

# Лекция 12 от 28.11.2016

## Степенные ряды

**Определение 1.** Степенной ряд — это функциональный ряд вида  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$ , где  $\{c_n\}$  — последовательность коэффициентов, а  $x_0 \in \mathbb{R}$  — центр ряда.

Отметим, что ряд начинается с  $n = 0$ . Это будет важно в дальнейшем, давая возможность представлять рядами функции, в нуле не равные нулю.

В процессе всех дальнейших рассуждений в рамках этой лекции будем полагать, что  $x_0 = 0$ . Это не умаляет общности, так как фактически это сдвиг по оси (иными словами, замена переменной  $x' = x_0 + x$ ).

**Теорема 1** (Абеля I). Пусть ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  сходится в точке  $x_1$ . Тогда  $\forall x : |x| < |x_1|$  этот ряд сходится абсолютно. Более того,  $\forall x_2 \in (0, |x_1|)$  сходимость на  $[-x_2, x_2]$  — равномерная.

*Доказательство.* Так как ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_1^n$  сходится, то его члены стремятся к нулю, а значит,  $\exists C \forall n \in \mathbb{N} : |c_n x_1^n| < C$ .

Тогда  $\forall x : |x| < |x_1|$  верно, что

$$|c_n x^n| \leq |c_n x_1^n| \cdot \left| \frac{x}{x_1} \right|^n \leq C \left| \frac{x}{x_1} \right|^n.$$

Вместе с тем, несложно заметить, что ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} C \left| \frac{x}{x_1} \right|^n$  сходится как геометрическая прогрессия с  $q = |x/x_1| < 1$ , а значит, по признаку сравнения сходится и ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n|$ , то есть ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  сходится абсолютно.

Для доказательства равномерной сходимости воспользуемся признаком Вейерштрасса:

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in [-x_2, x_2] : |c_n x^n| \leq C \left| \frac{x}{x_1} \right|^n < C \left| \frac{x_2}{x_1} \right|^n.$$

Так как ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} C \left| \frac{x_2}{x_1} \right|^n$  сходится, то ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  сходится равномерно на  $[-x_2, x_2]$ . □

**Определение 2.** Радиусом сходимости  $R$  степенного ряда называется точная верхняя грань множества точек, в которых ряд сходится.

**Определение 3.** Интервал  $(-R, R)$  называется интервалом сходимости степенного ряда.

**Следствие 1.** Ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  сходится абсолютно в произвольной точке интервала сходимости, расходится в любой точке  $x \notin (-R, R)$ , и более того,  $\forall r \in (0, R)$  сходимость на  $(-r, r)$  равномерная.

*Доказательство.* Для  $x \notin (-R, R)$  — следует из определения радиуса сходимости.

Пусть теперь  $x \in (-R, R)$ . Так как  $x$  не равен точной верхней грани множества точек сходимости, то существует такая точка  $x_1$ , что  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_1^n$  сходится, и при этом  $|x_1| > |x|$ . Аналогично для  $r \in (0, R)$ .

Теперь осталось просто воспользоваться теоремой Абеля. □

## Нахождение радиуса сходимости

Факт существования у рядов радиуса сходимости — это прекрасно, но хотелось бы уметь его находить.

**Теорема 2** (Формула Коши–Адамара). Пусть  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  — степенной ряд. Тогда радиус сходимости этого ряда  $R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$  (полагая при  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \infty$  что  $R = 0$  и при  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0$  что  $R = \infty$ ).

*Доказательство.* Заметим, что если  $b_n \rightarrow b$ , то  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = b \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

Вспомним признак Коши: пусть  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n x^n|} = A$ , тогда если  $A < 1$ , то ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n|$  сходится, а если  $A > 1$ , то расходится. Но вместе с тем,  $\sqrt[n]{|x_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|c_n|}$ .

Следовательно, если  $|x| < 1/\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = R$ , то ряд сходится, а если  $|x| > R$  — расходится.  $\square$

Зная эту формулу, можно легко придумать ряд с любым радиусом сходимости.

**Утверждение 1.** Пусть существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = A$ . Тогда радиус сходимости ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  равен  $\frac{1}{A}$ .

*Доказательство.* Для  $x \neq 0$  рассмотрим предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_{n+1} x^{n+1}|}{|c_n x^n|} = A|x|$ . Тогда, по признаку Д’Аламбера, если  $A|x| < 1$ , то ряд сходится, а если  $A|x| > 1$ , то расходится.  $\square$

## Поведение в концах интервала сходимости

В концах интервала сходимости может происходить разное. Простые примеры:

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$  — радиус сходимости равен 1, при  $x = \pm 1$  ряд расходится.

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$  — радиус сходимости равен 1, при  $x = 1$  ряд расходится, при  $x = -1$  ряд сходится условно.

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$  — радиус сходимости равен 1, при  $x = \pm 1$  ряд сходится абсолютно.

**Теорема 3** (Абея II). Пусть ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  сходится в точке  $x_1$ . Тогда он равномерно сходится на отрезке  $[0, x_1]$ .

*Доказательство.* Рассмотрим  $x \in [0, x_1]$ . Представим исходный ряд в уже знакомом нам виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x_1^n \left| \frac{x}{x_1} \right|^n.$$

Посмотрим на это как на произведение рядов. Ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_1^n$  сходится, а последовательность  $\{|x/x_1|^n\}$  либо монотонно убывает к нулю, либо стационарна (когда  $x = x_1$ ), и ограничена

единицей. Следовательно, по признаку Абеля ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_1^n \left| \frac{x}{x_1} \right|^n$  равномерно сходится, то есть равномерно сходится ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  на  $[0, x_1]$ .  $\square$

**Следствие 2.** *Сумма степенного ряда непрерывна на всём множестве сходимости.*

*Доказательство.* Согласно первой теореме Абеля, ряд равномерно сходится на  $[-r, r] \subset (-R, R)$ , однако про весь интервал это точно утверждать нельзя, так как на интервале  $(-R, R)$  ряд может сходиться и неравномерно. Пусть  $x_0 \in (-R, R)$ . Выберем такое  $r$ , что  $x_0 < r < R$ . Так как  $x_0$  — внутренняя точка отрезка  $[-r, r]$  и на  $[-r, r]$  ряд сходится равномерно, то, по теореме о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда непрерывных функций, сумма ряда является непрерывной функцией на  $[-r, r]$ , включая точку  $x_0$ . Таким образом, сумма ряда непрерывна во всех точках интервала  $(-R, R)$ .

Однако, множество сходимости может включать в себя точки  $\pm R$ . В этом случае нам поможет вторая теорема Абеля. Согласно ей, ряд сходится равномерно на отрезке  $[0, R]$  (или  $[-R, 0]$ ). А значит, по всё той же теореме о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда непрерывных функций, сумма ряда непрерывна и в точках  $\pm R$ , если множество сходимости их в себя включает.  $\square$