Лекция 05 от 03.09.2016
Перестановки рядов и произведения рядов

Основные теоремы о перестановках рядов

Напомним основное для этой лекции определение.

Определение 1. *Пусть σ — биекция (перестановка) $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Тогда говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ является перестановкой ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Теорема 1 (Коши). *Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, и его сумма равна A. Тогда любая его перестановка $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ также сходится абсолютно, и его сумма равна A.*

Доказательство абсолютной сходимости: Докажем, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ абсолютно сходится.

Обозначим $A_+ := \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Возьмём произвольное $N \in \mathbb{N}$ и покажем, что $\sum\limits_{n=1}^{N} |a_{\sigma(n)}| \leqslant A_+$ (тогда возрастающая последовательность частичных сумм $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{\sigma(n)}|$ ограничена и ряд сходится).

Определим $N := max\,\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(N)\}$. Тогда очевидно, что $\sum\limits_{n=1}^{N} |a_{\sigma(n)}| \leqslant \sum\limits_{n=1}^{M} |a_n|$, так как правая сумма содержит в себе и все слагаемые левой суммы. Но из этого неизбежно следует и $\sum\limits_{n=1}^{N} |a_{\sigma(n)}| \leqslant A_+$, потому что любая частичная сумма $\sum\limits_{n=1}^{M} |a_n|$ неотрицательного ряда не больше всей его суммы. $\square$

Доказательство сходимости к тому же значению: Докажем, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ сходится к A. Пусть есть некоторое $\varepsilon > 0$. Возьмём такое $N \in \mathbb{N}$, что $\sum\limits_{n=N}^{\infty} |a_n < \frac{\varepsilon}{2}$. (Тогда $\left|\sum\limits_{n=1}^{N} a_n - A\right| = \left|\sum\limits_{N+1}^{\infty} a_n\right| \leqslant$ $|\sum\limits_{N+1}^{\infty} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.)

Обозначим $M := max\{\sigma^{-1}(1), \sigma^{-1}(2) \ldots \sigma^{-1}(N)\}$.

Тогда для любого $\tilde{M} > M$:

$$\left|\sum_{m=1}^{\tilde{M}} a_{\sigma(m)} - A\right| \leqslant \left|\sum_{m=1}^{\tilde{M}} a_{\sigma(m)} - \sum_{n=1}^{N} a_n\right| + \left|\sum_{n=1}^{N} a_n - A\right| <$$

$$\left|\sum_{m=1\ldots\tilde{M},\ \sigma(m)>N}^{\tilde{M}} a_{\sigma(m)}\right| + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum_{m=1\ldots\tilde{M},\ \sigma(m)>N}^{\tilde{M}} |a_{\sigma(m)}| + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\leqslant \sum_{n=N+1}^{max\{\sigma(1),\sigma(2)\ldots\sigma(N)\}} |a_n| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

$\square$

Теперь пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно. В нём бесконечно много положительных слагаемых и бесконечно много отрицательных, так как иначе он сходился бы абсолютно. Через $\{p_n\}$ обозначим последовательность всех неотрицательных слагаемых, а через $\{q_n\}$, соответственно, отрицательных.

Раз $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\{a_n\}$ — сходящаяся последовательность, а значит и $\{p_n\}$ и $\{q_n\}$ тоже сходятся. При этом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ — расходятся.

Теорема 2 (Римана)**.** *Пусть ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится условно. Тогда:*

1. *для любого* $A \in \mathbb{R}$ *найдётся такая перестановка* σ*, что* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = A$*;*
2. *существует такая перестановка* σ*, что ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ *расходится к* $+\infty$*;*
3. *существует такая перестановка* σ*, что ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ *расходится к* $-\infty$*;*
4. *существует такая перестановка* σ*, что для ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ *последовательность частичных сумм предела не имеет.*

Доказательство.

1. Возмём произвольное $A \in \mathbb{R}$.

   Найдём наименьшее $k_1 \in \mathbb{N}$ такое что $p_1 + p2 + \dots + p_{k_1} > A$.

   Найдём наименьшее $\tilde{k}_1 \in \mathbb{N}$ такое что $p_1 + p2 + \dots + p_{k_1} + q_1 + q_2 + \dots + q_{\tilde{k}_1} < A$

   Найдём наименьшее $k_2 \in \mathbb{N}$ такое что $p_1 + p2 + \dots + p_{k_1} + q_1 + q_2 + \dots + q_{\tilde{k}_1} + p_{k_1+1} + \dots + p_{k_2} > A$
   И так далее. В силу того, что $\{p_n\}$ и $\{q_n\}$ сходятся к нулю, построение выше и даст перестановку ряда, сумма которой равна A.

