

Vattenledningssystem

Inledning

I många tekniska sammanhang kommer du att stöta på ett linjärt ekvationssystem som behöver lösas. Systemen har ofta flera tusentals variabler (obekanta) och måste då lösas numeriskt med hjälp av en dator. I denna laboration ska du arbeta med modellering av linjära ekvationssystem och använda LU -faktoringen för att lösa systemen.

Målsättningen med laborationen är att du ska få förståelse för Gausselimination och LU -faktorisering samt att du ska träna upp dina färdigheter i att skapa effektiva MATLAB-program som löser ett givet problem.

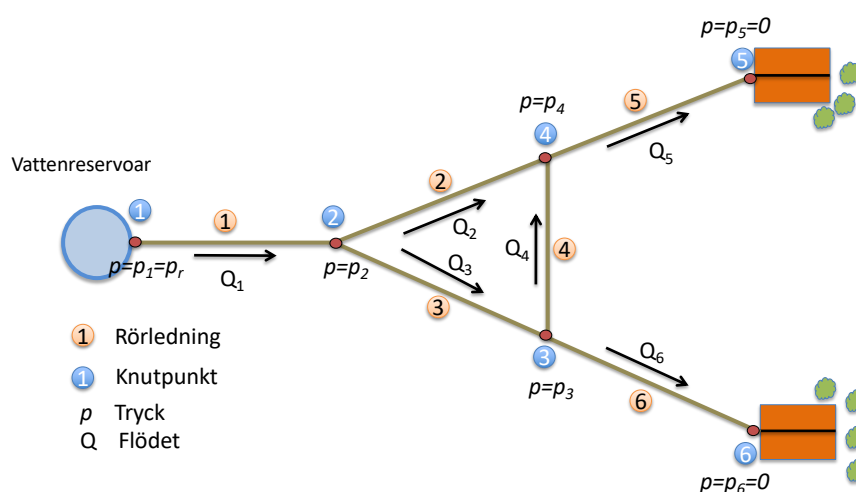
Innan du börjar med laborationen behöver du ha kunskap om

- Hur man jobbar med $PA = LU$ -faktorisering. Läs i Sauer sektion 2.4.

1 Vattenledningssystem

Del A baseras på en uppgift i A. Quarteroni & F. Saleri's bok Scientific Computing with Matlab, Springer 2003.

Ett nytt bostadsområde ska byggas på en plats där det idag endast finns ett fåtal bostäder. Inför utbyggnaden måste det lokala vattenledningsnätet expanderas. Ditt uppdrag är att skapa ett användarvänligt MATLAB-program som kan användas som hjälpmedel vid dimensioneringen av det nya vattenledningsnätet. I specifikationen från uppdragsgivaren står det även att programmet måste vara dokumenterat effektivt.



Figur 1: Schematisk skiss av vattenledningsnätet före den planerade utbyggnaden.

Del A

Idag finns det 2 bostäder anslutna till ett vattenledningsnätet, se Figur 1. Nätet är kopplat till en vattenreservoar som bland annat förser husen med vatten. Knutpunkterna (noder) i nätet är numrerade 1, 2, 3, 4, 5, 6. Till nod 1 är en vattenreservoar ansluten och till nod 5 och 6 är avtappningskranar till två bostäder anslutna. Tryckvärdena i de olika noderna betecknas med p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 och p_6 . Vattenflödet i rörledningarna 1-6 betecknas med Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 och Q_6 .

Ditt första uppdrag är att beräkna trycket i de tre inre knutpunkterna (2, 3 och 4) och se till att vattenreservoaren är dimensionerad så att trycket i dessa noder är tillräckligt högt.

