Лекция 02 от 12.09.2016
Признаки сравнения и признаки сходимости знакопостоянных рядов рядов.

В рамках этой лекции будем рассматривать только ряды с неотрицательными членами!

Очевидно, что последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ в таких рядах возрастает. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n \in [0, +\infty]$.

Утверждение 1 (Критерий сходимости рядов с неотрицательными членами)**.** *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена сверху.*

Это позволяет сократить запись для таких рядов.

Обозначение 1. *Ряд сходится:* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$*; ряд расходится:* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$*.*

Признак 1 (Первый признак сравнения)**.** *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *— два ряда с неотрицательными членами, и начиная с некоторого места имеет место неравенство* $a_n \leqslant b_n$*. Тогда:*

1. *если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$*, то* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$*;*
2. *если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$*, то* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$*.*

Доказательство. Достаточно доказать для случая, когда $a_n \leqslant b_n$ уже при $n \geqslant 1$.

1. Рассмотрим частичные суммы рядов: $S_n^a = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $S_n^b = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^b = C$ для некоторого C. Последовательность S_n^b очевидно неубывающая, так что $S_n^b \leqslant C$ для любого n. А значит, для всех n верно, что
$$0 \leqslant S_n^a = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leqslant b_1 + b_2 + \ldots + b_n \leqslant C.$$
Это показывает, что S_n^a монотонная ограниченная последовательность, а значит она обязательно имеет предел. Так что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.
2. Прямо следует из первого пункта.

$\square$

Признак 2 (Второй признак сравнения)**.** *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *— два ряда с неотрицательными членами и начиная с некоторого места* $a_n \asymp b_n$ *(то есть* $\exists c, C > 0$ *такие что* $c < \frac{a_n}{b_n} < C$*). Тогда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство. Прямо следует из предыдущего признака, так как $cb_n \leqslant a_n \leqslant Cb_n$. $\square$

Замечание 1. *Если* $a_n \sim b_n$ *при* $n \to \infty$*, то* $a_n \asymp b_n$*.*

Пример 1 (тривиальный). $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ — *расходится.*

Признак 3 (Третий признак сравнения). *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *— два ряда с неотрицательными членами и начиная с некоторого места* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$ *Тогда:*

1. *если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$*, то* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$*;*
2. *если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$*, то* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$*.*

Доказательство. По сути говоря, данный признак сравнивает скорости роста, а в остальном это практически то же самое, что первый признак сравнения. Что ж, сведем его к нему.

Достаточно считать, что $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$ уже при $n \geqslant 1$. Для любого натурального k мы можем представить элементы a_k и b_k следующим образом:

$$a_k = a_1 \frac{a_2}{a_1} \frac{a_3}{a_2} \dots \frac{a_k}{a_{k-1}}$$
$$b_k = b_1 \frac{b_2}{b_1} \frac{b_3}{b_2} \dots \frac{b_k}{b_{k-1}}$$

Согласно условию, $\frac{a_i}{a_{i-1}} \leqslant \frac{b_i}{b_{i-1}}$ при $1 \leqslant i \leqslant k$. Таким образом, мы почти получили, что $a_k \leqslant b_k$, за исключением того, что мы не знаем, как соотносятся элементы a_1 и b_1. Что ж, избавимся от них, введя новый ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b'_n = \frac{a_1}{b_1} \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Для него будет выполняться неравенство $a_k \leqslant b'_k$. Тем самым, мы свели задачу к первому признаку сравнения. □

Замечание 2. *Отметим, что для любого* $q \in [0,1)$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ *сходится. Действительно,*

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} q^n = \lim_{N\to\infty} \frac{q(q^N - 1)}{q-1} = \frac{q}{1-q}.$$

Признак 4 (Признак д'Аламбера).

1. *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *— ряд с неотрицательными членами, и начиная с некоторого существует такое* $q \in [0,1)$*, что* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q$*. Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится.*
2. *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *— ряд с неотрицательными членами, и начиная с некоторого места* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$*. Тогда* $a_n \nrightarrow 0$ *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

Доказательство.

1. Следует из третьего признака сравнения при $b_n = q^n$.
2. Очевидно из самой формулировки.

$\square$

Однако чаще используется признак д'Аламбера в предельной форме.

Следствие 1 (Предельный признак д'Аламбера)**.** *Пусть для ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *с неотрицательными членами существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$*. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *если* $\alpha < 1$*, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится;*
2. *если* $\alpha > 1$*, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится;*
3. *если* $\alpha = 1$*, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *может как сходиться, так и расходиться.*

Доказательство.

1. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$ и $\alpha < 1$, то $\exists N \in \mathbb{N}$ такой, что при любом $n > N$ $\alpha - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \alpha + \varepsilon$, причём $\alpha + \varepsilon < 1$. А значит, ряд сходится по признаку д'Аламбера.
2. Аналогично.
3. Например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$ — расходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ — сходится.

$\square$

Заметим, что признак д'Аламбера довольно грубый, то есть существует некоторая «мертвая зона» рядов, про сходимость которых он ничего не может сказать (например, про ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$).

Следствие 2. *Если для ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *с неотрицательными членами верно, что* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$*, то ряд сходится, а если* $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$*, то расходится.*

Признак 5 (Радикальный признак Коши)**.** *Рассмотрим ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *с неотрицательными членами.*

1. *Пусть начиная с некоторого места существует такое* $q \in [0, 1)$*, что* $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q$*. Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится.*
2. *Пусть существует бесконечное множество индексов* n*, для которых верно, что* $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$*. Тогда* $a_n \nrightarrow 0$ *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

Доказательство.

