

# Лекция 01 от 05.09.2016

## Основные определения и свойства рядов. Критерий Коши. Необходимое условие сходимости

**Определение 1.** Пусть  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  — последовательность действительных чисел. Числовым рядом называется выражение вида  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , записываемое также как  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ .

**Определение 2.**  $N$ -й частичной суммой называется сумма первых  $N$  членов.

$$S_n = a_1 + \dots + a_N$$

**Определение 3.** Последовательность  $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$  называется последовательностью частичных сумм ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

Говорят, что ряд *сходится* (к числу  $A$ ), если (к числу  $A$ ) сходится последовательность его частичных сумм. Аналогично, ряд *расходится* к  $+\infty$  ( $-\infty$ ), если к  $+\infty$  ( $-\infty$ ) расходится последовательность его частичных сумм. Если последовательность частичных сумм расходится, ряд называют *расходящимся*.

**Определение 4.** Суммой ряда называется предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ .

Вспоминая, что  $a_n = S_n - S_{n-1}$ , можно заключить, что особой разницы между самим рядом и последовательностью его частичных сумм нет — из одного можно получить другое и наоборот. Следовательно, вместо ряда можно рассматривать его частичные суммы.

**Пример 1** (Предел Коши для последовательностей). Последовательность  $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$  сходится тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию Коши, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall m, k > N \Rightarrow |S_m - S_k| < \varepsilon.$$

Таким образом, мы нахаляву получили первую теорему.

**Теорема 1** (Критерий Коши сходимости ряда). Для сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall k > N, \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow |a_{k+1} + a_{k+2} \dots + a_{k+p}| < \varepsilon.$$

Отсюда сразу же очевидно следует утверждение.

**Утверждение 1** (Необходимое условие сходимости ряда). Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

*Доказательство.* Ряд сходится, значит,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall k > N, p = 1 \Rightarrow |a_{k+1}| < \varepsilon.$$

А это и есть определение предела, равного нулю.

Другой способ доказательства: вспомним, что  $a_n = S_n - S_{n-1}$  и что  $S_n$ , как и  $S_{n-1}$ , стремятся к одному пределу при стремлении  $n$  к бесконечности. Итого, получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0.$$

□

Теперь сформулируем и докажем несколько тривиальных свойств.

**Свойства 1.** Пусть  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$ . Тогда  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B$ .

*Доказательство.* Это напрямую следует из свойств предела последовательности и того, что  $S_n^{a+b} = S_n^a + S_n^b$ . □

**Свойства 2.** Пусть  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ . Тогда  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha A$  для любого действительного  $\alpha$ .

*Доказательство.* Аналогично вытекает из свойств предела последовательности. □

Введём ещё одно определение.

**Определение 5.** Пусть дан ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Обозначим некоторые его подсуммы,

$$\underbrace{a_1 + \dots + a_{n_1}}_{b_1} + \underbrace{a_{n_1+1} + \dots + a_{n_2}}_{b_2} + \underbrace{a_{n_2+1} + \dots + a_{n_3}}_{b_3} + a_{n_3+1} + \dots,$$

где  $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$  — возрастающая последовательность натуральных чисел. В таком случае говорят, что ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  получен из исходного расстановкой скобок.

**Утверждение 2.** Если ряд сходится или расходится к  $\pm\infty$ , то после любой расстановки скобок он сходится, неформально говоря, туда же.

*Доказательство.* Достаточно заметить, что частичные суммы ряда, полученного расстановкой скобок, образуют подпоследовательность в последовательности частичных сумм исходного ряда:

$$S_1^b = S_{n_1}^a, \quad S_2^b = S_{n_2}^a, \quad S_3^b = S_{n_3}^a, \quad \dots$$

Осталось только вспомнить, что любая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится туда же, куда и сама последовательность. □

*Обратное неверно!!!* Пример такого ряда:

$$1 - 1 + 1 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n.$$

При расстановке скобок  $(1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0$  получается сходящийся ряд, в то время как исходный ряд расходится, хотя бы потому что не выполняется необходимое условие о стремлении членов ряда к нулю.

Однако сходимость элементов к нулю не единственное препятствие. Например, можно «распилить» единицы из предыдущего примера и получить следующий ряд:

$$1 - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

Его элементы стремятся к нулю, но он все еще расходится. Однако расставив скобки, можно получить сходящийся ряд:

$$(1 - 1) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) + \dots = 0.$$

**Утверждение 3.** Если  $a_n \rightarrow 0$  и длины скобок ограничены (т.е. существует такое  $C \in \mathbb{R}$ , что  $n_{k+1} - n_k < C$  при всех  $k$ ), то из сходимости ряда, полученного расстановкой таких скобок, следует сходимость исходного ряда.

*Доказательство.* Доказать предлагается самостоятельно. Указание: ограничить через  $\frac{\varepsilon}{C}$ .  $\square$

**Утверждение 4.** Изменение, удаление или добавление конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость.

Поговорим теперь об абсолютной сходимости.

**Определение 6.** Если сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ , то говорят, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится абсолютно.

**Определение 7.** Если ряд сходится, но не сходится абсолютно, то говорят, что ряд сходится условно.

**Утверждение 5.** Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится абсолютно, то он сходится.

*Доказательство.* Сразу следует из критерия Коши. Возьмём произвольное  $\varepsilon > 0$ . Так как ряд из модулей сходится, то

$$\exists N \in \mathbb{N}: \forall k > N, \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{k+1}^{k+p} |a_k| < \varepsilon$$

Тогда

$$\left| \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n \right| \leq \sum_{n=k+1}^{k+p} |a_n| < \varepsilon$$

$\square$

**Определение 8.** Для ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$   $N$ -м хвостом называется сумма  $r_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ .

Для сходящегося ряда очевидно, что каждый его хвост сходится.