# Лекция 6 от 30.09.2016. Разбор некоторых интересных задач по матроидам

*Здесь мы разберем 3 важных задачи, 2 из которых, скорее всего Глеб включит куда-нибудь (экзамен или что-то такое).*

Я везде отождествляю элементы как одноэлементные множества.

## Матроид паросочетаний

**Лемма 1.** *Пара $\langle V, I\rangle$, где $V$ — множество вершин некоторого графа $G = (V, E)$, и $B \in I$, если существует паросочетание, покрывающее множество $B$, является матроидом. Также его называют матроидом паросочетаний.*

*Доказательство.* Первые 2 свойства матроида и правда ясны без объяснения (проделайте сами).

Будем доказывать 3-е свойство.

Давайте возьмём 2 множества вершин $B_1, B_2 \in I$ такие, что $|B_1| < |B_2|$.

Пусть $X_1, X_2$ — паросочетания, насыщающие $B_1$ и $B_2$ соответственно.

Есть 2 случая:

1. Если существует элемент $x \in B_2 \setminus B_1$, насыщенный в $X_1$, то всё отлично, так как $X_1$ насыщает $B_1 \cup x$

2. Теперь мы предполагаем, что все $x \in B_2 \setminus B_1$ не задействованы в вершинах в $X_1$. Рассмотрим подграф $G' = X_1 \triangle X_2$ — симметрическая разность ребер. Теперь степень каждой вершины не более 2, поэтому наш граф разбивается на циклы и цепочки, притом в циклах идёт чередование ребер, в цепочках тоже.

Ясно, что в каждой цепи концевые вершины будут в одном паросочении не насыщены, так как иначе будет четное число ребер, содержащую данную вершину в $G'$, значит это не конец пути.

Так как ни одна вершина из $B_2 \setminus B_1$ (а их там хотя бы 1) не насыщена первым паросочетанием, то эти вершины могут быть только концами путей.

Докажем, что $|B_2 \setminus B_1| > |B_1 \setminus B_2|$. Пусть $|B_1 \cap B_2| = \alpha$, тогда $|B_2 \setminus B_1| = |B_2| - \alpha, |B_1 \setminus B_2| = |B_1| - \alpha$, так как из каждого множества мы убираем только элементы из пересечения, откуда $|B_2 \setminus B_1| > |B_1 \setminus B_2|$.

Так как $|B_2 \setminus B_1| > |B_1 \setminus B_2|$, то существует путь $P$ (не цикл), начинающаяся в $B_2 \setminus B_1$ и заканчивающаяся **не** в $B_1 \setminus B_2$. Заканчиваться путь в $B_1 \cap B_2$ не может, так как в этом множестве все вершины имеют четную степень в $G'$, значит этот путь заканчивается вне $B_1$.

Докажем, что $X_1 \triangle P$ будет паросочетанием, насыщающим $B_1 \cup v_{start}$, где $v_{start} \in B_2 \setminus B_1$ и начинает путь $P$ с одного из концов. Фактически мы написали, что мы поменяем цвета этих рёбер, то есть те рёбра, которые были в $X_1 \cap P$, больше не ребра паросочетания, а ребра из $X_2$ на этом пути будут теперь рёбрами $X_1 \triangle P$. Все вершины из $B_1$, лежащие внутри пути (не на концах) останутся быть вершинами паросочетания $X_1 \triangle P$. Единственная проблема может возникнуть с концами — $v_{start}$ теперь вершина паросочетания $X_1 \triangle P$, а другой конец не входил в $B_1$, значит даже если там не берется ребро, то ничего страшного, эта вершина нам и не нужна была. $\square$

# Worst-out Greedy

**Лемма 2** (Worst-out Greedy)**.** *Пусть дан некоторый матроид* $M = \langle M \rangle$*, элементам присвоены некоторые стоимости* $c(w)$*, причём элементы* $w_1, \ldots, w_n$ *упорядочены так, что* $0 \leqslant c(w_1) \leqslant \ldots \leqslant c(w_n)$*. Рассмотрим следующий жадный алгоритм:*

**Algorithm 1** Worst-out greedy

$F \leftarrow X$
**for** $i \leftarrow 1$ **to** $n$ **do**
  **if** $F \setminus w_i$ содержит базу **then**
    $F \leftarrow F \setminus w_i$

Введем понятие *двойственного матроида.*

*Двойственный матроид* к $M = \langle X, I \rangle$ это матроид $M^* = \langle X, I^* \rangle$, где $I^* = \{A \mid \exists\ B \in \mathfrak{B} : A \cap B = \varnothing\}$.

Докажем, что это матроид:

*Доказательство.* Проверим все 3 свойства.

1. Пустое множество лежит в этом множестве.

