ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ПРАКТИКУМ
8 семестр

2016 г.

Численное моделирование нестационарного течения газа с использованием неявных разностных схем

Попов А.В.

Содержание

1 Введение

Практикум предназначен для знакомства студентов со следующими вопросами.

I) Сложные прикладные задачи, описываемые системами нелинейных уравнений в частных производных. Задачи практикума - это поиск нестационарных решений движения газа, являющихся решениями нелинейной системы Навье-Стокса. Студенты знакомятся с постановками различных начально-краевых задач и тем, что сделано на сегодняшний день с точки зрения их теоретического обоснования: теоремы существования, единственности и устойчивости их решений.

II) Алгоритмы численного решения нелинейных задач математической физики. В задачах практикума используются только неявные разностные схемы. Это сделано с целью познакомить студентов с алгоритмами, имеющими минимальные условия устойчивости, и показать на примере этих задач использование современных итерационных алгоритмов решения СЛАУ и методов расщепления.

III) Принципы организации программ, реализующих эти алгоритмы. В процессе выполнения практикума каждый студент на примере конкретной задачи пишет и отлаживает свою программу. Эти задачи обладают своими особенностями, поэтому для успешного выполнения заданий от студентов требуется изучение описаний алгоритмов и примеров программ, которые включены в описание практикума. По желанию студента он может либо изменить уже имеющуюся программу под свою задачу (что требует от него понимания ее содержания), либо написать свою реализацию алгоритма.

IY) Использование в своих проектах пакетов программ, хранящихся в открытом доступе в интернете, для решения вспомогательных задач. Одним из таких пакетов служит LASPARK (Package for Linear Algebra with Sparse Matrices). Он в частности предназначен для решения СЛАУ с сильно разреженными матрицами.

Y) Использование графических пакетов. Для визуальной интерпретации своих численных результатов студентам предлагается использовать доступные им графические программы. В качестве графического пакета, лежащего в открытом доступе в интернете, рекомендован GNUPLOT [7]. В ходе выполнения заданий требуется освоить изображение линий тока газовых течений и различных поверхностей.

Система, описывающая нестацинарное течение газа, относится к задачам, нахождение решений которой требуется во многих прикладных задачах. Поскольку методов поиска точных решений этих задач на сегодняшний день не существует, то для их решения применяют численные методы. Разностные методы являются одним из широко развитых и до сих пор активно совершенствуемых способов получения приближенных решений. На сегодняшний день общепризнанными являются явные методы решения задач газовой динамики. Однако, особенно в случае вязкого газа, соображения устойчивости разностных схем приводят к необходимости разработки и внедрения неявных разностных методов. Поэтому знание и умение применять подобные алгоритмы часто требуется при решении сложных газодинамических задач.

Неявные схемы приводят к решению систем алгебраических уравнений (САУ) для нахождения решения на $(n+1)$-ом временном слое. Решение таких САУ как правило является достаточно сложной задачей, т.к. их размерность в задачах интересных с практической точки зрения бывает очень большой. Необходимость решать подобные задачи привела к разработке большого числа алгоритмов, получивших название методов расщепления, которые приводят к САУ, которые распадаются на подсистемы меньшей размерности или реализация которых сводится к последовательному решению более простых с точки зрения алгоримов поиска решения САУ. Однако все эти методы обладают более обременительными условиями устойчивости и слабее аппроксимируют дифференциальные задачи, чем методы, в которых все переменные взяты одновременно с верхнего слоя. Такие методы приводят к нелинейным САУ, которые требуется решать итерационными методами. Это очень сложная с точки зрения реализации и обоснования задача. Промежуточным шагом может служить использование методов, в которых все производные (или почти все) по пространственным переменным берутся с верхнего временного слоя, а коэффициенты при них используют значения разностного решения с предыдущих временных слоев. Такие алгоритмы приводят к решению систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), решение которых может быть найдено при помощи итерационных алгоритмов, основанных на идее сопряженных градиентов.

Разностные схемы, предложенные для реализации в практикуме, именно такие. Одни схемы используют различные идеи метода расщепления и их решения находятся путем решения СЛАУ с трехдиагональными матрицами методом прогонки. Другие схемы приводят к СЛАУ, матрицы которых сильно разрежены, но не являются трехдиагональными даже в одномерном случае. Более того, вследствие аппроксимации конвективной части дифференциального оператора на верхнем временном слое такие матрицы не являются знакоопределенными. Для решения линейных алгебраических систем такого вида используется метод би-сопряженных градиентов.

Этот метод и его модификации реализован в ряде пакетов стандартных программ. Например, пакет Lashpack находящийся в открытом доступе. Ряд заданий практикума использует этот пакет. Тем самым достигается еще одна цель: научить студентов использовать в своих проектах программные коды, написанные другими авторами. Однако гораздо эффективнее оказываются те программы, которые написаны с учетом вида матриц СЛАУ, которые получаются при реализации конкретного метода. Поэтому в ряде заданий ставится задача написать свою подпрограмму, реализующую одну из модификаций метода би-сопряженных градиентов с предобуславливателем.

2 Начально-краевая задача

Изучение свойств численного алгоритма и создание его программной реализации начинается с наиболее простых задач с постепенным их усложнением. Поэтому сначала приведем систему уравнений, описывающую нестационарное одномерное движение вязкого баротропного газа

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0, \\ &\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho f, \\ &p = p(\rho). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Выше через μ обозначен коэффициент вязкости газа, который будем считать известной неотрицательной константой.

Неизвестные функции: плотность ρ и скорость u являются функциями переменных Эйлера

$$(t, x) \in Q = [0, T] \times [0, X].$$

В уравнения входят еще две известные функции: давление газа p, зависящее от плотности, и вектор внешних сил f, являющийся функцией переменных Эйлера.

Часто систему (2.1) записывают в дивергентном виде

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0, \\ &\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho f, \\ &p = p(\rho). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Эта система в случае гладких функций ρ и u эквивалентна системе (2.1). Для расчета разрывных решений лучше работают алгоритмы, которые аппроксимируют систему, записанную в дивергентном виде.

В начальный момент времени задаются функции, значениями которых являются плотность и скорость газа в точках отрезка $[0,\ X]$:

$$(\rho, u)|_{t=0} = (\rho_0, u_0),\ x \in [0, X]. \tag{2.3}$$

Простейшими граничными условиями являются условия непротекания

$$u(t, 0) = u(t, X) = 0,\ t \in [0, T]. \tag{2.4}$$

В этом случае граничные условия на плотность газа не ставятся.

Дифференциальные уравнения системы (2.2) являются следствиями интегральных законов сохранения массы и импульса в случае достаточной гладкости функций плотности и скорости газа. Важными требованиями к вычислительным алгоритмам являются выполнение аналогов этих законов для сеточных функций. Численные методы, для которых выполняются один или несколько законов сохранения (но не все), называют консервативными. Если выполняются все законы сохранения, то метод называют полностью консервативным.

Еще одним важным свойством является выполнение условия неотрицательности функции плотности. В практикуме используются только схемы, где это условие выполняется автоматически. Для этого использовано два альтернативных подхода. Первый – это замена поиска функции ρ на функцию $g = ln(\rho)$. Во втором применяется специальная аппроксимация уравнения неразрывности, предложенная А.Г.Соколовым.

Система уравнений, описывающая нестационарное движение баротропного газа в области Ω размерности два или три, выглядит следующим образом

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \\
&\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla)\mathbf{u} \right] + \nabla p = L\mathbf{u} + \rho \mathbf{f}, \\
&p = p(\rho),
\end{aligned} \tag{2.5}$$

где L есть линейный симметричный положительно определенный оператор. В задачах практикума в качестве L берется

$$L\mathbf{u} \equiv \operatorname{div}(\mu \nabla \mathbf{u}) + \frac{1}{3}\nabla(\mu \operatorname{div}\mathbf{u}).$$

Как и в одномерном случае выше через μ обозначен коэффициент вязкости газа, который будем считать известной неотрицательной константой. Уравнение состояния газа $p = p(\rho)$ и вектор внешних сил $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ являются заданными. В задачах практикума зависимость давления от плотности принимается либо $p = C_\rho \rho$ (C_ρ – положительная константа из диапазона от 1 до 100), либо $p = \rho^\gamma$ (константа γ обычно считается равной 1.4).

Дивергентный вид записи системы (2.5) выглядит следующим образом

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \\
&\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = L\mathbf{u} + \rho \mathbf{f},
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Здесь $(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u})$ – тензор второго ранга, полученный в результате прямого произведения векторов $\rho \mathbf{u}$ и $\mathbf{u}$. При вычислении дивергенции от тензора второго ранга свертка осуществляется по его первому индексу.

Поскольку в настоящий момент задания практикума ставятся для двумерных про пространству задач, приведем развернутую запись уравнений системы (2.6) в этом случае

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho u_2}{\partial x_2} = 0, \\
&\frac{\partial \rho u_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_1^2}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho u_2 u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial p}{\partial x_1} = \mu \left(\frac{4}{3}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{1}{3}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \rho f_1 \rho, \\
&\frac{\partial \rho u_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_1 u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho u_2^2}{\partial x_2} + \frac{\partial p}{\partial x_2} = \mu \left(\frac{1}{3}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{4}{3}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2} \right) + \rho f_2 \rho,
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Неизвестные функции: плотность ρ и вектор скорости $\mathbf{u}$ являются функциями переменных Эйлера

$$(t, \mathbf{x}) \in Q = [0, T] \times \Omega.$$

В начальный момент времени задаются функции, значения которых определяют плотность и скорость газа в каждой точке области Ω:

$$(\rho, \mathbf{u})|_{t=0} = (\rho_0, \mathbf{u}_0), \ \mathbf{x} \in \Omega. \tag{2.8}$$

Для завершения постановки начально-краевой задачи систему (2.5) дополняют граничными условиями.

Простейшие граничные условия в случае положительной вязкости газа – это условия прилипания:

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{0}, \ (t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \Gamma, \quad \text{где } \Gamma = \partial\Omega. \tag{2.9}$$

В случае, если на какой-либо границе задается скорость отличная от нуля, задание плотности зависит от направления скорости: если вектор скорости направлен вовнутрь области, то необходимо задавать значение плотности, если наоборот наружу, то плотность газа не задается.

Хороший обзор результатов по поводу обоснования начально-краевых задач механики жидкости и газа можно найти в [5].

3 Основные обозначения

В простейших заданиях практикума рассматриваются пространственные области прямоугольного типа $\bar{\Omega} = \prod\limits_{k=1}^{s} [0; X_k]$, где s - размерность пространства. По каждому из направлений используются сетки с постоянным шагом h_k: $\bar{\omega}_{h_k} = \{mh_k \mid m = 0, \dots, M_k\}$, где $M_k h_k = X_k$. На временном интервале $[0; T]$ также используется равномерная сетка: $\omega_\tau = \{n\tau \mid n = 0, \dots, N\}$, где $N\tau = T$. В результате в области Q вводится сетка $\bar{Q}_{\tau\bar{h}} = \omega_\tau \times \bar{\Omega}_{\bar{h}}$, где $\bar{\Omega}_{\bar{h}} = \prod\limits_{k=1}^{s} \bar{\omega}_{h_k}$. Узлы сетки $\bar{\Omega}_{\bar{h}}$, попадающие на границу области Ω, обозначим $\gamma_{\bar{h}}$ (граничные узлы), а попадающие в область Ω через $\Omega_{\bar{h}}$ (внутренние узлы). Граничные узлы с номерами, у которых $m_k = 0$ и $m_k = M_k$, обозначим γ_k^- и γ_k^+ соответственно.

Кроме сеток ω_{h_k} в ряде схем используются сдвинутые сетки с полуцелыми узлами. Через $\omega_{h_k}^{1/2}$ будем обозначать сетку $\omega_{h_k}^{1/2} = \{mh_k + h_k/2 \mid m = 0, \dots, M_k - 1\}$, а через $\Omega_{\bar{h}}^{1/2} = \prod\limits_{k=1}^{s} \bar{\omega}_{h_k}^{1/2}$ и $Q_{\tau\bar{h}}^{1/2} = \omega_\tau \times \bar{\Omega}_{\bar{h}}^{1/2}$.

