Лекция 05 от 03.10.2016
Перестановки рядов и произведения рядов

Основные теоремы о перестановках рядов

Напомним основное для этой лекции определение.

Определение 1. *Пусть σ — биекция (перестановка) $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Тогда говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ является перестановкой ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Теорема 1 (Коши)**.** *Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, и его сумма равна A. Тогда любая его перестановка $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ также сходится абсолютно, и её сумма равна A.*

Доказательство абсолютной сходимости: Докажем, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ абсолютно сходится. Обозначим $A_+ := \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Возьмём произвольное $N \in \mathbb{N}$ и покажем, что $\sum\limits_{n=1}^{N} |a_{\sigma(n)}| \leqslant A_+$ (тогда возрастающая последовательность частичных сумм $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{\sigma(n)}|$ ограничена и ряд сходится).

Определим $M := \max\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(N)\}$. Тогда очевидно, что $\sum\limits_{n=1}^{N} |a_{\sigma(n)}| \leqslant \sum\limits_{n=1}^{M} |a_n|$, так как правая сумма содержит в себе и все слагаемые левой суммы. Но из этого неизбежно следует и $\sum\limits_{n=1}^{N} |a_{\sigma(n)}| \leqslant A_+$, потому что любая частичная сумма $\sum\limits_{n=1}^{M} |a_n|$ ряда с неотрицательными слагаемыми не больше всей его суммы. Соответственно, частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{\sigma(n)}|$ ограничены, откуда следует абсолютная сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$. $\square$

Доказательство сходимости к тому же значению: Докажем, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ сходится к A. Пусть есть некоторое $\varepsilon > 0$. Возьмём такое $N \in \mathbb{N}$, что $\sum\limits_{n=N}^{\infty} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. (Тогда $\left|\sum\limits_{n=1}^{N} a_n - A\right| = \left|\sum\limits_{N+1}^{\infty} a_n\right| \leqslant \sum\limits_{N+1}^{\infty} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.)

Обозначим $M := \max\{\sigma^{-1}(1), \sigma^{-1}(2) \ldots \sigma^{-1}(N)\}$.

Тогда для любого $\tilde{M} > M$:

$$\left|\sum_{m=1}^{\tilde{M}} a_{\sigma(m)} - A\right| \leqslant \left|\sum_{m=1}^{\tilde{M}} a_{\sigma(m)} - \sum_{n=1}^{N} a_n\right| + \left|\sum_{n=1}^{N} a_n - A\right| <$$

$$< \left|\sum_{\substack{m=1\ldots\tilde{M}\\ \sigma(m)>N}}^{\tilde{M}} a_{\sigma(m)}\right| + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum_{\substack{m=1\ldots\tilde{M}\\ \sigma(m)>N}}^{\tilde{M}} |a_{\sigma(m)}| + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=N+1}^{\max\{\sigma(1)\ldots\sigma(N)\}} |a_n| + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

□

Теперь пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно. В нём бесконечно много положительных слагаемых и бесконечно много отрицательных, так как иначе он сходился бы абсолютно. Через $\{p_n\}$ обозначим последовательность всех неотрицательных слагаемых, а через $\{q_n\}$, соответственно, отрицательных.

Раз $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\{a_n\}$ — сходящаяся к нулю последовательность, а значит и $\{p_n\}$ и $\{q_n\}$ тоже сходятся к нулю. При этом несложно понять, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ — расходятся, так как если бы оба этих ряда сходились, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходился бы абсолютно, а если бы один из них сходился, а другой — расходился, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ бы расходился.

Теорема 2 (Римана)**.** *Пусть ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится условно. Тогда:*

1. *для любого* $A \in \mathbb{R}$ *найдётся такая перестановка* σ, *что* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = A$;
2. *существует такая перестановка* σ, *что ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ *расходится к* $+\infty$;
3. *существует такая перестановка* σ, *что ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ *расходится к* $-\infty$;
4. *существует такая перестановка* σ, *что для ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ *последовательность частичных сумм не имеет ни конечного ни бесконечного предела.*

Доказательство.

1. Возьмём произвольное $A \in \mathbb{R}$.
   Найдём наименьшее $k_1 \in \mathbb{N}$ такое что $p_1 + p_2 + \cdots + p_{k_1} > A$.
   Найдём наименьшее $\tilde{k}_1 \in \mathbb{N}$ такое что $p_1 + p_2 + \cdots + p_{k_1} + q_1 + q_2 + \cdots + q_{\tilde{k}_1} < A$.
   Найдём наименьшее $k_2 \in \mathbb{N}$ такое что $p_1+p_2+\cdots+p_{k_1}+q_1+q_2+\cdots+q_{\tilde{k}_1}+p_{k_1+1}+\cdots+p_{k_2} > A$.

   И так далее. Существование требуемых k_j и $\tilde{k}_j$ следует из расходимости рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$. А в силу того, что $\{p_n\}$ и $\{q_n\}$ сходятся к нулю, построение выше и даст перестановку ряда, сумма которого равна A.

