Зимний коллоквиум курса «Теория вероятностей»

ФКН НИУ ВШЭ, 2-й курс ОП ПМИ, 2-й модуль, 2016 учебный год

Дата последнего обновления: 04.12.2016

Билет 1

Совместное распределение двух случайных величин. Свойства функции распределения.

Совместное распределение двух случайных величин

Для начала напомним определение случайной величины.

Определение 1. ξ называется *случайной величиной*, если

$$\{\omega : \xi(\omega) \in \langle a, b\rangle\} \in \mathfrak{A},$$

то есть множество исходов таких, что случайная величина принадлежит некоторому промежутку, является событием. Можно доказать, что это верно не только для промежутков, но и для любых элементов из $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Ранее мы рассматривали распределения и функции распределения случайных величин, взятых по отдельности. Теперь мы подросли, стали большими и сильными и поэтому можем перейти к более серьезным вещам. Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ и две случайные величины $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ и $\eta : \Omega \to \mathbb{R}$.
Пусть $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, рассмотрим множество $\{(\xi, \eta) \in B_1 \times B_2\} = \{(\xi \in B_1)\&(\eta \in B_2)\} = \{\xi \in B_1\} \cap \{\eta \in B_2\}$, а так как $\{\xi \in B_1\} \in \mathfrak{A}$ и $\{\eta \in B_2\} \in \mathfrak{A}$, то и $\{(\xi \in B_1)\&(\eta \in B_2)\} \in \mathfrak{A}$, то есть $\{(\xi, \eta) \in B_1 \times B_2\}$ является событием.
Так как $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ порождена всеми множествами вида $B_1 \times B_2$, где $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, то $\{\omega : (\xi(\omega), \eta(\omega)) \in B\} \in \mathfrak{A}$, то есть для него можно определить вероятность.

Определение 2. Для любых $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ мы можем определить вероятностную меру

$$\mu_{\xi\eta}(B) = P(\{\omega : (\xi(\omega), \eta(\omega)) \in B\}).$$

Такую меру называют *совместным распределением* случайных величин ξ и η.

Доказательство. Докажем, что $\mu_{\xi\eta}$ является вероятностной мерой:

(a) $\mu_{\xi\eta}(\mathbb{R}^2) = P(\Omega) = 1$, очевидно
(b) Пусть $B_1 \cap B_2 = \varnothing$, тогда $P(\omega : (\xi(\omega), \eta(\omega)) \in B_1 \cup B_2) = \mu_{\xi\eta}(B_1 \cup B_2) = \mu_{\xi\eta}(B_1) + \mu_{\xi\eta}(B_2) = P(B_1) + P(B_2)$

□

Определение 3. Функцию

$$F_{\xi\eta}(x, y) = P(\xi \leqslant x, \eta \leqslant y) = \mu_{\xi\eta}((-\infty, x], (-\infty, y])$$

называют *функцией совместного распределения* случайных величин ξ и η или функцией распределения случайного вектора (ξ, η).

Дискретный ака ебучий случай

Если случайная величина принимает конечное число значений, то совместным распределением является функция

$$\mu_{\xi\eta}(x_0, y_0) = P(\{\omega : (\xi(\omega), \eta(\omega)) = (x_0, y_0)\}),$$

или же можно определить распределение через индикаторную функцию:

$$\mu_{\xi\eta}(x, y) = \sum_{i,j} p_{ij} \cdot I_{(x=x_i, y=y_j)}(x, y),$$

где p_{ij} - вероятность, что случайный вектор (ξ, η) примет значение (x_i, x_j).