1. Следует из первого признака сравнения при $b_n = q^n$.
2. Очевидно по определению расходимости ряда.

$\square$

Аналогично признаку д'Аламбера, можно сформулировать данный признак в предельной форме.

Следствие 3 (Радикальный признак Коши в предельной форме)**.** *Пусть для ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *с неотрицательными членами существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = A$*, где* $A \in [0, \infty]$*. Тогда:*

1. *если* $A < 1$*, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится;*
2. *если* $A > 1$*, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

Или, более общо:

1. *если* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} < 1$*, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится;*
2. *если* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} > 1$*, то* $a_n \nrightarrow 0$ *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

Заметим, что так как тут используется только верхний предел, этот признак несколько удобней, чем предельный признак д'Аламбера.

Пример 2. *Рассмотрим следующий ряд:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n+(-1)^n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \dots$$

Как можно заметить, у соседних элементов ряда наблюдается то рост в 2 раза, то убывание в 8 раз, и предельный признак д'Аламбера ничего не может сказать про сходимость. Однако воспользуемся радикальным признаком Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{-n+(-1)^n}} = \lim_{n\to\infty} 2^{-1+\left(\frac{-1}{n}\right)^n} = \frac{1}{2}.$$

Как мы видим, ряд сходится.

Упражнение 1. *Есть ли обратный пример, когда радикальный признак Коши не помогает, в отличие от признака д'Аламбера?*

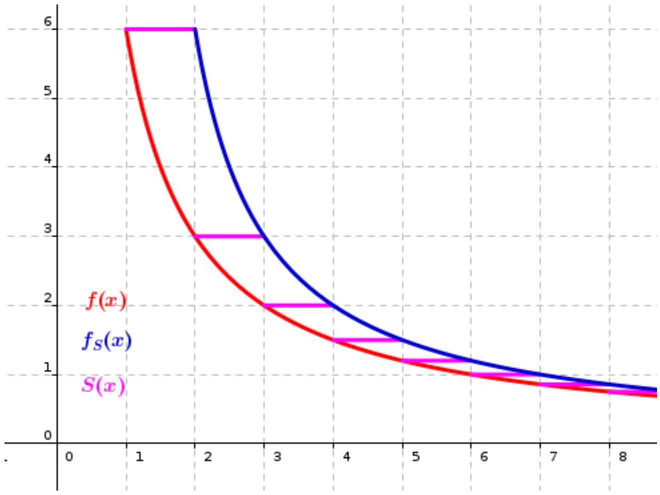
Для разных рядов может быть удобней использовать разные признаки сходимости. Например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!$ однозначно лучше исследовать с помощью признака д'Аламбера.

Но у нас все еще есть «мертвая зона» из тех рядов, про сходимость которых данные признаки ничего не могут сказать. И с этим хочется что-то сделать!

Признак 6 (Интегральный признак Коши–Маклорена)**.** *Пусть* $f(x) \geqslant 0$ *— невозрастающая на* $[1, \infty]$ *функция. Тогда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ *и* $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx$ *сходятся или расходятся одновременно. Причем в случае сходимости*

$$\int\limits_{N+1}^{\infty} f(x)dx \leqslant r_N = f(N+1) + f(N+2) + \ldots \leqslant \int\limits_{N}^{\infty} f(x)dx.$$

Доказательство. Для удобства введем две вспомогательные функции: $f_S(x) = f(x-1)$ и $S(x) = f(\lfloor x \rfloor)$.



Тогда мы получаем, что $f(1)+f(2)+\ldots+f(N)=\int\limits_1^N S(x)dx$. Значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл $\int\limits_1^{\infty} S(x)dx$. В свою очередь, несложно заметить, что сходимость этого интеграла влечет за собой сходимость интеграла $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$, так как при наших ограничениях $S(x) \geqslant f(x)$.

Отсюда же следует оценка для остатка. Действительно:

$$r_N = \int\limits_{N+1}^{\infty} S(x)dx \leqslant \int_{N+1}^{\infty} f_S(x)dx = \int\limits_{N+1}^{\infty} f(x-1)dx = \int\limits_{N}^{\infty} f(x)dx,$$

$$r_N = \int\limits_{N+1}^{\infty} S(x)dx \geqslant \int\limits_{N+1}^{\infty} f(x)dx.$$

□

Пример 3. *Допустим, мы хотим узнать сумму ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$. *Но поскольку ряд бесконечен, мы хотим обойтись первыми 100 членами, а чтобы оценить погрешность, посчитаем соответствующий интеграл.*

$$\int\limits_{n}^{\infty} \frac{1}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}\Big|_n^{\infty} = \frac{1}{2n^2}$$

Итого,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^3} + \theta, \quad \textit{где } \theta \in \left[\frac{1}{2\cdot 101^2}, \frac{1}{2\cdot 100^2}\right].$$

Подобным способом можно оценить асимптотику частичных сумм сходящегося ряда, например:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} \sim 2\sqrt{n}$$

Выводится это аналогично, просто теперь мы функциями $f(x)$, $f_S(x)$ и $S(x)$ оцениваем не остаток, а частичную сумму.