

# Лекция 03 от 19.09.2016

## Признаки сходимости знакопостоянных и знакопеременных рядов

### Граница между сходящимися и расходящимися рядами

На прошлой лекции был сформулирован и доказан следующий признак:

**Признак 1** (Интегральный признак Коши–Маклорена). Пусть  $f(x) \geq 0$  — невозрастающая на  $[1, \infty]$  функция. Тогда  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  и  $\int_1^{\infty} f(x)dx$  сходятся или расходятся одновременно.

С помощью него мы можем исследовать на сходимость семейство рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}.$$

Как и для соответствующего интеграла, ряд сходится тогда и только тогда, когда  $\alpha > 1$ .

Может сложиться впечатление, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  является своего рода граничным между сходящимися и расходящимися рядами. Но исследуем теперь другой ряд (он нам также понадобится в дальнейшем):

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}.$$

Он сходится тогда и только тогда, когда сходится соответствующий интеграл.

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \int_2^{\infty} \frac{1}{\ln x} d \ln x = \ln \ln x \Big|_2^{\infty} = \infty$$

Данный ряд меньше, чем гармоничный ряд, однако расходится. Причем, как несложно убедиться, семейство рядов  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{\beta} n}$  при  $\beta > 1$  уже сходится. Но при этом «граница» между

сходящимися и расходящимися рядами не проходит по ряду  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$  — взять, например, ряд

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln \ln n}$ , который тоже расходится. И так далее, «границу» можно «уточнять» бесконечно. Так что точной «границы» не существует.

### Скорость роста частичных сумм расходящихся рядов

В прошлой лекции мы с помощью интегрального признака Коши–Маклорена научились оценивать остаток сходящихся сумм. Теперь научимся оценивать скорость роста частичных сумм расходящихся рядов.

Возьмем, например, гармонический ряд. Утверждается, что его частичные суммы оцениваются следующим образом:

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = \ln N + C + o(1),$$

где  $C$  — это некая константа. Но как доказать, что это действительно корректная оценка?

Фактически мы утверждаем сходимость последовательности  $\{S_n\}$ , где

$$S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

Это можно воспринимать как последовательность частичных сумм и, соответственно, перейти к соответствующему ряду:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln n + \ln(n-1) = \frac{1}{n} - \ln \frac{n}{n-1} = \frac{1}{n} + \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \left(-\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

На последнем шаге мы воспользовались разложением в ряд Тейлора.

Мы получили, что  $a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ , следовательно, данный ряд сходится. И так как мы построили сходящийся ряд, у которого последовательность  $\{S_n\}$  будет последовательностью частичных сумм, данная последовательность также сходится. Что и доказывает нашу оценку.

Точно также можно доказать оценки расходимости частичных сумм следующих рядов:

$$\sum_{n=2}^N \frac{1}{n \ln n} = \ln \ln N + C + o(1)$$

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \frac{2N^{2/3}}{2} + C + o(1)$$

## Снова признаки сходимости знакопостоянных рядов

Вернемся теперь к признакам сходимости.

**Признак 2** (Признак Кумера). Пусть  $a_n, b_n > 0$  и  $v_n := \frac{a_n}{a_{n+1}}b_n - b_{n+1}$ . Тогда:

1. если существует такое  $l > 0$ , что начиная с некоторого места  $v_n \geq l$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится;
2. если начиная с некоторого места  $v_n \leq 0$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$  расходится, то и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  расходится.

*Доказательство.* Достаточно рассмотреть случай, когда наше неравенство выполняется для всех  $n$ .

1. Итого, мы имеем, что  $\frac{a_n}{a_{n+1}}b_n - b_{n+1} \geq l$ . Домножим неравенство на  $a_{n+1}$ , благо оно положительно:

$$a_n \cdot b_n - a_{n+1} \cdot b_{n+1} \geq la_{n+1} > 0$$

Воспользуемся этим, оценив частичную сумму следующего ряда, при  $N \in \mathbb{N}$ :

$$\sum_{n=1}^N la_n \leq la_1 + (a_1b_1 - a_2b_2) + (a_2b_2 - a_3b_3) + \dots + (a_{N-1}b_{N-1} - a_Nb_N) = la_1 + a_1b_1 - a_Nb_N \leq la_1 + a_1b_1$$

Итого, мы получили, что частичные суммы ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} la_n$  ограничены сверху. Значит, этот ряд сходится и, следовательно, сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

2. Имеем, что  $\frac{a_n}{a_{n+1}}b_n - b_{n+1} \leq 0$ . Перенесем  $b_{n+1}$  в правую часть и разделим все на  $b_n$ :

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

Теперь перевернем дробь:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{1/b_{n+1}}{1/b_n}.$$

По условию ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$  расходится, а значит признак сравнения дает расходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

□

Но признак Куммера особо не используется, он скорее нужен, чтобы вывести другие признаки.

**Признак 3** (Признак Раабе). Пусть  $a_n > 0$  и существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = A \in [-\infty, +\infty].$$

Тогда:

1. если  $A > 1$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится;
2. если  $A < 1$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  расходится.

