Лекция 03 от 26.09.2016

В прошлый раз мы с вами сформулировали и доказали признак Лейбница. Будем пользоваться в этот раз слабой его формулировкой:

Утверждение 1. *Пусть последовательность $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно убывает. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ сходится.*

Замечание 1. *Для этого утверждения достаточно нестрогой монотонности.*

Оказывается, этот признак является частным случаем более общего признака, который мы сейчас сформулируем и докажем.

Утверждение 2 (Признак Дирихле)**.** *Пусть частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ограничены ($\exists C > 0\colon \forall N \in \mathbb{N} \Rightarrow |A_n| = |a_1 + a_2 + \ldots + a_n| < C$), а $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ — неубывающая последовательность. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ сходится. (отметим, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ может влёгкую расходиться).*

Подставляя сюда вместо a_n последовательность $a_n = (-1)^n$ (частичные суммы $1, 0, 1, 0, \ldots$ ограничены), получаем формулировку первого утверждения.

Замечание 2. *В признаке Лейбница куда важнее утверждение про оценку остатка, чем про сходимость ряда.*

Доказательство. Для доказательства мы применим трюк, подобный интегрированию по частям, именуемый в дискретном случае *преобразованием Абеля* («название умнее, чем само преобразование» © Лектор).

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Найдём такое $N \in \mathbb{N}$, что

$$\forall n \geqslant N\colon\ b_n < \frac{\varepsilon}{4C}$$

Возьмём $m > N$, произвольное $p \in \mathbb{N}$ и оценим сумму $\left|\sum\limits_{n=m+1}^{m+p} a_n b_n\right|$.

$$\sum_{n=m+1}^{m+p} a_n b_n = \sum_{n=m+1}^{m+p} \left(A_n - A_{n-1}\right) b_n = \sum_{n=m+1}^{m+p} A_n b_n - \sum_{n=m+1}^{m+p} A_{n-1} b_n = \sum_{n=m+1}^{m+p} A_n b_n - \sum_{n=m}^{m+p-1} A_n b_{n-1} =$$

$$= A_{m+p} b_{m+p} - A_m b_{m+1} + \sum_{n=m+1}^{m+p-1} A_n \left(b_n - b_{n+1}\right)$$

Следовательно,

$$\left|\sum_{n=m+1}^{m+p} a_n b_n\right| \leqslant |A_{m+p} b_{m+p}| + |A_m b_{m+1}| + \sum_{n=m+1}^{m+p-1} |A_n||b_n - b_{n+1}| <$$

$$< C\frac{\varepsilon}{4C} + C\frac{\varepsilon}{4C} + C\sum_{n=m+1}^{m+p-1} (b_n - b_{n+1}) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + C(b_{m+1} - b_{m+2} + b_{m+2} - b_{m+3} + \ldots - b_{m+p}) = \frac{\varepsilon}{2} + C(b_{m+1} - b_{m+p}) < \frac{\varepsilon}{2} + C\frac{\varepsilon}{4c} < \varepsilon$$

$\square$

Пример 1. *Попробуем поисследовать на сходимость какой-нибудь ряд, хороший пример — ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos n\alpha}{n}$*, при* $\alpha \neq \pi k$*,* $k \in \mathbb{Z}$ *или такой же с синусом. Пусть* $a_n = \cos n\alpha$*,* $b_n = \dfrac{1}{n}$*. Исследуем ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *на ограниченность частичных сумм:*

$$A_n = \frac{|\cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos n\alpha| \cdot \sin(\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)} =$$

$$= \left| \frac{-\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{3\alpha}{2} - \sin\frac{3\alpha}{2} + \sin\frac{5\alpha}{2} - \ldots + \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \right| =$$

$$= \frac{\left|-\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha\right|}{2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|} \leqslant \frac{2}{2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|} = \frac{1}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}$$

Тогда тут применим признак Дирихле и ряд сходится. Теперь покажем его условную сходимость, то есть тот факт, что ряд из модулей расходится.

$$\frac{|\cos n\alpha|}{n} \geqslant \frac{(\cos n\alpha)^2}{n} = \frac{\cos 2n\alpha + 1}{2n} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\frac{\cos 2n\alpha}{n}}_{\text{сход.}} + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{расх.}}\right)$$

Сформулируем и докажем ещё один важный признак.

Утверждение 3 (Признак Абеля). *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, а* b_n *— монотонная ограниченная последовательность. Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *сходится.*

Доказательство. Последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ сходится, а значит ограничена. Последовательность b_n монотонна и ограничена, а значит имеет предел $B = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. То есть последовательность b_n представима в виде $B + \beta_n$, где β_n — монотонно стремящаяся к нулю последовательность.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(B + \beta_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n B + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \beta_n$$

Первое слагаемое сходится по условию (умножение на константу ничего не меняет), а второе по признаку Дирихле. □

Поговорим теперь о перестановках ряда.

Определение 1. *Пусть* σ *— биекция (перестановка)* $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$*. Говорят, что ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ *является перестановкой ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*.*

Сформулируем две теоремы, которые докажем в следующий раз.

Теорема 1 (Коши). *Пусть ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *абсолютно сходится, и его сумма равна* A*. Тогда* $\forall\sigma$ *— перестановке* $\mathbb{N}$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ *также сходится абсолютно, и его сумма равна* A*.*

Теорема 2 (Римана)**.** *Пусть ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится условно. Тогда*

1. *Для любого* $A \in \mathbb{R}$ *найдётся такая перестановка* σ*, что* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = A$
2. *Существует такая перестановка* σ*, что ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ *расходится к* $+\infty$.
3. *Существует такая перестановка* σ*, что ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ *расходится к* $-\infty$.
4. *Существует такая перестановка* σ*, что для ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ *последовательность частичных сумм предела не имеет.*