Лекция 8 от 11.10.2016. Сегментация и кластеризация изображений с помощью поточных алгоритмов

Постановка задачи

Рассмотрим любую картинку (Айрат, привет):

Рис. 1: Произвольная картинка

И мы хотим отделить фон от человека. То есть присвоить каждому пикселю матрицы $n \times m$ какой-то label, к какому классу относится — фон или человек, например.

Фактически это единственный алгоритм машинного обучения, где используются алгоритмы на потоках.

Прим. Те, кто не помнят, что такое поток, могут закрывать эту лекцию.

Минимизация парно-сепарабельной энергии от бинарных переменных

Пусть у нас задан неориентированный граф $G(V, E)$. Для каждого $i \in V$ пусть x_i могут принимать значения только из $\{0, 1\}$.

Определение 1. *Назовём **энергией** (обозначение I) функцию из $\{0,1\}^{|V|} \to \mathbb{R}$:*

$$I(X) = \sum_{i \in V} \theta_i(x_i) + \sum_{(i,j) \in E} \theta_{ij}(x_i, x_j) + \theta_0,$$

где θ_i, θ_{ij} — какие-то потенциалы, а θ_0 — константа.

И наша задача заключается в том, что минимизировать $I(X)$. Известно, что если не вводить никаких дополнительных ограничений, то задача минимизации энергии является NP-трудной.

Давайте поймём, как это относится к сегментации. На выборке из огромного числа изображений мы можем с уверенностью говорить, о том, какие пиксели находятся рядом, какие далеко по цвету, поэтому можем поставить какие-то веса на рёбрах. После этого сегментировать изображение, чтобы были в одной и другой части как можно более тёплые цвета. Рассмотрим частный случай потенциалов, в котором задача становится полиномиальной:

- $\forall\ i \in V, \theta_i(0) \geqslant 0, \theta_i(1) \geqslant 0$;
- $\forall\ (i,j) \in E \Rightarrow \theta_{ij}(0,0) = \theta_{ij}(1,1) = 0, \theta_{ij}(0,1) \geqslant 0, \theta_{ij}(1,0) \geqslant 0$.

Тогда энергию можно задать так (легко проверить все случаи):

$$I(X) = \sum_{i \in V} (x_i\theta_i(1) + (1 - x_i)\theta_i(0)) + \sum_{(i,j) \in E} (x_i(1 - x_j)\theta_{ij}(1,0) + x_j(1 - x_i)\theta_{ij}(0,1)) + \theta_0,$$

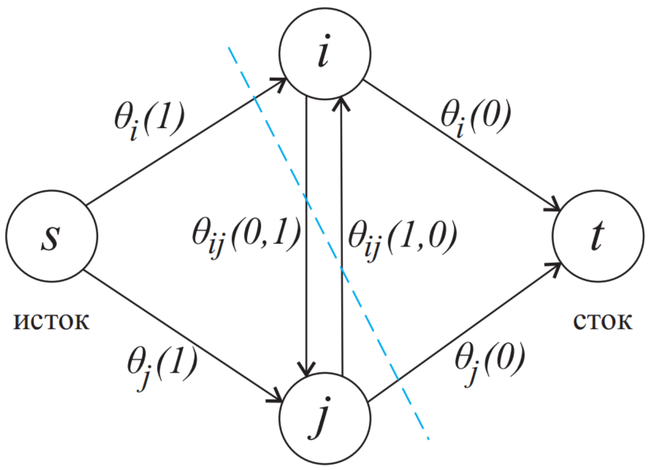

Рис. 2: Граф, построенный для минимизации энергии от двух переменных x_i, x_j. Разрез, отображенной пунктирной линией соответствует присваиванию $x_i = 1, x_j = 0$. Величина разреза составляет $\theta_i(1) + \theta_j(0) + \theta_{ij}(1,0)$

.

Теперь построим ориентированный граф $\overline{G} = (\overline{V}, \overline{E})$ по следующим правилам:

- В $\overline{V} = V \cup \{s, t\}$;
- Неориентированные рёбра делаем ориентированными в обе стороны, а для каждой вершины i проведем ещё ребра $(s, i), (i, t)$;
- $c(s, i) = \theta_i(1), c(i, t) = \theta_i(0)$, где $i \in V$;
- $\forall\ (i, j) \in E$ таким, что $i < j$ положим $c(i, j) = \theta_{ij}(0, 1), c(j, i) = \theta_{ij}(1, 0)$;
- Все вершины из V, которые попали в минимальный разрез S положим $x_i = 0$, остальным $x_i = 1$.

Тогда видно, что минимизация разреза эквивалентна этой задаче, что эквивалентно задаче максимального потока. Существует, конечно, много алгоритмов максимального потока, многие из них мы изучали, но в компьютерном зрении часто возникают алгоритмы Бойкова-Колмогорова и IBFS. С ними вы можете ознакомиться при желании самостоятельно.

Пример графа, построенного для энергии от 2-х переменных, и его разреза приведен на рис 2.

Репараметризация

Здесь мы рассмотрим, какие ещё энергии можно минимизировать при помощи разрезов графов. Назовём преобразования потенциалов, не меняющее энергию *репараметризацией*. Рассмотрим несколько видов репараметризаций:

- Вычитание константы — $\theta_i(0) -= \delta, \theta_i(1) -= \delta, \theta_0 += \delta$;
- Изменение потенциалов на ребрах. $\theta_{ij}(p, 0) -= \delta, \theta_{ij}(p, 1) -= \delta, \theta_i(p) += \delta$. Аналогично, если p на 2-ой координате.

Легко видеть из определения, что эти преобразования не меняют энергию.

