**Осенний коллоквиум курса «Теория вероятностей»**

ФКН НИУ ВШЭ, 2-й курс ОП ПМИ, 2-й модуль, 2016 учебный год

Билет 3

*Условная вероятность. Независимые события. Лемма Ловаса.*

## Условная вероятность

Пусть $P(B) > 0$.

**Определение 1.** *Условной вероятностью события $A$ при условии $B$* называется число

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

**Теорема 1.** *Если фиксировать событие $B$, то функция $P(\cdot|B)$ является вероятностной мерой.*

*Доказательство.* Во-первых, заметим, что

$$P(A \cap B) \leqslant P(B) \Rightarrow P(A|B) \in [0, 1].$$

Проверим теперь выполнимость свойств из определения:

$$(1) P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1,$$

$$(2) P(A \sqcup C|B) = \frac{P((A \sqcup C) \cap B)}{P(B)} =$$

$$= \frac{P((A \cap B) \sqcup (C \cap B))}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} + \frac{P(C \cap B)}{P(B)} =$$

$$= P(A|B) + P(C|B).$$

□

*Замечание* 1. Равенство из определения часто переписывают в виде

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$$

и называют *правилом умножения*.

## Независимые события

С точки зрения вычисления вероятностей независимость события A от события B означает, то вероятность A не зависит от того, произошло событие B или нет. Формализовать эту идею помогает условная вероятность. Тогда предположим, что $P(B) > 0$. Событие A не зависит от события B, если

$$P(A|B) = P(A),$$

что по определению условной вероятности можно переписать в следующем виде

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Это равенство и принимают в качестве определения независимости.

**Определение 2.** События A и B *независимы*, если

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

*Замечание* 2. Отметим, что из независимости A и B следует независимость $\overline{A}$ и B.

**Определение 3.** События $A_1, \dots, A_n$ называются *независимыми в совокупности*, если

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k})$$

для всякого $2 \leqslant k \leqslant n$ и всяких $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$.

*Замечание* 3. Отметим, что независимость в совокупности не совпадает с попарной независимостью.
Это можно проиллюстрировать *парадоксом независимости*.

*Задача (парадокс независимости)*
Два раза бросаем правильную монету. Событие A - при первом бросании выпал герб. Событие B - при втором бросании выпал герб. Событие C - ровно на одном бросании выпал герб. Эти события попарно независимы, но не являются независимыми в совокупности.
Действительно, любые два однозначно определяют определяют третье, в частности пересечение A и B исключает C, то есть $P(A \cap B \cap C) = 0 \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$.

## Лемма Ловаса

**Лемма 1.** *(Локальная лемма Ловаса в симметричной форме)*
*Предположим, что для событий $A_1, \ldots, A_n$ существует натуральное число $d \in \{1, \ldots, n\}$ такое, что*

(1) *для всякого $A_k$ найдется набор из не меньше, чем $n-d$, множеств $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots$ с таким свойством:*
*$A_k$ независимо с пересечением любого набора из этих множеств.*
(2) $P(A_k) \geqslant 1 - \frac{1}{e(d+1)}$ *для каждого $k$.*

*Тогда* $P\left(\bigcap\limits_k A_k\right) > 0 \Rightarrow \exists w \in \bigcap\limits_k A_k$.

*Доказательство.* Обозначим через $B_k$ событие противоположное событию $A_k$. Заметим, что

$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1|A_2 \cap \ldots \cap A_n) \cdot P(A_2|A_3 \cap \ldots \cap A_n) \cdot \ldots \cdot P(A_{n-2}|A_{n-1} \cap A_n) \cdot P(A_{n-1}|A_n) \cdot P(A_n) =$
$= (1 - P(B_1|A_2 \cap \ldots \cap A_n)) \cdot (1 - P(B_2|A_3 \cap \ldots \cap A_n)) \cdot \ldots \cdot (1 - P(B_{n-2}|A_{n-1} \cap A_n)) \cdot (1 - P(B_{n-1}|A_n)) \cdot P(A_n)$

