

Лекция 11 от 21.11.2016

Функциональные последовательности. Интегрирование и дифференцирование.

Частные случаи двойных пределов

Повторим и немного продолжим результаты прошлой лекции.

Утверждение 1. Пусть \mathcal{B} — база на X и $\forall n \in \mathbb{N}$ существует предел $\lim_{\mathcal{B}} f_n(x) = a_n$, и при этом $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x)$. Тогда существуют и равны пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ и $\lim_{\mathcal{B}} f(x)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\mathcal{B}} f_n(x) = \lim_{\mathcal{B}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{\mathcal{B}} f(x).$$

Отметим, что равномерная сходимость это удобное, но завышенное требование.

Следствие 1. Пусть \mathcal{B} — база на X и $\forall n \in \mathbb{N}$ существует предел $\lim_{\mathcal{B}} f_n(x) = a_n$, и при этом $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \xrightarrow{X} S(x)$. Тогда существуют и равны пределы $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\lim_{\mathcal{B}} S(x)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{\mathcal{B}} f_n(x) = \lim_{\mathcal{B}} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim_{\mathcal{B}} S(x).$$

То есть при наличии равномерной сходимости порядок этих действий не важен.

Это действительно следствие предыдущего утверждения, потому что

$$S(x) \leftarrow S_n(x) = f_1(x) + \dots + f_n(x) \xrightarrow{\mathcal{B}} a_1 + \dots + a_n.$$

Следствие 2. Пусть I — невырожденный промежуток на \mathbb{R} и $\forall n \in \mathbb{N}$: $f_n(x) \in C(I)$ и $f_n(x) \xrightarrow{I} f(x)$. Тогда $f(x) \in C(I)$.

Следствие 3. Пусть I — невырожденный промежуток на \mathbb{R} и $\forall n \in \mathbb{N}$: $f_n(x) \in C(I)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \xrightarrow{I} S(x)$. Тогда $S(x) \in C(I)$.

Связь с интегрированием

Вспомним, что интеграл Римана это тоже предел по базе.

Утверждение 2. Пусть $\forall n \in \mathbb{N}$: $f_n(x) \in R[a, b]$, то есть интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, и $f_n(x) \xrightarrow{[a, b]} f(x)$. Тогда $f(x) \in R[a, b]$ и

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Можно сказать, это теорема о перестановке интеграла и предельного перехода.

Перед тем как приступить к доказательству, задумаемся: а может быть, требование равномерной сходимости это слишком строго? Однако поточечной явно не хватает. Подтвердим это несколькими примерами.

- Пронумеруем все рациональные числа: r_1, r_2, \dots , и определим функции следующим образом:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{r_1, \dots, r_n\}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Поточечно это будет сходиться к функции Дирихле, каждая отдельная функция f_n интегрируема, а вот $\{f_n\}$ — нет.

•

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1/n); \\ 1/x, & x \in [1/n, 1]. \end{cases}$$

По отдельности все функции интегрируемы, а поточечно это будет стремиться к

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & x \in (0, 1]; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

- Функция $f_n(x)$ задает равнобедренный треугольник с основанием на оси OX от 0 до $1/n$ и высотой $2n$. Тогда каждый интеграл равен 1, а поточечно оно стремится к нулю. То есть все существует, но равенства нет.

Итого, поточечной сходимости явно недостаточно. Но честно говоря, равномерной сходимости действительно хватает с избытком, но об этом как-нибудь потом.

Теперь приступим к доказательству.

Доказательство. Покажем, что это частный случай теоремы о перестановке пределов.

Пусть $X = \{(\tau, \xi)\}$ — это множество всех отмеченных разбиений $[a, b]$ (то есть таких, на каждом отрезке которого зафиксирована произвольная точка ξ_i), $\sigma_n(\tau, \xi)$ — значение интегральной суммы Римана для функции $f_n(x)$, соответствующее отмеченному разбиению (τ, ξ) . Тогда $\{\sigma_n(\tau, \xi)\}_{n=1}^\infty$ — последовательность функций, определенных на X . Также обозначим за $\sigma(\tau, \xi)$ интегральную сумму Римана для функции $f(x)$.

