

Программа. Орг моменты

Внимание: программа дополняется после каждой лекции.

1. Матроиды.
2. Быстрое преобразование Фурье.
3. Алгоритм Карацубы, алгоритм Штрассена.
4. Теоретико числовые алгоритмы.

Формула такая же, как и в прошлом году:

$$0.3 \cdot O_{\text{контесты}} + 0.25 \cdot O_{\text{семинарские листки}} + 0.15 \cdot O_{\text{кр}} + 0.3 \cdot O_{\text{экзамен}} + B.$$

Округление вверх.

Лекция 01 от 02.09.2016. Матроиды

Пока чуть отдаленно от матроидов.

У нас есть конечное множество A , которое в будущем мы будем называть *носителем*. Пусть $F \subset 2^A$, и F мы будем называть *допустимыми* множествами.

Также у нас есть весовая функция $c(w) \forall w \in A$. Для каждого $B \in F$ мы определим *стоимость* множества, как $\sum_{w \in B} c(w)$. Наша задача заключается в том, чтобы найти максимальный вес из всех допустимых множеств.

Пример 1 (Задача о рюкзаке). У каждого предмета есть вес и стоимость. Мы хотим унести как можно больше вещей максимальной стоимости с весом не более k .

Вес не более k нам задает ограничение, то есть множество F . А максимизация унесенной суммы нам и задаёт задачу.

Матроид

Множество F теперь будет всегда обозначаться как I .

Матроидом называется множество подмножеств множества A таких, что выполняются следующие 3 свойства:

1. $\emptyset \in I$
2. $B \in I \Rightarrow \forall D \subset B \Rightarrow D \in I$
3. Если $B, D \in I$ и $|B| < |D| \Rightarrow \exists w \in D \setminus B$ такой, что $B \cup w \in I$

Дальнейшее обозначение матроидов — $\langle A, I \rangle$.

Определение 1. Базой матроида называют множество всех таких элементов $B \in I$, что не существует B' , что $B \subset B'$, $|B'| > |B|$ и $B' \in I$. Обозначение \mathfrak{B} .

Свойство 1. Все элементы из базы имеют одну и ту же мощность. И все элементы из I , имеющие эту мощность, будут в базе.

Доказательство очевидно из определения.

Пример 2 (Универсальный матроид). Это все подмножества B множества A такие, что $|B| \leq k$ при $k \geq 0$. Все свойства проверяются непосредственно.

База такого матроида — все множества размера k .

Пример 3 (Цветной матроид). У элементов множества A имеются цвета. Тогда $B \in I$, если все элементы множества B имеют разные цвета. Свойства проверяются непосредственно, в 3 свойстве надо воспользоваться принципом Дирихле.

База такого матроида — множества, где присутствуют все цвета.

Пример 4 (Графовый матроид на n вершинах). $\langle E, I \rangle$. Множество ребер $T \in I$, если T не содержит циклов.

Докажем 3 свойство:

Доказательство. Пусть у нас есть T_1 и T_2 такие, что $|T_1| < |T_2|$. Разобьём граф, построенный на T_1 на компоненты связности. Так как ребер ровно $|T_1|$ на n вершинах, то компонент связности будет $n - |T_1|$. В другом случае компонент связности будет $n - |T_2| < n - |T_1|$. То есть во 2-ом графе будет меньше компонент связности, а значит по принципу Дирихле найдётся ребро, которое соединяет 2 компоненты связности в 1-ом графе.

Этот алгоритм чем-то отдаленно напоминает алгоритм Краскала. □

Базой в таком матроиде являются все остовные деревья.

Пример 5 (Матричный матроид). Носителем здесь будут столбцы любой фиксированной матрицы. I — множество всех подмножеств из линейно независимых столбцов. Все свойства выводятся из линейной алгебры (3-е из метода Гаусса, если быть точным).

Пример 6 (Трансверсальный матроид). $G = \langle X, Y, E \rangle$ — двудольный граф с долями X, Y . Матроид будет $\langle X, I \rangle$ такой, что $B \in I$, если существует паросочетание такое, что множество левых концов этого паросочетания совпадает с B .

Докажем 3 свойство:

Доказательство. Пусть есть 2 паросочетания на $|B_1|$ и $|B_2|$ ($|B_1| < |B_2|$) вершин левой доли. Тогда рассмотрим симметрическую разность этих паросочетаний. Так как во 2-ом паросочетании ребер больше, то существует чередующаяся цепь, а значит при замене ребер на этой чередующейся цепи с новой добавленной вершиной (а она найдётся по принципу Дирихле) получим паросочетание с ещё 1 добавленной вершиной. □

Базой в таком матроиде будут вершины левой доли максимального паросочетания.

