Лекции по предмету

Математический анализ-3

Группа лектория ФКН ПМИ 2016-2017
Михаил Дискин, Анастасия Иовлева, Руслан Хайдуров.

2016/2017 учебный год

Содержание

Лекция 01 от 05.09.2016

Определение 1. *Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность действительных чисел.* Числовым рядом *называется выражение вида* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, *записываемое также как* $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$.

Определение 2. *N-й частичной суммой называется сумма первых N членов.*

$$S_n = a_1 \ + \ \ldots \ + \ a_N$$

Определение 3. *Последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется последовательностью частичных сумм.*

Говорят, что ряд *сходится* (к числу A), если (к числу A) сходится последовательность его частичных сумм. Аналогично, ряд *расходится к $+\infty$ (к $-\infty$)*, если к $+\infty$ (к $-\infty$) расходится последовательность его частичных сумм. В противном случае, если последовательность частичных сумм расходится, ряд называют *расходящимся.*

Определение 4. *Суммой ряда называется предел* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, *если он сходится или расходится к $\pm\infty$.*

Вспоминая, что $a_n = S_n - S_{n-1}$, можно заключить, что особой разницы между самим рядом и последовательностью его частичных сумм нет — из одного можно получить другое и наоборот. Следовательно, вместо ряда можно рассматривать его частичные суммы.

Пример 1 (Предел Коши для последовательностей)**.** *Последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию Коши, т.е.*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \colon \forall m,k > N \Rightarrow |S_m - S_k| < \varepsilon.$$

Таким образом, мы нахаляву получили первую теорему.

Теорема 1 (Критерий Коши сходимости ряда)**.** *Для сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \colon \forall k > N, \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow |a_{k+1} + a_{k+2} \ldots + a_{k+p}| < \varepsilon.$$

Отсюда сразу же очевидно следует утверждение.

Утверждение 1 (Необходимое условие сходимости ряда)**.** *Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Доказательство. Ряд сходится, значит,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \colon \forall k > N, p = 1 \Rightarrow |a_{k+1}| < \varepsilon.$$

А это и есть определение предела, равного нулю.

Другой способ доказательства: вспомним, что $a_n = S_n - S_{n-1}$ и что S_n, как и S_{n-1}, стремятся к одному пределу при стремлении n к бесконечности. Итого, получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_n = 0.$$

$\square$

Теперь сформулируем и докажем несколько тривиальных свойств.

Свойства 1. *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B$. *Тогда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B$.

Доказательство. Это напрямую следует из свойств предела последовательности и того, что $S_n^{a+b} = S_n^a + S_n^b$. □

Свойства 2. *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$. *Тогда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha A$ *для любого действительного* α.

Доказательство. Аналогично вытекает из свойств предела последовательности. □

Введём важное определение.

Определение 5. *Пусть дан ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. *Обозначим некоторые его подсуммы,*

$$\underbrace{a_1 + \ldots + a_{n_1}}_{b_1} + \underbrace{a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2}}_{b_2} + \underbrace{a_{n_2+1} \ldots + a_{n_3}}_{b_3} + a_{n_3+1} + \ldots,$$

где $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ *— возрастающая последовательность натуральных чисел. В таком случае говорят, что ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *получен из исходного* расстановкой скобок.

Утверждение 2. *Если ряд сходится или расходится к* $\pm\infty$, *то после любой расстановки скобок он сходится, неформально говоря, туда же.*

Доказательство. Достаточно заметить, что частичные суммы ряда, полученного расстановкой скобок, образуют подпоследовательность в последовательности частичных сумм исходного ряда.

$$S_1^b = S_{n_1}^a, \quad S_2^b = S_{n_2}^a, \quad S_3^b = S_{n_3}^a, \quad \ldots$$

Осталось только вспомнить, что любая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится туда же, куда и сама последовательность. □

Обратное неверно!!! Пример такого ряда:

$$1 - 1 + 1 - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n.$$

При расстановке скобок $(1-1) + (1-1) + \ldots = 0$ получается сходящийся ряд, в то время как исходный ряд расходится, хотя бы потому что не выполняется необходимое условие о стремлении членов ряда к нулю.

