Лекции по предмету
Математический анализ-3

Группа лектория ФКН ПМИ 2016-2017
Михаил Дискин, Анастасия Иовлева, Руслан Хайдуров.

2016/2017 учебный год

Содержание

Лекция 01 от 05.09.2016 Основные определения и свойства рядов. Критерий Коши. Необходимое условие сходимости

Определение 1. *Пусть* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— последовательность действительных чисел.* Числовым рядом *называется выражение вида* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*, записываемое также как* $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$*.*

Определение 2. *N-й частичной суммой называется сумма первых N членов.*

$$S_n = a_1 \ + \ \ldots \ + \ a_N$$

Определение 3. *Последовательность* $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ *называется последовательностью частичных сумм ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*.*

Говорят, что ряд *сходится* (к числу A), если (к числу A) сходится последовательность его частичных сумм. Аналогично, ряд *расходится к* $+\infty$ *(к* $-\infty$*)*, если к $+\infty$ (к $-\infty$) расходится последовательность его частичных сумм. Если последовательность частичных сумм расходится, ряд называют *расходящимся.*

Определение 4. *Суммой ряда называется предел* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$*.*

Вспоминая, что $a_n = S_n - S_{n-1}$, можно заключить, что особой разницы между самим рядом и последовательностью его частичных сумм нет — из одного можно получить другое и наоборот. Следовательно, вместо ряда можно рассматривать его частичные суммы.

Пример 1 (Предел Коши для последовательностей)**.** *Последовательность* $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ *сходится тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию Коши, т.е.*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \colon \forall m,k > N \Rightarrow |S_m - S_k| < \varepsilon.$$

Таким образом, мы нахаляву получили первую теорему.

Теорема 1 (Критерий Коши сходимости ряда)**.** *Для сходимости ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \colon \forall k > N, \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow |a_{k+1} + a_{k+2} \ldots + a_{k+p}| < \varepsilon.$$

Отсюда сразу же очевидно следует утверждение.

Утверждение 1 (Необходимое условие сходимости ряда)**.** *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$

Доказательство. Ряд сходится, значит,

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \colon \forall k > N, p = 1 \Rightarrow |a_{k+1}| < \varepsilon.$$

А это и есть определение предела, равного нулю.

Другой способ доказательства: вспомним, что $a_n = S_n - S_{n-1}$ и что S_n, как и S_{n-1}, стремятся к одному пределу при стремлении n к бесконечности. Итого, получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_n = 0.$$

$\square$

Теперь сформулируем и докажем несколько тривиальных свойств.

Свойства 1. *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B$. *Тогда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B$.

Доказательство. Это напрямую следует из свойств предела последовательности и того, что $S_n^{a+b} = S_n^a + S_n^b$. $\square$

Свойства 2. *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$. *Тогда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha A$ *для любого действительного* α.

Доказательство. Аналогично вытекает из свойств предела последовательности. $\square$

Введём еще одно определение.

Определение 5. *Пусть дан ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. *Обозначим некоторые его подсуммы,*

$$\underbrace{a_1 + \ldots + a_{n_1}}_{b_1} + \underbrace{a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2}}_{b_2} + \underbrace{a_{n_2+1} \ldots + a_{n_3}}_{b_3} + a_{n_3+1} + \ldots,$$

где $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ *— возрастающая последовательность натуральных чисел. В таком случае говорят, что ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *получен из исходного* расстановкой скобок.

Утверждение 2. *Если ряд сходится или расходится к* $\pm\infty$, *то после любой расстановки скобок он сходится, неформально говоря, туда же.*

Доказательство. Достаточно заметить, что частичные суммы ряда, полученного расстановкой скобок, образуют подпоследовательность в последовательности частичных сумм исходного ряда:

$$S_1^b = S_{n_1}^a, \quad S_2^b = S_{n_2}^a, \quad S_3^b = S_{n_3}^a, \quad \ldots$$

Осталось только вспомнить, что любая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится туда же, куда и сама последовательность. $\square$

Обратное неверно!!! Пример такого ряда:

$$1 - 1 + 1 - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n.$$

При расстановке скобок $(1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 0$ получается сходящийся ряд, в то время как исходный ряд расходится, хотя бы потому что не выполняется необходимое условие о стремлении членов ряда к нулю.

Однако сходимость элементов к нулю не единственное препятствие. Например, можно «распилить» единицы из предыдущего примера и получить следующий ряд:

$$1-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots$$

Его элементы стремятся к нулю, но он все еще расходится. Однако расставив скобки, можно получить сходящийся ряд:

$$(1-1)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)+\dots=0.$$

Утверждение 3. *Если $a_n \to 0$ и длины скобок ограничены (т.е. существует такое $C \in \mathbb{R}$, что $n_{k+1}-n_k < C$ при всех k), то из сходимости ряда, полученного расстановкой таких скобок, следует сходимость исходного ряда.*

Доказательство. Доказать предлагается самостоятельно. Указание: ограничить через $\frac{\varepsilon}{C}$. $\square$

Утверждение 4. *Изменение, удаление или добавление конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость.*

Поговорим теперь об абсолютной сходимости.

Определение 6. *Если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$, то говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится абсолютно.*

Определение 7. *Если ряд сходится, но не сходится абсолютно, то говорят, что ряд сходится условно.*

Утверждение 5. *Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится абслютно, то он сходится.*

Доказательство. Сразу следует из критерия Коши. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Так как ряд из модулей сходится, то

$$\exists N \in \mathbb{N} \colon \forall k > N, \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{k+1}^{k+p}|a_k| < \varepsilon$$

Тогда

$$\left|\sum_{n=k+1}^{k+p}a_n\right| \leqslant \sum_{n=k+1}^{k+p}|a_n| < \varepsilon$$

$\square$

Определение 8. *Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ N-м хвостом называется сумма $r_N=\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}a_n$.*

Для сходящегося ряда очевидно, что каждый его хвост сходится.

Лекция 02 от 12.09.2016 Признаки сравнения и другие признаки сходимости знакопостоянных рядов

О знакопостоянных рядах

В рамках этой лекции будем рассматривать только ряды с неотрицательными членами!

Очевидно, что последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ в таких рядах не убывает. Следовательно, существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n \in [0, +\infty]$.

Утверждение 1 (Критерий сходимости рядов с неотрицательными членами)**.** *Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена сверху.*

Это позволяет сократить запись для таких рядов. Однако для рядов общего вида такая запись смысла не имеет, поскольку ряды могут не иметь даже бесконечного придела частичных сумм, то есть не иметь предела вообще (как например любимый нами ряд $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$)

Обозначение 1. *Ряд сходится: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$; ряд расходится: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.*

Признаки сравнения

Признак 1 (Первый признак сравнения)**.** *Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ — два ряда с неотрицательными членами, и начиная с какого-то $N \in \mathbb{N}$ для всех $n > N$ имеет место неравенство $a_n \leqslant b_n$. Тогда:*

1. *если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$;*
2. *если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.*

Доказательство. Достаточно доказать для случая, когда $a_n \leqslant b_n$ уже при $n \geqslant 1$ (убрав, «начало» ряда, сходимость мы не поменяем).

1. Рассмотрим частичные суммы рядов: $S_n^a = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $S_n^b = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^b = C$ для некоторого C. Последовательность S_n^b очевидно неубывающая, так что $S_n^b \leqslant C$ для любого n. А значит, для всех n верно, что

$$0 \leqslant S_n^a = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leqslant b_1 + b_2 + \ldots + b_n \leqslant C.$$

   Это показывает, что S_n^a монотонная ограниченная последовательность, а значит она обязательно имеет конечный предел. Так что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

2. Прямо следует из первого пункта.

□

Признак 2 (Второй признак сравнения)**.** *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *— два ряда с положительными членами и* $a_n \asymp b_n$ *(то есть* $\exists c, C > 0$ *такие, что начиная с некоторого индекса* N*,* $c < \dfrac{a_n}{b_n} < C$*). Тогда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство. Прямо следует из предыдущего признака, так как $cb_n \leqslant a_n \leqslant Cb_n$. □

Замечание 1. *Если* $a_n \sim b_n$ *при* $n \to \infty$*, то* $a_n \asymp b_n$*.*

Пример 1 (тривиальный)**.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *— расходится.*

Признак 3 (Третий признак сравнения)**.** *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *— два ряда с неотрицательными членами и начиная с некоторого номера* $N \in \mathbb{N}$ *для всех* $n > N$ *верно* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ *Тогда:*

1. *если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$*, то* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$*;*
2. *если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$*, то* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$*.*

Доказательство. По сути говоря, данный признак сравнивает скорости роста, а в остальном это практически то же самое, что первый признак сравнения. Что ж, сведем его к нему.

