Осенний коллоквиум курса «Теория вероятностей»
ФКН НИУ ВШЭ, 2-й курс ОП ПМИ, 2-й модуль, 2016 учебный год

Билет 10

Случайная величина и ее распределение. Функция распределения вероятностной меры и функция распределения случайной величины.

Случайная величина и ее распределение

Случайной называют величину, которая в результате испытания принимает одно и только одно возможное значение, наперед неизвестное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены. Дадим формальное определение:

Определение 1. Функция $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ называется *случайной величиной*, если

$$\{w\colon \xi(w) \in \langle a, b\rangle\} \in \mathfrak{A}.$$

Замечание 1. $\langle a, b\rangle$ — промежуток от a до b, это может быть отрезок, интервал или полуинтервал.

Замечание 2. Напомним, что если есть некоторая функция $f : X \to Y$, то прообразом множества $S \subseteq Y$ называется множество $f^{-1}(S) = \{x \in X\colon f(x) \in S\}$.
Тогда определение случайной величины можно переписать следующим образом:
Функция $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ называется *случайной величиной*, если

$$\xi^{-1}(\langle a, b\rangle) \in \mathfrak{A}.$$

Замечание 3. *Дискретной (прерывной)* называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями. При этом число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным.
Законом распределения дискретной случайной величины называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями. Его можно задавать таблично, аналитически (в виде формулы) и графически. При табличном задании закона распределения дискретной случайной величины первая строка таблицы содержит возможные значения, а вторая — их вероятности. При этом важно понимать, что так как случайная величина в одном испытании может принимать одно и только одно возможное значение, то сумма вероятностей во второй строке таблицы должна быть равна единице.

Пример 1. (Пример дискретной случайной величины)
Бросание монетки:

$$\xi(w) = \begin{cases} 1, \text{ если } w \text{ — Орел} \\ 0, \text{ если } w \text{ — Решка} \end{cases}$$

При этом закон распределения этой дискретной случайной величины можно задать следующим образом (аналитически):

$$P(\xi = w) = \begin{cases} p, \text{ если } w \text{ — Орел} \\ 1 - p, \text{ если } w \text{ — Решка} \end{cases}$$

где p — вероятность выпадания Орла.

Утверждение.
Если ξ — случайная величина, то $\forall B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ $\xi^{-1}(B) \in \mathfrak{A}$ или (что есть то же самое) $\xi^{-1}(B)$ является событием.

Доказательство. Определим σ как $\{C\colon \xi^{-1}(C) \in \mathfrak{A}\}$ и докажем, что σ является σ-алгеброй.
$\xi^{-1}(\mathbb{R}) = \Omega \in \mathfrak{A} \Rightarrow \mathbb{R} \in \sigma$ и $\xi^{-1}(\varnothing) = \varnothing \in \mathfrak{A} \Rightarrow \varnothing \in \sigma$.
Пусть теперь $C_1, C_2 \in \sigma$. Докажем, что $C_1 \cup C_2,\ C_1 \cap C_2,\ C_1 \setminus C_2 \in \sigma$:

$$\xi^{-1}(C_1 \cup C_2) = \xi^{-1}(C_1) \cup \xi^{-1}(C_2)$$

Но $\xi^{-1}(C_1) \in \mathfrak{A}$ и $\xi^{-1}(C_2) \in \mathfrak{A}$, а значит и $\xi^{-1}(C_1) \cup \xi^{-1}(C_2) \in \mathfrak{A}$, то есть $C_1 \cup C_2 \in \sigma$.
Аналогично для объединения и разности событий C_1, C_2. Более того, это выполняется и для счетного объединения (пересечения). Значит, σ является σ-алгеброй.
По определению случайной величины ξ эта σ-алгебра содержит промежутки. А минимальная σ-алгебра, содержащая все промежутки — $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Значит, $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \subseteq \sigma$. А что есть σ? Это $\{C\colon \xi^{-1}(C) \in \mathfrak{A}\}$ (множества, чьи прообразы лежат в $\mathfrak{A}$). Следовательно, $\forall B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ $\xi^{-1}(B) \in \mathfrak{A}$ (прообраз всякого B лежит в $\mathfrak{A}$). $\square$

На $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ определена вероятностная мера

$$\mu_\xi(B) = P\left(\xi^{-1}(B)\right).$$

Определение 2. Вероятностная мера μ_ξ называется *распределением* ξ.

