

Лекции по предмету Математический анализ-3

Группа лектория ФКН ПМИ 2016-2017
Михаил Дискин, Анастасия Иовлева, Руслан Хайдуров.

2016/2017 учебный год

Содержание

1	Лекция 01 от 05.09.2016	2
2	Лекция 02 от 12.09.2016 Признаки сравнения и признаки сходимости неотрицательных рядов.	5

Лекция 01 от 05.09.2016

Определение 1. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность действительных чисел. Числовым рядом называется выражение вида $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, записываемое также как $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$

Определение 2. N -й частичной суммой называется сумма первых N членов.

$$S_n = a_1 + \dots + a_n$$

Определение 3. Последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется последовательностью частичных сумм.

Говорят, что ряд *сходится* (к числу A), если (к числу A) сходится последовательность его частичных сумм. Аналогично, ряд *расходится* к $+\infty$ (к $-\infty$), если к $+\infty$ (к $-\infty$) расходится последовательность его частичных сумм. В противном случае, если последовательность частичных сумм расходится, ряд называют *расходящимся*.

Определение 4. Суммой ряда называется предел $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, если он сходится или расходится к $\pm\infty$.

Вспоминая, что $a_n = S_n - S_{n-1}$, можно заключить, что особой разницы между самим рядом и последовательностью его частичных сумм нет — из одного можно получить другое и наоборот. Следовательно, вместо ряда можно рассматривать его частичные суммы.

Пример 1 (Предел Коши для последовательностей). Последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию Коши, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall m, k > N \Rightarrow |S_m - S_k| < \varepsilon.$$

Таким образом, мы нахаляву получили первую теорему.

Теорема 1 (Критерий Коши сходимости ряда). Для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall k > N, \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow |a_{k+1} + a_{k+2} \dots + a_{k+p}| < \varepsilon.$$

Отсюда сразу же очевидно следует утверждение.

Утверждение 1 (Необходимое условие сходимости ряда). Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Доказательство. Ряд сходится, значит,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall k > N, p = 1 \Rightarrow |a_{k+1}| < \varepsilon.$$

А это и есть определение предела, равного нулю.

Другой способ доказательства: вспомним, что $a_n = S_n - S_{n-1}$ и что S_n , как и S_{n-1} , стремятся к одному пределу при стремлении n к бесконечности. Итого, получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0.$$

□

Теперь сформулируем и докажем несколько тривиальных свойств.

Свойства 1. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B$.

Доказательство. Это напрямую следует из свойств предела последовательности и того, что $S_n^{a+b} = S_n^a + S_n^b$. \square

Свойства 2. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha A$ для любого действительного α .

Доказательство. Аналогично вытекает из свойств предела последовательности. \square

Введём важное определение.

Определение 5. Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Обозначим некоторые его подсуммы,

$$\underbrace{a_1 + \dots + a_{n_1}}_{b_1} + \underbrace{a_{n_1+1} + \dots + a_{n_2}}_{b_2} + \underbrace{a_{n_2+1} + \dots + a_{n_3}}_{b_3} + a_{n_3+1} + \dots,$$

где $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел. В таком случае говорят, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ получен из исходного расстановкой скобок.

Утверждение 2. Если ряд сходится или расходится к $\pm\infty$, то после любой расстановки скобок он сходится, неформально говоря, туда же.

Доказательство. Достаточно заметить, что частичные суммы ряда, полученного расстановкой скобок, образуют подпоследовательность в последовательности частичных сумм исходного ряда.

$$S_1^b = S_{n_1}^a, \quad S_2^b = S_{n_2}^a, \quad S_3^b = S_{n_3}^a, \quad \dots$$

Осталось только вспомнить, что любая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится туда же, куда и сама последовательность. \square

Обратное неверно!!! Пример такого ряда:

$$1 - 1 + 1 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n.$$

При расстановке скобок $(1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0$ получается сходящийся ряд, в то время как исходный ряд расходится, хотя бы потому что не выполняется необходимое условие о стремлении членов ряда к нулю.

