

# Лекция 11 от 21.11.2016

## Функциональные последовательности. Интегрирование и дифференцирование.

### Частные случаи двойных пределов

Повторим и немного продолжим результаты прошлой лекции.

**Утверждение 1.** Пусть  $\mathcal{B}$  — база на  $X$  и  $\forall n \in \mathbb{N}$  существует предел  $\lim_{\mathcal{B}} f_n(x) = a_n$ , и при этом  $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x)$ . Тогда существуют и равны пределы  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  и  $\lim_{\mathcal{B}} f(x)$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\mathcal{B}} f_n(x) = \lim_{\mathcal{B}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{\mathcal{B}} f(x).$$

Отметим, что равномерная сходимость это удобное, но завышенное требование.

**Следствие 1.** Пусть  $\mathcal{B}$  — база на  $X$  и  $\forall n \in \mathbb{N}$  существует предел  $\lim_{\mathcal{B}} f_n(x) = a_n$ , и при этом  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \xrightarrow{X} S(x)$ . Тогда существуют и равны пределы  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\lim_{\mathcal{B}} S(x)$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{\mathcal{B}} f_n(x) = \lim_{\mathcal{B}} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim_{\mathcal{B}} S(x).$$

То есть при наличии равномерной сходимости порядок этих действий не важен.

Это действительно следствие предыдущего утверждения, потому что

$$S(x) \leftarrow S_n(x) = f_1(x) + \dots + f_n(x) \xrightarrow{\mathcal{B}} a_1 + \dots + a_n.$$

**Следствие 2.** Пусть  $I$  — невырожденный промежуток на  $\mathbb{R}$  и  $\forall n \in \mathbb{N}$ :  $f_n(x) \in C(I)$  и  $f_n(x) \xrightarrow{I} f(x)$ . Тогда  $f(x) \in C(I)$ .

**Следствие 3.** Пусть  $I$  — невырожденный промежуток на  $\mathbb{R}$  и  $\forall n \in \mathbb{N}$ :  $f_n(x) \in C(I)$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \xrightarrow{I} S(x)$ . Тогда  $S(x) \in C(I)$ .

### Связь с интегрированием

Вспомним, что интеграл Римана это тоже предел по базе.

**Утверждение 2.** Пусть  $\forall n \in \mathbb{N}$ :  $f_n(x) \in R[a, b]$ , то есть интегрируема по Риману на отрезке  $[a, b]$ , и  $f_n(x) \xrightarrow{[a, b]} f(x)$ . Тогда  $f(x) \in R[a, b]$  и

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Можно сказать, это теорема о перестановке интеграла и предельного перехода.

Перед тем как приступить к доказательству, задумаемся: а может быть, требование равномерной сходимости это слишком строго? Однако поточечной явно не хватает. Подтвердим это несколькими примерами.

- Пронумеруем все рациональные числа:  $r_1, r_2, \dots$ , и определим функции следующим образом:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{r_1, \dots, r_n\}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Поточечно это будет сходиться к функции Дирихле, каждая отдельная функция  $f_n$  интегрируема, а вот  $\{f_n\}$  — нет.

•

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1/n); \\ 1/x, & x \in [1/n, 1]. \end{cases}$$

По отдельности все функции интегрируемы, а поточечно это будет стремиться к

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & x \in (0, 1]; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

- Функция  $f_n(x)$  задает равнобедренный треугольник с основанием на оси  $OX$  от 0 до  $1/n$  и высотой  $2n$ . Тогда каждый интеграл равен 1, а поточечно  $f_n$  стремятся к нулю. То есть все существует, но равенства нет.

Итого, поточечной сходимости явно недостаточно. Но честно говоря, равномерной сходимости действительно хватает с избытком, но об этом как-нибудь потом.

Теперь приступим к доказательству.

*Доказательство.* Покажем, что это частный случай теоремы о перестановке пределов.

Пусть  $X = \{(\tau, \xi)\}$  — это множество всех отмеченных разбиений  $[a, b]$  (то есть таких, на каждом отрезке которого зафиксирована произвольная точка  $\xi_i$ ),  $\sigma_n(\tau, \xi)$  — значение интегральной суммы Римана для функции  $f_n(x)$ , соответствующее отмеченному разбиению  $(\tau, \xi)$ . Тогда  $\{\sigma_n(\tau, \xi)\}_{n=1}^\infty$  — последовательность функций, определенных на  $X$ . Также обозначим за  $\sigma(\tau, \xi)$  интегральную сумму Римана для функции  $f(x)$ .

