(c, d) - F_{\xi\eta}(a, d) - F_{\xi\eta}(c, b) + F_{\xi\eta}(a, b)$  есть вероятность попадания в прямоугольник, а вероятность неотрицательна, что и требовалось доказать.  $\square$

**Свойство 2.**  $F_{\xi\eta}$  непрерывна справа по совокупности переменных, то есть

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0+0 \\ y \rightarrow y_0+0}} F_{\xi\eta}(x, y) = F_{\xi\eta}(x_0, y_0)$$

Сначала докажем лемму

**Лемма 1.** В вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  верно:

- (a)  $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \dots \subseteq C_n \subseteq C_{n+1} \subseteq \dots$   
 $C = \bigcup_n C_n \Rightarrow P(C_n) \rightarrow P(C)$
- (b)  $C_1 \supseteq C_2 \supseteq \dots \supseteq C_n \supseteq C_{n+1} \supseteq \dots$   
 $C = \bigcap_n C_n \Rightarrow P(C_n) \rightarrow P(C)$

*Доказательство.*

- (a) Пусть  $A_1 = C_1$  и  $A_n = C_n \setminus C_{n-1}$  для  $n > 1$ .

Тогда  $C = \bigcup_n A_n$  и  $P(C) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ .

Но тогда  $P(C_n) = \sum_{n=1}^n P(A_n)$  стремится к  $P(C)$  как частичная сумма ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ .

- (b) Сведем к первому случаю, пусть  $A_1 = \Omega \setminus C_1$  и  $A_n = C_{n-1} \setminus C_n$  для  $n > 1$ .

Тогда  $C = \Omega \setminus \bigcup_n A_n$  и все рассуждения аналогичны.

$\square$

Используя лемму, сможем доказать свойство

*Доказательство.* Так как функция распределения монотонна по обоим переменным (первое свойство) и ограничена (так как является вероятностью), то существует предел

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0+0 \\ y \rightarrow y_0+0}} F_{\xi\eta}(x, y) = L.$$

Тогда требуется доказать, что  $L = F_{\xi\eta}(x_0, y_0)$ .

Пусть  $C_n = \{\omega : \xi(\omega) \leq x_0 + \frac{1}{n}, \eta(\omega) \leq y_0 + \frac{1}{n}\}$  и пусть  $C = \bigcap_n C_n = \{\omega : \xi(\omega) \leq x_0, \eta(\omega) \leq y_0\}$ , тогда из леммы 1 следует, что

$$L = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0+0 \\ y \rightarrow y_0+0}} F_{\xi\eta}(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(C_n) = P(C) = F_{\xi\eta}(x_0, y_0)$$

$\square$

**Свойство 3.** Если хотя бы одно из  $a$  или  $b$  равно  $-\infty$ , то

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} F_{\xi\eta}(x, y) = 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} F_{\xi\eta}(x, y) = 1$$

*Доказательство.* С очевидностью следует из леммы, в первом случае последовательность множеств  $C_n$  стремится к пустому множеству, тогда вероятность пересечения равна  $P(\emptyset) = 0$ , а во втором случае  $C_n$  стремится ко всей плоскости, поэтому вероятность объединения равна  $P(\Omega) = 1$ .  $\square$

*Замечание 1.* Если функция  $F_{\xi\eta}(x, y)$  удовлетворяет свойствам 1-3, то существует единственная вероятностная мера  $\mu_{\xi\eta}$  на  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$  такая, что

$$F_{\xi\eta}(x, y) = \mu_{\xi\eta}((-\infty, x], (-\infty, y]).$$

## Билет 2

*Независимые случайные величины. Характеризация независимости в терминах функций распределения и плотностей. Плотность распределения суммы двух независимых случайных величин.*

НЕЗАВИСИМЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ, ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ НЕЗАВИСИМОСТИ В ТЕРМИНАХ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ПЛОТНОСТЕЙ

**Определение 1.** Случайные величины  $\xi_1, \dots, \xi_n$  называются независимыми, если выполняется

$$P(\xi_1 \in B_1, \dots, \xi_n \in B_n) = P(\xi_1 \in B_1) \cdot \dots \cdot P(\xi_n \in B_n)$$

*Замечание 1.* Если у нас есть меры  $\mu_\xi(B_1)$  и  $\mu_\eta(B_2)$ , где  $B_1, B_2$  — полуинтервалы, то мы можем определить новую меру  $\mu(B_1 \times B_2) = \mu_\xi(B_1) \cdot \mu_\eta(B_2) = \mu_\xi \otimes \mu_\eta$  и такую меру можно продолжить на  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ .

