

Лекция 02 от 12.09.2016

Признаки сравнения и признаки сходимости неотрицательных рядов.

В рамках этой лекции будем рассматривать только ряды с неотрицательными членами!

Очевидно, что последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ в таких рядах возрастает. Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \in [0, +\infty]$.

Утверждение 1 (Критерий сходимости рядов с неотрицательными членами). *Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена сверху.*

Это позволяет сократить запись для таких рядов.

Обозначение 1. *Ряд сходится: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$; ряд расходится: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.*

Признак 1 (Первый признак сравнения). *Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ — два ряда с неотрицательными членами, и начиная с некоторого места имеет место неравенство $a_n \leq b_n$. Тогда:*

1. *если $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$;*
2. *если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, то $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.*

Доказательство. Достаточно доказать для случая, когда $a_n \leq b_n$ уже при $n \geq 1$.

1. Рассмотрим частичные суммы рядов: $S_n^a = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, $S_n^b = b_1 + b_2 + \dots + b_n$. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^b = C$ для некоторого C . Последовательность S_n^b очевидно неубывающая, так что $S_n^b \leq C$ для любого n . А значит, для всех n верно, что

$$0 \leq S_n^a = a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq b_1 + b_2 + \dots + b_n \leq C.$$

Это показывает, что S_n^a монотонная ограниченная последовательность, а значит она обязательно имеет предел. Так что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

2. Прямо следует из первого пункта. □

Признак 2 (Второй признак сравнения). *Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ — два ряда с неотрицательными членами и начиная с некоторого места $a_n \asymp b_n$ (то есть $\exists c, C > 0$ такие что $c < \frac{a_n}{b_n} < C$). Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство. Прямо следует из предыдущего признака, так как $cb_n \leq a_n \leq Cb_n$. □

Замечание 1. *Если $a_n \sim b_n$ при $n \rightarrow \infty$, то $a_n \asymp b_n$.*

Пример 1 (тривиальный). $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ — *расходится*.

Признак 3 (Третий признак сравнения). Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ — два ряда с неотрицательными членами и начиная с некоторого места $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Тогда:

1. если $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$;
2. если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, то $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.

Доказательство. По сути говоря, данный признак сравнивает скорости роста, а в остальном это практически то же самое, что первый признак сравнения. Что ж, сведем его к нему.

Достаточно считать, что $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ уже при $n \geq 1$. Для любого натурального k мы можем представить элементы a_k и b_k следующим образом:

$$a_k = a_1 \frac{a_2}{a_1} \frac{a_3}{a_2} \dots \frac{a_k}{a_{k-1}}$$

$$b_k = b_1 \frac{b_2}{b_1} \frac{b_3}{b_2} \dots \frac{b_k}{b_{k-1}}$$

Согласно условию, $\frac{a_i}{a_{i-1}} \leq \frac{b_i}{b_{i-1}}$ при $1 \leq i \leq k$. Таким образом, мы почти получили, что $a_k \leq b_k$, за исключением того, что мы не знаем, как соотносятся элементы a_1 и b_1 . Что ж, избавимся от них, введя новый ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b'_n = \frac{a_1}{b_1} \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Для него будет выполняться неравенство $a_k \leq b'_k$. Тем самым, мы свели задачу к первому признаку сравнения. \square

Замечание 2. Отметим, что для любого $q \in [0, 1)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ сходится. Действительно,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N q^n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{q(q^N - 1)}{q - 1} = \frac{q}{1 - q}.$$

Признак 4 (Признак д'Аламбера).

1. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — ряд с неотрицательными членами, и начиная с некоторого существует такое $q \in [0, 1)$, что $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.
2. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — ряд с неотрицательными членами, и начиная с некоторого места $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$. Тогда $a_n \not\rightarrow 0$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Доказательство.

1. Следует из третьего признака сравнения при $b_n = q^n$.
2. Очевидно из самой формулировки.

□

Однако чаще используется признак д'Аламбера в предельной форме.

Следствие 1 (Предельный признак д'Аламбера). Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. если $\alpha < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;
2. если $\alpha > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится;
3. если $\alpha = 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ может как сходиться, так и расходиться.

Доказательство.

1. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$ и $\alpha < 1$, то $\exists N \in \mathbb{N}$ такой, что при любом $n > N$ $\alpha - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \alpha + \varepsilon$, причём $\alpha + \varepsilon < 1$. А значит, ряд сходится по признаку д'Аламбера.
2. Аналогично.
3. Например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ — расходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ — сходится.

□

Заметим, что признак д'Аламбера довольно грубый, то есть существует некоторая «мертвая зона» рядов, про сходимость которых он ничего не может сказать (например, про ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$).

Следствие 2. Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами верно, что $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, то ряд сходится, а если $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, то расходится.

Признак 5 (Радикальный признак Коши). Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами.