Свойства функции распределения

Функция совместного распределения обладает рядом свойств, аналогичных свойствам функции распределения одной случайной величины:

Свойство 1. *Для любых $a < c$ и $b < d$ верно*

$$F_{\xi\eta}(c,d) - F_{\xi\eta}(a,d) - F_{\xi\eta}(c,b) + F_{\xi\eta}(a,b) \geqslant 0$$

Доказательство. $P((\xi,\eta) \in (a,c] \times (b,d]) = F_{\xi\eta}(c,d) - F_{\xi\eta}(a,d) - F_{\xi\eta}(c,b) + F_{\xi\eta}(a,b)$ есть вероятность попадания в прямоугольник, а вероятность неотрицательна, что и требовалось доказать. □

Свойство 2. *$F_{\xi\eta}$ непрерывна справа по совокупности переменных, то есть*

$$\lim_{\substack{x \to x_0+0 \\ y \to y_0+0}} F_{\xi\eta}(x,y) = F_{\xi\eta}(x_0,y_0)$$

Сначала докажем лемму

Лемма 1. *В вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ верно:*

(a) $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \ldots \subseteq C_n \subseteq C_{n+1} \subseteq \ldots$
$C = \bigcup\limits_n C_n \Rightarrow P(C_n) \to P(C)$

(b) $C_1 \supseteq C_2 \supseteq \ldots \supseteq C_n \supseteq C_{n+1} \supseteq \ldots$
$C = \bigcap\limits_n C_n \Rightarrow P(C_n) \to P(C)$

Доказательство.

(a) Пусть $A_1 = C_1$ и $A_n = C_n \setminus C_{n-1}$ для $n > 1$.
Тогда $C = \bigcup\limits_n A_n$ и $P(C) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.
Но тогда $P(C_n) = \sum\limits_{n=1}^{n} P(A_n)$ стремится к $P(C)$ как частичная сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

(b) Сведем к первому случаю, пусть $A_1 = \Omega \setminus C_1$ и $A_n = C_{n-1} \setminus C_n$ для $n > 1$.
Тогда $C = \Omega \setminus \bigcup\limits_n A_n$ и все рассуждения аналогичны.

□

Используя лемму, сможем доказать свойство

Доказательство. Так как функция распределения монотонна по обеим переменным (первое свойство) и ограничена (так как является вероятностью), то существует предел

$$\lim_{\substack{x \to x_0+0 \\ y \to y_0+0}} F_{\xi\eta}(x,y) = L.$$

Тогда требуется доказать, что $L = F_{\xi\eta}(x_0,y_0)$.
Пусть $C_n = \{\omega : \xi(\omega) \leqslant x_0 + \frac{1}{n}, \eta(\omega) \leqslant y_0 + \frac{1}{n}\}$ и пусть $C = \bigcap\limits_n C_n = \{\omega : \xi(\omega) \leqslant x_0, \eta(\omega) \leqslant y_0\}$, тогда из леммы 1 следует, что

$$L = \lim_{\substack{x \to x_0+0 \\ y \to y_0+0}} F_{\xi\eta}(x,y) = \lim_{n \to \infty} P(C_n) = P(C) = F_{\xi\eta}(x_0,y_0)$$

□

Свойство 3. *Если хотя бы одно из a или b равно $-\infty$, то*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} F_{\xi\eta}(x,y) = 0$$

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} F_{\xi\eta}(x,y) = 1$$

Доказательство. С очевидностью следует из леммы, в первом случае последовательность множеств C_n стремится к пустому множеству, тогда вероятность пересечения равна $P(\varnothing) = 0$, а во втором случае C_n стремится ко всей плоскости, поэтому вероятность объединения равна $P(\Omega) = 1$. □

Замечание 1. Если функция $F_{\xi\eta}(x, y)$ удовлетворяет свойствам 1-3, то существует единственная вероятностная мера $\mu_{\xi\eta}$ на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ такая, что

$$F_{\xi\eta}(x, y) = \mu_{\xi\eta}((-\infty, x], (-\infty, y]).$$

Билет 2

Независимые случайные величины. Характеризация независимости в терминах функций распределения и плотностей. Плотность распределения суммы двух независимых случайных величин.