Значение функции g, определенной на сетке $Q_{\tau\bar{h}}$ (или на сетке $Q_{\tau\bar{h}}^{1/2}$), в узле $(n, \bar{m})$ будем обозначать через $g_{\bar{m}}^n$. Если индексы будут опущены, то это означает, что они равны n и $\bar{m}$. Для сокращения записи значений функции g в узлах, соседних с узлом $(n, \bar{m})$, используются следующие обозначения:

$$g_{\bar{m}}^{n+1} = \hat{g}, \qquad g_{\bar{m}\pm 1_k}^n = g^{\pm 1_k},$$

где $\bar{m} \pm 1_k$ номер узла, k-ая координата которого отличается от соответствующей координаты узла $\bar{m}$ на ± 1. Введем обозначения для среднего значения величин сеточной функции в двух соседних узлах

$$g_{s_k} = \frac{g_{\bar{m}+1_k}^n + g_{\bar{m}}^n}{2}, \quad g_{\bar{s}_k} = \frac{g_{\bar{m}}^n + g_{\bar{m}-1_k}^n}{2}.$$

Для разностных операторов применяются следующие обозначения, принятые в [1]:

$$g_t = \frac{g_{\bar m}^{n+1} - g_{\bar m}^{n}}{\tau}, \quad g_{x_k} = \frac{g_{\bar m+1_k}^{n} - g_{\bar m}^{n}}{h_k}, \quad g_{\overset{\circ}{x}} = \frac{g_{\bar m+1_k}^{n} - g_{\bar m-1_k}^{n}}{2h_k}, \quad g_{\bar x_k} = \frac{g_{\bar m}^{n} - g_{\bar m-1_k}^{n}}{h_k}.$$

Для приближения конвективных слагаемых в дифференциальных операторах в ряде схем будут использоваться разностные аппроксимации против потока. Для этих выражений введем обозначения

$$\delta_k\{W,V\} = \frac{V+|V|}{2}W_{\bar x_k} + \frac{V-|V|}{2}W_{x_k} = \begin{cases} VW_{\bar x_k}, & \text{если } V \geq 0, \\ VW_{x_k}, & \text{если } V < 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

В схеме А.Г.Соколова в конвективных слагаемых узел шаблона, в котором нужно брать значение сеточной функции, зависит от знака компоненты вектора скорости. Для этих выражений используется обозначение

$$\sigma_k\{H,V\} = H\frac{|V|-V}{2|V|} + H^{(-1_k)}\frac{|V|+V}{2|V|} = \begin{cases} H, & \text{если } V < 0, \\ H^{(-1_k)}, & \text{если } V \geq 0, \end{cases} \tag{3.2}$$

Определим используемые ниже скалярные произведения и нормы сеточных функций, заданных на сетке $\bar\Omega_{\bar h}$:

$$(v,u) = \prod_{k=1}^{s} h_k \sum_{x_{\bar m}\in\Omega_{\bar h}} v_{\bar m}u_{\bar m}, \quad [u,v] = (u,v) + 0,5\prod_{k=1}^{s} h_k \sum_{x_{\bar m}\in\gamma_{\bar h}} v_{\bar m}u_{\bar m},$$

$$\|v\|_{C_h} = \max_{x_{\bar m}\in\bar\Omega_{\bar h}} |v_{\bar m}|, \quad \|v\| = \sqrt{(v,v)}, \quad \|v\|_{L_{2,h}} = |[v]| = \sqrt{[v,v]}, \quad \|v\|_2^1 = \sqrt{|[v]|^2 + |v|_1^2},$$

где через $|v|_1$ обозначена полунорма, задаваемая следующим образом:

$$|v|_1 = \sqrt{\prod_{k=1}^{s} h_k \sum_{k=1}^{s} \sum_{x_{\bar m}\in\Omega_{\bar h}\cup\gamma_k^-} (v_{x_k})^2}.$$

4 Одномерная схема для $log(\rho)$

Для автоматического обеспечения условия положительности функции плотности систему (2.1) можно записать следующим образом

$$\begin{aligned} &\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(u\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial ug}{\partial x} + (2-g)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \\ &\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{3}\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u^2}{\partial x}\right) + \tilde p'(g)\frac{\partial g}{\partial x} = \mu e^{-g}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f, \end{aligned} \tag{4.1}$$

где $g = ln(\rho)$ и $\tilde p'(g) = \dfrac{dp}{d\rho}(e^g)$.

Дополним систему (4.1) начальными и граничными условиями:

$$\begin{aligned} &(g,u)|_{t=0} = (ln(\rho_0), u_0), \ \mathbf{x} \in [0,X], \\ &u(t,0) = u(t,X) = 0, \ t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Сеточную функцию, разностное приближение для функции g, обозначим G, а сеточный аналог скорости $\mathbf{u}$ обозначим $\mathbf{V}$. Обе функции заданы на сетке $\bar{\omega}_h$. Для поиска численного решения задачи (4.1)-(4.2) можно использовать р.с., в которой при аппроксимации конвективных членов используются центральные разности

$$\begin{aligned}
&G_t + 0.5\,(V\hat{G}_{\overset{\circ}{x}} + (V\hat{G})_{\overset{\circ}{x}} + 2\hat{V}_{\overset{\circ}{x}} - GV_{\overset{\circ}{x}}) = f_0, \qquad x \in \omega_h,\\
&G_{t,0} + 0.5\,((V\hat{G})_{x,0} + 2\hat{V}_{x,0} - G_0 V_{x,0}) - 0.25h((GV)_{x\bar{x},1} + (2 - G_0)\,V_{x\bar{x},1}) = (f_0)_0,\\
&G_{t,M} + 0.5\,((V\hat{G})_{\bar{x},M} + 2\hat{V}_{\bar{x},M} - G_M V_{\bar{x},M}) + 0.25h((GV)_{x\bar{x},M-1} + (2 - G_M)\,V_{x\bar{x},M-1}) = (f_0)_M,\\
&V_t + \tfrac{1}{3}(V\hat{V}_{\overset{\circ}{x}} + (V\hat{V})_{\overset{\circ}{x}}) + \tilde{p}'(G)\hat{G}_{\overset{\circ}{x}} = \tilde{\mu}\hat{V}_{x\bar{x}} - (\tilde{\mu} - \mu e^{-G})V_{x\bar{x}} + f, \qquad x \in \omega_h,
\end{aligned} \tag{4.3}$$

где $\tilde{\mu} = \mu\|e^{-G}\|_C$, а функция f_0 тождественно равна нулю.

В качестве значений разностного решения на нулевом слое берутся проекции на сетку $\bar{\omega}_h$ функций $ln(\rho_0)$ и u_0:

$$G_m^0 = ln((\rho_0)_m), \quad \mathbf{V}_m^0 = (u_0)_m, \qquad m = 0, 1, \ldots, M. \tag{4.4}$$

Граничные значения функции скорости равны нулю:

$$V_0^n = V_M^n = 0, \qquad n = 1, \ldots, N. \tag{4.5}$$

Решение разностной схемы (4.3)-(4.5) вследствие использования центральных разностей не является строго монотонным, а имеет незначительные осциляции. Для их устранения можно использовать схему с разностями против потока

$$\begin{aligned}
&G_t + \delta\{\hat{G}, V\} + \hat{V}_{\overset{\circ}{x}} = 0, \quad m = 1, \ldots, M-1;\\
&G_t + \hat{V}_{\mathbf{x}} = 0, \quad m = 0;\\
&G_t + \hat{V}_{\bar{\mathbf{x}}} = 0, \quad m = M;
\end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}
&V_t + \delta\{\hat{V}, V\} + \tilde{p}'(G)\hat{G}_{\overset{\circ}{x}} = \tilde{\mu}\hat{V}_{x\bar{x}} - (\tilde{\mu} - \mu e^{-G})V_{x\bar{x}} + f, \qquad m = 1, \ldots, M-1;\\
&\hat{V} = 0, \qquad m = 0,\, M;
\end{aligned} \tag{4.7}$$

где $\tilde{\mu} = \mu\|e^{-G}\|_C$.

Приведем запись уравнений (4.6)-(4.7) в индексной форме

$$\begin{aligned}
&\frac{G_m^{n+1} - G_m^n}{\tau} + \frac{V_m^n + |V_m^n|}{2}\frac{G_m^{n+1} - G_{m-1}^{n+1}}{h} + \frac{V_m^n - |V_m^n|}{2}\frac{G_{m+1}^{n+1} - G_m^{n+1}}{h} + \frac{V_{m+1}^{n+1} - V_{m-1}^{n+1}}{2h} = 0,\\
&m = 1, \ldots, M-1,\\
&\frac{G_0^{n+1} - G_0^n}{\tau} + \frac{V_1^{n+1} - V_0^{n+1}}{h} = 0,\\
&\frac{G_M^{n+1} - G_M^n}{\tau} + \frac{V_M^{n+1} - V_{M-1}^{n+1}}{h} = 0,
\end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{V_m^{n+1} - V_m^n}{\tau} + \frac{V_m^n + |V_m^n|}{2}\frac{V_m^{n+1} - V_{m-1}^{n+1}}{h} +\\
&+ \frac{V_m^n - |V_m^n|}{2}\frac{V_{m+1}^{n+1} - V_m^{n+1}}{h} + \tilde{p}'(G_m^n)\frac{G_{m+1}^{n+1} - G_{m-1}^{n+1}}{2h} =\\
&= \tilde{\mu}\frac{V_{m+1}^{n+1} - 2V_m^{n+1} + V_{m-1}^{n+1}}{h^2} - (\tilde{\mu} - \mu e^{-G})\frac{V_{m+1}^n - 2V_m^n + V_{m-1}^n}{h^2} + f_m^n, \quad m = 1, \ldots, M-1,\\
&V_0^{n+1} = 0, \quad V_M^{n+1} = 0.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

5 Разностная схема А.Г.Соколова в одномерном случае

Функции H (сеточная плотность), заданная в узлах сетки $\omega_h^{1/2}$, и V (сеточная скорость), заданная в узлах сетки ω_h, ищутся по схеме, аппроксимирующей систему (2.2)

$$H_t + (\sigma\{\hat{H}, V\}V)_x = 0, \qquad 0 \le m < M,\ n \ge 0, \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned}
&(H_{\bar{s}}V)_t + \frac{1}{2}\Big((\sigma\{\hat{H}\hat{V}, V\}V)_x + (\sigma\{\hat{H}\hat{V}^{+1}, V\}V)_{\bar{x}}\Big) + \frac{\gamma}{\gamma-1}\hat{H}_{\bar{s}}((\hat{H})^{\gamma-1})_{\bar{x}} = \\
&= \mu\hat{V}_{x\bar{x}} + \hat{H}_{\bar{s}}f, \qquad \text{при } \hat{H}_{\bar{s}} \ne 0, \\
&\hat{V} = 0, \qquad \text{при } \hat{H}_{\bar{s}} = 0, \\
&0 < m < M,\ n \ge 0, \\
&\hat{V}_0 = \hat{V}_M = 0.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

В формулах (5.1)-(5.2) были использованы обозначения (3.2).

Разностные уравнения (5.1)-(5.2) в индексах имеют вид

$$\begin{gathered}
\frac{H_m^{n+1} - H_m^n}{\tau} + \\
+\frac{(V_{m+1}^n - |V_{m+1}^n|)H_{m+1}^{n+1} + (V_{m+1}^n + |V_{m+1}^n| - V_m^n + |V_m^n|)H_m^{n+1} - (V_m^n + |V_m^n|)H_{m-1}^{n+1}}{2h} = 0, \\
0 \le m < M,\ n \ge 0.
\end{gathered} \tag{5.3}$$

$$\begin{gathered}
\frac{(H_{m-1}^{n+1} + H_m^{n+1})V_m^{n+1} - (H_{m-1}^n + H_m^n)V_m^n}{2\tau} - \\
-\frac{((|V_{m-1}^n| + V_{m-1}^n)H_{m-2}^{n+1} + (|V_m^n| + V_m^n)H_{m-1}^{n+1})V_{m-1}^{n+1}}{4h} + \\
+\frac{((|V_{m-1}^n| - V_{m-1}^n + |V_m^n| + V_m^n)H_{m-1}^{n+1} + (|V_{m+1}^n| + V_{m+1}^n + |V_m^n| - V_m^n)H_m^{n+1})V_m^{n+1}}{4h} - \\
-\frac{((|V_m^n| - V_m^n)H_m^{n+1} + (|V_{m+1}^n| - V_{m+1}^n)H_{m+1}^{n+1})V_{m+1}^{n+1}}{4h} + \\
+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{H_m^{n+1} + H_{m-1}^{n+1}}{2}\frac{(H_m^{n+1})^{\gamma-1} - (H_{m-1}^{n+1})^{\gamma-1}}{h} = \\
= \mu\frac{V_{m-1}^{n+1} - 2V_m^{n+1} + V_{m+1}^{n+1}}{h^2} + \frac{H_{m-1}^{n+1} + H_m^{n+1}}{2}f_m^{n+1}, \\
\text{при } H_{m-1}^{n+1} + H_m^{n+1} \ne 0, \\
V_m^{n+1} = 0, \qquad \text{при } H_{m-1}^{n+1} + H_m^{n+1} = 0, \\
0 < m < M,\ n \ge 0, \\
V_0^{n+1} = V_M^{n+1} = 0.
\end{gathered} \tag{5.4}$$

В схеме (5.1)-(5.2) можно поменять второе уравнение так, чтобы оно аппроксимировало соответствующее уравнение системы (2.1). В результате получим следующую схему

$$H_t + (\sigma\{\hat{H}, V\}V)_x = 0, \qquad 0 \le m < M,\ n \ge 0, \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned}
&\hat{H}_{\bar{s}}V_t + \hat{H}_{\bar{s}}\delta\{\hat{V}, V\} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\hat{H}_{\bar{s}}((\hat{H})^{\gamma-1})_{\bar{x}} = \mu\hat{V}_{x\bar{x}} + \hat{H}_{\bar{s}}f, \qquad \text{при } \hat{H}_{\bar{s}} \ne 0, \\
&\hat{V} = 0, \qquad \text{при } \hat{H}_{\bar{s}} = 0, \\
&0 < m < M,\ n \ge 0, \\
&\hat{V}_0 = \hat{V}_M = 0.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

6 Отладочные тесты для одномерных задач

Зададим функции

$$\begin{aligned}&\tilde{\rho}(t,x) = e^t(cos(\pi x/10) + 1.5),\\&\tilde{u}(t,x) = cos(2\pi t)sin(\pi(x/10)^2).\end{aligned} \tag{6.1}$$

Определим функции f_0 (отличную от нуля правую часть уравнения неразрывности) и f так, чтобы функции $(\tilde{\rho}, \tilde{u})$ удовлетворяли системе (2.1) с правой частью, составленной из этих функций.

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial\tilde{\rho}\tilde{u}}{\partial x} = f_0,\\&\tilde{\rho}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t} + \tilde{\rho}\tilde{u}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = \mu\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x^2} + f,\\&p = p(\tilde{\rho}).\end{aligned} \tag{6.2}$$

Таким образом, дифференциальная задача для системы с начальными и граничными условиями

$$\begin{aligned}&\tilde{\rho}(0,x) = cos(\pi x/10) + 1.5,\ \mathbf{x} \in [0,10],\\&\tilde{u}(0,x) = sin(\pi(x/10)^2),\ \mathbf{x} \in [0,10],\\&\tilde{u}(t,0) = u(t,10) = 0,\ t \in [0,1],\end{aligned} \tag{6.3}$$

имеет гладкое точное решение в области $Q = [0,1] \times [0,10]$, задаваемое функциями (6.1).

