

Лекции по предмету Математический анализ-3

Группа лектория ФКН ПМИ 2016-2017
Михаил Дискин, Анастасия Иовлева, Руслан Хайдуров.

2016/2017 учебный год

Содержание

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Лекция 01 от 05.09.2016 | |
| | Основные определения и свойства рядов. Критерий Коши. Необходимое условие сходимости | 2 |
| 2 | Лекция 02 от 12.09.2016 | |
| | Признаки сравнения и другие признаки сходимости знакопостоянных рядов | 5 |
| | 2.1 О знакопостоянных рядах | 5 |
| | 2.2 Признаки сравнения | 5 |
| | 2.3 Прочие признаки | 7 |
| 3 | Лекция 03 от 19.09.2016 | |
| | Признаки сходимости знакопостоянных и знакопеременных рядов | 11 |
| | 3.1 Граница между сходящимися и расходящимися рядами | 11 |
| | 3.2 Скорость роста частичных сумм расходящихся рядов | 11 |
| | 3.3 Снова признаки сходимости знакопостоянных рядов | 12 |
| | 3.4 Признаки сходимости знакопеременных рядов | 14 |
| 4 | Лекция 04 от 26.09.2016 | |
| | Признаки сравнения знакопеременных рядов и перестановки ряда | 16 |
| | 4.1 Снова признаки сравнения знакопеременных рядов | 16 |
| | 4.2 Перестановки ряда | 18 |
| 5 | Лекция 05 от 03.09.2016 | |
| | Перестановки рядов и произведения рядов | 19 |
| | 5.1 Основные теоремы о перестановках рядов | 19 |
| | 5.2 Произведение числовых рядов | 20 |

Лекция 01 от 05.09.2016

Основные определения и свойства рядов. Критерий Коши. Необходимое условие сходимости

Определение 1. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность действительных чисел. Числовым рядом называется выражение вида $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, записываемое также как $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$

Определение 2. N -й частичной суммой называется сумма первых N членов.

$$S_n = a_1 + \dots + a_n$$

Определение 3. Последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется последовательностью частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Говорят, что ряд *сходится* (к числу A), если (к числу A) сходится последовательность его частичных сумм. Аналогично, ряд *расходится* к $+\infty$ ($-\infty$), если $+\infty$ ($-\infty$) расходится последовательность его частичных сумм. Если последовательность частичных сумм расходится, ряд называют *расходящимся*.

Определение 4. Суммой ряда называется предел $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

Вспоминая, что $a_n = S_n - S_{n-1}$, можно заключить, что особой разницы между самим рядом и последовательностью его частичных сумм нет — из одного можно получить другое и наоборот. Следовательно, вместо ряда можно рассматривать его частичные суммы.

Пример 1 (Предел Коши для последовательностей). Последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию Коши, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall m, k > N \Rightarrow |S_m - S_k| < \varepsilon.$$

Таким образом, мы нахватались получили первую теорему.

Теорема 1 (Критерий Коши сходимости ряда). Для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall k > N, \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow |a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_{k+p}| < \varepsilon.$$

Отсюда сразу же очевидно следует утверждение.

Утверждение 1 (Необходимое условие сходимости ряда). Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Доказательство. Ряд сходится, значит,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall k > N, p = 1 \Rightarrow |a_{k+1}| < \varepsilon.$$

А это и есть определение предела, равного нулю.

Другой способ доказательства: вспомним, что $a_n = S_n - S_{n-1}$ и что S_n , как и S_{n-1} , стремятся к одному пределу при стремлении n к бесконечности. Итого, получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0.$$

□

Теперь сформулируем и докажем несколько тривиальных свойств.

Свойства 1. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B$.

Доказательство. Это напрямую следует из свойств предела последовательности и того, что $S_n^{a+b} = S_n^a + S_n^b$. □

Свойства 2. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha A$ для любого действительного α .

Доказательство. Аналогично вытекает из свойств предела последовательности. □

Введём ещё одно определение.

Определение 5. Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Обозначим некоторые его подсуммы,

$$\underbrace{a_1 + \dots + a_{n_1}}_{b_1} + \underbrace{a_{n_1+1} + \dots + a_{n_2}}_{b_2} + \underbrace{a_{n_2+1} + \dots + a_{n_3}}_{b_3} + a_{n_3+1} + \dots,$$

где $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел. В таком случае говорят, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ получен из исходного расстановкой скобок.

Утверждение 2. Если ряд сходится или расходится к $\pm\infty$, то после любой расстановки скобок он сходится, неформально говоря, туда же.

Доказательство. Достаточно заметить, что частичные суммы ряда, полученного расстановкой скобок, образуют подпоследовательность в последовательности частичных сумм исходного ряда:

$$S_1^b = S_{n_1}^a, \quad S_2^b = S_{n_2}^a, \quad S_3^b = S_{n_3}^a, \quad \dots$$

Осталось только вспомнить, что любая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится туда же, куда и сама последовательность. □

Обратное неверно!!! Пример такого ряда:

$$1 - 1 + 1 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n.$$

При расстановке скобок $(1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0$ получается сходящийся ряд, в то время как исходный ряд расходится, хотя бы потому что не выполняется необходимое условие о стремлении членов ряда к нулю.

