

## Лекция 04 от 26.09.2016

# Признаки сходимости знакопеременных рядов и перестановки ряда

## Снова признаки сходимости знакопеременных рядов

В прошлый раз мы с вами сформулировали и доказали признак Лейбница. Будем пользоваться в этот раз слабой его формулировкой:

**Признак 1.** Пусть последовательность  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  монотонно убывает к нулю. Тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$  сходится.

Оказывается, этот признак является частным случаем более общего признака, который мы сейчас сформулируем и докажем.

**Признак 2** (Признак Дирихле). Пусть частичные суммы ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ограничены (то есть  $\exists C > 0$  такое, что  $\forall n \ |A_n| = |a_1 + a_2 + \dots + a_n| < C$ ), а  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  — монотонно стремящаяся к нулю последовательность. Тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  сходится (отметим, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  может влѣгкую расходиться).

Подставляя сюда вместо  $a_n$  последовательность  $a_n = (-1)^n$  (частичные суммы равны 1, 0, 1, 0, ... и ограничены), получаем формулировку первого утверждения.

**Замечание 1.** В признаке Лейбница дополнительно к утверждению о сходимости ряда присутствует оценка остатка, которой в признаке Дирихле нет.

*Доказательство.* Для доказательства мы применим трюк, подобный интегрированию по частям, именуемый в дискретном случае *преобразованием Абеля* («название умнее, чем само преобразование» © лектор).

Рассмотрим случай  $b_n \searrow 0$  (случай  $b_n \nearrow 0$  — аналогично).

Зафиксируем произвольное  $\varepsilon > 0$ . Найдѐм такое  $N \in \mathbb{N}$ , что

$$\forall n \geq N \quad b_n < \frac{\varepsilon}{4C}$$

Возьмѐм  $m > N$ , произвольное  $p \in \mathbb{N}$  и оценим сумму  $\left| \sum_{n=m+1}^{m+p} a_n b_n \right|$ .

$$\begin{aligned} \sum_{n=m+1}^{m+p} a_n b_n &= \sum_{n=m+1}^{m+p} (A_n - A_{n-1}) b_n = \sum_{n=m+1}^{m+p} A_n b_n - \sum_{n=m+1}^{m+p} A_{n-1} b_n = \sum_{n=m+1}^{m+p} A_n b_n - \sum_{n=m}^{m+p-1} A_n b_{n+1} = \\ &= A_{m+p} b_{m+p} - A_m b_{m+1} + \sum_{n=m+1}^{m+p-1} A_n (b_n - b_{n+1}). \end{aligned}$$

Следовательно, используя монотонное убывание  $b_n$ :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=m+1}^{m+p} a_n b_n \right| &\leq |A_{m+p} b_{m+p}| + |A_m b_{m+1}| + \sum_{n=m+1}^{m+p-1} |A_n| |b_n - b_{n+1}| < \\ &< C \frac{\varepsilon}{4C} + C \frac{\varepsilon}{4C} + C \sum_{n=m+1}^{m+p-1} (b_n - b_{n+1}) = \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + C(b_{m+1} - b_{m+2} + b_{m+2} - b_{m+3} + \dots - b_{m+p}) = \frac{\varepsilon}{2} + C(b_{m+1} - b_{m+p}) < \frac{\varepsilon}{2} + C \frac{\varepsilon}{4C} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Итого, по критерию Коши ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  сходится.  $\square$

**Пример 1.** Попробуем исследовать на сходимость какой-нибудь ряд, хороший пример — ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n}$ , при  $\alpha \neq 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  или такой же с синусом. Пусть  $a_n = \cos n\alpha$ ,  $b_n = \frac{1}{n}$ . Исследуем ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  на ограниченность частичных сумм:

$$\begin{aligned} |A_n| &= \frac{|\cos \alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos n\alpha| \cdot |\sin(\alpha/2)|}{|\sin(\alpha/2)|} = \\ &= \left| \frac{-\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{3\alpha}{2} - \sin \frac{3\alpha}{2} + \sin \frac{5\alpha}{2} - \dots + \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) \alpha}{2 \left|\sin \frac{\alpha}{2}\right|} \right| = \\ &= \frac{\left| -\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) \alpha \right|}{2 \left|\sin \frac{\alpha}{2}\right|} \leq \frac{2}{2 \left|\sin \frac{\alpha}{2}\right|} = \frac{1}{\left|\sin \frac{\alpha}{2}\right|} \end{aligned}$$

Тогда тут применим признак Дирихле и ряд сходится. Теперь покажем его условную сходимость, то есть тот факт, что ряд из модулей расходится.

$$\frac{|\cos n\alpha|}{n} \geq \frac{(\cos n\alpha)^2}{n} = \frac{\cos 2n\alpha + 1}{2n} = \frac{1}{2} \left( \underbrace{\frac{\cos 2n\alpha}{n}}_{\text{ряд сход.}} + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{ряд расх.}} \right)$$

Сформулируем и докажем ещё один признак.

**Признак 3** (Признак Абеля). Пусть  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится, а  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  — монотонная ограниченная последовательность. Тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  сходится.

*Доказательство.* Последовательность частичных сумм ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится, а значит ограничена. Последовательность  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  монотонна и ограничена, а значит имеет предел  $B = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ . То есть последовательность  $b_n$  представима в виде  $B + \beta_n$ , где  $\beta_n$  — монотонно стремящаяся к нулю последовательность.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (B + \beta_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n B + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \beta_n$$

Первое слагаемое сходится по условию (умножение на константу ничего не меняет), а второе по признаку Дирихле.  $\square$

## Перестановки ряда

**Определение 1.** Пусть  $\sigma$  — биекция (перестановка)  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ . Тогда говорят, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$  является перестановкой ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

Сформулируем две теоремы, которые докажем в следующий раз.

**Теорема 1** (Коши). Пусть ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  абсолютно сходится, и его сумма равна  $A$ . Тогда любая его перестановка также сходится абсолютно, и ее сумма равна  $A$ .

**Теорема 2** (Римана). Пусть ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится условно. Тогда:

1. для любого  $A \in \mathbb{R}$  найдётся такая перестановка  $\sigma$ , что  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = A$ ;
2. существует такая перестановка  $\sigma$ , что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$  расходится к  $+\infty$ ;
3. существует такая перестановка  $\sigma$ , что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$  расходится к  $-\infty$ ;
4. существует такая перестановка  $\sigma$ , что для ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$  последовательность частичных сумм предела не имеет.