Лекция 08 от 31.10.2016
Функциональные ряды. Признаки сходимости

Довольно естественно желание понимать, когда ряд сходится, а когда нет. Для числовых рядов мы рассмотрели большое количество разнообразных признаков сходимости. Аналогично, изучим несколько признаков сходимости функциональных рядов.

Признак Вейерштрасса

Признак 1 (Признак Вейерштрасса). *Пусть существует последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ такая, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $|f_n(x)| < a_n$, и кроме того, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на множестве X, и $\forall x \in X$ числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится абсолютно.*

Доказательство. Вторая часть прямо следует из доказанных в самом начале признаков сравнения. Осталось доказать равномерную сходимость.

Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Из критерия Коши для числовых рядов следует, что $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n > N,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \sum\limits_{n+1}^{n+p} a_n < \varepsilon$.

Тогда $\forall m > N, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in X$:

$$\left|\sum_{m+1}^{m+p} f_n(x)\right| < \sum_{m}^{m+p} |f_n(x)| < \sum_{m+1}^{m+p} a_m < \varepsilon.$$

То есть по критерию Коши для функциональных рядов наш ряд равномерно сходится. □

Примеры рядов, которые не ловятся п. Вейерштрасса

А существует ли равномерно сходящийся ряд, который не ловится признаком Вейерштрасса? Конечно. Например:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \qquad X = \{-1\}.$$

Если хочется, чтобы ряд был неотрицательный, можно пойти на хитрость. Возьмем последовательность $\{f_n\}$ такую, что

$$f_n(x) = \begin{cases} 1/n, & x = n; \\ 0, & x \neq n. \end{cases}$$

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ не будет сходиться равномерно.

Подобный подход можно распространить на непрерывные функции $f_n(x)$ — например, они могут задавать равнобедренные треугольники, стоящие на оси OX, с непересекающимися основаниями и постепенно убывающей высотой (например, то же $1/n$).

Хотя классическими примерами, конечно же, являются следующие ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}.$$

Признак Дирихле

Признак 2 (Признак Дирихле)**.** *Для равномерной сходимости на X ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялась пара условий:*

1. *последовательность частичных сумм $\sum\limits_{n=1}^{k} a_n(x)$ равномерно ограничена на X, то есть $\exists C > 0 : \forall N \in \mathbb{N}\ \forall x \in X : \ \left|\sum\limits_{n=1}^{N} a_n(x)\right| < C$;*
2. *последовательность функций $\{b_n(x)\}$ монотонна для любого $x \in X$ и равномерно сходится к нулю на X.*

Доказательство. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Положим $\varepsilon_1 := \frac{\varepsilon}{4C}$. Найдём такое $N \in \mathbb{N}$, что $\forall n > N, \forall x \in X : \ |b_n(x)| < \varepsilon_1$. Тогда $\forall m > N, \forall p \in \mathbb{N}, \ \forall x \in X$:

$$\left|\sum_{n=m+1}^{m+p} a_n(x)b_n(x)\right| = \left|A_{m+p}(x)b_{m+p}(x) - A_m(x)b_{m+1}(x) + \sum_{n=m+1}^{m+p-1} A_n(x)(b_n(x) - b_{n+1}(x))\right| \leqslant$$

$$\leqslant C\varepsilon_1 + C\varepsilon_1 + C\sum_{n=m+1}^{m+p-1} |b_n(x) - b_{n+1}(x)| = \frac{\varepsilon}{2} + C\,|b_{n+1}(x) - b_{m+p}(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + 2C\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon.$$

Здесь мы воспользовались преобразованием Абеля (см. лекцию 4), а также тем, что последовательность $b_n(x)$ монотонна, поэтому в последней сумме все знаки раскроются с одинаковым знаком. □

Признак Абеля

Признак 3 (Признак Абеля)**.** *Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ сходится равномерно, если выполнены следующие условия:*

1. *ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равномерно сходится;*
2. *последовательность функций $\{b_n(x)\}$ равномерно ограничена и монотонна $\forall x \in X$.*

Доказательство. Доказать так же, как в случае числовых рядов, не получится. Действительно, если разложить функции b_n как $b_n(x) = b(x) + e_n(x)$, то последовательность $\{e_n(x)\}$ не обязательно равномерно сходится к нулю. Например, при $b_n(x) = x^n$ на множестве $X = \{0, 1\}$.

Доказательство, естественно, очень похоже на доказательство предыдущего признака.

Так как $\{b_n(x)\}$ равномерно ограничена, то $\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X : \ |b_n(x)| < C$.

Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Положим $\varepsilon_1 := \frac{\varepsilon}{4C}$. Найдём такое $N \in \mathbb{N}$, что $\forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in X : \ \left|\sum\limits_{n=m+1}^{m+p} a_n(x)\right| < \varepsilon_1$.

Положим для $n > N : \tilde{A}_n(x) = a_{N+1}(x) + \dots + a_n(x)$, $\tilde{A}_N(x) = 0$.

Очевидно, что $\forall n \geqslant N, \forall x \in X : |\tilde{A}_n(x)| < \varepsilon_1$. Тогда $\forall m > N, \forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in X$:

$$\left|\sum_{n=m+1}^{m+p} a_n(x)b_n(x)\right| = \left|(\tilde{A}_n(x) - \tilde{A}_{n-1}(x))b_n(x)\right| =$$

$$= \left|\tilde{A}_{m+p}(x)b_{m+p}(x) - \tilde{A}_m(x)b_{m+1}(x) + \sum_{n=m+1}^{m+p-1} \tilde{A}_n(x)(b_n(x) - b_{n+1}(x))\right| \leqslant$$

$$\leqslant C\varepsilon_1 + C\varepsilon_1 + \varepsilon_1 \sum_{n=m+1}^{m+p-1} |b_n(x) - b_{n+1}(x)| = \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon_1 \left|b_{n+1}(x) - b_{m+p}(x)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + 2C\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon.$$

□

Рассмотрим один из классических примеров, который мы упоминали в начале лекции.

Пример 1. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ *равномерно сходится на* $X = (\alpha, 2\pi - \alpha), \alpha > 0$.

Доказательство. Здесь применим признак Дирихле. Действительно, пусть $a_n(x) = \sin nx$, а $b_n(x) = 1/n$. Тогда $|A_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{\sin \frac{x}{2}} \leqslant \dfrac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} < C$, а с $b_n(x)$ все очевидно. □

С другой стороны:

Пример 2. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ *не сходится равномерно на* $X = (0, 2\pi)$.

Доказательство. Здесь признак Дирихле уже не применим. Опровержение можно построить, используя признак Коши.

Возьмем $\varepsilon = 1/100$. Тогда $\forall N \in \mathbb{N}$ зафиксируем $m = N + 1$, $p = m$, $x = \pi/4m$. Получаем:

$$\left|\sum_{n=m+1}^{m+p} \frac{\sin nx}{n}\right| \geqslant \frac{m\sqrt{2}/2}{2m} \geqslant \varepsilon.$$

□