Однако сходимость элементов к нулю не единственное препятствие. Например, можно «распилить» единицы из предыдущего примера и получить следующий ряд:

$$1 - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

Его элементы стремятся к нулю, но он все еще расходится. Однако расставив скобки, можно получить сходящийся ряд:

$$(1-1) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) + \ldots = 0.$$

Утверждение 3. *Если $a_n \to 0$ и длины скобок ограничены (т.е. существует такое $C \in \mathbb{R}$, что $n_{k+1} - n_k < C$ при всех k), то из сходимости ряда, полученного расстановкой таких скобок, следует сходимость исходного ряда.*

Доказательство. Доказать предлагается самостоятельно. Указание: ограничить через $\frac{\varepsilon}{C}$. □

Утверждение 4. *Изменение, удаление или добавление конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость.*

Поговорим теперь об абсолютной сходимости.

Определение 6. *Если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, то говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно.*

Определение 7. *Если ряд сходится, но не сходится абсолютно, то говорят, что ряд сходится условно.*

Утверждение 5. *Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абслютно, то он сходится.*

Доказательство. Сразу следует из критерия Коши. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Так как ряд из модулей сходится, то

$$\exists N \in \mathbb{N}\colon \forall k > N, \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{k+1}^{k+p} |a_k| < \varepsilon$$

Тогда

$$\left| \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n \right| \leqslant \sum_{n=k+1}^{k+p} |a_n| < \varepsilon$$

□

Определение 8. *Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ N-м хвостом называется сумма $r_N = \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} a_n$.*

Для сходящегося ряда очевидно, что $r_n \in \mathbb{R}$.

Лекция 02 от 12.09.2016 Признаки сравнения и признаки сходимости знакопостоянных рядов рядов.

В рамках этой лекции будем рассматривать только ряды с неотрицательными членами!

Очевидно, что последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ в таких рядах возрастает. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n \in [0, +\infty]$.

Утверждение 1 (Критерий сходимости рядов с неотрицательными членами)**.** *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена сверху.*

Это позволяет сократить запись для таких рядов.

Обозначение 1. *Ряд сходится:* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$*; ряд расходится:* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

Признак 1 (Первый признак сравнения)**.** *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *— два ряда с неотрицательными членами, и начиная с некоторого места имеет место неравенство* $a_n \leqslant b_n$. *Тогда:*

1. *если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, *то* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$;
2. *если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, *то* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.

Доказательство. Достаточно доказать для случая, когда $a_n \leqslant b_n$ уже при $n \geqslant 1$.

1. Рассмотрим частичные суммы рядов: $S_n^a = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $S_n^b = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^b = C$ для некоторого C. Последовательность S_n^b очевидно неубывающая, так что $S_n^b \leqslant C$ для любого n. А значит, для всех n верно, что
$$0 \leqslant S_n^a = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leqslant b_1 + b_2 + \ldots + b_n \leqslant C.$$
Это показывает, что S_n^a монотонная ограниченная последовательность, а значит она обязательно имеет предел. Так что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.
2. Прямо следует из первого пункта.

$\square$

Признак 2 (Второй признак сравнения)**.** *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *— два ряда с неотрицательными членами и начиная с некоторого места* $a_n \asymp b_n$ *(то есть* $\exists c, C > 0$ *такие что* $c < \frac{a_n}{b_n} < C$*). Тогда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство. Прямо следует из предыдущего признака, так как $cb_n \leqslant a_n \leqslant Cb_n$. $\square$

Замечание 1. *Если* $a_n \sim b_n$ *при* $n \to \infty$, *то* $a_n \asymp b_n$.

Пример 1 (тривиальный)**.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ *— расходится.*

Признак 3 (Третий признак сравнения)**.** *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *— два ряда с неотрицательными членами и начиная с некоторого места* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$ *Тогда:*

1. *если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$*, то* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$*;*
2. *если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$*, то* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$*.*

Доказательство. По сути говоря, данный признак сравнивает скорости роста, а в остальном это практически то же самое, что первый признак сравнения. Что ж, сведем его к нему.