Достаточно считать, что $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$ уже при $n \geqslant 1$. Для любого натурального k мы можем представить элементы a_k и b_k следующим образом:

$$a_k = a_1 \frac{a_2}{a_1} \frac{a_3}{a_2} \dots \frac{a_k}{a_{k-1}}$$
$$b_k = b_1 \frac{b_2}{b_1} \frac{b_3}{b_2} \dots \frac{b_k}{b_{k-1}}$$

Согласно условию, $\frac{a_i}{a_{i-1}} \leqslant \frac{b_i}{b_{i-1}}$ при $1 \leqslant i \leqslant k$. Таким образом, мы почти получили, что $a_k \leqslant \dfrac{a_1}{b_1} b_k$. Но мы не знаем, как соотносятся элементы a_1 и b_1. Что ж, избавимся от них, введя новый ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b'_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1}{b_1} b_n.$$

Для него будет выполняться неравенство $a_k \leqslant b'_k$. Тем самым, мы свели задачу к первому признаку сравнения. □

Замечание 2. *Отметим, что для любого* $q \in [0,1)$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ *сходится. Действительно,*

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} q^n = \lim_{N\to\infty} \frac{q(q^N - 1)}{q - 1} = \frac{q}{1 - q}.$$

Прочие признаки

Признак 4 (Признак д'Аламбера)**.**

1. *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *— ряд с положительными членами, и существует такое* $q \in [0, 1)$*, что начиная с некоторого номера* N *верно, что* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q$*. Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится.*
2. *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *— ряд с положительными членами, и начиная с некоторого номера* N *верно, что* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$*. Тогда* $a_n \nrightarrow 0$ *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

Доказательство.

1. Следует из третьего признака сравнения при $b_n = q^n$.
2. «Тут и доказвать нечего» © лектор (*прим. ред.:* утверждение очевидно из самой формулировки).

□

Однако чаще используется признак д'Аламбера в предельной форме.

Следствие 1 (Предельный признак д'Аламбера)**.** *Пусть для ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *с положительными членами существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha \in [0; +\infty]$*. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *если* $\alpha < 1$*, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится;*
2. *если* $\alpha > 1$*, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится;*
3. *если* $\alpha = 1$*, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *может как сходиться, так и расходиться.*

Доказательство.

1. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$ и $\alpha < 1$, то $\exists N \in \mathbb{N}$ такой, что при любом $n > N$ $\alpha - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \alpha + \varepsilon$, причём $\alpha + \varepsilon < 1$. А значит, ряд сходится по признаку д'Аламбера.
2. Аналогично.
3. Например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$ — расходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ — сходится.

□

Заметим, что признак д'Аламбера довольно грубый, то есть существует некоторая «мертвая зона» рядов, про сходимость которых он ничего не может сказать (например, про ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$).

Следствие 2. *Если для ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *с положительными членами верно, что* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$*, то ряд сходится, а если* $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$*, то расходится.*

Признак 5 (Радикальный признак Коши). *Рассмотрим ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *с неотрицательными членами.*

1. *Пусть существует такое* $q \in [0, 1)$, *что начиная с некоторого номера* N *верно, что* $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q$. *Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится.*
2. *Пусть существует бесконечное множество индексов* n, *для которых верно, что* $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$. *Тогда* $a_n \nrightarrow 0$ *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

Доказательство.

1. Следует из первого признака сравнения при $b_n = q^n$.
2. Очевидно по определению расходимости ряда.

□

Аналогично признаку д'Аламбера, можно сформулировать данный признак в предельной форме.

Следствие 3 (Радикальный признак Коши в предельной форме). *Пусть для ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *с неотрицательными членами существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = A$, *где* $A \in [0, \infty]$. *Тогда:*

1. *если* $A < 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится;*
2. *если* $A > 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

Или, более общо:

1. *если* $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится;*
2. *если* $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, *то* $a_n \nrightarrow 0$ *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

Заметим, что так как тут используется только верхний предел, этот признак несколько удобней, чем предельный признак д'Аламбера.

Пример 2. *Рассмотрим следующий ряд:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n+(-1)^n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \ldots$$

Как можно заметить, у соседних элементов ряда наблюдается то рост в 2 раза, то убывание в 8 раз, и предельный признак д'Аламбера ничего не может сказать про сходимость. Однако воспользуемся радикальным признаком Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{-n+(-1)^n}} = \lim_{n\to\infty} 2^{-1+\left(\frac{-1}{n}\right)^n} = \frac{1}{2}.$$

Как мы видим, ряд сходится.

Упражнение 1. *Есть ли обратный пример, когда радикальный признак Коши не помогает, в отличие от признака д'Аламбера?*

Для разных рядов может быть удобнее использовать разные признаки сходимости. Например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$ однозначно лучше исследовать с помощью признака д'Аламбера.

Мы всё ещё не научились выяснять сходимость рядов вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}$. Итуиция подсказвает, что он сходится при $\alpha > 1$, как и интеграл. Сейчас мы в этом убедимся. В этом нам поможет следующая теорема.

Признак 6 (Интегральный признак Коши–Маклорена)**.** *Пусть $f(x) \geqslant 0$ — невозрастающая на $[1, \infty)$ функция. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ и $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно. Причем в случае сходимости*

$$\int\limits_{N+1}^{\infty} f(x)dx \leqslant r_N = f(N+1) + f(N+2) + \ldots \leqslant \int\limits_{N}^{\infty} f(x)dx.$$

Доказательство. Для удобства введем две вспомогательные функции: $f_S(x) = f(x-1)$ и $S(x) = f(\lfloor x \rfloor)$.

Тогда мы получаем, что $f(1)+f(2)+\ldots+f(N) = \int\limits_{1}^{N} S(x)dx$. Значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл $\int\limits_{1}^{\infty} S(x)dx$. В свою очередь, несложно заметить, что сходимость этого интеграла влечет за собой сходимость интеграла $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx$, так как при наших ограничениях $S(x) \geqslant f(x)$. С другой стороны, сходимость интеграла $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx$ эквивалентна сходимости интеграла $\int\limits_{2}^{\infty} f_S(x)dx$, а она влечет за собой сходимость интеграла $\int\limits_{1}^{\infty} S(x)dx$, так как $S(x) \leqslant f_S(x)$.

Отсюда же следует оценка для остатка. Действительно:

$$r_N = \int\limits_{N+1}^{\infty} S(x)dx \leqslant \int\limits_{N+1}^{\infty} f_S(x)dx = \int\limits_{N+1}^{\infty} f(x-1)dx = \int\limits_{N}^{\infty} f(x)dx,$$

$$r_N = \int\limits_{N+1}^{\infty} S(x)dx \geqslant \int\limits_{N+1}^{\infty} f(x)dx.$$

□

Пример 3. *Допустим, мы хотим узнать сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$. Но поскольку ряд бесконечен, мы хотим обойтись первыми 100 членами, а чтобы оценить погрешность, посчитаем соответствующий интеграл.*

$$\int\limits_{n}^{\infty}\frac{1}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}\Big|_n^{\infty} = \frac{1}{2n^2}$$

Итого,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} = \sum_{n=1}^{100}\frac{1}{n^3} + \theta, \quad \text{где } \theta \in \left[\frac{1}{2\cdot 101^2}, \frac{1}{2\cdot 100^2}\right].$$

Подобным способом можно оценить асимптотику частичных сумм расходящегося ряда, например:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} \sim 2\sqrt{N}$$

Выводится это аналогично, просто теперь мы функциями $f(x)$, $f_S(x)$ и $S(x)$ оцениваем не остаток, а частичную сумму.

