

Лекция 08 от 31.10.2016

Функциональные ряды. Признаки сходимости

Довольно естественно желание понимать, когда ряд сходится, а когда нет. Для числовых рядов мы рассмотрели большое количество разнообразных признаков сходимости. Аналогично, изучим несколько признаков равномерной сходимости функциональных рядов.

Признак Вейерштрасса

Признак 1 (Признак Вейерштрасса). Пусть существует последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ такая, что $\forall n \in \mathbb{N}$ и для любого $x \in X$ выполняется неравенство $|f_n(x)| \leq a_n$, и кроме того, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на множестве X , и $\forall x \in X$ числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится абсолютно.

Доказательство. Вторая часть прямо следует из доказанных в самом начале семестра признаков сравнения. Осталось доказать равномерную сходимость.

Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Из критерия Коши для числовых рядов следует, что $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}, \sum_{n+1}^{n+p} a_n < \varepsilon$.

Тогда $\forall m > N, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in X$:

$$\left| \sum_{m+1}^{m+p} f_n(x) \right| \leq \sum_{m+1}^{m+p} |f_n(x)| \leq \sum_{m+1}^{m+p} a_m < \varepsilon.$$

То есть по критерию Коши для функциональных рядов наш ряд равномерно сходится. \square

Примеры рядов, которые не ловятся п. Вейерштрасса

А существует ли равномерно сходящийся ряд, который не ловится признаком Вейерштрасса? Конечно. Например:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad X = \{-1\}.$$

Если хочется, чтобы ряд был неотрицательный, можно пойти на хитрость. Возьмем последовательность $\{f_n\}$ такую, что

$$f_n(x) = \begin{cases} 1/n, & x = n; \\ 0, & x \neq n. \end{cases}$$

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ будет сходиться равномерно на $(0, +\infty)$, но не будет подпадать под условие признака Вейерштрасса.

Подобный подход можно распространить на непрерывные функции $f_n(x)$ — например, они могут задавать равнобедренные треугольники, стоящие на оси OX , с непересекающимися основаниями и постепенно убывающей высотой (например, то же $1/n$).

Хотя классическими примерами, конечно же, являются следующие ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}.$$

Признак Дирихле

Признак 2 (Признак Дирихле). Если выполняются следующие условия:

1. последовательность частичных сумм $\sum_{n=1}^k a_n(x)$ равномерно ограничена на X , то есть

$$\exists C > 0 : \forall N \in \mathbb{N} \forall x \in X : \left| \sum_{n=1}^N a_n(x) \right| < C;$$

2. последовательность функций $\{b_n(x)\}$ монотонна для любого $x \in X$ и равномерно сходится к нулю на X при $n \rightarrow \infty$,

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ сходится равномерно на X .

Доказательство. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Положим $\varepsilon_1 := \frac{\varepsilon}{4C}$. Найдём такое $N \in \mathbb{N}$, что $\forall n > N, \forall x \in X : |b_n(x)| < \varepsilon_1$. Тогда $\forall m > N, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in X :$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=m+1}^{m+p} a_n(x)b_n(x) \right| &= \left| A_{m+p}(x)b_{m+p}(x) - A_m(x)b_{m+1}(x) + \sum_{n=m+1}^{m+p-1} A_n(x)(b_n(x) - b_{n+1}(x)) \right| < \\ &< C\varepsilon_1 + C\varepsilon_1 + C \sum_{n=m+1}^{m+p-1} |b_n(x) - b_{n+1}(x)| = \frac{\varepsilon}{2} + C |b_{m+1}(x) - b_{m+p}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2C\varepsilon_1 \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались преобразованием Абеля (см. лекцию 4), а также тем, что последовательность $b_n(x)$ монотонна, поэтому в последней сумме все модули раскроются с одинаковым знаком. \square

Признак Абеля

Признак 3 (Признак Абеля). Если выполняются следующие условия:

1. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равномерно сходится на X ;
2. последовательность функций $\{b_n(x)\}$ равномерно ограничена на X и монотонна $\forall x \in X$,

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ сходится равномерно на X .

Доказательство. Доказать так же, как в случае числовых рядов, не получится. Действительно, если разложить функции b_n как $b_n(x) = b(x) + e_n(x)$, то последовательность $\{e_n(x)\}$ не обязательно равномерно сходится к нулю. Например, при $b_n(x) = x^n$ на множестве $X = \{0, 1\}$.

Доказательство, естественно, очень похоже на доказательство предыдущего признака.

Так как $\{b_n(x)\}$ равномерно ограничена, то $\exists C > 0 : \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X |b_n(x)| < C$.

Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Положим $\varepsilon_1 := \frac{\varepsilon}{4C}$. Найдём такое $N \in \mathbb{N}$, что $\forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in X : \left| \sum_{n=m+1}^{m+p} a_n(x) \right| < \varepsilon_1$.

Положим для $n > N : \tilde{A}_n(x) = a_{N+1}(x) + \dots + a_n(x), \tilde{A}_N(x) = 0$.

Очевидно, что $\forall n \geq N, \forall x \in X : |\tilde{A}_n(x)| < \varepsilon_1$. Тогда $\forall m > N, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in X :$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=m+1}^{m+p} a_n(x) b_n(x) \right| &= \left| \sum_{n=m+1}^{m+p} (\tilde{A}_n(x) - \tilde{A}_{n-1}(x)) b_n(x) \right| = \\ &= \left| \tilde{A}_{m+p}(x) b_{m+p}(x) - \tilde{A}_m(x) b_{m+1}(x) + \sum_{n=m+1}^{m+p-1} \tilde{A}_n(x) (b_n(x) - b_{n+1}(x)) \right| < \\ &< C\varepsilon_1 + C\varepsilon_1 + \varepsilon_1 \sum_{n=m+1}^{m+p-1} |b_n(x) - b_{n+1}(x)| = \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon_1 |b_{m+1}(x) - b_{m+p}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2C\varepsilon_1 \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Рассмотрим один из классических примеров, который мы упоминали в начале лекции.

Пример 1. $\forall \alpha > 0$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ равномерно сходится на $X = (\alpha, 2\pi - \alpha)$.

Доказательство. Здесь применим признак Дирихле. Действительно, пусть $a_n(x) = \sin nx$, а $b_n(x) = 1/n$. Тогда $|A_n(x)| \leq \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} < \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}}$ и можно взять $C := \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}}$. А с $b_n(x)$ все очевидно. □

С другой стороны:

Пример 2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ не сходится равномерно на $X = (0, 2\pi)$.

Доказательство. Здесь признак Дирихле уже не применим. Докажем отсутствие равномерной сходимости через отрицание критерия Коши.

Возьмем $\varepsilon = 1/100$. Тогда $\forall N \in \mathbb{N}$ зафиксируем $m = N + 1, p = m, x = \pi/4m$. Получаем:

$$\left| \sum_{n=m+1}^{m+p} \frac{\sin nx}{n} \right| \geq \frac{m\sqrt{2}/2}{2m} \geq \varepsilon.$$

□