Зададим две начально-краевых задачи для системы (2.1), начальные и граничные условия которых определяются следующим образом.

$$\begin{aligned}&\rho_0(x) = 1, \quad x < 4,5 \text{ или } x > 5,5,\\&\rho_0(x) = 2, \quad x \in [4,5;5,5],\\&u_0(x) \equiv 0, x \in [0,10],\\&u(t,0) = u(t,10) = 0,\ t \in [0,T].\end{aligned} \tag{6.4}$$

$$\begin{aligned}&u_0(x) = 0, \quad x < 4,5 \text{ или } x > 5,5,\\&u_0(x) = 1, \quad x \in [4,5;5,5],\\&\rho_0(x) \equiv 1, x \in [0,10],\\&u(t,0) = u(t,10) = 0,\ t \in [0,T].\end{aligned} \tag{6.5}$$

Функция f из правой части системы (2.1) считается равной нулю в обеих задачах.

Приведем еще один тестовый вариант, котором значения скорости на концах отрезка отличны от нуля

$$\begin{aligned}&u_0(x) = 0,\ \rho_0(x) = 1 \quad x \in [0;\ 1]\\&\rho(t,0) = 2,\ u(t,0) = 1,\ t > 0.\end{aligned} \tag{6.6}$$

Функция f в этой задаче также считается равной нулю.

Задания по одномерным схемам

Первое задание состоит в написании программы, реализующей все четыре варианта описанных выше разностных схем. В отчет о выполнении задания должны быть включены следующие пункты.

1. Постановки дифференциальных задач.

2. Подробное описание алгоритмов разностных схем. В том числе обязательно должны быть приведены поточечная запись разностных уравнений и выражений, задающих

элементы матриц и правых частей алгебраических задач, которые требуется решить (см. раздел пособия N 8).

3. Описание тестовых расчетов и полученных результатов:

а) расчет точного гладкого решения;

б) результаты расчета задач с негладкими данными (6.4)-(6.6), снабженные графическими иллюстрациями.

4. Отчет должен содержать полученные результаты о точности расчетов по разностным схемам, сравнительные выводы точности схем между собой и в зависимости от значения параметра μ. Значение этого параметра следует брать из диапазона $[0,001;\ 0,1]$.

Второе и третье задание аналогичны заданиям, где используются схемы для двумерных задач (см. раздел пособия N 26).

7 Многомерная схема для $log(\rho)$ с центральными разностями

Для построения разностной схемы, для которой автоматически выполняется условие положительности функции плотности, система (2.5) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial g}{\partial t}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{s}\left(u_k\frac{\partial g}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k g}{\partial x_k}+(2-g)\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)=f_0,\\
&\frac{\partial u_k}{\partial t}+\frac{1}{3}\left(u_k\frac{\partial u_k}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k^2}{\partial x_k}\right)+\frac{1}{2}\sum_{m=1,m\neq k}^{s}\left(u_m\frac{\partial u_k}{\partial x_m}+\frac{\partial u_m u_k}{\partial x_m}-u_k\frac{\partial u_m}{\partial x_m}\right)+p'_\rho(\rho)\frac{\partial g}{\partial x_k}=\\
&=\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{4}{3}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k^2}+\sum_{m=1,m\neq k}^{s}\left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_m^2}+\frac{1}{3}\frac{\partial^2 u_m}{\partial x_k\partial x_m}\right)\right)+f_k,\qquad k=1,\ldots,s,\\
&p=p(\rho),\quad g=ln\rho.
\end{aligned}\tag{7.1}$$

В правой части первого уравнения системы (7.1) равна функции f_0, которая в случае задачи (2.5)-(2.9) является тождественным нулем. Однако в целях отладки программ и проверки теоретических оценок точности численных методов удобно иметь примеры задач типа (2.5)-(2.9), обладающие точными гладкими решениями, выраженными через элементарные функции. Таких примеров для задачи (2.5)-(2.9) не известно. Поэтому поступают следующим образом. Задают пару гладких функций $(\rho,\mathbf{u})$, определяемые через элеметарные функции. При этом функция $\mathbf{u}$ должна удовлетворять граничному условию (2.9). Подставив эти функции в уравнения (7.1), вычисляют функции f_k (k=0,. . . ,s), при которых пара $(\rho,\mathbf{u})$ является решением системы (7.1). Тем самым, получается начально-краевая задача, имеющая точное гладкое решение.

Сеточную функцию, разностное приближение для плотности ρ, обозначим H. Аналогично, разностные аналоги функций g и $\mathbf{u}$ обозначим G и $\mathbf{V}$ соответственно. Функции H, G и $\mathbf{V}$ будем считать заданными на сетке $\bar{\Omega}_{\bar{h}}$. Для поиска численного решения задачи (7.1),(2.8),(2.9) предлагается использовать р.с:

$$G_t+0.5\sum_{k=1}^{s}\left(V_k\hat{G}_{\overset{0}{x_k}}+(V_k\hat{G})_{\overset{0}{x_k}}+2(\hat{V}_k)_{\overset{0}{x_k}}-G(V_k)_{\overset{0}{x_k}}\right)=\tau\eta\sum_{k=1}^{s}(\Phi_{s_k}\hat{G}_{x_k})_{\bar{x}_k}+f_0,\quad \mathbf{x}\in\Omega_{\bar{h}};\tag{7.2}$$

$$
\begin{aligned}
&G_t + 0.5\,\left((V_k\hat{G})_{x_k} + 2(\hat{V}_k)_{x_k} - G(V_k)_{x_k}\right)\\
&-0.25h_k\left((GV_k)_{x_kx_k} + (2-G)\,(V_k)_{x_kx_k}\right) = \frac{2\tau\eta\Phi_{s_k}}{h_k}\hat{G}_{x_k} + f_0, \quad \mathbf{x}\in\gamma_k^-,\ k=1,\dots,s;
\end{aligned}
\tag{7.3}
$$

$$
\begin{aligned}
&G_t + 0.5\,\left((V_k\hat{G})_{\bar{x}_k} + 2(\hat{V}_k)_{\bar{x}_k} - G(V_k)_{\bar{x}_k}\right)\\
&+0.25h_k\left((GV_k)_{\bar{x}_k\bar{x}_k} + (2-G)\,(V_k)_{\bar{x}_k\bar{x}_k}\right) = -\frac{2\tau\eta\Phi_{\bar{s}_k}}{h_k}\hat{G}_{\bar{x}_k} + f_0, \quad \mathbf{x}\in\gamma_k^+,\ k=1,\dots,s.
\end{aligned}
\tag{7.4}
$$

$$
\begin{aligned}
&(V_k)_t + \tfrac{1}{3}\left(V_k(\hat{V}_k)_{\overset{0}{x}_k} + (V_k\hat{V}_k)_{\overset{0}{x}_k}\right) + \tfrac{1}{2}\sum_{m=1,m\neq k}^{s}\left(V_m(\hat{V}_k)_{\overset{0}{x}_m} + (V_m\hat{V}_k)_{\overset{0}{x}_m} - V_k(V_m)_{\overset{0}{x}_m}\right)\\
&+\tilde{p}'(G)\hat{G}_{\overset{0}{x}_k} = \tilde{\mu}\left(\tfrac{4}{3}(\hat{V}_k)_{x_k\bar{x}_k} + \sum_{m=1,m\neq k}^{s}(\hat{V}_k)_{x_m\bar{x}_m}\right)\\
&-(\tilde{\mu}-\mu e^{-G})\left(\tfrac{4}{3}(V_k)_{x_k\bar{x}_k} + \sum_{m=1,m\neq k}^{s}(V_k)_{x_m\bar{x}_m}\right) + \frac{\mu e^{-G}}{3}\sum_{m=1,m\neq k}^{s}(V_m)_{\overset{0}{x}_k\overset{0}{x}_m} + f_k, \qquad \mathbf{x}\in\Omega_{\bar{h}},\\
&\hat{V}_k = 0, \qquad \mathbf{x}\in\gamma_{\bar{h}}, \qquad k=1,\dots,s.
\end{aligned}
\tag{7.5}
$$

где $\tilde{\mu} = \mu\|e^{-G}\|_C$, а функция равна $\Phi = H \equiv e^G$ или $\Phi = V^2$.

Величина η является положительной константой. Ее значение подбирается экспериментально. Дело в том, что в разностной схеме использованы центральные разности по пространственным переменным, что приводит к появлению осцилляций у численного решения на фоне точного решения дифференциальной задачи. Такие схемы называют немонотонными. У немонотонных схем часто тяжело проводить анализ полученного разностного решения и как следствие от немонотонности схемы требуется избавляться. Один из способов сгладить осцилляции используется в схеме (7.2)-(7.5). Он называется введение искусственной вязкости, влияние которой регулируется значением η. Одним из заданий практикума является определение оптимального значения этого параметра, при котором осцилляции пропадают, но в то же время искусственная вязкость еще не сильно сглаживает полученное рещение, искажая его поведение в областях резкого изменения (например, в окрестности разрывов или погранслоев).

В качестве значений разностного решения на нулевом слое берутся проекции на сетку $\bar{\Omega}_h$ функций $ln(\rho_0)$ и $\mathbf{u}_0$:

$$
G^0 = ln(\rho_0), \quad \mathbf{V}^0 = \mathbf{u}_0, \qquad \mathbf{x}\in\bar{\Omega}_h. \tag{7.6}
$$

Схема (7.2)-(7.6) двухслойная. Это означает, что при известном решении на n-ом временном слое решение на $(n+1)$-ом определяется из СЛАУ

$$
Ad = b. \tag{7.7}
$$

Вектор неизвестных d в трехмерном случае составлен из значений функций G, $V1$, $V2$ и $V3$ на $(n+1)$-ом временном слое. В работе [3] доказано, что решение СЛАУ (7.7) всегда существует и единственно.

Порядок записи неизвестных в векторе d определяется правилом нумерации узлов сетки. Нулевым узлом считается узел, имеющий наименьшие значения всех пространственных координат. Далее последовательно выбираются узлы, у которых в первую очередь увеличивается на значение шага первая координата, потом вторая и в последнюю очередь третья (если решаемая задача трехмерная). При этом, когда изменяется вторая первая принимает наименьшее возможное значение, а при изменении третьей минимальные значения принимают уже первые две координаты. Пронумеровав все узлы, записываем вектор неизвестных d в виде

$$(\hat{G}(0), \hat{V}1(0), \hat{V}2(0), \hat{V}3(0), \hat{G}(1), \hat{V}1(1), \hat{V}2(1), \hat{V}3(1), \dots)$$

Такой выбор последовательности элементов вектора d обеспечивает минимальную ширину ленты матрицы A.

8 Двумерная схема для $log(\rho)$ с центральными разностями

Для определения коэффициентов матрицы A и вектора b требуется переписать уравнения схемы (7.2)-(7.5) в более удобном виде. Проведем эти выкладки на примере двумерной задачи с нулевыми значениями скорости на границе для схемы без искусственной вязкости ($\eta = 0$) и $f_0 = 0$.

Для этого запишем уравнения (7.2), используя значения функций в узлах сетки

$$\begin{aligned}
&\frac{G^{n+1}_{m_1,m_2} - G^n_{m_1,m_2}}{\tau} + \frac{1}{2}\Bigg(V1^n_{m_1,m_2} \frac{G^{n+1}_{m_1+1,m_2} - G^{n+1}_{m_1-1,m_2}}{2h_1} \\
&+ \frac{V1^n_{m_1+1,m_2} G^{n+1}_{m_1+1,m_2} - V1^n_{m_1-1,m_2} G^{n+1}_{m_1-1,m_2}}{2h_1} + 2\frac{V1^{n+1}_{m_1+1,m_2} - V1^{n+1}_{m_1-1,m_2}}{2h_1} \\
&+ V2^n_{m_1,m_2} \frac{G^{n+1}_{m_1,m_2+1} - G^{n+1}_{m_1,m_2-1}}{2h_2} + \frac{V2^n_{m_1,m_2+1} G^{n+1}_{m_1,m_2+1} - V2^n_{m_1,m_2-1} G^{n+1}_{m_1,m_2-1}}{2h_2} \\
&+ 2\frac{V2^{n+1}_{m_1,m_2+1} - V2^{n+1}_{m_1,m_2-1}}{2h_2} \Bigg) - \frac{G^n_{m_1,m_2}}{2} \Bigg(\frac{V1^n_{m_1+1,m_2} - V1^n_{m_1-1,m_2}}{2h_1} \\
&+ \frac{V2^n_{m_1,m_2+1} - V2^n_{m_1,m_2-1}}{2h_2} \Bigg) = 0, \qquad \mathbf{x} = (m_1 h_1, m_2 h_2) \in \Omega_h,
\end{aligned} \tag{8.1}$$

Умножим уравнение (8.1) на 4τ и приведем подобные при неизвестных значениях функций G и $\mathbf{V}$ с верхнего слоя. В результате получим следующие уравнения

$$\begin{aligned}
&4G^{n+1}_{m_1,m_2} - \frac{\tau}{h_1}\left(V1^n_{m_1-1,m_2} + V1^n_{m_1,m_2} \right) G^{n+1}_{m_1-1,m_2} - \frac{\tau}{h_2}\left(V2^n_{m_1,m_2-1} + V2^n_{m_1,m_2} \right) G^{n+1}_{m_1,m_2-1} \\
&+ \frac{\tau}{h_1}\left(V1^n_{m_1+1,m_2} + V1^n_{m_1,m_2} \right) G^{n+1}_{m_1+1,m_2} + \frac{\tau}{h_2}\left(V2^n_{m_1,m_2+1} + V2^n_{m_1,m_2} \right) G^{n+1}_{m_1,m_2+1} \\
&- \frac{2\tau}{h_1} V1^{n+1}_{m_1-1,m_2} - \frac{2\tau}{h_2} V2^{n+1}_{m_1,m_2-1} + \frac{2\tau}{h_1} V1^{n+1}_{m_1+1,m_2} + \frac{2\tau}{h_2} V2^{n+1}_{m_1,m_2+1} \\
&= 4G^n_{m_1,m_2} + \tau G^n_{m_1,m_2} \left(\frac{V1^n_{m_1+1,m_2} - V1^n_{m_1-1,m_2}}{h_1} + \frac{V2^n_{m_1,m_2+1} - V2^n_{m_1,m_2-1}}{h_2} \right), \quad \mathbf{x} \in \Omega_h.
\end{aligned} \tag{8.2}$$