*Замечание 2.* Определение независимости можно переписать в терминах распределения (для двух случайных величин):

$$\mu_{\xi\eta}(B_1 \times B_2) = \mu_\xi(B_1) \cdot \mu_\eta(B_2)$$

а значит, мы можем переписать определение, как

$$\begin{array}{c} \xi \text{ и } \eta \text{ независимы} \\ \Updownarrow \\ \mu_{\xi\eta} = \mu_\xi \otimes \mu_\eta \end{array}$$

**Теорема 1.** Случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  независимы  $\Leftrightarrow F_{\xi\eta}(x, y) = F_\xi(x) \cdot F_\eta(y)$

*Доказательство.* В одну сторону ( $\Rightarrow$ ):

$$F_{\xi\eta}(x, y) = P(\xi \leq x, \eta \leq y) = P(\xi \leq x) \cdot P(\eta \leq y) = F_\xi(x) \cdot F_\eta(y)$$

В другую сторону ( $\Leftarrow$ ):

Пусть  $\mu(B) = \mu_\xi \otimes \mu_\eta(B)$ , где  $B$  — углы, учитывая при этом, что определив такую меру на углах, можно определить с ее помощью прямоугольники, а после продолжить на любые множества из  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ . Тогда

$$F_{\xi\eta}(x, y) = F_\xi(x) \cdot F_\eta(y) = \mu_\xi((-\infty, x]) \cdot \mu_\eta((-\infty, y]) = \mu((-\infty, x] \times (-\infty, y]) = \mu_\xi \otimes \mu_\eta((-\infty, x] \times (-\infty, y]),$$

а так как для  $F_{\xi\eta}(x, y)$  существует единственная вероятностная мера  $\mu_{\xi\eta}$  такая, что

$$F_{\xi\eta}(x, y) = \mu_{\xi\eta}((-\infty, x], (-\infty, y]),$$

то  $\mu = \mu_{\xi\eta}$ , а значит,  $\xi$  и  $\eta$  независимы. □

**Теорема 2.** Пусть случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  имеют плотности  $\rho_\xi$  и  $\rho_\eta$  соответственно, тогда  $\xi$  и  $\eta$  независимы  $\Leftrightarrow \rho_{\xi\eta}(x, y) = \rho_\xi(x) \cdot \rho_\eta(y)$ .

*Доказательство.* В одну сторону ( $\Rightarrow$ ):

$$\rho_{\xi\eta}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{\xi\eta}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_\xi(x) \cdot F_\eta(y) = \rho_\xi(x) \cdot \rho_\eta(y)$$

В другую сторону ( $\Leftarrow$ ):

$$F_{\xi\eta}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \rho_\xi(u) \rho_\eta(v) du dv = \int_{-\infty}^x \rho_\xi(u) du \cdot \int_{-\infty}^y \rho_\eta(v) dv = F_\xi(x) \cdot F_\eta(y)$$

□

ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СУММЫ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

**Теорема 3.** Пусть случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  имеют плотности  $\rho_\xi$  и  $\rho_\eta$  соответственно и являются независимыми. Тогда

$$\rho_{\xi+\eta}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\xi(x) \rho_\eta(t-x) dx.$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} F_{\xi+\eta}(t) &= P(\xi + \eta \leq t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{t-x} \rho_\xi(x) \rho_\eta(y) dy \right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\xi(x) \left( \int_{-\infty}^{t-x} \rho_\eta(y) dy \right) dx = \left\{ \begin{array}{l} y = v - x \\ dy = dv \end{array} \right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\xi(x) \left( \int_{-\infty}^t \rho_\eta(v-x) dv \right) dx = \int_{-\infty}^t \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\xi(x) \rho_\eta(v-x) dx \right) dv \end{aligned}$$

