Лекция 01 от 05.09.2016

Определение 1. *Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность действительных чисел.* Числовым рядом *называется выражение вида* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*, записываемое также как* $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$*.*

Определение 2. *N-й частичной суммой называется сумма первых N членов.*

$$S_n = a_1 \ + \ \ldots \ + \ a_N$$

Определение 3. *Последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется последовательностью частичных сумм.*

Говорят, что ряд *сходится* (к числу A), если (к числу A) сходится последовательность его частичных сумм. Аналогично, ряд *расходится к $+\infty$ (к $-\infty$)*, если к $+\infty$ (к $-\infty$) расходится последовательность его частичных сумм. В противном случае, если последовательность частичных сумм расходится, ряд называют *расходящимся*.

Определение 4. *Суммой ряда называется предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, если он сходится или расходится к $\pm\infty$.*

Вспоминая, что $a_n = S_n - S_{n-1}$, можно заключить, что особой разницы между самим рядом и последовательностью его частичных сумм нет — из одного можно получить другое и наоборот. Следовательно, вместо ряда можно рассматривать его частичные суммы.

Пример 1 (Предел Коши для последовательностей)**.** *Последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию Коши, т.е.*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\colon \forall m,k > N \Rightarrow |S_m - S_k| < \varepsilon.$$

Таким образом, мы нахаляву получили первую теорему.

Теорема 1 (Критерий Коши сходимости ряда)**.** *Для сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\colon \forall k > N, \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow |a_{k+1} + a_{k+2} \ldots + a_{k+p}| < \varepsilon.$$

Отсюда сразу же очевидно следует утверждение.

Утверждение 1 (Необходимое условие сходимости ряда)**.** *Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Доказательство. Ряд сходится, значит,

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\colon \forall k > N, p = 1 \Rightarrow |a_{k+1}| < \varepsilon.$$

А это и есть определение предела, равного нулю.

Другой способ доказательства: вспомним, что $a_n = S_n - S_{n-1}$ и что S_n, как и S_{n-1}, стремятся к одному пределу при стремлении n к бесконечности. Итого, получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_n = 0.$$

□

Теперь сформулируем и докажем несколько тривиальных свойств.

Свойства 1. *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B$. *Тогда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B$.

Доказательство. Это напрямую следует из свойств предела последовательности и того, что $S_n^{a+b} = S_n^a + S_n^b$. □

Свойства 2. *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$. *Тогда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha A$ *для любого действительного* α.

Доказательство. Аналогично вытекает из свойств предела последовательности. □

Введём важное определение.

Определение 5. *Пусть дан ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. *Обозначим некоторые его подсуммы,*

$$\underbrace{a_1 + \ldots + a_{n_1}}_{b_1} + \underbrace{a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2}}_{b_2} + \underbrace{a_{n_2+1} \ldots + a_{n_3}}_{b_3} + a_{n_3+1} + \ldots,$$

где $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ *— возрастающая последовательность натуральных чисел. В таком случае говорят, что ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *получен из исходного* расстановкой скобок.

Утверждение 2. *Если ряд сходится или расходится к* $\pm\infty$, *то после любой расстановки скобок он сходится, неформально говоря, туда же.*

Доказательство. Достаточно заметить, что частичные суммы ряда, полученного расстановкой скобок, образуют подпоследовательность в последовательности частичных сумм исходного ряда.

$$S_1^b = S_{n_1}^a, \quad S_2^b = S_{n_2}^a, \quad S_3^b = S_{n_3}^a, \quad \ldots$$

Осталось только вспомнить, что любая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится туда же, куда и сама последовательность. □

Обратное неверно!!! Пример такого ряда:

$$1 - 1 + 1 - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n.$$

При расстановке скобок $(1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 0$ получается сходящийся ряд, в то время как исходный ряд расходится, хотя бы потому что не выполняется необходимое условие о стремлении членов ряда к нулю.

Однако сходимость элементов к нулю не единственное препятствие. Например, можно «распилить» единицы из предыдущего примера и получить следующий ряд:

$$1 - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

Его элементы стремятся к нулю, но он все еще расходится. Однако расставив скобки, можно получить сходящийся ряд:

$$(1 - 1) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) + \ldots = 0.$$

Утверждение 3. *Если $a_n \to 0$ и длины скобок ограничены (т.е. существует такое $C \in \mathbb{R}$, что $n_{k+1} - n_k < C$ при всех k), то из сходимости ряда, полученного расстановкой таких скобок, следует сходимость исходного ряда.*

Доказательство. Доказать предлагается самостоятельно. Указание: ограничить через $\frac{\varepsilon}{C}$. □

Утверждение 4. *Изменение, удаление или добавление конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость.*

Поговорим теперь об абсолютной сходимости.

Определение 6. *Если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, то говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно.*

Определение 7. *Если ряд сходится, но не сходится абсолютно, то говорят, что ряд сходится условно.*

Утверждение 5. *Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абслютно, то он сходится.*

Доказательство. Сразу следует из критерия Коши. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Так как ряд из модулей сходится, то

$$\exists N \in \mathbb{N} \colon \forall k > N, \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{k+1}^{k+p} |a_k| < \varepsilon$$

Тогда

$$\left| \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n \right| \leqslant \sum_{n=k+1}^{k+p} |a_n| < \varepsilon$$

□

Определение 8. *Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ N-м хвостом называется сумма $r_N = \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} a_n$.*

Для сходящегося ряда очевидно, что $r_n \in \mathbb{R}$.