Семинарские занятия по предмету
Теория вероятностей

Алексей Хачиянц

2016/2017 учебный год

1 Семинар от 16.09.2016

Начнём с разбора домашнего задания.

Задача 1. *n шаров раскладывают по N ящикам. Найдите вероятность того, что для каждого $i = 1, 2, \ldots, N$ в i-м ящике лежит n_i шаров, где $n_1 + n_2 + \ldots + n_N = n$, если*

1. *шары различимы,*
2. *шары неразличимы.*

Доказательство. Начнём со случая различимых шаров. В первый ящик необходимо выбрать n_1 шаров из n, что можно сделать $C_n^{n_1}$ способами. Для второго ящика надо выбрать n_2 шаров из $n - n_1$, что даёт $C_{n-n_1}^{n_2}$. Рассуждая аналогично, получаем, что всего есть $C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} \ldots C_{n-n_1-\ldots-n_{N-1}}^{n_N} = \frac{n!}{n_1!(n-1)!} \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \cdots \frac{(n-n_1-\ldots-n_{N-1})!}{n_N!(n-n_1-\ldots-n_{N-1}-n_N)!} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_N!}$ успешных исходов. Всего же исходов N^n. Тогда искомая вероятность равна $\frac{n!}{N^n n_1!n_2!\ldots n_N!}$.

Теперь рассмотрим случай, когда шары неразличимы. Заметим, что тогда есть лишь один подходящий случай. Всего же случаев C_{n+N-1}^{N-1}. Тогда вероятность равна $\frac{n!(N-1)!}{(n+N-1)!}$ □

Примечание 1. Заметим, что число успешных исходов в случае различимых шаров, равное $\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_N!}$, принято называть *мультиномиальным коэффициентом*. Его можно получить, рассматривая полином $(x_1 + x_2 + \ldots + x_N)^n$.

Задача 2. *Случайно бросаются три N-гранных кубика. Какова вероятность события $P(A_i)$, где $A_i = \{$выпало i очков$\}$, где $i \leq N + 2$.*

Решение. Пусть $i = k_1 + k_2 + k_3$, и $1 \leq k_1, k_2, k_3 \leq N$. Как посчитать число подходящих наборов? Воспользуемся методом точек и перегородок. Пусть есть i точек и нужно расставить 2 перегородки по $i - 1$ допустимой позиции. Тогда есть C_{i-1}^2 допустимых набора. Отсюда получаем, что искомая вероятность равна

$$P(i) = \frac{(i-1)(i-2)}{2N^3}$$

□

Примечание 2. Пункты (б) и (в) на данный момент слишком сложны. Их адекватное решение будет рассказано ближе к концу курса.

Задача 3. *Пусть выбирается произвольная перестановка из S_n. Какова вероятность того, что 1 и 2 будут лежать в одном цикле?*

Решение. Воспользуемся тем фактом, что каждая перестановка однозначно представима в виде композиции циклов. Пусть цикл, содержащий 1 и 2, состоит из $k+1$ элемента $(1 \leq k \leq n-1)$. Позицию для 2 можно выбрать k способами. Далее будем заполнять цикл. Есть $(n-2)(n-3)\dots(n-k)$ вариантов его заполнения. Остальное же мы можем заполнять, как хотим. Следовательно, итого есть $k(n-2)(n-3)\dots(n-k)(n-k-1)! = k(n-2)!$ допустимых перестановок с нужным циклом размера k. Тогда, суммируя по k от 1 до $n-1$, получаем

$$(n-2)!(1+2+\ldots+(n-1)) = \frac{1}{2}n!$$

Но всего перестановок $n!$. Тогда вероятность равна $1/2$. □

Задача 4. *Пусть в группе 25 студентов. Считаем, что дни рождения равновероятны и случайны. Найдите вероятность того, что найдётся ровно одна пара студентов такая, что*

- *дни рождения у них совпадают*
- *у всех других студентов дни рождения не совпадают с днём рождения данной пары студентов*

Доказательство. Для начала посчитаем вероятность дополнения к событию. В данном случае дополнением является событие "нет такой пары студентов, что их дни рождения совпадают и у остальных они другие".

Рассмотрим событие $A_i = \{$дни рождения в день i совпадают только у двух человек$\}$. Его вероятность равна $P(A_i) = \frac{C_{25}^2 \cdot (364)^{23}}{(365)^{25}}$. Теперь посчитаем вероятность объединения k событий $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}$ равна

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \frac{C_{25}^2 C_{23}^2 \dots C_{25-2(k-1)}^2 (365-k)^{25-2k}}{365^{25}}$$

Теперь посчитаем вероятность дополнения. Она равна $P\left(\bigcap\limits_{i=1}^{365} \overline{A_i}\right)$. Её можно посчитать с помощью формулы включений-исключений. Теперь введём функцию $\alpha(x,y)$, где x — количество студентов, а y — количество дней. Данная функция равна вероятности того, что "среди x студентов нет такой пары студентов, что их дни рождения совпадают, и среди других студентов они другие и находятся среди y выбранных дней". Она считается аналогично.

