Теория Вероятностей
Домашнее Задание №6

Вадим Гринберг
группа 151-2

от 21 октября 2016

<u>Замечание:</u> Я пишу C_n^k как $\binom{n}{k}$.

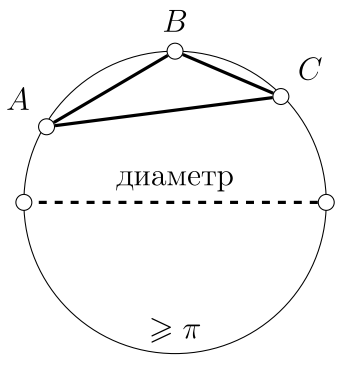
Задача №1. *На окружность случайно бросаются три точки A, B и C. Найдите вероятность того, что треугольник ABC является остроугольным.*

Решение. Докажем для начала следующий факт:

Лемма. *На окружность случайно бросаются три точки A, B и C. Треугольник ABC – остроугольный тогда и только тогда, когда точки A, B, C не лежат на одной полуокружности.*

Доказательство.

1. Пусть точки A, B, C лежат на одной полуокружности. Положим, что точка B находится между точками A и C (без ограничения общности, если что можно просто поменять обозначения).

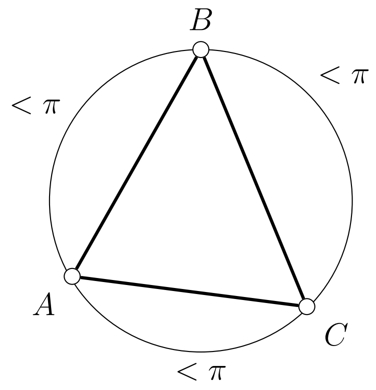


В таком случае, длина дуги $\smile AC$ (большой, которая не содержит точку B)точно не меньше π (так как длина полуокружности в точности равна π). Тогда, поскольку $\angle ABC$ опирается на дугу $\smile AC$, то его значение равно половине длины <u>большой</u> дуги $\smile AC$, и так как длина данной дуги не меньше π, то следовательно:

$$\angle ABC \geqslant \frac{\pi}{2}$$

и треугольник ABC не является остроугольным.

2. Пусть теперь точки A, B, C не лежат все сразу ни на одной полуокружности.



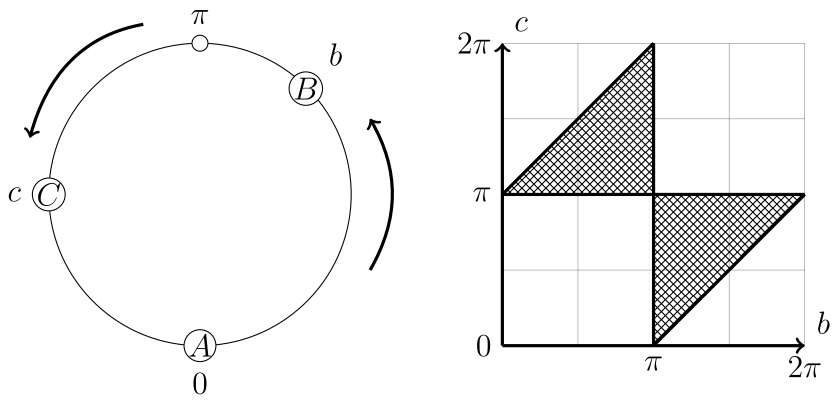
В таком случае каждая из дуг (маленьких, которые ни содержат никаких точек треугольника помимо концов дуги) $\smile AB$, $\smile BC$, $\smile AC$ точно меньше π. Тогда, поскольку вписанный угол равен половине длины дуги окружности, на которую опирается:

$$\begin{cases} \smile AB < \pi \Longrightarrow \angle BCA < \frac{\pi}{2} \\ \smile BC < \pi \Longrightarrow \angle BAC < \frac{\pi}{2} \\ \smile AC < \pi \Longrightarrow \angle ABC < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

– все углы являются острыми, и треугольник ABC – остроугольный.

□

Теперь найдём вероятность, что полученный описанным в условии методом треугольник ABC является остроугольным. Бросим первую точку A на окружность как угодно. Длина окружности равна 2π, и без ограничения общности будем полагать, что точка A – начало отсчёта. Будем обходить окружность по против часовой стрелки. Таким образом мы получим некую координатную ось на круге. Бросим оставшиеся две точки на окружность каким-то образом. Пусть b – координата точки B, c – координата точки C. Получаем следующее:



Наш «квадрат» покрывает всевозможные варианты координат точек B и C на окружности. По лемме выше, чтобы треугольник был остроугольным необходимо и достаточно, чтобы все дуги между соседними вершинами имели длину $< \pi$. Следовательно должны выполняться следующие неравенства на координаты:

$$\begin{cases} b < c \\ b < \pi \\ c > \pi \\ c - b < \pi \end{cases} \quad \text{или же} \quad \begin{cases} c < b \\ c < \pi \\ b > \pi \\ b - c < \pi \end{cases}$$

– симметричные случаи, когда точки B и C поменялись местами. Подходящие нам пары координат (b, c) выделены на графике координат выше.

