Лекции по предмету

Математический анализ-3

Группа лектория ФКН ПМИ 2016-2017
Михаил Дискин, Анастасия Иовлева, Руслан Хайдуров.

2016/2017 учебный год

Содержание

Лекция 01 от 05.09.2016

Определение 1. *Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность действительных чисел.* Числовым рядом *называется выражение вида* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*, записываемое также как* $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$.

Определение 2. *N-й частичной суммой называется сумма первых N членов.*

$$S_n = a_1 \; + \; \ldots \; + \; a_N$$

Определение 3. *Последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется последовательностью частичных сумм.*

Говорят, что ряд *сходится* (к числу A), если (к числу A) сходится последовательность его частичных сумм. Аналогично, ряд *расходится к $+\infty$ (к $-\infty$)*, если к $+\infty$ (к $-\infty$) расходится последовательность его частичных сумм. В противном случае, если последовательность частичных сумм расходится, ряд называют *расходящимся.*

Определение 4. *Суммой ряда называется предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, если он сходится или расходится к $\pm\infty$.*

Вспоминая, что $a_n = S_n - S_{n-1}$, можно заключить, что особой разницы между самим рядом и последовательностью его частичных сумм нет — из одного можно получить другое и наоборот. Следовательно, вместо ряда можно рассматривать его частичные суммы.

Пример 1 (Предел Коши для последовательностей)**.** *Последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию Коши, т.е.*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \colon \forall m, k > N \Rightarrow |S_m - S_k| < \varepsilon.$$

Таким образом, мы нахаляву получили первую теорему.

Теорема 1 (Критерий Коши сходимости ряда)**.** *Для сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \colon \forall k > N, \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow |a_{k+1} + a_{k+2} \ldots + a_{k+p}| < \varepsilon.$$

Отсюда сразу же очевидно следует утверждение.

Утверждение 1 (Необходимое условие сходимости ряда)**.** *Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Доказательство. Ряд сходится, значит,

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \colon \forall k > N, p = 1 \Rightarrow |a_{k+1}| < \varepsilon.$$

А это и есть определение предела, равного нулю.

Другой способ доказательства: вспомним, что $a_n = S_n - S_{n-1}$ и что S_n, как и S_{n-1}, стремятся к одному пределу при стремлении n к бесконечности. Итого, получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_n = 0.$$

□

Теперь сформулируем и докажем несколько тривиальных свойств.

Свойства 1. *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B$. *Тогда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B$.

Доказательство. Это напрямую следует из свойств предела последовательности и того, что $S_n^{a+b} = S_n^a + S_n^b$. □

Свойства 2. *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$. *Тогда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha A$ *для любого действительного* α.

Доказательство. Аналогично вытекает из свойств предела последовательности. □

Введём важное определение.

Определение 5. *Пусть дан ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. *Обозначим некоторые его подсуммы,*

$$\underbrace{a_1 + \ldots + a_{n_1}}_{b_1} + \underbrace{a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2}}_{b_2} + \underbrace{a_{n_2+1} \ldots + a_{n_3}}_{b_3} + a_{n_3+1} + \ldots,$$

где $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ *— возрастающая последовательность натуральных чисел. В таком случае говорят, что ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *получен из исходного* расстановкой скобок.

Утверждение 2. *Если ряд сходится или расходится к* $\pm\infty$, *то после любой расстановки скобок он сходится, неформально говоря, туда же.*

Доказательство. Достаточно заметить, что частичные суммы ряда, полученного расстановкой скобок, образуют подпоследовательность в последовательности частичных сумм исходного ряда.

$$S_1^b = S_{n_1}^a, \quad S_2^b = S_{n_2}^a, \quad S_3^b = S_{n_3}^a, \quad \ldots$$

Осталось только вспомнить, что любая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится туда же, куда и сама последовательность. □

Обратное неверно!!! Пример такого ряда:

$$1 - 1 + 1 - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n .$$

При расстановке скобок $(1-1)+(1-1)+\ldots = 0$ получается сходящийся ряд, в то время как исходный ряд расходится, хотя бы потому что не выполняется необходимое условие о стремлении членов ряда к нулю.

