

Лекция 10 от 07.11.2016

Критерий Гордона

В прошлый раз мы узнали, что такое база множества и понятие предела по базе, и теперь будем продолжать работать с этим.

Рассмотрим такую задачу

Задача 1. Пусть X и Y — непустые множества с базами \mathcal{B} и \mathcal{D} соответственно. Тогда рассмотрим некоторую функцию $h: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$. Пусть про неё известно, что

$$\forall x \in X \exists \lim_{\mathcal{D}} h(x, y) = f(x)$$

$$\forall y \in Y \exists \lim_{\mathcal{B}} h(x, y) = g(y)$$

Требуется узнать, равны ли пределы $\lim_{\mathcal{B}} f(x)$ и $\lim_{\mathcal{D}} g(y)$. То есть верно ли, что

$$\lim_{\mathcal{B}} \lim_{\mathcal{D}} h(x, y) = \lim_{\mathcal{D}} \lim_{\mathcal{B}} h(x, y)?$$

Возможно, некоторые скажут, что эти пределы равны всегда, но это отнюдь не так. Хороший контрпример — функция

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{Если } (x, y) \neq 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Для неё легко посчитать повторные пределы в нуле и показать, что они не равны. Действительно,

$$\lim_{y \rightarrow 0} h(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \neq 0 \\ -1, & \text{иначе} \end{cases}$$

Тогда легко понять, что $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} h(x, y) = 1$. Аналогично показывается и что $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} h(x, y) = -1$.

Что же поможет нам идентифицировать такие ситуации? Поможет следующая теорема

Теорема 1 (Критерий Гордона). Следующие утверждения эквивалентны (внимание: здесь используются обозначения, аналогичные введённым ранее):

1. Повторные пределы $\lim_{\mathcal{B}} f(x)$ и $\lim_{\mathcal{D}} g(y)$ существуют и равны.
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists B_\varepsilon \in \mathcal{B}: \forall x \in B_\varepsilon \exists D \in \mathcal{D}: \forall y \in D |h(x, y) - g(y)| < \varepsilon$

Доказательство. [(1) \Rightarrow (2)] Пусть $\lim_{\mathcal{B}} f(x) = \lim_{\mathcal{D}} g(y) = A$.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon/3$.

- $\exists B_0 \in \mathcal{B}: \forall x \in B_0 |f(x) - A| < \varepsilon_1$
- $\exists D_0 \in \mathcal{D}: \forall y \in D_0 |g(y) - A| < \varepsilon_1$

В качестве B_ε возьмём B_0 . Тогда

$$\begin{aligned}\forall x \in B_0 \exists \tilde{D}_x \in \mathcal{D}: \forall y \in \tilde{D}_x |h(x, y) - f(x)| < \varepsilon_1 \\ \exists D_x \in \tilde{D}_x \cap D_0\end{aligned}$$

Тогда

$$\forall y \in D_x |h(x, y) - g(y)| \leq |h(x, y) - f(x)| + |f(x) - A| + |A - g(y)| < \varepsilon_1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = \varepsilon$$

Получили требуемое.

[(2) \Rightarrow (1)] Докажем для начала, что пределы есть. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon/4$. Перепишем про ещё раз второй пункт

$$\exists B_{\varepsilon_1} \in \mathcal{B} \forall x \in B_{\varepsilon_1} \exists D_x \in \mathcal{D}: \forall y \in D_x |h(x, y) - g(y)| < \varepsilon_1$$

Пусть $x_1, x_2 \in B_{\varepsilon_1}$ — произвольные.

$$\begin{aligned}\exists D_{x_1} \in \mathcal{D}: \forall y \in D_{x_1}: |h(x_1, y) - g(y)| < \varepsilon_1 \\ \exists D_{x_2} \in \mathcal{D}: \forall y \in D_{x_2}: |h(x_2, y) - g(y)| < \varepsilon_1 \\ \exists \tilde{D}_{x_1} \in \mathcal{D}: \forall y \in \tilde{D}_{x_1}: |h(x_1, y) - f(x_1)| < \varepsilon_1 \\ \exists \tilde{D}_{x_2} \in \mathcal{D}: \forall y \in \tilde{D}_{x_2}: |h(x_2, y) - f(x_2)| < \varepsilon_1\end{aligned}$$

Возьмём произвольное $y \in D_{x_1} \cap D_{x_2} \cap \tilde{D}_{x_1} \cap \tilde{D}_{x_2}$. Тогда

$$\begin{aligned}|f(x_1) - f(x_2)| &\leq |f(x_1) - h(x_1, y)| + |h(x_1, y) - g(y)| + |g(y) - h(x_2, y)| + |h(x_2, y) - f(x_2)| < \\ &< \varepsilon_1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = \varepsilon\end{aligned}$$

Следовательно, по критерию Коши $\exists \lim_B f(x) = A$. Докажем, что $\exists \lim_D g(y) = A$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$.

Найдём $B_0 \in \mathcal{B}$ такое, что $\forall x \in B_0 |f(x) - A| < \varepsilon/3$. Найдём такое $B_{\varepsilon/3} \in \mathcal{B}$ что

$$\forall x \in B_{\varepsilon/3} \exists D_x \in \mathcal{D}: \forall y \in D_x |h(x, y) - g(y)| < \varepsilon/3$$

Зафиксируем $x \in B_0 \cap B_{\varepsilon/3}$. Заметим, что

$$\begin{aligned}\exists D_x \in \mathcal{D}: \forall y \in D_x |h(x, y) - g(y)| < \varepsilon/3 \\ \exists \tilde{D}_x \in \mathcal{D}: \forall y \in \tilde{D}_x |h(x, y) - f(x)| < \varepsilon/3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\exists D \in \mathcal{D}, D \subset D_x \cap \tilde{D}_x: \forall y \in D \\ |g(y) - A| \leq |g(y) - h(x, y)| + |h(x, y) - f(x)| + |f(x) - A| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon\end{aligned}$$

Получили требуемое. □

Теорема 2. Пусть $X \subset \mathbb{R}$. x_0 — его предельная точка (конечная или бесконечная). Пусть

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists \lim_{X \ni x \rightarrow x_0} f_n(x) = a_n$$

а также $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} f(x)$. Тогда существуют и равны пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ и $\lim_{X \ni x \rightarrow x_0} f(x)$

Доказательство. Так как $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} f(x)$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \forall x \in X |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Для существования предела необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \exists \delta > 0 \forall x \in \delta(x_0) \cap X |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Применяя критерий Гордона, получаем требуемое □

Следствие 1. Пусть I — невырожденный промежуток на \mathbb{R} и для последовательности функций $f_n(x)$ известно, что $f_n(x) \in C(I)$ и $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{I} f(x)$. Тогда $f(x) \in C(I)$.