Рассмотрим, что можно делать при помощи репараметризации потенциалов на ребрах. Для $(i, j) \in E$ пусть $\theta_{ij}(0, 0) = a$, $\theta_{ij}(1, 1) = b$, $\theta_{ij}(0, 1) = c$, $\theta_{ij}(1, 0) = d$.

После этого давайте 3 раза применим 2-ой пункт видов репараметризации:

- $\theta_{ij}(0, 0) -= a, \theta_{ij}(0, 1) -= a, \theta_i(0) += a$;
- $\theta_{ij}(0, 1) -= (c - a), \theta_{ij}(1, 1) -= (c - a), \theta_j(1) += c - a$;
- $\theta_{ij}(1, 1) -= (b - c + a), \theta_{ij}(1, 0) -= (b - c + a), \theta_i(1) += b - c + a$

Потом сделаем все потенциалы вершины неотрицательными по 1-ому пункту репараметризации. В итоге у нас ненулевым останется только $\theta_{ij}(1, 0) = d + c - a - b$. И если оно положительно, то мы можем применить наш алгоритм, то есть должно выполняться условие *субмодулярности*:

$$\theta_{ij}(0, 0) + \theta_{ij}(1, 1) \leqslant \theta_{ij}(0, 1) + \theta_{ij}(1, 0)$$

Данное условие вызвано тем, что для полиномиальной разрешимости задач о максимальном потоке и минимальном разрезе пропускные способности дуг графа должны быть неотрицательны.

α-расширение

Мы умели решать задачу только с одним объектом, теперь давайте попробуем приближенно решить задачу со многими объектами. Тот же граф, только теперь поставим в соответствие каждой вершине i — $y_i \in \{1, \ldots, K\}$ — классы разбиения. Рассмотрим следующую энергию:

$$I_M(X) = \sum_{i \in V} \psi_i(x_i) + \sum_{(i,j) \in E} \psi_{ij}(x_i, x_j) + \psi_0,$$

Буква M, скорее всего, идёт от английского слова Many — много.

Алгоритм α-расширение минимизирует энергию при помощи выполнения шагов между разметками y, каждый из которых гарантированно не увеличивает значение энергии. Каждый шаг представляет собой задачу минимизации энергии бинарных переменных вида. Неформально каждый шаг позволяет каждой переменной из y либо присвоить выбранное значение α, либо оставить текущее значение (расширение метки α).

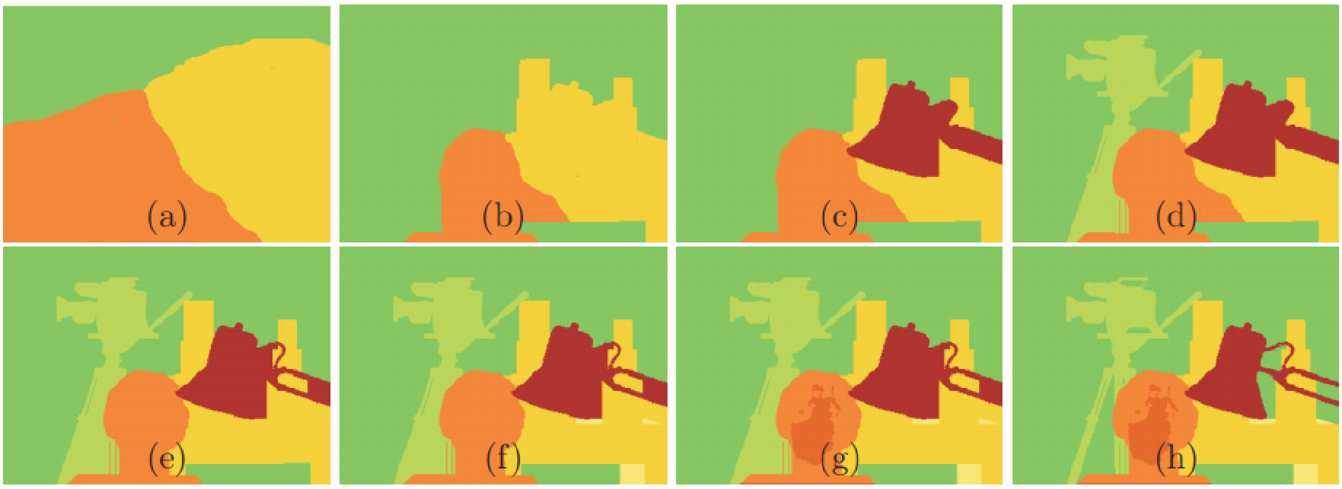

Рис. 3: Пример работы алгоритма α-расширения для задачи выровненного стерео. (a) – начальная разметка, далее последовательные расширения различных меток.

На каждом шаге алгоритма у нас есть текущее приближение y^0 и выбрана *расширяемая* метка $\alpha \in \{1, \ldots, K\}$.

- Граф, потенциалы сначала одинаковы;
- Применяем алгоритм о минимальном разрезе, теперь, если $x_i = 0$, то остовляем y_i^0, а если $x_i = 1$, то меняем переменную $y_i^0 = \alpha$;
- Меняем все потенциалы вершин: $\theta_i(0) = \psi_i(y_i^0), \theta_i(1) = \psi_i(\alpha)$;
- Меняем потенциалы на ребрах: $\theta_{ij}(0,0) = \psi_{ij}(y_i^0, y_j^0), \theta_{ij}(1,1) = \psi_{ij}(\alpha, \alpha), \theta_{ij}(0,1) = \psi_{ij}(y_i^0, \alpha)$, $\theta_{ij}(1,0) = \psi_{ij}(\alpha, y_j^0)$;
- Повторяем процедуру, сколько нам надо для реальной задачи.