Лекция 12 от 28.11.2016
Степенные ряды

Определение 1. *Степенной ряд — это функциональный ряд вида* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$*, где* $\{c_n\}$ *— последовательность коэффициентов, а* $x_0 \in \mathbb{R}$ *— центр ряда.*

Отметим, что ряд начинается с $n = 0$. Это будет важно в дальнейшем, давая возможность представлять рядами функции, в нуле (точнее, в x_0) не равные нулю.

В процессе всех дальнейших рассуждений в рамках этой лекции будем полагать, что $x_0 = 0$. Это не умаляет общности, так как фактически это сдвиг по оси (иными словами, замена переменной).

Теорема 1 (Абеля I)**.** *Пусть ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *сходится в точке* x_1*. Тогда* $\forall x: \ |x| < |x_1|$ *этот ряд сходится абсолютно. Более того,* $\forall x_2 \in (0, |x_1|)$ *сходимость на* $[-x_2, x_2]$ *— равномерная.*

Доказательство. Так как ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x_1^n$ сходится, то его члены стремятся к нулю, а значит, $\exists C \ \forall n \in \mathbb{N}: \ |c_n x_1^n| < C$.

Тогда $\forall x: \ |x| < |x_1|$ верно, что

$$|c_n x^n| \leqslant |c_n x_1^n| \cdot \left|\frac{x}{x_1}\right|^n \leqslant C\left|\frac{x}{x_1}\right|^n.$$

Вместе с тем, несложно заметить, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C\left|\dfrac{x}{x_1}\right|^n$ сходится как геометрическая прогрессия с $q = |x/x_1| < 1$, а значит, по признаку сравнения сходится и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n x^n|$, то есть ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ сходится абсолютно.

Для доказательства равномерной сходимости воспользуемся признаком Вейерштрасса:

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \forall x \in [-x_2; x_2]: \ |c_n x^n| \leqslant C\left|\frac{x}{x_1}\right|^n < C\left|\frac{x_2}{x_1}\right|^n.$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C\left|\frac{x_2}{x_1}\right|^n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ сходится равномерно на $[-x_2; x_2]$. $\square$

Определение 2. *Радиусом сходимости* R *степенного ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *называется точная верхняя грань множества модулей точек, в которых ряд сходится.*

Определение 3. *Интервал* $(-R, R)$ *называется интервалом сходимости степенного ряда.*

Следствие 1. *Ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *сходится абсолютно в произвольной точке интервала сходимости, расходится в любой точке* $x \notin (-R, R)$*, и более того,* $\forall r \in (0, R)$ *сходимость на* $[-r, r]$ *равномерная.*

Доказательство. Для $x \notin (-R, R)$ — следует из определения радиуса сходимости.

Пусть теперь $x \in (-R, R)$. Так как x не равен точной верхней грани множества точек сходимости, то существует такая точка x_1, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x_1^n$ сходится, и при этом $|x_1| > |x|$. Аналогично для $r \in (0, R)$.

Теперь осталось просто воспользоваться теоремой Абеля. □

Нахождение радиуса сходимости

Факт существования у рядов радиуса сходимости — это прекрасно, но хотелось бы уметь его находить.

Теорема 2 (Формула Коши–Адамара)**.** *Пусть* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *— степенной ряд. Тогда радиус сходимости этого ряда* $R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}$ *(полагая при* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = \infty$ *что* $R = 0$ *и при* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = 0$ *что* $R = \infty$ *).*

Доказательство. Заметим, что если $b_n \to b$, то $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n b_n = b \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$.

Вспомним радикальный признак Коши: пусть $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n x^n|} = A$, тогда если $A < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n x^n|$ сходится, а если $A > 1$, то расходится. Но вместе с тем, $\sqrt[n]{|x_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|c_n|}$.

Следовательно, если $|x| < 1/ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = R$, то ряд сходится, а если $|x| > R$ — расходится. □

Зная эту формулу, можно легко придумать ряд с любым радиусом сходимости.

Утверждение 1. *Пусть существует предел* $\lim \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = A$*. Тогда радиус сходимости ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *равен* $\frac{1}{A}$.

Доказательство. Для $x \neq 0$ рассмотрим предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}x^{n+1}|}{|c_n x^n|} = A|x|$. Тогда, по признаку Д'Аламбера, если $A|x| < 1$, то ряд сходится, а если $A|x| > 1$, то расходится. □

Поведение в концах интервала сходимости

В концах интервала сходимости может происходить разное. Простые примеры:
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ — радиус сходимости равен 1, при $x = \pm 1$ ряд расходится.
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ — радиус сходимости равен 1, при $x = 1$ ряд расходится, при $x = -1$ ряд сходится условно.
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$ — радиус сходимости равен 1, при $x = \pm 1$ ряд сходится абсолютно.

Теорема 3 (Абеля II)**.** *Пусть ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *сходится в точке* x_1*. Тогда он равномерно сходится на отрезке с концами* 0 *и* x_1*.*

Доказательство. Рассмотрим x из отрезка с концами 0 и x_1. Представим исходный ряд в уже знакомом нам виде $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x_1^n \left|\dfrac{x}{x_1}\right|^n$.

Посмотрим на это как на произведение рядов. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x_1^n$ сходится, а последовательность $\{|x/x_1|^n\}$ либо монотонно убывает к нулю, либо стационарна (когда $x = x_1$), и ограничена единицей. Следовательно, по признаку Абеля ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x_1^n \left|\dfrac{x}{x_1}\right|^n$ равномерно сходится, то есть равномерно сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ на $[0, x_1]$. □

Следствие 2. *Сумма степенного ряда непрерывна на всём множестве сходимости.*

Доказательство. Согласно первой теореме Абеля, ряд равномерно сходится на $[-r,r] \subset (-R, R)$, однако про весь интервал это точно утверждать нельзя, так как на интервале $(-R, R)$ ряд может сходиться и неравномерно. Пусть $x_0 \in (-R, R)$. Выберем такое r, что $x_0 < r < R$. Так как x_0 — внутренняя точка отрезка $[-r, r]$ и на $[-r, r]$ ряд сходится равномерно, то, по теореме о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда непрерывных функций, сумма ряда является непрерывной функцией на $[-r,r]$, включая точку x_0. Таким образом, сумма ряда непрерывна во всех точках интервала $(-R, R)$.

Однако, множество сходимости может включать в себя точки $\pm R$. В этом случае нам поможет вторая теорема Абеля. Согласно ей, ряд сходится равномерно на отрезке $[0, R]$ (или $[-R, 0]$). А значит, по всё той же теореме о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда непрерывных функций, сумма ряда непрерывна и в точках $\pm R$, если множество сходимости их в себя включает. □

Следствие 3. *Степенной ряд сходится равномерно на каждом отрезке, лежащем в его множестве сходимости.*