

# Лекция 05 от 03.09.2016

## Перестановки рядов и произведения рядов

### Основные теоремы о перестановках рядов

Напомним основное для этой лекции определение.

**Определение 1.** Пусть  $\sigma$  — биекция (перестановка)  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ . Тогда говорят, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$  является перестановкой ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

**Теорема 1 (Коши).** Пусть ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  абсолютно сходится, и его сумма равна  $A$ . Тогда любая его перестановка  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$  также сходится абсолютно, и его сумма равна  $A$ .

*Доказательство абсолютной сходимости:* Докажем, что  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$  абсолютно сходится.

Обозначим  $A_+ := \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ . Возьмём произвольное  $N \in \mathbb{N}$  и покажем, что  $\sum_{n=1}^N |a_{\sigma(n)}| \leq A_+$  (тогда возрастающая последовательность частичных сумм  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{\sigma(n)}|$  ограничена и ряд сходится).

Определим  $N := \max\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(N)\}$ . Тогда очевидно, что  $\sum_{n=1}^N |a_{\sigma(n)}| \leq \sum_{n=1}^M |a_n|$ , так как правая сумма содержит в себе и все слагаемые левой суммы. Но из этого неизбежно следует и  $\sum_{n=1}^N |a_{\sigma(n)}| \leq A_+$ , потому что любая частичная сумма  $\sum_{n=1}^M |a_n|$  неотрицательного ряда не больше всей его суммы.  $\square$

*Доказательство сходимости к тому же значению:* Докажем, что  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$  сходится к  $A$ . Пусть есть некоторое  $\varepsilon > 0$ . Возьмём такое  $N \in \mathbb{N}$ , что  $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ . (Тогда  $\left| \sum_{n=1}^N a_n - A \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ .)

Обозначим  $M := \max\{\sigma^{-1}(1), \sigma^{-1}(2), \dots, \sigma^{-1}(N)\}$ .

Тогда для любого  $\tilde{M} > M$ :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{m=1}^{\tilde{M}} a_{\sigma(m)} - A \right| &\leq \left| \sum_{m=1}^{\tilde{M}} a_{\sigma(m)} - \sum_{n=1}^N a_n \right| + \left| \sum_{n=1}^N a_n - A \right| < \\ &\left| \sum_{m=1 \dots \tilde{M}, \sigma(m) > N} a_{\sigma(m)} \right| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{m=1 \dots \tilde{M}, \sigma(m) > N} |a_{\sigma(m)}| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\max\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(N)\}} |a_n| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

$\square$

Теперь пусть  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится условно. В нём бесконечно много положительных слагаемых и бесконечно много отрицательных, так как иначе он сходил бы абсолютно. Через  $\{p_n\}$  обозначим последовательность всех неотрицательных слагаемых, а через  $\{q_n\}$ , соответственно, отрицательных.

Раз  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится, то  $\{a_n\}$  — сходящаяся последовательность, а значит и  $\{p_n\}$  и  $\{q_n\}$  тоже сходятся. При этом  $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$  — расходятся.

**Теорема 2** (Римана). Пусть ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится условно. Тогда:

1. для любого  $A \in \mathbb{R}$  найдётся такая перестановка  $\sigma$ , что  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = A$ ;
2. существует такая перестановка  $\sigma$ , что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$  расходится к  $+\infty$ ;
3. существует такая перестановка  $\sigma$ , что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$  расходится к  $-\infty$ ;
4. существует такая перестановка  $\sigma$ , что для ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$  последовательность частичных сумм предела не имеет.

*Доказательство.*

1. Возьмём произвольное  $A \in \mathbb{R}$ .

Найдём наименьшее  $k_1 \in \mathbb{N}$  такое что  $p_1 + p_2 + \dots + p_{k_1} > A$ .

Найдём наименьшее  $\tilde{k}_1 \in \mathbb{N}$  такое что  $p_1 + p_2 + \dots + p_{k_1} + q_1 + q_2 + \dots + q_{\tilde{k}_1} < A$

Найдём наименьшее  $k_2 \in \mathbb{N}$  такое что  $p_1 + p_2 + \dots + p_{k_1} + q_1 + q_2 + \dots + q_{\tilde{k}_1} + p_{k_1+1} + \dots + p_{k_2} > A$

И так далее. В силу того, что  $\{p_n\}$  и  $\{q_n\}$  сходятся к нулю, построение выше и даст перестановку ряда, сумма которой равна  $A$ .