Однако сходимость элементов к нулю не единственное препятствие. Например, можно «распилить» единицы из предыдущего примера и получить следующий ряд:

$$1 - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

Его элементы стремятся к нулю, но он все еще расходится. Однако расставив скобки, можно получить сходящийся ряд:

$$(1-1) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) + \ldots = 0.$$

Утверждение 3. *Если $a_n \to 0$ и длины скобок ограничены (т.е. существует такое $C \in \mathbb{R}$, что $n_{k+1} - n_k < C$ при всех k), то из сходимости ряда, полученного расстановкой таких скобок, следует сходимость исходного ряда.*

Доказательство. Доказать предлагается самостоятельно. Указание: ограничить через $\frac{\varepsilon}{C}$. $\square$

Утверждение 4. *Изменение, удаление или добавление конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость.*

Поговорим теперь об абсолютной сходимости.

Определение 6. *Если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, то говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно.*

Определение 7. *Если ряд сходится, но не сходится абсолютно, то говорят, что ряд сходится условно.*

Утверждение 5. *Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абслютно, то он сходится.*

Доказательство. Сразу следует из критерия Коши. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Так как ряд из модулей сходится, то

$$\exists N \in \mathbb{N} \colon \forall k > N, \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{k+1}^{k+p} |a_k| < \varepsilon$$

Тогда

$$\left| \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n \right| \leqslant \sum_{n=k+1}^{k+p} |a_n| < \varepsilon$$

$\square$

Определение 8. *Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ N-м хвостом называется сумма $r_N = \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} a_n$.*

Для сходящегося ряда очевидно, что $r_n \in \mathbb{R}$.

Лекция 02 от 12.09.2016
Признаки сравнения и признаки сходимости знакопостоянных рядов рядов.

В рамках этой лекции будем рассматривать только ряды с неотрицательными членами!

Очевидно, что последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ в таких рядах неубывает. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n \in [0, +\infty]$.

Утверждение 1 (Критерий сходимости рядов с неотрицательными членами)**.** *Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена сверху.*

Это позволяет сократить запись для таких рядов. Однако для рядов общего вида такая запись смысла не имеет, поскольку ряды могут не иметь даже бесконечного приедела частичных сумм, то есть не иметь предела вообще (как например любимый нами ряд $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$)

Обозначение 1. *Ряд сходится: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$; ряд расходится: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.*

Признак 1 (Первый признак сравнения)**.** *Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ — два ряда с неотрицательными членами, и начиная с какого-то $N \in \mathbb{N}$ для всех $n > N$ имеет место неравенство $a_n \leqslant b_n$. Тогда:*

1. *если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$;*
2. *если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.*

Доказательство. Достаточно доказать для случая, когда $a_n \leqslant b_n$ уже при $n \geqslant 1$ (убрав, «начало» ряда, сходимость мы не поменяем).

1. Рассмотрим частичные суммы рядов: $S_n^a = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $S_n^b = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^b = C$ для некоторого C. Последовательность S_n^b очевидно неубывающая, так что $S_n^b \leqslant C$ для любого n. А значит, для всех n верно, что
$$0 \leqslant S_n^a = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leqslant b_1 + b_2 + \ldots + b_n \leqslant C.$$
Это показывает, что S_n^a монотонная ограниченная последовательность, а значит она обязательно имеет предел. Так что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.
2. Прямо следует из первого пункта.

□

Признак 2 (Второй признак сравнения)**.** *Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ — два ряда с неотрицательными членами и начиная с некоторого места $a_n \asymp b_n$ (то есть $\exists c, C > 0$ такие что $c < \dfrac{a_n}{b_n} < C$). Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство. Прямо следует из предыдущего признака, так как $cb_n \leqslant a_n \leqslant Cb_n$. □

Замечание 1. *Если* $a_n \sim b_n$ *при* $n \to \infty$, *то* $a_n \asymp b_n$.

Пример 1 (тривиальный)**.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ — *расходится.*

Признак 3 (Третий признак сравнения)**.** *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *— два ряда с неотрицательными членами и начиная с некоторого номера* $N \in \mathbb{N}$ *для всех* $n > N$ *верно* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ *Тогда:*

1. *если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, *то* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$;
2. *если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, *то* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.

Доказательство. По сути говоря, данный признак сравнивает скорости роста, а в остальном это практически то же самое, что первый признак сравнения. Что ж, сведем его к нему.

