

Лекция 04 от 26.09.2016

Признаки сходимости знакопеременных рядов и перестановки ряда

Снова признаки сходимости знакопеременных рядов

В прошлый раз мы с вами сформулировали и доказали признак Лейбница. Будем пользоваться в этот раз слабой его формулировкой:

Признак 1. Пусть последовательность $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно убывает к нулю. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ сходится.

Замечание 1. Для этого утверждения достаточно нестрогой монотонности.

Оказывается, этот признак является частным случаем более общего признака, который мы сейчас сформулируем и докажем.

Признак 2 (Признак Дирихле). Пусть частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ограничены (то есть $\exists C > 0$ такое, что $\forall n \ |A_n| = |a_1 + a_2 + \dots + a_n| < C$), а $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ — монотонно стремящаяся к нулю последовательность. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится (отметим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ может влѣгкую расходиться).

Подставляя сюда вместо a_n последовательность $a_n = (-1)^n$ (частичные суммы равны 1, 0, 1, 0, ... и ограничены), получаем формулировку первого утверждения.

Замечание 2. В признаке Лейбница дополнительно к утверждению и сходимости ряда присутствует оценка остатка, которой в признаке Дирихле нет.

Доказательство. Для доказательства мы применим трюк, подобный интегрированию по частям, именуемый в дискретном случае *преобразованием Абеля* («название умнее, чем само преобразование» © лектор).

Рассмотрим случай $b_n \searrow 0$ (случай $b_n \nearrow 0$ — аналогично).

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Найдѐм такое $N \in \mathbb{N}$, что

$$\forall n \geq N: b_n < \frac{\varepsilon}{4C}$$

Возьмѐм $m > N$, произвольное $p \in \mathbb{N}$ и оценим сумму $\left| \sum_{n=m+1}^{m+p} a_n b_n \right|$.

$$\begin{aligned} \sum_{n=m+1}^{m+p} a_n b_n &= \sum_{n=m+1}^{m+p} (A_n - A_{n-1}) b_n = \sum_{n=m+1}^{m+p} A_n b_n - \sum_{n=m+1}^{m+p} A_{n-1} b_n = \sum_{n=m+1}^{m+p} A_n b_n - \sum_{n=m}^{m+p-1} A_n b_{n+1} = \\ &= A_{m+p} b_{m+p} - A_m b_{m+1} + \sum_{n=m+1}^{m+p-1} A_n (b_n - b_{n+1}). \end{aligned}$$

Следовательно, используя монотонное убывание b_n :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=m+1}^{m+p} a_n b_n \right| &\leq |A_{m+p} b_{m+p}| + |A_m b_{m+1}| + \sum_{n=m+1}^{m+p-1} |A_n| |b_n - b_{n+1}| < \\ &< C \frac{\varepsilon}{4C} + C \frac{\varepsilon}{4C} + C \sum_{n=m+1}^{m+p-1} (b_n - b_{n+1}) = \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + C(b_{m+1} - b_{m+2} + b_{m+2} - b_{m+3} + \dots - b_{m+p}) = \frac{\varepsilon}{2} + C(b_{m+1} - b_{m+p}) < \frac{\varepsilon}{2} + C \frac{\varepsilon}{4C} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Итого, по критерию Коши ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится. \square

Пример 1. Попробуем исследовать на сходимость какой-нибудь ряд, хороший пример — ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n}$, при $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ или такой же с синусом. Пусть $a_n = \cos n\alpha$, $b_n = \frac{1}{n}$. Исследуем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ на ограниченность частичных сумм:

$$\begin{aligned} |A_n| &= \frac{|\cos \alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos n\alpha| \cdot |\sin(\alpha/2)|}{|\sin(\alpha/2)|} = \\ &= \left| \frac{-\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{3\alpha}{2} - \sin \frac{3\alpha}{2} + \sin \frac{5\alpha}{2} - \dots + \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) \alpha}{2 \left|\sin \frac{\alpha}{2}\right|} \right| = \\ &= \frac{\left| -\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) \alpha \right|}{2 \left|\sin \frac{\alpha}{2}\right|} \leq \frac{2}{2 \left|\sin \frac{\alpha}{2}\right|} = \frac{1}{\left|\sin \frac{\alpha}{2}\right|} \end{aligned}$$

Тогда тут применим признак Дирихле и ряд сходится. Теперь покажем его условную сходимость, то есть тот факт, что ряд из модулей расходится.

$$\frac{|\cos n\alpha|}{n} \geq \frac{(\cos n\alpha)^2}{n} = \frac{\cos 2n\alpha + 1}{2n} = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\frac{\cos 2n\alpha}{n}}_{\text{ряд сход.}} + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{ряд расх.}} \right)$$

Сформулируем и докажем ещё один признак.

Признак 3 (Признак Абеля). Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ — монотонная ограниченная последовательность. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Доказательство. Последовательность частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а значит ограничена. Последовательность $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна и ограничена, а значит имеет предел $B = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. То есть последовательность b_n представима в виде $B + \beta_n$, где β_n — монотонно стремящаяся к нулю последовательность.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (B + \beta_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n B + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \beta_n$$

Первое слагаемое сходится по условию (умножение на константу ничего не меняет), а второе по признаку Дирихле. \square

Перестановки ряда

Определение 1. Пусть σ — биекция (перестановка) $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Тогда говорят, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ является перестановкой ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Сформулируем две теоремы, которые докажем в следующий раз.

Теорема 1 (Коши). Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, и его сумма равна A . Тогда любая его перестановка также сходится абсолютно, и ее сумма равна A .

Теорема 2 (Римана). Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно. Тогда:

1. для любого $A \in \mathbb{R}$ найдётся такая перестановка σ , что $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = A$;
2. существует такая перестановка σ , что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ расходится к $+\infty$;
3. существует такая перестановка σ , что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ расходится к $-\infty$;
4. существует такая перестановка σ , что для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ последовательность частичных сумм предела не имеет.