Зимний коллоквиум курса «Теория вероятностей»

ФКН НИУ ВШЭ, 2-й курс ОП ПМИ, 2-й модуль, 2016 учебный год

Дата последнего обновления: 04.12.2016

Билет 1

Совместное распределение двух случайных величин. Свойства функции распределения.

Совместное распределение двух случайных величин

Для начала напомним определение случайной величины.

Определение 1. ξ называется *случайной величиной*, если

$$\{\omega : \xi(\omega) \in \langle a, b\rangle\} \in \mathfrak{A},$$

то есть множество исходов таких, что случайная величина принадлежит некоторому промежутку, является событием. Можно доказать, что это верно не только для промежутков, но и для любых элементов из $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Ранее мы рассматривали распределения и функции распределения случайных величин, взятых по отдельности. Теперь мы подросли, стали большими и сильными и поэтому можем перейти к более серьезным вещам.
Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ и две случайные величины $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ и $\eta : \Omega \to \mathbb{R}$.
Пусть $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, рассмотрим множество $\{(\xi, \eta) \in B_1 \times B_2\} = \{(\xi \in B_1)\&(\eta \in B_2)\} = \{\xi \in B_1\} \cap \{\eta \in B_2\}$, а так как $\{\xi \in B_1\} \in \mathfrak{A}$ и $\{\eta \in B_2\} \in \mathfrak{A}$, то и $\{(\xi \in B_1)\&(\eta \in B_2)\} \in \mathfrak{A}$, то есть $\{(\xi, \eta) \in B_1 \times B_2\}$ является событием.
Так как $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ порождена всеми множествами вида $B_1 \times B_2$, где $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, то $\{\omega : (\xi(\omega), \eta(\omega)) \in B\} \in \mathfrak{A}$, то есть для него можно определить вероятность.

Определение 2. Для любых $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ мы можем определить вероятностную меру

$$\mu_{\xi\eta}(B) = P(\{\omega : (\xi(\omega), \eta(\omega)) \in B\}).$$

Такую меру называют *совместным распределением* случайных величин ξ и η.

Доказательство. Докажем, что $\mu_{\xi\eta}$ является вероятностной мерой:

(a) $\mu_{\xi\eta}(\mathbb{R}^2) = P(\Omega) = 1$, очевидно
(b) Пусть $B_1 \cap B_2 = \varnothing$, тогда $P(\omega : (\xi(\omega), \eta(\omega)) \in B_1 \cup B_2) = \mu_{\xi\eta}(B_1 \cup B_2) = \mu_{\xi\eta}(B_1) + \mu_{\xi\eta}(B_2) = P(\{\omega : (\xi(\omega), \eta(\omega)) \in B_1\}) + P(\{\omega : (\xi(\omega), \eta(\omega)) \in B_2\})$

□

Определение 3. Функцию

$$F_{\xi\eta}(x, y) = P(\xi \leqslant x, \eta \leqslant y) = \mu_{\xi\eta}((-\infty, x], (-\infty, y])$$

называют *функцией совместного распределения* случайных величин ξ и η или функцией распределения случайного вектора (ξ, η).

Дискретный ака ебучий случай

Если случайная величина принимает конечное число значений, то совместным распределением является функция

$$\mu_{\xi\eta}(x_0, y_0) = P(\{\omega : (\xi(\omega), \eta(\omega)) = (x_0, y_0)\}),$$

или же можно определить распределение через индикаторную функцию:

$$\mu_{\xi\eta}(x, y) = \sum_{i,j} p_{ij} \cdot I_{(x = x_i, y = y_j)}(x, y),$$

где p_{ij} - вероятность, что случайный вектор (ξ, η) примет значение (x_i, x_j).

Свойства функции распределения

Функция совместного распределения обладает рядом свойств, аналогичных свойствам функции распределения одной случайной величины:

Свойство 1. *Для любых $a < c$ и $b < d$ верно*

$$F_{\xi\eta}(c,d) - F_{\xi\eta}(a,d) - F_{\xi\eta}(c,b) + F_{\xi\eta}(a,b) \geqslant 0$$

Доказательство. $P((\xi,\eta) \in (a,c] \times (b,d]) = F_{\xi\eta}(c,d) - F_{\xi\eta}(a,d) - F_{\xi\eta}(c,b) + F_{\xi\eta}(a,b)$ есть вероятность попадания в прямоугольник, а вероятность неотрицательна, что и требовалось доказать. □

Свойство 2. *$F_{\xi\eta}$ непрерывна справа по совокупности переменных, то есть*

$$\lim_{\substack{x\to x_0+0\\ y\to y_0+0}} F_{\xi\eta}(x,y) = F_{\xi\eta}(x_0,y_0)$$

Сначала докажем лемму

Лемма 1. *В вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ верно:*

(a) $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \ldots \subseteq C_n \subseteq C_{n+1} \subseteq \ldots$
$C = \bigcup\limits_n C_n \Rightarrow P(C_n) \to P(C)$

(b) $C_1 \supseteq C_2 \supseteq \ldots \supseteq C_n \supseteq C_{n+1} \supseteq \ldots$
$C = \bigcap\limits_n C_n \Rightarrow P(C_n) \to P(C)$

Доказательство.

(a) Пусть $A_1 = C_1$ и $A_n = C_n \setminus C_{n-1}$ для $n > 1$.
Тогда $C = \bigcup\limits_n A_n$ и $P(C) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.
Но тогда $P(C_n) = \sum\limits_{n=1}^{n} P(A_n)$ стремится к $P(C)$ как частичная сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

(b) Сведем к первому случаю, пусть $A_1 = \Omega \setminus C_1$ и $A_n = C_{n-1} \setminus C_n$ для $n > 1$.
Тогда $C = \Omega \setminus \bigcup\limits_n A_n$ и все рассуждения аналогичны.

