

Лекция 10 от 14.11.2016

Предел по базе. Перестановка пределов

В прошлый раз мы узнали, что такое база множества и понятие предела по базе, и теперь будем продолжать работать с этим.

Проблема равенства двойного предела

Рассмотрим такую задачу

Задача 1. Пусть X и Y — непустые множества с базами \mathcal{B} и \mathcal{D} соответственно. Рассмотрим некоторую функцию $h: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$. Пусть про неё известно, что

$$\forall x \in X \exists \lim_{\mathcal{D}} h(x, y) = f(x)$$

$$\forall y \in Y \exists \lim_{\mathcal{B}} h(x, y) = g(y)$$

Требуется узнать, равны ли пределы $\lim_{\mathcal{B}} f(x)$ и $\lim_{\mathcal{D}} g(y)$. То есть верно ли, что

$$\lim_{\mathcal{B}} \lim_{\mathcal{D}} h(x, y) = \lim_{\mathcal{D}} \lim_{\mathcal{B}} h(x, y)?$$

Возможно, некоторые скажут, что эти пределы равны всегда, но это отнюдь не так. Хороший контрпример — функция

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{если } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Для неё легко посчитать повторные пределы в нуле и показать, что они не равны. Действительно,

$$\lim_{y \rightarrow 0} h(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \neq 0; \\ -1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда легко понять, что $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} h(x, y) = 1$. Аналогично показывается, что $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} h(x, y) = -1$.

Что же поможет нам идентифицировать такие ситуации?

Критерий Гордона

Теорема 1 (Критерий Гордона). Следующие утверждения эквивалентны (внимание: здесь используются обозначения, аналогичные введённым ранее):

1. повторные пределы $\lim_{\mathcal{B}} f(x)$ и $\lim_{\mathcal{D}} g(y)$ существуют и равны;
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists B_\varepsilon \in \mathcal{B}: \forall x \in B_\varepsilon \exists D_x \in \mathcal{D}: \forall y \in D_x |h(x, y) - g(y)| < \varepsilon$.

Доказательство.

[(1) \Rightarrow (2)] Пусть $\lim_{\mathcal{B}} f(x) = \lim_{\mathcal{D}} g(y) = A$.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon/3$. Тогда:

- $\exists B_0 \in \mathcal{B}: \forall x \in B_0 |f(x) - A| < \varepsilon_1;$
- $\exists D_0 \in \mathcal{D}: \forall y \in D_0 |g(y) - A| < \varepsilon_1.$

В качестве B_ε возьмём B_0 . Тогда

$$\begin{aligned} \forall x \in B_0 \exists \tilde{D}_x \in \mathcal{D}: \forall y \in \tilde{D}_x |h(x, y) - f(x)| < \varepsilon_1, \\ \exists D_x \in \tilde{D}_x \cap D_0. \end{aligned}$$

Тогда

$$\forall y \in D_x |h(x, y) - g(y)| \leq |h(x, y) - f(x)| + |f(x) - A| + |A - g(y)| < \varepsilon_1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = \varepsilon.$$

Получили требуемое.

[(2) \Rightarrow (1)] Докажем для начала, что пределы есть. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon/4$. Перепишем условие второго пункта:

$$\exists B_{\varepsilon_1} \in \mathcal{B} \forall x \in B_{\varepsilon_1} \exists D_x \in \mathcal{D}: \forall y \in D_x |h(x, y) - g(y)| < \varepsilon_1.$$

Пусть $x_1, x_2 \in B_{\varepsilon_1}$ — произвольные. Рассмотрим следующие элементы:

$$\begin{aligned} \exists D_{x_1} \in \mathcal{D}: \forall y \in D_{x_1}: |h(x_1, y) - g(y)| < \varepsilon_1; \\ \exists D_{x_2} \in \mathcal{D}: \forall y \in D_{x_2}: |h(x_2, y) - g(y)| < \varepsilon_1; \\ \exists \tilde{D}_{x_1} \in \mathcal{D}: \forall y \in \tilde{D}_{x_1}: |h(x_1, y) - f(x_1)| < \varepsilon_1; \\ \exists \tilde{D}_{x_2} \in \mathcal{D}: \forall y \in \tilde{D}_{x_2}: |h(x_2, y) - f(x_2)| < \varepsilon_1. \end{aligned}$$

Возьмём произвольное $y \in D_{x_1} \cap D_{x_2} \cap \tilde{D}_{x_1} \cap \tilde{D}_{x_2}$. Тогда:

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &\leq |f(x_1) - h(x_1, y)| + |h(x_1, y) - g(y)| + |g(y) - h(x_2, y)| + |h(x_2, y) - f(x_2)| < \\ &< \varepsilon_1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно, по критерию Коши $\exists \lim_B f(x) =: A$. Докажем, что $\exists \lim_D g(y) = A$.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Найдём $B_0 \in \mathcal{B}$ такое, что $\forall x \in B_0 |f(x) - A| < \varepsilon/3$. Найдём такое $B_{\varepsilon/3} \in \mathcal{B}$, что:

$$\forall x \in B_{\varepsilon/3} \exists D_x \in \mathcal{D}: \forall y \in D_x |h(x, y) - g(y)| < \varepsilon/3.$$

Зафиксируем $x \in B_0 \cap B_{\varepsilon/3}$. Рассмотрим следующие элементы:

$$\begin{aligned} \exists D_x \in \mathcal{D}: \forall y \in D_x |h(x, y) - g(y)| < \varepsilon/3; \\ \exists \tilde{D}_x \in \mathcal{D}: \forall y \in \tilde{D}_x |h(x, y) - f(x)| < \varepsilon/3. \end{aligned}$$

Тогда $\exists D \in \mathcal{D}: D \subset D_x \cap \tilde{D}_x$ и $\forall y \in D$:

$$|g(y) - A| \leq |g(y) - h(x, y)| + |h(x, y) - f(x)| + |f(x) - A| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

Получили требуемое. □

Следствия

Теорема 2. Пусть $X \subset \mathbb{R}$, x_0 — его предельная точка (конечная или бесконечная). Пусть

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists \lim_{X \ni x \rightarrow x_0} f_n(x) = a_n,$$

а также $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} f(x)$. Тогда существуют и равны пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ и $\lim_{X \ni x \rightarrow x_0} f(x)$.

Доказательство. Так как $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} f(x)$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \forall x \in X |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Для существования и равенства пределов необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \exists \delta > 0 \forall x \in \delta(x_0) \cap X |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Применяя критерий Гордона, получаем требуемое. □

Следствие 1. Пусть I — невырожденный промежуток на \mathbb{R} и для последовательности функций $f_n(x)$ известно, что $f_n(x) \in C(I)$ и $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{I} f(x)$. Тогда $f(x) \in C(I)$.