Теперь посчитаем вероятность из условия. Для этого выберем двух человек из 25, выберем им день рождения. После чего посчитаем вероятность дополнения для 23 студентов и 364 дней и умножим на 364^{23}. Тогда ответ равен

$$\frac{C_{25}^2 \cdot 365 \cdot \alpha(23, 364) \cdot (364)^{23}}{(365)^{25}}$$

□

Теперь рассмотрим несколько классических задач на условную вероятность.

Задача 5 (Парадокс Монти-Холла)**.** *Вы участвуете в игре, в которой надо выбрать одну дверь из трёх. За одной из них автомобиль, а за другими — козы. Вы выбрали первую дверь. Ведущий открыл третью дверь, за которой стоит коза. Ведущий предлагает изменить выбор с первой двери на вторую. Стоит ли это делать?*

Решение. Рассмотрим два решения — элементарное и через теорему Байеса. Начнём со второго.

Пусть $C_i = \{\text{машина стоит за } i\text{-й дверью}\}$ Очевидно, что $P(C_i) = 1/3$. Теперь введём событие $H = \{\text{ведущий открывает третью дверь}\}$. Так как ведущий не желает открывать дверь с автомобилем, то условные вероятности будут равны

$$\begin{aligned} &P(H \mid C_1) = 1/2 \\ &P(H \mid C_2) = 1 \\ &P(H \mid C_3) = 0 \end{aligned}$$

Теперь посчитаем вероятность $P(C_2 \mid H)$. По теореме Байеса она равна

$$P(C_2 \mid H) = \frac{P(H \mid C_2)P(H)}{P(H \mid C_1)P(H) + P(H \mid C_2)P(H) + P(H \mid C_3)P(H)} = \frac{1}{1/2 + 1 + 0} = \frac{2}{3}$$

Если же не менять дверь, то вероятность не изменится и будет равна $1/3$. Поэтому выгоднее изменить выбор двери.

Теперь рассмотрим элементарное решение. Так как вероятность того, что за дверью будет машина, равна $1/3$, то на вторую и третью дверь вместе приходится $2/3$. Так как после открытия третьей двери оказалось, что за ней стояла коза, то вероятность "переходит" второй двери. Тогда вероятность того, что за первой дверью будет машина, равна $1/3$, а за второй — $2/3$. Выбор очевиден. □

Задача 6 (Задача о поручике Ржевском)**.** *Поручик Ржевский пришёл в казино и решил поиграть на деньги. Сначала у него есть 8 рублей, и он хочет выйти из казино с 256 рублями. Ему предлагают две тактики:*

- *Каждый раз идти ва-банк.*
- *Каждый раз играть на 1 рубль.*

Какую тактику выбрать поручику, если вероятность выигрыша составляет: (a) $1/4$, *(b)* $3/4$*?*

Решение. В случае первой тактики всё просто — он не имеет права проиграть. Поэтому вероятность того, что он уйдёт с желаемой суммой, равна p^5.

Со второй тактикой дела обстоят интереснее. Введём событие $p_l = \{\text{поручик получил желаемое, изначально имея } l \text{ рублей}\}$. По формуле полной вероятности получим рекурсивную формулу. Вместе с начальными условиями получаем систему

$$\begin{aligned} &p_l = (1-p)p_{l-1} + pp_{l+1} \\ &p_0 = 0 \\ &p_{256} = 1 \end{aligned}$$

Выпишем характеристическое уравнение:

$$p\lambda^2 - \lambda + (1-p) = 0$$

Корни этого уравнения имеют вид

$$\frac{1 \pm \sqrt{1-4p+4p^2}}{2p} = \frac{1 \pm (1-2p)}{2p} = \left[\begin{array}{l} 1 \\ \frac{1-p}{p} \end{array} \right.$$

Тогда получаем, что $p_l = a_1 + a_2 \left(\frac{1-p}{p}\right)^l$. Теперь определим значение констант.

$$0 = a_1 + a_2 \implies a_1 = -a_2 = -a$$

$$1 = -a + a\left(\frac{1-p}{p}\right)^{256} \implies a = \frac{1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{256} - 1}$$

Отсюда получаем, что

$$p_l = \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^l - 1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{256} - 1}$$

В итоге вероятность выигрыша по второй стратегии равна

$$p_8 = \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^8 - 1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{256} - 1}$$

Теперь осталось посчитать. Сначала посчитаем для $p = 1/4$:

$$P_I = \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{1}{1024}$$

$$P_{II} = \frac{\left(\frac{1-1/4}{1/4}\right)^8 - 1}{\left(\frac{1-1/4}{1/4}\right)^{256} - 1} = \frac{3^8 - 1}{3^{256} - 1} \approx \frac{1}{3^{248}}$$

В таком случае шанс выйти из казино по своей воле выше, если каждый раз играть ва-банк.