   В остальных пунктах всё вполне аналогично.
2. Найдём наименьшее $k_1 \in \mathbb{N}$ такое что $p_1 + p2 + \dots + p_{k_1} > 1$.

   Найдём наименьшее $k_2 \in \mathbb{N}$ такое что $p_1 + p2 + \dots + p_{k_1} + q_1 + p_{k_1+1} + \dots + p_{k_2} > 2$

   Найдём наименьшее $k_3 \in \mathbb{N}$ такое что $p_1 + p2 + \dots + p_{k_1} + q_1 + p_{k_1+1} + \dots + p_{k_2} + q_2 + p_{k_2+1} + \dots + p_{k_3} > 3$

   И так далее. Построение выше и даст перестановку ряда, расходящуюся к к $+\infty$.
3. Аналогично предыдущему.
4. Аналогично предыдущим, например, доводя сумму последовательно до 1, -1, 2, -2, 3, -3 и так далее.

□

Произведение числовых рядов

Произведение пары конечных сумм определено вполне естественным и понятным образом:

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \cdot \sum_{m=1}^{M} b_m = (a_1 + \dots + a_n)(b_1 + \dots + b_m) = \sum_{n=1\ m=1}^{N,\ M} a_n a_m$$

С бесконечными суммами всё менее понятно. Казалось бы,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{m=1}^{\infty} b_m = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_n a_m,$$

однако объект в правой части равенства мы не определяли.

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\iddots$
b_4	16	15	14	13	$\dots$
b_3	9	8	7	12	$\dots$
b_2	4	3	6	11	$\dots$
b_1	1	2	5	10	$\dots$
	a_1	a_2	a_3	a_4	$\dots$

Рис. 1: Нумерация по квадратам

Но по крайней мере множество пар индексов (n, m), а значит и множество слагаемых в сумме счётно, то есть его можно занумеровать и таким образом превратить произведение рядов в обычный ряд. Вопрос лишь в том, как именно это сделать.

Теорема 3 (Коши о произведении абсолютно сходящихся рядов). *Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$ и $\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m = B$, причём оба ряда абсолютно сходятся. Тогда ряд из произведений $a_n b_m$, занумерованных в любом порядке сходится абсолютно и его сумма равна $A \cdot B$.*

Доказательство. По недавно доказанной теореме Коши о перестановках абсолютно сходящегося ряда нам достаточно доказать, что хотя бы при какой-то одной нумерации ряд из произведений абсолютно сходится к $A \cdot B$.

Будем использовать довольно очевидный способ нумерации, вполне достаточно описываемый картинкой слева, обычно называемый "нумерация по квадратам". Обозначим $A_+ := \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, $B_+ := \sum\limits_{m=1}^{\infty} |b_m|$, и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ – ряд из произведений, занумерованный выбранным нами способом. Тогда последовательность частичных сумм ряда из модулей c_k ограничена

$$\sum_{k=1}^{K} |c_k| \leqslant \sum_{k=1}^{K^2} |c_k| = (\sum_{n=1}^{K} |a_n|)(\sum_{m=1}^{K} |b_m|) \leqslant A_+ \cdot B_+,$$

то есть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ сходится абсолютно. Сумму этого ряда посчитать теперь совсем несложно:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \lim_{K\to\infty} \sum_{k=1}^{K} c_k = \lim_{K\to\infty} \sum_{k=1}^{K^2} c_k = \lim_{K\to\infty} (\sum_{n=1}^{K} a_n)(\sum_{m=1}^{K} b_m) = A \cdot B$$

□

Если хоть один из рядов не сходится абсолютно, такое утверждение уже неверно. Так что для всех остальных случаев важно договориться о нумерации. Один из часто встречающихся удобных способов нумерации, который в дальнейшем будет подразумеваться по умолчанию — это так называемая "нумерация по треугольникам", или "произведение Коши".

$\vdots$	15	$\iddots$			
b_4	10	14	$\iddots$		
b_3	6	9	13	$\iddots$	
b_2	3	5	8	12	$\iddots$
b_1	1	2	4	7	11
	a_1	a_2	a_3	a_4	$\dots$

Рис. 2: Нумерация по треугольникам

Определение 2. *Для рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m$ их произведением называется ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$, где $c_k = \sum\limits_{j=1}^{k} a_k b_{k-j}$*

Теорема 4 (Мертенса)**.** *Пусть ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$ *и* $\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m = B$*, причём хотя бы один из рядов сходится абсолютно. Тогда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{k} a_k b_{k-j} = AB$