Matematisk modell

Trycket i knutpunkten anges som skillnaden mellan vattentrycket och det omgivande atmosfäriska trycket. I beräkningarna används en skala där det atmosfäriska trycket satts till noll. För beräkning av trycket används följande två samband

- (1) Summan av flödena, Q , in till en knutpunkt är lika med summan av flödena ut från samma knutpunkt. Se Figur 1.
- (2) För rörledning nummer i kan vattenflödet, Q_i (i m^3/s) uttryckas som

$$Q_i = kL(p_{in} - p_{ut})$$

där $1/k$ är det hydrauliska motståndet i den aktuella rörledningen och mäts i bars/m^2 , L är det aktuella rörets längd i m , p_{in} är trycket i bar vid inloppet till röret och p_{ut} är trycket vid utloppet från samma rörledning. Nedan hittar du en tabell över längden på rören samt värden på k .

Rör nr	L [m]	k [$m^2/\text{bar s}$]	Rör nr	L [m]	k [$m^2/\text{bar s}$]
1	400	0.005	4	500	0.004
2	600	0.003	5	700	0.001
3	600	0.003	6	700	0.001

Trycket i reservoaren betecknas med p_R dvs $p_1 = p_R$ och trycket vid husen är ungefär 0 bar.

Lös uppgifterna F1, F2 och F3 under *SF1694 - Lab 1 Förberedande uppgifter* i MATLAB GRADER innan du börjar med uppgifterna nedan.

UPPGIFT 1

- a) Använd sambanden i den matematiska modellen (1) och (2) samt värdena i tabellen för att ställa upp det linjära ekvationssystem som måste lösas för att bestämma trycket p_2, p_3 och p_4 i de tre inre noderna.

Som ett exempel ställer vi upp sambandet för nod 2:

1. Summan av flödena in till nod 2 är lika med summan av flödena ut från samma nod, $Q_1 = Q_2 + Q_3 \Rightarrow Q_1 - Q_2 - Q_3 = 0$.

2. Samband mellan flödena och trycken i noderna ges av (2). Här får vi

$$Q_1 = k_1 L_1 (p_{in} - p_{ut}) = k_1 L_1 (p_R - p_2)$$

$$Q_2 = k_2 L_2 (p_{in} - p_{ut}) = k_2 L_2 (p_2 - p_4)$$

$$Q_3 = k_3 L_3 (p_{in} - p_{ut}) = k_3 L_3 (p_2 - p_3)$$

Om vi sätter in uttrycken för Q_1, Q_2 och Q_3 i ekvationen för flödessambandet för nod 2 får vi den första ekvationen i systemet:

$$(-k_1 L_1 - k_2 L_2 - k_3 L_3) p_2 + k_3 L_3 p_3 + k_2 L_2 p_4 = -k_1 L_1 p_R$$

Gör på samma sätt för de resterande noderna.

- b) Skriv ett MATLAB-program **Vattenledning.m** som löser det linjära ekvationssystemet för p_2, p_3 och p_4 . Sätt reservoartrycket till 10 bar. Programmet ska skriva ut värdena på trycket i **alla noder** (1-6) på skärmen samt rita upp en graf över trycket som funktion av de olika noderna (se exempelvis plotkommandot **stem**). Utskriften och grafen skall vara sådana att din uppdragsgivare förstår den utan att du behöver ge någon kompletterande muntlig information.
- c) Man vill nu kontrollera att medeltrycket i noderna 2,3 och 4 är tillräckligt högt. Utöka programmet så att det även beräknar och skriver ut medeltrycket på skärmen.
- d) Man vill inte att medeltrycket ska understiga 15 bar. Utöka programmet så att användaren kan mata in ett värde på reservoartrycket från kommandofönstret och undersök (genom att köra programmet flera gånger) ungefär hur stort reservoartrycket måste vara för att medeltrycket ska ligga kring (men inte understiga) 15 bar.