Достаточно считать, что $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$ уже при $n \geqslant 1$. Для любого натурального k мы можем представить элементы a_k и b_k следующим образом:

$$a_k = a_1 \frac{a_2}{a_1} \frac{a_3}{a_2} \dots \frac{a_k}{a_{k-1}}$$
$$b_k = b_1 \frac{b_2}{b_1} \frac{b_3}{b_2} \dots \frac{b_k}{b_{k-1}}$$

Согласно условию, $\frac{a_i}{a_{i-1}} \leqslant \frac{b_i}{b_{i-1}}$ при $1 \leqslant i \leqslant k$. Таким образом, мы почти получили, что $a_k \leqslant b_k$, за исключением того, что мы не знаем, как соотносятся элементы a_1 и b_1. Что ж, избавимся от них, введя новый ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b'_n = \frac{a_1}{b_1} \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Для него будет выполняться неравенство $a_k \leqslant b'_k$. Тем самым, мы свели задачу к первому признаку сравнения. □

Замечание 2. *Отметим, что для любого* $q \in [0{,}1)$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ *сходится. Действительно,*

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} q^n = \lim_{N\to\infty} \frac{q(q^N - 1)}{q - 1} = \frac{q}{1-q}.$$

Признак 4 (Признак д'Аламбера)**.**

1. *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *— ряд с неотрицательными членами, и начиная с некоторого номера* N *для всех* $n > N$ *существует такое* $q \in [0,1)$, *что* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q$. *Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится.*
2. *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *— ряд с неотрицательными членами, и начиная с некоторого номера* N *для всех* $n > N$ *верно* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$. *Тогда* $a_n \nrightarrow 0$ *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

Доказательство.

1. Следует из третьего признака сравнения при $b_n = q^n$.
2. «Тут и доказвать нечего» © Лектор (Утверждение очевидно из самой формулировки, прим. ред.).

$\square$

Однако чаще используется признак д'Аламбера в предельной форме.

Следствие 1 (Предельный признак д'Аламбера)**.** *Пусть для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha \in [0; +\infty]$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *если $\alpha < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;*
2. *если $\alpha > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится;*
3. *если $\alpha = 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ может как сходиться, так и расходиться.*

Доказательство.

1. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$ и $\alpha < 1$, то $\exists N \in \mathbb{N}$ такой, что при любом $n > N$ $\alpha - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \alpha + \varepsilon$, причём $\alpha + \varepsilon < 1$. А значит, ряд сходится по признаку д'Аламбера.
2. Аналогично.
3. Например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$ — расходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ — сходится.

$\square$

Заметим, что признак д'Аламбера довольно грубый, то есть существует некоторая «мертвая зона» рядов, про сходимость которых он ничего не может сказать (например, про ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$).

Следствие 2. *Если для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами верно, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, то ряд сходится, а если $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, то расходится.*

Признак 5 (Радикальный признак Коши)**.** *Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами.*

1. *Пусть начиная с некоторого места существует такое $q \in [0, 1)$, что $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.*
2. *Пусть существует бесконечное множество индексов n, для которых верно, что $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$. Тогда $a_n \nrightarrow 0$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.*

Доказательство.

1. Следует из первого признака сравнения при $b_n = q^n$.

2. Очевидно по определению расходимости ряда.

□

Аналогично признаку д'Аламбера, можно сформулировать данный признак в предельной форме.

Следствие 3 (Радикальный признак Коши в предельной форме)**.** *Пусть для ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *с неотрицательными членами существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = A$*, где* $A \in [0, \infty]$*. Тогда:*

1. *если* $A < 1$*, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится;*
2. *если* $A > 1$*, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

Или, более общо:

1. *если* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} < 1$*, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится;*
2. *если* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} > 1$*, то* $a_n \nrightarrow 0$ *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

Заметим, что так как тут используется только верхний предел, этот признак несколько удобней, чем предельный признак д'Аламбера.

Пример 2. *Рассмотрим следующий ряд:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n+(-1)^n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \dots$$

Как можно заметить, у соседних элементов ряда наблюдается то рост в 2 раза, то убывание в 8 раз, и предельный признак д'Аламбера ничего не может сказать про сходимость. Однако воспользуемся радикальным признаком Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{-n+(-1)^n}} = \lim_{n\to\infty} 2^{-1+\left(\frac{-1}{n}\right)^n} = \frac{1}{2}.$$

Как мы видим, ряд сходится.