Однако сходимость элементов к нулю не единственное препятствие. Например, можно «распилить» единицы из предыдущего примера и получить следующий ряд:

$$1 - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

Его элементы стремятся к нулю, но он все еще расходится. Однако расставив скобки, можно получить сходящийся ряд:

$$(1 - 1) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) + \dots = 0.$$

Утверждение 3. Если $a_n \rightarrow 0$ и длины скобок ограничены (т.е. существует такое $C \in \mathbb{R}$, что $n_{k+1} - n_k < C$ при всех k), то из сходимости ряда, полученного расстановкой таких скобок, следует сходимость исходного ряда.

Доказательство. Доказать предлагается самостоятельно. Указание: ограничить через $\frac{\varepsilon}{C}$. \square

Утверждение 4. Изменение, удаление или добавление конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость.

Поговорим теперь об абсолютной сходимости.

Определение 6. Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, то говорят, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно.

Определение 7. Если ряд сходится, но не сходится абсолютно, то говорят, что ряд сходится условно.

Утверждение 5. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, то он сходится.

Доказательство. Сразу следует из критерия Коши. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Так как ряд из модулей сходится, то

$$\exists N \in \mathbb{N}: \forall k > N, \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{k+1}^{k+p} |a_k| < \varepsilon$$

Тогда

$$\left| \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n \right| \leq \sum_{n=k+1}^{k+p} |a_n| < \varepsilon$$

\square

Определение 8. Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ N -м хвостом называется сумма $r_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$.

Для сходящегося ряда очевидно, что каждый его хвост сходится.

Лекция 02 от 12.09.2016

Признаки сравнения и другие признаки сходимости знакопостоянных рядов

О знакопостоянных рядах

В рамках этой лекции будем рассматривать только ряды с неотрицательными членами!

Очевидно, что последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ в таких рядах не убывает. Следовательно, существует $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \in [0, +\infty]$.

Утверждение 1 (Критерий сходимости рядов с неотрицательными членами). *Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена сверху.*

Это позволяет сократить запись для таких рядов. Однако для рядов общего вида такая запись смысла не имеет, поскольку ряды могут не иметь даже бесконечного предела частичных сумм, то есть не иметь предела вообще (как например любимый нами ряд $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$)

Обозначение 1. *Ряд сходится: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$; ряд расходится: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.*

Признаки сравнения

Признак 1 (Первый признак сравнения). *Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ — два ряда с неотрицательными членами, и начиная с какого-то $N \in \mathbb{N}$ для всех $n > N$ имеет место неравенство $a_n \leq b_n$. Тогда:*

1. *если $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$;*
2. *если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, то $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.*

Доказательство. Достаточно доказать для случая, когда $a_n \leq b_n$ уже при $n \geq 1$ (убрав, «начало» ряда, сходимость мы не поменяем).

1. Рассмотрим частичные суммы рядов: $S_n^a = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, $S_n^b = b_1 + b_2 + \dots + b_n$. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^b = C$ для некоторого C . Последовательность S_n^b очевидно неубывающая, так что $S_n^b \leq C$ для любого n . А значит, для всех n верно, что

$$0 \leq S_n^a = a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq b_1 + b_2 + \dots + b_n \leq C.$$

Это показывает, что S_n^a монотонная ограниченная последовательность, а значит она обязательно имеет конечный предел. Так что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

2. Прямо следует из первого пункта.

□

Признак 2 (Второй признак сравнения). Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ — два ряда с положительными членами и $a_n \asymp b_n$ (то есть $\exists c, C > 0$ такие, что начиная с некоторого индекса N , $c < \frac{a_n}{b_n} < C$). Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Прямо следует из предыдущего признака, так как $cb_n \leq a_n \leq Cb_n$. □

Замечание 1. Если $a_n \sim b_n$ при $n \rightarrow \infty$, то $a_n \asymp b_n$.

Пример 1 (тривиальный). $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ — расходится.

Признак 3 (Третий признак сравнения). Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ — два ряда с неотрицательными членами и начиная с некоторого номера $N \in \mathbb{N}$ для всех $n > N$ верно $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Тогда:

1. если $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$;
2. если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, то $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.

Доказательство. По сути говоря, данный признак сравнивает скорости роста, а в остальном это практически то же самое, что первый признак сравнения. Что ж, сведем его к нему.

Достаточно считать, что $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ уже при $n \geq 1$. Для любого натурального k мы можем представить элементы a_k и b_k следующим образом:

$$a_k = a_1 \frac{a_2}{a_1} \frac{a_3}{a_2} \dots \frac{a_k}{a_{k-1}}$$

$$b_k = b_1 \frac{b_2}{b_1} \frac{b_3}{b_2} \dots \frac{b_k}{b_{k-1}}$$

Согласно условию, $\frac{a_i}{a_{i-1}} \leq \frac{b_i}{b_{i-1}}$ при $1 \leq i \leq k$. Таким образом, мы почти получили, что $a_k \leq \frac{a_1}{b_1} b_k$. Но мы не знаем, как соотносятся элементы a_1 и b_1 . Что ж, избавимся от них, введя новый ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b'_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1}{b_1} b_n.$$

Для него будет выполняться неравенство $a_k \leq b'_k$. Тем самым, мы свели задачу к первому признаку сравнения. □

Замечание 2. Отметим, что для любого $q \in [0, 1)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ сходится. Действительно,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N q^n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{q(q^N - 1)}{q - 1} = \frac{q}{1 - q}.$$

Прочие признаки

Признак 4 (Признак д'Аламбера).

1. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — ряд с положительными членами, и существует такое $q \in [0, 1)$, что начиная с некоторого номера N верно, что $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.
2. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — ряд с положительными членами, и начиная с некоторого номера N верно, что $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$. Тогда $a_n \not\rightarrow 0$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Доказательство.

1. Следует из третьего признака сравнения при $b_n = q^n$.
2. «Тут и доказывать нечего» © лектор (*прим. ред.*: утверждение очевидно из самой формулировки).

□

Однако чаще используется признак д'Аламбера в предельной форме.

Следствие 1 (Предельный признак д'Аламбера). Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha \in [0; +\infty]$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. если $\alpha < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;
2. если $\alpha > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится;
3. если $\alpha = 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ может как сходиться, так и расходиться.

Доказательство.

1. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$ и $\alpha < 1$, то $\exists N \in \mathbb{N}$ такой, что при любом $n > N$ $\alpha - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \alpha + \varepsilon$, причём $\alpha + \varepsilon < 1$. А значит, ряд сходится по признаку д'Аламбера.
2. Аналогично.
3. Например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ — расходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ — сходится.

□

Заметим, что признак д'Аламбера довольно грубый, то есть существует некоторая «мертвая зона» рядов, про сходимость которых он ничего не может сказать (например, про ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$).

Следствие 2. Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами верно, что $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, то ряд сходится, а если $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, то расходится.

Признак 5 (Радикальный признак Коши). Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами.

1. Пусть существует такое $q \in [0, 1)$, что начиная с некоторого номера N верно, что $\sqrt[n]{a_n} \leq q$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.
2. Пусть существует бесконечное множество индексов n , для которых верно, что $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$. Тогда $a_n \not\rightarrow 0$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Доказательство.

1. Следует из первого признака сравнения при $b_n = q^n$.
2. Очевидно по определению расходимости ряда.

□

Аналогично признаку д'Аламбера, можно сформулировать данный признак в предельной форме.

Следствие 3 (Радикальный признак Коши в предельной форме). Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = A$, где $A \in [0, \infty]$. Тогда:

1. если $A < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;
2. если $A > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Или, более общо:

1. если $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;
2. если $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, то $a_n \not\rightarrow 0$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Заметим, что так как тут используется только верхний предел, этот признак несколько удобней, чем предельный признак д'Аламбера.

Пример 2. Рассмотрим следующий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n+(-1)^n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \dots$$

Как можно заметить, у соседних элементов ряда наблюдается то рост в 2 раза, то убывание в 8 раз, и предельный признак д'Аламбера ничего не может сказать про сходимость. Однако воспользуемся радикальным признаком Коши:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^{-n+(-1)^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-1+(\frac{-1}{n})^n} = \frac{1}{2}.$$

Как мы видим, ряд сходится.

Упражнение 1. Есть ли обратный пример, когда радикальный признак Коши не помогает, в отличие от признака д'Аламбера?

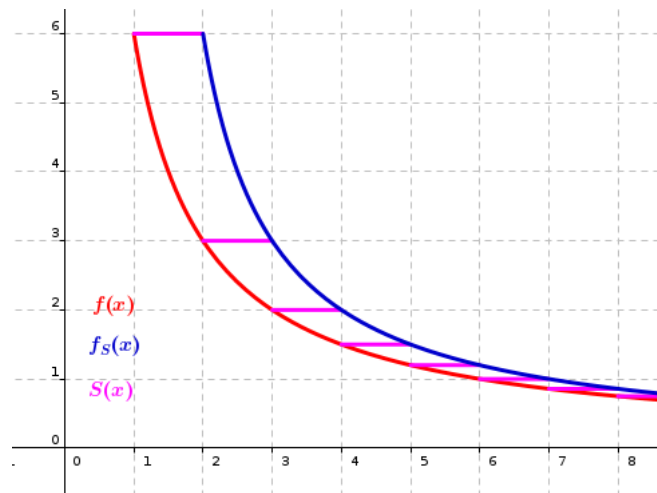
Для разных рядов может быть удобнее использовать разные признаки сходимости. Например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ однозначно лучше исследовать с помощью признака д'Аламбера.

Мы всё ещё не научились выяснять сходимость рядов вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$. Интуиция подсказывает, что он сходится при $\alpha > 1$, как и интеграл. Сейчас мы в этом убедимся. В этом нам поможет следующая теорема.

Признак 6 (Интегральный признак Коши–Маклорена). Пусть $f(x) \geq 0$ — невозрастающая на $[1, \infty)$ функция. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ и $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно. Причем в случае сходимости

$$\int_{N+1}^{\infty} f(x)dx \leq r_N = f(N+1) + f(N+2) + \dots \leq \int_N^{\infty} f(x)dx.$$

Доказательство. Для удобства введем две вспомогательные функции: $f_S(x) = f(x-1)$ и $S(x) = f(\lfloor x \rfloor)$.