Достаточно считать, что $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$ уже при $n \geqslant 1$. Для любого натурального k мы можем представить элементы a_k и b_k следующим образом:

$$a_k = a_1 \frac{a_2}{a_1}\frac{a_3}{a_2}\dots\frac{a_k}{a_{k-1}}$$
$$b_k = b_1 \frac{b_2}{b_1}\frac{b_3}{b_2}\dots\frac{b_k}{b_{k-1}}$$

Согласно условию, $\frac{a_i}{a_{i-1}} \leqslant \frac{b_i}{b_{i-1}}$ при $1 \leqslant i \leqslant k$. Таким образом, мы почти получили, что $a_k \leqslant b_k$, за исключением того, что мы не знаем, как соотносятся элементы a_1 и b_1. Что ж, избавимся от них, введя новый ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b'_n = \frac{a_1}{b_1}\sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Для него будет выполняться неравенство $a_k \leqslant b'_k$. Тем самым, мы свели задачу к первому признаку сравнения. □

Замечание 2. *Отметим, что для любого* $q \in [0{,}1)$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ *сходится. Действительно,*

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} q^n = \lim_{N\to\infty}\frac{q(q^N-1)}{q-1} = \frac{q}{1-q}.$$

Признак 4 (Признак д'Аламбера)**.**

1. *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *— ряд с неотрицательными членами, и начиная с некоторого существует такое* $q \in [0,1)$*, что* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q$*. Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится.*
2. *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *— ряд с неотрицательными членами, и начиная с некоторого места* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$*. Тогда* $a_n \nrightarrow 0$ *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

Доказательство.

1. Следует из третьего признака сравнения при $b_n = q^n$.
2. Очевидно из самой формулировки.

$\square$

Однако чаще используется признак д'Аламбера в предельной форме.

Следствие 1 (Предельный признак д'Аламбера). *Пусть для ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *с неотрицательными членами существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *если* $\alpha < 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится;*
2. *если* $\alpha > 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится;*
3. *если* $\alpha = 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *может как сходиться, так и расходиться.*

Доказательство.

1. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$ и $\alpha < 1$, то $\exists N \in \mathbb{N}$ такой, что при любом $n > N$ $\alpha - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \alpha + \varepsilon$, причём $\alpha + \varepsilon < 1$. А значит, ряд сходится по признаку д'Аламбера.
2. Аналогично.
3. Например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$ — расходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ — сходится.

$\square$

Заметим, что признак д'Аламбера довольно грубый, то есть существует некоторая «мертвая зона» рядов, про сходимость которых он ничего не может сказать (например, про ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$).

Следствие 2. *Если для ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *с неотрицательными членами верно, что* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, *то ряд сходится, а если* $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, *то расходится.*

Признак 5 (Радикальный признак Коши). *Рассмотрим ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *с неотрицательными членами.*

1. *Пусть начиная с некоторого места существует такое* $q \in [0, 1)$, *что* $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q$. *Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится.*
2. *Пусть существует бесконечное множество индексов* n, *для которых верно, что* $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$. *Тогда* $a_n \nrightarrow 0$ *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

Доказательство.

1. Следует из первого признака сравнения при $b_n = q^n$.
2. Очевидно по определению расходимости ряда.

$\square$

Аналогично признаку д'Аламбера, можно сформулировать данный признак в предельной форме.

Следствие 3 (Радикальный признак Коши в предельной форме)**.** *Пусть для ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *с неотрицательными членами существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = A$*, где* $A \in [0, \infty]$*. Тогда:*

1. *если* $A < 1$*, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится;*
2. *если* $A > 1$*, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

Или, более общо:

1. *если* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} < 1$*, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится;*
2. *если* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} > 1$*, то* $a_n \nrightarrow 0$ *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

Заметим, что так как тут используется только верхний предел, этот признак несколько удобней, чем предельный признак д'Аламбера.

Пример 2. *Рассмотрим следующий ряд:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n+(-1)^n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \ldots$$

Как можно заметить, у соседних элементов ряда наблюдается то рост в 2 раза, то убывание в 8 раз, и предельный признак д'Аламбера ничего не может сказать про сходимость. Однако воспользуемся радикальным признаком Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{-n+(-1)^n}} = \lim_{n\to\infty} 2^{-1+\left(\frac{-1}{n}\right)^n} = \frac{1}{2}.$$

Как мы видим, ряд сходится.