Упражнение 1. *Есть ли обратный пример, когда радикальный признак Коши не помогает, в отличие от признака д'Аламбера?*

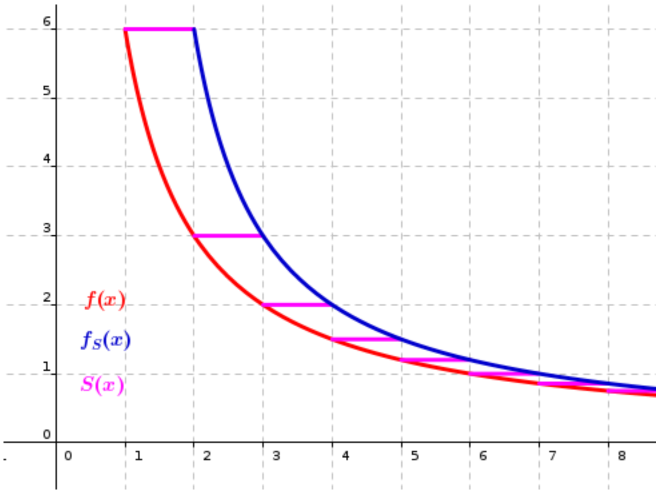
Для разных рядов может быть удобней использовать разные признаки сходимости. Например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!$ однозначно лучше исследовать с помощью признака д'Аламбера.

Мы всё ещё не научились выяснять сходимость рядов вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$. Итуиция подсказвает, что он сходится при $\alpha > 1$, как и интеграл. Сейчас мы в этом убедимся. В этом нам поможет следующая теорема.

Признак 6 (Интегральный признак Коши–Маклорена)**.** *Пусть* $f(x) \geqslant 0$ *— невозрастающая на* $[1, \infty)$ *функция. Тогда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ *и* $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx$ *сходятся или расходятся одновременно. Причем в случае сходимости*

$$\int\limits_{N+1}^{\infty} f(x)dx \leqslant r_N = f(N+1) + f(N+2) + \ldots \leqslant \int\limits_{N}^{\infty} f(x)dx.$$

Доказательство. Для удобства введем две вспомогательные функции: $f_S(x) = f(x-1)$ и $S(x) = f(\lfloor x \rfloor)$.



Тогда мы получаем, что $f(1)+f(2)+\ldots+f(N) = \int\limits_1^N S(x)dx$. Значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл $\int\limits_1^{\infty} S(x)dx$. В свою очередь, несложно заметить, что сходимость этого интеграла влечет за собой сходимость интеграла $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$, так как при наших ограничениях $S(x) \geqslant f(x)$.

Отсюда же следует оценка для остатка. Действительно:

$$r_N = \int\limits_{N+1}^{\infty} S(x)dx \leqslant \int_{N+1}^{\infty} f_S(x)dx = \int\limits_{N+1}^{\infty} f(x-1)dx = \int\limits_{N}^{\infty} f(x)dx,$$

$$r_N = \int\limits_{N+1}^{\infty} S(x)dx \geqslant \int\limits_{N+1}^{\infty} f(x)dx.$$

□

Пример 3. *Допустим, мы хотим узнать сумму ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$. *Но поскольку ряд бесконечен, мы хотим обойтись первыми 100 членами, а чтобы оценить погрешность, посчитаем соответствующий интеграл.*

$$\int\limits_{n}^{\infty} \frac{1}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}\Big|_n^{\infty} = \frac{1}{2n^2}$$

Итого,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^3} + \theta, \quad \textit{где } \theta \in \left[\frac{1}{2\cdot 101^2}, \frac{1}{2\cdot 100^2}\right].$$

Подобным способом можно оценить асимптотику частичных сумм сходящегося ряда, например:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} \sim 2\sqrt{n}$$

Выводится это аналогично, просто теперь мы функциями $f(x)$, $f_S(x)$ и $S(x)$ оцениваем не остаток, а частичную сумму.

Лекция 03 от 19.09.2016 Признаки сходимости знакопостоянных и знакопеременных рядов

Граница между сходящимися и расходящимися рядами

На прошлой лекции был сформулирован и доказан следующий признак:

Признак 7 (Интегральный признак Коши–Маклорена). *Пусть $f(x) \geqslant 0$ — невозрастающая на $[1, \infty]$ функция. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ и $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.*

С помощью него мы можем исследовать на сходимость семейство рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

Как и для соответствующего интеграла, ряд сходится тогда и только тогда, когда $\alpha > 1$.