2. Пусть $A_1 \subseteq A_2$ и $A_2 \in I^*$, тогда $A_2 \cap B = \varnothing$, тогда $A_1 \cap B = \varnothing$, так как подмножество пустого множества будет пустым.

3. Возьмём произвольные $A_1, A_2$ такие, что $|A_1| < |A_2|$. Из определения следует, что $X \setminus A_2$ сожержит какую-то базу — пусть это будет база $B$. Мы знаем, что $B \setminus A_1 \subseteq X \setminus A_1$, так как $B \subseteq X$.

Также пусть $B_1' \subseteq X \setminus A_1$ — та база, которая содержится в дополнении $A_1$.

Рассмотрим множества $B \setminus A_1$ и $B_1'$. Будем дополнять по 3 аксиоме матроида $M$ первое множество, пока оно не станет базой. Пусть мы в итоге получили $B' = B \setminus A_1 \cup \{x_1, \ldots, x_{|A_1|}\}$. Мы получили множество $B'$, которое является базой, содержит $B \setminus A_1$ и содержится в $X \setminus A_1$, так как мы добавляли элементы только из $B_1'$, а $B_1' \subseteq X \setminus A_1$.

Отлично, мы нашли базу $B'$, что $B \setminus A_1 \subseteq B' \subseteq X \setminus A_1$.

Предположим, что $A_2 \setminus A_1 \subseteq B'$.

Также нам понадобится факт $B \cap A_1 \subseteq A_1 \setminus A_2$, который объясняется тем, что $B$ не имеет общих элементов с $A_2$ по определению.

Теперь выпишем цепочку неравенств и равенств и докажем каждое из них поочереди:

$|B| = |B \cap A_1| + |B \setminus A_1|$ — простое свойство из теории множеств (это просто все элементы лежащие в $B$ и в 1-ом случае и в $A_1$, а во 2-ом не в $A_1$).

$|B \cap A_1| + |B \setminus A_1| \leqslant |A_1 \setminus A_2| + |B \setminus A_1|$ — см. свойство выше.

$|A_1 \setminus A_2| + |B \setminus A_1| < |A_2 \setminus A_1| + |B \setminus A_1|$ — так как $|A_1 \setminus A_2| < |A_2 \setminus A_1|$, так как $|A_2| > |A_1|$ (см. факт из 1-ой леммы).

$|A_2 \setminus A_1| + |B \setminus A_1| \leqslant |B'|$ — это так, так как 2 множества слева под модулями не пересекаются (так как $B$ и $A_2$ не пересекаются). И каждое из этих множеств является подмножеством $B'$ (1-ое по предположению, 2-ое доказано выше).

Откуда $|B| < |B'|$, что неверно, так как все базы равномощны между собой.

Значит $A_2 \setminus A_1 \not\subseteq B'$, откуда существует элемент $z \in A_2 \setminus A_1$ такой, что $z \notin B'$, откуда $(A_1 \cup z) \cap B' = \varnothing$, что нам и требуется.

□

Теперь перейдём к доказательству леммы:

*Доказательство.* **Свойство двойственности баз.**

Понятно, что база матроида $M^*$ будет дополнением всех элементов из базы $\mathfrak{B}$, потому что для каждого дополнения существует база, с которой он пересекается по пустому множеству. И если существует множество из $I^*$, которое по мощности больше, чем мощность дополнения любого элемента из $\mathfrak{B}$, то такое множество по принципу Дирихле пересекается со всеми элементами $\mathfrak{B}$, а значит это множество не лежит в $I^*$. И если есть элемент базы $M^*$, который является недополнением какого-то элемента из базы $\mathfrak{B}$, то такое множество тоже пересекается со всеми базами, так как базы имеют одинаковую мощность в обоих случаях.

Теперь чуточку перепишем алгоритм, данный в лемме.

**Algorithm 2** Модификация алгоритма на матроиде $M^*$(именно на двойственном)

$F^* \leftarrow \varnothing$
**for** $i \leftarrow 1$ **to** $n$ **do**
    **if** $F^* \cup w_i \in I^*$ **then**
        $F^* \leftarrow F^* \cup w_i$

Заметим, что этот алгоритм возьмёт все те и только те элементы, которые алгоритм из леммы выкинет. Докажем это по индукции:

Утверждение. На каждом шаге $i$ от 0 до $n$ выполняется $F^* \cup F = X, F \cap F^* = \varnothing$.

База $i = 0$. На нулевом шаге у нас $F^* \cup F = X, F^* \cap F = \varnothing$.

Переход $i - 1 \to i$:

Если $F$ выкидывает $w_i$, то значит существует база $B_i$ такая, что $B_i \subseteq F \setminus w_i$. А значит в двойственном матроиде $F^* \cup w_i \subseteq X \setminus B_i$ (здесь мы пользуемся предположением индукции) , то есть $F^* \cup w_i$ является подмножеством какой-то базы матроида $M^*$, а значит $F^* \cup w_i \in I^*$. Это всё следует из свойств, которые мы доказывали выше. В обратную сторону аналогично — если $w_i$ добавляется к $F^*$, то и $F$ выкинет $w_i$. Переход доказан.