Однако сходимост элементов к нулю не единственное препятствие. Например, можно «распилить» единицы из предыдущего примера и получить следующий ряд:

$$1 - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

Его элементы стремятся к нулю, но он все еще расходится. Однако расставив скобки, можно получить сходящийся ряд:

$$(1 - 1) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) + \dots = 0.$$

Утверждение 3. Если $a_n \rightarrow 0$ и длины скобок ограничены (т.е. существует такое $C \in \mathbb{R}$, что $n_{k+1} - n_k < C$ при всех k), то из сходимости ряда, полученного расстановкой таких скобок, следует сходимость исходного ряда.

Доказательство. Доказать предлагается самостоятельно. Указание: ограничить через $\frac{\varepsilon}{C}$. \square

Утверждение 4. Изменение, удаление или добавление конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость.

Поговорим теперь об абсолютной сходимости.

Определение 6. Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, то говорят, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно.

Определение 7. Если ряд сходится, но не сходится абсолютно, то говорят, что ряд сходится условно.

Утверждение 5. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, то он сходится.

Доказательство. Сразу следует из критерия Коши. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Так как ряд из модулей сходится, то

$$\exists N \in \mathbb{N}: \forall k > N, \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{k+1}^{k+p} |a_k| < \varepsilon$$

Тогда

$$\left| \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n \right| \leq \sum_{n=k+1}^{k+p} |a_n| < \varepsilon$$

\square

Определение 8. Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ N -м хвостом называется сумма $r_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$.

Для сходящегося ряда очевидно, что $r_n \in \mathbb{R}$.

Лекция 02 от 12.09.2016

Признаки сравнения и признаки сходимости неотрицательных рядов.

В рамках этой лекции будем рассматривать только ряды с неотрицательными членами!

Очевидно, что последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ в таких рядах возрастает. Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \in [0, +\infty]$.

Утверждение 1 (Критерий сходимости рядов с неотрицательными членами). *Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена сверху.*

Это позволяет сократить запись для таких рядов.

Обозначение 1. *Ряд сходится: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$; ряд расходится: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.*

Признак 1 (Первый признак сравнения). *Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ — два ряда с неотрицательными членами, и начиная с некоторого места имеет место неравенство $a_n \leq b_n$. Тогда:*

1. *если $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$;*
2. *если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, то $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.*

Доказательство. Достаточно доказать для случая, когда $a_n \leq b_n$ уже при $n \geq 1$.

1. Рассмотрим частичные суммы рядов: $S_n^a = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, $S_n^b = b_1 + b_2 + \dots + b_n$. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^b = C$ для некоторого C . Последовательность S_n^b очевидно неубывающая, так что $S_n^b \leq C$ для любого n . А значит, для всех n верно, что

$$0 \leq S_n^a = a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq b_1 + b_2 + \dots + b_n \leq C.$$

Это показывает, что S_n^a монотонная ограниченная последовательность, а значит она обязательно имеет предел. Так что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

2. Прямо следует из первого пункта. □

Признак 2 (Второй признак сравнения). *Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ — два ряда с неотрицательными членами и начиная с некоторого места $a_n \asymp b_n$ (то есть $\exists c, C > 0$ такие что $c < \frac{a_n}{b_n} < C$). Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство. Прямо следует из предыдущего признака, так как $cb_n \leq a_n \leq Cb_n$. □

Замечание 1. *Если $a_n \sim b_n$ при $n \rightarrow \infty$, то $a_n \asymp b_n$.*

Пример 1 (тривиальный). $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ — расходится.

Признак 3 (Третий признак сравнения). Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ — два ряда с неотрицательными членами и начиная с некоторого места $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Тогда:

1. если $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$;
2. если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, то $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.

