Лекция 09 от 07.11.2016
Предел по базе

Все пределы, которые раньше возникали в нашем курсе — это частные случаи предела по базе.

Что это такое?

Пусть X — произвольное непустое множество.

Определение 1. *Система подмножеств $\mathcal{B}$ множества X называется базой, если*

1. $\varnothing \notin \mathcal{B}$;
2. $\forall B_1,\ B_2 \in \mathcal{B}\ \exists B_3 \in \mathcal{B}:\ B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Замечание 1. *В классическом понимании символ $\subset$ означает строгое включение, однако в современной математике это также может означать равенство множеств, и мы будем пользоваться именно этим значением. Если хотят подчеркнуть, что множества не равны, то пишут $\subsetneq$.*

Пусть функция f определена на X или части X и принимает действительные значения (впрочем, действительность не принципиальна).

Определение 2. *Число A называют пределом функции f по базе $\mathcal{B}$, если*

0. $\exists B \in \mathcal{B} : f$ *определена на* B;
1. $\forall \varepsilon > 0\ \exists B \in \mathcal{B} : \forall x \in B\ |f(x) - A| < \varepsilon$.

Вообще говоря, нулевое условие можно опустить, так как оно следует из первого, но исторически сложилось, что его все-таки пишут — на практике гораздо удобней сначала проверить, определена ли функция хоть где-то.

Пример 1.

- $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n=1}^{\infty}$, $B_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$. *Тогда* $B_n \cap B_m = B_{\max(n,m)}$. *Такая база задает предел числовой последовательности.*
- $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{B} = \{B_\delta\}_{\delta>0}$, $B_\delta = (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$. *Такая база задает двусторонний предел функции при $x \to 0$. Аналогично можно задать односторонние пределы.*
- *Пусть зафиксирован отрезок $[a, b]$ и $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.*

  Пусть X — множество всех отмеченных разбиений $[a, b]$ (то есть это разбиения с зафиксированной точкой на каждом отрезке). Тогда базой Римана называется база $\mathcal{B} = \{B_\delta\}_{\delta>0}$, где B_δ это совокупность всех отмеченных разбиений с диаметром меньше δ. Соответственно, интеграл Риман является пределом по этой базе интегральных сумм Римана, рассматриваемых как функция от отмеченных разбиений при фиксированной функции f:

$$\sigma(f, (\tau, \xi)) = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)|\Delta_j|.$$

Ключевые свойства

Пусть $\mathcal{B}$ — база X.

Утверждение 1. *Если* $\lim\limits_{\mathcal{B}} f = A_1$ *и* $\lim\limits_{\mathcal{B}} f = A_2$*, то* $A_1 = A_2$.

Доказательство. Пусть $A_1 \neq A_2$. Положим $\varepsilon = \frac{|A_1 - A_2|}{2}$. Тогда:

$$\exists B_1 \in \mathcal{B} : \forall x \in B_1 \ |f(x) - A_1| < \varepsilon;$$
$$\exists B_2 \in \mathcal{B} : \forall x \in B_2 \ |f(x) - A_2| < \varepsilon.$$

Тогда существует $B_3 \in \mathcal{B}$ такой, что $B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Для него будет верно, что

$$\forall x \in B_3 : \ |A_1 - A_2| = |A_1 - f(x) + f(x) - A_2| \leqslant |A_1 - f(x)| + |A_2 - f(x)| < 2\varepsilon = |A_1 - A_2|.$$

При этом важно понимать, что $B_3 \neq \varnothing$, просто по определению.

Получили противоречие. □

Давно знакомое всем доказательство, но зато оно показывает, почему база определена именно так.

Утверждение 2. *Пусть* $\lim\limits_{\mathcal{B}} f(x) = A$*,* $\lim\limits_{\mathcal{B}} g(x) = B$ *и* $\alpha \in \mathbb{R}$*. Тогда:*

1. $\lim\limits_{\mathcal{B}}(f + g) = A + B$;
2. $\lim\limits_{\mathcal{B}}(fg) = AB$;
3. $\lim\limits_{\mathcal{B}}(\alpha f) = \alpha A$;
4. $\lim\limits_{\mathcal{B}} \dfrac{f}{g} = \dfrac{A}{B}$, *если* $B \neq 0$.

Доказательство. Это тоже почти школьный материал, так что докажем только один пункт. Пусть это будет последний.

Немного преобразуем:

$$\frac{f}{g} - \frac{A}{B} = \frac{Bf - Ag}{gB} = \frac{Bf - BA + BA - Ag}{gB} = \frac{B(f - A) + A(B - g)}{gB}.$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Положим $\varepsilon_1 = \min\left(\dfrac{\varepsilon B^2}{100(|A| + |B|) + 1}; \dfrac{|B|}{2}\right)$. Найдем такие B_1, $B_2 \in \mathcal{B}$, что:

$$\forall x \in B_1 : |f(x) - A| < \varepsilon_1;$$
$$\forall x \in B_2 : |g(x) - B| < \varepsilon_1.$$

Найдем такое $B_3 \in \mathcal{B}$, что $B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Тогда для всех $x \in B_3$ верно, что:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B}\right| \leqslant \frac{|B|\varepsilon_1 + |A|\varepsilon_1}{B^2/2} = \varepsilon_1 \frac{2(|A| + |B|)}{B^2} < \varepsilon.$$

□

Утверждение 3. *Если существует предел* $\lim\limits_{\mathcal{B}} f$ *и функция* f *неотрицательна хотя бы на одном элементе* B *базы* $\mathcal{B}$*, то* $\lim\limits_{\mathcal{B}} f \geqslant 0$*.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{\mathcal{B}} f = A < 0$. Тогда для $\varepsilon = \frac{|A|}{2}$ существует такой $\widetilde{B} \in \mathcal{B}$, что $\forall x \in \widetilde{B}: \ |f(x) - A| < \varepsilon$.

