

Лекция 07 от 17.10.2016

Функциональные последовательности и ряды

Поточечная и равномерная сходимость

Начиная с этой лекции, будем говорить о функциональных последовательностях и рядах.

Пусть X — произвольное множество точек, а $\{f(x)\}_n^\infty$ — последовательность функций, определённых на X или на его подмножестве.

Определение 1. Будем говорить, что $f_n(x)$ сходится поточечно к $f(x)$ на X , если

$$\forall x \in X \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Обозначение 1. $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} f(x)$.

Почему такое определение не совсем удобно для нас? Сходимость в каждой точке может быть своя, произвольная, а хотелось бы, чтобы свойства функций f_n и f были похожи. Приведем пример, когда это не выполняется.

Пример 1. Если $f_n(x) = x^n$, $X = [0; 1]$, то

$$f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{[0;1]} \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}.$$

То есть бывает так, что все функции последовательности непрерывны на отрезке и стремятся к разрывной функции.

Для устранения этого недостатка введём другое определение сходимости функциональной последовательности.

Определение 2. Будем говорить, что последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ сходится к $f(x)$ равномерно на множестве X , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N \forall x \in X |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Обозначение 2. $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} f(x)$.

Из определений сразу очевидно следует утверждение.

Утверждение 1. Если $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} f(x)$, то $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} f(x)$.

А что, если нам даны последовательность $f_n(x)$, функция $f(x)$ и множество X , то как нам понять, сходится ли $f_n(x)$ к $f(x)$ равномерно?

Существует мощный способ. Обозначим $r_n(x) = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|$.

Утверждение 2. $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} f(x) \Leftrightarrow r_n \rightarrow 0$.

Доказательство.

Необходимость. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, положим $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$. Тогда

$$\begin{aligned} \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N \forall x \in X |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_1, \\ \Rightarrow r_n = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon_1 < \varepsilon. \end{aligned}$$

То есть $r_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Достаточность.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N r_n < \varepsilon \Rightarrow \forall x \in X |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

□

Часто это утверждение называют **супремум-критерием**. Для приведённого выше примера $f_n(x) = x^n$.

Утверждение 3.

1. $x^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{[0;1]} 0$.
2. $x^n \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{[0;1]} 0$.

Доказательство. $r_n = \sup_{x \in [0;1]} |x^n - 0| = 1 \not\rightarrow 0$.

□

Есть ещё одна подобного рода последовательность.

$$f_n(x) = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

В любой точке значение $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = e^x$, то есть $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{R}} e^x$, но $f_n(x) \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{R}} e^x$. Однако, как легко показать, $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(-C;C)} e^x$ для всякого $C > 0$. Эта последовательность ещё всплывёт в нашем курсе.

Утверждение 4. Если $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} f(x)$ и $g_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} g(x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, то

1. $f_n(x) + g_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} f(x) + g(x)$,
2. $\alpha f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} \alpha f(x)$.

Доказательство. Докажем пункт 1, второй доказывается аналогично. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, положим $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$. Тогда

$$\begin{aligned} \exists N_1 \in \mathbb{N}: \forall x \in X |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_1, \\ \exists N_2 \in \mathbb{N}: \forall x \in X |g_n(x) - g(x)| < \varepsilon_1. \end{aligned}$$

Положим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда $\forall n > N \forall x \in X$:

$$|(f_n(x) + g_n(x)) - (f(x) + g(x))| \leq |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)| < \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = \varepsilon.$$

Получили требуемое.

□

Утверждение 5. Если $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} f(x)$ и $g(x)$ ограничена на множестве X , то

$$f_n(x)g(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} f(x)g(x).$$

Доказательство. $\exists C > 0: \forall x \in X |g(x)| < C$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, положим $\varepsilon_1 = \varepsilon/C$. Найдём такое $N \in \mathbb{N}$, что $\forall n > N, \forall x \in X |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_1$. Тогда $\forall n > N \forall x \in X |f_n(x)g(x) - f(x)g(x)| < C\varepsilon_1 = \varepsilon$. \square

Замечание 1. Если $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} f(x)$, $g_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} g(x)$ и $f(x), g(x)$ ограничены на множестве X , то $f_n(x)g_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} f(x)g(x)$.

Замечание 2. Если $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} f(x)$ и $f(x)$ отделена от нуля (т.е. существует такое $\alpha > 0$, что для любого элемента множества $X |f(x)| \geq \alpha$), то $\frac{1}{f_n(x)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} \frac{1}{f(x)}$.

Доказательство этих фактов остаётся в качестве упражнения. **Указание.** Рассмотреть $\frac{1}{f_n} - \frac{1}{f} = (f - f_n) \frac{1}{f_n \cdot f}$.

Геометрический смысл равномерной сходимости

Несложно понять, что если $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} f(x)$, то для всякого $\varepsilon > 0$, начиная с какого-то $N \in \mathbb{N}$ для всех $n > N$ все графики функций $f_n(x)$ окажутся в ε -коридоре графика функции $f(x)$.

Критерий Коши равномерной сходимости

Теорема 1 (Критерий Коши равномерной сходимости). Следующие условия эквивалентны:

1. $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X}$ (равномерно сходится куда-то);
2. $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию Коши равномерной сходимости на X :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall n, m > N \forall x \in X |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Доказательство. **1** \Leftarrow **2**. Заметим, что для всякого $x \in X$ числовая последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ является фундаментальной. Тогда $\forall x \in X \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$. Найдём такое $N \in \mathbb{N}$, что

$$\forall n, m > N \forall x \in X |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon_1.$$

Зафиксировав n перейдём к пределу при $m \rightarrow \infty$, получим, что $\forall x \in X: |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon_1 < \varepsilon$. Получили требуемое.

1 \Rightarrow **2**. Пусть $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} f(x)$.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, положим $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$. Найдём такое $N \in \mathbb{N}$, что $\forall n > N \forall x \in X$ верно $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_1$. Тогда $\forall n, m > N \forall x \in X$ выполнено

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = \varepsilon.$$

□

Функциональные ряды

Перейдём к рассмотрению функциональных рядов. Тут все определения и теоремы переносятся с обычных рядов с заменой числовых последовательностей на функциональные.

Определение 3. Будем говорить, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно к $S(x)$ на множестве X , если последовательность его частичных сумм $S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$ сходится равномерно к $S(x)$ на множестве X .

Отсюда же можно сформулировать ряд утверждений, которые по сути мы уже доказали.

Утверждение 6. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} S(x)$, $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} \tilde{S}(x)$. Тогда их почленная сумма $\sum_{n=1}^{\infty} (f_n(x) + g_n(x)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} S(x) + \tilde{S}(x)$.

Утверждение 7. Если $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} S(x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} \alpha S(x).$$

Утверждение 8. Если $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} S(x)$, а $g(x)$ ограничена на X , то

$$\sum_{n=1}^{\infty} g(x) f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} g(x) S(x).$$

Ну и конечно, мы не обойдёмся без критерия Коши.

Утверждение 9 (Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда). Следующие утверждения эквивалентны.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X}$ (опять же, сходится куда-то).
2. Выполняется условие Коши

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall m > N, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in X \left| \sum_{n=m+1}^{m+p} f_n(x) \right| < \varepsilon.$$

Отсюда же нахалаяву получаем утверждение.

Утверждение 10 (Необходимое условие равномерной сходимости функционального ряда).

Если $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X}$, то $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} 0$.