$P(A_n) > 0$. Это следует из второго условия в формулировке леммы Ловаса.
Если мы докажем, что каждая вероятность $P(B_i|A_{i+1} \cap \ldots \cap A_n)$ строго меньше 1, то тем самым утверждение будет доказано. Будем доказывать более сильное утверждение, что для всякого набора индексов $J \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ и всякого $1 \leqslant i \leqslant n$ верна оценка:

$$P\left(B_i | \bigcap_{j \in J} A_j\right) \leqslant \frac{1}{d+1}.$$

Доказательство проведем индукцией по количеству элементов в J.
База: $|J| = 1, j \in J$,

$$P(B_i|A_j) = \frac{P(B_i \cap A_j)}{P(A_j)} \leqslant \frac{P(B_i)}{P(A_j)}$$
$$P(B_i) = 1 - P(A_i) \leqslant \frac{1}{e(d+1)}$$

А $P(A_j) \geqslant 1 - \frac{1}{e(d+1)}$. Тогда

$$P(B_i|A_j) \leqslant \frac{\frac{1}{e(d+1)}}{1 - \frac{1}{e(d+1)}} = \frac{1}{e(d+1) - 1} = \frac{1}{ed + e - 1} \leqslant \frac{1}{d+1}.$$

Шаг индукции:
Нам понадобится следующее утверждение:

$$P(A|B \cap C) = \frac{P(A \cap B|C)}{P(B|C)}$$

*Доказательство.*

$$P(A|B \cap C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} =$$

Делим и числитель, и знаменатель на P(C)

$$= \frac{\frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)}}{\frac{P(B \cap C)}{P(C)}} = \frac{P(A \cap B|C)}{P(B|C)}$$

□

Пусть Z — пересечение зависимых с $B_i$ множеств $A_j$, а N — пересечение независимых. Тогда

$$P\left(B_i | \bigcap_{j \in J} A_j\right) = \frac{P(B_i \cap Z|N)}{P(Z|N)}.$$

Числитель не превосходит $P(B_i)$, а $P(B_i) = 1 - P(A_i) \leqslant \frac{1}{e(d+1)}$.
Оценим знаменатель. Пусть в Z входят множества с индексами $j_1, \ldots, j_s$, то есть $Z = A_{j_1} \cap \ldots \cap A_{j_s}$. Тогда имеем:

$$P(A_{j_1} \cap \ldots \cap A_{j_s}|N) = P(A_{j_1}|A_{j_2} \cap \ldots \cap A_{j_s} \cap N) P(A_{j_2} \cap \ldots \cap A_{j_s}|N) =$$
$$= (1 - P(B_{j_1}|A_{j_2} \cap \ldots \cap A_{j_s} \cap N)) P(A_{j_2} \cap \ldots \cap A_{j_s}|N).$$

По предложению индукции $P(B_{j_1}|A_{j_2} \cap \ldots \cap A_{j_s} \cap N) \leqslant \frac{1}{d+1}$. Значит, верно следующее неравенство

$$P(A_{j_1} \cap \ldots \cap A_{j_s}|N) \geqslant \left(1 - \frac{1}{d+1}\right) \cdot P(A_{j_2} \cap \ldots \cap A_{j_s}|N).$$

Повторяем рассуждения уже относительно $P(A_{j_2} \cap \ldots \cap A_{j_s}|N)$. И так продолжаем, пока не останется $P(A_{j_s}|N)$, так же оцениваем и ее, и, принимая во внимание оценку $s \leqslant d$ (она следует из первого условия формулировки леммы Ловаса), получаем для $P(A_{j_1} \cap \ldots \cap A_{j_s}|N)$ следующую оценку:

$$P(A_{j_1} \cap \ldots \cap A_{j_s}|N) \geqslant \left(1 - \frac{1}{d+1}\right)^d.$$

Заметим, что

$$\left(1 - \frac{1}{d+1}\right)^d = \left(1 + \frac{1}{-d-1}\right)^d = [q = -d-1; -d = q+1] = \left(\left(1 + \frac{1}{q}\right)^{q+1}\right)^{-1}$$

Тогда, так как последовательность $\left(\left(1 + \frac{1}{q}\right)^{q+1}\right)^{-1}$ сходится к $\frac{1}{e}$ сверху, то

$$P(A_{j_1} \cap \ldots \cap A_{j_s}|N) \geqslant \frac{1}{e}.$$

Возвращаемся к вероятности, которую надо было оценить:

$$P\left(B_i|\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \frac{P(B_i \cap Z|N)}{P(Z|N)} \leqslant \frac{1}{e(d+1)} \cdot \frac{1}{\frac{1}{e}} = \frac{1}{d+1}.$$

Шаг индукции доказан. Значит, верно утверждение

$$P\left(B_i|\bigcap_{j \in J} A_j\right) \leqslant \frac{1}{d+1}.$$

$\square$