Лекция 2 от 16.09.2016

Задача о сумасшедшей старушке

Условие: Есть самолёт имеющий n мест, в который садятся n пассажиров. Первой в него заходит некоторая старушка, которая своего места не знает, и садится на случайное; каждый следующий пассажир действует правильно: садится на своё место, если оно свободно, и на случайное, если своё занято.

Вопрос 1: Какова вероятность того, что последний пассажир сядет на своё место?

Ответ: Правильный ответ, как ни странно, угадывается. Это $\frac{1}{2}$ (прямо как в задаче про динозавра — либо сядет, либо не сядет). Кажется неверным, но если задуматься, становится понятно, что есть только два варианта того, куда последний пассажир может сесть — либо на своё место, либо на место старушки.

Вопрос 2: Какова вероятность, что предпоследний пассажир сядет на своё место?

Ответ: Тут ответом является $\frac{2}{3}$. Рассуждение похоже на предыдущий пункт. Есть 3 варианта места, куда может сесть старушка: к себе, на место предпоследнего или на место последнего пассажира. Нас устраивают 2 из них.

Вопрос 3: Какова вероятность того, что они оба сядут на свои места?

Ответ: Как уже можно догадаться, $\frac{1}{3}$.

Стоит строже объяснить, почему вышесказанное верно:

1) $A = \{$ последний сядет на свое место $\}$.

- $n = 2$;
  $P(A) = \frac{1}{2}$;
- $n = 3$;
  $P(A) = \frac{1}{3}$(старушка села на своё место)$+\frac{1}{3}P(A \mid$ старушка села на второе место$) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

Гипотеза: $\forall n,\ P(A) = \frac{1}{2}$.
Пусть $B_i = \{$старушка села на место пассажира с номером i, $1 \leqslant i \leqslant n\}$; считаем, что её номер равен 1. Воспользуемся методом индукции:

База: Для $k = 2$ верно. **Переход:** Пусть для всех $k < n$ гипотеза верна; докажем для $k = n$:

$$P(A) = \{\text{формула полной вероятности}\} = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i) \cdot P(B_i)$$

$$P(A \mid \ B_i) = \frac{1}{n}, \forall i = 1..n$$

$$P(A \mid B_1) = 1$$

$$P(A \mid B_n) = 0$$

$$P(A \mid B_i) = \frac{1}{2},\ 2 \leqslant i \leqslant n-1, \text{ т.к. теперь } i\text{-ый пассажир “стал старушкой”}.$$

$$P(A) = \frac{n-2}{n} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \cdot 1 + \frac{1}{n} \cdot 0 = \frac{1}{2} \quad \square$$

2) $C = \{$ последний сядет на свое место $\}$.

- $n = 3$: $P(C) = \frac{2}{3}$ — у старушки есть 3 варианта, при этом два из них (свое и последнее места) нас устраивают.

Гипотеза: $\forall n$, $P(C) = \frac{2}{3}$.

База: Для $k = 3$ верно. Докажем для $k = n$:

$$P(C \mid B_1) = 1$$

$$P(C \mid B_n) = 1$$

$$P(C \mid B_{n-1}) = 0$$

$$P(C \mid B_i) = \frac{2}{3},\ 2 \leqslant i \leqslant n-2$$

$$P(C) = \frac{n-3}{n} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{n} \cdot 1 + \frac{1}{n} \cdot 0 = \frac{2}{3}$$

3) $D = \{$ последние 2 пассажира сели на свои места $\}$.
$D = A \cap C \implies P(D) = P(A \cap B)$.

Гипотеза: $\forall n$, $P(D) = \frac{1}{3}$.

Индукция с той же базой.

$$P(D) = \{\text{формула полной вероятности}\} = \sum_{i=1}^{n} P(D \mid B_i) P(B_i)$$

$$P(D \mid B_1) = 1$$

$$P(D \mid B_n) = 0$$

$$P(D \mid B_{n-1}) = 0$$

$$P(D \mid B_i) = \frac{1}{3},\ 2 \leqslant i \leqslant n-2$$

$$P(D) = \frac{n-3}{n} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{n} \cdot 1 + \frac{2}{n} \cdot 0 = \frac{1}{3} \quad \square$$

Кажется, что эта вероятность равна произведению двух прошлых; *это ~~счастливое совпадение~~ неспроста.*

Удачливый студент

Условие:

Студент знает k билетов из n. Каким ему нужно встать в очередь из n студентов, чтобы вероятность вытянуть "хороший" билет была максимальнв?