Лекция 03 от 19.09.2016 Признаки сходимости знакопостоянных и знакопеременных рядов

Граница между сходящимися и расходящимися рядами

На прошлой лекции был сформулирован и доказан следующий признак:

Признак 7 (Интегральный признак Коши–Маклорена). *Пусть $f(x) \geqslant 0$ — невозрастающая на $[1, \infty]$ функция. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ и $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.*

С помощью него мы можем исследовать на сходимость семейство рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}.$$

Как и для соответствующего интеграла, ряд сходится тогда и только тогда, когда $\alpha > 1$.

Может сложиться впечатление, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ является своего рода граничным между сходящимися и расходящимися рядами. Но исследуем теперь другой ряд (он нам также понадобится в дальнейшем):

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}.$$

Он сходится тогда и только тогда, когда сходится соответствующий интеграл.

$$\int\limits_{2}^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \int\limits_{2}^{\infty} \frac{1}{\ln x} d \ln x = \ln \ln x \Big|_{2}^{\infty} = \infty$$

Данный ряд меньше, чем гармоничный ряд, однако расходится. Причем, как несложно убедиться, семейство рядов $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{\beta} n}$ при $\beta > 1$ уже сходится. Но при этом «граница» между сходящимися и расходящимися рядами не проходит по ряду $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ — взять, например, ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln \ln n}$, который тоже расходится. И так далее, «границу» можно «уточнять» бесконечно. Так что точной «границы» не существует.

Скорость роста частичных сумм расходящихся рядов

В прошлой лекции мы с помощью интегрального признака Коши–Маклорена научились оценивать остаток сходящихся сумм. Теперь научимся оценивать скорость роста частичных сумм расходящихся рядов.

Возьмем, например, гармонический ряд. Утверждается, что его частичные суммы оцениваются следующим образом:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \ln N + C + o(1),$$

где C эта некая константа. Но как доказать, что это действительно корректная оценка?

Фактически мы утверждаем сходимость последовательности $\{S_n\}$, где

$$S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

Это можно воспринимать как последовательность частичных сумм и, соответственно, перейти к соответствующему ряду:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln n + \ln(n-1) = \frac{1}{n} - \ln\frac{n}{n-1} = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \left(-\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

На последнем шаге мы воспользовались разложением в ряд Тейлора.

Мы получили, что $a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, следовательно, данный ряд сходится. И так как мы построили сходящийся ряд, у которого последовательность $\{S_n\}$ будет последовательностью частичных сумм, данная последовательность также сходится. Что и доказывает нашу оценку.

Точно также можно доказать оценки расходимости частичных сумм следующих рядов:

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n \ln n} = \ln\ln N + C + o(1)$$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \frac{2N^{2/3}}{2} + C + o(1)$$

Снова признаки сходимости знакопостоянных рядов

Вернемся теперь к признакам сходимости.

Признак 8 (Признак Кумера)**.** *Пусть* a_n, $b_n > 0$ *и* $v_n := \dfrac{a_n}{a_{n+1}} b_n - b_{n+1}$. *Тогда:*

1. *если существует такое* $l > 0$, *что начиная с некоторого места* $v_n \geqslant l$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится;*
2. *если начиная с некоторого места* $v_n \leqslant 0$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{b_n}$ *расходится, то и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда наше неравенство выполняется для всех n.

1. Итого, мы имеем, что $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} b_n - b_{n+1} \geqslant l$. Домножим неравенство на a_{n+1}, благо оно положительно:

$$a_n \cdot b_n - a_{n+1} \cdot b_{n+1} \geqslant l a_{n+1} > 0$$

Воспользуемся этим, оценив частичную сумму следующего ряда, при $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=1}^{N} l a_n \leqslant l a_1 + (a_1 b_1 - a_2 b_2) + (a_2 b_2 - a_3 b_3) + \ldots + (a_{N-1} b_{N-1} - a_N b_N) = l a_1 + a_1 b_1 - a_n b_N \leqslant l a_1 + a_1 b_1$$

Итого, мы получили, что частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} l a_n$ ограничены сверху. Значит, этот ряд сходится и, следовательно, сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

2. Имеем, что $\frac{a_n}{a_{n+1}}b_n - b_{n+1} \leqslant 0$. Перенесем b_{n+1} в правую часть и разделим все на b_n:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

Теперь перевернем дробь:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{1/b_{n+1}}{1/b_n}.$$

По условию ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ расходится, а значит признак сравнения дает расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

□

Но признак Куммера особо не используется, он скорее нужен, чтобы вывести другие признаки.

Признак 9 (Признак Раабе)**.** *Пусть $a_n > 0$ и существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = A \in [-\infty, +\infty].$$

Тогда:

1. *если $A > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;*
2. *если $A < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.*

Доказательство. Признак Куммера при $b_n = n$. □

Покажем, зачем нужен признак Раабе. Пусть $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$. Тогда:

$$n\left(\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} - 1\right) = n\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha - 1\right) = n\left(1 + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) \longrightarrow \alpha.$$

Как мы видим, признак Раабе позволяет «ловить» ряды с полиномиальной скоростью роста. И это хорошо, так как раньше мы этого не умели.

Но у этого признака все еще есть «мертвая зона», когда $A = 1$. Поэтому рассмотрим еще один признак, который не имеет «мертвой зоны», но, к сожалению, не всегда применим.

Признак 10 (Признак Гаусса)**.** *Пусть для некоторого $\varepsilon > 0$ и α, $\beta \in \mathbb{R}$ верно, что*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \alpha + \frac{\beta}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right).$$

Тогда:

1. *если $\alpha > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;*
2. *если $\alpha < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится;*
3. *если $\alpha = 1$ и $\beta > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;*

4. *если $\alpha = 1$ и $\beta \leqslant 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.*

Доказательство. Все эти утверждения на самом деле следуют из уже рассмотренных нами признаков. Так что просто назовем их.

1. Признак д'Аламбера.
2. Признак д'Аламбера.
3. Признак Раабе.
4. Если $\beta < 1$ — признак Раабе. Если $\beta = 1$ — признак Куммера при $b_n = n \ln n$.

Рассмотрим подробнее последний случай, когда $\alpha = \beta = 1$. Воспользуемся признаком Куммера при $b_n = n \ln n$ и равенством из условия:

$$v_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} b_n - b_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)\right) n \ln n - (n+1)\ln(n+1) =$$
$$= (n+1)\left(\ln n - \ln(n+1)\right) + O\left(\frac{\ln n}{n^{\varepsilon}}\right) =$$
$$= -(n+1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{\ln n}{n^{\varepsilon}}\right) =$$
$$= -(n+1)\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + O\left(\frac{\ln n}{n^{\varepsilon}}\right) \longrightarrow -1$$

Итого, по признаку Куммера ряд действительно расходится. □

Замечание 1. *Вместо $O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)$ можно писать более сильное $O\left(\frac{1}{n \ln n}\right)$. Но первое чаще появляется в интересных примерах, поэтому исторически сложилось использовать его.*

Признаки сходимости знакопеременных рядов

Признак 11 (Признак Лейбница)**.** *Пусть последовательность $\{b_n\}$ строго монотонно убывает у нулю. Тогда ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$ сходится, причем его остаток r_N имеет знак $(-1)^{N+1}$ и по модулю меньше b_{N+1}.*

Доказательство. Докажем с помощью критерия Коши. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем такое $N \in \mathbb{N}$, что для всех $n > N$ верно, что $b_n < \varepsilon$. Теперь для любого $m > N$ и $p \in \mathbb{N}$ рассмотрим следующую величину:
$$\left|\sum_{n=m+1}^{m+p} (-1)^n b_n\right|.$$

Можно вынести $(-1)^{m+1}$ из суммы — на модуль это не повлияет, но зато нам будет удобнее считать, что первое слагаемое идет с положительным знаком.

Сгруппируем слагаемые следующим образом:

$$\left|\sum_{n=m+1}^{m+p} (-1)^n b_n\right| = \left|b_{m+1} + (-b_{m+2} + b_{m+3}) + (-b_{m+4} + b_{m+5}) + \ldots\right|.$$

В силу строго монотонного убывания последовательности получаем, что каждая скобка меньше нуля. Последнее слагаемое, b_{m+p} могло остаться без пары, но тогда оно идет с отрицательным знаком. Итого, получаем, что мы с b_{m+1} складываем только отрицательные величины, следовательно:

$$\left|\sum_{n=m+1}^{m+p}(-1)^n b_n\right| \leqslant |b_{m+1}| < \varepsilon.$$

Итого, по критерию Коши ряд сходится. Отсюда же следует оценка на остаток:

$$|r_N| = \left|\sum_{n=N+1}^{\infty}(-1)^n b_n\right| \leqslant b_{N+1}.$$

Аналогичным образом оценим остаток знака.

