Лекция 10 от 14.11.2016
Предел по базе. Перестановка пределов

В прошлый раз мы узнали, что такое база множества и понятие предела по базе, и теперь будем продолжать работать с этим.

Проблема равенства двойного предела

Рассмотрим такую задачу

Задача 1. *Пусть X и Y — непустые множества с базами $\mathcal{B}$ и $\mathcal{D}$ соответственно. Рассмотрим некоторую функцию $h\colon\ X \times Y \to \mathbb{R}$. Пусть про неё известно, что*

$$\forall x \in X\ \exists \lim_{\mathcal{D}} h(x,y) = f(x)$$
$$\forall y \in Y\ \exists \lim_{\mathcal{B}} h(x,y) = g(y)$$

Требуется узнать, равны ли пределы $\lim\limits_{\mathcal{B}} f(x)$ и $\lim\limits_{\mathcal{D}} g(x)$. То есть верно ли, что

$$\lim_{\mathcal{B}} \lim_{\mathcal{D}} h(x,y) = \lim_{\mathcal{D}} \lim_{\mathcal{B}} h(x,y)?$$

Возможно, некоторые скажут, что эти пределы равны всегда, но это отнюдь не так. Хороший контрпример — функция

$$h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{если } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Для неё легко посчитать повторные пределы в нуле и показать, что они не равны. Действительно,

$$\lim_{y \to 0} h(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \neq 0; \\ -1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда легко понять, что $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} h(x,y) = 1$. Аналогично показывается, что $\lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} h(x,y) = -1$.

Что же поможет нам идентифицировать такие ситуации?

Критерий Гордона

Теорема 1 (Критерий Гордона). *Следующие утверждения эквивалентны (внимание: здесь используются обозначения, аналогичные введённым ранее):*

1. *повторные пределы $\lim\limits_{\mathcal{B}} f(x)$ и $\lim\limits_{\mathcal{D}} g(y)$ существуют и равны;*
2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists B_\varepsilon \in \mathcal{B}\colon\ \forall x \in B_\varepsilon\ \exists D \in \mathcal{D}\colon\ \forall y \in D\ |h(x,y) - g(y)| < \varepsilon.$

Доказательство.

[(1) $\Rightarrow$ (2)] Пусть $\lim\limits_{\mathcal{B}} f(x) = \lim\limits_{\mathcal{D}} g(y) = A$.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon/3$. Тогда:

- $\exists B_0 \in \mathcal{B}\colon\ \forall x \in B_0\ |f(x) - A| < \varepsilon_1;$
- $\exists D_0 \in \mathcal{D}\colon\ \forall y \in D_0\ |g(y) - A| < \varepsilon_1.$

В качестве B_ε возьмём B_0. Тогда

$$\forall x \in B_0\ \exists \widetilde{D}_x \in \mathcal{D}\colon \forall y \in \widetilde{D}_x\ |h(x,y) - f(x)| < \varepsilon_1,$$
$$\exists D_x \in \widetilde{D}_x \cap D_0.$$

Тогда

$$\forall y \in D_x\ |h(x,y) - g(y)| \leqslant |h(x,y) - f(x)| + |f(x) - A| + |A - g(y)| < \varepsilon_1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = \varepsilon.$$

Получили требуемое.

$[(2) \Rightarrow (1)]$ Докажем для начала, что пределы есть. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon/4$. Перепишем условие второго пункта:

$$\exists B_{\varepsilon_1} \in \mathcal{B}\ \forall x \in B_{\varepsilon_1}\ \exists D_x \in \mathcal{D}\colon\ \forall y \in \mathcal{D}_x\ |h(x,y) - g(y)| < \varepsilon_1.$$

Пусть $x_1, x_2 \in B_{\varepsilon_1}$ — произвольные. Рассмотрим следующие элементы:

$$\exists D_{x_1} \in \mathcal{D}\colon\ \forall y \in D_{x_1}\colon\ |h(x_1,y) - g(y)| < \varepsilon_1;$$
$$\exists D_{x_2} \in \mathcal{D}\colon\ \forall y \in D_{x_2}\colon\ |h(x_2, y) - g(y)| < \varepsilon_1;$$
$$\exists \widetilde{D}_{x_1} \in \mathcal{D}\colon\ \forall y \in \widetilde{D}_{x_1}\colon\ |h(x_1,y) - f(x_1)| < \varepsilon_1;$$
$$\exists \widetilde{D}_{x_2} \in \mathcal{D}\colon\ \forall y \in \widetilde{D}_{x_2}\colon\ |h(x_2,y) - f(x_2)| < \varepsilon_1.$$

Возьмём произвольное $y \in D_{x_1} \cap D_{x_2} \cap \widetilde{D}_{x_1} \cap \widetilde{D}_{x_2}$. Тогда:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant |f(x_1) - h(x_1, y)| + |h(x_1, y) - g(y)| + |g(y) - h(x_2, y)| + |h(x_2, y) - f(x_2)| <$$
$$< \varepsilon_1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = \varepsilon.$$

Следовательно, по критерию Коши $\exists \lim\limits_{\mathcal{B}} f(x) = A$. Докажем, что $\exists \lim\limits_{\mathcal{D}} g(y) = A$.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Найдём $B_0 \in \mathcal{B}$ такое, что $\forall x \in B_0\ |f(x) - A| < \varepsilon/3$. Найдём такое $B_{\varepsilon/3} \in \mathcal{B}$, что:

$$\forall x \in B_{\varepsilon/3}\ \exists D_x \in \mathcal{D}\colon\ \forall y \in D_x\ |h(x,y) - g(y)| < \varepsilon/3.$$

Зафиксируем $x \in B_0 \cap B_{\varepsilon/3}$. Рассмотрим следующие элементы:

$$\exists D_x \in \mathcal{D}\colon\ \forall y \in D_x\ |h(x,y) - g(y)| < \varepsilon/3;$$
$$\exists \widetilde{D}_x \in \mathcal{D}\colon\ \forall y \in \widetilde{D}_x\ |h(x,y) - f(x)| < \varepsilon/3.$$

Тогда:

$$\exists D \in \mathcal{D},\ D \subset D_x \cap \widetilde{D}_x\colon\ \forall y \in D;$$
$$|g(y) - A| \leqslant |g(y) - h(x,y)| + |h(x,y) - f(x)| + |f(x) - A| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

Получили требуемое. □

Следствия

Теорема 2. *Пусть $X \subset \mathbb{R}$, x_0 — его предельная точка (конечная или бесконечная). Пусть*

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists \lim_{X \ni x \to x_0} f_n(x) = a_n,$$

а также $f_n(x) \overset{X}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} f(x)$. Тогда существуют и равны пределы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} f(x)$.

Доказательство. Так как $f_n(x) \overset{X}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} f(x)$, то

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ \forall x \in X\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Для существования предела необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \delta(x_0) \cap X\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Применяя критерий Гордона, получаем требуемое $\square$

Следствие 1. *Пусть I — невырожденный промежуток на $\mathbb{R}$ и для последовательности функций $f_n(x)$ известно, что $f_n(x) \in C(I)$ и $f_n(x) \overset{I}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} f(x)$ Тогда $f(x) \in C(I)$.*