□

Используя лемму, сможем доказать свойство

Доказательство. Так как функция распределения монотонна по обеим переменным (первое свойство) и ограничена (так как является вероятностью), то существует предел

$$\lim_{\substack{x\to x_0+0\\ y\to y_0+0}} F_{\xi\eta}(x,y) = L.$$

Тогда требуется доказать, что $L = F_{\xi\eta}(x_0,y_0)$.
Пусть $C_n = \{\omega : \xi(\omega) \leqslant x_0 + \frac{1}{n}, \eta(\omega) \leqslant y_0 + \frac{1}{n}\}$ и пусть $C = \bigcap\limits_n C_n = \{\omega : \xi(\omega) \leqslant x_0, \eta(\omega) \leqslant y_0\}$, тогда из леммы 1 следует, что

$$L = \lim_{\substack{x\to x_0+0\\ y\to y_0+0}} F_{\xi\eta}(x,y) = \lim_{n\to\infty} P(C_n) = P(C) = F_{\xi\eta}(x_0,y_0)$$

□

Свойство 3. *Если хотя бы одно из a или b равно $-\infty$, то*

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} F_{\xi\eta}(x,y) = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} F_{\xi\eta}(x,y) = 1$$

Доказательство. С очевидностью следует из леммы, в первом случае последовательность множеств C_n стремится к пустому множеству, тогда вероятность пересечения равна $P(\varnothing) = 0$, а во втором случае C_n стремится ко всей плоскости, поэтому вероятность объединения равна $P(\Omega) = 1$. □

Замечание 1. Если функция $F_{\xi\eta}(x,y)$ удовлетворяет свойствам 1-3, то существует единственная вероятностная мера $\mu_{\xi\eta}$ на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ такая, что

$$F_{\xi\eta}(x,y) = \mu_{\xi\eta}((-\infty,x],(-\infty,y]).$$

Билет 2

Независимые случайные величины. Характеризация независимости в терминах функций распределения и плотностей. Плотность распределения суммы двух независимых случайных величин.

Независимые случайные величины, характеризация независимости в терминах функций распределения и плотностей

Определение 1. Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ называются независимыми, если выполняется

$$P(\xi_1 \in B_1, \ldots, \xi_n \in B_n) = P(\xi_1 \in B_1) \cdot \ldots \cdot P(\xi_n \in B_n)$$

Замечание 1. Если у нас есть меры $\mu_\xi(B_1)$ и $\mu_\eta(B_2)$, где B_1, B_2 — полуинтервалы, то мы можем определить новую меру $\mu(B_1 \times B_2) = \mu_\xi(B_1) \cdot \mu_\eta(B_2) = \mu_\xi \otimes \mu_\eta$ и такую меру можно продолжить на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Замечание 2. Определение независимости можно переписать в терминах распределения (для двух случайных величин):

$$\mu_{\xi\eta}(B_1 \times B_2) = \mu_\xi(B_1) \cdot \mu_\eta(B_2)$$

а значит, мы можем переписать определение, как

$$\begin{gathered} \xi \text{ и } \eta \text{ независимы} \\ \Updownarrow \\ \mu_{\xi\eta} = \mu_\xi \otimes \mu_\eta \end{gathered}$$

Теорема 1. *Случайные величины ξ и η независимы $\Leftrightarrow F_{\xi\eta}(x, y) = F_\xi(x) \cdot F_\eta(y)$*

Доказательство. В одну сторону ($\Rightarrow$):

$$F_{\xi\eta}(x, y) = P(\xi \leqslant x, \eta \leqslant y) = P(\xi \leqslant x) \cdot P(\eta \leqslant y) = F_\xi(x) \cdot F_\eta(y)$$

В другую сторону ($\Leftarrow$):
Пусть $\mu(B) = \mu_\xi \otimes \mu_\eta(B)$, где B — углы, учитывая при этом, что определив такую меру на углах, можно определить с ее помощью прямоугольники, а после продолжить на любые множества из $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Тогда

$$F_{\xi\eta}(x, y) = F_\xi(x) \cdot F_\eta(y) = \mu_\xi((-\infty, x])) \cdot \mu_\eta((-\infty, y])) = \mu((-\infty, x] \times (-\infty, y]) = \mu_\xi \otimes \mu_\eta((-\infty, x] \times (-\infty, y]),$$

а так как для $F_{\xi\eta}(x, y)$ существует единственная вероятностная мера $\mu_{\xi\eta}$ такая, что

$$F_{\xi\eta}(x, y) = \mu_{\xi\eta}((-\infty, x], (-\infty, y]),$$

то $\mu = \mu_{\xi\eta}$, а значит, ξ и η независимы. □

Теорема 2. *Пусть случайные величины ξ и η имеют плотности ρ_ξ и ρ_η соответственно, тогда ξ и η независимы $\Leftrightarrow \rho_{\xi\eta}(x, y) = \rho_\xi(x) \cdot \rho_\eta(y)$.*

Доказательство. В одну сторону ($\Rightarrow$):

$$\rho_{\xi\eta}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{\xi\eta}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_\xi(x) \cdot F_\eta(y) = \rho_\xi(x) \cdot \rho_\eta(y)$$

В другую сторону ($\Leftarrow$):

$$F_{\xi\eta}(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} \rho_\xi(u) \rho_\eta(v) du dv = \int\limits_{-\infty}^{x} \rho_\xi(u) du \cdot \int\limits_{-\infty}^{y} \rho_\eta(v) dv = F_\xi(x) \cdot F_\eta(y)$$

□

Плотность распределения суммы двух независимых случайных величин

Теорема 3. *Пусть случайные величины ξ и η имеют плотности ρ_ξ и ρ_η соответственно и являются независимыми. Тогда*

$$\rho_{\xi+\eta}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho_\xi(x)\rho_\eta(t-x)dx.$$

Доказательство.