Аналогично, расписав уравнения (7.3) и (7.4), умножив полученные равенства на 2τ и приведя подобные при искомых значениях с верхнего слоя, получим уравнения в граничных точках γ.

$$\begin{aligned}
&2G^{n+1}_{0,m_2} + \frac{\tau}{h_1} V1^n_{1,m_2} G^{n+1}_{1,m_2} + \frac{2\tau}{h_1} V1^{n+1}_{1,m_2} = 2G^n_{0,m_2} + \frac{\tau}{h_1} G^n_{0,m_2} V1^n_{1,m_2} + \\
&+ \frac{\tau}{2h_1}\left(G^n_{2,m_2} V1^n_{2,m_2} - 2G^n_{1,m_2} V1^n_{1,m_2} + (2 - G^n_{0,m_2}) \left(V1^n_{2,m_2} - 2V1^n_{1,m_2} \right) \right), \quad \mathbf{x} \in \gamma_{-1},
\end{aligned} \tag{8.3}$$

$$
\begin{aligned}
&2G^{n+1}_{M_1,m_2} - \frac{\tau}{h_1} V1^{\,n}_{M_1-1,m_2} G^{n+1}_{M_1-1,m_2} - \frac{2\tau}{h_1} V1^{\,n+1}_{M_1-1,m_2} = 2G^n_{M_1,m_2} - \frac{\tau}{h_1} G^n_{M_1,m_2} V1^{\,n}_{M_1-1,m_2} - \\
&-\frac{\tau}{2h_1}\left(G^n_{M_1-2,m_2} V1^{\,n}_{M_1-2,m_2} - 2G^n_{M_1-1,m_2} V1^{\,n}_{M_1-1,m_2} + \right.\\
&\left. +(2-G^n_{M_1,m_2})\left(V1^{\,n}_{M_1-2,m_2} - 2V1^{\,n}_{M_1-1,m_2}\right)\right), \quad \mathbf{x}\in\gamma_1,
\end{aligned} \tag{8.4}
$$

$$
\begin{aligned}
&2G^{n+1}_{m_1,0} + \frac{\tau}{h_2} V2^{\,n}_{m_1,1} G^{n+1}_{m_1,1} + \frac{2\tau}{h_2} V2^{\,n+1}_{m_1,1} = 2G^n_{m_1,0} + \frac{\tau}{h_2} G^n_{m_1,0} V2^{\,n}_{m_1,1} + \\
&+\frac{\tau}{2h_2}\left(G^n_{m_1,2} V2^{\,n}_{m_1,2} - 2G^n_{m_1,1} V2^{\,n}_{m_1,1} + (2-G^n_{m_1,0})\left(V2^{\,n}_{m_1,2} - 2V2^{\,n}_{m_1,1}\right)\right), \quad \mathbf{x}\in\gamma_{-2},
\end{aligned} \tag{8.5}
$$

$$
\begin{aligned}
&2G^{n+1}_{m_1,M_2} - \frac{\tau}{h_2} V2^{\,n}_{m_1,M_2-1} G^{n+1}_{m_1,M_2-1} - \frac{2\tau}{h_2} V2^{\,n+1}_{m_1,M_2-1} = 2G^n_{m_1,M_2} - \frac{\tau}{h_2} G^n_{m_1,M_2} V2^{\,n}_{m_1,M_2-1} - \\
&-\frac{\tau}{2h_2}\left(G^n_{m_1,M_2-2} V2^{\,n}_{m_1,M_2-2} - 2G^n_{m_1,M_2-1} V2^{\,n}_{m_1,M_2-1} + \right.\\
&\left. +(2-G^n_{m_1,M_2})\left(V2^{\,n}_{m_1,M_2-2} - 2V2^{\,n}_{m_1,M_2-1}\right)\right), \quad \mathbf{x}\in\gamma_2,
\end{aligned} \tag{8.6}
$$

Аналогично из уравнений (7.5) получаем

$$
\begin{aligned}
&\left(6 + 4\tau\tilde{\mu}\left(\frac{4}{h_1^2} + \frac{3}{h_2^2}\right)\right) V1^{\,n+1}_{m_1,m_2} - \left(\frac{\tau}{h_1}\left(V1^{\,n}_{m_1-1,m_2} + V1^{\,n}_{m_1,m_2}\right) + \frac{8\tau\tilde{\mu}}{h_1^2}\right) V1^{\,n+1}_{m_1-1,m_2} - \\
&-\left(\frac{3\tau}{2h_2}\left(V2^{\,n}_{m_1,m_2-1} + V2^{\,n}_{m_1,m_2}\right) + \frac{6\tau\tilde{\mu}}{h_2^2}\right) V1^{\,n+1}_{m_1,m_2-1} + \\
&+\left(\frac{\tau}{h_1}\left(V1^{\,n}_{m_1+1,m_2} + V1^{\,n}_{m_1,m_2}\right) - \frac{8\tau\tilde{\mu}}{h_1^2}\right) V1^{\,n+1}_{m_1+1,m_2} + \\
&+\left(\frac{3\tau}{2h_2}\left(V2^{\,n}_{m_1,m_2+1} + V2^{\,n}_{m_1,m_2}\right) - \frac{6\tau\tilde{\mu}}{h_2^2}\right) V1^{\,n+1}_{m_1,m_2+1} - \\
&-\frac{3\tau p'_\rho(H^n_{m_1,m_2})}{h_1} G^{n+1}_{m_1-1,m_2} + \frac{3\tau p'_\rho(H^n_{m_1,m_2})}{h_1} G^{n+1}_{m_1+1,m_2} = \\
&= 6V1^{\,n}_{m_1,m_2} + \frac{3\tau}{2h_2} V1^{\,n}_{m_1,m_2}\left(V2^{\,n}_{m_1,m_2+1} - V2^{\,n}_{m_1,m_2-1}\right) + \\
&+6\tau\left(\frac{\mu}{H^n_{m_1,m_2}} - \tilde{\mu}\right)\left(\frac{4}{3h_1^2}\left(V1^{\,n}_{m_1+1,m_2} - 2V1^{\,n}_{m_1,m_2} + V1^{\,n}_{m_1-1,m_2}\right) + \right.\\
&\left. +\frac{1}{h_2^2}\left(V1^{\,n}_{m_1,m_2+1} - 2V1^{\,n}_{m_1,m_2} + V1^{\,n}_{m_1,m_2-1}\right)\right) + \\
&+\frac{\tau\mu}{2H^n_{m_1,m_2} h_1 h_2}\left(V2^{\,n}_{m_1+1,m_2+1} - V2^{\,n}_{m_1-1,m_2+1} - V2^{\,n}_{m_1+1,m_2-1} + V2^{\,n}_{m_1-1,m_2-1}\right) + \\
&+6\tau f1^{\,n}_{m_1,m_2}, \quad \mathbf{x}\in\Omega_h,
\end{aligned} \tag{8.7}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(6+4\tau\tilde{\mu}\left(\frac{3}{h_1^2}+\frac{4}{h_2^2}\right)\right)V2^{n+1}_{m_1,m_2}-\left(\frac{3\tau}{2h_1}\left(V1^n_{m_1-1,m_2}+V1^n_{m_1,m_2}\right)+\frac{6\tau\tilde{\mu}}{h_1^2}\right)V2^{n+1}_{m_1-1,m_2}-\\
&-\left(\frac{\tau}{h_2}\left(V2^n_{m_1,m_2-1}+V2^n_{m_1,m_2}\right)+\frac{8\tau\tilde{\mu}}{h_2^2}\right)V2^{n+1}_{m_1,m_2-1}+\\
&+\left(\frac{3\tau}{2h_1}\left(V1^n_{m_1+1,m_2}+V1^n_{m_1,m_2}\right)-\frac{6\tau\tilde{\mu}}{h_1^2}\right)V2^{n+1}_{m_1+1,m_2}+\\
&+\left(\frac{\tau}{h_2}\left(V2^n_{m_1,m_2+1}+V2^n_{m_1,m_2}\right)-\frac{8\tau\tilde{\mu}}{h_2^2}\right)V2^{n+1}_{m_1,m_2+1}-\\
&-\frac{3\tau p'_\rho(H^n_{m_1,m_2})}{h_2}G^{n+1}_{m_1,m_2-1}+\frac{3\tau p'_\rho(H^n_{m_1,m_2})}{h_2}G^{n+1}_{m_1,m_2+1}=\\
&=6V2^n_{m_1,m_2}+\frac{3\tau}{2h_1}V2^n_{m_1,m_2}\left(V1^n_{m_1+1,m_2}-V1^n_{m_1-1,m_2}\right)+\\
&+6\tau\left(\frac{\mu}{H^n_{m_1,m_2}}-\tilde{\mu}\right)\left(\frac{1}{h_1^2}\left(V2^n_{m_1+1,m_2}-2V2^n_{m_1,m_2}+V2^n_{m_1-1,m_2}\right)+\right.\\
&\left.+\frac{4}{3h_2^2}\left(V2^n_{m_1,m_2+1}-2V2^n_{m_1,m_2}+V2^n_{m_1,m_2-1}\right)\right)+\\
&+\frac{\tau\mu}{2H^n_{m_1,m_2}h_1h_2}\left(V1^n_{m_1+1,m_2+1}-V1^n_{m_1-1,m_2+1}-V1^n_{m_1+1,m_2-1}+V1^n_{m_1-1,m_2-1}\right)+\\
&+6\tau f2^n_{m_1,m_2},\quad \mathbf{x}\in\Omega_h.
\end{aligned}
\tag{8.8}
$$

9 Инструкция по использованию пакета LASPACK

Опишем правила вызова подпрограмм из пакета Laspack, использующихся для решении СЛАУ различными модификациями метода би-сопряженных градиентов.

1) Декларация матрицы и вектора с именами A и b:

$$QMatrix\ A;,\qquad Vector\ b;.$$

2) Отведение памяти для хранения матрицы A и вектора b размерности Dim (строки и столбцы имеют номера, начиная с 1 и кончая Dim):

$$Q\_Constr(\&A,"A",Dim,False,Rowws,Normal,True);,$$

$$V\_Constr(\&b,"b",Dim,Normal,True);.$$

3) Присвоить элементу вектора b с номером i значение переменной tmp

$$V\_SetCmp(\&b,i,tmp);.$$

4) Определить, что в строке матрицы A с номером i содержатся n отличных от нуля элементов

$$Q\_SetLen(\&A,i,n);.$$

5) Присвоить элементу матрицы A, находящемуся в строке с номером i и столбце с номером j значение переменной tmp (задаваемый элемент в списке отличных от нуля элементов строки имеет номер k от 0 до $n-1$):

$$Q\_SetEntry(\&A,i,k,j,tmp);.$$

6)Задать точность решения системы $Ax = b$ равной ε:

$$SetRTCAccuracy(\varepsilon);.$$

Параметр ε задаваемый этой процедурой определяет шаг n, на котором происходит завершение итерационного процесса решения системы $Ax = b$. Номер n определяется из условия, что

$$\|b - Ax_n\|_2 \leq \varepsilon\|b\|_2, \tag{9.1}$$

где через x_n обозначено приближение, полученное на n-ом шаге.

7) Присвоить переменной tmp значение i-ой компоненты вектора b

$$tmp = V\_GetCmp(\&b, i);.$$

8) Освободить память, отведенную под матрицу A и вектор b,

$$Q\_Destr(\&A);, \qquad V\_Destr(\&b);.$$

Для решения системы $Ax = b$ с несимметричной матрицей в пакете $LASPack$ реализованы следующие методы.

9) Conjugate Gradient on the Normal Equations (CGN). Его применение осуществляется через вызов процедуры $CGNIter$. Ее прототип:

$$Vector\ CGNIter\,(QMatrix\ *A,\ Vector\ *x,\ Vector\ *b,\ int\ MaxIter,$$

$$PrecondProcType\ PrecondProc,\ double\ \omega);.$$

Первые три параметра задают элементы решаемой СЛАУ. Целочисленный параметр $MaxIter$ задает максимальное выполнимое число шагов итерационного метода. Таким образом, завершение итерационного процесса происходит в двух случаях: либо достигнута заданная точность на n-ом шаге (условие (9.1)), либо число итераций достигло значения $MaxIter$. Параметр $PrecondProc$ задает три возможных типа предобуславливателя: $JacobiPrecond$, $SSORPrecond$ и $ILUPrecond$. Выбор первых двух описан в разделе (15), а третий является важным подслучаем второго при значении $\omega = 1$. Параметр, задающий предобуславливатель может быть задан значением $NULL$. В этом случае итерационный процесс будет осуществляться без предобуславливателя. Последний параметр процедуры задает значение параметра ω в предобуславливателе. Значение этого параметра может быть любым, если предобуславливатель отсутствует.

Во всех следующих процедурах параметры имеют тот же смысл, что и в процедуре $CGNIter$.