Упражнение 1. *Есть ли обратный пример, когда радикальный признак Коши не помогает, в отличие от признака д'Аламбера?*

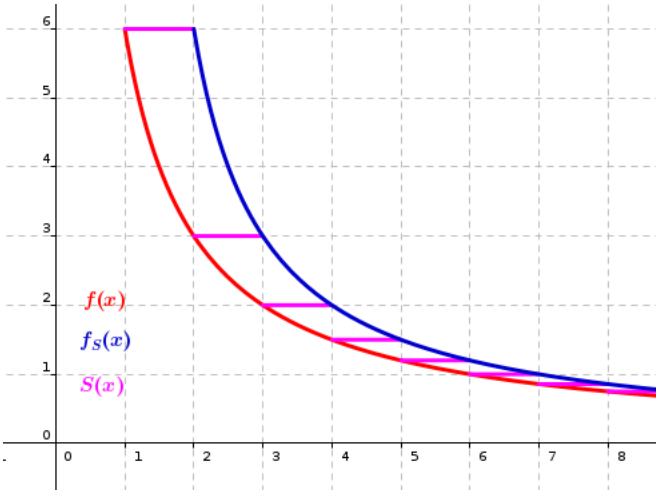
Для разных рядов может быть удобней использовать разные признаки сходимости. Например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!$ однозначно лучше исследовать с помощью признака д'Аламбера.

Но у нас все еще есть «мертвая зона» из тех рядов, про сходимость которых данные признаки ничего не могут сказать. И с этим хочется что-то сделать!

Признак 6 (Интегральный признак Коши–Маклорена)**.** *Пусть* $f(x) \geqslant 0$ *— невозрастающая на* $[1, \infty]$ *функция. Тогда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ *и* $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx$ *сходятся или расходятся одновременно. Причем в случае сходимости*

$$\int\limits_{N+1}^{\infty} f(x)dx \leqslant r_N = f(N+1) + f(N+2) + \ldots \leqslant \int\limits_{N}^{\infty} f(x)dx.$$

Доказательство. Для удобства введем две вспомогательные функции: $f_S(x) = f(x-1)$ и $S(x) = f(\lfloor x \rfloor)$.



Тогда мы получаем, что $f(1)+f(2)+\ldots+f(N)=\int\limits_1^N S(x)dx$. Значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл $\int\limits_1^{\infty} S(x)dx$. В свою очередь, несложно заметить, что сходимость этого интеграла влечет за собой сходимость интеграла $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$, так как при наших ограничениях $S(x)\geqslant f(x)$.

Отсюда же следует оценка для остатка. Действительно:

$$r_N=\int\limits_{N+1}^{\infty} S(x)dx \leqslant \int_{N+1}^{\infty} f_S(x)dx=\int\limits_{N+1}^{\infty} f(x-1)dx=\int\limits_{N}^{\infty} f(x)dx,$$

$$r_N=\int\limits_{N+1}^{\infty} S(x)dx \geqslant \int\limits_{N+1}^{\infty} f(x)dx.$$

□

Пример 3. *Допустим, мы хотим узнать сумму ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$. *Но поскольку ряд бесконечен, мы хотим обойтись первыми 100 членами, а чтобы оценить погрешность, посчитаем соответствующий интеграл.*

$$\int\limits_n^{\infty}\frac{1}{x^3}=-\frac{1}{2x^2}\Big|_n^{\infty}=\frac{1}{2n^2}$$

Итого,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}=\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{n^3}+\theta, \quad \text{где } \theta\in\left[\frac{1}{2\cdot 101^2},\frac{1}{2\cdot 100^2}\right].$$

Подобным способом можно оценить асимптотику частичных сумм сходящегося ряда, например:

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{n}}\sim 2\sqrt{n}$$

Выводится это аналогично, просто теперь мы функциями $f(x)$, $f_S(x)$ и $S(x)$ оцениваем не остаток, а частичную сумму.

Лекция 03 от 19.09.2016 Признаки сходимости знакопостоянных и знакопеременных рядов

Граница между сходящимися и расходящимися рядами

На прошлой лекции был сформулирован и доказан следующий признак:

Признак 7 (Интегральный признак Коши–Маклорена)**.** *Пусть $f(x) \geqslant 0$ — невозрастающая на $[1, \infty]$ функция. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ и $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.*

С помощью него мы можем исследовать на сходимость семейство рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

Как и для соответствующего интеграла, ряд сходится тогда и только тогда, когда $\alpha > 1$.