Тогда мы получаем, что $f(1) + f(2) + \dots + f(N) = \int_1^N S(x)dx$. Значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл $\int_1^{\infty} S(x)dx$. В свою очередь, несложно заметить, что сходимость этого интеграла влечет за собой сходимость интеграла $\int_1^{\infty} f(x)dx$, так как при наших ограничениях $S(x) \geq f(x)$. С другой стороны, сходимость интеграла $\int_1^{\infty} f(x)dx$ эквивалентна сходимости интеграла $\int_2^{\infty} f_S(x)dx$, а она влечет за собой сходимость интеграла $\int_1^{\infty} S(x)dx$, так как $S(x) \leq f_S(x)$.

Отсюда же следует оценка для остатка. Действительно:

$$\begin{aligned} r_N &= \int_{N+1}^{\infty} S(x)dx \leq \int_{N+1}^{\infty} f_S(x)dx = \int_{N+1}^{\infty} f(x-1)dx = \int_N^{\infty} f(x)dx, \\ r_N &= \int_{N+1}^{\infty} S(x)dx \geq \int_{N+1}^{\infty} f(x)dx. \end{aligned}$$

□

Пример 3. Допустим, мы хотим узнать сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$. Но поскольку ряд бесконечен, мы хотим обойтись первыми 100 членами, а чтобы оценить погрешность, посчитаем соответствующий интеграл.

$$\int_n^{\infty} \frac{1}{x^3} = -\frac{1}{2x^2} \Big|_n^{\infty} = \frac{1}{2n^2}$$

Итого,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^3} + \theta, \quad \text{где } \theta \in \left[\frac{1}{2 \cdot 101^2}, \frac{1}{2 \cdot 100^2} \right].$$

Подобным способом можно оценить асимптотику частичных сумм расходящегося ряда, например:

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{n}} \sim 2\sqrt{n}$$

Выводится это аналогично, просто теперь мы функциями $f(x)$, $f_S(x)$ и $S(x)$ оцениваем не остаток, а частичную сумму.

Лекция 03 от 19.09.2016

Признаки сходимости знакопостоянных и знакопеременных рядов

Граница между сходящимися и расходящимися рядами

На прошлой лекции был сформулирован и доказан следующий признак:

Признак 7 (Интегральный признак Коши–Маклорена). Пусть $f(x) \geq 0$ — невозрастающая на $[1, \infty]$ функция. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ и $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

С помощью него мы можем исследовать на сходимость семейство рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}.$$

Как и для соответствующего интеграла, ряд сходится тогда и только тогда, когда $\alpha > 1$.

Может сложиться впечатление, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ является своего рода граничным между сходящимися и расходящимися рядами. Но исследуем теперь другой ряд (он нам также понадобится в дальнейшем):

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}.$$

Он сходится тогда и только тогда, когда сходится соответствующий интеграл.

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \int_2^{\infty} \frac{1}{\ln x} d \ln x = \ln \ln x \Big|_2^{\infty} = \infty$$

Данный ряд меньше, чем гармоничный ряд, однако расходится. Причем, как несложно убедиться, семейство рядов $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{\beta} n}$ при $\beta > 1$ уже сходится. Но при этом «граница» между

сходящимися и расходящимися рядами не проходит по ряду $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ — взять, например, ряд

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln \ln n}$, который тоже расходится. И так далее, «границу» можно «уточнять» бесконечно. Так что точной «границы» не существует.

Скорость роста частичных сумм расходящихся рядов

В прошлой лекции мы с помощью интегрального признака Коши–Маклорена научились оценивать остаток сходящихся сумм. Теперь научимся оценивать скорость роста частичных сумм расходящихся рядов.

Возьмем, например, гармонический ряд. Утверждается, что его частичные суммы оцениваются следующим образом:

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = \ln N + C + o(1),$$

где C — это некая константа. Но как доказать, что это действительно корректная оценка?

Фактически мы утверждаем сходимость последовательности $\{S_n\}$, где

$$S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

Это можно воспринимать как последовательность частичных сумм и, соответственно, перейти к соответствующему ряду:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln n + \ln(n-1) = \frac{1}{n} - \ln \frac{n}{n-1} = \frac{1}{n} + \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \left(-\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

На последнем шаге мы воспользовались разложением в ряд Тейлора.

Мы получили, что $a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, следовательно, данный ряд сходится. И так как мы построили сходящийся ряд, у которого последовательность $\{S_n\}$ будет последовательностью частичных сумм, данная последовательность также сходится. Что и доказывает нашу оценку.

Точно также можно доказать оценки расходимости частичных сумм следующих рядов:

$$\sum_{n=2}^N \frac{1}{n \ln n} = \ln \ln N + C + o(1)$$

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \frac{2N^{2/3}}{2} + C + o(1)$$

Снова признаки сходимости знакопостоянных рядов

Вернемся теперь к признакам сходимости.

