

Лекция 05 от 03.09.2016

Перестановки рядов и произведения рядов

Основные теоремы о перестановках рядов

Напомним основное для этой лекции определение.

Определение 1. Пусть σ — биекция (перестановка) $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Тогда говорят, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ является перестановкой ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Теорема 1 (Коши). Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, и его сумма равна A . Тогда любая его перестановка $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ также сходится абсолютно, и её сумма равна A .

Доказательство абсолютной сходимости: Докажем, что $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ абсолютно сходится. Обозначим $A_+ := \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Возьмём произвольное $N \in \mathbb{N}$ и покажем, что $\sum_{n=1}^N |a_{\sigma(n)}| \leq A_+$ (тогда возрастающая последовательность частичных сумм $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{\sigma(n)}|$ ограничена и ряд сходится).

Определим $M := \max\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(N)\}$. Тогда очевидно, что $\sum_{n=1}^N |a_{\sigma(n)}| \leq \sum_{n=1}^M |a_n|$, так как правая сумма содержит в себе и все слагаемые левой суммы. Но из этого неизбежно следует и $\sum_{n=1}^N |a_{\sigma(n)}| \leq A_+$, потому что любая частичная сумма $\sum_{n=1}^M |a_n|$ ряда с неотрицательными слагаемыми не больше всей его суммы. \square

Доказательство сходимости к тому же значению: Докажем, что $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ сходится к A . Пусть есть некоторое $\varepsilon > 0$. Возьмём такое $N \in \mathbb{N}$, что $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. (Тогда $\left| \sum_{n=1}^N a_n - A \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.)

Обозначим $M := \max\{\sigma^{-1}(1), \sigma^{-1}(2), \dots, \sigma^{-1}(N)\}$.

Тогда для любого $\tilde{M} > M$:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{m=1}^{\tilde{M}} a_{\sigma(m)} - A \right| &\leq \left| \sum_{m=1}^{\tilde{M}} a_{\sigma(m)} - \sum_{n=1}^N a_n \right| + \left| \sum_{n=1}^N a_n - A \right| < \\ &< \left| \sum_{\substack{m=1 \dots \tilde{M} \\ \sigma(m) > N}} a_{\sigma(m)} \right| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{\substack{m=1 \dots \tilde{M} \\ \sigma(m) > N}} |a_{\sigma(m)}| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\max\{\sigma(1) \dots \sigma(N)\}} |a_n| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

\square

Теперь пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно. В нём бесконечно много положительных слагаемых и бесконечно много отрицательных, так как иначе он сходил бы абсолютно. Через $\{p_n\}$ обозначим последовательность всех неотрицательных слагаемых, а через $\{q_n\}$, соответственно, отрицательных.

Раз $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\{a_n\}$ — сходящаяся к нулю последовательность, а значит и $\{p_n\}$ и $\{q_n\}$ тоже сходятся. При этом несложно понять, что $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ — расходятся. Так как если бы оба этих ряда сходились, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходил бы абсолютно, а если бы один из них сходил, а другой — расходился, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ бы расходился.

Теорема 2 (Римана). Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно. Тогда:

1. для любого $A \in \mathbb{R}$ найдётся такая перестановка σ , что $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = A$;
2. существует такая перестановка σ , что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ расходится к $+\infty$;
3. существует такая перестановка σ , что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ расходится к $-\infty$;
4. существует такая перестановка σ , что для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ последовательность частичных сумм не имеет ни конечного ни бесконечного предела.

Доказательство.

1. Возьмём произвольное $A \in \mathbb{R}$.

Найдём наименьшее $k_1 \in \mathbb{N}$ такое что $p_1 + p_2 + \dots + p_{k_1} > A$.

Найдём наименьшее $\tilde{k}_1 \in \mathbb{N}$ такое что $p_1 + p_2 + \dots + p_{k_1} + q_1 + q_2 + \dots + q_{\tilde{k}_1} < A$

Найдём наименьшее $k_2 \in \mathbb{N}$ такое что $p_1 + p_2 + \dots + p_{k_1} + q_1 + q_2 + \dots + q_{\tilde{k}_1} + p_{k_1+1} + \dots + p_{k_2} > A$

И так далее. В силу того, что $\{p_n\}$ и $\{q_n\}$ сходятся к нулю, построение выше и даст перестановку ряда, сумма которой равна A .