Снова вынесем за скобки знак $(-1)^{N+1}$ (но на этот раз его не убъет модуль), и сгруппируем слагаемые:

$$r_N = \sum_{n=N+1}^{\infty}(-1)^n b_n = (-1)^{N+1}\big((b_{N+1} - b_{N+2}) + (b_{N+3} - b_{N+4}) + \dots\big).$$

Каждая группа слагаемых больше нуля в силу строго монотонного убывания последовательности. Следовательно, вся скобка имеет положительный знак, а значит, r_N имеет знак $(-1)^{N+1}$. Что нам и требовалось. $\square$

Лекция 04 от 26.09.2016
Признаки сходимости знакопеременных рядов и перестановки ряда

Снова признаки сходимости знакопеременных рядов

В прошлый раз мы с вами сформулировали и доказали признак Лейбница. Будем пользоваться в этот раз слабой его формулировкой:

Признак 12. *Пусть последовательность $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно убывает к нулю. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ сходится.*

Замечание 1. *Для этого утверждения достаточно нестрогой монотонности.*

Оказывается, этот признак является частным случаем более общего признака, который мы сейчас сформулируем и докажем.

Признак 13 (Признак Дирихле)**.** *Пусть частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ограничены (то есть $\exists C > 0$ такое, что начиная с некоторого номера N, $|A_n| = |a_1 + a_2 + \ldots + a_n| < C$), а $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ — монотонно стремящаяся к нулю последовательность. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится (отметим, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ может влёгкую расходиться).*

Подставляя сюда вместо a_n последовательность $a_n = (-1)^n$ (частичные суммы равны $1, 0, 1, 0, \ldots$ и ограничены), получаем формулировку первого утверждения.

Замечание 2. *В признаке Лейбница дополнительно к утверждению и сходимости ряда присутствует оценка остатка, которой в признаке Дирихле нет.*

Доказательство. Для доказательства мы применим трюк, подобный интегрированию по частям, именуемый в дискретном случае *преобразованием Абеля* («название умнее, чем само преобразование» © лектор).

Рассмотрим случай $b_n \searrow 0$ (случай $b_n \nearrow 0$ — аналогично).

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Найдём такое $N \in \mathbb{N}$, что

$$\forall n \geqslant N\colon\ b_n < \frac{\varepsilon}{4C}$$

Возьмём $m > N$, произвольное $p \in \mathbb{N}$ и оценим сумму $\left|\sum\limits_{n=m+1}^{m+p} a_n b_n\right|$.

$$\sum_{n=m+1}^{m+p} a_n b_n = \sum_{n=m+1}^{m+p} (A_n - A_{n-1})\, b_n = \sum_{n=m+1}^{m+p} A_n b_n - \sum_{n=m+1}^{m+p} A_{n-1} b_n = \sum_{n=m+1}^{m+p} A_n b_n - \sum_{n=m}^{m+p-1} A_n b_{n+1} =$$
$$= A_{m+p} b_{m+p} - A_m b_{m+1} + \sum_{n=m+1}^{m+p-1} A_n \left(b_n - b_{n+1}\right).$$

Следовательно, используя монотонное убывание b_n:

$$\left|\sum_{n=m+1}^{m+p} a_n b_n\right| \leqslant |A_{m+p}b_{m+p}| + |A_m b_{m+1}| + \sum_{n=m+1}^{m+p-1} |A_n||b_n - b_{n+1}| <$$

$$< C\frac{\varepsilon}{4C} + C\frac{\varepsilon}{4C} + C\sum_{n=m+1}^{m+p-1}(b_n - b_{n+1}) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + C(b_{m+1} - b_{m+2} + b_{m+2} - b_{m+3} + \ldots - b_{m+p}) = \frac{\varepsilon}{2} + C(b_{m+1} - b_{m+p}) < \frac{\varepsilon}{2} + C\frac{\varepsilon}{4c} < \varepsilon.$$

Итого, по критерию Коши ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится. □

Пример 1. *Попробуем поисследовать на сходимость какой-нибудь ряд, хороший пример — ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n}$*, при* $\alpha \neq \pi k$*,* $k \in \mathbb{Z}$ *или такой же с синусом. Пусть* $a_n = \cos n\alpha$*,* $b_n = \frac{1}{n}$*. Исследуем ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *на ограниченность частичных сумм:*

$$|A_n| = \frac{|\cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos n\alpha| \cdot |\sin(\alpha/2)|}{|\sin(\alpha/2)|} =$$

$$= \left|\frac{-\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{3\alpha}{2} - \sin\frac{3\alpha}{2} + \sin\frac{5\alpha}{2} - \ldots + \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha}{2|\sin\frac{\alpha}{2}|}\right| =$$

$$= \frac{\left|-\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha\right|}{2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|} \leqslant \frac{2}{2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|} = \frac{1}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}$$

Тогда тут применим признак Дирихле и ряд сходится. Теперь покажем его условную сходимость, то есть тот факт, что ряд из модулей расходится.

$$\frac{|\cos n\alpha|}{n} \geqslant \frac{(\cos n\alpha)^2}{n} = \frac{\cos 2n\alpha + 1}{2n} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\frac{\cos 2n\alpha}{n}}_{\text{ряд сход.}} + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{ряд расх.}}\right)$$

Сформулируем и докажем ещё один признак.

Признак 14 (Признак Абеля)**.** *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, а* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— монотонная ограниченная последовательность. Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *сходится.*

Доказательство. Последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а значит ограничена. Последовательность $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна и ограничена, а значит имеет предел $B = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. То есть последовательность b_n представима в виде $B + \beta_n$, где β_n — монотонно стремящаяся к нулю последовательность.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(B + \beta_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n B + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \beta_n$$

Первое слагаемое сходится по условию (умножение на константу ничего не меняет), а второе по признаку Дирихле. □

Перестановки ряда

Определение 1. *Пусть* σ *— биекция (перестановка)* $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. *Тогда говорят, что ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ *является перестановкой ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Сформулируем две теоремы, которые докажем в следующий раз.

Теорема 1 (Коши)**.** *Пусть ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *абсолютно сходится, и его сумма равна* A. *Тогда любая его перестановка также сходится абсолютно, и ее сумма равна* A.

Теорема 2 (Римана)**.** *Пусть ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится условно. Тогда:*

1. *для любого* $A \in \mathbb{R}$ *найдётся такая перестановка* σ, *что* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = A$;
2. *существует такая перестановка* σ, *что ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ *расходится к* $+\infty$;
3. *существует такая перестановка* σ, *что ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ *расходится к* $-\infty$;
4. *существует такая перестановка* σ, *что для ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ *последовательность частичных сумм предела не имеет.*

Лекция 05 от 03.10.2016
Перестановки рядов и произведения рядов

Основные теоремы о перестановках рядов

Напомним основное для этой лекции определение.

Определение 1. *Пусть σ — биекция (перестановка) $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Тогда говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ является перестановкой ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Теорема 1 (Коши)**.** *Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, и его сумма равна A. Тогда любая его перестановка $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ также сходится абсолютно, и её сумма равна A.*

Доказательство абсолютной сходимости: Докажем, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ абсолютно сходится. Обозначим $A_+ := \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Возьмём произвольное $N \in \mathbb{N}$ и покажем, что $\sum\limits_{n=1}^{N} |a_{\sigma(n)}| \leqslant A_+$ (тогда возрастающая последовательность частичных сумм $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{\sigma(n)}|$ ограничена и ряд сходится).