Может сложиться впечатление, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ является своего рода граничным между сходящимися и расходящимися рядами. Но исследуем теперь другой ряд (он нам также понадобится в дальнейшем):

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}.$$

Он сходится тогда и только тогда, когда сходится соответствующий интеграл.

$$\int\limits_{2}^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \int\limits_{2}^{\infty} \frac{1}{\ln x} d \ln x = \ln \ln x \Big|_{2}^{\infty} = \infty$$

Данный ряд меньше, чем гармоничный ряд, однако расходится. Причем, как несложно убедиться, семейство рядов $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^\beta n}$ при $\beta > 1$ уже сходится. Но при этом «граница» между сходящимися и расходящимися рядами не проходит по ряду $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ — взять, например, ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln n}$, который тоже расходится. И так далее, «границу» можно уточнять бесконечно, из чего мы можем сделать вывод, что точной «границы» не существует.

Скорость роста частичных сумм расходящихся рядов

В прошлой лекции мы с помощью интегрального признака Коши–Маклорена научились оценивать остаток сходящихся сумм. Теперь научимся оценивать скорость роста частичных сумм расходящихся рядов.

Возьмем, например, гармонический ряд. Утверждается, что его частичные суммы оцениваются следующим образом:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \ln N + C + o(1),$$

где C эта некая константа. Но как доказать, что это действительно корректная оценка?

Фактически мы утверждаем сходимость последовательности $\{S_n\}$, где

$$S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

Это можно воспринимать как последовательность частичных сумм и, соответственно, перейти к соответствующему ряду:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln n + \ln(n-1) = \frac{1}{n} - \ln\frac{n}{n-1} = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \left(-\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

На последнем шаге мы воспользовались разложением в ряд Тейлора.

Мы получили, что $a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, следовательно, данный ряд сходится. И так как мы построили сходящийся ряд, у которого последовательность $\{S_n\}$ будет последовательностью частичных сумм, данная последовательность также сходится. Что и доказывает нашу оценку.

Точно также можно доказать оценки расходимости частичных сумм следующих рядов:

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n \ln n} = \ln\ln N + C + o(1)$$
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \frac{2N^{2/3}}{2} + C + o(1)$$

Признаки сходимости знакопостоянных рядов

Вернемся теперь к признакам сходимости.

Признак 8 (Признак Кумера)**.** *Пусть* a_n, $b_n > 0$ *и* $v_n := \dfrac{a_n}{a_{n+1}} b_n - b_{n+1}$. *Тогда:*

1. *если существует такое* $l > 0$, *что начиная с некоторого места* $v_n \geqslant l$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится;*
2. *если начиная с некоторого места* $v_n \leqslant 0$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{b_n}$ *расходится, то и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда наше неравенство выполняется для всех n.

1. Итого, мы имеем, что $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} b_n - b_{n+1} \geqslant l$. Домножим неравенство на a_{n+1}, благо оно положительно:

   $$a_n \cdot b_n - a_{n+1} \cdot b_{n+1} \geqslant l a_{n+1} > 0$$

   Воспользуемся этим, оценив частичную сумму следующего ряда, при $N \in \mathbb{N}$:

   $$\sum_{n=1}^{N} l a_n \leqslant l a_1 + (a_1 b_1 - a_2 b_2) + (a_2 b_2 - a_3 b_3) + \ldots + (a_{N-1} b_{N-1} - a_N b_N) = l a_1 + a_1 b_1 - a_n b_N \leqslant l a_1 + a_1 b_1$$

   Итого, мы получили, что частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} l a_n$ ограничены сверху. Значит, этот ряд сходится и, следовательно, сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

2. Имеем, что $\frac{a_n}{a_{n+1}} b_n - b_{n+1} \leqslant 0$. Перенесем b_{n+1} в правую часть и разделим все на b_n:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

Теперь перевернем дробь:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{1/b_{n+1}}{1/b_n}.$$

По условию ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ расходится, а значит, расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

□

Но признак Куммера особо не используется, он скорее нужен чтобы вывести другие признаки.

Признак 9 (Признак Раабе)**.** *Пусть $a_n > 0$ и существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = A \in [-\infty, +\infty].$$

Тогда:

1. *если $A > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;*
2. *если $A < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.*

Доказательство. Признак Крамера при $b_n = n$. □

Покажем, зачем нужен признак Раабе. Пусть $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$. Тогда:

$$n\left(\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} - 1\right) = n\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha - 1\right) = n\left(1 + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) \longrightarrow \alpha.$$

Как мы видим, признак Раабе позволяет «ловить» ряды с полиномиальной скоростью роста. И это хорошо, так как раньше мы этого не умели.