В остальных пунктах всё вполне аналогично.

2. Найдём наименьшее $k_1 \in \mathbb{N}$ такое что $p_1 + p_2 + \cdots + p_{k_1} > 1$.

   Найдём наименьшее $k_2 \in \mathbb{N}$ такое что $p_1 + p_2 + \cdots + p_{k_1} + q_1 + p_{k_1+1} + \cdots + p_{k_2} > 2$

   Найдём наименьшее $k_3 \in \mathbb{N}$ такое что $p_1 + p_2 + \cdots + p_{k_1} + q_1 + p_{k_1+1} + \cdots + p_{k_2} + q_2 + p_{k_2+1} + \cdots + p_{k_3} > 3$

   И так далее. Построение выше и даст перестановку ряда, расходящуюся к к $+\infty$.

3. Аналогично предыдущему.

4. Аналогично предыдущим, например, доводя сумму последовательно до 1, -1, 2, -2, 3, -3 и так далее.

$\square$

Произведение числовых рядов

Произведение пары конечных сумм записывается вполне естественным и понятным образом:

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \cdot \sum_{m=1}^{M} b_m = (a_1 + \cdots + a_n)(b_1 + \cdots + b_m) = \sum_{n,m=1}^{N,\ M} a_n b_m.$$

С бесконечными суммами всё менее понятно. Казалось бы,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{m=1}^{\infty} b_m = \sum_{n,m=1}^{\infty} a_n b_m,$$

однако объект в правой части равенства мы не определяли.

$$\begin{array}{c|ccccc}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots \\
b_4 & 16 & 15 & 14 & 13 & \dots \\
b_3 & 9 & 8 & 7 & 12 & \dots \\
b_2 & 4 & 3 & 6 & 11 & \dots \\
b_1 & 1 & 2 & 5 & 10 & \dots \\
\hline
 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots
\end{array}$$

Рис. 1: Нумерация по квадратам

Но по крайней мере множество пар индексов $(n,\ m)$ счетно, а значит и множество слагаемых в сумме счётно, то есть его можно занумеровать и таким образом превратить произведение рядов в обычный ряд. Вопрос лишь в том, как именно это сделать.

Теорема 3 (Коши о произведении абсолютно сходящихся рядов)**.** *Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$ и $\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m = B$, причём оба ряда абсолютно сходятся. Тогда ряд из произведений $a_n b_m$, занумерованных в любом порядке, сходится абсолютно и его сумма равна $A \cdot B$.*

Доказательство. По недавно доказанной теореме Коши о перестановках абсолютно сходящегося ряда нам достаточно доказать, что хотя бы при какой-то одной нумерации ряд из произведений абсолютно сходится к $A \cdot B$.

Будем использовать довольно очевидный способ нумерации, вполне достаточно описываемый картинкой слева, обычно называемый «нумерация по квадратам». Обозначим $A_+ := \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, $B_+ := \sum\limits_{m=1}^{\infty} |b_m|$, и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ — ряд из произведений, занумерованный выбранным нами способом. Тогда последовательность частичных сумм ряда из модулей c_k ограничена

$$\sum_{k=1}^{K} |c_k| \leqslant \sum_{k=1}^{K^2} |c_k| = \left(\sum_{n=1}^{K} |a_n|\right)\left(\sum_{m=1}^{K} |b_m|\right) \leqslant A_+ \cdot B_+,$$

то есть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ сходится абсолютно. Сумму этого ряда посчитать теперь совсем несложно:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \lim_{K\to\infty} \sum_{k=1}^{K} c_k = \lim_{K\to\infty} \sum_{k=1}^{K^2} c_k = \lim_{K\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{K} a_n\right)\left(\sum_{m=1}^{K} b_m\right) = A \cdot B$$

□

Если хоть один из рядов не сходится абсолютно, такое утверждение уже, вообще говоря, неверно. Так что для всех остальных случаев важно договориться о нумерации. Один из часто встречающихся удобных способов нумерации, который в дальнейшем будет подразумеваться по умолчанию — это так называемая «нумерация по треугольникам» или «произведение Коши».

$\vdots$	15	$\iddots$			
b_4	10	14	$\iddots$		
b_3	6	9	13	$\iddots$	
b_2	3	5	8	12	$\iddots$
b_1	1	2	4	7	11
	a_1	a_2	a_3	a_4	$\ldots$

Рис. 2: Нумерация по треугольникам

Определение 2. *Для рядов* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m$ *их произведением называется ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$, *где* $c_k = \sum\limits_{j=1}^{k} a_j b_{k+1-j}$.

Для примера, $c_1 = a_1 b_1$, $c_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1$, $c_3 = a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1$.

Теорема 4 (Мертенса)**.** *Пусть ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$ *и* $\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m = B$, *причём хотя бы один из рядов сходится абсолютно. Тогда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\sum\limits_{j=1}^{k} a_j b_{k+1-j}\right) = AB$.

Доказательство этой теоремы опустим (хотя оно и не является сложным).