10) Generalized Minimal Residual (GMRES). Его применение осуществляется через вызов процедуры $GMRES$. Ее прототип:

$$Vector\ GMRESIter\,(QMatrix\ *A,\ Vector\ *x,\ Vector\ *b,\ int\ MaxIter,$$

$$PrecondProcType\ PrecondProc,\ double\ \omega);.$$

11) BiConjugate Gradient (BiCGIter). Его применение осуществляется через вызов процедуры $GMRES$. Ее прототип:

$$Vector\ BiCGIter\,(QMatrix\ *A,\ Vector\ *x,\ Vector\ *b,\ int\ MaxIter,$$

$$PrecondProcType\, PrecondProc,\ double\, \omega);.$$

12) Quasi-Minimal Residual (QMR, without lock-ahead). Его применение осуществляется через вызов процедуры $QMRIter$. Ее прототип:

$$Vector\, QMRIter\, (QMatrix\ *A,\ Vector\ *x,\ Vector\ *b,\ int\, MaxIter,$$

$$PrecondProcType\, PrecondProc,\ double\, \omega);.$$

13) Conjugate Gradient Squared (CGS). Его применение осуществляется через вызов процедуры $CGSIter$. Ее прототип:

$$Vector\, CGSIter\, (QMatrix\ *A,\ Vector\ *x,\ Vector\ *b,\ int\, MaxIter,$$

$$PrecondProcType\, PrecondProc,\ double\, \omega);.$$

14) BiConjugate Gradient Stabilized (BiCGSTAB). Его применение осуществляется через вызов процедуры $BiCGSTAB$. Ее прототип:

$$Vector\, BiCGSTABIter\, (QMatrix\ *A,\ Vector\ *x,\ Vector\ *b,\ int\, MaxIter,$$

$$PrecondProcType\, PrecondProc,\ double\, \omega);.$$

Пакет Laspark в интернете в открытом доступе находится по адресу

$$http://ftp.wh2.tu-dresden.de/pub/FreeBSD/ports/i386/packages/math/.$$

10 Структура и обозначения программы

Программа, предназначенная для расчета нестационарного течения вязкого газа по разностной схеме (7.2)-(7.6), достаточно объемная и в ней должно быть использовано много величин, которые на бумаге имеют похожие обозначения, но их числовые значения различны. Поэтому прежде чем приступить к программированию требуется продумать структуру будущего комплекса программ и придумать обозначения для используемых переменных. Идентификаторы переменных должны позволять понимать, что означает та или иная переменная, и давать возможность легко различать их между собой. Разберем решение этих вопросов на примере программы, предназначенной для расчета течения газа в прямоугольной области.

I) Главная программа (хранится в файле gas_two.c).

Параметры дифференциальной задачи для удобства задания и передачи в подпрограммы хранятся в структуре P_gas.

$typedef\, struct$
$\{$
$double\, Segm\_T;$
$double\, Segm\_X;$
$double\, Segm\_Y;$
$double\, p\_ro;$
$double\, mu;$
$\}\ P\_gas;$

В ней хранятся следующие переменные.

1)Параметры, задающие расчетную область Q. В случае прямоугольной области достаточно задать длины ее сторон и временного промежутка. В разбираемом примере эти параметры обозначены через $Segm\_X$, $Segm\_Y$ и $Segm\_T$ соответственно.

2) Параметры, задающие свойства газа. В случае рассматриваемой модели (2.5)-(2.9) это вязкость газа μ (обозначается mu) и функция $p = p(\rho)$. В разбираемом примере использована простейшая линейная зависимость $p = p'_\rho \rho$. Для ее определения требуется задать константу p'_ρ, которая характеризует сжимаемость газа и в программе обозначается p_ro.

Всем этим переменным сразу присваиваются значения в процедуре

$$void param\_dif(P\_gas\ *p\_d)$$

Главная программа предназначена для определения последовательности макрошагов, реализующих задачу расчета.

В разбираемом примере это тестовые расчеты на различных вложенных сетках задачи с известным точным решением. Результатом работы программы должны быть файлы, содержащие таблицы погрешностей определения функций, составляющих решение, в заранее заданных нормах в момент времени T. В нашем случае были использованы нормы C_h и $L_{2,h}$. Для этих целей заводятся следующие переменные:

it_t и it_sp - для значений номера текущей вложенной сетки по времени и пространству соответственно;

it_t_max и it_sp_max - для максимального числа используемых вложенных сеток по времени и пространству соответственно;

it и it_max - номера текущего теста и общего количества тестов.

Для хранения полученной информации следует завести массивы размерности it_max: nc_g, $nl2\_g$, nc_v1, $nl2\_v1$, nc_v2 и $nl2\_v2$. В массивах, начинающихся с букв nc, хранятся C_h-нормы, а с букв $nl2$ — $L_{2,h}$-нормы погрешностей. Буквы в окончаниях имен массивов g, $v1$ и $v2$ означают погрешность какой функции хранится в массиве. Для хранения информации о времени расчета каждого теста заводится массив $time$ размерности it_max.

В цикле, организованном для расчета всех тестов, каждый раз выполняются следующие действия.

1) Определяются параметры схемы (процедура $param\_she\_step$).

2) Для каждого узла сетки определяются его свойства (процедура $Setka$).

3) Вызывается подпрограмма поиска разностного решения (процедура $Shema$).

4) Определяются значения норм погрешностей (процедуры $Norm\_c$ и $Norm\_l2$).

Память под массивы переменных, используемых для хранения разностного решения и вспомогательной информации, отводится динамически. Все они имеют размерность числа узлов сетки, используемой в конкретном тесте. Массивы G, $V1$ и $V2$ используются для хранения разностного решения на текущем временном слое. Для хранения свойств узлов используются следующие пять массивов:

st - статус узла,

X и Y - координаты узла,

$M0L$ и $M0R$ - номера смежных узлов (узлов шаблона).

Для хранения параметров схемы используется структура P_she.

Завершается главная программа вызовом процедур записи полученных данных в файлы, которые позволяют представить результаты расчетов в виде таблиц в tex-е.

II) Процедура *param_she_step*

Процедура

$$void\, param\_she\_step(P\_she * p_s,\ P\_dif * p.int\, it\_t,\ int\, it\_sp)$$

в случае прямоугольной области задает значения элементам структуры P_she, хранящую следующие данные.

```
typedef struct
{
    int M_x;
    int M_y;
    int N;
    int Dim;
    double h_x;
    double h_y;
    double tau;
    double eta;
} P_she;
```

Через M_x, M_y и N обозначены число отрезков разбиений области по пространственным переменным и времени соответственно, а h_x, h_y и tau - шаги сетки по каждой переменной. Эти величины связаны между собой соотношениями: $M\_x \cdot h\_x = Segm\_X$, $M\_y \cdot h\_y = Segm\_Y$ и $N \cdot tau = Segm\_T$. Еще два параметра, которые храняться в P_she — Dim, обозначающий общее число узлов сетки, и нормирущий множитель eta, применяющийся при использовании исусственной вязкости.

В число аргументов процедуры *param_she_step* помимо описанной выше структуры P_she входят описанная выше структура P_dif и еще два параметра it_t и it_sp, которые задают уровень вложенности задаваемой сетки по временной и пространственной переменным соответственно.

Для областей более сложной формы чем прямоугольник для полноценного описания области и параметров схемы требуется большее число данных, хранящихся в структурах P_dif и P_she.

III) Процедура *Setka*

Процедура

$$void\, Setka(int * st,\ double * X,\ double * Y,\ int * M0L,\ int * M0R,\ P\_she * p\_s)$$

пишется в зависимости от расчетной области и краевых условий решаемой дифференциальной задачи. Ее целью является классификация каждого узела сетки. Свойства узлов записываются в массивы st, X, Y, $M0L$ и $M0R$ на места, определяемые номером узла. Напомним, что правило нумерации было определено при определении СЛАУ (7.7).

В двумерном случае, когда область Ω является прямоугольником $[0;\, a]$x$[0;\, b]$ и на всей границе задано условие прилипания, статус узла может принимать значения от 0 до 8. Определим правило определения статуса.

0 - это внутренний узел сетки.

1 - узлы, имеющие координату $x = 0$, а $y \in (0; b)$.

2 - узлы, имеющие координату $x = a$, а $y \in (0; b)$.

3 - узлы, имеющие координату $y = 0$, а $x \in (0; a)$.

4 - узлы, имеющие координату $y = b$, а $x \in (0; a)$.

5 - узел с координатами $x = 0$ и $y = 0$.

6 - узел с координатами $x = a$ и $y = 0$.

7 - узел с координатами $x = 0$ и $y = b$.

8 - узел с координатами $x = a$ и $y = b$.

Статус узла необходим для того, чтобы знать какие формулы задают коэффициенты матрицы и правую часть СЛАУ (7.7).

В массивах X и Y записываются координаты узлов. Необходимость их хранения определяется решаемой задачей.

В массивах $M0L$ и $M0R$ для узла с координатами $(x; y)$ хранятся номера узлов шаблона, имеющие координаты $(x; y-h\_y)$ и $(x; y+h\_y)$ соответственно. Если нужного узла не существует, то на соответствующее место записывается -1. Необходимость хранения массивов $M0L$ и $M0R$ появляется в случае области непрямоугольной формы.

При использовании методов с неравномерными сетками, как правило, для каждого узла требуется хранить номера всех соседних узлов, входящих в шаблон метода.

IY) Процедура *Shema*

В процедуре

$$void\ Sxema(double*G,\ double*V1,\ double*V2,\ int*st,\ double*X,\ double*Y,\ int*M0L,\ int*M0R,\ P\_she*p\_s,\ P\_dif*p\_d)$$

реализован алгоритм разностной схемы (7.2)-(7.6), который позволяет найти сеточное решение задачи (2.5)-(2.9) в момент времени T. Параметры дифференциальной задачи хранятся в структуре $Param\_gas$, а параметры сетки и свойства узлов передаются с помощью структуры $grid$ и массивов st, X, Y, $M0L$ и $M0R$. В массивах G, $V1$ и $V2$ записывается текущий временной слой разностного решения.

Для удобства работы с процедурой *Shema* текст ее программы разбит на относительно небольшие блоки, которые собираются в единое целое при помощи операции *include*.

Первый блок, хранящийся в файле perem.c, задает скалярные переменные, определяющие номера соответствующих неизвестных в векторе d СЛАУ (7.7) и их значений, использованных в шаблоне разностной схемы для узла с номером m.

Поясним сказанное. Эти переменные нужны по следующей причине. Для определения элементов матрицы и правой части СЛАУ (7.7) на очередном временном слое многократно используются значения массивов G, $V1$ и $V2$, поэтому для ускорения работы программы имеет смысл считывать нужные для очередного уравнения значения из этих массивов во вспомогательные переменные и уже эти переменные подставлять в формулы.

Названия переменных,используемых в программе, позволяют без труда определить к какой точке шаблона относится та или другая переменная. Суффиксы названий состоят из двух символов, каждый из которых равен L, 0 или R. Первый символ отвечает за переменную x, второй за переменную y. Символ 0 означает, что координата точки шаблона равна соответствующей координате центрального узла шаблона, символ L означает, что точка имеет на 1 меньшую координату, чем соответствующая координата узла узла шаблона, а R на 1 большую.

Для удобства задания разреженной матрицы A при использовании пакета Laspack определяются номера значений в векторе d функций G, V_1 и V_2, вычисленных в точках шаблона для узла с номером m. Они хранятся в соответствующих целочисленных переменных

$$mmg00,\ mmgR0,\ mmg0R,\ mmgL0,\ mmg0L,\ mmv100,\ mmv1R0,$$

$$mmv10R,\ mmv1L0,\ mmv10L,\ mmv1RR,\ mmv1LL,\ mmv1RL,\ mmv1LR,\ mmv200,$$

$$mmv2R0,\ mmv20R,\ mmv2L0,\ mmv20L,\ mmv2RR,\ mmv2LL,\ mmv2RL,\ mmv2LR.$$

Для значений функций в узлах шаблона используются действительные скалярные переменные

$$g00,\ gR0,\ g0R,\ gL0,\ g0L,$$

$$v100,\ v1R0,\ v10R,\ v1L0,\ v10L,\ v1RR,\ v1LL,\ v1RL,\ v1LR,$$

$$v200,\ v2R0,\ v20R,\ v2L0,\ v20L,\ v2RR,\ v2LL,\ v2RL,\ v2LR.$$

Второй блок, хранящийся в файле viraj.c, содержит обозначения и вычисление многочисленных констант, значения которых определяются входными параметрами процедуры, и поэтому их целесообразно вычислить заранее и потом много раз использовать при определении коэффициентов матрицы и правой части СЛАУ.

После вычисления констант идет объявление массивов для матрицы и правой части, задающих СЛАУ для пакета Laspack.

Третий блок, хранящийся в файле nachal.c, содержит цикл, задающий сеточное решение на нулевом временном слое.

Далее идет цикл по временным слоям.

Начинается он с блока, хранящегося в файле MUM.c и предназначенного для вычисления нескольких выражений, зависящих от временного слоя. Это целесообразно сделать, поскольку эти выражения неоднократно встречаются в формулах для матрицы и правой части СЛАУ.

Далее идет непосредственно задание матрицы и правой части СЛАУ. Этот кусок программы разбит по девяти файлам (caseK.c, где k=0,...,8), где k-й файл содержит формулы для задания нужных коэффициентов для узла с номером k.

После чего вызывается итерационная процедура би-сопряженных градиентов пакета Laspack и по ее окончании происходит переприсвоение массивов G, V_1 и V_2.

11 Формулы для элементов матрицы и правой части СЛАУ

Каждое из уравнений (8.2)-(8.8), записанное в конкретном узле сетки, задает одно уравнение СЛАУ (7.7). Запишем формулы, определяющие коэффициенты матрицы A и координату вектора b, в зависимости от типа узла сетки для этих уравнений в случае прямоугольной области и граничных условий прилипания

$$\hat{V}_k = 0, \qquad \mathbf{x} \in \gamma_{\bar{h}}, \qquad k = 1, 2. \tag{11.1}$$

Для удобства дальнейшей модификации программы для случаев, когда граничные условия (11.1) меняются на условия с ненулевой скоростью на границе области, уравнения

СЛАУ (7.7) будем определять по три для каждого узла сетки. В случае прямоугольной области узлы сетки делятся на 9 групп, для каждой из которых формулы задаются одинаково.