Таким образом, множество исходов – пар координат точек B и C – таких, что треугольник ABC – остроугольный, в точности равно множеству точек на координатной оси bc, принадлежащих заштрихованным областям (и удовлетворяющим одной из систем выше). В то же время, множество всех исходов – это в точности все возможные точки квадрата координатной оси размера $2\pi \times 2\pi$.

Тогда искомая вероятность равна:

$$\mathcal{P}(\triangle ABC = oxygon) = \frac{\mathsf{S}(\text{закрашено})}{\mathsf{S}(\text{весь квадрат})} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi^2}{(2\pi)^2} = \frac{1}{4}$$

$\square$

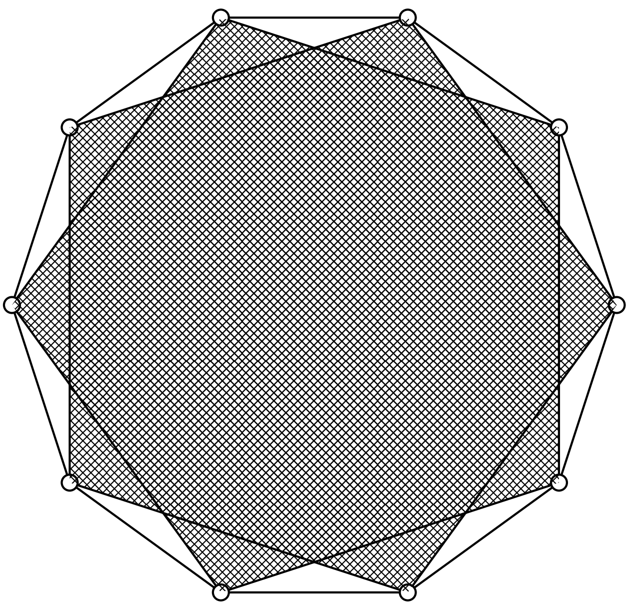
Задача №2. *Случайная точка имеет равномерное распределение в правильном n-угольнике. Найдите:*

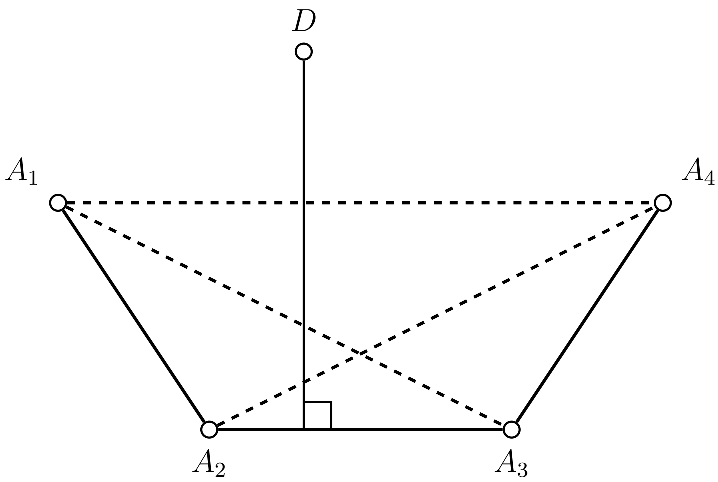
- *вероятность $\mathcal{P}_n$ того, что точка находится ближе к границе (стороне) n-угольника, чем к любой из его диагоналей.*
- *такие константы C, $a < 0$ – тут была опечатка, что*

$$\mathcal{P}_n = C \cdot n^{\alpha} \cdot (1 + o(1))$$

Решение.

- Проведём вообще все диагонали и рассмотрим область внутри многоугольника, такую, что среди всех ограничивающих данную область отрезков нет стороны многоугольника (то есть, образованную пересечением какого-то числа диагоналей и ими же ограниченную). Получится область, заштрихованная на рисунке.





Ясно, что все точки из заштрихованной области точно ближе к диагоналям, нежели к сторонам многоугольника, так как любой перпендикуляр из какой-то точки D из области, опущенный на какую-то из сторон многоугольника, точно пересечёт хотя бы одну из диагоналей.

Более того, оставшиеся незакрашенными области – все треугольники. Можно рассмотреть на примере, что справа – без ограничения общности, возьмём 4 соседних вершины. Тогда A_1A_4 – диагональ, не пересекающая получившийся треугольник. Более того, она является ближайшей к данному треугольнику, так как она параллельна стороне A_2A_3 и все остальные диагонали (кроме ограничивающих треугольник A_1A_3 и A_2A_4) лежат «выше» A_1A_4 – хотя бы один из концов диагонали будет дальше от A_2 или A_3 (а может, и от обеих вершин сразу).