$$F_{\xi+\eta}(t) = P(\xi+\eta \leqslant t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{t-x} \rho_\xi(x)\rho_\eta(y)dy \right) dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho_\xi(x) \left(\int\limits_{-\infty}^{t-x} \rho_\eta(y)dy \right) dx = \left\{ \begin{array}{c} y = v - x \\ dy = dv \end{array} \right\} =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho_\xi(x) \left(\int\limits_{-\infty}^{t} \rho_\eta(v-x)dv \right) dx = \int\limits_{-\infty}^{t} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho_\xi(x)\rho_\eta(v-x)dx \right) dv$$

Тогда

$$\rho_{\xi+\eta}(t) = F'_{\xi+\eta}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho_\xi(x)\rho_\eta(t-x)dx.$$

$\square$

Билет 3

Математическое ожидание случайной величины и его свойства: линейность, монотонность, неравенство Чебышёва. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин.

Математическое ожидание случайной величины и его свойства: линейность и монотонность

Пусть дано вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ и пусть $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ — случайная величина, принимающая конечное число различных значений.
Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — различные значения ξ и пусть $A_i = \{\omega\colon \xi(\omega) = x_i\}$, где A_i — непересекающиеся множества и $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$.
Также определим $\xi = x_1 I_{A_1} + x_2 I_{A_2} + \ldots + x_n I_{A_n}$, где I_{A_i} — индикатор, который определяется как:

$$I_{A_i}(\omega) = \begin{cases} 1, \ \omega \in A_i \\ 0, \ \omega \notin A_i \end{cases}$$

Определение 1. Математическое ожидание ξ — это число, равное

$$\mathbb{E}[\xi] = x_1 P(A_1) + x_2 P(A_2) + \ldots + x_n P(A_n)$$

Утверждение 1. *Если $\forall i \neq j \ B_i \cap B_j = \varnothing$ и*

$$\xi = y_1 I_{B_1} + y_2 I_{B_2} + \ldots + y_n I_{B_n},$$

где y_i могут быть равны (в отличие от сложности билетов), то

$$\mathbb{E}[\xi] = y_1 P(B_1) + y_2 P(B_2) + \ldots + y_n P(B_n)$$

Доказательство. $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — различные значения случайной величины ξ и пусть $A_k = \{\omega\colon \xi(\omega) = x_k\}$. Пусть $M_k = \{i\colon y_i = x_k\}$ $(1 \leqslant k \leqslant m)$, тогда $\bigcup\limits_{i \in M_k} B_i = A_k$ и $\sum\limits_{i \in M_k} P(B_i) = P(A_k)$

$$\mathbb{E}[\xi] = \sum_{k=1}^{m} x_k P(A_k) = \sum_{k=1}^{m} x_k \left(\sum_{i \in M_k} P(B_i) \right) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i \in M_k} y_i P(B_i) = y_1 P(B_1) + y_2 P(B_2) + \ldots + y_n P(B_n)$$

□

Свойства математического ожидания

(1) Линейность:

$$\mathbb{E}[\alpha\xi + \beta\eta] = \alpha\mathbb{E}[\xi] + \beta\mathbb{E}[\eta]$$

(2) Монотонность:

$$\xi \leqslant \eta \Rightarrow \mathbb{E}[\xi] \leqslant \mathbb{E}[\eta]$$

Доказательство. (1) Докажем линейность:

$$\xi = x_1 I_{A_1} + x_2 I_{A_2} + \ldots + x_n I_{A_n}, \forall i \neq j \ A_i \cap A_j = \varnothing$$
$$\Omega = \bigcup_{n} A_i$$
$$\eta = y_1 I_{B_1} + y_2 I_{B_2} + \ldots + y_m I_{B_m}, \forall i \neq j \ B_i \cap B_j = \varnothing$$
$$\Omega = \bigcup_{m} B_i$$
$$\alpha\xi + \beta\eta = \sum_{i,j} (\alpha x_i + \beta y_j) I_{A_i \cap B_j}$$
$$\mathbb{E}[\alpha\xi + \beta\eta] = \sum_{i,j} (\alpha x_i + \beta y_j) P(A_i \cap B_j) = \alpha \sum_{i,j} x_i P(A_i \cap B_j) + \beta \sum_{i,j} y_j P(A_i \cap B_j)$$

При фиксированном i сумма всех B_j равна Ω, при фиксированном j сумма всех A_i равна Ω, поэтому получаем, что сумма равна

$$\alpha \sum_{i} x_i P(A_i) + \beta \sum_{j} y_j P(B_j) = \alpha\mathbb{E}[\xi] + \beta\mathbb{E}[\eta].$$

(2) Докажем монотонность:
Если $\xi \geqslant 0$, то $\mathbb{E}[\xi] \geqslant 0$. Из свойства линейности следует, что $\mathbb{E}[\xi - \eta] = \mathbb{E}[\xi] - \mathbb{E}[\eta]$, пусть $\xi \geqslant \eta$, это значит, что $\mathbb{E}[\xi - \eta] \geqslant 0$, тогда $\mathbb{E}[\xi] - \mathbb{E}[\eta] \geqslant 0 \Rightarrow \mathbb{E}[\xi] \geqslant \mathbb{E}[\eta]$. □

Неравенство Чебышева

Неравенство Чебышёва является следствием из свойств математического ожидания.

Теорема 1. *Пусть $\xi \geqslant 0$. Тогда верно следующее неравенство:*

$$P(\xi \geqslant C) \leqslant \frac{\mathbb{E}[\xi]}{C}$$

для некоторого числа $C > 0$.

