Лекция 02 от 12.09.2016
Признаки сравнения и признаки сходимости неотрицательных рядов.

В рамках этой лекции будем рассматривать только ряды с неотрицательными членами!

Очевидно, что последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ в таких рядах неубывает. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n \in [0, +\infty]$.

Утверждение 1 (Критерий сходимости рядов с неотрицательными членами)**.** *Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена сверху.*

Это позволяет сократить запись для таких рядов. Однако для рядов общего вида такая запись смысла не имеет, поскольку ряды могут не иметь даже бесконечного приедела частичных сумм, то есть не иметь предела вообще (как например любимый нами ряд $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$)

Обозначение 1. *Ряд сходится: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$; ряд расходится: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.*

Признак 1 (Первый признак сравнения)**.** *Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ — два ряда с неотрицательными членами, и начиная с какого-то $N \in \mathbb{N}$ для всех $n > N$ имеет место неравенство $a_n \leqslant b_n$. Тогда:*

1. *если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$;*
2. *если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.*

Доказательство. Достаточно доказать для случая, когда $a_n \leqslant b_n$ уже при $n \geqslant 1$ (убрав, «начало» ряда, сходимость мы не поменяем).

1. Рассмотрим частичные суммы рядов: $S_n^a = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $S_n^b = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^b = C$ для некоторого C. Последовательность S_n^b очевидно неубывающая, так что $S_n^b \leqslant C$ для любого n. А значит, для всех n верно, что
$$0 \leqslant S_n^a = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leqslant b_1 + b_2 + \ldots + b_n \leqslant C.$$
Это показывает, что S_n^a монотонная ограниченная последовательность, а значит она обязательно имеет предел. Так что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.
2. Прямо следует из первого пункта.

$\square$

Признак 2 (Второй признак сравнения)**.** *Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ — два ряда с неотрицательными членами и начиная с некоторого места $a_n \asymp b_n$ (то есть $\exists c, C > 0$ такие что $c < \dfrac{a_n}{b_n} < C$). Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство. Прямо следует из предыдущего признака, так как $cb_n \leqslant a_n \leqslant Cb_n$. □

Замечание 1. *Если $a_n \sim b_n$ при $n \to \infty$, то $a_n \asymp b_n$.*

Пример 1 (тривиальный)**.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ *— расходится.*

Признак 3 (Третий признак сравнения)**.** *Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ — два ряда с неотрицательными членами и начиная с некоторого номера $N \in \mathbb{N}$ для всех $n > N$ верно $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ Тогда:*

1. *если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$;*
2. *если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.*

Доказательство. По сути говоря, данный признак сравнивает скорости роста, а в остальном это практически то же самое, что первый признак сравнения. Что ж, сведем его к нему.

Достаточно считать, что $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$ уже при $n \geqslant 1$. Для любого натурального k мы можем представить элементы a_k и b_k следующим образом:

$$a_k = a_1 \frac{a_2}{a_1} \frac{a_3}{a_2} \dots \frac{a_k}{a_{k-1}}$$
$$b_k = b_1 \frac{b_2}{b_1} \frac{b_3}{b_2} \dots \frac{b_k}{b_{k-1}}$$

Согласно условию, $\frac{a_i}{a_{i-1}} \leqslant \frac{b_i}{b_{i-1}}$ при $1 \leqslant i \leqslant k$. Таким образом, мы почти получили, что $a_k \leqslant b_k$, за исключением того, что мы не знаем, как соотносятся элементы a_1 и b_1. Что ж, избавимся от них, введя новый ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b'_n = \frac{a_1}{b_1} \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Для него будет выполняться неравенство $a_k \leqslant b'_k$. Тем самым, мы свели задачу к первому признаку сравнения. □

Замечание 2. *Отметим, что для любого $q \in [0,1)$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ сходится. Действительно,*

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} q^n = \lim_{N\to\infty} \frac{q(q^N - 1)}{q-1} = \frac{q}{1-q}.$$

Признак 4 (Признак д'Аламбера)**.**

1. *Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — ряд с неотрицательными членами, и начиная с некоторого номера N для всех $n > N$ существует такое $q \in [0,1)$, что $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.*
2. *Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — ряд с неотрицательными членами, и начиная с некоторого номера N для всех $n > N$ верно $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$. Тогда $a_n \nrightarrow 0$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.*

Доказательство.

1. Следует из третьего признака сравнения при $b_n = q^n$.
2. «Тут и доказать нечего» © Лектор (Утверждение очевидно из самой формулировки, прим. ред.).

$\square$

Однако чаще используется признак д'Аламбера в предельной форме.

Следствие 1 (Предельный признак д'Аламбера)**.** *Пусть для ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *с неотрицательными членами существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha \in [0; +\infty]$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *если* $\alpha < 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится;*
2. *если* $\alpha > 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится;*
3. *если* $\alpha = 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *может как сходиться, так и расходиться.*

Доказательство.

1. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$ и $\alpha < 1$, то $\exists N \in \mathbb{N}$ такой, что при любом $n > N$ $\alpha - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \alpha + \varepsilon$, причём $\alpha + \varepsilon < 1$. А значит, ряд сходится по признаку д'Аламбера.
2. Аналогично.
3. Например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$ — расходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ — сходится.

$\square$

Заметим, что признак д'Аламбера довольно грубый, то есть существует некоторая «мертвая зона» рядов, про сходимость которых он ничего не может сказать (например, про ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$).

