

Лекция 09 от 07.11.2016

Предел по базе

Все пределы, которые раньше возникали в нашем курсе — это частные случаи предела по базе.

Что это такое?

Пусть X — произвольное непустое множество.

Определение 1. Система подмножеств \mathcal{B} множества X называется базой, если

1. $\emptyset \notin \mathcal{B}$;
2. $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} \exists B_3 \in \mathcal{B} : B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Замечание 1. В классическом понимании символ \subset означает строгое включение, однако в современной математике это также может означать равенство множеств, и мы будем пользоваться именно этим значением. Если хотят подчеркнуть, что множества не равны, то пишут \subsetneq .

Пусть функция f определена на X или части X и принимает действительные значения (впрочем, действительность не принципиальна).

Определение 2. Число A называют пределом функции f по базе \mathcal{B} , если

0. $\exists B \in \mathcal{B} : f$ определена на B ;
1. $\forall \varepsilon > 0 \exists B \in \mathcal{B} : \forall x \in B |f(x) - A| < \varepsilon$.

Вообще говоря, нулевое условие можно опустить, так как оно следует из первого, но исторически сложилось, что его все-таки пишут — на практике гораздо удобнее сначала проверить, определена ли функция хоть где-то.

Пример 1.

- $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n=1}^{\infty}$, $B_n = \{n, n+1, n+2, \dots\}$. Тогда $B_n \cap B_m = B_{\max(n,m)}$. Такая база задает предел числовой последовательности.
- $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{B} = \{B_\delta\}_{\delta>0}$, $B_\delta = (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$. Такая база задает двусторонний предел функции при $x \rightarrow 0$. Аналогично можно задать односторонние пределы.
- Пусть зафиксирован отрезок $[a, b]$ и $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Пусть X — множество всех отмеченных разбиений $[a, b]$ (то есть это разбиения с зафиксированной точкой на каждом отрезке). Тогда базой Римана называется база $\mathcal{B} = \{B_\delta\}_{\delta>0}$, где B_δ это совокупность всех отмеченных разбиений с диаметром меньше δ . Соответственно, интеграл Римана является пределом по этой базе интегральных сумм Римана, рассматриваемых как функция от отмеченных разбиений при фиксированной функции f :

$$\sigma(f, (\tau, \xi)) = \sum_{j=1}^n f(\xi_j) |\Delta_j|.$$

Ключевые свойства

Пусть \mathcal{B} — база X .

Утверждение 1. Если $\lim_{\mathcal{B}} f = A_1$ и $\lim_{\mathcal{B}} f = A_2$, то $A_1 = A_2$.

Доказательство. Пусть $A_1 \neq A_2$. Положим $\varepsilon = \frac{|A_1 - A_2|}{2}$. Тогда:

$$\exists B_1 \in \mathcal{B} : \forall x \in B_1 \quad |f(x) - A_1| < \varepsilon;$$

$$\exists B_2 \in \mathcal{B} : \forall x \in B_2 \quad |f(x) - A_2| < \varepsilon.$$

Тогда существует $B_3 \in \mathcal{B}$ такой, что $B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Для него будет верно, что

$$\forall x \in B_3 : |A_1 - A_2| = |A_1 - f(x) + f(x) - A_2| \leq |A_1 - f(x)| + |A_2 - f(x)| < 2\varepsilon = |A_1 - A_2|.$$

При этом важно понимать, что $B_3 \neq \emptyset$, просто по определению.

Получили противоречие. □

Давно знакомое всем доказательство, но зато оно показывает, почему база определена именно так.

Утверждение 2. Пусть $\lim_{\mathcal{B}} f(x) = A$, $\lim_{\mathcal{B}} g(x) = B$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда:

$$1. \lim_{\mathcal{B}} (f + g) = A + B;$$

$$2. \lim_{\mathcal{B}} (fg) = AB;$$

$$3. \lim_{\mathcal{B}} (\alpha f) = \alpha A;$$

$$4. \lim_{\mathcal{B}} \frac{f}{g} = \frac{A}{B}, \text{ если } B \neq 0.$$

Доказательство. Это тоже почти школьный материал, так что докажем только один пункт. Пусть это будет последний.

Немного преобразуем:

$$\frac{f}{g} - \frac{A}{B} = \frac{Bf - Ag}{gB} = \frac{Bf - BA + BA - Ag}{gB} = \frac{B(f - A) + A(B - g)}{gB}.$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Положим $\varepsilon_1 = \min \left(\frac{\varepsilon B^2}{100(|A| + |B|) + 1}; \frac{|B|}{2} \right)$. Найдем такие $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, что:

$$\forall x \in B_1 : |f(x) - A| < \varepsilon_1;$$

$$\forall x \in B_2 : |g(x) - B| < \varepsilon_1.$$

Найдем такое $B_3 \in \mathcal{B}$, что $B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Тогда для всех $x \in B_3$ верно, что:

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B} \right| \leq \frac{|B|\varepsilon_1 + |A|\varepsilon_1}{B^2/2} = \varepsilon_1 \frac{2(|A| + |B|)}{B^2} < \varepsilon.$$

□

Утверждение 3. Если существует предел $\lim_B f$ и функция f неотрицательна хотя бы на одном элементе B базы \mathcal{B} , то $\lim_B f \geq 0$.