Прежде всего это внутреннии узлы. В программе такие узлы определяются нулевым значением элемента массива st с номером узла. Из уравнения (8.2) следует, что первое уравнение для любого внутреннего узла выглядит следующим образом

$$\begin{gathered}ag\_G00 \cdot \hat{g}00 + ag\_GR0 \cdot \hat{g}R0 + ag\_GL0 \cdot \hat{g}L0 + ag\_G0R \cdot \hat{g}0R + ag\_G0L \cdot \hat{g}0L \\ + ag\_V1R0 \cdot \hat{V}1R0 + ag\_V1L0 \cdot \hat{V}1L0 + ag\_V20R \cdot \hat{V}20R + ag\_V20L \cdot \hat{V}20L = bg,\end{gathered} \tag{11.2}$$

где коэффициенты определяются по формулам

$$\begin{aligned}
&ag_G00 = 4,\\
&ag_GR0 = \tfrac{\tau}{h_1}(V1R0 + V100),\\
&ag_GL0 = -\tfrac{\tau}{h_1}(V1L0 + V100),\\
&ag_G0R = \tfrac{\tau}{h_2}(V20R + V200),\\
&ag_G0L = -\tfrac{\tau}{h_2}(V20L + V200),\\
&ag_V1R0 = \tfrac{2\tau}{h_1},\\
&ag_V1L0 = -\tfrac{2\tau}{h_1},\\
&ag_V20R = \tfrac{2\tau}{h_2},\\
&ag_V20L = -\tfrac{2\tau}{h_2},\\
&bg = 4g00 + \tau g00\left(\tfrac{V1R0 - V1L0}{h_1} + \tfrac{V20R - V20L}{h_2}\right).
\end{aligned} \tag{11.3}$$

Из уравнения (8.7) получается второе уравнение для внутреннего узла

$$\begin{gathered}av1\_V100 \cdot \hat{V}100 + av1\_V1R0 \cdot \hat{V}1R0 + av1\_V1L0 \cdot \hat{V}1L0 + av1\_V10R \cdot \hat{V}10R \\ + av1\_V10L \cdot \hat{V}10L + av1\_GR0 \cdot \hat{G}R0 + av1\_GL0 \cdot \hat{G}L0 = bv1,\end{gathered} \tag{11.4}$$

где

$$\begin{aligned}
&av1_V100 = 6 + 4\tau\tilde{\mu}\left(\tfrac{4}{h_1^2} + \tfrac{3}{h_2^2}\right),\\
&av1_V1R0 = \left(\tfrac{\tau}{h_1}(V1R0 + V100) - \tfrac{8\tau\tilde{\mu}}{h_1^2}\right),\\
&av1_V1L0 = -\left(\tfrac{\tau}{h_1}(V1L0 + V100) + \tfrac{8\tau\tilde{\mu}}{h_1^2}\right),\\
&av1_V10R = \left(\tfrac{3\tau}{2h_2}(V20R + V200) - \tfrac{6\tau\tilde{\mu}}{h_2^2}\right),\\
&av1_V10L = -\left(\tfrac{3\tau}{2h_2}(V20L + V200) + \tfrac{6\tau\tilde{\mu}}{h_2^2}\right),\\
&av1_GR0 = \tfrac{3\tau p'_\rho}{h_1},\\
&av1_GL0 = -\tfrac{3\tau p'_\rho}{h_1},\\
&bv1 = 6V100 + \tfrac{3\tau}{2h_2}V100(V20R - V20L)\\
&+6\tau\left(\tfrac{\mu}{e^{g00}} - \tilde{\mu}\right)\left(\tfrac{4}{3h_1^2}(V1R0 - 2V100 + V1L0) + \tfrac{1}{h_2^2}(V10R - 2V100 + V10L)\right)\\
&+\tfrac{\tau\mu}{2e^{g00}h_1h_2}(V2RR - V2RL - V2LR + V2LL) + 6\tau f_1.
\end{aligned} \tag{11.5}$$

Аналогично из уравнения (8.8) получается третье уравнение для внутреннего узла

$$\begin{gathered}av2\_V200 \cdot \hat{V}200 + av2\_V2R0 \cdot \hat{V}2R0 + av2\_V2L0 \cdot \hat{V}2L0 + av2\_V20R \cdot \hat{V}20R \\ + av2\_V20L \cdot \hat{V}20L + av2\_G0R \cdot \hat{G}0R + av2\_G0L \cdot \hat{G}0L = bv2,\end{gathered} \tag{11.6}$$

где

$$
\begin{aligned}
& av2\_V200 = 6 + 4\tau\tilde{\mu}\left(\frac{4}{h_2^2} + \frac{3}{h_1^2}\right), \\
& av2\_V20R = \left(\frac{\tau}{h_2}(V20R + V200) - \frac{8\tau\tilde{\mu}}{h_2^2}\right), \\
& av2\_V20L = -\left(\frac{\tau}{h_2}(V20L + V200) + \frac{8\tau\tilde{\mu}}{h_2^2}\right), \\
& av2\_V2R0 = \left(\frac{3\tau}{2h_1}(V1R0 + V100) - \frac{6\tau\tilde{\mu}}{h_1^2}\right), \\
& av2\_V2L0 = -\left(\frac{3\tau}{2h_1}(V1L0 + V100) + \frac{6\tau\tilde{\mu}}{h_1^2}\right), \\
& av2\_G0R = \frac{3\tau p'_\rho}{h_2}, \\
& av2\_G0L = -\frac{3\tau p'_\rho}{h_2}, \\
& bv2 = 6V200 + \frac{3\tau}{2h_1}V200(V1R0 - V1L0) \\
& +6\tau\left(\frac{\mu}{e^{g00}} - \tilde{\mu}\right)\left(\frac{1}{h_1^2}(V2R0 - 2V200 + V2L0) + \frac{4}{3h_2^2}(V20R - 2V200 + V20L)\right) \\
& +\frac{\tau\mu}{2e^{g00}h_1h_2}(V1RR - V1RL - V1LR + V1LL) + 6\tau f_2.
\end{aligned}
\tag{11.7}
$$

Внутренние узлы составляют большую часть узлов сетки, поэтому матрица СЛАУ (7.7) имеет отличными от нуля коэффициенты девяти диагоналей в случае уравнений (11.2) и семи диагоналей для уравнений (11.4) и (11.6).

Для граничных узлов в уравнения входит меньшее число неизвестных. В качестве примера рассмотрим уравнения, соответствующие граничным узлам γ_{-1} (статус узла равен 1). Первое уравнение получается из уравнения (8.3)

$$ag\_G00 \cdot \hat{g}00 + ag\_GR0 \cdot \hat{g}R0 + ag\_V1R0 \cdot \hat{V}1R0 = bg, \tag{11.8}$$

где

$$
\begin{aligned}
& ag\_G00 = 2, \\
& ag\_GR0 = \frac{\tau}{h_1}V1R0, \\
& ag\_V1R0 = \frac{2\tau}{h_1}, \\
& bg = 2g00 + \frac{\tau}{h_1}g00 \cdot V1R0 \\
& +\frac{\tau}{2h_1}\left(G^n_{2,m_2}V1^n_{2,m_2} - 2gR0 \cdot V1R0 + (2 - g00)\cdot(V1^n_{2,m_2} - 2V1R0)\right).
\end{aligned}
\tag{11.9}
$$

В случае граничного условия (11.1) второе и третье уравнения для узлов со статусом 1 выглядят следующим образом

$$
\begin{aligned}
& V100 = 0, \\
& V200 = 0.
\end{aligned}
\tag{11.10}
$$

12 Заполнение матрицы и правой части

В процедуре shema ряд выражений, часто используемых в формулах для элементов матрицы и правой части СЛАУ (7.7), вычисляется еще до цикла по временным слоям и хранится в скалярных переменных. Перечислим эти переменные и определим выражения, значения которых в них хранятся:

$thx = \tau/h_x$,
$thy = \tau/h_y$,
$thx05 = thx/2$,
$thy05 = thy/2$,

$thx2 = 2thx$,
$thy2 = 2thy$,
$thx4 = 4thx$,
$thy4 = 4thy$,
$thx32 = 3thx/2$,
$thy32 = 3thy/2$,
$tau2 = 2\tau$,
$tau4 = 4\tau$,
$tau6 = 6\tau$,
$thxx8 = 8\tau/h_x^2$,
$thxx6 = 6\tau/h_x^2$,
$thyy8 = 8\tau/h_y^2$,
$thyy6 = 6\tau/h_y^2$,
$thxy = \tau/(2h_x h_y)$,
$Max = 3\tau p\_ro/h_x$,
$May = 3\tau p\_ro/h_y$.

Часть программы, которая вычисляет эти выражения, хранится в файле viraj.c.

Другая часть выражений, чьи значения зависят от времени, вычисляется уже внутри цикла по временным слоям, но до цикла по узлам сетки, в котором задаются матрица и правая часть СЛАУ. Часть программы, вычисляющая их, хранится в файле mum.c. Перечислим переменные, в которые записываются значения этих выражений, и формулы, их определяющие:

$MUM = \mu \max(exp(-G))$,
$MU8x = 8\tau MUM/h_x^2$,
$MU8y = 8\tau MUM/h_y^2$,
$MU6x = 6\tau MUM/h_x^2$,
$MU6y = 6\tau MUM/h_y^2$,
$MUv1 = 6. + \tau MUM\left(\dfrac{16}{h_x^2} + \dfrac{12}{h_y^2}\right)$,
$MUv2 = 6. + \tau MUM\left(\dfrac{16}{h_y^2} + \dfrac{12}{h_x^2}\right)$.

Процесс заполнения матрицы и правой части СЛАУ (7.7) осуществляется последовательно в цикле по m от 0 до $Dim-1$ для всех узлов сетки. Сначала определяется статус узла с целью установления формул, которые задают коэффициенты трех строк матрицы и трех координат вектора правой части, соответствующих данному узлу. После чего определяются значения элементов матрицы и правой части. Разберем алгоритм расчета и присвоения значений элементам матрицы и правой части в случае, если статус узла с номером m равен 0. Часть программы, отвечающая этому случаю, находится в файле case.c.

В начале задаются номера неизвестных в векторе d, соответствующих значениям функций G, $V1$ и $V2$ в точках шаблона m-го узла. Поскольку в этот момент счетчик, отвечающий за номер уравнения СЛАУ, равен номеру уравнения, записанного для функции G в m-ом узле, то номер $mmg00$ равен mm и переменную mm можно использовать в качестве номера $mmg00$. Следовательно, остальные номера неизвестных в векторе d определяются по следующим формулам:

$mmgL0 = mm - 3$,

$mmv1L0 = mm - 2,$
$mmv2L0 = mm - 1,$
$mmgR0 = mm + 3,$
$mmv1R0 = mm + 4,$
$mmv2R0 = mm + 5,$
$mmg0L = 3 * M0L[m] + 1,$
$mmv10L = mmg0L + 1,$
$mmv20L = mmv10L + 1,$
$mmg0R = 3 * M0R[m] + 1,$
$mmv10R = mmg0R + 1,$
$mmv20R = mmv10R + 1.$

Значения функций, задающих решение на n-ом временном слое, в узлах шаблона равны

$g00 = G[m],$
$v100 = V1[m],$
$v1L0 = V1[m-1],$
$v1R0 = V1[m+1],$
$v10L = V1[M0L[m]],$
$v10R = V1[M0R[m]],$
$v1LL = V1[M0L[m]-1],$
$v1RL = V1[M0L[m]+1],$
$v1LR = V1[M0R[m]-1],$
$v1RR = V1[M0R[m]+1],$
$v200 = V2[m],$
$v2L0 = V2[m-1],$
$v2R0 = V2[m+1],$
$v20L = V2[M0L[m]],$
$v20R = V2[M0R[m]],$
$v2LL = V2[M0L[m]-1],$
$v2RL = V2[M0L[m]+1],$
$v2LR = V2[M0R[m]-1],$
$v2RR = V2[M0R[m]+1].$

Используя найденные значения, определяем элементы строки матрицы и правой части уравнения для G, записанного для m-го узла. Напомним, что нужные формулы легко получаются из вида уравнения (8.2).

Сначала задаем число ненулевых элементов в строке матрицы A с номером mm равным 9:

$Q\_SetLen(\&A, mm, 9);.$

Затем задаем первый ненулевой элемент $a_{mm,mm}$ (коэффициент при $\hat{G}(m)$) равным 4:

$Q\_SetEntry(\&A, mm, 0, mm, 4.);.$

Третий аргумент команды равен 0, т.к. это счетчик ненулевых элементов матрицы, а его значения начинаются с нуля. После чего вычисляем коэффициент при $\hat{G}(MR0[m])$ и присваиваем полученное значение $a_{mm,mmgR0}$:

$tmp = thx * (v100 + v1R0);,$

$Q\_SetEntry(\&A, mm, 1, mmgR0, tmp);.$

Аналогично поступаем для элементов матрицы $a_{mm,mmgL0}$, $a_{mm,mmg0R}$, $a_{mm,mmg0L}$, $a_{mm,mmv1R0}$, $a_{mm,mmv20R}$, $a_{mm,mmv1L0}$ и $a_{mm,mmv20L}$:

$tmp = -thx * (v100 + v1L0);,$
$Q\_SetEntry(\&A, mm, 2, mmgL0, tmp);,$
$tmp = thy * (v200 + v20R);,$
$Q\_SetEntry(\&A, mm, 3, mmg0R, tmp);,$
$tmp = -thy * (v200 + v20L);,$
$Q\_SetEntry(\&A, mm, 4, mmg0L, tmp);,$
$Q\_SetEntry(\&A, mm, 5, mmv1R0, thx2);,$
$Q\_SetEntry(\&A, mm, 6, mmv20R, thy2);,$
$Q\_SetEntry(\&A, mm, 7, mmv1L0, -thx2);,$
$Q\_SetEntry(\&A, mm, 8, mmv20L, -thy2);.$

В конце вычисляем и присваиваем значение b_{mm}:

$tmp = g00*(4.+thx*(v1R0-v1L0)+thy*(v20R-v20L))+tau4*Func\_0(tt, xx, yy);,$
$V\_SetCmp(\&B, mm, tmp);.$

Сделаем важное замечание. Гладкие функции, взятые в тестовых примерах в качестве точного решения задачи (2.5)-(2.9), строго говоря не являются им, поскольку они удовлетворяют системе (2.5) с некоторыми правыми частями не равными нулю не только в уравнениях для скорости, но и для уравнения неразрывности. Поэтому в правой части уравнений (8.2) появляется слагаемое с $Func\_0(tt, xx, yy)$.