Доказательство. Пусть $A = \{\omega \colon \xi(\omega) \geqslant C\}$. Тогда

$$\xi \geqslant C I_A$$

Если $I_A = 0$, то так как $\xi \geqslant 0$ неравенство выполненно. Если же $I_A = 1$, то так как $\xi(\omega) \geqslant C$ неравенство выполнено. Воспользуемся свойствами монотонности и линейности

$$\mathbb{E}[\xi] \geqslant C\mathbb{E}(I_A) = CP(A) \Rightarrow \frac{\mathbb{E}[\xi]}{C} \geqslant P(A).$$

□

Следствие 1. *Из неравенства Чебышёва, например, следует неравенство:*

$$\mathbb{E}[\xi] \leqslant \sup_{\Omega} \xi$$

Доказательство.

$$\xi \leqslant \sup_{\Omega} \xi \Rightarrow -\xi \geqslant -\sup_{\Omega} \xi.$$

По неравенству Чебышёва и свойству линейности получаем

$$1 = P\left(-\xi \geqslant -\sup_{\Omega} \xi\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}[-\xi]}{-\sup_{\Omega} \xi} \Rightarrow -\sup_{\Omega} \xi \leqslant (-1) \cdot \mathbb{E}[\xi] \Rightarrow \sup_{\Omega} \xi \geqslant \mathbb{E}[\xi].$$

(вообще говоря, это очевидно, но ведь тебе надо выебнуться хоть как-то)

□

Математическое ожидание независимых случайных величин

Теорема 2. *Пусть ξ и η - независимые случайные величины. Тогда $\mathbb{E}[\xi\eta] = \mathbb{E}[\xi] \cdot \mathbb{E}[\eta]$ (обратное утверждение неверно).*

Доказательство. Пусть $A_i = \{\omega \colon \xi(\omega) = x_i\}$, $B_j = \{\omega \colon \eta(\omega) = y_j\}$, тогда

$$\xi = \sum_i x_i I_{A_i}$$

$$\eta = \sum_j y_j I_{B_j}$$

$$\xi \cdot \eta = \sum_{i,j} x_i y_j I_{A_i} I_{B_j} = \sum_{i,j} x_i y_j I_{A_i \cap B_j}$$

$$\mathbb{E}[\xi\eta] = \sum_{i,j} x_i y_j P(A_i \cap B_j) = \sum_{i,j} x_i y_j P(A_i) P(B_j) = \left(\sum_i x_i P(A_i)\right) \cdot \left(\sum_j y_j P(B_j)\right) = \mathbb{E}[\xi] \cdot \mathbb{E}[\eta]$$

□

Билет 4

Общее определение математического ожидания и его корректность. Математическое ожидание случайной величины, распределение которой задано плотностью.

Общее определение математического ожидания и его корректность

Все свойства математического ожидания в общем случае сохраняются, в отличие от определений.

Определение 1. Пусть ξ принимает значения $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ на множествах $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$ и их вероятности равны $P(A_1), P(A_2), \ldots, P(A_k), \ldots$ соответственно. Тогда, если ряд $\sum\limits_n |x_n| P(A_n)$ сходится, то математическим ожиданием называется сумма ряда $\mathbb{E}[\xi] = \sum\limits_n x_n P(A_n)$ (она существует, так как этот ряд сходится абсолютно).

Замечание 1. Так как ряд сходится абсолютно, то слагаемые можно переставлять.

Замечание 2. $\mathbb{E}[\xi]$ существует, если существует $\mathbb{E}[|\xi|]$ (это следует из абсолютной сходимости ряда)

Утверждение 1. *Пусть $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ - случайная величина (не обязательно дискретная). Тогда существует последовательность дискретных случайных величин (с не более чем счетным числом значений) ξ_n таких, что*

$$\xi_n \overset{\Omega}{\rightrightarrows} \xi\colon (\sup_{\Omega} |\xi_n - \xi| \to 0)$$

.

Доказательство. $\xi_n = 10^{-n} \cdot [10^n \xi] \Rightarrow \{$т. к. целая часть отличается не более, чем на $1\} \Rightarrow |\xi_n - \xi| \leqslant 10^{-n}$. Таким образом любую случайную величину можно приблизить с помощью ξ_n. □

Утверждение 2. *Пусть ξ_n - дискретная величина, $\exists \mathbb{E}[\xi_n]$ и $\xi_n \overset{\Omega}{\rightrightarrows} \xi$. Тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}[\xi_n]$.*

Доказательство. Воспользуемся признаком Коши, рассмотрим модуль разности:

$$|\mathbb{E}[\xi_n] - \mathbb{E}[\xi_m]| = |\mathbb{E}[\xi_n - \xi_m]| \leqslant \mathbb{E}[|\xi_n - \xi_m|]$$

Так как ξ_n сходится равномерно, то $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0\colon \forall m, n > N \Rightarrow \sup |\xi_n - \xi_m| < \varepsilon$. Это означает, что $|\mathbb{E}[\xi_n] - \mathbb{E}[\xi_m]| \leqslant \mathbb{E}[|\xi_n - \xi_m|] < \varepsilon$, а значит, $\mathbb{E}[\xi_n]$ сходится по признаку Коши. □

Определение 2. Предположим, что для последовательности ξ_n, где ξ_n — дискретная случайная величина и $\xi_n \overset{\Omega}{\rightrightarrows} \xi$, существует математическое ожидание $\mathbb{E}[\xi_n]$. Тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}[\xi_n]$ и он обозначается $\mathbb{E}[\xi]$.