Определим $M := \max\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(N)\}$. Тогда очевидно, что $\sum\limits_{n=1}^{N} |a_{\sigma(n)}| \leqslant \sum\limits_{n=1}^{M} |a_n|$, так как правая сумма содержит в себе и все слагаемые левой суммы. Но из этого неизбежно следует и $\sum\limits_{n=1}^{N} |a_{\sigma(n)}| \leqslant A_+$, потому что любая частичная сумма $\sum\limits_{n=1}^{M} |a_n|$ ряда с неотрицательными слагаемыми не больше всей его суммы. □

Доказательство сходимости к тому же значению: Докажем, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ сходится к A. Пусть есть некоторое $\varepsilon > 0$. Возьмём такое $N \in \mathbb{N}$, что $\sum\limits_{n=N}^{\infty} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. (Тогда $\left|\sum\limits_{n=1}^{N} a_n - A\right| = \left|\sum\limits_{N+1}^{\infty} a_n\right| \leqslant \sum\limits_{N+1}^{\infty} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.)
Обозначим $M := \max\{\sigma^{-1}(1), \sigma^{-1}(2) \ldots \sigma^{-1}(N)\}$.
Тогда для любого $\tilde{M} > M$:

$$\left|\sum_{m=1}^{\tilde{M}} a_{\sigma(m)} - A\right| \leqslant \left|\sum_{m=1}^{\tilde{M}} a_{\sigma(m)} - \sum_{n=1}^{N} a_n\right| + \left|\sum_{n=1}^{N} a_n - A\right| <$$

$$< \left|\sum_{\substack{m=1\ldots\tilde{M} \\ \sigma(m)>N}} a_{\sigma(m)}\right| + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum_{\substack{m=1\ldots\tilde{M} \\ \sigma(m)>N}} |a_{\sigma(m)}| + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=N+1}^{\max\{\sigma(1)\ldots\sigma(N)\}} |a_n| + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} a_{|a_n|} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

□

Теперь пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно. В нём бесконечно много положительных слагаемых и бесконечно много отрицательных, так как иначе он сходился бы абсолютно. Через $\{p_n\}$ обозначим последовательность всех неотрицательных слагаемых, а через $\{q_n\}$, соответственно, отрицательных.

Раз $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\{a_n\}$ — сходящаяся к нулю последовательность, а значит и $\{p_n\}$ и $\{q_n\}$ тоже сходятся. При этом несложно понять, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ — расходятся. Так как если бы оба этих ряда сходились, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходился бы абсолютно, а если бы один из них сходился, а другой — расходился, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ бы расходился.

Теорема 2 (Римана)**.** *Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно. Тогда:*

1. *для любого $A \in \mathbb{R}$ найдётся такая перестановка σ, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = A$;*
2. *существует такая перестановка σ, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ расходится к $+\infty$;*
3. *существует такая перестановка σ, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ расходится к $-\infty$;*
4. *существует такая перестановка σ, что для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ последовательность частичных сумм не имеет ни конечного ни бесконечного предела.*

Доказательство.

1. Возьмём произвольное $A \in \mathbb{R}$.

   Найдём наименьшее $k_1 \in \mathbb{N}$ такое что $p_1 + p_2 + \dots + p_{k_1} > A$.

   Найдём наименьшее $\tilde{k}_1 \in \mathbb{N}$ такое что $p_1 + p_2 + \dots + p_{k_1} + q_1 + q_2 + \dots + q_{\tilde{k}_1} < A$

   Найдём наименьшее $k_2 \in \mathbb{N}$ такое что $p_1+p_2+\dots+p_{k_1}+q_1+q_2+\dots+q_{\tilde{k}_1}+p_{k_1+1}+\dots+p_{k_2} > A$
   И так далее. В силу того, что $\{p_n\}$ и $\{q_n\}$ сходятся к нулю, построение выше и даст перестановку ряда, сумма которой равна A.

   В остальных пунктах всё вполне аналогично.
2. Найдём наименьшее $k_1 \in \mathbb{N}$ такое что $p_1 + p_2 + \dots + p_{k_1} > 1$.

   Найдём наименьшее $k_2 \in \mathbb{N}$ такое что $p_1 + p_2 + \dots + p_{k_1} + q_1 + p_{k_1+1} + \dots + p_{k_2} > 2$

   Найдём наименьшее $k_3 \in \mathbb{N}$ такое что $p_1 + p_2 + \dots + p_{k_1} + q_1 + p_{k_1+1} + \dots + p_{k_2} + q_2 + p_{k_2+1} + \dots + p_{k_3} > 3$

   И так далее. Построение выше и даст перестановку ряда, расходящуюся к к $+\infty$.
3. Аналогично предыдущему.
4. Аналогично предыдущим, например, доводя сумму последовательно до 1, -1, 2, -2, 3, -3 и так далее.

$\square$

Произведение числовых рядов

Произведение пары конечных сумм записывается вполне естественным и понятным образом:

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \cdot \sum_{m=1}^{M} b_m = (a_1 + \dots + a_n)(b_1 + \dots + b_m) = \sum_{n=1,\ m=1}^{N,\ M} a_n b_m$$

С бесконечными суммами всё менее понятно. Казалось бы,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{m=1}^{\infty} b_m = \sum_{n=1\ m=1}^{\infty} a_n b_m,$$

однако объект в правой части равенства мы не определяли.

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\iddots$
b_4	16	15	14	13	$\dots$
b_3	9	8	7	12	$\dots$
b_2	4	3	6	11	$\dots$
b_1	1	2	5	10	$\dots$
	a_1	a_2	a_3	a_4	$\dots$

Рис. 1: Нумерация по квадратам

Но по крайней мере множество пар индексов (n, m) счетно, а значит и множество слагаемых в сумме счётно, то есть его можно занумеровать и таким образом превратить произведение рядов в обычный ряд. Вопрос лишь в том, как именно это сделать.

Теорема 3 (Коши о произведении абсолютно сходящихся рядов)**.** *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$ *и* $\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m = B$*, причём оба ряда абсолютно сходятся. Тогда ряд из произведений* $a_n b_m$*, занумерованных в любом порядке, сходится абсолютно и его сумма равна* $A \cdot B$*.*

Доказательство. По недавно доказанной теореме Коши о перестановках абсолютно сходящегося ряда нам достаточно доказать, что хотя бы при какой-то одной нумерации ряд из произведений абсолютно сходится к $A \cdot B$.

Будем использовать довольно очевидный способ нумерации, вполне достаточно описываемый картинкой слева, обычно называемый «нумерация по квадратам». Обозначим $A_+ := \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, $B_+ := \sum\limits_{m=1}^{\infty} |b_m|$, и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ — ряд из произведений, занумерованный выбранным нами способом. Тогда последовательность частичных сумм ряда из модулей c_k ограничена

$$\sum_{k=1}^{K} |c_k| \leqslant \sum_{k=1}^{K^2} |c_k| = \left(\sum_{n=1}^{K} |a_n|\right)\left(\sum_{m=1}^{K} |b_m|\right) \leqslant A_+ \cdot B_+,$$

то есть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ сходится абсолютно. Сумму этого ряда посчитать теперь совсем несложно:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \lim_{K\to\infty} \sum_{k=1}^{K} c_k = \lim_{K\to\infty} \sum_{k=1}^{K^2} c_k = \lim_{K\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{K} a_n\right)\left(\sum_{m=1}^{K} b_m\right) = A \cdot B$$

$\square$

Если хоть один из рядов не сходится абсолютно, такое утверждение уже неверно. Так что для всех остальных случаев важно договориться о нумерации. Один из часто встречающихся удобных способов нумерации, который в дальнейшем будет подразумеваться по умолчанию — это так называемая «нумерация по треугольникам» или «произведение Коши».

$\vdots$	15	$\iddots$			
b_4	10	14	$\iddots$		
b_3	6	9	13	$\iddots$	
b_2	3	5	8	12	$\iddots$
b_1	1	2	4	7	11
	a_1	a_2	a_3	a_4	$\dots$

Рис. 2: Нумерация по треугольникам

Определение 2. *Для рядов* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m$ *их произведением называется ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$, *где* $c_k = \sum\limits_{j=0}^{k} a_k b_{k-j}$

Теорема 4 (Мертенса)**.** *Пусть ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$ *и* $\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m = B$, *причём хотя бы один из рядов сходится абсолютно. Тогда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{j=0}^{k} a_k b_{k-j} = AB$.

Доказательство этой теоремы опустим.

Лекция 06 от 10.10.2016
Бесконечные произведения

Основные понятия и определения

Итак, бесконечные произведения. Попытаемся применить к ним тот же подход, что и к рядам.

Определение 1. *Пусть* $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— последовательность ненулевых действительных чисел. Бесконечным произведением называется выражение* $a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$, *записываемое также как* $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. *Частичным произведением называется величина* $P_N = a_1 \ldots a_N$.

