Лекция 11 от 21.11.2016
Функциональные последовательности. Интегрирование и дифференцирование.

Частные случаи двойных пределов

Повторим и немного продолжим результаты прошлой лекции.

Утверждение 1. *Пусть $\mathcal{B}$ — база на X и $\forall n \in \mathbb{N}$ существует предел $\lim\limits_{\mathcal{B}} f_n(x) = a_n$, и при этом $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$. Тогда существуют и равны пределы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и $\lim\limits_{\mathcal{B}} f(x)$:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \lim_{\mathcal{B}} f_n(x) = \lim_{\mathcal{B}} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{\mathcal{B}} f(x).$$

Отметим, что равномерная сходимость это удобное, но завышенное требование.

Следствие 1. *Пусть $\mathcal{B}$ — база на X и $\forall n \in \mathbb{N}$ существует предел $\lim\limits_{\mathcal{B}} f_n(x) = a_n$, и при этом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} S(x)$. Тогда существуют и равны пределы $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\lim\limits_{\mathcal{B}} S(x)$:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{\mathcal{B}} f_n(x) = \lim_{\mathcal{B}} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim_{\mathcal{B}} S(x).$$

То есть при наличии равномерной сходимости порядок этих действий не важен.

Это действительно следствие предыдущего утверждения, потому что

$$S(x) \leftleftarrows S_n(x) = f_1(x) + \ldots + f_n(x) \underset{\mathcal{B}}{\to} a_1 + \ldots + a_n.$$

Следствие 2. *Пусть I — невырожденный промежуток на $\mathbb{R}$ и $\forall n \in \mathbb{N}$: $f_n(x) \in C(I)$ и $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{I}{\rightrightarrows}} f(x)$. Тогда $f(x) \in C(I)$.*

Следствие 3. *Пусть I — невырожденный промежуток на $\mathbb{R}$ и $\forall n \in \mathbb{N}$: $f_n(x) \in C(I)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) \overset{I}{\rightrightarrows} S(x)$. Тогда $S(x) \in C(I)$.*

Связь с интегрированием

Вспомним, что интеграл Римана это тоже предел по базе.

Утверждение 2. *Пусть $\forall n \in \mathbb{N}$: $f_n(x) \in R[a,b]$, то есть интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$, и $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}} f(x)$. Тогда $f(x) \in R[a,b]$ и*

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\mathrm{d}x.$$

Можно сказать, это теорема о перестановке интеграла и предельного перехода.

Перед тем как приступить к доказательству, задумаемся: а может быть, требование равномерной сходимости это слишком строго? Однако поточечной явно не хватает. Подтвердим это несколькими примерами.

- Пронумеруем все рациональные числа: r_1, r_2, $\ldots$, и определим функции следующим образом:
$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{r_1, \ldots, r_n\}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$
Поточечно это будет сходиться к функции Дирихле, каждая отдельная функция f_n интегрируема, а вот $\{f_n\}$ — нет.
- $$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1/n); \\ 1/x, & x \in [1/n, 1]. \end{cases}$$
По отдельности все функции интегрируемы, а поточечно это будет стремится к
$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & x \in (0, 1]; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$
- Функция $f_n(x)$ задает равнобедренный треугольник с основанием на оси OX от 0 до $1/n$ и высотой $2n$. Тогда каждый интеграл равен 1, а поточечно f_n стремятся к нулю. То есть все существует, но равенства нет.

Итого, поточечной сходимости явно недостаточно. Но честно говоря, равномерной сходимости действительно хватает с избытком, но об этом как-нибудь потом.

Теперь приступим к доказательству.

Доказательство. Покажем, что это частный случай теоремы о перестановке пределов.

Пусть $X = \{(\tau, \xi)\}$ — это множество всех отмеченных разбиений $[a, b]$ (то есть таких, на каждом отрезке которого зафиксирована произвольная точка ξ_i), $\sigma_n(\tau, \xi)$ — значение интегральной суммы Римана для функции $f_n(x)$, соответствующее отмеченному разбиению (τ, ξ). Тогда $\{\sigma_n(\tau, \xi)\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность функций, определенных на X. Также обозначим за $\sigma(\tau, \xi)$ интегральную сумму Римана для функции $f(x)$.

Докажем, что $\sigma_n(\tau, \xi) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} \sigma(\tau, \xi)$. Действительно, зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, тогда $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ \forall x \in [a, b] : \ |f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{b - a}$.

