Лекция 07 от 17.10.2016
Функциональные последовательности и ряды

Поточечная и равномерная сходимость

Начиная с этой лекции, будем говорить о функциональных последовательностях и рядах.

Пусть X — произвольное множество точек, а $\{f(x)\}_n^\infty$ — последовательность функций, определённых на X или на его подмножестве.

Определение 1. *Будем говорить, что $f_n(x)$ сходится поточечно к $f(x)$ на X, если*

$$\forall x \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\colon\ \forall n > N\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Обозначение 1. $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{X} f(x)$.

Почему такое определение не совсем удобно для нас? Сходимость в каждой точке может быть своя, произвольная, а хотелось бы, чтобы свойства функций f_n и f были похожи. Приведем пример, когда это не выполняется.

Пример 1. *Если $f_n(x) = x^n$, $X = [0;1]$, то*

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{[0;1]} \begin{cases} 0,\, x < 1 \\ 1,\, x = 1 \end{cases}.$$

То есть бывает так, что все функции последовательности непрерывны на отрезке и стремятся к разрывной функции.

Для устранения этого недостатка введём другое определение сходимости функциональной последовательности.

Определение 2. *Будем говорить, что последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ сходится к $f(x)$ равномерно на множестве X, если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\colon\ \forall n > N\ \forall x \in X\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Обозначение 2. $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f(x)$.

Из определений сразу очевидно следует утверждение.

Утверждение 1. *Если $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f(x)$, то $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{X} f(x)$.*

А что, если нам даны последовательность $f_n(x)$, функция $f(x)$ и множество X, то как нам понять, сходится ли $f_n(x)$ к $f(x)$ равномерно?

Существует мощный способ. Обозначим $r_n = \sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - f(x)|$.

Утверждение 2 (Супремум-критерий)**.** $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f(x) \Leftrightarrow r_n \to 0$.

Доказательство.
Необходимость. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, положим $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$. Тогда

$$\exists N \in \mathbb{N}\colon\ \forall n > N\ \forall x \in X\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_1,$$
$$\Rightarrow r_n = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon_1 < \varepsilon.$$

То есть $r_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Достаточность.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\colon\ \forall n > N\ r_n < \varepsilon \Rightarrow \forall x \in X\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

□

Для приведённого выше примера $f_n(x) = x^n$:

Утверждение 3.

1. $x^n \xrightarrow[n\to\infty]{[0;1]} 0.$
2. $x^n \underset{n\to\infty}{\overset{[0;1]}{\not\rightrightarrows}} 0.$

Доказательство. $r_n = \sup\limits_{x \in [0;1)} |x^n - 0| = 1 \not\to 0.$ □

Есть ещё одна подобного рода последовательность.

$$f_n(x) = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

В любой точке значение $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = e^x$, то есть $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{R}} e^x$, но $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{\mathbb{R}}{\not\rightrightarrows}} e^x$. Однако, как легко показать, $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{(-C;C)}{\rightrightarrows}} e^x$ для всякого $C > 0$. Эта последовательность ещё всплывёт в нашем курсе.

Утверждение 4. *Если* $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f(x)$ *и* $g_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} g(x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, *то*

1. $f_n(x) + g_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f(x) + g(x),$
2. $\alpha f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} \alpha f(x).$

Доказательство. Докажем пункт 1, второй доказывается аналогично. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, положим $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$. Тогда

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}\colon\ \forall x \in X\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_1,$$
$$\exists N_2 \in \mathbb{N}\colon\ \forall x \in X\ |g_n(x) - g(x)| < \varepsilon_1.$$

Положим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда $\forall n > N\ \forall x \in X$:

$$|(f_n(x) + g_n(x)) - (f(x) + g(x))| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)| < \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = \varepsilon.$$

Получили требуемое. □

Утверждение 5. *Если* $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f(x)$ *и* $g(x)$ *ограничена на множестве* X, *то* $f_n(x)g(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f(x)g(x)$.

