Лекция 03 от 19.09.2016
Признаки сходимости знакопостоянных и знакопеременных рядов

Граница между сходящимися и расходящимися рядами

На прошлой лекции был сформулирован и доказан следующий признак:

Признак 1 (Интегральный признак Коши–Маклорена). *Пусть $f(x) \geqslant 0$ — невозрастающая на $[1, \infty]$ функция. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ и $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.*

С помощью него мы можем исследовать на сходимость семейство рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}.$$

Как и для соответствующего интеграла, ряд сходится тогда и только тогда, когда $\alpha > 1$.

Может сложиться впечатление, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ является своего рода граничным между сходящимися и расходящимися рядами. Но исследуем теперь другой ряд (он нам также понадобится в дальнейшем):

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}.$$

Он сходится тогда и только тогда, когда сходится соответствующий интеграл.

$$\int\limits_{2}^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \int\limits_{2}^{\infty} \frac{1}{\ln x} d \ln x = \ln \ln x \Big|_{2}^{\infty} = \infty$$

Данный ряд меньше, чем гармоничный ряд, однако расходится. Причем, как несложно убедиться, семейство рядов $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{\beta} n}$ при $\beta > 1$ уже сходится. Но при этом «граница» между сходящимися и расходящимися рядами не проходит по ряду $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ — взять, например, ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln \ln n}$, который тоже расходится. И так далее, «границу» можно «уточнять» бесконечно. Так что точной «границы» не существует.

Скорость роста частичных сумм расходящихся рядов

В прошлой лекции мы с помощью интегрального признака Коши–Маклорена научились оценивать остаток сходящихся сумм. Теперь научимся оценивать скорость роста частичных сумм расходящихся рядов.

Возьмем, например, гармонический ряд. Утверждается, что его частичные суммы оцениваются следующим образом:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \ln N + C + o(1),$$

где C эта некая константа. Но как доказать, что это действительно корректная оценка?

Фактически мы утверждаем сходимость последовательности $\{S_n\}$, где

$$S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

Это можно воспринимать как последовательность частичных сумм и, соответственно, перейти к соответствующему ряду:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln n + \ln(n-1) = \frac{1}{n} - \ln\frac{n}{n-1} = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \left(-\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

На последнем шаге мы воспользовались разложением в ряд Тейлора.

Мы получили, что $a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, следовательно, данный ряд сходится. И так как мы построили сходящийся ряд, у которого последовательность $\{S_n\}$ будет последовательностью частичных сумм, данная последовательность также сходится. Что и доказывает нашу оценку.

Точно также можно доказать оценки расходимости частичных сумм следующих рядов:

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n\ln n} = \ln\ln N + C + o(1)$$
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \frac{2N^{2/3}}{2} + C + o(1)$$

Снова признаки сходимости знакопостоянных рядов

Вернемся теперь к признакам сходимости.

Признак 2 (Признак Кумера)**.** *Пусть* a_n, $b_n > 0$ *и* $v_n := \dfrac{a_n}{a_{n+1}} b_n - b_{n+1}$. *Тогда:*

1. *если существует такое* $l > 0$*, что начиная с некоторого места* $v_n \geqslant l$*, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится;*
2. *если начиная с некоторого места* $v_n \leqslant 0$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{b_n}$ *расходится, то и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда наше неравенство выполняется для всех n.

1. Итого, мы имеем, что $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} b_n - b_{n+1} \geqslant l$. Домножим неравенство на a_{n+1}, благо оно положительно:

$$a_n \cdot b_n - a_{n+1} \cdot b_{n+1} \geqslant l a_{n+1} > 0$$

Воспользуемся этим, оценив частичную сумму следующего ряда, при $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=1}^{N} l a_n \leqslant l a_1 + (a_1 b_1 - a_2 b_2) + (a_2 b_2 - a_3 b_3) + \ldots + (a_{N-1} b_{N-1} - a_N b_N) = l a_1 + a_1 b_1 - a_n b_N \leqslant l a_1 + a_1 b_1$$

Итого, мы получили, что частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} l a_n$ ограничены сверху. Значит, этот ряд сходится и, следовательно, сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

2. Имеем, что $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} b_n - b_{n+1} \leqslant 0$. Перенесем b_{n+1} в правую часть и разделим все на b_n:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

Теперь перевернем дробь:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{1/b_{n+1}}{1/b_n}.$$

По условию ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ расходится, а значит признак сравнения дает расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

□

Но признак Куммера особо не используется, он скорее нужен, чтобы вывести другие признаки.

Признак 3 (Признак Раабе)**.** *Пусть $a_n > 0$ и существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = A \in [-\infty, +\infty].$$

Тогда:

1. *если $A > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;*
2. *если $A < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.*

Доказательство. Признак Куммера при $b_n = n$. □

Покажем, зачем нужен признак Раабе. Пусть $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$. Тогда:

$$n\left(\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} - 1\right) = n\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha - 1\right) = n\left(1 + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) \longrightarrow \alpha.$$

Как мы видим, признак Раабе позволяет «ловить» ряды с полиномиальной скоростью роста. И это хорошо, так как раньше мы этого не умели.