Тогда $\forall n > N$ и $\forall (\tau, \xi) \in X$ (M — количество отрезков в разбиении τ, Δ_m — длина m-ого отрезка):

$$|\sigma(\tau, \xi) - \sigma_n(\tau, \xi)| = \left| \sum_{m=1}^{M} f_n(\xi_m)\Delta_m - \sum_{m=1}^{M} f(\xi_m)\Delta_m \right| \leqslant \sum_{m=1}^{M} |(f_n(\xi_m) - f(\xi_m))\Delta_m| \leqslant \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_{m=1}^{M} \Delta_m = \varepsilon.$$

Получается, что $\forall n \in \mathbb{N}$ и существует предел $\lim\limits_{\mathcal{B}} \sigma_n(\tau, \xi) = \int\limits_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$ (здесь $\mathcal{B}$ — база Римана).

Вспомним, что $\sigma_n \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} \sigma$, а значит, по теореме о перестановке двух пределов, существуют и равны пределы $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$ и $\lim\limits_{\mathcal{B}} \sigma(\tau, \xi) = \int\limits_a^b f(x)dx$. $\square$

Следствие 4. *Пусть* $\forall n \in N$: $f_n(x) \in R[a,b]$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x)$. *Тогда* $S(x) \in R[a,b]$ *и*

$$\int\limits_a^b S(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\mathrm{d}x.$$

Связь с дифференцированием

Утверждение 3. *Пусть* I *— невырожденный промежуток на* $\mathbb{R}$ *и* $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n(x) \in C^1(I)$ *(то есть непрерывно дифференцируема),* $\exists x_0 \in I$ *такое, что* $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ *сходится, и при этом* $f_n'(x) \overset{I}{\rightrightarrows} g(x)$. *Тогда* $f_n(x) \overset{I}{\to} f(x)$ *(поточечно!), причем на каждом ограниченном подмножестве* I *сходимость будет равномерной,* $f(x) \in C^1(I)$ *и* $f'(x) = g(x)$ *на* I.

Что это вообще означает? Фактически это похоже на перестановку пределов:

$$(\lim_{n\to\infty} f_n(x))' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

Доказательство. Вообще говоря, это сразу следует из прошлого утверждения и формулы Ньютона–Лейбница. Но распишем.

Заметим, что $\forall x \in I$: $f_n(x) = f_n(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f_n'(t)\mathrm{d}t$. При этом $f_n(x_0) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} \alpha$ (так как вообще не зависит от x), а $f_n'(t) \overset{I}{\rightrightarrows} g(x)$.

Получается, что $f_n(x)$ поточечно на I сходится к $\alpha + \int\limits_{x_0}^{x} g(t)\mathrm{d}t = f(x)$. При этом очевидно $f(x) \in D(I)$ (т.е. дифференцируема) и $f'(x) = g(x)$. Итого, $f(x) \in C^1(I)$.

Осталось показать равномерную сходимость на ограниченном подмножестве I.

Для любого E — ограниченного подмножества I — верно, что $\int\limits_{x_0}^{x} f_n'(t)\mathrm{d}t \underset{n\to\infty}{\overset{E}{\rightrightarrows}} \int\limits_{x_0}^{x} g(t)\mathrm{d}t$. Действительно, в силу ограниченности E, $\exists C > 0$ $\forall x \in E: \ |x_0 - x| < C$.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists N \in \mathbb{N}$ $\forall n > N$ $\forall t \in E: \ |f_n'(t) - g(t)| < \varepsilon / C$. Значит, $\forall n > N$ и $\forall x \in E$:

$$\left|\int\limits_{x_0}^{x} f_n'(t)\mathrm{d}t - \int\limits_{x_0}^{x} g(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int\limits_{x_0}^{x} |f_n'(t) - g(t)|\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon/C|x_0 - x| < \varepsilon.$$

В первом переходе модуль появился, потому что мы не знаем взаимное расположение точек x_0 и x. □

Можно доказать более общее утверждение, которое отличается от предыдущего заменой $C^1(I)$ на $D(I)$, то есть достаточно того, что функции дифференцируемы. Но мы этим заниматься не будем.

А нужно ли нам, чтобы существовала такая точка x_0? Конечно! Пусть, например, $f_n(x) = n$. Тогда в каждой точке расходимость к бесконечности. А с другой стороны, $f_n'(x) = 0$ и последовательность производных сходится.