Лекция 04 от 26.09.2016
Признаки сходимости знакопеременных рядов и перестановки ряда

Снова признаки сходимости знакопеременных рядов

В прошлый раз мы с вами сформулировали и доказали признак Лейбница. Будем пользоваться в этот раз слабой его формулировкой:

Признак 1. *Пусть последовательность $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно убывает к нулю. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ сходится.*

Замечание 1. *Для этого утверждения достаточно нестрогой монотонности.*

Оказывается, этот признак является частным случаем более общего признака, который мы сейчас сформулируем и докажем.

Признак 2 (Признак Дирихле). *Пусть частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ограничены (то есть $\exists C > 0$ такое, что начиная с некоторого номера N, $|A_n| = |a_1 + a_2 + \ldots + a_n| < C$), а $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ — монотонно стремящаяся к нулю последовательность. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится (отметим, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ может влёгкую расходиться).*

Подставляя сюда вместо a_n последовательность $a_n = (-1)^n$ (частичные суммы равны $1, 0, 1, 0, \ldots$ и ограничены), получаем формулировку первого утверждения.

Замечание 2. *В признаке Лейбница дополнительно к утверждению и сходимости ряда присутствует оценка остатка, которой в признаке Дирихле нет.*

Доказательство. Для доказательства мы применим трюк, подобный интегрированию по частям, именуемый в дискретном случае *преобразованием Абеля* («название умнее, чем само преобразование» © лектор).

Рассмотрим случай $b_n \searrow 0$ (случай $b_n \nearrow 0$ — аналогично).

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Найдём такое $N \in \mathbb{N}$, что

$$\forall n \geqslant N\colon\ b_n < \frac{\varepsilon}{4C}$$

Возьмём $m > N$, произвольное $p \in \mathbb{N}$ и оценим сумму $\left|\sum\limits_{n=m+1}^{m+p} a_n b_n\right|$.

$$\sum_{n=m+1}^{m+p} a_n b_n = \sum_{n=m+1}^{m+p} (A_n - A_{n-1})\, b_n = \sum_{n=m+1}^{m+p} A_n b_n - \sum_{n=m+1}^{m+p} A_{n-1} b_n = \sum_{n=m+1}^{m+p} A_n b_n - \sum_{n=m}^{m+p-1} A_n b_{n+1} =$$
$$= A_{m+p} b_{m+p} - A_m b_{m+1} + \sum_{n=m+1}^{m+p-1} A_n\,(b_n - b_{n+1})\,.$$

Следовательно, используя монотонное убывание b_n:

$$\left|\sum_{n=m+1}^{m+p} a_n b_n\right| \leqslant |A_{m+p}b_{m+p}| + |A_m b_{m+1}| + \sum_{n=m+1}^{m+p-1} |A_n||b_n - b_{n+1}| <$$

$$< C\frac{\varepsilon}{4C} + C\frac{\varepsilon}{4C} + C\sum_{n=m+1}^{m+p-1}(b_n - b_{n+1}) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + C(b_{m+1} - b_{m+2} + b_{m+2} - b_{m+3} + \ldots - b_{m+p}) = \frac{\varepsilon}{2} + C(b_{m+1} - b_{m+p}) < \frac{\varepsilon}{2} + C\frac{\varepsilon}{4c} < \varepsilon.$$

Итого, по критерию Коши ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится. □

Пример 1. *Попробуем поисследовать на сходимость какой-нибудь ряд, хороший пример — ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos n\alpha}{n}$, *при* $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ *или такой же с синусом. Пусть* $a_n = \cos n\alpha$, $b_n = \dfrac{1}{n}$. *Исследуем ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *на ограниченность частичных сумм:*

$$|A_n| = \frac{|\cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos n\alpha| \cdot |\sin(\alpha/2)|}{|\sin(\alpha/2)|} =$$

$$= \left|\frac{-\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{3\alpha}{2} - \sin\frac{3\alpha}{2} + \sin\frac{5\alpha}{2} - \ldots + \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha}{2|\sin\frac{\alpha}{2}|}\right| =$$

$$= \frac{\left|-\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha\right|}{2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|} \leqslant \frac{2}{2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|} = \frac{1}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}$$

Тогда тут применим признак Дирихле и ряд сходится. Теперь покажем его условную сходимость, то есть тот факт, что ряд из модулей расходится.

$$\frac{|\cos n\alpha|}{n} \geqslant \frac{(\cos n\alpha)^2}{n} = \frac{\cos 2n\alpha + 1}{2n} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\frac{\cos 2n\alpha}{n}}_{\text{ряд сход.}} + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{ряд расх.}}\right)$$

Сформулируем и докажем ещё один признак.

Признак 3 (Признак Абеля)**.** *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, а* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— монотонная ограниченная последовательность. Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *сходится.*

Доказательство. Последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а значит ограничена. Последовательность $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна и ограничена, а значит имеет предел $B = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. То есть последовательность b_n представима в виде $B + \beta_n$, где β_n — монотонно стремящаяся к нулю последовательность.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(B + \beta_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n B + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \beta_n$$

Первое слагаемое сходится по условию (умножение на константу ничего не меняет), а второе по признаку Дирихле. □

Перестановки ряда

Определение 1. *Пусть* σ *— биекция (перестановка)* $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. *Тогда говорят, что ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ *является перестановкой ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Сформулируем две теоремы, которые докажем в следующий раз.

Теорема 1 (Коши)**.** *Пусть ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *абсолютно сходится, и его сумма равна* A. *Тогда любая его перестановка также сходится абсолютно, и ее сумма равна* A.

Теорема 2 (Римана)**.** *Пусть ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится условно. Тогда:*

1. *для любого* $A \in \mathbb{R}$ *найдётся такая перестановка* σ, *что* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = A$;
2. *существует такая перестановка* σ, *что ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ *расходится к* $+\infty$;
3. *существует такая перестановка* σ, *что ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ *расходится к* $-\infty$;
4. *существует такая перестановка* σ, *что для ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ *последовательность частичных сумм предела не имеет.*