Может сложиться впечатление, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ является своего рода граничным между сходящимися и расходящимися рядами. Но исследуем теперь другой ряд (он нам также понадобится в дальнейшем):

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}.$$

Он сходится тогда и только тогда, когда сходится соответствующий интеграл.

$$\int\limits_{2}^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \int\limits_{2}^{\infty} \frac{1}{\ln x} d \ln x = \ln \ln x \Big|_{2}^{\infty} = \infty$$

Данный ряд меньше, чем гармоничный ряд, однако расходится. Причем, как несложно убедиться, семейство рядов $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^\beta n}$ при $\beta > 1$ уже сходится. Но при этом «граница» между сходящимися и расходящимися рядами не проходит по ряду $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ — взять, например, ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln n}$, который тоже расходится. И так далее, «границу» можно уточнять бесконечно, из чего мы можем сделать вывод, что точной «границы» не существует.

Скорость роста частичных сумм расходящихся рядов

В прошлой лекции мы с помощью интегрального признака Коши–Маклорена научились оценивать остаток сходящихся сумм. Теперь научимся оценивать скорость роста частичных сумм расходящихся рядов.

Возьмем, например, гармонический ряд. Утверждается, что его частичные суммы оцениваются следующим образом:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \ln N + C + o(1),$$

где C эта некая константа. Но как доказать, что это действительно корректная оценка?

Фактически мы утверждаем сходимость последовательности $\{S_n\}$, где

$$S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

Это можно воспринимать как последовательность частичных сумм и, соответственно, перейти к соответствующему ряду:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln n + \ln(n-1) = \frac{1}{n} - \ln\frac{n}{n-1} = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \left(-\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

На последнем шаге мы воспользовались разложением в ряд Тейлора.

Мы получили, что $a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, следовательно, данный ряд сходится. И так как мы построили сходящийся ряд, у которого последовательность $\{S_n\}$ будет последовательностью частичных сумм, данная последовательность также сходится. Что и доказывает нашу оценку.

Точно также можно доказать оценки расходимости частичных сумм следующих рядов:

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n \ln n} = \ln\ln N + C + o(1)$$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \frac{2N^{2/3}}{2} + C + o(1)$$

Признаки сходимости знакопостоянных рядов

Вернемся теперь к признакам сходимости.

Признак 8 (Признак Кумера)**.** *Пусть* a_n, $b_n > 0$ *и* $v_n := \dfrac{a_n}{a_{n+1}} b_n - b_{n+1}$. *Тогда:*

1. *если существует такое* $l > 0$*, что начиная с некоторого места* $v_n \geqslant l$*, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится;*
2. *если начиная с некоторого места* $v_n \leqslant 0$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{b_n}$ *расходится, то и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда наше неравенство выполняется для всех n.

1. Итого, мы имеем, что $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} b_n - b_{n+1} \geqslant l$. Домножим неравенство на a_{n+1}, благо оно положительно:

   $$a_n \cdot b_n - a_{n+1} \cdot b_{n+1} \geqslant l a_{n+1} > 0$$

   Воспользуемся этим, оценив частичную сумму следующего ряда, при $N \in \mathbb{N}$:

   $$\sum_{n=1}^{N} l a_n \leqslant l a_1 + (a_1 b_1 - a_2 b_2) + (a_2 b_2 - a_3 b_3) + \ldots + (a_{N-1} b_{N-1} - a_N b_N) = l a_1 + a_1 b_1 - a_n b_N \leqslant l a_1 + a_1 b_1$$

   Итого, мы получили, что частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} l a_n$ ограничены сверху. Значит, этот ряд сходится и, следовательно, сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

2. Имеем, что $\frac{a_n}{a_{n+1}} b_n - b_{n+1} \leqslant 0$. Перенесем b_{n+1} в правую часть и разделим все на b_n:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

Теперь перевернем дробь:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{1/b_{n+1}}{1/b_n}.$$

По условию ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ расходится, а значит, расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

□

Но признак Куммера особо не используется, он скорее нужен чтобы вывести другие признаки.

Признак 9 (Признак Раабе)**.** *Пусть $a_n > 0$ и существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = A \in [-\infty, +\infty].$$

Тогда:

1. *если $A > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;*
2. *если $A < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.*

Доказательство. Признак Крамера при $b_n = n$. □

Покажем, зачем нужен признак Раабе. Пусть $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$. Тогда:

$$n \left(\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} - 1 \right) = n \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^\alpha - 1 \right) = n \left(1 + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right) \longrightarrow \alpha.$$

Как мы видим, признак Раабе позволяет «ловить» ряды с полиномиальной скоростью роста. И это хорошо, так как раньше мы этого не умели.