Определение 2. *Бесконечное произведение* $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится к числу* $A \neq 0$, *если последовательность частичных произведений* P_N *сходится к* A *при* $N \to \infty$.

Определение 3. *Бесконечное произведение сходится, если существует такое* $A \neq 0$, *к которому это произведение сходится.*

Утверждение 1. *Добавление/удаление/изменение конечного числа множителей не влияет на сходимость/расходимость бесконечного произведения.*

Здесь важно понимать, что это возможно только потому, что мы запретили последовательности содержать нулевые элементы.

Утверждение 2 (Необходимое условие сходимости)**.** *Если* $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то* $a_n \to 1$.

Доказательство. Пусть $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$. Тогда $a_n = \dfrac{P_n}{P_{n-1}} \to \dfrac{A}{A} = 1$. □

Здесь становится видно, почему $A = 0$ — это плохо. Именно поэтому мы запретили сходимость к нулю, когда давали соответствующие определения.

Раз сходиться к нулю нельзя, то определим это несколько иначе.

Определение 4. *Бесконечное произведение* $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится к нулю, если* $P_N \to 0$ *при* $N \to \infty$.

Бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится к бесконечности, если* $P_N \to +\infty$ *при* $N \to \infty$.

Связь с числовыми рядами, исследование сходимости

Конечно, можно было бы потратить несколько лекций на то, чтобы заново доказать все те признаки, которые мы уже разобрали для рядов. Но гораздо легче просто свести задачу к предыдущей.

При изучении сходимости бесконечных произведений достаточно ограничиться случаем, когда $a_n \to 1$. Тогда можно считать, что начиная с некоторого места все члены последовательности строго положительны. А так как удаление конечного числа начальных членов на факт сходимости или расходимости не влияет, достаточно изучить бесконечные произведения только с положительными членами.

Утверждение 3. *Бесконечное произведение* $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln a_n$.

Доказательство. Заметим, что $S_N = \ln P_N$. Тогда, если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = A > 0$, то существует и предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \ln A$, то есть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln a_n$ сходится.

И наоборот, если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln a_n = S$, то есть $S_N \to S$, то тогда $P_N = e^{S_n} \to e^S \neq 0$, то есть бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. □

Отсюда становится понятным, почему логично определять стремление бесконечного произведения $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ к нулю как расходимость — это соответствует случаю, когда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln a_n$ расходится к $-\infty$.

Также же получаем несколько халявных следствий.

Утверждение 4. *Пусть все* $\alpha_n > 0$ *или все* $\alpha_n \in (-1, 0]$. *Тогда бесконечное произведение* $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1+\alpha_n)$ *сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$.

Доказательство. Если α_n не стремится к нулю, то и $1+\alpha_n$ не стремится к единице. Тогда и ряд, и бесконечное произведение расходятся, так как не выполняется необходимое условие сходимости.

Теперь пусть $\alpha_n \to 0$. Тогда сходимость бесконечного произведения $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1+\alpha_n)$ равносильна сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+\alpha_n)$. И так как он знакопостоянный, то по соответствующему признаку сравнения этот ряд сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$. □

Утверждение 5. *Пусть* $\alpha_n > -1$ *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ *сходится. Тогда бесконечное произведение* $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1+\alpha_n)$ *сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$.

Доказательство. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ сходится, то $\alpha_n \to 0$. Тогда, аналогично предыдущему доказательству, достаточно исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+\alpha_n)$.

Разложим его в ряд Тейлора, получив $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n - \dfrac{\alpha_n^2}{2} + o(\alpha_n^2)\right)$, а это уже равносильно сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2(1+o(1))$. Начиная с некоторого номера, ряд станет знакопостоянным, то есть можно применить все тот же признак сравнения. Что и приводит нас с исследованию сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$. □

Фактически мы доказали два необходимых и достаточных условия сходимости. Теперь рассмотрим просто достаточное.

Утверждение 6. *Пусть $\alpha_n > -1$. Тогда если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$ сходится, то сходится и бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+\alpha_n)$.*

Доказательство.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| \text{ сходится} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |\ln(1+\alpha_n)| \text{ сходится} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\alpha_n) \text{ сходится} \Rightarrow \prod_{n=1}^{\infty}(1+\alpha_n) \text{ сходится.}$$

□

Если ввести соответствующее определение, то на бесконечные произведения можно будет распространить теорему о перестановке множителей (слагаемых) и ее влиянии на сходимость.

Определение 5. *Бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно/условно, если абсолютно/условно сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln a_n$.*

Применение

Теперь, окончательно убедившись, что изучение бесконечных произведений можно свести к изучению рядов, самое время задаться вопросом — а зачем они нужны?

Оказывается, они могут быть удобным инструментом при доказательствах. Приведем несколько примеров.

Утверждение 7. *Пусть $a_n > 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ и $S_n = a_1 + \ldots a_n$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{S_n}$ расходится.*

Доказательство. Достаточно доказать расходимость бесконечного произведения $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{a_n}{S_n}\right)$:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{S_n}\right) = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{S_n-a_n}{S_n} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{S_{n-1}}{S_n},$$
$$P_n = \frac{S_1}{S_2}\cdot\frac{S_2}{S_3}\ldots\frac{S_{n-1}}{S_n} = \frac{S_1}{S_n} \to 0.$$

□

Отсюда в частности следует, что нет самого маленького расходящегося ряда.

Теперь докажем почти формулу Стирлинга.

Утверждение 8. *Пусть $a_n = \dfrac{n!e^n}{n^{n+1/2}}$. Тогда существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A > 0$.*

Доказательство. Представим элемент a_n в следующем виде:

$$a_n = a_1\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\ldots\frac{a_n}{a_{n-1}} = a_1\Big/\prod_{k=1}^{n}\frac{a_k}{a_{k+1}}.$$

Тогда сходимость к положительной константе последовательности $\{a_n\}$ равносильна сходимости бесконечного произведения $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}}$.

Посчитаем, чему равен член этого произведения:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n! e^n (n+1)^{n+1+1/2}}{(n+1)! e^{n+1} n^{n+1/2}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1/2} / e.$$

Перейдем к рассмотрению ряда из логарифмов:

$$\ln \frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 = [\text{р. Тейлора}] =$$
$$= \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 1 = 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} - 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Получили, что такой ряд будет сходится. Следовательно, существует положительный предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

□

Лекция 07 от 17.09.2016
Функциональные последовательности и ряды

Поточечная и равномерная сходимость

Начиная с этой лекции, будем говорить о функциональных последовательностях и рядах.

Пусть X — произвольное множество точек, а $\{f(x)\}_n^\infty$ — последовательность функций, определённых на X или на его подмножествах.

Определение 1. *Будем говорить, что $f_n(x)$ сходится поточечно к $f(x)$, если*

$$\forall x \in X \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}\colon \ \forall n > N \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Обозначение 1. $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{X} f(x)$.

Почему такое определение не совсем удобно для нас? Сходимость в каждой точке может быть своя, произвольная, а хотелось бы, чтобы свойства функций f_n и f были похожи. Приведем пример, когда это не выполняется.

Пример 1. *Если $f_n(x) = x^n$, $X = [0; 1]$, то*

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{[0;1]} \begin{cases} 0, \, x < 1 \\ 1, \, x = 1 \end{cases}.$$

То есть бывает так, что все функции последовательности непрерывны на отрезке и стремятся к разрывной функции.

Для устранения этого недостатка введём другое определение сходимости функциональной последовательности.

Определение 2. *Будем говорить, что последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ сходится к $f(x)$ равномерно на множестве X, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}\colon \ \forall n > N \ \forall x \in X \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Обозначение 2. $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f(x)$.

Из определений сразу очевидно следует утверждение.

Утверждение 1. *Если $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f(x)$, то $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{X} f(x)$.*

А что, если нам даны последовательность $f_n(x)$, функция $f(x)$ и множество X, то как нам понять, сходится ли $f_n(x)$ к $f(x)$?

Существует мощный способ. Обозначим $r_n(x) = \sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - f(x)|$.

Утверждение 2. $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f(x) \Leftrightarrow r_n \to 0$.