Теперь же посчитаем для $p = 3/4$:

$$P_I = \left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{243}{1024}$$

$$P_{II} = \frac{\left(\frac{1-3/4}{3/4}\right)^8 - 1}{\left(\frac{1-3/4}{3/4}\right)^{256} - 1} = \frac{1-(1/3)^8}{1-(1/3)^{256}} \approx \frac{6560}{6561}$$

В таком же случае гораздо выгоднее каждый раз играть на один рубль. □

Задача 7 (Задача о контрольной работе)**.** *Пусть студенты A, B, C пишут контрольную. Студент A решает любую задачу с вероятностью 3/4, студент B — с вероятностью 1/2, а студент C — с вероятностью 1/4. В контрольной работе 4 задачи. Преподаватель получает неподписанную работу, в которой решено 3 задачи. Кому эта работа скорее всего принадлежит?*

Решение. Пусть $D = \{$автор решил 3 задачи из 4$\}$. Теперь введём ещё три события: $D_A = \{$автор — студент A$\}$, $D_B = \{$автор — студент B$\}$, $D_C = \{$автор — студент C$\}$. Очевидно, что $P(D_A) = P(D_B) = P(D_C) = \frac{1}{3}$. Найдём условную вероятность события D для разных условий:

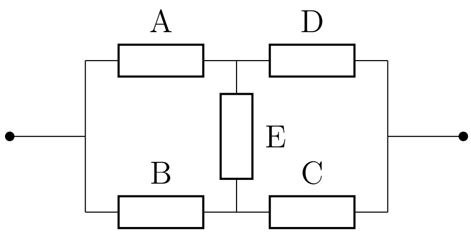
$$P(D \mid D_A) = \left(\tfrac{3}{4}\right)^3 \cdot C_4^1 \cdot \tfrac{1}{4} = \tfrac{27}{64}$$
$$P(D \mid D_B) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 \cdot C_4^1 \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4} = \tfrac{16}{64}$$
$$P(D \mid D_C) = \left(\tfrac{1}{4}\right)^3 \cdot C_4^1 \cdot \tfrac{3}{4} = \tfrac{3}{64}$$

Теперь воспользуемся теоремой Байеса:

$$P(D_A \mid D) = \frac{P(D \mid D_A)P(D_A)}{P(D \mid D_A)P(D_A) + P(D \mid D_B)P(D_B) + P(D \mid D_C)P(D_C)} =$$
$$= \frac{\frac{27}{64}}{\frac{27}{64} + \frac{16}{64} + \frac{3}{64}} = \frac{27}{46}$$

Аналогично получаем, что $P(D_B \mid D) = \frac{16}{46}$ и $P(D_C \mid D) = \frac{3}{46}$. Следовательно, эту работу, скорее всего, сдал студент A. □

Задача 8. *Пусть пять приборов соединены в схему. Каждый из них пропускает ток с вероятностью p. Какова вероятность того, что схема пропускает ток? Какова вероятность того, что есть ток, но при этом E сломан?*



Решение. Для начал посмотрим, по каким путям может пройти ток:

- Ток может пойти по AD — тогда вероятность того, что ток будет, равна p^2.
- Если D сломан, то ток может пойти по AEC. Вероятность такого случая равна $p^3(1-p)$.
- Если A сломан, то ток может пойти по BC. Вероятность этого равна $p^2(1-p)$.
- Если же сломаны и A, и C, то ток пойдёт по AED. Вероятность такого равна $p^3(1-p)^2$.

Тогда итоговая вероятность равна сумме: $p^2 + p^3(1-p) + p^2(1-p) + p^3(1-p)^2$.

Теперь ответим на второй вопрос. Воспользуемся определением условной вероятности:

$$P(\text{E не проводит ток} \mid \text{в цепи есть ток}) = \frac{P(\text{E не проводит ток и в цепи есть ток})}{P(\text{в цепи есть ток})}$$

Вероятность сверху посчитать несложно — достаточно рассмотреть допустимые пути. Тогда ответ равен

$$\frac{p^2(1-p) + p^2(1-p)^2}{p^2 + p^3(1-p) + p^2(1-p) + p^3(1-p)^2}$$

□