Утверждение 3. *Если $\xi_n \overset{\Omega}{\rightrightarrows} \xi$ и $\eta_n \overset{\Omega}{\rightrightarrows} \xi$, то из существования $\mathbb{E}[\xi_n]$ следует существование $\mathbb{E}[\eta_n]$ (начиная с некоторого n) и $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}[\xi_n] = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}[\eta_n]$*

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0\colon \forall n > N \sup |\xi_n - \eta_n| = \sup |\xi_n - \xi - \eta_n + \xi| \leqslant \sup |\xi_n - \xi| + \sup |\xi - \eta_n| < 2\varepsilon$$

Из этого следует, что эти случайные величины отличаются не более чем на 2ε:

$$|\eta_n| \leqslant |\xi_n| + 2\varepsilon.$$

Но $\mathbb{E}[|\xi_n| + 2\varepsilon] = \mathbb{E}[|\xi_n|] + \mathbb{E}[2\varepsilon] = \mathbb{E}[|\xi_n|] + 2\varepsilon$, и из существования $\mathbb{E}[\xi_n]$ по монотонности следует, что существует и $\mathbb{E}[\eta_n]$, а значит

$$|\mathbb{E}[\xi_n] - \mathbb{E}[\eta_n]| = |\mathbb{E}[\xi_n - \eta_n]| \leqslant \mathbb{E}[|\xi_n - \eta_n|] \leqslant 2\varepsilon.$$

А из этого следует, что предел разности $\mathbb{E}[\xi_n]$ и $\mathbb{E}[\eta_n]$ равен нулю, а так как их пределы по отдельности конечны, то имеем

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\xi_n] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\eta_n].$$

□

Упражнение 1. Найти в доказательстве опечатку.

Так как мы приближаем с помощью дискретных величин, а для них известны все определения и доказаны все свойства, то для недискретных величин верны все выше указанные свойства.

Математическое ожидание случайной величины, распределение которой задано плотностью

Теорема 1. *Пусть* φ *— кусочно-непрерывная функция на* $\mathbb{R}$ *и* $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *- случайная величина, распределение которой задано плотностью* ρ_ξ*, тогда*

$$\exists \mathbb{E}[\varphi(\xi)] \Leftrightarrow \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)\rho_\xi(x)|dx \text{ сходится}$$

В случае сходимости $\mathbb{E}[\varphi(\xi)] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\rho_\xi(x)dx.$

Доказательство. Так как мы не Боги тервера (я не Бог, и в матане я тоже не шарю), то мы докажем утверждение для кусочно-постоянной функции, а потом проведем некоторые приблизительные рассуждения касательно кусочно-непрерывной.

Пусть f — кусочно-постоянная функция, а это значит, что $f(\xi)$ — дискретная величина, тогда

$$\mathbb{E}[f(\xi)] = \sum_n C_n P(A_n) = \sum_n C_n \int\limits_{\Delta n} \rho_\xi(x)dx = \sum_n \int\limits_{\Delta n} C_n \rho_\xi(x)dx = \sum_n \int\limits_{\Delta n} f(x)\rho_\xi(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\rho_\xi(x)dx.$$

В общем случае мы можем разбивать числовую прямую на счетное число промежутков таким образом, чтобы каждое такое разбиение задавало кусочно-постоянную функцию $f_n(x)$, и при этом $f_n(\xi) \rightrightarrows \varphi(\xi)$, тогда получить то же утверждение для кусочно-непрерывной функции $\varphi(x)$. $\square$

Билет 5

Дисперсия и ее свойства. Ковариация и коэффициент корреляции двух случайных величин, геометрический смысл.

Дисперсия и ее свойства

Для начала определим важное понятие, без которого могут быть непонятны рассуждения, приведенные в этом билете.

Определение 1. Число $\mathbb{E}\xi^k$ называется *моментом порядка* k или k*-м моментом случайной величины* ξ.

Определение 2. *Дисперсией случайной величины* ξ называют число

$$\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2$$

Утверждение 1. *Дисперсия может быть вычислена по формуле:* $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2$.

Доказательство. Пользуясь линейностью математического ожидания:

$$\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2 = \mathbb{E}(\xi^2 - 2\xi \cdot \mathbb{E}\xi + (\mathbb{E}\xi)^2) = \mathbb{E}\xi^2 - 2 \cdot \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{E}\xi + (\mathbb{E}\xi)^2 =$$
$$= \mathbb{E}\xi^2 - 2(\mathbb{E}\xi)^2 + (\mathbb{E}\xi)^2 = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2.$$

□

Следствие 1. $\mathbb{D}\xi$ *существует тогда и только тогда, когда* $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$.

Утверждение 2. *При умножении случайной величины на постоянную с дисперсия увеличивается в* c^2 *раз:*

$$\mathbb{D}(c\xi) = c^2\mathbb{D}\xi.$$

Доказательство.

$$\mathbb{D}(c\xi) = \mathbb{E}[c^2\xi^2] - (\mathbb{E}[c\xi])^2 = c^2\mathbb{E}\xi^2 - (c\mathbb{E}\xi)^2 = c^2(\mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2) = c^2\mathbb{D}(\xi).$$

□

Утверждение 3.
- *Дисперсия всегда неотрицательна:* $\mathbb{D}\xi \geqslant 0$.
- *Дисперсия обращается в нуль лишь для вырожденного распределения:* $\mathbb{D}\xi = 0 \Leftrightarrow \xi = const$ *почти наверное.*

Доказательство. Дисперсия есть математическое ожидание почти наверное неотрицательной случайной величины $(\xi - \mathbb{E}\xi)^2$, и неотрицательность дисперсии следует из свойства, данное в замечании 1.

Замечание 1. Если $\xi \geqslant 0$ почти наверное, то есть если $P(\xi \geqslant 0) = 1$, то $\mathbb{E}\xi \geqslant 0$.

Замечание 2. "Почти наверное" означает "с вероятностью 1".

Замечание 3. Если $\xi \geqslant 0$ почти наверное, и при этом $\mathbb{E}\xi = 0$, то $\xi = 0$ почти наверное, то есть $P(\xi = 0) = 1$.

По свойству математического ожидания из замечания 3, если $\mathbb{D}\xi = 0$, то $(\xi - \mathbb{E}\xi)^2 = 0$ почти наверное, то есть $\xi = \mathbb{E}\xi$ почти наверное. И наоборот: если $\xi = c$ почти наверное, то $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}(c - \mathbb{E}c)^2 = 0$.