Приводимость одной базы к другой

Лемма 1. Пусть $B, D \in \mathfrak{B}$. Тогда существует последовательность $B = B_0, B_1, \dots, B_k = D$ такие, что $|B_i \Delta B_{i+1}| = 2$, где Δ обозначает симметрическую разность множеств.

Доказательство. Будем действовать по шагам. Если текущее $B_i \neq D$, тогда возьмём произвольный элемент w из $B_i \setminus D$. Тогда по 2-ому пункту определения матроида следует, что $B_i \setminus w \in I$. Так как $|B_i \setminus w| < |D|$, то существует $u \in D$ такой, что $(B_i \setminus w) \cup u \in I$. И теперь $B_{i+1} \leftarrow (B_i \setminus w) \cup u$. Мы сократили количество несовпадающих элементов с D на 1, симметрическая разность B_i и B_{i+1} состоит из 2 элементов — w и u . \square

Наконец, мы подошли к основной теореме лекции — жадный алгоритм или теорема Радо-Эдмондса.

Жадный алгоритм на матроиде

Доказательство будет в несколько этапов.

Для начала определимся с обозначениями. $M = \langle A, I \rangle$, $n = |A|$, w_i — элементы множества A . Решаем обычную задачу на максимизацию необходимого множества.

Теорема 1 (Жадный алгоритм. Теорема Радо-Эдмондса). Если отсортировать все элементы A по невозрастанию стоимостей весовой функции: $c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_n$, то такой алгоритм решает исходную задачу о нахождении самого дорогого подмножества:

Algorithm 1 Жадный алгоритм на матроиде.

```

 $B \leftarrow \emptyset$ 
for  $c_i$  do
  if  $B \cup w_i \in I$  then
     $B \leftarrow B \cup w_i$ 

```

Доказательство. Теперь поймём, что наш алгоритм в итоге получит какой-то элемент из базы. Пусть B_i — множество, которое мы получим после i шагов цикла нашего алгоритма. Действительно, если это не так, что существует множество из базы, которое его покрывает: формально $\exists D \in I : B_n \subset D$ и $|B_n| < |D|$, так как можно взять любой элемент из базы и добавлять в B_n по 1 элементу из пункта 3 определения матроида. Тогда у нас существует элемент w_i , который мы не взяли нашим алгоритмом, но $B_{i-1} \cup w_i \in I$, так как $B_{i-1} \cup w_i \subset B_n \cup w_i \subset D$, то есть это лежит в I по пункту 2 определения матроида. Значит мы должны были взять w_i , противоречие.

Рассмотрим последовательность d_i из 0 и 1 длины n такую, что $d_i = 1$ только в том случае, если мы взяли алгоритмом i -ый элемент. А оптимальное решение задачи пусть будет e_i — тоже последовательность из 0 и 1. Последовательности будут обозначаться d и e соответственно.

Если на каком-то префиксе последовательности d единиц стало меньше, чем в e , то возьмём все элементы, которые помечены последовательностью e единицами. Пусть это множество будет E . Аналогично на этом префиксе последовательности d определим множество D . $|D| < |E|$, $D \in I$, $E \in I$, поэтому мы можем дополнить D каким-то элементом из E , которого не было в D . То есть на этом префиксе у d стоит 0 (пусть это будет место i), но заметим, что на i -ом шаге мы обязаны были брать этот элемент, из-за рассуждений аналогичным рассуждению про базу (2 абзаца вверх).

Получаем, что на каждом префиксе d единиц не меньше, чем на этом же префиксе последовательности e . Значит 1-ая единица в d встретится не позже, чем в e , 2-ая единица в d не позже, чем 2-ая в e и т.д. по рассуждениям по индукции.

□

На лекции была теория про ранги. В доказательстве можно обойтись без неё, просто приложу то, что сказал Глеб. Может быть понадобится в задачах.

Рангом множества $B \subset A$ (обозн. $r(B)$) называют максимальное число k такое, что $\exists C \subset B$ такое, что $|C| = k, C \in I$.

Эта функция обладает таким свойством: для любого элемента $w \in A$ следует, что $r(B \cup w) \leq r(B) + r(w)$. Давайте поймём, почему так:

Если $r(B \cup w) = r(B)$, то всё хорошо, так как $r(w) \geq 0$. Если $r(B \cup w) = r(B) + 1$ (других вариантов не бывает из определения), то тогда $w \in I$, так как в $B \cup w$ найдётся такое $C \subset (B \cup w)$, что $|C| = r(B \cup w), w \in C$ (иначе C годилось бы для B и $r(B \cup w) = r(B)$), значит $r(w) = 1$, так как $C \in I$, а $\{w\} \subset C$.