Докажем, что  $\sigma_n(\tau, \xi) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} \sigma(\tau, \xi)$ . Действительно, зафиксируем произвольное  $\varepsilon > 0$ , тогда

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \forall x \in [a, b]: |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Тогда  $\forall n > N$  и  $\forall (\tau, \xi) \in X$  ( $M$  — количество отрезков в разбиении  $\tau$ ,  $\Delta_m$  — длина  $m$ -ого отрезка):

$$|\sigma(\tau, \xi) - \sigma_n(\tau, \xi)| = \left| \sum_{m=1}^M f_n(\xi_m) \Delta_m - \sum_{m=1}^M f(\xi_m) \Delta_m \right| \leq \sum_{m=1}^M |(f_n(\xi_m) - f(\xi_m)) \Delta_m| \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{m=1}^M \Delta_m = \varepsilon.$$

Получается, что  $\forall n \in \mathbb{N}$  и существует предел  $\lim_{\mathcal{B}} \sigma_n(\tau, \xi) = \int_a^b f_n(x) dx$  (здесь  $\mathcal{B}$  — база Римана).

Вспомним, что  $\sigma_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} \sigma$ , а значит, по теореме о перестановке двух пределов, существуют и

$$\text{равны пределы } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx \text{ и } \lim_{\mathcal{B}} \sigma(\tau, \xi) = \int_a^b f(x) dx. \quad \square$$

**Следствие 4.** Пусть  $\forall n \in \mathbb{N}: f_n(x) \in R[a, b]$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \stackrel{[a,b]}{\Rightarrow} S(x)$ . Тогда  $S(x) \in R[a, b]$  и

$$\int_a^b S(x) dx = \int_a^b \left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

## Связь с дифференцированием

**Утверждение 3.** Пусть  $I$  — невырожденный промежуток на  $\mathbb{R}$  и  $\forall n \in \mathbb{N} f_n(x) \in C^1(I)$  (то есть непрерывно дифференцируема),  $\exists x_0 \in I$  такое, что  $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$  сходится, и при этом  $f'_n(x) \stackrel{I}{\Rightarrow} g(x)$ . Тогда  $f_n(x) \stackrel{I}{\rightarrow} f(x)$  (поточечно!), причем на каждом ограниченном подмножестве  $I$  сходимость будет равномерной,  $f(x) \in C^1(I)$  и  $f'(x) = g(x)$  на  $I$ .

Что это вообще означает? Фактически это похоже на перестановку пределов:

$$\left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x).$$

*Доказательство.* Вообще говоря, это сразу следует из прошлого утверждения и формулы Ньютона–Лейбница. Но распишем.

Заметим, что  $\forall x \in I: f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t) dt$ . При этом  $f_n(x_0) \stackrel{n \rightarrow \infty}{\Rightarrow} \alpha$  (так как вообще не зависит от  $x$ ), а  $f'_n(t) \stackrel{I}{\Rightarrow} g(x)$ .

Получается, что  $f_n(x)$  поточечно на  $I$  сходится к  $\alpha + \int_{x_0}^x g(t) dt = f(x)$ . При этом очевидно  $f(x) \in D(I)$  (т.е. дифференцируема) и  $f'(x) = g(x)$ . Итого,  $f(x) \in C^1(I)$ .

Осталось показать равномерную сходимость на ограниченном подмножестве  $I$ .

Для любого  $E$  — ограниченного подмножества  $I$  — верно, что  $\int_{x_0}^x f'_n(t) dt \stackrel{E}{\underset{n \rightarrow \infty}{\Rightarrow}} \int_{x_0}^x g(t) dt$ . Действительно, в силу ограниченности  $E$ ,  $\exists C > 0 \forall x \in E: |x_0 - x| < C$ .

Зафиксируем произвольное  $\varepsilon > 0$ . Тогда  $\exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \forall t \in E: |f'_n(t) - g(t)| < \varepsilon/C$ . Значит,  $\forall n > N$  и  $\forall x \in E$ :

$$\left| \int_{x_0}^x f'_n(t) dt - \int_{x_0}^x g(t) dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |f'_n(t) - g(t)| dt \right| \leq \varepsilon/C |x_0 - x| < \varepsilon.$$

В первом переходе модуль появился, потому что мы не знаем взаимное расположение точек  $x_0$  и  $x$ . □

Можно доказать более общее утверждение, которое отличается от предыдущего заменой  $C^1(I)$  на  $D(I)$ , то есть достаточно того, что функции дифференцируемы. Но мы этим заниматься не будем.

А нужно ли нам, чтобы существовала такая точка  $x_0$ ? Конечно! Пусть, например,  $f_n(x) = n$ . Тогда в каждой точке расходимость к бесконечности. А с другой стороны,  $f'_n(x) = 0$  и последовательность производных сходится.