Решение:

Пусть $A_s = \{$студент вытянул хороший билет, стоя на s-ом месте в очереди$\}$;
$B_i = \{$до студента взяли ровно i "хороших билетов"$\}$.

$$P(A_s) = \sum_{c=0}^{\min(k,s-1)} P(A_s \mid B_i)P(B_i)$$

$$P(A_s \mid B_i) = \frac{k-i}{n-s+1}$$

$$P(B_i) = \frac{C_k^i \cdot C_{n-k}^{s-i-1} \cdot \cancel{(s-1)!}}{C_n^{s-1} \cdot \cancel{(s-1)!}}$$

$$P(A_s) = \sum_{i=max(..)}^{min(..)} \frac{k-i}{n-s+1} \cdot \frac{C_k^i \cdot C_{n-k}^{s-i-1}}{C_n^{s-1}} = \sum_{i=(..)}^{min(..)} \frac{k}{n} \cdot \frac{C_{k-1}^i \cdot C_{n-k}^{s-i-1}}{C_{n-1}^{s-1}} =$$

$$= \frac{k}{n} \cdot \sum_{i=0}^{min(k-1,s-1)} \frac{C_{k-1}^i \cdot C_{n-k}^{s-i-1}}{C_{n-1}^{s-1}} = \frac{k}{n} \quad \square$$

Формула Байеса

Пусть $\{B_i, i = 1 \dots n\}$ — разбиение Ω, причём $P(B_i) > 0$. Тогда для события A т.ч. $P(A) > 0$ выполняется

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i) \cdot P(B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(A \mid B_j) \cdot P(B_j)}$$

Доказательство тривиально:

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(A \mid B_i) \cdot P(B_i)}{P(A)} = \{\text{ф-ла полной вероятности}\} = \frac{P(A \mid B_i) \cdot P(B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(A \mid B_j) \cdot P(B_j)} \quad \square$$

Независимость

Определение: события A и B называются *независимыми* если, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$; обозначение — $A \perp\!\!\!\perp B$.

Примеры:

- Задача про старушку; $A = \{$последний сел на своё место$\}$,
  $B = \{$предпоследний сел на своё место$\}$ A и C — независимы.
- Бросок игральной кости; $A = \{$выпало чётное число$\}$,
  $B = \{$выпало число, делящееся на три$\}$

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{3}. \ P(A \cap B) = P(\text{“шестерка”}) = \frac{1}{6} = P(A) \cdot P(B).$$

Определение: события $A_1, \ldots, A_n$ называются *попарно независимыми*, если $\forall i \neq j$ A_i независимо от A_j.

Определение: события $A_1, \ldots, A_n$ называются *независимыми в совокупности*, если $\forall k \leqslant n$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$ выполнено $P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \prod\limits_{j=1}^{k} P(A_{i_j})$.

<u>Замечание:</u> независимость в сосокупности $\neq$ попарной независимости.

Пример: есть тетраэдр с раскрашенными гранями: К, С, З и КСЗ. Три события:

- $A_{red} = \{$на нижней грани есть красный цвет$\}$
- $A_{blue} = \{$на нижней грани есть синий цвет$\}$
- $A_{green} = \{$на нижней грани есть зелёный цвет$\}$

Очевидно, что вероятность любого события — $\frac{1}{2}$; любой пары событий — $\frac{1}{4}$; однако вероятность всех трёх разом не равна $\frac{1}{8}$, значит, эти события независимы попарно, но не в совокупности.

Упражнение: привести пример событий, т.ч. любой набор из $n-1$ события независим, а все вместе n событий вместе — зависимы.

Утверждения:

- A независимо с $A \Leftrightarrow P(A) = 0$ или $1 \Leftrightarrow A$ независимо с любым другим событием.
- $A \perp\!\!\!\perp B \implies \overline{A} \perp\!\!\!\perp B$
- Если $A_1 \ldots A_n$ — независимы в совокупности, то $\forall B_1 \ldots B_n :\ B_i = A_i$ или $B_i = \overline{A_i}$ — тоже независимы.

Случайные величины в дискретных вероятностных пространствах

Определение: пусть (Ω, P) — вероятностное дискретное пространство; отображение $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ называется *случайной величиной (с.в.)*.

Примеры:

- Индикаторы.

  Пусть $A \in \Omega$ — событие. Тогда *индикатором* события A называют называется с.в.

  $$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, w \in A; \\ 1, w \notin A; \end{cases}$$

- Бросок игральной кости; ξ — число очков на кубике, с.в.
- Схема Бернулли;

  $\Omega = \{\omega = (\omega_1 \ldots \omega_n), \omega_i \in \{0, 1\}\}$. $\xi(\omega) = \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i$ — число "успехов" в схеме Бернулли.