Тогда

$$\rho_{\xi+\eta}(t) = F'_{\xi+\eta}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\xi(x) \rho_\eta(t-x) dx.$$

□

## Билет 3

*Математическое ожидание случайной величины и его свойства: линейность, монотонность, неравенство Чебышёва. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин.*

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ И ЕГО СВОЙСТВА: ЛИНЕЙНОСТЬ И МОНОТОННОСТЬ

Пусть дано вероятностное пространство  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  и пусть  $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  — случайная величина, принимающая конечное число различных значений.

Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — различные значения  $\xi$  и пусть  $A_i = \{\omega: \xi(\omega) = x_i\}$ , где  $A_i$  — непересекающиеся множества и  $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ .

Также определим  $\xi = x_1 I_{A_1} + x_2 I_{A_2} + \dots + x_n I_{A_n}$ , где  $I_{A_i}$  — индикатор, который определяется как:

$$I_{A_i}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A_i \\ 0, & \omega \notin A_i \end{cases}$$

**Определение 1.** Математическое ожидание  $\xi$  — это число, равное

$$\mathbb{E}[\xi] = x_1 P(A_1) + x_2 P(A_2) + \dots + x_n P(A_n)$$

**Утверждение 1.** Если  $\forall i \neq j \ B_i \cap B_j = \emptyset$  и

$$\xi = y_1 I_{B_1} + y_2 I_{B_2} + \dots + y_n I_{B_n},$$

где  $y_i$  могут быть равны (в отличие от сложности билетов), то

$$\mathbb{E}[\xi] = y_1 P(B_1) + y_2 P(B_2) + \dots + y_n P(B_n)$$

*Доказательство.*  $x_1, x_2, \dots, x_m$  — различные значения случайной величины  $\xi$  и пусть  $A_k = \{\omega: \xi(\omega) = x_k\}$ . Пусть  $M_k = \{i: y_i = x_k\}$  ( $1 \leq k \leq m$ ), тогда  $\bigcup_{i \in M_k} B_i = A_k$  и  $\sum_{i \in M_k} P(B_i) = P(A_k)$

$$\mathbb{E}[\xi] = \sum_{k=1}^m x_k P(A_k) = \sum_{k=1}^m x_k \left( \sum_{i \in M_k} P(B_i) \right) = \sum_{k=1}^m \sum_{i \in M_k} y_i P(B_i) = y_1 P(B_1) + y_2 P(B_2) + \dots + y_n P(B_n)$$

□

## СВОЙСТВА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ

(1) Линейность:

$$\mathbb{E}[\alpha\xi + \beta\eta] = \alpha\mathbb{E}[\xi] + \beta\mathbb{E}[\eta]$$

(2) Монотонность:

$$\xi \leq \eta \Rightarrow \mathbb{E}[\xi] \leq \mathbb{E}[\eta]$$

*Доказательство.* (1) Докажем линейность:

$$\xi = x_1 I_{A_1} + x_2 I_{A_2} + \dots + x_n I_{A_n}, \forall i \neq j \ A_i \cap A_j = \emptyset$$

$$\Omega = \bigcup_n A_i$$

$$\eta = y_1 I_{B_1} + y_2 I_{B_2} + \dots + y_m I_{B_m}, \forall i \neq j \ B_i \cap B_j = \emptyset$$

$$\Omega = \bigcup_m B_i$$

$$\alpha\xi + \beta\eta = \sum_{i,j} (\alpha x_i + \beta y_j) I_{A_i \cap B_j}$$

$$\mathbb{E}[\alpha\xi + \beta\eta] = \sum_{i,j} (\alpha x_i + \beta y_j) P(A_i \cap B_j) = \alpha \sum_{i,j} x_i P(A_i \cap B_j) + \beta \sum_{i,j} y_j P(A_i \cap B_j)$$

