

Лекция 03 от 19.09.2016

Признаки сходимости знакопостоянных и знакопеременных рядов

Граница между сходящимися и расходящимися рядами

На прошлой лекции был сформулирован и доказан следующий признак:

Признак 1 (Интегральный признак Коши–Маклорена). Пусть $f(x) \geq 0$ — невозрастающая на $[1, \infty]$ функция. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ и $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

С помощью него мы можем исследовать на сходимость семейство рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}.$$

Как и для соответствующего интеграла, ряд сходится тогда и только тогда, когда $\alpha > 1$.

Может сложиться впечатление, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ является своего рода граничным между сходящимися и расходящимися рядами. Но исследуем теперь другой ряд (он нам также понадобится в дальнейшем):

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}.$$

Он сходится тогда и только тогда, когда сходится соответствующий интеграл.

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \int_2^{\infty} \frac{1}{\ln x} d \ln x = \ln \ln x \Big|_2^{\infty} = \infty$$

Данный ряд меньше, чем гармоничный ряд, однако расходится. Причем, как несложно убедиться, семейство рядов $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{\beta} n}$ при $\beta > 1$ уже сходится. Но при этом «граница» между

сходящимися и расходящимися рядами не проходит по ряду $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ — взять, например, ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln \ln n}$, который тоже расходится. И так далее, «границу» можно уточнять бесконечно, из чего мы можем сделать вывод, что точной «границы» не существует.

Скорость роста частичных сумм расходящихся рядов

В прошлой лекции мы с помощью интегрального признака Коши–Маклорена научились оценивать остаток сходящихся сумм. Теперь научимся оценивать скорость роста частичных сумм расходящихся рядов.

Возьмем, например, гармонический ряд. Утверждается, что его частичные суммы оцениваются следующим образом:

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = \ln N + C + o(1),$$

где C — это некая константа. Но как доказать, что это действительно корректная оценка?

Фактически мы утверждаем сходимость последовательности $\{S_n\}$, где

$$S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

Это можно воспринимать как последовательность частичных сумм и, соответственно, перейти к соответствующему ряду:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln n + \ln(n-1) = \frac{1}{n} - \ln \frac{n}{n-1} = \frac{1}{n} + \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \left(-\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

На последнем шаге мы воспользовались разложением в ряд Тейлора.

Мы получили, что $a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, следовательно, данный ряд сходится. И так как мы построили сходящийся ряд, у которого последовательность $\{S_n\}$ будет последовательностью частичных сумм, данная последовательность также сходится. Что и доказывает нашу оценку.

Точно также можно доказать оценки расходимости частичных сумм следующих рядов:

$$\sum_{n=2}^N \frac{1}{n \ln n} = \ln \ln N + C + o(1)$$

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \frac{2N^{2/3}}{2} + C + o(1)$$

Признаки сходимости знакопостоянных рядов

Вернемся теперь к признакам сходимости.

Признак 2 (Признак Кумера). Пусть $a_n, b_n > 0$ и $v_n := \frac{a_n}{a_{n+1}}b_n - b_{n+1}$. Тогда:

1. если существует такое $l > 0$, что начиная с некоторого места $v_n \geq l$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;
2. если начиная с некоторого места $v_n \leq 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ расходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда наше неравенство выполняется для всех n .

1. Итого, мы имеем, что $\frac{a_n}{a_{n+1}}b_n - b_{n+1} \geq l$. Домножим неравенство на a_{n+1} , благо оно положительно:

$$a_n \cdot b_n - a_{n+1} \cdot b_{n+1} \geq la_{n+1} > 0$$

Воспользуемся этим, оценив частичную сумму следующего ряда, при $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=1}^N la_n \leq la_1 + (a_1b_1 - a_2b_2) + (a_2b_2 - a_3b_3) + \dots + (a_{N-1}b_{N-1} - a_Nb_N) = la_1 + a_1b_1 - a_Nb_N \leq la_1 + a_1b_1$$

Итого, мы получили, что частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} la_n$ ограничены сверху. Значит, этот ряд сходится и, следовательно, сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2. Имеем, что $\frac{a_n}{a_{n+1}}b_n - b_{n+1} \leq 0$. Перенесем b_{n+1} в правую часть и разделим все на b_n :

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

Теперь перевернем дробь:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{1/b_{n+1}}{1/b_n}.$$

По условию ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ расходится, а значит, расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

□

Но признак Куммера особо не используется, он скорее нужен чтобы вывести другие признаки.

Признак 3 (Признак Раабе). Пусть $a_n > 0$ и существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = A \in [-\infty, +\infty].$$

Тогда:

1. если $A > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;
2. если $A < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Доказательство. Признак Крамера при $b_n = n$.