Признак 8 (Признак Кумера). Пусть $a_n, b_n > 0$ и $v_n := \frac{a_n}{a_{n+1}}b_n - b_{n+1}$. Тогда:

1. если существует такое $l > 0$, что начиная с некоторого места $v_n \geq l$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;
2. если начиная с некоторого места $v_n \leq 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ расходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда наше неравенство выполняется для всех n .

1. Итого, мы имеем, что $\frac{a_n}{a_{n+1}}b_n - b_{n+1} \geq l$. Домножим неравенство на a_{n+1} , благо оно положительно:

$$a_n \cdot b_n - a_{n+1} \cdot b_{n+1} \geq la_{n+1} > 0$$

Воспользуемся этим, оценив частичную сумму следующего ряда, при $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=1}^N la_n \leq la_1 + (a_1b_1 - a_2b_2) + (a_2b_2 - a_3b_3) + \dots + (a_{N-1}b_{N-1} - a_Nb_N) = la_1 + a_1b_1 - a_Nb_N \leq la_1 + a_1b_1$$

Итого, мы получили, что частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} la_n$ ограничены сверху. Значит, этот ряд сходится и, следовательно, сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2. Имеем, что $\frac{a_n}{a_{n+1}}b_n - b_{n+1} \leq 0$. Перенесем b_{n+1} в правую часть и разделим все на b_n :

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

Теперь перевернем дробь:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{1/b_{n+1}}{1/b_n}.$$

По условию ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ расходится, а значит признак сравнения дает расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

□

Но признак Куммера особо не используется, он скорее нужен, чтобы вывести другие признаки.

Признак 9 (Признак Раабе). Пусть $a_n > 0$ и существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = A \in [-\infty, +\infty].$$

Тогда:

1. если $A > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;
2. если $A < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Доказательство. Признак Куммера при $b_n = n$.

□

Покажем, зачем нужен признак Раабе. Пусть $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$. Тогда:

$$n \left(\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} - 1 \right) = n \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^\alpha - 1 \right) = n \left(1 + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right) \rightarrow \alpha.$$

Как мы видим, признак Раабе позволяет «ловить» ряды с полиномиальной скоростью роста. И это хорошо, так как раньше мы этого не умели.

Но у этого признака все еще есть «мертвая зона», когда $A = 1$. Поэтому рассмотрим еще один признак, который не имеет «мертвой зоны», но, к сожалению, не всегда применим.

Признак 10 (Признак Гаусса). Пусть для некоторого $\varepsilon > 0$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ верно, что

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \alpha + \frac{\beta}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right).$$

Тогда:

1. если $\alpha > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;
2. если $\alpha < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится;
3. если $\alpha = 1$ и $\beta > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;

4. если $\alpha = 1$ и $\beta \leq 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Доказательство. Все эти утверждения на самом деле следуют из уже рассмотренных нами признаков. Так что просто назовем их.

1. Признак д'Аламбера.

2. Признак д'Аламбера.

3. Признак Раабе.

4. Если $\beta < 1$ — признак Раабе. Если $\beta = 1$ — признак Куммера при $b_n = n \ln n$.

Рассмотрим подробнее последний случай, когда $\alpha = \beta = 1$. Воспользуемся признаком Куммера при $b_n = n \ln n$ и равенством из условия:

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{a_n}{a_{n+1}} b_n - b_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right) \right) n \ln n - (n+1) \ln(n+1) = \\ &= (n+1) (\ln n - \ln(n+1)) + O\left(\frac{\ln n}{n^\varepsilon}\right) = \\ &= -(n+1) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{\ln n}{n^\varepsilon}\right) = \\ &= -(n+1) \left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) + O\left(\frac{\ln n}{n^\varepsilon}\right) \rightarrow -1 \end{aligned}$$

Итого, по признаку Куммера ряд действительно расходится. \square

Замечание 1. Вместо $O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)$ можно писать более сильное $O\left(\frac{1}{n \ln n}\right)$. Но первое чаще появляется в интересных примерах, поэтому исторически сложилось использовать его.

Признаки сходимости знакопеременных рядов

Признак 11 (Признак Лейбница). Пусть последовательность $\{b_n\}$ строго монотонно убывает у нуля. Тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$ сходится, причем его остаток r_N имеет знак $(-1)^{N+1}$ и по модулю меньше b_{N+1} .

Доказательство. Докажем с помощью критерия Коши. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем такое $N \in \mathbb{N}$, что для всех $n > N$ верно, что $b_n < \varepsilon$. Теперь для любого $m > N$ и $p \in \mathbb{N}$ рассмотрим следующую величину:

$$\left| \sum_{n=m+1}^{m+p} (-1)^n b_n \right|.$$

Можно вынести $(-1)^{m+1}$ из суммы — на модуль это не повлияет, но зато нам будет удобнее считать, что первое слагаемое идет с положительным знаком.

