U2 a)

Härled de ordinära differentialekvationer som Ûk(t) uppfyller f ̈or k = −N/2, . . . , N/2 − 1 och t ≥ 0

Om vi antar att u_N(x,t) uppfyller värmeledningsekvationen kommer PDE:n ha formen:

$$\frac{d}{dt}uN(x,t) = \alpha * \frac{d^2}{dx^2}uN(x,t) + gN(x,t)$$

Där α är värmeledningskoefficienten.

Av $uN(x,t) := \sum_{k=-N/2}^{\frac{N}{2}-1} \hat{U}k(t)\, e^{2\pi ikx}$

Och $gN(x,t) \coloneqq \sum_{k=-N/2}^{\frac{N}{2}-1} \hat{\ } gk(t)\, e^{2\pi ikx}$

kan ekvationen skrivas om som

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=-N/2}^{\frac{N}{2}-1} \hat{U}k(t)\, e^{2\pi ikx} = \alpha \frac{d^2}{dx^2}\sum_{k=-N/2}^{\frac{N}{2}-1} \hat{U}k(t)\, e^{2\pi ikx} + \sum_{k=-N/2}^{\frac{N}{2}-1} \hat{\ } gk(t)\, e^{2\pi ikx}$$

$$=> \sum_{k=-N/2}^{\frac{N}{2}-1} \hat{U}'k(t)\, e^{2\pi ikx} = \alpha \sum_{k=-N/2}^{\frac{N}{2}-1} \hat{U}k(t)(2\pi ki)^2\, e^{2\pi ikx} + \sum_{k=-N/2}^{\frac{N}{2}-1} \hat{\ } gk(t)\, e^{2\pi ikx}$$

Förkorta serien och e-termen:

$$=> \hat{U}'k(t) = -\alpha(2\pi k)^2\hat{U}k(t) + \hat{\ } gk(t) \quad (*)$$

Där $(*)$ är den ODE som $\hat{U}_k$(t) uppfyller för varje k.

b) om g=0 i (4) förenklas (*) till

$$\hat{U}'k(t) = -\alpha(2\pi k)^2\hat{U}k(t)$$

Som kan skrivas om till en linjär, homogen ODE av ordning 1 som

$$\hat{U}'k(t) + \alpha(2\pi k)^2\hat{U}k(t) = 0$$

Som kan lösas med karakteristiska ekvationen från envariabelanalys som

$$\hat{U}\mathrm{k(t)} = \mathrm{C}e^{\alpha(2\pi k)^2}$$

Där C är en godtycklig konstant.

c) $ut = uxx$ $(\mathrm{D} = 1,\ \mathrm{g(x,t)}\ =\ 0)$

BV: $u(x,0) = \sin(2\pi x) \quad x \in [0,1]$

RV: $u(0,t) = u(1,t) \quad t \geq 0$

1. Ansätt produktlösning u(x,t) = X(x)*T(t)

$$\mathrm{XT'} \ = \ \mathrm{X''T}$$

$$\frac{XT'}{XT} = \frac{X''T}{XT}$$

$$\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = \gamma$$

Där γ är en godtycklig konstant.

Två ODE ska lösas:

$$X'' = \gamma X \quad (1)$$

$$T' = \gamma T \quad (2)$$

Som har allmänna lösningar

$$X(x) = C1e^{\sqrt{\gamma}x} + C2e^{-\sqrt{\gamma}x}$$

$$T(t) = De^{\gamma t}$$

Vilket ger:

$$u(x,t) = De^{\gamma t}(C1e^{\sqrt{\gamma}x} + C2e^{-\sqrt{\gamma}x})$$

2. Anpassa lösningen efter BV och RV:

BV: $u(x,0) = D\left(C1e^{\sqrt{\gamma}x} + C2e^{-\sqrt{\gamma}x}\right) = \sin(2\pi x)$

Skriv om HL med Eulers formel:

$$u(x,0) = D\left(C1e^{\sqrt{\gamma}x} + C2e^{-\sqrt{\gamma}x}\right) = \frac{e^{i2\pi x} - e^{-i2\pi x}}{2i}$$

Som för likhet kräver D = 1, $C_1 = \frac{1}{2i}$, $C_2 = -\frac{1}{2i}$ och $\gamma = -4\pi^2$

Vilket ger

$$\mathrm{u(x,t)} = e^{4\pi^2 t}\frac{e^{i2\pi x} - e^{-i2\pi x}}{2i}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{u(x,t)} = e^{4\pi^2 t}\sin(2\pi x)$$

Kontrollera att randvärdet uppfylls:

$$u(0,t) = e^{4\pi^2 t}\sin(2\pi * 0) = 0$$

$$u(1,t) = e^{4\pi^2 t}\sin(2\pi) = 0$$

Stämmer!

Svar: Den exakta lösningen för D=1, g = 0 är

$$\mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{t}) = e^{4\pi^2 t}\sin(2\pi x)$$