Но у этого признака все еще есть «мертвая зона», когда $A = 1$. Поэтому рассмотрим еще один признак, который не имеет «мертвой зоны», но, к сожалению, не всегда применим.

Признак 10 (Признак Гаусса)**.** *Пусть для некоторого $\varepsilon > 0$ и α, $\beta \in \mathbb{R}$ верно, что*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \alpha + \frac{\beta}{b} + o\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right).$$

Тогда:

1. *если $\alpha > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;*
2. *если $\alpha < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится;*
3. *если $\alpha = 1$ и $\beta > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;*
4. *если $\alpha = 1$ и $\beta \leqslant 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.*

Доказательство. Все эти утверждения на самом деле следуют из уже рассмотренных нами признаков. Так что просто назовем их.

1. Признак д'Аламбера.
2. Признак д'Аламбера.
3. Признак Раабе.
4. Если $\beta < 1$ — признак Раабе. Если $\beta = 1$ — признак Куммера при $b_n = n \ln n$.

Рассмотрим подробней последний случай, когда $\alpha = \beta = 1$. Воспользуемся формой из признака Куммера при $b_n = n \ln n$ и равенством из условия:

$$v_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} b_n - b_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)\right) n \ln n - (n+1)\ln(n+1) =$$
$$= (n+1)\left(\ln n - \ln(n+1)\right) + o\left(\frac{lnn}{n^{\varepsilon}}\right) =$$
$$= -(n+1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{lnn}{n^{\varepsilon}}\right) =$$
$$= -(n+1)\left(\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})\right) + o\left(\frac{lnn}{n^{\varepsilon}}\right) \longrightarrow -1$$

Итого, по признаку Куммера ряд действительно расходится. □

Замечание 1. *Вместо* $o\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)$ *можно писать более сильное* $o\left(\frac{1}{n \ln n}\right)$*. Но первое чаще появляется в интересных примерах, поэтому исторически сложилось использовать его.*

Признаки сходимости знакопеременных рядов

Признак 11 (Признак Лейбница)**.** *Пусть последовательность* $\{b_n\}$ *строго монотонно убывает у нулю. Тогда ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n$ *сходится, причем его остаток* r_N *имеет знак* $(-1)^{N+1}$ *и по модулю меньше* b_{N+1}*.*

Доказательство. Докажем с помощью критерия Коши. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем такое $N \in \mathbb{N}$, что для всех $n > N$ верно, что $b_n < \varepsilon$. Теперь для любого $m > N$ и $p \in \mathbb{N}$ рассмотрим следующую величину:

$$\left|\sum_{n=m+1}^{m+p}(-1)^n b_n\right|.$$

Можно вынести $(-1)^{m+1}$ из суммы — на модуль это не повлияет, но зато нам будет удобней считать, что первое слагаемое идет с положительным знаком.

Сгруппируем слагаемые следующим образом:

$$\left|\sum_{n=m+1}^{m+p}(-1)^n b_n\right| = \left|b_{m+1} + (-b_{m+2} + b_{m+3}) + (-b_{m+4} + b_{m+5}) + \ldots\right|.$$

В силу строго монотонного убывания последовательности получаем, что каждая скобка меньше нуля. Последнее слагаемое, b_{m+p} могло остаться без пары, но тогда оно идет с отрицательным знаком. Итого, получаем, что мы с b_{m+1} складываем только отрицательные величины, следовательно:

$$\left|\sum_{n=m+1}^{m+p}(-1)^n b_n\right| \leqslant |b_{m+1}| < \varepsilon.$$

Итого, по критерию Коши ряд сходится. Отсюда же следует оценка на остаток:

$$|r_N| = \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} (-1)^n b_n\right| < b_{N+1}.$$

Осталось только показать, какого он будет знака.

Снова вынесем за скобки знак $(-1)^{N+1}$ (но на этот раз его не убъет модуль), и сгруппируем слагаемые:

$$r_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} (-1)^n b_n = (-1)^{N+1}\big((b_{N+1} - b_{N+2}) + (b_{N+3} - b_{N+4}) + \dots\big).$$

Каждая группа слагаемых больше нуля в силу строго монотонного убывания последовательности. Следовательно, вся скобка имеет положительный знак, а значит, r_N имеет знак $(-1)^{N+1}$. Что нам и требовалось. □