В остальных пунктах всё вполне аналогично.

2. Найдём наименьшее  $k_1 \in \mathbb{N}$  такое что  $p_1 + p_2 + \dots + p_{k_1} > 1$ .

Найдём наименьшее  $k_2 \in \mathbb{N}$  такое что  $p_1 + p_2 + \dots + p_{k_1} + q_1 + p_{k_1+1} + \dots + p_{k_2} > 2$

Найдём наименьшее  $k_3 \in \mathbb{N}$  такое что  $p_1 + p_2 + \dots + p_{k_1} + q_1 + p_{k_1+1} + \dots + p_{k_2} + q_2 + p_{k_2+1} + \dots + p_{k_3} > 3$

И так далее. Построение выше и даст перестановку ряда, расходящуюся к  $+\infty$ .

3. Аналогично предыдущему.

4. Аналогично предыдущим, например, доводя сумму последовательно до 1, -1, 2, -2, 3, -3 и так далее.

□

## Произведение числовых рядов

Произведение пары конечных сумм определено вполне естественным и понятным образом:

$$\sum_{n=1}^N a_n \cdot \sum_{m=1}^M b_m = (a_1 + \dots + a_N)(b_1 + \dots + b_M) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M a_n b_m$$

С бесконечными суммами всё менее понятно. Казалось бы,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{m=1}^{\infty} b_m = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_n b_m,$$

однако объект в правой части равенства мы не определяли.

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$
$b_4$	16	15	14	13	$\dots$
$b_3$	9	8	7	12	$\dots$
$b_2$	4	3	6	11	$\dots$
$b_1$	1	2	5	10	$\dots$
	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$\dots$

Рис. 1: Нумерация по квадратам

Но по крайней мере множество пар индексов  $(n, m)$ , а значит и множество слагаемых в сумме счётно, то есть его можно занумеровать и таким образом превратить произведение рядов в обычный ряд. Вопрос лишь в том, как именно это сделать.

**Теорема 3** (Коши о произведении абсолютно сходящихся рядов). Пусть ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$  и  $\sum_{m=1}^{\infty} b_m = B$ , причём оба ряда абсолютно сходятся. Тогда ряд из произведений  $a_n b_m$ , занумерованных в любом порядке сходится абсолютно и его сумма равна  $A \cdot B$ .

*Доказательство.* По недавно доказанной теореме Коши о перестановках абсолютно сходящегося ряда нам достаточно доказать, что хотя бы при какой-то одной нумерации ряд из произведений абсолютно сходится к  $A \cdot B$ .

Будем использовать довольно очевидный способ нумерации, вполне достаточно описываемый картинкой слева, обычно называемый "нумерация по квадратам". Обозначим  $A_+ := \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ,

$B_+ := \sum_{m=1}^{\infty} |b_m|$ , и  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$  — ряд из произведений, занумерованный выбранным нами способом. Тогда последовательность частичных сумм ряда из модулей  $c_k$  ограничена

$$\sum_{k=1}^K |c_k| \leq \sum_{k=1}^{K^2} |c_k| = \left( \sum_{n=1}^K |a_n| \right) \left( \sum_{m=1}^K |b_m| \right) \leq A_+ \cdot B_+,$$

то есть ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$  сходится абсолютно. Сумму этого ряда посчитать теперь совсем несложно:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^K c_k = \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{K^2} c_k = \lim_{K \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=1}^K a_n \right) \left( \sum_{m=1}^K b_m \right) = A \cdot B$$

□

Если хоть один из рядов не сходится абсолютно, такое утверждение уже неверно. Так что для всех остальных случаев важно договориться о нумерации. Один из часто встречающихся удобных способов нумерации, который в дальнейшем будет подразумеваться по умолчанию — это так называемая "нумерация по треугольникам", или "произведение Коши".

**Определение 2.** Для рядов  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$  их произведением называется ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ , где  $c_k = \sum_{j=1}^k a_j b_{k-j}$

$\vdots$	15	$\ddots$			
$b_4$	10	14	$\ddots$		
$b_3$	6	9	13	$\ddots$	
$b_2$	3	5	8	12	$\ddots$
$b_1$	1	2	4	7	11
	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$\dots$

Рис. 2: Нумерация по треугольникам

**Теорема 4** (Мертенса). Пусть ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$  и  $\sum_{m=1}^{\infty} b_m = B$ , причём хотя бы один из рядов сходится абсолютно. Тогда  $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^k a_k b_{k-j} = AB$