1. Пусть начиная с некоторого места существует такое $q \in [0, 1)$, что $\sqrt[n]{a_n} \leq q$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.
2. Пусть существует бесконечное множество индексов n , для которых верно, что $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$. Тогда $a_n \not\rightarrow 0$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Доказательство.

1. Следует из первого признака сравнения при $b_n = q^n$.
2. Очевидно по определению расходимости ряда.

□

Аналогично признаку д'Аламбера, можно сформулировать данный признак в предельной форме.

Следствие 3 (Радикальный признак Коши в предельной форме). Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = A$, где $A \in [0, \infty]$. Тогда:

1. если $A < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;
2. если $A > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Или, более общо:

1. если $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;
2. если $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, то $a_n \not\rightarrow 0$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Заметим, что так как тут используется только верхний предел, этот признак несколько удобней, чем предельный признак д'Аламбера.

Пример 2. Рассмотрим следующий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n+(-1)^n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \dots$$

Как можно заметить, у соседних элементов ряда наблюдается то рост в 2 раза, то убывание в 8 раз, и предельный признак д'Аламбера ничего не может сказать про сходимость. Однако воспользуемся радикальным признаком Коши:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^{-n+(-1)^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-1+(\frac{-1}{n})^n} = \frac{1}{2}.$$

Как мы видим, ряд сходится.

Упражнение 1. Есть ли обратный пример, когда радикальный признак Коши не помогает, в отличие от признака д'Аламбера?

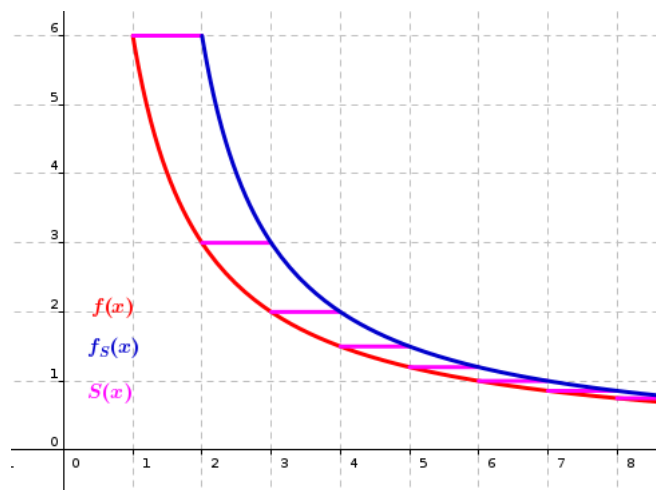
Для разных рядов может быть удобнее использовать разные признаки сходимости. Например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n!$ однозначно лучше исследовать с помощью признака д'Аламбера.

Но у нас все еще есть «мертвая зона» из тех рядов, про сходимость которых данные признаки ничего не могут сказать. И с этим хочется что-то сделать!

Признак 6 (Интегральный признак Коши–Маклорена). Пусть $f(x) \geq 0$ — невозрастающая на $[1, \infty]$ функция. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ и $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно. Причем в случае сходимости

$$\int_{N+1}^{\infty} f(x)dx \leq r_N = f(N+1) + f(N+2) + \dots \leq \int_N^{\infty} f(x)dx.$$

Доказательство. Для удобства введем две вспомогательные функции: $f_S(x) = f(x-1)$ и $S(x) = f(\lfloor x \rfloor)$.



Тогда мы получаем, что $f(1) + f(2) + \dots + f(N) = \int_1^N S(x)dx$. Значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл $\int_1^{\infty} S(x)dx$. В свою очередь, несложно заметить, что сходимость этого интеграла влечет за собой сходимость интеграла $\int_1^{\infty} f(x)dx$, так как при наших ограничениях $S(x) \geq f(x)$.

Отсюда же следует оценка для остатка. Действительно:

$$\begin{aligned} r_N &= \int_{N+1}^{\infty} S(x)dx \leq \int_{N+1}^{\infty} f_S(x)dx = \int_{N+1}^{\infty} f(x-1)dx = \int_N^{\infty} f(x)dx, \\ r_N &= \int_{N+1}^{\infty} S(x)dx \geq \int_{N+1}^{\infty} f(x)dx. \end{aligned}$$

□

Пример 3. Допустим, мы хотим узнать сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$. Но поскольку ряд бесконечен, мы хотим обойтись первыми 100 членами, а чтобы оценить погрешность, посчитаем соответствующий интеграл.

$$\int_n^{\infty} \frac{1}{x^3} = -\frac{1}{2x^2} \Big|_n^{\infty} = \frac{1}{2n^2}$$

Итого,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^3} + \theta, \quad \text{где } \theta \in \left[\frac{1}{2 \cdot 101^2}, \frac{1}{2 \cdot 100^2} \right].$$

Подобным способом можно оценить асимптотику частичных сумм сходящегося ряда, например:

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{n}} \sim 2\sqrt{n}$$

Выводится это аналогично, просто теперь мы функциями $f(x)$, $f_S(x)$ и $S(x)$ оцениваем не остаток, а частичную сумму.