Но у этого признака все еще есть «мертвая зона», когда $A = 1$. Поэтому рассмотрим еще один признак, который не имеет «мертвой зоны», но, к сожалению, не всегда применим.

Признак 10 (Признак Гаусса)**.** *Пусть для некоторого $\varepsilon > 0$ и α, $\beta \in \mathbb{R}$ верно, что*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \alpha + \frac{\beta}{b} + o\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}} \right).$$

Тогда:

1. *если $\alpha > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;*
2. *если $\alpha < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится;*
3. *если $\alpha = 1$ и $\beta > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;*
4. *если $\alpha = 1$ и $\beta \leqslant 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.*

Доказательство. Все эти утверждения на самом деле следуют из уже рассмотренных нами признаков. Так что просто назовем их.

1. Признак д'Аламбера.
2. Признак д'Аламбера.
3. Признак Раабе.
4. Если $\beta < 1$ — признак Раабе. Если $\beta = 1$ — признак Куммера при $b_n = n \ln n$.

Рассмотрим подробней последний случай, когда $\alpha = \beta = 1$. Воспользуемся формой из признака Куммера при $b_n = n \ln n$ и равенством из условия:

$$v_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} b_n - b_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)\right) n \ln n - (n+1)\ln(n+1) =$$
$$= (n+1)\left(\ln n - \ln(n+1)\right) + o\left(\frac{lnn}{n^{\varepsilon}}\right) =$$
$$= -(n+1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{lnn}{n^{\varepsilon}}\right) =$$
$$= -(n+1)\left(\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})\right) + o\left(\frac{lnn}{n^{\varepsilon}}\right) \longrightarrow -1$$

Итого, по признаку Куммера ряд действительно расходится. □

Замечание 1. *Вместо* $o\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)$ *можно писать более сильное* $o\left(\frac{1}{n \ln n}\right)$*. Но первое чаще появляется в интересных примерах, поэтому исторически сложилось использовать его.*

Признаки сходимости знакопеременных рядов

Признак 11 (Признак Лейбница)**.** *Пусть последовательность* $\{b_n\}$ *строго монотонно убывает у нулю. Тогда ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$ *сходится, причем его остаток* r_N *имеет знак* $(-1)^{N+1}$ *и по модулю меньше* b_{N+1}.

Доказательство. Докажем с помощью критерия Коши. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем такое $N \in \mathbb{N}$, что для всех $n > N$ верно, что $b_n < \varepsilon$. Теперь для любого $m > N$ и $p \in \mathbb{N}$ рассмотрим следующую величину:

$$\left| \sum_{n=m+1}^{m+p} (-1)^n b_n \right|.$$

Можно вынести $(-1)^{m+1}$ из суммы — на модуль это не повлияет, но зато нам будет удобней считать, что первое слагаемое идет с положительным знаком.

Сгруппируем слагаемые следующим образом:

$$\left| \sum_{n=m+1}^{m+p} (-1)^n b_n \right| = \left| b_{m+1} + (-b_{m+2} + b_{m+3}) + (-b_{m+4} + b_{m+5}) + \ldots \right|.$$

В силу строго монотонного убывания последовательности получаем, что каждая скобка меньше нуля. Последнее слагаемое, b_{m+p} могло остаться без пары, но тогда оно идет с отрицательным знаком. Итого, получаем, что мы с b_{m+1} складываем только отрицательные величины, следовательно:

$$\left| \sum_{n=m+1}^{m+p} (-1)^n b_n \right| \leqslant |b_{m+1}| < \varepsilon.$$

Итого, по критерию Коши ряд сходится. Отсюда же следует оценка на остаток:

$$|r_N| = \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} (-1)^n b_n\right| < b_{N+1}.$$

Осталось только показать, какого он будет знака.

Снова вынесем за скобки знак $(-1)^{N+1}$ (но на этот раз его не убъет модуль), и сгруппируем слагаемые:

$$r_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} (-1)^n b_n = (-1)^{N+1}\big((b_{N+1} - b_{N+2}) + (b_{N+3} - b_{N+4}) + \dots\big).$$

Каждая группа слагаемых больше нуля в силу строго монотонного убывания последовательности. Следовательно, вся скобка имеет положительный знак, а значит, r_N имеет знак $(-1)^{N+1}$. Что нам и требовалось. $\square$