Сгруппируем слагаемые следующим образом:

$$\left| \sum_{n=m+1}^{m+p} (-1)^n b_n \right| = |b_{m+1} + (-b_{m+2} + b_{m+3}) + (-b_{m+4} + b_{m+5}) + \dots|.$$

В силу строго монотонного убывания последовательности получаем, что каждая скобка меньше нуля. Последнее слагаемое, b_{m+p} могло остаться без пары, но тогда оно идет с отрицательным знаком. Итого, получаем, что мы с b_{m+1} складываем только отрицательные величины, следовательно:

$$\left| \sum_{n=m+1}^{m+p} (-1)^n b_n \right| \leq |b_{m+1}| < \varepsilon.$$

Итого, по критерию Коши ряд сходится. Отсюда же следует оценка на остаток:

$$|r_N| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} (-1)^n b_n \right| \leq b_{N+1}.$$

Аналогичным образом оценим остаток знака.

Снова вынесем за скобки знак $(-1)^{N+1}$ (но на этот раз его не убьет модуль), и сгруппируем слагаемые:

$$r_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} (-1)^n b_n = (-1)^{N+1} ((b_{N+1} - b_{N+2}) + (b_{N+3} - b_{N+4}) + \dots).$$

Каждая группа слагаемых больше нуля в силу строго монотонного убывания последовательности. Следовательно, вся скобка имеет положительный знак, а значит, r_N имеет знак $(-1)^{N+1}$. Что нам и требовалось. \square

Лекция 04 от 26.09.2016

Признаки сравнения знакопеременных рядов и перестановки ряда

Снова признаки сравнения знакопеременных рядов

В прошлый раз мы с вами сформулировали и доказали признак Лейбница. Будем пользоваться в этот раз слабой его формулировкой:

Признак 12. Пусть последовательность $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно убывает. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ сходится.

Замечание 1. Для этого утверждения достаточно нестрогой монотонности.

Оказывается, этот признак является частным случаем более общего признака, который мы сейчас сформулируем и докажем.

Признак 13 (Признак Дирихле). Пусть частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ограничены (то есть $\exists C > 0$ такое, что начиная с некоторого номера N , $|A_n| = |a_1 + a_2 + \dots + a_n| < C$), а $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ — неубывающая последовательность. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится (отметим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ может влёгкую расходиться).

Подставляя сюда вместо a_n последовательность $a_n = (-1)^n$ (частичные суммы равны $1, 0, 1, 0, \dots$ и ограничены), получаем формулировку первого утверждения.

Замечание 2. В признаке Лейбница куда важнее утверждение про оценку остатка, чем про сходимость ряда.

Доказательство. Для доказательства мы применим трюк, подобный интегрированию по частям, именуемый в дискретном случае *преобразованием Абеля* («название умнее, чем само преобразование» © лектор).

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Найдём такое $N \in \mathbb{N}$, что

$$\forall n \geq N: b_n < \frac{\varepsilon}{4C}$$

Возьмём $m > N$, произвольное $p \in \mathbb{N}$ и оценим сумму $\left| \sum_{n=m+1}^{m+p} a_n b_n \right|$.

$$\begin{aligned} \sum_{n=m+1}^{m+p} a_n b_n &= \sum_{n=m+1}^{m+p} (A_n - A_{n-1}) b_n = \sum_{n=m+1}^{m+p} A_n b_n - \sum_{n=m+1}^{m+p} A_{n-1} b_n = \sum_{n=m+1}^{m+p} A_n b_n - \sum_{n=m}^{m+p-1} A_n b_{n-1} = \\ &= A_{m+p} b_{m+p} - A_m b_{m+1} + \sum_{n=m+1}^{m+p-1} A_n (b_n - b_{n+1}) \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{n=m+1}^{m+p} a_n b_n \right| &\leq |A_{m+p} b_{m+p}| + |A_m b_{m+1}| + \sum_{n=m+1}^{m+p-1} |A_n| |b_n - b_{n+1}| < \\
 &< C \frac{\varepsilon}{4C} + C \frac{\varepsilon}{4C} + C \sum_{n=m+1}^{m+p-1} (b_n - b_{n+1}) = \\
 &= \frac{\varepsilon}{2} + C(b_{m+1} - b_{m+2} + b_{m+2} - b_{m+3} + \dots - b_{m+p}) = \frac{\varepsilon}{2} + C(b_{m+1} - b_{m+p}) < \frac{\varepsilon}{2} + C \frac{\varepsilon}{4c} < \varepsilon
 \end{aligned}$$

□

Пример 1. Попробуем исследовать на сходимость какой-нибудь ряд, хороший пример — ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n}$, при $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ или такой же с синусом. Пусть $a_n = \cos n\alpha$, $b_n = \frac{1}{n}$. Исследуем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ на ограниченность частичных сумм:

$$\begin{aligned}
 A_n &= \frac{|\cos \alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos n\alpha| \cdot \sin(\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)} = \\
 &= \left| \frac{-\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{3\alpha}{2} - \sin \frac{3\alpha}{2} + \sin \frac{5\alpha}{2} - \dots + \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) \alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \right| = \\
 &= \frac{\left| -\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) \alpha \right|}{2 \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right|} \leq \frac{2}{2 \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right|} = \frac{1}{\left| \sin \frac{\alpha}{2} \right|}
 \end{aligned}$$

Тогда тут применим признак Дирихле и ряд сходится. Теперь покажем его условную сходимость, то есть тот факт, что ряд из модулей расходится.

$$\frac{|\cos n\alpha|}{n} \geq \frac{(\cos n\alpha)^2}{n} = \frac{\cos 2n\alpha + 1}{2n} = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\frac{\cos 2n\alpha}{n}}_{\text{сход.}} + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{расх.}} \right)$$

Сформулируем и докажем ещё один важный признак.