Доказательство. По сути говоря, данный признак сравнивает скорости роста, а в остальном это практически то же самое, что первый признак сравнения. Что ж, сведем его к нему.

Достаточно считать, что $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ уже при $n \geq 1$. Для любого натурального k мы можем представить элементы a_k и b_k следующим образом:

$$a_k = a_1 \frac{a_2}{a_1} \frac{a_3}{a_2} \dots \frac{a_k}{a_{k-1}}$$

$$b_k = b_1 \frac{b_2}{b_1} \frac{b_3}{b_2} \dots \frac{b_k}{b_{k-1}}$$

Согласно условию, $\frac{a_i}{a_{i-1}} \leq \frac{b_i}{b_{i-1}}$ при $1 \leq i \leq k$. Таким образом, мы почти получили, что $a_k \leq b_k$, за исключением того, что мы не знаем, как соотносятся элементы a_1 и b_1 . Что ж, избавимся от них, введя новый ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b'_n = \frac{a_1}{b_1} \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Для него будет выполняться неравенство $a_k \leq b'_k$. Тем самым, мы свели задачу к первому признаку сравнения. \square

Замечание 2. Отметим, что для любого $q \in [0, 1)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ сходится. Действительно,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N q^n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{q(q^N - 1)}{q - 1} = \frac{q}{1 - q}.$$

Признак 4 (Признак д'Аламбера).

1. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — ряд с неотрицательными членами, и начиная с некоторого существует такое $q \in [0, 1)$, что $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.
2. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — ряд с неотрицательными членами, и начиная с некоторого места $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$. Тогда $a_n \not\rightarrow 0$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Доказательство.

1. Следует из третьего признака сравнения при $b_n = q^n$.
2. Очевидно из самой формулировки.

□

Однако чаще используется признак д'Аламбера в предельной форме.

Следствие 1 (Предельный признак д'Аламбера). Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. если $\alpha < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;
2. если $\alpha > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится;
3. если $\alpha = 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ может как сходиться, так и расходиться.

Доказательство.

1. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$ и $\alpha < 1$, то $\exists N \in \mathbb{N}$ такой, что при любом $n > N$ $\alpha - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \alpha + \varepsilon$, причём $\alpha + \varepsilon < 1$. А значит, ряд сходится по признаку д'Аламбера.
2. Аналогично.
3. Например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ — расходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ — сходится.

□

Заметим, что признак д'Аламбера довольно грубый, то есть существует некоторая «мертвая зона» рядов, про сходимость которых он ничего не может сказать (например, про ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$).

Следствие 2. Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами верно, что $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, то ряд сходится, а если $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, то расходится.

Признак 5 (Радикальный признак Коши). Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами.

1. Пусть начиная с некоторого места существует такое $q \in [0, 1)$, что $\sqrt[n]{a_n} \leq q$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.
2. Пусть существует бесконечное множество индексов n , для которых верно, что $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$. Тогда $a_n \not\rightarrow 0$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Доказательство.

1. Следует из первого признака сравнения при $b_n = q^n$.
2. Очевидно по определению расходимости ряда.

□

Аналогично признаку д'Аламбера, можно сформулировать данный признак в предельной форме.

Следствие 3 (Радикальный признак Коши в предельной форме). Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = A$, где $A \in [0, \infty]$. Тогда:

1. если $A < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;
2. если $A > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Или, более общо:

1. если $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;
2. если $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, то $a_n \not\rightarrow 0$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Заметим, что так как тут используется только верхний предел, этот признак несколько удобней, чем предельный признак д'Аламбера.

Пример 2. Рассмотрим следующий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n+(-1)^n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \dots$$

Как можно заметить, у соседних элементов ряда наблюдается то рост в 2 раза, то убывание в 8 раз, и предельный признак д'Аламбера ничего не может сказать про сходимость. Однако воспользуемся радикальным признаком Коши:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^{-n+(-1)^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-1+(\frac{-1}{n})^n} = \frac{1}{2}.$$

Как мы видим, ряд сходится.