Но у этого признака все еще есть «мертвая зона», когда $A = 1$. Поэтому рассмотрим еще один признак, который не имеет «мертвой зоны», но, к сожалению, не всегда применим.

Признак 4 (Признак Гаусса)**.** *Пусть для некоторого $\varepsilon > 0$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ верно, что*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \alpha + \frac{\beta}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right).$$

Тогда:

1. *если $\alpha > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;*
2. *если $\alpha < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится;*
3. *если $\alpha = 1$ и $\beta > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;*

4. *если* $\alpha = 1$ *и* $\beta \leqslant 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

Доказательство. Все эти утверждения на самом деле следуют из уже рассмотренных нами признаков. Так что просто назовем их.

1. Признак д'Аламбера.
2. Признак д'Аламбера.
3. Признак Раабе.
4. Если $\beta < 1$ — признак Раабе. Если $\beta = 1$ — признак Куммера при $b_n = n \ln n$.

Рассмотрим подробнее последний случай, когда $\alpha = \beta = 1$. Воспользуемся признаком Куммера при $b_n = n \ln n$ и равенством из условия:

$$v_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} b_n - b_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)\right) n \ln n - (n+1)\ln(n+1) =$$
$$= (n+1)\left(\ln n - \ln(n+1)\right) + O\left(\frac{\ln n}{n^{\varepsilon}}\right) =$$
$$= -(n+1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{\ln n}{n^{\varepsilon}}\right) =$$
$$= -(n+1)\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + O\left(\frac{\ln n}{n^{\varepsilon}}\right) \longrightarrow -1$$

Итого, по признаку Куммера ряд действительно расходится. □

Замечание 1. *Вместо* $O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)$ *можно писать более сильное* $O\left(\frac{1}{n \ln n}\right)$. *Но первое чаще появляется в интересных примерах, поэтому исторически сложилось использовать его.*

Признаки сходимости знакопеременных рядов

Признак 5 (Признак Лейбница)**.** *Пусть последовательность* $\{b_n\}$ *строго монотонно убывает у нулю. Тогда ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$ *сходится, причем его остаток* r_N *имеет знак* $(-1)^{N+1}$ *и по модулю меньше* b_{N+1}.

Доказательство. Докажем с помощью критерия Коши. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем такое $N \in \mathbb{N}$, что для всех $n > N$ верно, что $b_n < \varepsilon$. Теперь для любого $m > N$ и $p \in \mathbb{N}$ рассмотрим следующую величину:

$$\left| \sum_{n=m+1}^{m+p} (-1)^n b_n \right|.$$

Можно вынести $(-1)^{m+1}$ из суммы — на модуль это не повлияет, но зато нам будет удобнее считать, что первое слагаемое идет с положительным знаком.

Сгруппируем слагаемые следующим образом:

$$\left| \sum_{n=m+1}^{m+p} (-1)^n b_n \right| = \left| b_{m+1} + (-b_{m+2} + b_{m+3}) + (-b_{m+4} + b_{m+5}) + \ldots \right|.$$

В силу строгого монотонного убывания последовательности получаем, что каждая скобка меньше нуля. Последнее слагаемое, b_{m+p}, могло остаться без пары, но тогда оно идет с отрицательным знаком. Итого, получаем, что мы с b_{m+1} складываем только отрицательные величины.

Сразу хочется ограничить модуль сверху величиной $|b_{m+1}|$, однако надо понимать, что выражение под модулем могло оказаться отрицательным, и тогда наша оценка не сработает. Поэтому надо отдельно показать, что подмодульное выражение все-таки положительно.

Сгруппируем слагаемые другим способом:

$$\left|\sum_{n=m+1}^{m+p}(-1)^n b_n\right| = \big|(b_{m+1}-b_{m+2})+(b_{m+3}-b_{m+4})+\ldots\big|.$$

Каждая группа слагаемых больше нуля в силу строгого монотонного убывания. Без пары могло остаться только последнее слагаемое, b_{m+p}, но тогда оно идет с положительным знаком. Следовательно, выражение под модулем больше нуля.

Итого:

$$\left|\sum_{n=m+1}^{m+p}(-1)^n b_n\right| \leqslant |b_{m+1}| < \varepsilon.$$

Получаем, что по критерию Коши ряд сходится. Отсюда же следует оценка на остаток:

$$|r_N| = \left|\sum_{n=N+1}^{\infty}(-1)^n b_n\right| \leqslant b_{N+1}.$$

Аналогичным образом оценим остаток знака.

Снова вынесем за скобки знак $(-1)^{N+1}$ (но на этот раз его не убъет модуль), и сгруппируем слагаемые вторым способом:

$$r_N = \sum_{n=N+1}^{\infty}(-1)^n b_n = (-1)^{N+1}\big((b_{N+1}-b_{N+2})+(b_{N+3}-b_{N+4})+\ldots\big).$$

Здесь уже нет никаких проблем с последним слагаемым, так что вся скобка имеет положительный знак. А значит, r_N имеет знак $(-1)^{N+1}$. Что нам и требовалось. $\square$