Признак 14 (Признак Абеля). Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ — монотонная ограниченная последовательность. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Доказательство. Последовательность частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а значит ограничена. Последовательность $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна и ограничена, а значит имеет предел $B = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. То есть последовательность b_n представима в виде $B + \beta_n$, где β_n — монотонно стремящаяся к нулю последовательность.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (B + \beta_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n B + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \beta_n$$

Первое слагаемое сходится по условию (умножение на константу ничего не меняет), а второе по признаку Дирихле. □

Перестановки ряда

Определение 1. Пусть σ — биекция (перестановка) $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Тогда говорят, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ является перестановкой ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Сформулируем две теоремы, которые докажем в следующий раз.

Теорема 1 (Коши). Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, и его сумма равна A . Тогда любая его перестановка также сходится абсолютно, и его сумма равна A .

Теорема 2 (Римана). Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно. Тогда:

1. для любого $A \in \mathbb{R}$ найдётся такая перестановка σ , что $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = A$;
2. существует такая перестановка σ , что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ расходится к $+\infty$;
3. существует такая перестановка σ , что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ расходится к $-\infty$;
4. существует такая перестановка σ , что для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ последовательность частичных сумм предела не имеет.

Лекция 05 от 03.09.2016

Перестановки рядов и произведения рядов

Основные теоремы о перестановках рядов

Напомним основное для этой лекции определение.

Определение 1. Пусть σ — биекция (перестановка) $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Тогда говорят, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ является перестановкой ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Теорема 1 (Коши). Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, и его сумма равна A . Тогда любая его перестановка $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ также сходится абсолютно, и его сумма равна A .

Доказательство абсолютной сходимости: Докажем, что $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ абсолютно сходится.

Обозначим $A_+ := \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Возьмём произвольное $N \in \mathbb{N}$ и покажем, что $\sum_{n=1}^N |a_{\sigma(n)}| \leq A_+$ (тогда возрастающая последовательность частичных сумм $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{\sigma(n)}|$ ограничена и ряд сходится).

Определим $N := \max\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(N)\}$. Тогда очевидно, что $\sum_{n=1}^N |a_{\sigma(n)}| \leq \sum_{n=1}^M |a_n|$, так как правая сумма содержит в себе и все слагаемые левой суммы. Но из этого неизбежно следует и $\sum_{n=1}^N |a_{\sigma(n)}| \leq A_+$, потому что любая частичная сумма $\sum_{n=1}^M |a_n|$ неотрицательного ряда не больше всей его суммы. \square

Доказательство сходимости к тому же значению: Докажем, что $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ сходится к A . Пусть есть некоторое $\varepsilon > 0$. Возьмём такое $N \in \mathbb{N}$, что $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. (Тогда $\left| \sum_{n=1}^N a_n - A \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.)

Обозначим $M := \max\{\sigma^{-1}(1), \sigma^{-1}(2), \dots, \sigma^{-1}(N)\}$.

Тогда для любого $\tilde{M} > M$:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{m=1}^{\tilde{M}} a_{\sigma(m)} - A \right| &\leq \left| \sum_{m=1}^{\tilde{M}} a_{\sigma(m)} - \sum_{n=1}^N a_n \right| + \left| \sum_{n=1}^N a_n - A \right| < \\ &\left| \sum_{m=1 \dots \tilde{M}, \sigma(m) > N} a_{\sigma(m)} \right| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{m=1 \dots \tilde{M}, \sigma(m) > N} |a_{\sigma(m)}| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\max\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(N)\}} |a_n| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

\square

Теперь пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно. В нём бесконечно много положительных слагаемых и бесконечно много отрицательных, так как иначе он сходил бы абсолютно. Через $\{p_n\}$ обозначим последовательность всех неотрицательных слагаемых, а через $\{q_n\}$, соответственно, отрицательных.

Раз $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\{a_n\}$ — сходящаяся последовательность, а значит и $\{p_n\}$ и $\{q_n\}$ тоже сходятся. При этом $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ — расходятся.

Теорема 2 (Римана). Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно. Тогда:

1. для любого $A \in \mathbb{R}$ найдётся такая перестановка σ , что $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = A$;
2. существует такая перестановка σ , что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ расходится к $+\infty$;
3. существует такая перестановка σ , что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ расходится к $-\infty$;
4. существует такая перестановка σ , что для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ последовательность частичных сумм предела не имеет.

Доказательство.

1. Возьмём произвольное $A \in \mathbb{R}$.

Найдём наименьшее $k_1 \in \mathbb{N}$ такое что $p_1 + p_2 + \dots + p_{k_1} > A$.

