

Лекция 13 от 12.12.2016

Разложение функций в степенные ряды

В предыдущей лекции мы говорили о таком понятии, как степенные ряды. Продолжим.

Рассмотрим степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$, но для удобства сдвинем его центр, точку x_0 , в нуль, получив тем самым ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Рассмотрим к этому ряду другой ряд, составленный из производных исходного ряда (впредь будем его именовать «новым» рядом). Он будет иметь вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} x^n$$

Утверждение 1. Радиус сходимости нового ряда и исходного совпадают

Доказательство. Очевидно, что проверка исходного условия ничем не отличается от проверки на ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^n$. Тогда по формуле Коши-Адамара:

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|n}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}}_{\rightarrow 1}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$$

А это и есть исходный радиус. □

Выведем отсюда следствие, которое назовём теоремой.

Теорема 1. Внутри интервала сходимости сумма степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ дифференцируема и её производная равна $\sum_{n=0}^{\infty} c_n n x^{n-1}$.

Доказательство. Возьмём произвольную точку x из интервала сходимости. Найдём такое $\delta > 0$, такое, что $[x - \delta, x + \delta]$ лежит в интервале сходимости и используем теорему о почленном дифференцировании функциональных рядов. □

Следствие 1. Внутри интервала сходимости сумма степенного ряда бесконечно дифференцируема, и её k -я производная совпадает с суммой ряда из k -х производных.

Следствие 2. Сумма ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ имеет тот же радиус сходимости, что и исходный ряд, и внутри интервала сходимости является первообразной суммы исходного ряда.

Следствие 3. Пусть $[a, b]$ лежит в интервале сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Тогда

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b c_n x^n dx.$$

Далее будем рассматривать такие функции, которые представимы как сумма степенного ряда.

Утверждение 2. Пусть I — невырожденный промежуток. Если функция f представима в виде суммы степенного ряда, то она бесконечно дифференцируема.

Доказательство. Действительно, будем поочерёдно дифференцировать левую и правую части нашего равенства функции и её степенного ряда:

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \\ S'(0) &= c_1 \\ S''(0) &= c_2 \cdot 2! \\ &\dots \\ S^{(n)}(0) &= c_n \cdot n! \end{aligned}$$

□

Отсюда же сразу следует, что если функция представима в виде степенного ряда на некотором множестве, то этот ряд совпадает с её рядом Тейлора. Вспомним пример Коши, функции, которая представима в ряд Тейлора лишь в точке 0:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Следствие 4. Если суммы степенных рядов $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_n x^n$ совпадают в некоторой окрестности нуля, то эти ряды совпадают

Доказательство.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_n x^n$$

А в силу единственности разложения на невырожденном промежутке получим требуемое. □

Замечание 1. Совпадение в окрестности нуля тут можно заменить на совпадение в точках $x_n \neq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$:

$$c_0 = S(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{S}(x_n) = \tilde{S}(0) = \tilde{c}_0$$

Сформулируем и докажем важную теорему:

Теорема 2. Пусть I — невырожденный промежуток и $f \in C^\infty(I)$, $x_0 \in I$. Также пусть известно, что $\exists A, B > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |f^{(n)}| < A \cdot B^n$. Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = f(x)$$

на промежутке I .

Перед доказательством заметим, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C^n}{n!}$ сходится по признаку Д'Аламбера для всякого положительного C .

Доказательство. Запишем разность частичной суммы ряда и значения функции:

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \right| = \left| \frac{f^{(N+1)}(\xi)(x - x_0)^{N+1}}{(N+1)!} \right| \leq \frac{AB^{N+1}|x - x_0|^{N+1}}{(N+1)!}$$

Эта разность в свою очередь стремится к нулю. \square

Пример 1. 1. $\sin(x)$ и $\cos(x)$. Ограничивая производные константой 1, получим требуемое:

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \cos(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

2. e^x . Пусть $A > 0$ — произвольное число. Тогда на промежутке $(-A, A)$ ряд сходится, если мы применим ограничение производных как e^A .

3. $\ln(1+x)$. «С ним всё грустно» © Лектор. Можно воспользоваться вспомогательным рядом:

$$\frac{1}{x+1} = 1 - x + x^2 - \dots$$

который сходится на $(-1, 1)$ как геометрическая прогрессия, а затем почленно проинтегрировать, получим

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$