Доказательство.
Необходимость. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, положим $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$. Тогда

$$\exists N \in \mathbb{N}\colon\ \forall n > N\ \forall x \in X\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_1,$$
$$\Rightarrow r_n = \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon_1 < \varepsilon.$$

То есть $r_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Достаточность.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\colon\ \forall n > N\ r_n < \varepsilon \Rightarrow \forall x \in X\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

□

Часто это утверждение называют **супремум-критерием**. Для приведённого выше примера $f_n(x) = x^n$.

Утверждение 3.

1. $x^n \xrightarrow[n\to\infty]{[0;1]} 0.$
2. $x^n \underset{n\to\infty}{\overset{[0;1]}{\not\rightrightarrows}} 0.$

Доказательство. $r_n = \sup\limits_{x\in(0;1)} |x^n - 1| = 1 \not\to 0.$ □

Есть ещё одна подобного рода последовательность.

$$f_n(x) = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

Понятно, что в любой точке значение $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = e^x$, то есть $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{R}} e^x$, но $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{\mathbb{R}}{\not\rightrightarrows}} e^x$. Однако, как легко понять, $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{(-C;C)}{\not\rightrightarrows}} e^x$ для всякого $C > 0$. Эта последовательность ещё всплывёт в нашем курсе.

Утверждение 4. *Если* $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f(x)$ *и* $g_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} g(x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, *то*

1. $f_n(x) + g_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f(x) + g(x)$,
2. $\alpha f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} \alpha f(x)$.

Доказательство. Докажем пункт 1, второй доказывается аналогичною. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, положим $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$. Тогда

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}\colon\ \forall x \in X\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_1,$$
$$\exists N_2 \in \mathbb{N}\colon\ \forall x \in X\ |g_n(x) - g(x)| < \varepsilon_1.$$

Положим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда

$$|(f_n(x) + g_n(x)) - (f(x) + g(x))| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)| < \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = \varepsilon.$$

Получили требуемое. □

Утверждение 5. *Если* $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f(x)$ *и* $g(x)$ *ограничена на множестве* X*, то* $f_n(x)g(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f(x)g(x)$*.*

Доказательство. $\exists C > 0\colon\ \forall x \in X\ |g(x)| < C$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, положим $\varepsilon_1 = \varepsilon/C$. Найдём такое $N \in \mathbb{N}$, что $\forall n > N$, $\forall x \in X\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_1$. Тогда
$\forall n > N\colon \forall x \in X\ |f_n(x)g(x) - f(x)g(x)| < C\varepsilon_1 = \varepsilon$. □

Замечание 1. *Если* $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f(x)$*,* $g_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} g(x)$ *и* $f(x)$*,* $g(x)$ *ограничены на множестве* X*, то* $f_n(x)g_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f(x)g(x)$*.*

Замечание 2. *Если* $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f(x)$ *и* $f(x)$ *отделена от нуля (т.е. существует такое* $\alpha > 0$*, что для любого элемента множества* X $|f(x)| \geqslant \alpha$*), то* $\dfrac{1}{f_n(x)} \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} \dfrac{1}{f(x)}$*.*

Доказательство этих фактов остаётся в качестве управжнения. **Указание**. Рассмотреть
$\dfrac{1}{f_n} - \dfrac{1}{f} = (f - f_n)\dfrac{1}{f_n \cdot f}$.

Геометрический смысл равномерной сходимости

Несложно понять, что если $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f(x)$, то для всякого $\varepsilon > 0$, начиная с какого-то $N \in \mathbb{N}$ для всех $n > N$ все графики функций $f_n(x)$ окажется в ε-коридоре функции $f(x)$.

Критерий Коши равномерной сходимости

Теорема 1 (Критерий Коши равномерной сходимости)**.** *Следующие условия эквивалентны:*

1. $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}}$??? *(равномерно сходится куда-то)*
2. $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *удовлетворяет условию Коши равномерной сходимости на* X*:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\colon\ \forall n,m > N\ \forall x \in X\ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Доказательство. **1** $\Leftarrow$ **2**. Заметим, что для всякого $x \in X$ числовая последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ является фундаментальной. Тогда $\forall x \in X\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$. Найдём такое $N \in \mathbb{N}$, что

$$\forall n,m > N\ \forall x \in X\ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon_1$$

Зафиксировав n перейдём к пределу при $m \to \infty$, получим $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon_1 < \varepsilon$. Получили требуемое.

1 $\Rightarrow$ **2**. Пусть $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f(x)$.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, положим $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$. Найдём такое $N \in \mathbb{N}$ $\forall n > N$ $\forall x \in X$ верно $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_1$. Тогда $\forall n,m > N$ $\forall x \in X$ выполнено

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = \varepsilon.$$

$\square$

Функциональные ряды

Перейдём к рассмотрению функциональных рядов. Тут все определения и теоремы переносятся с обычных рядов с заменой числовых последовательностей на функциональные.

Определение 3. *Будем говорить, что ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится равномерно к* $S(x)$ *на множестве* X*, если последовательность его частичных сумм* $S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$ *сходится равномерно к* $S(x)$ *на множестве* X*.*

Отсюда же можно сформулировать ряд утверждений, которые по сути мы уже доказали.

Утверждение 6. *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} S_1(x)$*,* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} S_2(x)$*. Тогда их почленная сумма* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (f_n(x) + g_n(x)) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} S_1(x) + S_2(x)$*.*

Утверждение 7. *Если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} S(x)$*,* $\alpha \in \mathbb{R}$*, то*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} \alpha S(x).$$

Утверждение 8. *Если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} S(x)$*, а* $g(x)$ *ограничена на* X*, то*

$$\sum_{n=1}^{\infty} g(x) f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} g(x) S(x).$$

Ну и конечно, мы не обойдёмся без критерия Коши.

Утверждение 9 (Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда)**.** *Следующие утверждения эквивалентны.*

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}}$ *??? (опять же, сходится куда-то).*
2. *Выполняется условие Коши*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\colon\ \forall m > N, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in X\ \left| \sum_{n=m+1}^{m+p} f_n(x) \right| < \varepsilon.$$

Отсюда же нахаляву получаем утверждение.

Утверждение 10 (Необходимое условие равномерной сходимости функционального ряда)**.** *Если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}}$*, то* $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} 0$*.*

Лекция 09 от 07.11.2016
Предел по базе

Все пределы, которые раньше возникали в нашем курсе — это наследники предела по базе.

Что это такое?

Пусть X — произвольное непустое множество.

Определение 1. *Система подмножеств $\mathcal{B}$ множества X называется базой, если*

1. $\varnothing \notin \mathcal{B}$;
2. $\forall B_1,\ B_2 \in \mathcal{B}\ \exists B_3 \in \mathcal{B}:\ \ B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Замечание 1. *В классическом понимании символ $\subset$ означает строгое включение, однако в современной математике это также может означать равенство множеств, и мы будем пользоваться именно этим значением. Если хотят подчеркнуть, что множества не равны, то пишут $\subsetneq$.*

Пусть функция f определена на X или части X и принимает действительные значения (впрочем, действительность не принципиальна).

Определение 2. *Число A называют пределом функции f по базе $\mathcal{B}$, если*

0. $\exists B \in \mathcal{B} : f$ *определена на* B;
1. $\forall \varepsilon > 0\ \exists B \in \mathcal{B} : \forall x \in B\ |f(x) - A| < \varepsilon$.

Вообще говоря, нулевое условие можно опустить, так как оно следует из первого, но исторически сложилось, что его все-таки пишут — на практике гораздо удобней сначала проверить, определена ли функция хоть где-то.

Пример 1.

- $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n=1}^{\infty}$, $B_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$. *Тогда* $B_n \cap B_m = B_{\max(n,m)}$. *Такая база задает предел числовой последовательности.*
- $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{B} = \{B_\delta\}_{\delta>0}$, $B_\delta = (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$. *Такая база задает двусторонний предел функции при* $x \to 0$. *Аналогично можно задать односторонние пределы.*
- *Пусть зафиксирован отрезок* $[a, b]$ *и* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

  Пусть X — множество всех отмеченных разбиений $[a, b]$ (то есть это разбиения с зафиксированной точкой на каждом отрезке). Тогда базой Римана называется база $\mathcal{B} = \{B_\delta\}_{\delta>0}$, где B_δ это совокупность всех отмеченных разбиений с диаметром меньше δ. Соответственно, интегралом Римана называется предел по этой базе интегральных сумм Римана, рассматриваемых как функция от отмеченных разбиений при фиксированном f:

$$\sigma(f, (\tau, \xi)) = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)|\Delta_j|.$$

Ключевые свойства

Пусть $\mathcal{B}$ — база X.