Теперь рассмотрим подробнее треугольник, ограниченный стороной и диагоналями. Ясно, что точки, равноудалённые от соответствующей стороны и диагонали лежат на биссектрисе угла между данными стороной и диагональю. Для $\triangle AOB$ сторона – AB, CA и DB – соседние им стороны, ближайшие диагонали, ограничивающие треугольник – AD и BC. AR и BS – биссектрисы углов. Тогда все точки, находящиеся ближе к стороне треугольника, чем к диагоналям, лежат в треугольнике AEB. Найдём его площадь, описав около многоугольника окружность:

$\angle DBA = \angle CAB = \dfrac{(n-2)\pi}{n}$

$\smile AB = \pi - \angle DBA = \dfrac{2\pi}{n}$

$\angle ACB = \angle ADB = \dfrac{1}{2} \cdot \smile AB = \dfrac{\pi}{n}$

$\angle OAB = \angle OBA = \pi - \angle CAB - \angle ACB = \dfrac{\pi}{n}$

$\angle RAB = \angle ABS = \dfrac{1}{2} \cdot \angle OAB = \dfrac{\pi}{2n}$

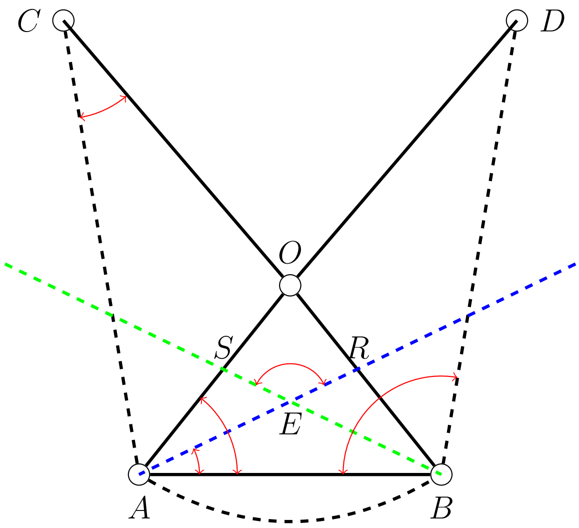
$\angle AEB = \pi - \angle EAB - \angle ABE = \pi - \dfrac{\pi}{n}$

Теорема синусов: $\dfrac{AB}{\sin \angle AEB} = \dfrac{BE}{\sin \angle EAB}$

$BE = \dfrac{AB \cdot \sin \angle EAB}{\sin \angle AEB}$

$\mathsf{S}(\triangle) =$ полупроизведение сторон на синус угла

$\mathsf{S}(\triangle AEB) = \dfrac{1}{2} \cdot (BE)^2 \cdot \sin \angle AEB$



Пусть длина стороны многоугольника равна a. Посчитаем площадь треугольника AEB:

$$\mathsf{S}(\triangle AEB) = \frac{1}{2} \cdot (BE)^2 \cdot \sin \angle AEB = \frac{1}{2} \cdot \frac{(AB)^2 \cdot \sin^2 \angle EAB}{\sin^2 \angle AEB} \cdot \sin \angle AEB =$$
$$= a^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{\pi}{2n}}{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{n}\right)} = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{\pi}{2n}}{\sin \frac{\pi}{n}}$$

Всего таких треугольников ровно n штук – по числу сторон многоугольника. Как было показано ранее, по условию нам нужны те и только те точки, что находятся в данных n треугольниках. Значит, множество исходов – координат точек, находящихся ближе к стороне (границе), чем к любой диагонали – это в точности все возможные точки данных n треугольников.

В то же время, множество всех исходов – это в точности все возможные точки исходного правильного многоугольника.

Поскольку радиус вписанной окружности можно получить по формуле $r = \dfrac{a}{2\tan\frac{\pi}{n}}$, то площадь правильного n-угольника может быть получена по формуле:

$$\mathsf{S}(n - \text{угольник}) = \frac{n \cdot a \cdot r}{2} = \frac{n \cdot a^2}{4\tan\frac{\pi}{n}}$$

Тогда искомая вероятность равна:

$$\mathcal{P}(\text{ближе к стороне}) = \frac{n \cdot \mathsf{S}(\triangle AEB)}{\mathsf{S}(n - \text{угольник})} = n \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\sin^2\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{n}} \cdot \frac{4\tan\frac{\pi}{n}}{n \cdot a^2} = \frac{\sin^2\frac{\pi}{2n}}{2 \cdot \sin\frac{\pi}{2n} \cdot \cos\frac{\pi}{2n}} \cdot 2\tan\frac{\pi}{n} =$$
$$= \frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\cos\frac{\pi}{2n}} \cdot \tan\frac{\pi}{n} = \tan\frac{\pi}{2n} \cdot \tan\frac{\pi}{n}$$

- Нам необходимо найти константы из выражения вероятности $\mathcal{P}_n = C \cdot n^{\alpha} \cdot (1 + o(1))$. Мы получили её в несколько ином виде. Тогда разложим $\mathcal{P}_n$ в ряд Тейлора от n:

$$\mathcal{P}_n = \tan\frac{\pi}{2n} \cdot \tan\frac{\pi}{n} \Longrightarrow \left(\frac{\pi}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \cdot \left(\frac{\pi}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$
$$= \frac{\pi^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi^2}{2} \cdot n^{-2} \cdot (1 + o(1))$$

Отсюда тут же получаем, что $C = \dfrac{\pi^2}{2}$ и $\alpha = -2$.

$\square$