Del B

När den planerade utbyggnaden av bostadsområdet genomförs kommer antalet bostäder att öka med flera tusen och motsvarande utbyggnad av vattenledningsnätet behövs. Bland annat ska det byggas ytterligare sju vattenreservoarer och uppdraget består i att dimensionera dessa för att trygga vattenförsörjningen. Inför dimensioneringen av vattenreservoarerna kommer din uppdragsgivare att vilja experimentera med olika värden på trycket i de åtta reservoarerna. Precis som tidigare vill man att medeltrycket för hela systemet ska ligga kring (men inte understiga) 15 bar och att det ska vara någorlunda jämt fördelat över noderna.

I det här fallet handlar det om ca 6400 knutpunkter och det går inte att lägga in ett sådant system för hand i MATLAB så till din hjälp kommer du att få en fil som innehåller koefficientmatrisen, A , för det linjära ekvationssystem som ska lösas. Strukturen på det linjära systemet är densamma som för det mindre systemet som du tog fram i förra uppgiften. Högerledet får du skapa själv. Det ska innehålla nollor för alla ekvationer i systemet förutom för ekvationerna som innehåller reservoarernas noder där ett värde ska sättas i högerledet (jämför högerledet i uppgift 1). Reservoarernas noder är i detta fall noderna 1-8 och värdena som ska sättas i högerledet är $-kLp_R^{(i)}$ där $k = 0.01$ och $L = 200$ för alla rör anslutna till reservoarerna. Värdena på trycken i de åtta reservoarerna $p_R^{(i)}, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ kommer att variera och ska kunna anges av användaren av programmet, se nedan.

Filen som innehåller koefficientmatrisen heter **noder6400.mat** och finns att ladda ner i Canvas.

- e) Nu ska du utöka ditt MATLAB-program så att det kan läsa in filen med koefficientmatrisen och givet värden på trycken i de åtta reservoarerna skapa ett högerled och lösa systemet. Du läser in filen med kommandot `load noder6400`.

Din arbetsgivare har lämnat följande specifikation för programmet.

- Användaren av programmet ska kunna mata in namnet på den fil som innehåller det aktuella vattenledningsnätets koefficientmatris.
- Användaren av programmet ska kunna mata in olika värden på trycken i de åtta vattenreservoarerna.
- Efter varje beräkning ska programmet presentera max- och mintryck samt medeltrycket på skärmen för alla 6400 knutpunkter.
- Efter varje beräkning ska användaren kunna välja om hon vill att programmet ska presentera resultatet grafiskt eller inte. Dessutom ska hon kunna välja om det ska rita upp en graf över trycket som funktion av noderna, en 3D plot som visar trycket i hela nätet eller om programmet ska rita upp båda figurerna. Se tips nedan för 3D-plotten.
- Användaren ska kunna välja att göra upprepade beräkningar där nya värden på trycken i vattenreservoarerna matas in för varje beräkning. Efter varje beräkning ska resultaten presenteras på nytt. Beräkningarna ska upprepas och resultaten ska visas tills dess att användaren väljer att inte mata in nya värden på reservoartrycken. Tänk på att man inte vill läsa in filen `noder6400.mat` på nytt för varje beräkning. Matrisen A är densamma oavsett värden på reservoartrycken.

Din uppdragsgivare vill ha ett väldokumenterat program som så effektivt som möjligt löser ovanstående problem så använd LU-faktorisering och se till att faktoriseringen görs på rätt ställe i programmet.

TIPS: För att plotta trycket som en funktion av knutpunkternas position kan du använda dig av plot-kommandot `surf`. Förutom koefficientmatrisen så innehåller .MAT-filen två matriser X och Y med x - och y -koordinater för knutpunkterna som kan användas som input till `surf`. Du behöver forma om Lösningsvektorn med trycket till en matris med samma storlek som X och Y så att den kan användas som input till `surf` tillsammans med X och Y . Detta kan åstadkommas med hjälp av kommandot `reshape`.

Skicka in programmet `Vattenledning.m`. Datafilen `noder6400.mat` behöver du inte skicka in.