После заданий коэффициентов уравнения (8.2) для m-го узла, счетчик номера уравнения увеличивается на единицу $mm++$; и начинается определение элементов строки матрицы и правой части с номером элемента $\hat{V}1(m)$ в векторе неизвестных. Приведем соответствующую часть программы:

$Q\_SetLen(\&A, mm, 7);$
$Q\_SetEntry(\&A, mm, 0, mm, MUv1);$
$tmp = thx * (v100 + v1R0) - MU8x;$
$Q\_SetEntry(\&A, mm, 1, mmv1R0, tmp);$
$tmp = thy32 * (v200 + v20R) - MU6y;$
$Q\_SetEntry(\&A, mm, 2, mmv10R, tmp);$
$tmp = Max;$
$Q\_SetEntry(\&A, mm, 3, mmgL0, -tmp);$
$Q\_SetEntry(\&A, mm, 4, mmgR0, tmp);$
$tmp = -thx * (v100 + v1L0) - MU8x;$
$Q\_SetEntry(\&A, mm, 5, mmv1L0, tmp);$
$tmp = -thy32 * (v200 + v20L) - MU6y;$
$Q\_SetEntry(\&A, mm, 6, mmv10L, tmp);$
$tmp1 = mu * exp(-g00);$
$tmp = v100 * (6. + thy32 * (v20R - v20L))$
$-(MUM-tmp1)*(thxx8*(v1R0-2*v100+v1L0)+thyy6*(v10R-2*v100+v10L))$
$+thxy * (v2RR + v2LL - v2RL - v2LR) * tmp1 + tau6 * Func\_1(tt, xx, yy);$
$V\_SetCmp(\&B, mm, tmp);$

После чего, увеличив mm еще на 1, определяем коэффициенты для уравнения с номером равным номеру элемента $\hat{V}2(m)$ в векторе неизвестных.

$Q\_SetLen(\&A, mm, 7);$
$Q\_SetEntry(\&A, mm, 0, mm, MUv2);$
$tmp = thx32 * (v100 + v1R0) - MU6x;$
$Q\_SetEntry(\&A, mm, 1, mmv2R0, tmp);$
$tmp = thy * (v200 + v20R) - MU8y;$

$Q\_SetEntry(\&A, mm, 2, mmv20R, tmp);$
$tmp = May;$
$Q\_SetEntry(\&A, mm, 3, mmg0L, -tmp);$
$Q\_SetEntry(\&A, mm, 4, mmg0R, tmp);$
$tmp = -thx32 * (v100 + v1L0) - MU6x;$
$Q\_SetEntry(\&A, mm, 5, mmv2L0, tmp);$
$tmp = -thy * (v200 + v20L) - MU8y;$
$Q\_SetEntry(\&A, mm, 6, mmv20L, tmp);$
$tmp = v200 * (6. + thx32 * (v1R0 - v1L0))$
$-(MUM - tmp1) * (thxx6 * (v2R0 - 2 * v200 + v2L0) + thyy8 * (v20R - 2 * v200 + v20L))$
$+thxy * (v1RR + v1LL - v1RL - v1LR) * tmp1 + tau6 * Func\_2(tt, xx, yy);$
$V\_SetCmp(\&B, mm, tmp);$

В конце шага цикла счетчик mm снова увеличивается на 1 и начинается новый шаг, в процессе которого задаются коэффициенты следующих трех уравнений, соответствующих $(m+1)$-му узлу сетки.

13 Тест

Описанная выше программа позволяет создать файлы, в которых содержатся таблицы погрешностей численного интегрирования на вложенных сетках для различных компонент решения задачи (7.1),(2.8), (2.9) в нормах $\|\cdot\|_{C_h}$ и $\|\cdot\|_{L_{2,h}}$. Приведем примеры таблиц для точного решения, задаваемого следующими функциями

$$u_1(t, x_1, x_2) = \sin(2\pi x_1)\sin(2\pi x_2)e^t,$$

$$u_2(t, x_1, x_2) = \sin(2\pi x_1)\sin(2\pi x_2)e^{-t},$$

$$\rho(t, x_1, x_2) = (\cos(2\pi x_1) + 3/2)(\sin(2\pi x_2) + 3/2)e^t,$$

и параметров газа $p_\rho = 10$ и $\mu = 0.1$.

$\|g - ln(\rho)\|_{C_h}$

$\tau \setminus h$	0.05	0.025	0.0125	0.00625
0.05000	$1.533e-001$	$1.059e-001$	$9.675e-002$	$9.525e-002$
0.02500	$1.206e-001$	$6.518e-002$	$5.427e-002$	$5.302e-002$
0.01250	$1.044e-001$	$4.401e-002$	$2.854e-002$	$2.745e-002$
0.00625	$9.611e-002$	$3.449e-002$	$1.679e-002$	$1.423e-002$

$\|g - ln(\rho)\|_{L_{2,h}}$

$\tau \setminus h$	0.05	0.025	0.0125	0.00625
0.05000	$5.721e-002$	$4.763e-002$	$4.705e-002$	$4.705e-002$
0.02500	$3.834e-002$	$2.639e-002$	$2.554e-002$	$2.556e-002$
0.01250	$2.893e-002$	$1.452e-002$	$1.324e-002$	$1.322e-002$
0.00625	$2.477e-002$	$8.679e-003$	$6.785e-003$	$6.719e-003$

$$\|v_1 - u_1\|_{C_h}$$

$\tau \setminus h$	0.05	0.025	0.0125	0.00625
0.05000	$1.997e-001$	$1.911e-001$	$1.912e-001$	$1.915e-001$
0.02500	$1.183e-001$	$1.005e-001$	$1.011e-001$	$1.015e-001$
0.01250	$9.124e-002$	$4.955e-002$	$4.982e-002$	$5.037e-002$
0.00625	$7.818e-002$	$2.491e-002$	$2.475e-002$	$2.534e-002$

$$\|v_1 - u_1\|_{L_{2,h}}$$

$\tau \setminus h$	0.05	0.025	0.0125	0.00625
0.05000	$7.707e-002$	$7.414e-002$	$7.548e-002$	$7.623e-002$
0.02500	$4.071e-002$	$3.646e-002$	$3.774e-002$	$3.833e-002$
0.01250	$2.491e-002$	$1.721e-002$	$1.822e-002$	$1.875e-002$
0.00625	$2.072e-002$	$8.476e-003$	$8.805e-003$	$9.271e-003$

$$\|v_2 - u_2\|_{C_h}$$

$\tau \setminus h$	0.05	0.025	0.0125	0.00625
0.05000	$3.961e-001$	$3.539e-001$	$3.489e-001$	$3.479e-001$
0.02500	$2.344e-001$	$1.920e-001$	$1.875e-001$	$1.869e-001$
0.01250	$1.369e-001$	$9.970e-002$	$9.642e-002$	$9.603e-002$
0.00625	$8.980e-002$	$5.271e-002$	$4.904e-002$	$4.873e-002$

$$\|v_2 - u_2\|_{L_{2,h}}$$

$\tau \setminus h$	0.05	0.025	0.0125	0.00625
0.05000	$1.439e-001$	$1.349e-001$	$1.353e-001$	$1.361e-001$
0.02500	$7.960e-002$	$7.009e-002$	$7.030e-002$	$7.078e-002$
0.01250	$4.442e-002$	$3.543e-002$	$3.563e-002$	$3.601e-002$
0.00625	$2.731e-002$	$1.769e-002$	$1.780e-002$	$1.813e-002$

Таблицы, приведенные выше, были получены с параметрами RTCAccuracy равным 10^{-8} и максимальным числом итераций 2000.

Описанный выше тест позволяет заметить большинство ошибок, неизбежно совершаемых при программировании алгоритма. Важным свойством схемы является теоретически доказанная сходимость к точному гладкому решению с порядком $\tau + h^2$ в частности в нормах $\|\cdot\|_{C_h}$ и $\|\cdot\|_{L_{2,h}}$ [3], которое подтверждается результатами теста.

14 Методы решения СЛАУ

СЛАУ (7.7), которую приходится решать на каждом временном слое, очень большой размерности и сильно разрежена, однако не является трехдиагональной. С другой стороны, можно считать, что всегда известно хорошее приближение для решения задачи (7.7) — сеточное решение на n-ом слое. Поэтому для решения СЛАУ (7.7) часто используют не прямые методы решения, а итерационные, разработанные на основе метода сопряженных градиентов (CG). Сам метод сопряженных градиентов применим для решения систем с симметричными матрицами. Для решения систем с несимметричными матрицами был разработан метод би-сопряженных градиентов (BiCG). Для его реализации требуется умножать вектора как на матрицу A, так и на матрицу A^*, что очень затратно, если матрица сильно разрежена и хранится в виде нескольких векторов. С целью устранения отмеченного недостатка BiCG были созданы его модификации, реализация которых не требует умножения на сопряженную матрицу. Опишем алгоритмы двух таких методов[4].

Conjugate Gradient Squared Method (CGS)

1. Задается начальное приближение для вектора неизвестных d_0 и произвольный вектор $z^a \neq 0$. Вычисляется невязка $r_0 = b - Ad_0$ и полагается $p_0 = u_0 = r_0$.

2. Далее организовывается итерационный процесс для $j = 0, 1, \ldots$, состоящий из последовательности действий:

2.1 $\alpha_j := (r_j, z^a)/(Ap_j, z^a)$,
2.2 $q_j := u_j - \alpha_j Ap_j$,
2.3 $d_{j+1} := d_j + \alpha_j(u_j + q_j)$,
2.4 $r_{j+1} := r_j - \alpha_j A(u_j + q_j)$,
2.5 $\beta_j := (r_{j+1}, z^a)/(r_j, z^a)$,
2.6 $u_{j+1} := r_{j+1} + \beta_j q_j$,
2.7 $p_{j+1} := u_{j+1} + \beta_j(q_j + \beta_j p_j)$.

Biconjugate Stabilized Method (BiCGSTAB)

1. Задается начальное приближение для вектора неизвестных d_0 и произвольный вектор $z^a \neq 0$. Вычисляется невязка $r_0 = b - Ad_0$ и полагается $p_0 = r_0$.

2. Далее организовывается итерационный процесс для $j = 0, 1, \ldots$, состоящий из последовательности действий:

2.1 $\alpha_j := (r_j, z^a)/(Ap_j, z^a)$,
2.2 $s_j := r_j - \alpha_j Ap_j$,
2.3 $w_j := (As_j, s_j)/(As_j, As_j)$,
2.4 $d_{j+1} := d_j + \alpha_j p_j + w_j s_j$,
2.5 $r_{j+1} := s_j - w_j As_j$,
2.6 $\beta_j := (r_{j+1}, z^a)/(r_j, z^a) \cdot \alpha_j / w_j$,
2.7 $p_{j+1} := r_{j+1} + \beta_j(p_j - w_j Ap_j)$.

При решении нестационарных задач математической физики начальное приближение d_0 берется равным решению на предыдущем временном слое. Вектор z^a обычно выбирают либо единичным ортом по одной из осей координат, либо вектором, у которого все координаты равны, а евклидова норма равна 1.

Итерационный процесс заканчивается, когда норма невязки не уменьшится в заданное число раз.

Применение пакета Laspack для решения СЛАУ (7.7) экономит время за счет отказа от написания программы, решающей получающиеся задачи. Это дает положительный эффект, если требуется создать программу для однократного использования. При необходимости в последующем проводить многочисленные расчеты для конкретной системы часто бывает целесообразно потратить время на разработку собственной программы, реализующей итерационнный метод. Приведем два соображения в пользу такого решения.

1. Можно существенно сэкономить отводимую память за счет сокращения числа массивов размерности Dim. Ведь как видно из вышеописанного примера, многие из диагоналей матрицы A состоят из одних и тех же чисел, которые вычисляются либо в начале каждого шага цикла, либо вообще перед его началом. Поэтому, вместо вектора большой размерности достаточно использовать всего одну скалярную переменную.

2. Конкретный вид матрицы A позволяет провести оптимизацию умножения на вектор, которое требуется производить неоднократно на каждом итерационном шаге.

Используем схему с двумя пространственными переменными для иллюстрации, как в конкретном случае можно реализовать эти соображения.

Основная часть вычислительных усилий на совершение одного шага итерационных методов, в основе которых лежит идея метода сопряженных градиентов, состоит в реализации умножения матрицы A на вектор. Причем за один шаг эта операция задействована дважды. В целях осуществить эту операцию наиболее эффективно предлагается следующий алгоритм.

1. Для хранения матрицы A создаются 23 массива размерности Dim с именами ag_G00, ag_GR0, ag_GL0, ag_G0R, ag_G0L, ag_V1R0, ag_V1L0, ag_V20R, ag_V20L, $av1\_V100$, $av1\_V1R0$, $av1\_V1L0$, $av1\_V10R$, $av1\_V10L$, $av1\_GR0$, $av1\_GL0$, $av2\_V200$, $av2\_V20R$, $av2\_V20L$, $av2\_V2R0$, $av2\_V2L0$, $av2\_G0R$, $av2\_G0L$. Для хранения правой части СЛАУ (7.7) создаются массивы bg, $bv1$ и $bv2$ также размерности Dim. Элементам этих массивов с соответствующим номером узла присваиваются значения коэффициентов уравнений СЛАУ (7.7), задаваемых для внутренних узлов формулами (11.3), (11.5) и (11.7), а для граничных узлов формулой (11.9) и ее аналогами. Безусловно, вследствии того, что в граничных узлах отличных от нуля коэффициентов меньше, часть элементов этих массивов не будет использована, но такой перерасход памяти не является критическим. Более того, для реализации схемы (7.2)-(7.5) часть из этих массивов можно заменить на скалярные переменные, т.к. значение элементов не зависит от номера узла, но могут отличаться для узлов, имеющих разный статус.

2. Умножение матрицы A на вектор при таком хранении матрицы A нужно организовывать в цикле по узлам, для каждого узла вычисляя три координаты получающегося вектора.