При фиксированном  $i$  сумма всех  $B_j$  равна  $\Omega$ , при фиксированном  $j$  сумма всех  $A_i$  равна  $\Omega$ , поэтому получаем, что сумма равна

$$\alpha \sum_i x_i P(A_i) + \beta \sum_j y_j P(B_j) = \alpha \mathbb{E}[\xi] + \beta \mathbb{E}[\eta].$$

(2) Докажем монотонность:

Если  $\xi \geq 0$ , то  $\mathbb{E}[\xi] \geq 0$ . Из свойства линейности следует, что  $\mathbb{E}[\xi - \eta] = \mathbb{E}[\xi] - \mathbb{E}[\eta]$ , пусть  $\xi \geq \eta$ , это значит, что  $\mathbb{E}[\xi - \eta] \geq 0$ , тогда  $\mathbb{E}[\xi] - \mathbb{E}[\eta] \geq 0 \Rightarrow \mathbb{E}[\xi] \geq \mathbb{E}[\eta]$ .  $\square$

### НЕРАВЕНСТВО ЧЕБЫШЕВА

Неравенство Чебышёва является следствием из свойств математического ожидания.

**Теорема 1.** Пусть  $\xi \geq 0$ . Тогда верно следующее неравенство:

$$P(\xi \geq C) \leq \frac{\mathbb{E}[\xi]}{C}$$

для некоторого числа  $C$ .

*Доказательство.* Пусть  $A = \{\omega: \xi(\omega) \geq C\}$ . Тогда

$$\xi \geq CI_A$$

Если  $I_A = 0$ , то так как  $\xi \geq 0$  неравенство выполнено. Если же  $I_A = 1$ , то так как  $\xi(\omega) \geq C$  неравенство выполнено. Воспользуемся свойствами монотонности и линейности

$$\mathbb{E}[\xi] \geq C\mathbb{E}(I_A) = CP(A) \Rightarrow \frac{\mathbb{E}[\xi]}{C} \geq P(A).$$

$\square$

**Следствие 1.** Из неравенства Чебышёва, например, следует неравенство:

$$\mathbb{E}[\xi] \leq \sup_{\Omega} \xi$$

*Доказательство.*

$$\xi \leq \sup_{\Omega} \xi \Rightarrow -\xi \geq -\sup_{\Omega} \xi.$$

По неравенству Чебышёва и свойству линейности получаем

$$1 = P\left(-\xi \geq -\sup_{\Omega} \xi\right) \leq \frac{\mathbb{E}[-\xi]}{-\sup_{\Omega} \xi} \Rightarrow -\sup_{\Omega} \xi \leq (-1) \cdot \mathbb{E}[\xi] \Rightarrow \sup_{\Omega} \xi \geq \mathbb{E}[\xi].$$

(вообще говоря, это очевидно, но ведь тебе надо выебнуться хоть как-то)

$\square$

### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

**Теорема 2.** Пусть  $\xi$  и  $\eta$  - независимые случайные величины. Тогда  $\mathbb{E}[\xi\eta] = \mathbb{E}[\xi] \cdot \mathbb{E}[\eta]$  (обратное утверждение неверно).

*Доказательство.* Пусть  $A_i = \{\omega: \xi(\omega) = x_i\}$ ,  $B_j = \{\omega: \eta(\omega) = y_j\}$ , тогда

$$\xi = \sum_i x_i I_{A_i}$$

$$\eta = \sum_j y_j I_{B_j}$$

$$\xi \cdot \eta = \sum_{i,j} x_i y_j I_{A_i} I_{B_j} = \sum_{i,j} x_i y_j I_{A_i \cap B_j}$$

$$\mathbb{E}[\xi\eta] = \sum_{i,j} x_i y_j P(A_i \cap B_j) = \sum_{i,j} x_i y_j P(A_i) P(B_j) = \left( \sum_i x_i P(A_i) \right) \cdot \left( \sum_j y_j P(B_j) \right) = \mathbb{E}[\xi] \cdot \mathbb{E}[\eta]$$

$\square$