Независимые случайные величины, характеризация независимости в терминах функций распределения и плотностей

Определение 1. Случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n$ называются независимыми, если выполняется

$$P(\xi_1 \in B_1, \dots, \xi_n \in B_n) = P(\xi_1 \in B_1) \cdot \ldots \cdot P(\xi_n \in B_n)$$

Замечание 1. Если у нас есть меры $\mu_\xi(B_1)$ и $\mu_\eta(B_2)$, где B_1, B_2 — полуинтервалы, то мы можем определить новую меру $\mu(B_1 \times B_2) = \mu_\xi(B_1) \cdot \mu_\eta(B_2) = \mu_\xi \otimes \mu_\eta$ и такую меру можно продолжить на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Замечание 2. Определение независимости можно переписать в терминах распределения (для двух случайных величин):

$$\mu_{\xi\eta}(B_1 \times B_2) = \mu_\xi(B_1) \cdot \mu_\eta(B_2)$$

а значит, мы можем переписать определение, как

$$\begin{gathered} \xi \text{ и } \eta \text{ независимы} \\ \Updownarrow \\ \mu_{\xi\eta} = \mu_\xi \otimes \mu_\eta \end{gathered}$$

Теорема 1. *Случайные величины ξ и η независимы $\Leftrightarrow F_{\xi\eta}(x, y) = F_\xi(x) \cdot F_\eta(y)$*

Доказательство. В одну сторону ($\Rightarrow$):

$$F_{\xi\eta}(x, y) = P(\xi \leqslant x, \eta \leqslant y) = P(\xi \leqslant x) \cdot P(\eta \leqslant y) = F_\xi(x) \cdot F_\eta(y)$$

В другую сторону ($\Leftarrow$):
Пусть $\mu(B) = \mu_\xi \otimes \mu_\eta(B)$, где B — углы, учитывая при этом, что определив такую меру на углах, можно определить с ее помощью прямоугольники, а после продолжить на любые множества из $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Тогда

$$F_{\xi\eta}(x, y) = F_\xi(x) \cdot F_\eta(y) = \mu_\xi((-\infty, x])) \cdot \mu_\eta((-\infty, y])) = \mu((-\infty, x] \times (-\infty, y]) = \mu_\xi \otimes \mu_\eta((-\infty, x] \times (-\infty, y]),$$

а так как для $F_{\xi\eta}(x, y)$ существует единственная вероятностная мера $\mu_{\xi\eta}$ такая, что

$$F_{\xi\eta}(x, y) = \mu_{\xi\eta}((-\infty, x], (-\infty, y]),$$

то $\mu = \mu_{\xi\eta}$, а значит, ξ и η независимы. $\square$

Теорема 2. *Пусть случайные величины ξ и η имеют плотности ρ_ξ и ρ_η соответственно, тогда ξ и η независимы $\Leftrightarrow \rho_{\xi\eta}(x, y) = \rho_\xi(x) \cdot \rho_\eta(y)$.*

Доказательство. В одну сторону ($\Rightarrow$):

$$\rho_{\xi\eta}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{\xi\eta}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_\xi(x) \cdot F_\eta(y) = \rho_\xi(x) \cdot \rho_\eta(y)$$

В другую сторону ($\Leftarrow$):

$$F_{\xi\eta}(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} \rho_\xi(u)\rho_\eta(v)dudv = \int\limits_{-\infty}^{x} \rho_\xi(u)du \cdot \int\limits_{-\infty}^{y} \rho_\eta(v)dv = F_\xi(x) \cdot F_\eta(y)$$

$\square$

Плотность распределения суммы двух независимых случайных величин

Теорема 3. *Пусть случайные величины* ξ *и* η *имеют плотности* ρ_ξ *и* ρ_η *соответственно и являются независимыми. Тогда*

$$\rho_{\xi+\eta}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho_\xi(x)\rho_\eta(t-x)dx.$$

Доказательство.

$$F_{\xi+\eta}(t) = P(\xi+\eta \leqslant t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{t-x} \rho_\xi(x)\rho_\eta(y)dy \right) dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho_\xi(x) \left(\int\limits_{-\infty}^{t-x} \rho_\eta(y)dy \right) dx = \left\{ \begin{array}{c} y = v - x \\ dy = dv \end{array} \right\} =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho_\xi(x) \left(\int\limits_{-\infty}^{t} \rho_\eta(v-x)dv \right) dx = \int\limits_{-\infty}^{t} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho_\xi(x)\rho_\eta(v-x)dx \right) dv$$

Тогда

$$\rho_{\xi+\eta}(t) = F^{'}_{\xi+\eta}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho_\xi(x)\rho_\eta(y)dx.$$

$\square$