□

Утверждение 4. *Если* ξ *и* η *независимы, то дисперсия их суммы равна сумме их дисперсий:* $\mathbb{D}(\xi + \eta) = \mathbb{D}\xi + \mathbb{D}\eta$.

Доказательство. Действительно,

$$\mathbb{D}(\xi + \eta) = \mathbb{E}(\xi + \eta)^2 - (\mathbb{E}(\xi + \eta))^2 = \mathbb{E}\xi^2 + \mathbb{E}\eta^2 +$$
$$+ 2\mathbb{E}(\xi\eta) - (\mathbb{E}\xi)^2 - (\mathbb{E}\eta)^2 - 2\mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta = \mathbb{D}\xi + \mathbb{D}\eta,$$

так как математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий. □

Замечание 4. Обратное утверждение неверно.

Следствие 2. *Если* ξ *и* η *независимы, то дисперсия их разности равна сумме их дисперсий:*

$$\mathbb{D}(\xi - \eta) = \mathbb{D}(\xi + \eta) = \mathbb{D}\xi + \mathbb{D}\eta.$$

Доказательство. Из утверждения 4 и утверждения 2 получим:

$$\mathbb{D}(\xi-\eta)=\mathbb{D}(\xi+(-\eta))=\mathbb{D}\xi+\mathbb{D}(-\eta)=\mathbb{D}\xi+(-1)^2\mathbb{D}\eta=\mathbb{D}\xi+\mathbb{D}\eta.$$

□

Следствие 3. *Для произвольных случайных величин ξ и η с конечными вторыми моментами имеет место равенство:*

$$\mathbb{D}(\xi+\eta)=\mathbb{D}\xi+\mathbb{D}\eta+2(\mathbb{E}(\xi\eta)-\mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta).$$

Доказательство.

$$\mathbb{D}(\xi+\eta)=\mathbb{E}(\xi+\eta)^2-(\mathbb{E}(\xi+\eta))^2=\mathbb{E}(\xi^2+2\xi\eta+\eta^2)-(\mathbb{E}\xi+\mathbb{E}\eta)^2=$$
$$=\mathbb{E}\xi^2+2\mathbb{E}\xi\eta+\mathbb{E}\eta^2-(\mathbb{E}\xi)^2-2\mathbb{E}(\xi\mathbb{E}\eta)-(\mathbb{E}\eta)^2=\mathbb{D}\xi+\mathbb{D}\eta+2(\mathbb{E}(\xi\eta)-\mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta).$$

□

Утверждение 5. *Дисперсия не зависит от сдвига случайной величины на постоянную:* $\mathbb{D}(\xi+c)=\mathbb{D}\xi$.

Доказательство. Величины c и ξ независимы, поэтому, исходя из утверждения 4,

$$\mathbb{D}(\xi+c)=\mathbb{D}\xi+\mathbb{D}c.$$

В силу утверждения 3 $\mathbb{D}c=0$. Следовательно,

$$D(\xi+c)=\mathbb{D}\xi.$$

□

Утверждение 6. *(Неравенство Чебышева) Если $\mathbb{E}\xi^2<\infty$, то для любого $c>0$*

$$P\left(|\xi-\mathbb{E}\xi|\geqslant c\right)\leqslant\frac{\mathbb{D}\xi}{c^2}.$$

Доказательство. Для $c>0$ неравенство $|\xi-\mathbb{E}\xi|\geqslant c$ равносильно неравенству $(\xi-\mathbb{E}\xi)^2\geqslant c^2$, поэтому

$$P(|\xi-\mathbb{E}\xi|\geqslant c)=P(|\xi-\mathbb{E}\xi|^2\geqslant c^2)\leqslant\frac{\mathbb{E}(\xi-\mathbb{E}\xi)^2}{c^2}=\frac{\mathbb{D}\xi}{c^2}.$$

□

Замечание 5. В доказательстве при переходе $P(|\xi-\mathbb{E}\xi|^2\geqslant c^2)\leqslant\frac{\mathbb{E}(\xi-\mathbb{E}\xi)^2}{c^2}$ было использовано обычное неравенство Чебышева.

Определение 3. Если дисперсия величины ξ конечна, то число $\sigma=\sqrt{\mathbb{D}\xi}$ называют *среднеквадратическим отклонением случайной величины* ξ.

Ковариация и коэффициент корреляции двух случайных величин

Определение 4. *Ковариацией $cov(\xi,\eta)$ случайных величин ξ и η* называется число

$$cov(\xi,\eta)=\mathbb{E}((\xi-\mathbb{E}\xi)(\eta-\mathbb{E}\eta))$$

Она существует, если существуют $\mathbb{D}\xi$ и $\mathbb{D}\eta$.

Утверждение 7. *Если ξ и η независимы, то $cov(\xi,\eta)=0$. Обратное в общем случае неверно!*

Доказательство.

$$cov(\xi,\eta)=\mathbb{E}(\xi\eta)-2\mathbb{E}\xi\cdot\mathbb{E}\eta+\mathbb{E}\xi\cdot\mathbb{E}\eta=\mathbb{E}(\xi\eta)-\mathbb{E}\xi\cdot\mathbb{E}\eta=0$$

□

Замечание 6. Ковариацию часто используют как "индикатор наличия зависимости" между двумя случайными величинами.