Функция распределения вероятностной меры и функция распределения случайной величины

Вспомним, что дискретная случайная величина может быть задана перечнем всех ее возможных значений и их вероятностей. Такой способ задания не является общим. Для того, чтобы дать общий способ задания любых типов случайных величин, вводят функции распределения вероятностей случайной величины.
Пусть x — действительное число. Вероятность события, состоящего в том, что ξ примет значение, меньшее или равное x, то есть вероятность события $\xi \leqslant x$, обозначим через $F_\xi(x)$. Разумеется, если x изменяется, то, вообще говоря, изменяется и $F_\xi(x)$, то есть $F_\xi(x)$ — функция от x.

Определение 3. *Функцией распределения случайной величины* ξ называют функцию $F_\xi(x)$, определяющую вероятность того, что случайная величина ξ в результате испытания примет значение, меньшее или равное x, то есть

$$F_\xi(x) = P(\xi \leqslant x).$$

Замечание 4. Геометрически это равенство можно истолковать так: $F_\xi(x)$ есть вероятность того, что случайная величина ξ примет значение, которое изображается на числовой оси точкой на полуинтервале $(-\infty, x]$.

Свойство 1. *Значение функции распределения принадлежит отрезку* $[0, 1]$*:*

$$\forall \xi \; 0 \leqslant F_\xi(x) \leqslant 1.$$

Доказательство. Свойство возникает из определения функции распределения как вероятности: вероятность всегда есть неотрицательное число, не превышающее единицы. □

Свойство 2. $F_\xi(x)$ *— неубывающая функция, то есть*

$$\forall \xi \; F_\xi(x_2) \geqslant F_\xi(x_1), \text{ если } x_2 > x_1.$$

Доказательство. Пусть $x_2 > x_1$. Событие, состоящее в том, что ξ примет значение, меньшее или равное x_2, можно подразделить на следующие два несовместимых события: 1) ξ примет значение, меньшее или равное x_1, с вероятностью $P(\xi \leqslant x_1)$; 2) ξ примет значение, удовлетворяющее неравенству $x_1 < \xi \leqslant x_2$, с вероятностью $P(x_1 < \xi \leqslant x_2)$.
Тогда имеем:

$$P(\xi \leqslant x_2) = P(\xi \leqslant x_1) + P(x_1 < \xi \leqslant x_2).$$

Отсюда

$$P(\xi \leqslant x_2) - P(\xi \leqslant x_1) = P(x_1 < \xi \leqslant x_2)$$

или

$$F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1) = P(x_1 < \xi \leqslant x_2).$$

Так как любая вероятность есть число неотрицательное, то $F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1) \geqslant 0$, или $F_\xi(x_2) \geqslant F_\xi(x_1)$, что и требовалось доказать. □

Свойство 3. *Если возможные значения случайной величины* ξ *принадлежат интервалу* (a, b)*, то:*

(1) $F_\xi(x) = 0$ *при* $x \leqslant a$,
(2) $F_\xi(x) = 1$ *при* $x \geqslant b$.

Доказательство. (1) Пусть $x_1 \leqslant a$. Тогда событие $\xi \leqslant x_1$ невозможно (так как значений, меньших или равных x_1, величина ξ по условию не принимает) и, следовательно, вероятность такого события равна нулю.
(2) Пусть $x_2 \geqslant b$. Тогда событие $\xi \leqslant x_2$ достоверно (так как все возможные значения ξ меньше x_2) и, следовательно, вероятность такого события равна единице. □

Следствие 1. *Если возможные значения случайной величины* ξ *расположены на всей оси* x*, то справедливы следующие предельные соотношения:*

$$\lim_{x \to -\infty} F_\xi(x) = 0, \; \lim_{x \to +\infty} F_\xi(x) = 1.$$

Замечание 5. Доказанные свойства позволяют представить, как выглядит график распределения случайной величины.
График расположен в полосе, ограниченной прямыми $y = 0,\ y = 1$ (первое свойство).
При возрастании x в интервале (a, b), в котором заключены все возможные значения случайной величины, график "поднимается вверх" (второе свойство).
При $x \leqslant a$ ординаты графика равны нулю; при $x \geqslant b$ ординаты графика равны единице (третье свойство).

Замечание 6. График функции распределения дискретной случайной величины имеет ступенчатый вид.