Доказательство. $\exists C > 0\colon\ \forall x \in X\ |g(x)| < C$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, положим $\varepsilon_1 = \varepsilon/C$. Найдём такое $N \in \mathbb{N}$, что $\forall n > N$, $\forall x \in X\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_1$. Тогда $\forall n > N\ \forall x \in X\ |f_n(x)g(x) - f(x)g(x)| < C\varepsilon_1 = \varepsilon$. □

Замечание 1. *Если* $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f(x)$, $g_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} g(x)$ *и* $f(x)$, $g(x)$ *ограничены на множестве* X, *то* $f_n(x)g_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f(x)g(x)$.

Замечание 2. *Если* $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f(x)$ *и* $f(x)$ *отделена от нуля (т.е. существует такое* $\alpha > 0$, *что для любого элемента множества* X $|f(x)| \geqslant \alpha$*), то* $\dfrac{1}{f_n(x)} \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} \dfrac{1}{f(x)}$.

Доказательство этих фактов остаётся в качестве управжнения. **Указание**. Рассмотреть $\dfrac{1}{f_n} - \dfrac{1}{f} = (f - f_n)\dfrac{1}{f_n \cdot f}$.

Геометрический смысл равномерной сходимости

Несложно понять, что если $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f(x)$, то для всякого $\varepsilon > 0$, начиная с какого-то $N \in \mathbb{N}$ для всех $n > N$ все графики функций $f_n(x)$ окажутся в ε-коридоре графика функции $f(x)$.

Критерий Коши равномерной сходимости

Теорема 1 (Критерий Коши равномерной сходимости)**.** *Следующие условия эквивалентны:*

1. $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}}$ *(равномерно сходится куда-то);*
2. $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *удовлетворяет условию Коши равномерной сходимости на* X*:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\colon\ \forall n,m > N\ \forall x \in X\ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Доказательство. **1** $\Leftarrow$ **2**. Заметим, что для всякого $x \in X$ числовая последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ является фундаментальной. Тогда $\forall x \in X\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$. Найдём такое $N \in \mathbb{N}$, что

$$\forall n,m > N\ \forall x \in X\ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon_1.$$

Зафиксировав n перейдём к пределу при $m \to \infty$, получим, что $\forall x \in X : |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon_1 < \varepsilon$. Получили требуемое.

1 $\Rightarrow$ **2**. Пусть $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f(x)$.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, положим $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$. Найдём такое $N \in \mathbb{N}$, что $\forall n > N\ \forall x \in X$ верно $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_1$. Тогда $\forall n,m > N\ \forall x \in X$ выполнено

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = \varepsilon.$$

□

Функциональные ряды

Перейдём к рассмотрению функциональных рядов. Тут все определения и теоремы переносятся с обычных рядов с заменой числовых последовательностей на функциональные.

Определение 3. *Будем говорить, что ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится равномерно к* $S(x)$ *на множестве* X*, если последовательность его частичных сумм* $S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$ *сходится равномерно к* $S(x)$ *на множестве* X*.*

Отсюда же можно сформулировать ряд утверждений, которые по сути мы уже доказали.

Утверждение 6. *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} S(x)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} \tilde{S}(x)$*. Тогда их почленная сумма* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (f_n(x) + g_n(x)) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} S(x) + \tilde{S}(x)$*.*

Утверждение 7. *Если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} S(x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, *то*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} \alpha S(x).$$

Утверждение 8. *Если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} S(x)$, *а* $g(x)$ *ограничена на* X, *то*

$$\sum_{n=1}^{\infty} g(x) f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} g(x)S(x).$$

Ну и конечно, мы не обойдёмся без критерия Коши.

Утверждение 9 (Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда)**.** *Следующие утверждения эквивалентны.*

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}}$ *(опять же, сходится куда-то).*
2. *Выполняется условие Коши*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\colon\ \forall m > N, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in X\ \left|\sum_{n=m+1}^{m+p} f_n(x)\right| < \varepsilon.$$

Отсюда же нахаляву получаем утверждение.

Утверждение 10 (Необходимое условие равномерной сходимости функционального ряда)**.** *Если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}}$, *то* $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} 0$.