Следствие 2. *Если для ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *с неотрицательными членами верно, что* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, *то ряд сходится, а если* $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, *то расходится.*

Признак 5 (Радикальный признак Коши)**.** *Рассмотрим ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *с неотрицательными членами.*

1. *Пусть начиная с некоторого места существует такое* $q \in [0, 1)$, *что* $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q$. *Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится.*
2. *Пусть существует бесконечное множество индексов* n, *для которых верно, что* $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$. *Тогда* $a_n \nrightarrow 0$ *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

Доказательство.

1. Следует из первого признака сравнения при $b_n = q^n$.

2. Очевидно по определению расходимости ряда.

□

Аналогично признаку д'Аламбера, можно сформулировать данный признак в предельной форме.

Следствие 3 (Радикальный признак Коши в предельной форме)**.** *Пусть для ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *с неотрицательными членами существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = A$*, где* $A \in [0, \infty]$*. Тогда:*

1. *если* $A < 1$*, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится;*
2. *если* $A > 1$*, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

Или, более общо:

1. *если* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} < 1$*, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится;*
2. *если* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} > 1$*, то* $a_n \nrightarrow 0$ *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

Заметим, что так как тут используется только верхний предел, этот признак несколько удобней, чем предельный признак д'Аламбера.

Пример 2. *Рассмотрим следующий ряд:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n+(-1)^n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \ldots$$

Как можно заметить, у соседних элементов ряда наблюдается то рост в 2 раза, то убывание в 8 раз, и предельный признак д'Аламбера ничего не может сказать про сходимость. Однако воспользуемся радикальным признаком Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{-n+(-1)^n}} = \lim_{n\to\infty} 2^{-1+\left(\frac{-1}{n}\right)^n} = \frac{1}{2}.$$

Как мы видим, ряд сходится.

Упражнение 1. *Есть ли обратный пример, когда радикальный признак Коши не помогает, в отличие от признака д'Аламбера?*

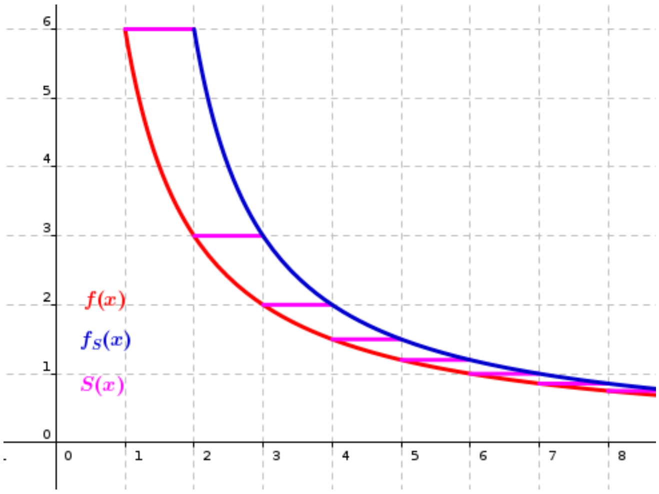
Для разных рядов может быть удобней использовать разные признаки сходимости. Например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!$ однозначно лучше исследовать с помощью признака д'Аламбера.

Мы всё ещё не научились выяснять сходимость рядов вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$. Итуиция подсказвает, что он сходится при $\alpha > 1$, как и интеграл. Сейчас мы в этом убедимся. В этом нам поможет следующая теорема.

Признак 6 (Интегральный признак Коши–Маклорена)**.** *Пусть* $f(x) \geqslant 0$ *— невозрастающая на* $[1, \infty)$ *функция. Тогда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ *и* $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx$ *сходятся или расходятся одновременно. Причем в случае сходимости*

$$\int\limits_{N+1}^{\infty} f(x)dx \leqslant r_N = f(N+1) + f(N+2) + \ldots \leqslant \int\limits_{N}^{\infty} f(x)dx.$$

Доказательство. Для удобства введем две вспомогательные функции: $f_S(x) = f(x-1)$ и $S(x) = f(\lfloor x \rfloor)$.



Тогда мы получаем, что $f(1)+f(2)+\ldots+f(N) = \int\limits_1^N S(x)dx$. Значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл $\int\limits_1^{\infty} S(x)dx$. В свою очередь, несложно заметить, что сходимость этого интеграла влечет за собой сходимость интеграла $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$, так как при наших ограничениях $S(x) \geqslant f(x)$.

Отсюда же следует оценка для остатка. Действительно:

$$r_N = \int\limits_{N+1}^{\infty} S(x)dx \leqslant \int_{N+1}^{\infty} f_S(x)dx = \int\limits_{N+1}^{\infty} f(x-1)dx = \int\limits_{N}^{\infty} f(x)dx,$$

$$r_N = \int\limits_{N+1}^{\infty} S(x)dx \geqslant \int\limits_{N+1}^{\infty} f(x)dx.$$

□

Пример 3. *Допустим, мы хотим узнать сумму ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$. *Но поскольку ряд бесконечен, мы хотим обойтись первыми 100 членами, а чтобы оценить погрешность, посчитаем соответствующий интеграл.*

$$\int\limits_n^{\infty} \frac{1}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}\Big|_n^{\infty} = \frac{1}{2n^2}$$

Итого,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^3} + \theta, \quad \text{где } \theta \in \left[\frac{1}{2\cdot 101^2}, \frac{1}{2\cdot 100^2}\right].$$

Подобным способом можно оценить асимптотику частичных сумм сходящегося ряда, например:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} \sim 2\sqrt{n}$$

Выводится это аналогично, просто теперь мы функциями $f(x)$, $f_S(x)$ и $S(x)$ оцениваем не остаток, а частичную сумму.