

# Лекция 07 от 17.10.2016

## Функциональные последовательности и ряды

### Поточечная и равномерная сходимость

Начиная с этой лекции, будем говорить о функциональных последовательностях и рядах.

Пусть  $X$  — произвольное множество точек, а  $\{f(x)\}_n^\infty$  — последовательность функций, определённых на  $X$  или на его подмножестве.

**Определение 1.** Будем говорить, что  $f_n(x)$  сходится поточечно к  $f(x)$  на  $X$ , если

$$\forall x \in X \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

**Обозначение 1.**  $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} f(x)$ .

Почему такое определение не совсем удобно для нас? Сходимость в каждой точке может быть своя, произвольная, а хотелось бы, чтобы свойства функций  $f_n$  и  $f$  были похожи. Приведем пример, когда это не выполняется.

**Пример 1.** Если  $f_n(x) = x^n$ ,  $X = [0; 1]$ , то

$$f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{[0;1]} \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}.$$

То есть бывает так, что все функции последовательности непрерывны на отрезке и стремятся к разрывной функции.

Для устранения этого недостатка введём другое определение сходимости функциональной последовательности.

**Определение 2.** Будем говорить, что последовательность функций  $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$  сходится к  $f(x)$  равномерно на множестве  $X$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N \forall x \in X |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

**Обозначение 2.**  $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} f(x)$ .

Из определений сразу очевидно следует утверждение.

**Утверждение 1.** Если  $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} f(x)$ , то  $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} f(x)$ .

А что, если нам даны последовательность  $f_n(x)$ , функция  $f(x)$  и множество  $X$ , то как нам понять, сходится ли  $f_n(x)$  к  $f(x)$  равномерно?

Существует мощный способ. Обозначим  $r_n = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|$ .

**Утверждение 2** (Супремум-критерий).  $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} f(x) \Leftrightarrow r_n \rightarrow 0$ .

*Доказательство.*

**Необходимость.** Зафиксируем произвольное  $\varepsilon > 0$ , положим  $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$ . Тогда

$$\begin{aligned} \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N \forall x \in X |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_1, \\ \Rightarrow r_n = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon_1 < \varepsilon. \end{aligned}$$

То есть  $r_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**Достаточность.**

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N r_n < \varepsilon \Rightarrow \forall x \in X |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

□

Для приведённого выше примера  $f_n(x) = x^n$ :

**Утверждение 3.**

$$1. x^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{[0;1]} 0.$$

$$2. x^n \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{[0;1]} 0.$$

*Доказательство.*  $r_n = \sup_{x \in [0;1]} |x^n - 0| = 1 \not\rightarrow 0$ .

□

Есть ещё одна подобного рода последовательность.

$$f_n(x) = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

В любой точке значение  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = e^x$ , то есть  $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{R}} e^x$ , но  $f_n(x) \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{R}} e^x$ . Однако, как легко показать,  $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(-C;C)} e^x$  для всякого  $C > 0$ . Эта последовательность ещё всплывёт в нашем курсе.

**Утверждение 4.** Если  $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} f(x)$  и  $g_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} g(x)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , то

$$1. f_n(x) + g_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} f(x) + g(x),$$

$$2. \alpha f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} \alpha f(x).$$

*Доказательство.* Докажем пункт 1, второй доказывается аналогично. Зафиксируем произвольное  $\varepsilon > 0$ , положим  $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$ . Тогда

$$\begin{aligned} \exists N_1 \in \mathbb{N}: \forall x \in X |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_1, \\ \exists N_2 \in \mathbb{N}: \forall x \in X |g_n(x) - g(x)| < \varepsilon_1. \end{aligned}$$

Положим  $N = \max\{N_1, N_2\}$ . Тогда  $\forall n > N \forall x \in X$ :

$$|(f_n(x) + g_n(x)) - (f(x) + g(x))| \leq |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)| < \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = \varepsilon.$$

Получили требуемое.