Определение 5. *Коэффициентом корреляции $\rho(\xi,\eta)$ случайных величин ξ и η*, дисперсии которых существуют и отличны от нуля, называется число

$$\rho(\xi,\eta)=\frac{cov(\xi,\eta)}{\sqrt{\mathbb{D}\xi}\sqrt{\mathbb{D}\eta}}.$$

Геометрический смысл

Чтобы разглядеть устройство коэффициента корреляции, распишем по определению числитель и знаменатель:

$$\rho(\xi,\eta) = \frac{\mathbb{E}((\xi-\mathbb{E}\xi)(\eta-\mathbb{E}\eta))}{\sqrt{\mathbb{E}(\xi-\mathbb{E}\xi)^2}\sqrt{\mathbb{E}(\eta-\mathbb{E}\eta)^2}}.$$

Уместно провести аналогии с "косинусом угла" между двумя элементами $\xi-\mathbb{E}\xi$ и $\eta-\mathbb{E}\eta$ гильбертова пространства, образованного случайными величинами с нулевым математическим ожиданием и конечным вторым моментом, снабженного скалярным произведением $cov(\xi,\eta)$ и "нормой" , равной корню из дисперсии, или корню из скалярного произведения $cov(\xi,\xi)$.

Билет 6

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, имеющей нормальное, показательное или равномерное распределение.

Равномерное распределение
ξ имеет *равномерное распределение* на $[a, b]$, если

$$\rho_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, x \in [a, b] \\ 0, x \notin [a, b] \end{cases}$$

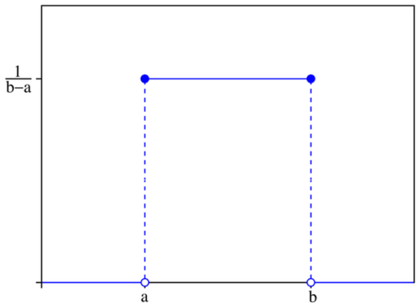

Рис. 1. График функции плотности равномерного распределения

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, a \leqslant x < b \\ 1, x \geqslant b \end{cases}$$

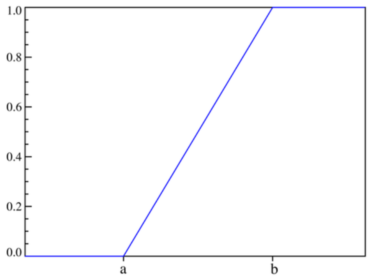

Рис. 2. График функции равномерного распределения

Вычислим **математическое ожидание случайной величины, имеющей равномерное распределение**:

$$\mathbb{E}[\xi] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\rho_\xi(x)\ dx = \int\limits_{a}^{b} x\frac{1}{b-a}\ dx = \frac{a+b}{2}.$$

Найдем **дисперсию случайной величины, имеющей равномерное распределение**:

$$\mathbb{E}[\xi^2] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2\rho_\xi(x)\ dx = \int\limits_{a}^{b} x^2\frac{1}{b-a}\ dx = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}.$$

$$\mathbb{D}(\xi) = \mathbb{E}[\xi^2] - (\mathbb{E}[\xi])^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Показательное распределение

ξ имеет *показательное распределение*, если

$$\rho_\xi(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, x \geqslant 0 \end{cases}$$

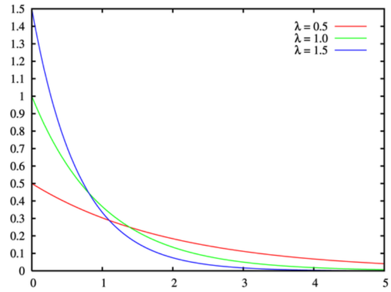

Рис. 3. График функции плотности показательного распределения

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, x \geqslant 0 \end{cases}$$

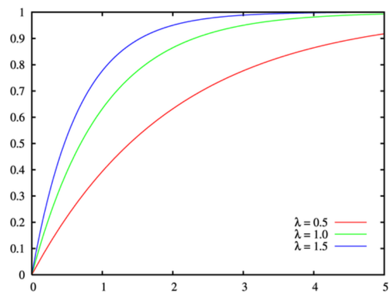

Рис. 4. График функции показательного распределения

Найдем для произвольного $k \in \mathbb{N}$ момент порядка k:

$$\mathbb{E}[\xi^k] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k \rho_\xi(x)\ dx = \int\limits_0^{\infty} x^k \lambda e^{-\lambda x}\ dx = \frac{1}{\lambda^k} \int\limits_0^{\infty} (\lambda x)^k e^{-\lambda x}\ d(\lambda x) = \frac{k!}{\lambda^k}$$

В последнем равенстве мы воспользовались *гамма-функцией Эйлера*:

$$\mathbf{\Gamma}(k+1) = \int\limits_0^{\infty} u^k e^{-u}\ du = k!.$$

Используя полученное равенство при $k = 1$, получаем **математическое ожидание случайной величины, имеющей показательное распределение**:

$$\mathbb{E}[\xi] = \frac{1}{\lambda}$$

Найдем **дисперсию случайной величины, имеющей показательное распределение**:

$$\mathbb{D}(\xi) = \mathbb{E}[\xi^2] - (\mathbb{E}[\xi])^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Нормальное распределение

ξ имеет *нормальное распределение* с параметрами μ и σ, если

$$\rho_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

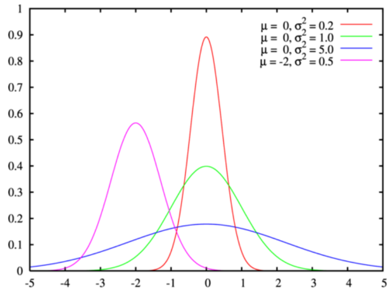

Рис. 5. График функции плотности нормального распределения

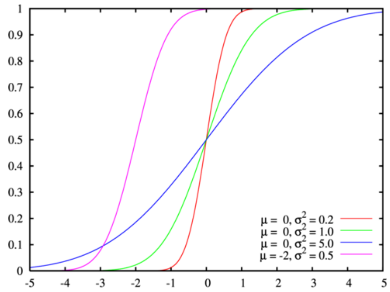

Рис. 6. График функции нормального распределения

Рассмотрим для начала **стандартное нормальное распределение** $(\mu = 0,\ \sigma = 1)$. Математическое ожидание этого распределения существует в силу конечности $\mathbb{E}[|\xi|]$:

$$\mathbb{E}[|\xi|] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty x e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}\ d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} < \infty.$$

Математическое ожидание ξ равно

$$\mathbb{E}[\xi] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\rho_\xi(x)\ dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx = 0,$$

так как под сходящимся интегралом стоит нечетная функция. Найдем **дисперсию**:

$$\mathbb{E}[\xi^2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty x\ d\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) =$$

$$= -\frac{2x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\Bigg|_0^\infty + 2\int\limits_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx = 0 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx = 1.$$

Поэтому

$$\mathbb{D}(\xi) = \mathbb{E}[\xi^2] - (\mathbb{E}[\xi])^2 = 1 - 0 = 1.$$

Рассмотрим теперь **нормальное распределение в общем виде**.