Докажем, что $\sigma_n(\tau, \xi) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} \sigma(\tau, \xi)$. Действительно, зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, тогда $\exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \forall x \in [a, b] : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.

Тогда $\forall n > N$ и $\forall (\tau, \xi) \in X$ (M — количество отрезков в разбиении τ , Δ_m — длина m -ого отрезка):

$$|\sigma(\tau, \xi) - \sigma_n(\tau, \xi)| = \left| \sum_{m=1}^M f_n(\xi_m) \Delta_m - \sum_{m=1}^M f(\xi_m) \Delta_m \right| \leq \sum_{m=1}^M |(f_n(\xi_m) - f(\xi_m)) \Delta_m| \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{m=1}^M \Delta_m = \varepsilon.$$

Получается, что $\forall n \in \mathbb{N}$ и $\forall (\tau, \xi) \in X$ существует предел $\lim_B \sigma_n(\tau, \xi) = \int_a^b f_n(x) dx$ (здесь \mathcal{B} — база Римана).

Итого, $\sigma_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} \sigma$, а значит, по теореме о перестановке двух пределов, существуют и равны пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$ и $\lim_B \sigma(\tau, \xi) = \int_a^b f(x) dx$. \square

Следствие 4. Пусть $\forall n \in \mathbb{N}: f_n(x) \in R[a, b]$ и $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \xrightarrow{[a, b]} S(x)$. Тогда $S(x) \in R[a, b]$ и

$$\int_a^b S(x) dx = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Связь с дифференцированием

Утверждение 3. Пусть I — невырожденный промежуток на \mathbb{R} и $\forall n \in \mathbb{N} f_n(x) \in C'(I)$ (то есть непрерывно дифференцируема) и $\exists x_0 \in I$ такое, что $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, но при этом $f'_n(x) \xrightarrow{I} g(x)$. Тогда $f_n(x) \xrightarrow{I} f(x)$ (поточечно!), причем на каждом ограниченном подмножестве I сходимость будет равномерной, $f(x) \in C'(I)$ и $f'(x) = g(x)$ на I .

Что это вообще означает? Фактически это похоже на перестановку пределов:

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x).$$

Доказательство. Вообще говоря, это сразу следует из прошлого утверждения и формулы Ньютона–Лейбница. Но распишем.

Заметим, что $\forall x \in I: f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t) dt$. При этом $f_n(x_0) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \alpha$ (так как вообще не зависит от x), а $f'_n(t) \xrightarrow{I} g(x)$.

Получается, что $f_n(x)$ поточечно на I сходится к $\alpha + \int_{x_0}^x g(t) dt = f(x)$. При этом очевидно $f(x) \in D(I)$ (т.е. дифференцируема) и $f'(x) = g(x)$. Итого, $f(x) \in C'(I)$.

Осталось показать равномерную сходимость на ограниченном подмножестве I .

Для любого E — ограниченного подмножества I — верно, что $\int_{x_0}^x f'_n(t) dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{E} \int_{x_0}^x g(t) dt$. Также, в силу ограниченности, $\exists C > 0 \forall x \in E: |x_0 - x| < C$.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \forall t \in E: |f'_n(t) - g(t)| < \varepsilon/C$. Значит, $\forall n > N$ и $\forall x \in I$:

$$\left| \int_{x_0}^x f'_n(t) dt - \int_{x_0}^x g(t) dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |f'_n(t) - g(t)| dt \right| \leq \varepsilon/C |x_0 - x| < \varepsilon.$$

В первом переходе модуль появился, потому что мы не знаем взаимное расположение точек x_0 и x . \square

Можно доказать более общее утверждение, которое отличается от предыдущего заменой $C'(I)$ на $D(I)$, то есть достаточно того, что функции дифференцируемы. Но мы этим заниматься не будем.

А нужно ли нам, чтобы существовала такая точка x_0 ? Конечно! Пусть, например, $f_n(x) = n$. Тогда в каждой точке расходимось к бесконечности. А с другой стороны, $f'_n(x) = 0$ и последовательность производных сходится.