В остальных пунктах всё вполне аналогично.

2. Найдём наименьшее $k_1 \in \mathbb{N}$ такое что $p_1 + p_2 + \dots + p_{k_1} > 1$.

Найдём наименьшее $k_2 \in \mathbb{N}$ такое что $p_1 + p_2 + \dots + p_{k_1} + q_1 + p_{k_1+1} + \dots + p_{k_2} > 2$

Найдём наименьшее $k_3 \in \mathbb{N}$ такое что $p_1 + p_2 + \dots + p_{k_1} + q_1 + p_{k_1+1} + \dots + p_{k_2} + q_2 + p_{k_2+1} + \dots + p_{k_3} > 3$

И так далее. Построение выше и даст перестановку ряда, расходящуюся к $+\infty$.

3. Аналогично предыдущему.

4. Аналогично предыдущим, например, доводя сумму последовательно до 1, -1, 2, -2, 3, -3 и так далее.

□

Произведение числовых рядов

Произведение пары конечных сумм записывается вполне естественным и понятным образом:

$$\sum_{n=1}^N a_n \cdot \sum_{m=1}^M b_m = (a_1 + \dots + a_N)(b_1 + \dots + b_M) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M a_n b_m$$

С бесконечными суммами всё менее понятно. Казалось бы,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{m=1}^{\infty} b_m = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_n b_m,$$

однако объект в правой части равенства мы не определяли.

\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots
b_4	16	15	14	13	\dots
b_3	9	8	7	12	\dots
b_2	4	3	6	11	\dots
b_1	1	2	5	10	\dots
	a_1	a_2	a_3	a_4	\dots

Рис. 1: Нумерация по квадратам

Но по крайней мере множество пар индексов (n, m) , а значит и множество слагаемых в сумме счётно, то есть его можно занумеровать и таким образом превратить произведение рядов в обычный ряд. Вопрос лишь в том, как именно это сделать.

Теорема 3 (Коши о произведении абсолютно сходящихся рядов). Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ и $\sum_{m=1}^{\infty} b_m = B$, причём оба ряда абсолютно сходятся. Тогда ряд из произведений $a_n b_m$, занумерованных в любом порядке, сходится абсолютно и его сумма равна $A \cdot B$.

Доказательство. По недавно доказанной теореме Коши о перестановках абсолютно сходящегося ряда нам достаточно доказать, что хотя бы при какой-то одной нумерации ряд из произведений абсолютно сходится к $A \cdot B$.

Будем использовать довольно очевидный способ нумерации, вполне достаточно описываемый картинкой слева, обычно называемый «нумерация по квадратам». Обозначим $A_+ := \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$,

$B_+ := \sum_{m=1}^{\infty} |b_m|$, и $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ – ряд из произведений, занумерованный выбранным нами способом.

Тогда последовательность частичных сумм ряда из модулей c_k ограничена

$$\sum_{k=1}^K |c_k| \leq \sum_{k=1}^{K^2} |c_k| = \left(\sum_{n=1}^K |a_n| \right) \left(\sum_{m=1}^K |b_m| \right) \leq A_+ \cdot B_+,$$

то есть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ сходится абсолютно. Сумму этого ряда посчитать теперь совсем несложно:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^K c_k = \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{K^2} c_k = \lim_{K \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^K a_n \right) \left(\sum_{m=1}^K b_m \right) = A \cdot B$$

□

Если хоть один из рядов не сходится абсолютно, такое утверждение уже неверно. Так что для всех остальных случаев важно договориться о нумерации. Один из часто встречающихся удобных способов нумерации, который в дальнейшем будет подразумеваться по умолчанию — это так называемая «нумерация по треугольникам» или «произведение Коши».

Определение 2. Для рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ их произведением называется ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$, где $c_k = \sum_{j=0}^k a_k b_{k-j}$

\vdots	15	\ddots			
b_4	10	14	\ddots		
b_3	6	9	13	\ddots	
b_2	3	5	8	12	\ddots
b_1	1	2	4	7	11
	a_1	a_2	a_3	a_4	\dots

Рис. 2: Нумерация по треугольникам

Теорема 4 (Мертенса). Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ и $\sum_{m=1}^{\infty} b_m = B$, причём хотя бы один из рядов сходится абсолютно. Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^k a_k b_{k-j} = AB$.