В 1-ой лекции было, что алгоритм из решения приносит максимальную сумму, если веса расположены в невозрастающем порядке. **Дословно** переносятся все утверждения, когда порядок неубывающий, только в итоге мы получим минимальную сумму множества.

Поэтому мы получили множество $F^*$, которое набрало минимальную сумму. Поэтому $F$ наберет максимальную, так как $F \cup F^* = X, F \cap F^* = \varnothing$, откуда $c(F) + c(F^*) = c(X)$, а значит $c(F)$ набирает максимум. Так как $F^*$ будет элементом базы (из следствия на 1-ой лекции) в матроиде $M^*$, то и $F$ будет элементом базы в $M$ из-за свойства двойственности баз (см. выше). □

# Лемма об обмене

**Лемма 3** (Лемма об обмене)**.** *Пусть имеются 2 базы* $B_1, B_2$, *тогда* $\forall\ x \in B_1 \setminus B_2\ \exists\ y \in B_2 \setminus B_1$, *такие, что* $(B_1 \setminus x) \cup y \in I$ *и* $(B_2 \setminus y) \cup x \in I$.

Здесь у нас будет матроид $M = \langle S, I \rangle$

Введем понятие *цикла*. *Цикл* это наименьшее по включению зависимое множество, то есть все собственные подмножества цикла принадлежат $I$.

Все ссылки на леммы, которые я делаю в этой теореме, это ссылки на леммы «задачи».

Докажем такие леммы:

**Лемма задачи 1.** $r(A) + r(B) \geqslant r(A \cup B) + r(A \cap B)$.

*Доказательство.* Пусть $X$ максимальное независимое подмножество $A \cap B$. Возьмём $Y'$ — максимальное независимое множество $A \cup B$. Заметим, что $|X| \leqslant |Y'|$, поэтому будем по 3 аксиоме матроидов добавлять к $X$ элементы из $Y' \setminus X$. Получим максимальное независимое подмножество $A \cup B$, которое содержит $X$. Пусть это подмножество будет $Y \Rightarrow X \subseteq Y$.

Разделим $Y$ на 3 категории множеств — $Y = X \cup V \cup W$ так, что $V \subseteq A \setminus B, W \subseteq B \setminus A$. Так и будет, потому что из пересечения мы не могли добавить к $X$ больше элементов, иначе $X$ был бы не максимальным по включению.

Получаем, что $X \cup V$ — независимо в $A$ (аксиома 2), аналогично $X \cup W$ независимо в $B$, откуда $r(A) \geqslant |X \cup V|, r(B) \geqslant |X \cup W|$.

Откуда $r(A) + r(B) \geqslant |X \cup V| + |X \cup W| = |X| + |X| + |W| + |V| = r(A \cup B) + r(A \cap B)$. □

**Лемма задачи 2.** *Пусть $C_1, C_2$ — различные циклы одного матроида и $x \in C_1 \cap C_2$. Тогда существует цикл $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus x$.*

*Доказательство.* Покажем, что $r(C') < |C'|$, где $C' = (C_1 \cup C_2) \setminus x$.

Так как $C_1, C_2$ — различные циклы, то $C_1 \cap C_2$ является собственным подмножеством $C_1$, то есть $r(C_1 \cap C_2) = |C_1 \cap C_2|$.

Также мы знаем, что $r(C_1) = |C_1| - 1, r(C_2) = |C_2| - 1$, так как это циклы.

По лемме 1 получаем

$$r(C_1 \cup C_2) \leqslant r(C_1) + r(C_2) - r(C_1 \cap C_2) = |C_1| + |C_2| - |C_1 \cap C_2| - 2 = |C_1 \cup C_2| - 2 < |C'|$$

Также мы знаем, что $r(C') \leqslant r(C_1 \cup C_2)$, так как $C' \subseteq C_1 \cup C_2$.

Откуда $r(C') < |C'|$. Значит существует цикл в таком множестве. □

**Лемма задачи 3.** *Если $A$ независимое множество, а $x \in S$, тогда $A \cup x$ содержит не более 1 цикла.*

*Доказательство.* Пусть есть 2 различных цикла $C_1, C_2 \subseteq (A \cup x)$. Они оба содержат $x$, иначе они независимы.

Рассмотрим множество $(C_1 \cup C_2) \setminus x$. По лемме 2 в этом множестве есть цикл, а значит $(C_1 \cup C_2) \setminus x$ зависимо. Но $(C_1 \cup C_2) \setminus x \subseteq A$, что противоречит независимости $A$. □

Также введём ещё понятие для любого подмножества $A \subseteq S$ — $span(A) = \{s \in S : r(A \cup s) = r(S)\}$. Тривиально, что $A \subseteq span(A)$.