(Первый вариант)

Докажем две очень важные вещи, а именно, что параметр μ есть **математическое ожидание** , а σ — среднее квадратическое отклонение нормального распределения (корень из **дисперсии**).

Доказательство.
1) По определению математического ожидания непрерывной случайной величины,

$$\mathbb{E}[\xi] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\rho_\xi(x)\ dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\ dx.$$

Введем новую переменную $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$. Отсюда $x = \sigma z + \mu$, $dx = \sigma dz$. Приняв во внимание, что новые пределы интегрирования равны старым, получим

$$\mathbb{E}[\xi] = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{\infty} (\sigma z + \mu)e^{-\frac{z^2}{2}}\ dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sigma z e^{-\frac{z^2}{2}}\ dz + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\ dz.$$

Первое из слагаемых равно нулю (под знаком интеграла нечетная функция; пределы интегрирования симметричны относительно начала координат). Второе из слагаемых равно μ $\left(\text{интеграл Пуассона } \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\ dz = \sqrt{2\pi}\right)$.
Итак, $\mathbb{E}[\xi] = \mu$, то есть *математическое ожидание нормального распределения равно параметру* μ.
2) По определению дисперсии непрерывной случайной величины, учитывая, что $\mathbb{E}[\xi] = \mu$, имеем

$$\mathbb{D}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\ dx.$$

Введем новую переменную $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$. Отсюда $x - \mu = \sigma z$, $dx = \sigma dz$. Приняв во внимание, что новые пределы интегрирования равны старым, получим

$$\mathbb{D}(\xi) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} z\cdot xe^{-\frac{z^2}{2}}\ dz.$$

Интегрируя по частям, положив $u = z$, $dv = ze^{-\frac{z^2}{2}}dz$, найдем

$$\mathbb{D}(\xi) = \sigma^2.$$

Следовательно,

$$\sigma(\xi) = \sqrt{\mathbb{D}(\xi)} = \sqrt{\sigma^2} = \sigma.$$

Итак, *среднее квадратическое отклонение нормального распределения равно параметру* σ. □

(Второй вариант)
Пусть ξ — случайная величина, имеющая нормальное распределение с параметрами μ_ξ и σ_ξ. Тогда случайная величина $\eta = \frac{\xi-\mu_\xi}{\sigma_\xi}$ — случайная величина, имеющая нормальное распределение с параметрами $\mu_\eta = 0,\ \sigma_\eta = 1$.
Тогда **математическое ожидание** равно

$$\mathbb{E}[\xi] = \mathbb{E}[\sigma_\xi\eta + \mu_\xi] = \sigma_\xi\mathbb{E}[\eta] + \mu_\xi = \mu_\xi,$$

а **дисперсия**

$$\mathbb{D}(\xi) = \mathbb{D}(\sigma_\xi\eta + \mu_\xi) = \sigma_\xi^2\mathbb{D}(\eta) = \sigma_\xi^2.$$

Замечание 1. Почему η имеет нормальное распределение с параметрами $\mu_\eta = 0$ и $\sigma_\eta = 1$?
Пусть φ — случайная величина, равная разности ξ и μ, то есть $\varphi = \xi - \mu$.
Заметим, что

$$P(\xi \in \langle a, b\rangle) = F_\xi(a) - F_\xi(b) = \int\limits_{-\infty}^{a} \rho_\xi(x)\ dx - \int\limits_{-\infty}^{b} \rho_\xi(x)\ dx = \int\limits_{a}^{b} \rho_\xi(x)\ dx.$$

Что значит, что $\varphi \in \langle c, d\rangle$? Это значит, что $\xi \in \langle c+\mu, d+\mu\rangle$. Тогда

$$P(\varphi \in \langle c, d\rangle) = P(\xi \in \langle c+\mu, d+\mu\rangle) = \int\limits_{c+\mu}^{d+\mu} \rho_\xi(x)\ dx = \left\{\begin{array}{c} y = x - \mu \\ x = y + \mu \\ dx = dy \end{array}\right\} =$$

$$= \int\limits_c^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\ dy.$$

То есть φ имеет нормальное распределение с параметрами $\mu = 0$ и σ. Теперь рассмотрим случайную величину $\eta = \frac{\varphi}{\sigma}$.

Что значит, что $\varphi \in \langle a, b\rangle$? Это значит, что $\eta \in \langle \frac{a}{\sigma}, \frac{b}{\sigma}\rangle$. Тогда

$$P\left(\eta \in \left\langle \frac{a}{\sigma}, \frac{b}{\sigma} \right\rangle\right) = P(\varphi \in a, b\rangle) = \int\limits_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\ dx = \left\{ \begin{gathered} y = \frac{x}{\sigma} \\ dx = \sigma dy \end{gathered} \right\} =$$

$$= \int\limits_{\frac{a}{\sigma}}^{\frac{b}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2}} \sigma\ dy = \int\limits_{\frac{a}{\sigma}}^{\frac{b}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\ dy.$$

То есть η имеет нормальное распределение с параметрами $\mu = 0$ и $\sigma = 1$.