□

**Утверждение 5.** Если  $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} f(x)$  и  $g(x)$  ограничена на множестве  $X$ , то

$$f_n(x)g(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} f(x)g(x).$$

*Доказательство.*  $\exists C > 0: \forall x \in X |g(x)| < C$ . Зафиксируем произвольное  $\varepsilon > 0$ , положим  $\varepsilon_1 = \varepsilon/C$ . Найдём такое  $N \in \mathbb{N}$ , что  $\forall n > N, \forall x \in X |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_1$ . Тогда  $\forall n > N \forall x \in X |f_n(x)g(x) - f(x)g(x)| < C\varepsilon_1 = \varepsilon$ .  $\square$

**Замечание 1.** Если  $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} f(x)$ ,  $g_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} g(x)$  и  $f(x), g(x)$  ограничены на множестве  $X$ , то  $f_n(x)g_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} f(x)g(x)$ .

**Замечание 2.** Если  $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} f(x)$  и  $f(x)$  отделена от нуля (т.е. существует такое  $\alpha > 0$ , что для любого элемента множества  $X |f(x)| \geq \alpha$ ), то  $\frac{1}{f_n(x)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} \frac{1}{f(x)}$ .

Доказательство этих фактов остаётся в качестве упражнения. **Указание.** Рассмотреть  $\frac{1}{f_n} - \frac{1}{f} = (f - f_n) \frac{1}{f_n \cdot f}$ .

## Геометрический смысл равномерной сходимости

Несложно понять, что если  $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} f(x)$ , то для всякого  $\varepsilon > 0$ , начиная с какого-то  $N \in \mathbb{N}$  для всех  $n > N$  все графики функций  $f_n(x)$  окажутся в  $\varepsilon$ -коридоре графика функции  $f(x)$ .

## Критерий Коши равномерной сходимости

**Теорема 1** (Критерий Коши равномерной сходимости). Следующие условия эквивалентны:

1.  $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X}$  (равномерно сходится куда-то);
2.  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  удовлетворяет условию Коши равномерной сходимости на  $X$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall n, m > N \forall x \in X |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

*Доказательство.* **1**  $\Leftarrow$  **2**. Заметим, что для всякого  $x \in X$  числовая последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  является фундаментальной. Тогда  $\forall x \in X \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ . Зафиксируем произвольное  $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$ . Найдём такое  $N \in \mathbb{N}$ , что

$$\forall n, m > N \forall x \in X |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon_1.$$

Зафиксировав  $n$  перейдём к пределу при  $m \rightarrow \infty$ , получим, что  $\forall x \in X: |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon_1 < \varepsilon$ . Получили требуемое.

**1**  $\Rightarrow$  **2**. Пусть  $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} f(x)$ .

Зафиксируем произвольное  $\varepsilon > 0$ , положим  $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$ . Найдём такое  $N \in \mathbb{N}$ , что  $\forall n > N \forall x \in X$  верно  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_1$ . Тогда  $\forall n, m > N \forall x \in X$  выполнено

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = \varepsilon.$$

□

## Функциональные ряды

Перейдём к рассмотрению функциональных рядов. Тут все определения и теоремы переносятся с обычных рядов с заменой числовых последовательностей на функциональные.

**Определение 3.** Будем говорить, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  сходится равномерно к  $S(x)$  на множестве  $X$ , если последовательность его частичных сумм  $S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$  сходится равномерно к  $S(x)$  на множестве  $X$ .

Отсюда же можно сформулировать ряд утверждений, которые по сути мы уже доказали.

**Утверждение 6.** Пусть  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} S(x)$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} \tilde{S}(x)$ . Тогда их почленная сумма  $\sum_{n=1}^{\infty} (f_n(x) + g_n(x)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} S(x) + \tilde{S}(x)$ .

**Утверждение 7.** Если  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} S(x)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} \alpha S(x).$$

**Утверждение 8.** Если  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} S(x)$ , а  $g(x)$  ограничена на  $X$ , то

$$\sum_{n=1}^{\infty} g(x) f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} g(x) S(x).$$

Ну и конечно, мы не обойдёмся без критерия Коши.

**Утверждение 9** (Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда). Следующие утверждения эквивалентны.

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X}$  (опять же, сходится куда-то).
2. Выполняется условие Коши

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall m > N, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in X \left| \sum_{n=m+1}^{m+p} f_n(x) \right| < \varepsilon.$$

Отсюда же нахалаяву получаем утверждение.

**Утверждение 10** (Необходимое условие равномерной сходимости функционального ряда).

Если  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X}$ , то  $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} 0$ .