**Лемма задачи 4.** а) Если $A \subseteq B$, то $span(A) \subseteq span(B)$

b) Если $e \in span(A)$, то $span(A \cup e) = span(A)$.

*Доказательство.* а) Пусть $e \in span(A)$. Если $e \in B$, то отсюда сразу следует, что $e \in span(B)$ (см. тривиальное свойство). По лемме 1 следует, что $r(A\cup e)+r(B) \geqslant r((A\cup e)\cap B)+r((A\cup e)\cup B)$

Откуда сразу следует, что $r(A\cup e)+r(B) \geqslant r(A)+r(B\cup e)$, так как $e \notin B$, поэтому $(A\cup e)\cap B = A, (A \cup e) \cup B = B \cup e$. Из определения следует, что $r(A \cup e) = r(A)$, значит

$r(B) \geqslant r(B \cup e)$, но мы знаем, что все независимые подмножества $B$ являются независимыми множествами $B \cup e$, значит в другую сторону неравенство выполняется очевидно.

Поэтому $r(B) = r(B \cup e)$, откуда $e \in span(B)$.

b) Из пункта а) следует, что $span(A) \subseteq span(A \cup e)$. Поэтому нам надо доказать для каждого $f \in span(A \cup e)$, что оно лежит в $span(A)$. Опять воспользуемся леммой 1:

$r(A \cup e) + r(A \cup f) \geqslant r((A \cup e) \cap (A \cup f)) + r(A \cup e \cup A \cup f)$

Случай $e = f$ очевиден, пусть $e \neq f$.

Тогда

$r(A \cup e) + r(A \cup f) \geqslant r(A) + r(A \cup e \cup f)$

$r(A \cup e) = r(A)$ по определению. Значит

$r(A \cup f) \geqslant r(A \cup e \cup f)$ откуда аналогично следует, что $r(A \cup f) = r(A \cup e \cup f)$.

Откуда $e \in span(A\cup f)$, но $e \in span(A)$ и $f \in span(A\cup e)$, значит $r(A) = r(A\cup e) = r(A\cup e\cup f) = r(A \cup f)$ — последнее равенство следует из выше доказанного. Поэтому $f \in span(A)$, что и требовалось. □

**Доказательство леммы.**

*Доказательство.* Пусть $x \in B_1 \setminus B_2$, тогда $B_2 \cup x$ содержит ровно 1 цикл по лемме 3 (так как $B_2$ независимо, а $B_2 \cup x$ зависимо). Пусть этот цикл будет $C$. Мы знаем, что $x \in span(C \setminus x)$, так как добавление не меняет ранг. Поэтому $x \in span((B_1 \cup C) \setminus x)$ (см. лемма 4a). По лемме 4b следует, что $span((B_1 \cup C) \setminus x) = span(B_1 \cup C) = S$, так как $B_1$ является базой. Получается, что какой-бы элемент к максимально независимому множеству в $(B_1 \cup C) \setminus x$ ни добавляй, получим, что ранг меняться не будет. Это возможно только если $r((B_1 \cup C) \setminus x) = |B_1|$, иначе мы могли бы получить противоречие с аксиомой 3 матроидов.

Пусть $B'$ — база, содержащаяся в $(B_1 \cup C) \setminus x$.

По аксиоме 3 (для $B_1 \setminus x$ и $B'$) в $B' \setminus (B_1 \setminus x)$ существует $y$, что $(B_1 \setminus x) \cup y$ — база.

$B' \setminus (B_1 \setminus x) \subseteq ((B_1 \cup C) \setminus x) \setminus (B_1 \setminus x)$ (см. 2 абзаца выше).

$((B_1 \cup C) \setminus x) \setminus (B_1 \setminus x) \subseteq C \setminus x$ — легко проверяется кругами Эйлера. То есть $y \in C \setminus x$. Но $C \subseteq (B_2 \cup x)$, поэтому $C \setminus x \subseteq B_2$. Значит $y \in B_2$, значит $y \in B_2 \setminus B_1$ (см. выше, почему $y \notin B_1$). Также важно отметить, что $x \neq y$, так как $B' \subseteq (B_1 \cup C) \setminus x$.

Докажем, что $(B_2 \setminus y) \cup x$ — тоже база. Допустим, что это не так. Тогда существует цикл $C' \subseteq (B_2 \setminus y) \cup x \subseteq B_2 \cup x$. Причем $C' \neq C$, так как $y \in C$ (см. выше), но $y \notin C'$. Значит у $B_2 \cup x$ существовало 2 различных цикла, что невозможно по лемме 3. Что и завершает наше доказательство. □