Но существует $x \in B \cap \widetilde{B}$, и тогда для него одновременно будет верно, что $f(x) \geqslant 0$ и $f(x) \leqslant \frac{A}{2} < 0$. Противоречие. ☐

Следствие 1. *Пусть* $f \geqslant g$ *на некотором элементе* $B \in \mathcal{B}$ *и существуют пределы* $\lim\limits_{\mathcal{B}} f = A$ *и* $\lim\limits_{\mathcal{B}} g = \widetilde{A}$*. Тогда* $A \geqslant \widetilde{A}$*.*

Доказательство. $\lim\limits_{\mathcal{B}}(f - g) = A - \widetilde{A}$ и одновременно, $(f - g) \geqslant 0$ на B. ☐

Пусть $\mathcal{B}$ и $\widetilde{\mathcal{B}}$ — базы на X.

Утверждение 4. *Пусть* $\lim\limits_{\mathcal{B}} f = A$ *и для каждого элемента* $B \in \mathcal{B}$ *существует элемент* $\widetilde{B} \in \widetilde{\mathcal{B}}$ *такой, что* $\widetilde{B} \subset B$*. Тогда* $\lim\limits_{\widetilde{\mathcal{B}}} f = A$*.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Найдем $B \in \mathcal{B}$ такое, что $\forall x \in B : |f(x) - A| < \varepsilon$. Теперь найдем $\widetilde{B} \in \widetilde{\mathcal{B}}$ такое, что $\widetilde{B} \subset B$. Тогда $\forall x \in \widetilde{B} : |f(x) - A| < \varepsilon$. Получили по определению предела, что $\lim\limits_{\widetilde{\mathcal{B}}} f = A$. ☐

Фактически это обобщение утверждения, что любая подпоследовательность сходится туда же, куда и вся последовательность, и что если есть предел, то есть и оба односторонних предела, и они все равны.

Ну а где есть предел, там есть и критерий Коши!

Критерий Коши

Определение 3. *Функция* f *удовлетворяет условию Коши по базе* $\mathcal{B}$*, если:*

0. $\exists B_0 \in \mathcal{B} : f$ *определена на* B_0*;*
1. $\forall \varepsilon > 0 : \exists B \in \mathcal{B} : \forall x, \widetilde{x} \in B \ |f(x) - f(\widetilde{x})| < \varepsilon$*.*

Теорема 1 (Критерий Коши)**.** *Следующие условия эквивалентны:*

1. *существует предел* $\lim\limits_{\mathcal{B}} f$*;*
2. *функция* f *удовлетворяет условию Коши по базе* $\mathcal{B}$*.*

Доказательство. Напоминаем, что мы пока определили только конечные пределы по базе.

(1) $\Rightarrow$ (2). Доказываем как обычно, через $\varepsilon/2$ и прочее.

(2) $\Rightarrow$ (1). Построим последовательность $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \ldots$:

$$\begin{aligned}
\text{для } \varepsilon = 1,\ & \exists B_1 \in \mathcal{B} : \forall x, \widetilde{x} \in B_1\ |f(x) - f(\widetilde{x})| < 1;\\
\text{для } \varepsilon = 1/2,\ & \exists \widetilde{B_2} \in \mathcal{B} : \forall x, \widetilde{x} \in \widetilde{B_2}\ |f(x) - f(\widetilde{x})| < 1/2,\\
& \exists B_2 \subset B_1 \cap \widetilde{B_2} :\ \text{тогда } \forall x, \widetilde{x} \in B_2\ |f(x) - f(\widetilde{x})| < 1/2;\\
\text{для } \varepsilon = 1/3,\ & \exists \widetilde{B_3} \in \mathcal{B} : \forall x, \widetilde{x} \in \widetilde{B_3}\ |f(x) - f(\widetilde{x})| < 1/3,\\
& \exists B_3 \subset B_2 \cap \widetilde{B_3} :\ \text{тогда } \forall x, \widetilde{x} \in B_3\ |f(x) - f(\widetilde{x})| < 1/3;\\
& \ldots
\end{aligned}$$

Для каждого элемента B_n выберем точку $x_n \in B_n$. Заметим, что $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальная последовательность, так как

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N},:\ \frac{1}{N} < \varepsilon \Rightarrow \forall n, m > N\ |f(x_n) - f(x_m)| < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Это верно, так как $x_n \in B_n \subset B_N$ и аналогично для x_m.

Значит, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Покажем, что $\lim\limits_{\mathcal{B}} f = A$.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N\ |f(x_n) - A| < \varepsilon/2.$$

При этом, существует такое $n > N$, что $\dfrac{1}{n} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Значит,

$$\forall x \in B_n \in \mathcal{B} : |f(x) - A| \leqslant |f(x) - f(x_n)| + |f(x_n) - A| < \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

$\square$