Утверждение 1. *Если* $\lim\limits_{\mathcal{B}} f = A_1$ *и* $\lim\limits_{\mathcal{B}} f = A_2$, *то* $A_1 = A_2$.

Доказательство. Пусть $A_1 \neq A_2$. Положим $\varepsilon = \frac{|A_1 - A_2|}{2}$. Тогда:

$$\exists B_1 \in \mathcal{B} : \forall x \in B_1\ |f(x) - A_1| < \varepsilon;$$
$$\exists B_2 \in \mathcal{B} : \forall x \in B_2\ |f(x) - A_2| < \varepsilon.$$

Тогда существует $B_3 \in \mathcal{B}$ такой, что $B_2 \subset B_1 \cap B_2$. Для него будет верно, что

$$\forall x \in B_3 :\ |A_1 - A_2| = |A_1 - f(x) + f(x) - A_2| \leqslant |A_1 - f(x)| + |A_2 - f(x)| < 2\varepsilon = |A_1 - A_2|.$$

Получили противоречие. $\square$

Давно знакомое всем доказательство, но зато оно показывает, почему база определена именно так.

Утверждение 2. *Пусть* $\lim\limits_{\mathcal{B}} f(x) = A$, $\lim\limits_{\mathcal{B}} g(x) = B$ *и* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Тогда:*

1. $\lim\limits_{\mathcal{B}}(f + g) = A + B$;
2. $\lim\limits_{\mathcal{B}}(fg) = AB$;
3. $\lim\limits_{\mathcal{B}}(\alpha f) = \alpha A$;
4. $\lim\limits_{\mathcal{B}} \dfrac{f}{g} = \dfrac{A}{B}$, *если* $B \neq 0$.

Доказательство. Это тоже почти школьный материал, так что докажем только один пункт. Пусть это будет последний.

Немного преобразуем:

$$\frac{f}{g} - \frac{A}{B} = \frac{Bf - fg}{gB} = \frac{Bf - BA + BA - fg}{gB} = \frac{B(f - A) + A(B - g)}{gB}.$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Положим $\varepsilon_1 = \min\left(\dfrac{\varepsilon B^2}{100(|A| + |B|) + 1}; \dfrac{|B|}{2}\right)$. Найдем такие B_1, $B_2 \in \mathcal{B}$, что:

$$\forall x \in B_1 : |f(x) - A| < \varepsilon_1;$$
$$\forall x \in B_2 : |g(x) - B| < \varepsilon_1.$$

Найдем такое $B_3 \in \mathcal{B}$, что $B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Тогда для всех $x \in B_3$ верно, что:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B}\right| \leqslant \frac{|B|\varepsilon_1 + |A|\varepsilon_1}{B^2/2} = \varepsilon_1 \frac{2(|A| + |B|)}{B^2} < \varepsilon.$$

$\square$

Утверждение 3. *Если существует предел* $\lim\limits_{\mathcal{B}} f$ *и функция* f *неотрицательна хотя бы на одном элементе* B *базы* $\mathcal{B}$, *то* $\lim\limits_{\mathcal{B}} f \geqslant 0$.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{\mathcal{B}} f = A < 0$. Тогда для $\varepsilon = \frac{|A|}{2}$ существует такой $\widetilde{B} \in \mathcal{B}$, что $\forall x \in \widetilde{B}: \ |f(x) - A| < \varepsilon$.

Но существует $x \in B \cap \widetilde{B}$, и тогда для него одновременно будет верно, что $f(x) \geqslant 0$ и $f(x) \leqslant \frac{A}{2} < 0$. Противоречие. □

Следствие 1. *Пусть $f \geqslant g$ на некотором элементе $B \in \mathcal{B}$ и существуют пределы $\lim\limits_{\mathcal{B}} f = A$ и $\lim\limits_{\mathcal{B}} g = \widetilde{A}$. Тогда $A \geqslant \widetilde{A}$.*

Доказательство. $\lim\limits_{\mathcal{B}}(f - g) = A - \widetilde{A}$ и одновременно, $\lim\limits_{\mathcal{B}}(f - g) \geqslant 0$. □

Пусть $\mathcal{B}$ и $\widetilde{\mathcal{B}}$ — базы на X.

Утверждение 4. *Пусть $\lim\limits_{\mathcal{B}} f = A$ и для каждого элемента $B \in \mathcal{B}$ существует элемент $\widetilde{B} \in \widetilde{\mathcal{B}}$ такой, что $\widetilde{B} \subset B$. Тогда $\lim\limits_{\widetilde{\mathcal{B}}} f = A$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Найдем $B \in \mathcal{B}$ такое, что $\forall x \in B: |f(x) - A| < \varepsilon$. Теперь найдем $\widetilde{B} \in \widetilde{\mathcal{B}}$ такое, что $\widetilde{B} \subset B$. Тогда $\forall x \in \widetilde{B}: |f(x) - A| < \varepsilon$. Получили определение предела $\lim\limits_{\widetilde{\mathcal{B}}} f = A$. □

Фактически это обобщение утверждения, что любая подпоследовательность сходится туда же, куда и вся последовательность, и что если есть предел, то есть и оба односторонних предела, и они все равны.

Ну а где есть предел, там есть и критерий Коши!

Критерий Коши

Определение 3. *Функция f удовлетворяет условию Коши по базе $\mathcal{B}$, если:*

0. $\exists B_0 \in \mathcal{B} : f$ *определена на* B_0;
1. $\forall \varepsilon > 0 : \exists B \in \mathcal{B} : \forall x, \widetilde{x} \in B \ |f(x) - f(\widetilde{x})| < \varepsilon$.

Теорема 1 (Критерий Коши)**.** *Следующие условия эквивалентны:*

1. *существует предел* $\lim\limits_{\mathcal{B}} f$;
2. *функция f удовлетворяет условию Коши по базе $\mathcal{B}$.*

Доказательство. Напоминаем, что мы пока определили только конечные пределы по базе.

(1) $\Rightarrow$ (2). Доказываем как обычно, через $\varepsilon/2$ и прочее.

(2) $\Rightarrow$ (1). Построим последовательность $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \ldots$ такую, что:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon = 1,\ & \exists B_1 \in \mathcal{B} : \forall x, \widetilde{x} \in B_1 \ |f(x) - f(\widetilde{x})| < 1; \\
\varepsilon = 1/2,\ & \exists \widetilde{B_2} \in \mathcal{B} : \forall x, \widetilde{x} \in \widetilde{B_2} \ |f(x) - f(\widetilde{x})| < 1/2, \\
& \qquad \exists B_2 \subset B_1 \cap \widetilde{B_2} : \forall x, \widetilde{x} \in B_2 \ |f(x) - f(\widetilde{x})| < 1/2; \\
\varepsilon = 1/3,\ & \exists \widetilde{B_3} \in \mathcal{B} : \forall x, \widetilde{x} \in \widetilde{B_3} \ |f(x) - f(\widetilde{x})| < 1/3, \\
& \qquad \exists B_3 \subset B_2 \cap \widetilde{B_3} : \forall x, \widetilde{x} \in B_3 \ |f(x) - f(\widetilde{x})| < 1/3; \\
& \ldots
\end{aligned}
$$

Для каждого элемента B_n выберем точку $x_n \in B_n$. Заметим, что $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ — функциональная последовательность, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N},\ \frac{1}{N} < \varepsilon : \forall n, m > N \; |f(x_n) - f(x_m)| < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Это верно, так как $x_n \in B_n \subset B_N$ и аналогично для x_m.

Значит, существует предел $\lim\limits_{n \to \inf} f(x_n) = A$. Покажем, что $\lim\limits_{\mathcal{B}} f = A$.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \; |f(x_n) - A) < \varepsilon.$$

При этом, существует такое $n > N$, что $\dfrac{1}{n} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Значит,

$$\forall x \in B_n \in \mathcal{B} : |f(x) - A| \leqslant |f(x) - f(x_n)| + |f(x_n) - A| < \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

$\square$