□

Покажем, зачем нужен признак Раабе. Пусть $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$. Тогда:

$$n \left(\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} - 1 \right) = n \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^\alpha - 1 \right) = n \left(1 + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right) \rightarrow \alpha.$$

Как мы видим, признак Раабе позволяет «ловить» ряды с полиномиальной скоростью роста. И это хорошо, так как раньше мы этого не умели.

Но у этого признака все еще есть «мертвая зона», когда $A = 1$. Поэтому рассмотрим еще один признак, который не имеет «мертвой зоны», но, к сожалению, не всегда применим.

Признак 4 (Признак Гаусса). Пусть для некоторого $\varepsilon > 0$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ верно, что

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \alpha + \frac{\beta}{b} + o\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right).$$

Тогда:

1. если $\alpha > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;
2. если $\alpha < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится;
3. если $\alpha = 1$ и $\beta > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;
4. если $\alpha = 1$ и $\beta \leq 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Доказательство. Все эти утверждения на самом деле следуют из уже рассмотренных нами признаков. Так что просто назовем их.

1. Признак д'Аламбера.
2. Признак д'Аламбера.
3. Признак Раабе.
4. Если $\beta < 1$ — признак Раабе. Если $\beta = 1$ — признак Куммера при $b_n = n \ln n$.

Рассмотрим подробнее последний случай, когда $\alpha = \beta = 1$. Воспользуемся формой из признака Куммера при $b_n = n \ln n$ и равенством из условия:

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{a_n}{a_{n+1}} b_n - b_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)\right) n \ln n - (n+1) \ln(n+1) = \\ &= (n+1) (\ln n - \ln(n+1)) + o\left(\frac{\ln n}{n^\varepsilon}\right) = \\ &= -(n+1) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{\ln n}{n^\varepsilon}\right) = \\ &= -(n+1) \left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + o\left(\frac{\ln n}{n^\varepsilon}\right) \rightarrow -1 \end{aligned}$$

Итого, по признаку Куммера ряд действительно расходится. \square

Замечание 1. Вместо $o\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)$ можно писать более сильное $o\left(\frac{1}{n \ln n}\right)$. Но первое чаще появляется в интересных примерах, поэтому исторически сложилось использовать его.

Признаки сходимости знакопеременных рядов

Признак 5 (Признак Лейбница). Пусть последовательность $\{b_n\}$ строго монотонно убывает у нулю. Тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$ сходится, причем его остаток r_N имеет знак $(-1)^{N+1}$ и по модулю меньше b_{N+1} .

Доказательство. Докажем с помощью критерия Коши. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем такое $N \in \mathbb{N}$, что для всех $n > N$ верно, что $b_n < \varepsilon$. Теперь для любого $m > N$ и $p \in \mathbb{N}$ рассмотрим следующую величину:

$$\left| \sum_{n=m+1}^{m+p} (-1)^n b_n \right|.$$

Можно вынести $(-1)^{m+1}$ из суммы — на модуль это не повлияет, но зато нам будет удобней считать, что первое слагаемое идет с положительным знаком.

Сгруппируем слагаемые следующим образом:

$$\left| \sum_{n=m+1}^{m+p} (-1)^n b_n \right| = |b_{m+1} + (-b_{m+2} + b_{m+3}) + (-b_{m+4} + b_{m+5}) + \dots|.$$

В силу строго монотонного убывания последовательности получаем, что каждая скобка меньше нуля. Последнее слагаемое, b_{m+p} могло остаться без пары, но тогда оно идет с отрицательным знаком. Итого, получаем, что мы с b_{m+1} складываем только отрицательные величины, следовательно:

$$\left| \sum_{n=m+1}^{m+p} (-1)^n b_n \right| \leq |b_{m+1}| < \varepsilon.$$

Итого, по критерию Коши ряд сходится. Отсюда же следует оценка на остаток:

$$|r_N| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} (-1)^n b_n \right| < b_{N+1}.$$

Осталось только показать, какого он будет знака.

Снова вынесем за скобки знак $(-1)^{N+1}$ (но на этот раз его не убьет модуль), и сгруппируем слагаемые:

$$r_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} (-1)^n b_n = (-1)^{N+1} ((b_{N+1} - b_{N+2}) + (b_{N+3} - b_{N+4}) + \dots).$$

Каждая группа слагаемых больше нуля в силу строго монотонного убывания последовательности. Следовательно, вся скобка имеет положительный знак, а значит, r_N имеет знак $(-1)^{N+1}$. Что нам и требовалось. \square