Осенний коллоквиум курса «Теория вероятностей»

ФКН НИУ ВШЭ, 2-й курс ОП ПМИ, 2-й модуль, 2016 учебный год

Билет 9

Вероятностное пространство: сигма алгебра событий и вероятностная мера. Борелевская сигма алгебра. Мера Лебега.

Вероятностное пространство: сигма алгебра событий и вероятностная мера

Определение 1. Пусть Ω — некоторое множество точек w. Система $\mathfrak{A}$ подмножеств Ω называется *алгеброй событий*, если

- $\Omega \in \mathfrak{A}$,
- $A, B \in \mathfrak{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{A}, A \cap B \in \mathfrak{A}$,
- $A \in \mathfrak{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathfrak{A}$.

Определение 2. Если дополнительно верно, что

$$\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathfrak{A} \Rightarrow \bigcup_n A_n, \bigcap_n A_n \in \mathfrak{A},$$

то $\mathfrak{A}$ называется *σ-алгеброй событий ("сигма алгеброй событий")*.

Определение 3. *Вероятностная мера P на σ-алгебре $\mathfrak{A}$ подмножества Ω* — это такая функция $P\colon \mathfrak{A} \to [0, 1]$, удовлетворяющая следующим свойствам:

(1) $P(\Omega) = 1$,

(2) $P\left(\bigcup\limits_n A_n\right) = \sum\limits_n P(A_n)$ при условии, что $\forall i, j \ A_i \cap A_j = \varnothing$.

Определение 4. Тройка $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ называется *вероятностным пространством*.

Борелевская сигма алгебра

Определение 5. Пусть S — набор подмножеств Ω. $\sigma(S)$ — *сигма алгебра, порожденная* S, то есть $\sigma(S)$ — наименьшая по вложению σ-алгебра, содержащая S.

Определение 6. *Борелевская σ-алгебра* $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ — σ-алгебра, порожденная всеми возможными полуинтервалами $\{(a, b] | a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, a < b\}$.

Мера Лебега

Определение 7. *Мерой Лебега* называется обычная длина, то есть такая $\lambda : \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, что

$$\lambda([a, b]) = b - a.$$

Как вычислить вероятность попадания случайной точки в некоторый подотрезок отрезка $[0, 1]$ на прямой? Мы не можем приписать положительную вероятность каждому такому подотрезку, так как если мы каждой точке (подотрезку $[x_0, x_0]$) присвоим положительную вероятность, то, так как отрезок $[0, 1]$ содержит бесконечное число различных точек, какую бы маленькую вероятность мы ни присвоили каждой точке, первое свойство вероятностной меры ($P(\Omega) = 1$) выполняться не будет.

Для таких событий (попадание точки x_0, случайно выбранной из отрезка $[0, 1]$, в некоторый подотрезок $[a, b]$ отрезка $[0, 1]$) определить вероятностную меру можно при помощи меры Лебега — каждому событию вида $\{x_0 \in [a, b], a \leqslant b\}$ сопоставляется вероятность $\lambda([a, b])$.

Зададим вероятностную меру для каждого события из $\mathfrak{B}([0, 1])$ (можно обобщить на $\mathfrak{B}([a, b])$, где $a < b$) и проверим выполнимость свойств заданной нами вероятностной меры. Длина отрезка $[0, 1]$ равна единице, поэтому первое свойство вероятностной меры выполнено. Вероятности для каждого подотрезка определены корректно (то есть не больше единицы и не меньше нуля). В случае объединения конечного числа непересекающихся подотрезков определим вероятностную меру как сумму вероятностей для каждого из подотрезков, входящих в сумму (нетрудно убедиться, что свойства по-прежнему будут выполняться). Аналогично определим вероятностную меру для объединения счетного числа непересекающихся отрезков. Утверждение, что при таком определении вероятностной меры свойства по-прежнему будут выполняться, оставим без доказательства.