Доказательство. Пусть $\lim_B f = A < 0$. Тогда для $\varepsilon = \frac{|A|}{2}$ существует такой $\tilde{B} \in \mathcal{B}$, что $\forall x \in \tilde{B} : |f(x) - A| < \varepsilon$.

Но существует $x \in B \cap \tilde{B}$, и тогда для него одновременно будет верно, что $f(x) \geq 0$ и $f(x) \leq \frac{A}{2} < 0$. Противоречие. \square

Следствие 1. Пусть $f \geq g$ на некотором элементе $B \in \mathcal{B}$ и существуют пределы $\lim_B f = A$ и $\lim_B g = \tilde{A}$. Тогда $A \geq \tilde{A}$.

Доказательство. $\lim_B (f - g) = A - \tilde{A}$ и одновременно, $(f - g) \geq 0$ на B . \square

Пусть \mathcal{B} и $\tilde{\mathcal{B}}$ — базы на X .

Утверждение 4. Пусть $\lim_B f = A$ и для каждого элемента $B \in \mathcal{B}$ существует элемент $\tilde{B} \in \tilde{\mathcal{B}}$ такой, что $\tilde{B} \subset B$. Тогда $\lim_{\tilde{\mathcal{B}}} f = A$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Найдем $B \in \mathcal{B}$ такое, что $\forall x \in B : |f(x) - A| < \varepsilon$. Теперь найдем $\tilde{B} \in \tilde{\mathcal{B}}$ такое, что $\tilde{B} \subset B$. Тогда $\forall x \in \tilde{B} : |f(x) - A| < \varepsilon$. Получили по определению предела, что $\lim_{\tilde{\mathcal{B}}} f = A$. \square

Фактически это обобщение утверждения, что любая подпоследовательность сходится туда же, куда и вся последовательность, и что если есть предел, то есть и оба односторонних предела, и они все равны.

Ну а где есть предел, там есть и критерий Коши!

Критерий Коши

Определение 3. Функция f удовлетворяет условию Коши по базе \mathcal{B} , если:

0. $\exists B_0 \in \mathcal{B} : f$ определена на B_0 ;
1. $\forall \varepsilon > 0 : \exists B \in \mathcal{B} : \forall x, \tilde{x} \in B : |f(x) - f(\tilde{x})| < \varepsilon$.

Теорема 1 (Критерий Коши). Следующие условия эквивалентны:

1. существует предел $\lim_B f$;
2. функция f удовлетворяет условию Коши по базе \mathcal{B} .

Доказательство. Напоминаем, что мы пока определили только конечные пределы по базе.

(1) \Rightarrow (2). Доказываем как обычно, через $\varepsilon/2$ и прочее.

(2) \Rightarrow (1). Построим последовательность $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \dots$:

$$\begin{aligned} & \text{для } \varepsilon = 1, \exists B_1 \in \mathcal{B} : \forall x, \tilde{x} \in B_1 \ |f(x) - f(\tilde{x})| < 1; \\ & \text{для } \varepsilon = 1/2, \exists \widetilde{B_2} \in \mathcal{B} : \forall x, \tilde{x} \in \widetilde{B_2} \ |f(x) - f(\tilde{x})| < 1/2, \\ & \quad \exists B_2 \subset B_1 \cap \widetilde{B_2} : \text{тогда } \forall x, \tilde{x} \in B_2 \ |f(x) - f(\tilde{x})| < 1/2; \\ & \text{для } \varepsilon = 1/3, \exists \widetilde{B_3} \in \mathcal{B} : \forall x, \tilde{x} \in \widetilde{B_3} \ |f(x) - f(\tilde{x})| < 1/3, \\ & \quad \exists B_3 \subset B_2 \cap \widetilde{B_3} : \text{тогда } \forall x, \tilde{x} \in B_3 \ |f(x) - f(\tilde{x})| < 1/3; \\ & \quad \dots \end{aligned}$$

Для каждого элемента B_n выберем точку $x_n \in B_n$. Заметим, что $\{f(x_n)\}_{n=1}^\infty$ — фундаментальная последовательность, так как

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \frac{1}{N} < \varepsilon \Rightarrow \forall n, m > N \ |f(x_n) - f(x_m)| < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Это верно, так как $x_n \in B_n \subset B_N$ и аналогично для x_m .

Значит, существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$. Покажем, что $\lim_B f = A$.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \ |f(x_n) - A| < \varepsilon/2.$$

При этом, существует такое $n > N$, что $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Значит,

$$\forall x \in B_n \in \mathcal{B} : |f(x) - A| \leq |f(x) - f(x_n)| + |f(x_n) - A| < \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

□