Найдём наименьшее $\tilde{k}_1 \in \mathbb{N}$ такое что $p_1 + p_2 + \dots + p_{k_1} + q_1 + q_2 + \dots + q_{\tilde{k}_1} < A$

Найдём наименьшее $k_2 \in \mathbb{N}$ такое что $p_1 + p_2 + \dots + p_{k_1} + q_1 + q_2 + \dots + q_{\tilde{k}_1} + p_{k_1+1} + \dots + p_{k_2} > A$

И так далее. В силу того, что $\{p_n\}$ и $\{q_n\}$ сходятся к нулю, построение выше и даст перестановку ряда, сумма которой равна A .

В остальных пунктах всё вполне аналогично.

2. Найдём наименьшее $k_1 \in \mathbb{N}$ такое что $p_1 + p_2 + \dots + p_{k_1} > 1$.

Найдём наименьшее $k_2 \in \mathbb{N}$ такое что $p_1 + p_2 + \dots + p_{k_1} + q_1 + p_{k_1+1} + \dots + p_{k_2} > 2$

Найдём наименьшее $k_3 \in \mathbb{N}$ такое что $p_1 + p_2 + \dots + p_{k_1} + q_1 + p_{k_1+1} + \dots + p_{k_2} + q_2 + p_{k_2+1} + \dots + p_{k_3} > 3$

И так далее. Построение выше и даст перестановку ряда, расходящуюся к $+\infty$.

3. Аналогично предыдущему.

4. Аналогично предыдущим, например, доводя сумму последовательно до 1, -1, 2, -2, 3, -3 и так далее.

□

Произведение числовых рядов

Произведение пары конечных сумм определено вполне естественным и понятным образом:

$$\sum_{n=1}^N a_n \cdot \sum_{m=1}^M b_m = (a_1 + \dots + a_N)(b_1 + \dots + b_M) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M a_n b_m$$

С бесконечными суммами всё менее понятно. Казалось бы,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{m=1}^{\infty} b_m = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_n b_m,$$

однако объект в правой части равенства мы не определяли.

| | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \ddots |
| b_4 | 16 | 15 | 14 | 13 | \dots |
| b_3 | 9 | 8 | 7 | 12 | \dots |
| b_2 | 4 | 3 | 6 | 11 | \dots |
| b_1 | 1 | 2 | 5 | 10 | \dots |
| | a_1 | a_2 | a_3 | a_4 | \dots |

Рис. 1: Нумерация по квадратам

Но по крайней мере множество пар индексов (n, m) , а значит и множество слагаемых в сумме счётно, то есть его можно занумеровать и таким образом превратить произведение рядов в обычный ряд. Вопрос лишь в том, как именно это сделать.

Теорема 3 (Коши о произведении абсолютно сходящихся рядов). Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ и $\sum_{m=1}^{\infty} b_m = B$, причём оба ряда абсолютно сходятся. Тогда ряд из произведений $a_n b_m$, занумерованных в любом порядке сходится абсолютно и его сумма равна $A \cdot B$.

Доказательство. По недавно доказанной теореме Коши о перестановках абсолютно сходящегося ряда нам достаточно доказать, что хотя бы при какой-то одной нумерации ряд из произведений абсолютно сходится к $A \cdot B$.

Будем использовать довольно очевидный способ нумерации, вполне достаточно описываемый картинкой слева, обычно называемый "нумерация по квадратам". Обозначим $A_+ := \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, $B_+ := \sum_{m=1}^{\infty} |b_m|$, и $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ — ряд из произведений, занумерованный выбранным нами способом. Тогда последовательность частичных сумм ряда из модулей c_k ограничена

$$\sum_{k=1}^K |c_k| \leq \sum_{k=1}^{K^2} |c_k| = \left(\sum_{n=1}^K |a_n| \right) \left(\sum_{m=1}^K |b_m| \right) \leq A_+ \cdot B_+,$$

то есть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ сходится абсолютно. Сумму этого ряда посчитать теперь совсем несложно:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^K c_k = \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{K^2} c_k = \lim_{K \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^K a_n \right) \left(\sum_{m=1}^K b_m \right) = A \cdot B$$

□

Если хоть один из рядов не сходится абсолютно, такое утверждение уже неверно. Так что для всех остальных случаев важно договориться о нумерации. Один из часто встречающихся удобных способов нумерации, который в дальнейшем будет подразумеваться по умолчанию — это так называемая "нумерация по треугольникам", или "произведение Коши".

Определение 2. Для рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ их произведением называется ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$, где $c_k = \sum_{j=1}^k a_j b_{k-j}$

| | | | | | |
|----------|-------|----------|----------|----------|----------|
| \vdots | 15 | \ddots | | | |
| b_4 | 10 | 14 | \ddots | | |
| b_3 | 6 | 9 | 13 | \ddots | |
| b_2 | 3 | 5 | 8 | 12 | \ddots |
| b_1 | 1 | 2 | 4 | 7 | 11 |
| | a_1 | a_2 | a_3 | a_4 | \dots |

Рис. 2: Нумерация по треугольникам

Теорема 4 (Мертенса). Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ и $\sum_{m=1}^{\infty} b_m = B$, причём хотя бы один из рядов сходится абсолютно. Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^k a_k b_{k-j} = AB$