Лекция 13 от 12.12.2016
Ряды Тейлора

Дифференцирование степенных рядов

В предыдущей лекции мы говорили о таком понятии, как степенные ряды. Продолжим.

Рассмотрим степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$, но для удобства сдвинем его центр, точку x_0, в нуль, получив тем самым ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Рассмотрим к этому ряду другой ряд, составленный из производных исходного ряда (впредь будем его именовать «новым» рядом). Он будет иметь вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n.$$

Утверждение 1. *Радиус сходимости нового ряда и исходного совпадают.*

Доказательство. Радиус сходимости нового ряда совпадает с радиусом сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n n x^n$, так как мы просто умножаем на фиксированное число x. Тогда по формуле Коши-Адамара:

$$R = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|n}} = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}\underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}}_{\to 1}} = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}.$$

А это и есть исходный радиус. □

Выведем отсюда следствие, которое назовём теоремой.

Теорема 1. *Внутри интервала сходимости сумма степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x_n$ дифференцируема и её производная равна $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n n x^{n-1}$.*

Доказательство. Возьмём произвольную точку x из интервала сходимости. Найдём $\delta > 0$ такое, что $[x-\delta, x+\delta]$ лежит в интервале сходимости и используем теорему о почленном дифференцировании функциональных рядов. □

Следствие 1. *Внутри интервала сходимости сумма степенного ряда бесконечно дифференцируема, и её k-я производная совпадает с суммой ряда из k-х производных.*

Следствие 2. *Сумма ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ имеет тот же радиус сходимости, что и исходный ряд, и внутри интервала сходимости является первообразной суммы исходного ряда.*

Из равномерной сходимости степенного ряда на каждом отрезке множества сходимости можно вывести следующее:

Следствие 3. *Пусть $[a,b]$ лежит в множестве сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Тогда*

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b c_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}.$$

Функции, представимые как сумма степенного ряда

Из следствия 1 сразу следует утверждение:

Утверждение 2. *Пусть I — невырожденный промежуток. Если функция f представима в виде суммы степенного ряда, то она бесконечно дифференцируема.*

Покажем теперь, что функция не может представляться разными степенными рядами. Действительно, будем поочерёдно дифференцировать левую и правую части нашего равенства функции и её степенного ряда (считаем, что радиус сходимости не нулевой):

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n;$$

$$S'(0) = c_1, \qquad S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1};$$

$$S''(0) = c_2 \cdot 2!, \qquad S''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) x^{n-2};$$

$$\dots$$

$$S^{(k)}(0) = c_k \cdot k!, \qquad S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k},$$

$$\dots$$

Отсюда сразу следует, что **если функция представима в виде степенного ряда на некотором множестве, то этот ряд совпадает с её рядом Тейлора**.

При этом не любая бесконечно дифференцируемая функция представима степенными рядом. Вспомним пример Коши — бесконечно дифференцируемая функция, которая представима в ряд Тейлора лишь в точке 0:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Следствие 4. *Если суммы степенных рядов $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \widetilde{c_n} x^n$ совпадают в некоторой окрестности нуля, то эти ряды совпадают.*

Доказательство.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{c_n} x^n.$$

А в силу единственности разложения на невырожденном промежутке получим требуемое.

$$c_n = \widetilde{c_n} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

□

Замечание 1. *Совпадение в окрестности нуля тут можно заменить на совпадение в точках $x_n \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$:*

$$c_0 = S(0) = \lim_{n\to\infty} S(x_n) = \lim_{n\to\infty} \widetilde{S}(x_n) = \widetilde{S}(0) = \widetilde{c_0}.$$

Теперь вычитаем c_0 и делим на x. Тогда равенство останется. И так далее.

Представимость в виде ряда Тейлора

Теорема 2. *Пусть I — невырожденный промежуток и $f \in C^\infty(I)$, $x_0 \in I$. Также пусть известно, что $\exists A, B > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |f^{(n)}(x)| \leqslant A \cdot B^n$. Тогда*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = f(x)$$

на промежутке I. Иными словами, функция представима своим рядом Тейлора.

Перед доказательством заметим, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{C^n}{n!}$ сходится по признаку Д'Аламбера для всякого положительного C, откуда получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{C^n}{n!} = 0$.

Доказательство. Запишем разность частичной суммы ряда и значения функции, используя формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \right| = \left| \frac{f^{(N+1)}(\xi)(x - x_0)^{N+1}}{(N+1)!} \right| \leqslant \frac{AB^{N+1}|x - x_0|^{N+1}}{(N+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

□

Теперь рассмотрим, как получаются классические разложения в ряд Тейлора.

1. $\sin(x)$ и $\cos(x)$. Ограничивая производные константой 1, получим требуемое:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

2. e^x. Пусть $A > 0$ — произвольное число. Тогда на промежутке $(-A, A)$ ряд сходится, если мы применим ограничение производных как e^A.

3. $\ln(1+x)$. «Если делать в лоб, с ним всё грустно»©Лектор. Можно воспользоваться вспомогательным рядом:

$$\frac{1}{x+1} = 1 - x + x^2 - \dots$$

который сходится на $(-1, 1)$ как геометрическая прогрессия, а затем почленно проинтегрировать, получив

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots.$$

Из непрерывности равенство с интервала $(-1, 1)$ можно продолжить на полуотрезок $(-1, 1]$.