Лекция 08 от 31.10.2016
Функциональные ряды. Признаки сходимости

Довольно естественно желание понимать, когда ряд сходится, а когда нет. Для числовых рядов мы рассмотрели большое количество разнообразных признаков сходимости. Аналогично, изучим несколько признаков сходимости функциональных рядов.

Признак 1 (Признак Вейерштрасса)**.** *Пусть существует последовательность a_n такая, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $|f_n(x)| < a_n$, кроме того, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится на множестве X, и $\forall x \in X$ числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится абсолютно.*

Доказательство. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Из критерия Коши для числовых рядов следует, что $\exists N \in \mathbb{N}: \ \forall n > N, \ \forall p \in \mathbb{N}, \ \sum\limits_{n+1}^{n+p} a_n < \varepsilon$.

Тогда $\forall m > N, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in X$:

$$\left|\sum_{m+1}^{m+p} f(x)_m\right| < \sum_{m}^{m+p} |f(x)_m| < \sum_{m+1}^{m+p} a_m < \varepsilon.$$

То есть по критерию Коши для функциональных рядов наш ряд сходится. □

Признак 2 (Признак Дирихле)**.** *Для равномерной сходимости на X ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ и достаточно, чтобы выполнялась пара условий:*

1. *Последовательность частичных сумм $S_k(x) = \sum\limits_{n=1}^{k} a_n(x)$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равномерно ограничена на X, то есть $\exists C > 0 : \forall N \in \mathbb{N} \ \forall x \in X \ \left|\sum\limits_{n=1}^{N} a_n(x)\right| < C$;*
2. *Последовательность функций $b_n(x)$ монотонна и сходится к нулю на X.*

Доказательство. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Положим $\varepsilon_1 := \varepsilon \frac{\varepsilon}{4C}$. Найдём такое $N \in \mathbb{N}$, что $\forall n > N, \forall x \in X : \ |b_n(x)| < \varepsilon_1$. Тогда $\forall m > N, \forall p \in \mathbb{N}, \ \forall x \in X$:

$$\left|\sum_{n=m+1}^{m+p} a_n(x)b_n(x)\right| = \left|A_{m+p}(x)b_{m+p}(x) - A_m(x)b_{m+1}(x) + \sum_{n=m+1}^{m+p-1} A_n(x)(b_n(x) - b_{n+1}(x))\right| \leqslant$$

$$\leqslant C\varepsilon_1 + C\varepsilon_1 + C\sum_{n=m+1}^{m+p-1}(b_n(x) - b_{n+1}(x)) = \frac{\varepsilon}{2} + C\left|b_{n+1}(x) - b_{m+p}(x)\right| \leqslant \varepsilon.$$

□

Признак 3 (Признак Абеля)**.** *Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)b_k(x)$ сходится равномерно, если выполнены следующие условия:*

1. *Последовательность функций $a_k(x)$ равномерно ограничена и монотонна $\forall x \in E$.*

2. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k(x)$ равномерно сходится.

Доказательство. Доказательство, естественно,очень похоже на доказательство предыдущего признака.

$\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X: \ |b_n(x)| < C.$

Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Положим $\varepsilon_1 := \varepsilon\frac{\varepsilon}{4C}$. Найдём такое $N \in \mathbb{N}$, что $\forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in X: \left|\sum\limits_{n=m+1}^{m+p} (a_n(x)\right| < \varepsilon_1$.

Положим для $n > N: \tilde{A}_n(x) = a_{N+1}(x) + \cdots + a_n(x)$, $\tilde{A}_N(x) = 0$. Очевидно, что $\forall n > n, \forall x \in X: |\tilde{A}_n(x)| < \varepsilon_1$.

Тогда $\forall m > N, \forall p \in \mathbb{N}, \ \forall x \in X:$

$$\left|\sum_{n=m+1}^{m+p} a_n(x)b_n(x)\right| = \left|(\tilde{A}_n(x) - \tilde{A}_{n-1}(x))b_n(x)\right| =$$
$$= \left|\tilde{A}_{m+p}(x)b_{m+p}(x) - \tilde{A}_m(x)b_{m+1}(x) + \sum_{n=m+1}^{m+p-1} \tilde{A}_n(x)(b_n(x) - b_{n+1}(x))\right| \leqslant$$
$$\leqslant C\varepsilon_1 + C\varepsilon_1 + C\sum_{n=m+1}^{m+p-1}(b_n(x) - b_{n+1}(x)) = \frac{\varepsilon}{2} + C\left|b_{n+1}(x) - b_{m+p}(x)\right| \leqslant \varepsilon.$$

□

Приведём пример использования.

Пример 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ *сходится на* $X = (\alpha, 2\pi - \alpha), \alpha > 0$ *по признаку Дирихле.*

To be continued and supplemented...