Упражнение 1. Есть ли обратный пример, когда радикальный признак Коши не помогает, в отличие от признака д'Аламбера?

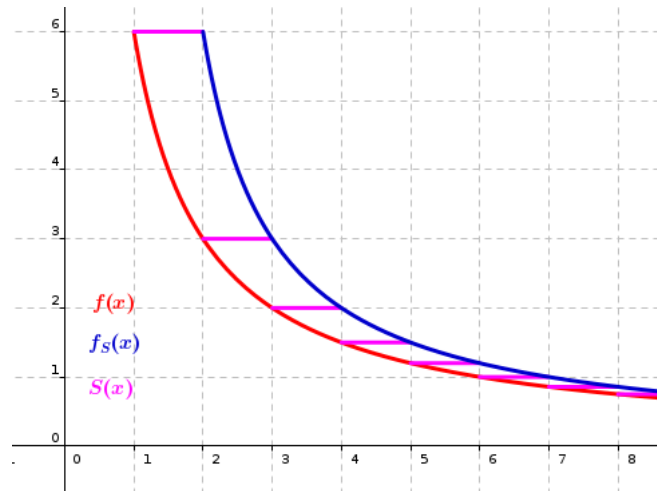
Для разных рядов может быть удобнее использовать разные признаки сходимости. Например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n!$ однозначно лучше исследовать с помощью признака д'Аламбера.

Но у нас все еще есть «мертвая зона» из тех рядов, про сходимость которых данные признаки ничего не могут сказать. И с этим хочется что-то сделать!

Признак 6 (Интегральный признак Коши–Маклорена). Пусть $f(x) \geq 0$ — невозрастающая на $[1, \infty]$ функция. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ и $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно. Причем в случае сходимости

$$\int_{N+1}^{\infty} f(x)dx \leq r_N = f(N+1) + f(N+2) + \dots \leq \int_N^{\infty} f(x)dx.$$

Доказательство. Для удобства введем две вспомогательные функции: $f_S(x) = f(x-1)$ и $S(x) = f(\lfloor x \rfloor)$.



Тогда мы получаем, что $f(1) + f(2) + \dots + f(N) = \int_1^N S(x)dx$. Значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл $\int_1^{\infty} S(x)dx$. В свою очередь, несложно заметить, что сходимость этого интеграла влечет за собой сходимость интеграла $\int_1^{\infty} f(x)dx$, так как при наших ограничениях $S(x) \geq f(x)$.

Отсюда же следует оценка для остатка. Действительно:

$$\begin{aligned} r_N &= \int_{N+1}^{\infty} S(x)dx \leq \int_{N+1}^{\infty} f_S(x)dx = \int_{N+1}^{\infty} f(x-1)dx = \int_N^{\infty} f(x)dx, \\ r_N &= \int_{N+1}^{\infty} S(x)dx \geq \int_{N+1}^{\infty} f(x)dx. \end{aligned}$$

□

Пример 3. Допустим, мы хотим узнать сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$. Но поскольку ряд бесконечен, мы хотим обойтись первыми 100 членами, а чтобы оценить погрешность, посчитаем соответствующий интеграл.

$$\int_n^{\infty} \frac{1}{x^3} = -\frac{1}{2x^2} \Big|_n^{\infty} = \frac{1}{2n^2}$$

Итого,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^3} + \theta, \quad \text{где } \theta \in \left[\frac{1}{2 \cdot 101^2}, \frac{1}{2 \cdot 100^2} \right].$$

Подобным способом можно оценить асимптотику частичных сумм сходящегося ряда, например:

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{n}} \sim 2\sqrt{n}$$

Выводится это аналогично, просто теперь мы функциями $f(x)$, $f_S(x)$ и $S(x)$ оцениваем не остаток, а частичную сумму.