*Доказательство.* Признак Куммера при  $b_n = n$ .

□

Покажем, зачем нужен признак Раабе. Пусть  $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ . Тогда:

$$n \left( \frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} - 1 \right) = n \left( \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^\alpha - 1 \right) = n \left( 1 + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right) \rightarrow \alpha.$$

Как мы видим, признак Раабе позволяет «ловить» ряды с полиномиальной скоростью роста. И это хорошо, так как раньше мы этого не умели.

Но у этого признака все еще есть «мертвая зона», когда  $A = 1$ . Поэтому рассмотрим еще один признак, который не имеет «мертвой зоны», но, к сожалению, не всегда применим.

**Признак 4** (Признак Гаусса). Пусть для некоторого  $\varepsilon > 0$  и  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  верно, что

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \alpha + \frac{\beta}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right).$$

Тогда:

1. если  $\alpha > 1$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится;
2. если  $\alpha < 1$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  расходится;
3. если  $\alpha = 1$  и  $\beta > 1$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится;

4. если  $\alpha = 1$  и  $\beta \leq 1$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  расходится.

*Доказательство.* Все эти утверждения на самом деле следуют из уже рассмотренных нами признаков. Так что просто назовем их.

1. Признак д'Аламбера.
2. Признак д'Аламбера.
3. Признак Раабе.
4. Если  $\beta < 1$  — признак Раабе. Если  $\beta = 1$  — признак Куммера при  $b_n = n \ln n$ .

Рассмотрим подробнее последний случай, когда  $\alpha = \beta = 1$ . Воспользуемся признаком Куммера при  $b_n = n \ln n$  и равенством из условия:

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{a_n}{a_{n+1}} b_n - b_{n+1} = \left( 1 + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right) \right) n \ln n - (n+1) \ln(n+1) = \\ &= (n+1) (\ln n - \ln(n+1)) + O\left(\frac{\ln n}{n^\varepsilon}\right) = \\ &= -(n+1) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{\ln n}{n^\varepsilon}\right) = \\ &= -(n+1) \left( \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) + O\left(\frac{\ln n}{n^\varepsilon}\right) \rightarrow -1 \end{aligned}$$

Итого, по признаку Куммера ряд действительно расходится. □

**Замечание 1.** Вместо  $O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)$  можно писать более сильное  $O\left(\frac{1}{n \ln n}\right)$ . Но первое чаще появляется в интересных примерах, поэтому исторически сложилось использовать его.

## Признаки сходимости знакопеременных рядов

**Признак 5** (Признак Лейбница). Пусть последовательность  $\{b_n\}$  строго монотонно убывает у нуля. Тогда ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$  сходится, причем его остаток  $r_N$  имеет знак  $(-1)^{N+1}$  и по модулю меньше  $b_{N+1}$ .

*Доказательство.* Докажем с помощью критерия Коши. Зафиксируем произвольное  $\varepsilon > 0$  и найдем такое  $N \in \mathbb{N}$ , что для всех  $n > N$  верно, что  $b_n < \varepsilon$ . Теперь для любого  $m > N$  и  $p \in \mathbb{N}$  рассмотрим следующую величину:

$$\left| \sum_{n=m+1}^{m+p} (-1)^n b_n \right|.$$

Можно вынести  $(-1)^{m+1}$  из суммы — на модуль это не повлияет, но зато нам будет удобнее считать, что первое слагаемое идет с положительным знаком.

Сгруппируем слагаемые следующим образом:

$$\left| \sum_{n=m+1}^{m+p} (-1)^n b_n \right| = |b_{m+1} + (-b_{m+2} + b_{m+3}) + (-b_{m+4} + b_{m+5}) + \dots|.$$

В силу строго монотонного убывания последовательности получаем, что каждая скобка меньше нуля. Последнее слагаемое,  $b_{m+p}$  могло остаться без пары, но тогда оно идет с отрицательным знаком. Итого, получаем, что мы с  $b_{m+1}$  складываем только отрицательные величины, следовательно:

$$\left| \sum_{n=m+1}^{m+p} (-1)^n b_n \right| \leq |b_{m+1}| < \varepsilon.$$

Итого, по критерию Коши ряд сходится. Отсюда же следует оценка на остаток:

$$|r_N| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} (-1)^n b_n \right| \leq b_{N+1}.$$

Аналогичным образом оценим остаток знака.

Снова вынесем за скобки знак  $(-1)^{N+1}$  (но на этот раз его не убьет модуль), и сгруппируем слагаемые:

$$r_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} (-1)^n b_n = (-1)^{N+1} ((b_{N+1} - b_{N+2}) + (b_{N+3} - b_{N+4}) + \dots).$$

Каждая группа слагаемых больше нуля в силу строго монотонного убывания последовательности. Следовательно, вся скобка имеет положительный знак, а значит,  $r_N$  имеет знак  $(-1)^{N+1}$ . Что нам и требовалось.  $\square$