15 Использование предобуславливателей

Скорость сходимости итерационных методов снижается при увеличении числа обусловленности матрицы СЛАУ. Поскольку задачи, которые приходится решать на практике, часто приводят к СЛАУ с большим разбросом собственных значений у матриц, часто применяются итерационные методы с использованием спектрально-эквивалентных операторов ([6]). Решение системы (7.7) заменяется на решение задачи

$$B^{-1}Ad = B^{-1}b, \tag{15.1}$$

где матрица B такова, что система

$$By = z \tag{15.2}$$

может быть решена достаточно эффективно, а число обусловленности у матрицы $B^{-1}A$ существенно меньше, чем у матрицы A. Матрицу B называют предобуславливателем.

В настоящее время накоплен большой опыт выбора предобуславливателей. Рассмотрим два наиболее простые в реализации способа построения предобуславливателя.

Предобуславливатель Якоби

$$B = \frac{1}{\omega} diag\,(\,A\,) \tag{15.3}$$

Для решения системы (15.2) нужно всего лишь умножить m-ую координату вектора z на дробь $\frac{\omega}{a_{m,m}}$ для всех m.

Предобуславливатель SSOR
(Symmetric Successive Over-Relaxation method)

Представим матрицу A в виде суммы $A = L + D + R$, где L — нижнетреугольная матрица, D — диагональная матрица, а R — верхнетреугольная матрица. В качестве предобуславливателя в методе $SSOR$ используют следующую матрицу

$$B = \frac{1}{2-\omega}\,\left(\frac{D}{\omega} + L\right)\left(\frac{D}{\omega}\right)^{-1}\left(\frac{D}{\omega} + R\right). \tag{15.4}$$

Для решения системы (15.2) требуется последовательно решить три системы. В двух из них матрицы треугольные, а в одной вообще диагональная.

Для реализации методов с описанными предобуславливателями (15.3) и (15.4) не требуется дополнительная память. Нужно только продумать алгоритм шага итерации, который позволяет осуществить выбранный итерационный метод с матрицей $B^{-1}A$ при условии, что вся информация о предобуславливателе хранится в матрице A.

16 Разностная схема для расчета каверны

Приведем для примера изменения разностной схемы, которые необходимо сделать, чтобы провести расчет течения в двумерной прямоугольной каверне. Эта задача ставится в области

$$\Omega = [0;1] \times [0;1]$$

для системы уравнений (2.5) с $\mathbf{f} = 0$ со следующими начальными и граничными условиями:

$$\begin{aligned}
&(\rho, \mathbf{u})|_{t=0} = (\rho_0, \mathbf{0}),\ (x_1, x_2) \in \Omega;\\
&u_1(t, x_1, x_2) = w, \quad (t, x_1, x_2) \in [0, T] \times \Gamma^{x_2+}, \quad \Gamma^{x_2+} \equiv \{(x_1, x_2) \in \partial\Omega,\ x_2 = 1\};\\
&u_1(t, x_1, x_2) = 0, \quad (t, x_1, x_2) \in [0, T] \times (\partial\Omega \setminus \Gamma^{x_2+});\\
&u_2(t, x_1, x_2) = 0, \quad (t, x_1, x_2) \in [0, T] \times \partial\Omega;\\
&\rho(t, 0, 1) = \rho_0, \quad t \in [0; T].
\end{aligned} \tag{16.1}$$

Величины ρ_0 и w считаются положительными константами и их значения задаются вместе с параметрами области и газа.

Для задачи о каверне по сравнению с простейшей задачей (2.5)-(2.9) меняется уравнение для функции g (логарифма плотности) на участке границы Γ^{x_2+}:

$$\frac{\partial g}{\partial t} + w\frac{\partial g}{\partial x_1} + \frac{1}{2}\frac{\partial u_2 g}{\partial x_2} + \frac{2-g}{2}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0. \tag{16.2}$$

Изменения в схеме для уравнения неразрывности в узлах $m_2 = M_2$:

$$G_{0,M_2} = \rho_0;$$

$$G_t + w\hat{G}_{\overset{0}{x_1}} + 0.5\left((V_2\hat{G})_{\bar{x}_2} + 2(\hat{V}_2)_{\bar{x}_2} - G(V_2)_{\bar{x}_2}\right) + 0.25h_2((GV_2)_{\bar{x}_2\bar{x}_2} + (2-G)\,(V_2)_{\bar{x}_2\bar{x}_2}) =$$

$$= 2\tau\eta(\Phi_{s_1}\hat{G}_{x_1})_{\bar{x}_1} - \frac{2\tau\eta}{h_2}\Phi_{\bar{s}_2}\hat{G}_{\bar{x}_2}, \quad m_1 = 1, \ldots, M_1 - 1, \quad m_2 = M_2; \tag{16.3}$$

$$G_t + w\hat{G}_{\bar{x}_1} + \frac{h_1 w}{4}G_{\bar{x}_1\bar{x}_1} = -\frac{2\tau\eta}{h_1}\Phi_{\bar{s}}\hat{G}_{\bar{x}_1,M}, \quad m_1 = M_1,\ m_2 = M_2. \tag{16.4}$$

Разностная аппроксимация (16.3) приводит к уравнению СЛАУ (7.7) следующего вида

$$ag\_G00\cdot\hat{g}00 + ag\_GR0\cdot\hat{g}R0 + ag\_GL0\cdot\hat{g}L0 + ag\_G0L\cdot\hat{g}0L + ag\_V20L\cdot\hat{V}20L = bg, \tag{16.5}$$

коэффициенты которого определяются по формулам

$$\begin{aligned}
&ag_G00 = 1.0 + \frac{2\tau^2\eta}{h_x^2}(\Phi R0 + \Phi L0) + \frac{2\tau^2\eta}{h_y^2}\Phi L0,\\
&ag_GR0 = \frac{w\tau}{2h_1} - \frac{2\tau^2\eta}{h_x^2}\Phi R0,\\
&ag_GL0 = -\frac{w\tau}{2h_1} - \frac{2\tau^2\eta}{h_x^2}\Phi L0,\\
&ag_G0L = -\frac{\tau}{2h_2}V20L - \frac{2\tau^2\eta}{h_y^2}\Phi 0L,\\
&ag_V20L = -\frac{\tau}{h_2},\\
&bg = g00 - \frac{\tau}{2h_2}g00\cdot V1L0\\
&-\frac{\tau}{4h_2}\left(g_{m_1,M_2-2}V2_{m_1,M_2-2} - 2\,g0L\cdot V20L + (2-g00)(V2_{m_1,M_2-2} - 2V20L)\right).
\end{aligned} \tag{16.6}$$

В формулах (16.6) через Ф?? были обозначены величины коэффициента искусственной вязкости в соответствующих узлах шаблона.

Аналогично из разностной аппроксимации (16.4) можно получить соответствующее уравнение СЛАУ (7.7).

Поскольку правая часть системы уравнений (2.5) и граничные условия не зависят от времени, решение задачи (2.5),(16.1) с течением времени также становится стационарным. Это установившееся со временем течение принято изображать для описания результатов счета. Наиболее наглядно иллюстрируют свойства этого течения линии тока (линии уровня функции модуля вектора с указанием направления вектора) и двумерный график функции плотности. Течение считают установившимся, если норма разности между решениями на двух соседних временных слоях остается меньше заданной малой величины на протяжении нескольких временных шагов.

В заключении кратко опишем основные действия, которые нужно проделать, чтобы из программы, расчитывающей тест для гладких функций, получить прорамму для расчета течения газа в каверне.

1) Изменить главную программу, чтобы она проводила один расчетный тест. Результатом расчета должены быть файлы rho.res и v.res, которых должны быть записаны сеточные функции плотности и вектора скорости соответственно в момент времени, когда решение можно считать установившимся.

2) Убрать из файла func.c функции, вычисляющие точное решение и соответствующие правые части.

3) В процедуре shema

а) в файле nachal.c задать новые граничные условия;

б) изменить расчетные формулы в файлах case4.c, case7.c, case8.c, а в остальных файлах case?.c убрать вызовы функций f_k $(k = 0, \dots, 2)$ и поменять задание граничных условий.

4) В формулах файлов case?.c добавить слагаемые, отвечающие за искусственную вязкость. Параметр η задавать в структуре grid. Для удобства вычисления коэффициента искусственной вязкости рекомендуется задать в файле viraj.c скалярные переменные

$$thxe = \frac{\eta\tau^2}{h_x^2}, \qquad thye = \frac{\eta\tau^2}{h_y^2},$$

а также в файле perem.c завести переменные $vz?? = \Phi?? \cdot th?e$, в которые будут записываться значения коэффициента вязкости в узлах шаблона.

5) В конце процедуры shema после расчета очередного временного слоя сделать проверку того, что течение можно считать установившимся.

17 Варианты областей и граничных условий

Компоненты функции скорости на границе области Ω будем считать равными нулю, если явно не задано другое условие. На границе, где вектор скорости направлен во внутрь области, будем считать известной функцию плотности, положив ее значения равными ρ_γ. На остальных участках границы функция плотности считается неизвестной и подлежит определению.

Обозначим через Ω_{nm} квадрат, координаты точек которого удовлетворяют неравенствам $n\pi < x < (n+1)\pi$ и $m\pi < y < (m+1)\pi$. Множества точек, составляющие стороны квадрата Ω_{nm} обозначим Γ_{nm}^{x-}, Γ_{nm}^{x+}, Γ_{nm}^{y-} и Γ_{nm}^{y+}, где индекс x или y означает какая из координат на стороне является постоянной, а $+$ или - означает максимальное или минимальное значение принимает эта координата.

Перечислим примеры областей Ω и граничных условий на функцию скорости, которые отличны от нулевых.

1. $\bar\Omega = \bar\Omega_{00} \cup \bar\Omega_{01} \cup \bar\Omega_{11} \cup \bar\Omega_{21}$, $u_1|_{\Gamma_{00}^{x-} \cup \Gamma_{01}^{x-}} = w$, $\frac{\partial u_1}{\partial x}|_{\Gamma_{21}^{x+}} = 0$.
2. $\bar\Omega = \bar\Omega_{00} \cup \bar\Omega_{10} \cup \bar\Omega_{11} \cup \bar\Omega_{20} \cup \bar\Omega_{21}$, $u_1|_{\Gamma_{01}^{x-}} = w$, $\frac{\partial u_1}{\partial x}|_{\Gamma_{20}^{x+} \cup \Gamma_{21}^{x+}} = 0$.
3. $\bar\Omega = \bar\Omega_{02} \cup \bar\Omega_{12} \cup \bar\Omega_{11} \cup \bar\Omega_{10}$, $u_1|_{\Gamma_{02}^{x-}} = w$, $\frac{\partial u_2}{\partial y}|_{\Gamma_{10}^{y-}} = 0$.
4. $\bar\Omega = \bar\Omega_{01} \cup \bar\Omega_{11} \cup \bar\Omega_{10} \cup \bar\Omega_{20}$, $u_1|_{\Gamma_{01}^{x-}} = w$, $\frac{\partial u_1}{\partial x}|_{\Gamma_{20}^{x+}} = 0$.
5. $\bar\Omega = (\bar\Omega_{00} \cup \bar\Omega_{10} \cup \bar\Omega_{01} \cup \bar\Omega_{11}) \setminus \Gamma_{00}^{x+}$, $u_2|_{\Gamma_{00}^{y-}} = w$, $\frac{\partial u_2}{\partial y}|_{\Gamma_{10}^{y-}} = 0$.
6. $\bar\Omega = \bar\Omega_{00} \cup \bar\Omega_{10} \cup \bar\Omega_{20} \cup \bar\Omega_{11}$, $u_1|_{\Gamma_{00}^{x-}} = w$, $\frac{\partial u_2}{\partial y}|_{\Gamma_{11}^{y+}} = 0$, $\frac{\partial u_1}{\partial x}|_{\Gamma_{20}^{x+}} = 0$.
7. $\bar\Omega = \bar\Omega_{01} \cup \bar\Omega_{10} \cup \bar\Omega_{11} \cup \bar\Omega_{12}$, $u_1|_{\Gamma_{01}^{x-}} = w$, $\frac{\partial u_2}{\partial y}|_{\Gamma_{12}^{y+}} = 0$, $\frac{\partial u_2}{\partial y}|_{\Gamma_{10}^{y-}} = 0$.
8. $\bar\Omega = \bar\Omega_{02} \cup \bar\Omega_{12} \cup \bar\Omega_{22} \cup \bar\Omega_{11} \cup \bar\Omega_{21} \cup \bar\Omega_{10} \cup \bar\Omega_{20}$, $u_1|_{\Gamma_{02}^{x-}} = w$, $\frac{\partial u_2}{\partial y}|_{\Gamma_{10}^{y-} \cup \Gamma_{y0}^{2-}} = 0$.
9. $\bar\Omega = \bar\Omega_{01} \cup \bar\Omega_{02} \cup \bar\Omega_{11} \cup \bar\Omega_{12} \cup \bar\Omega_{20} \cup \bar\Omega_{21} \cup \bar\Omega_{22}$, $u_1|_{\Gamma_{01}^{x-} \cup \Gamma_{02}^{x-}} = w$, $\frac{\partial u_2}{\partial y}|_{\Gamma_{20}^{y-}} = 0$.
10. $\bar\Omega = \bar\Omega_{01}\bar\Omega_{02} \cup \bar\Omega_{11} \cup \bar\Omega_{12} \cup \bar\Omega_{10} \cup \bar\Omega_{20}$, $u_1|_{\Gamma_{01}^{x-} \cup \Gamma_{02}^{x-}} = w$, $\frac{\partial u_1}{\partial x}|_{\Gamma_{20}^{x+}} = 0$.
11. $\bar\Omega = \bar\Omega_{00} \cup \bar\Omega_{01} \cup \bar\Omega_{11} \cup \bar\Omega_{21} \cup \bar\Omega_{20}$, $u_1|_{\Gamma_{00}^{x-} \cup \Gamma_{01}^{x-}} = w$, $\frac{\partial u_1}{\partial x}|_{\Gamma_{20}^{x+} \cup \Gamma_{21}^{x+}} = 0$.

12. $\bar\Omega=\bar\Omega_{00}\cup\bar\Omega_{10}\cup\bar\Omega_{11}\cup\bar\Omega_{20}\cup\bar\Omega_{21}$, $u_1|_{\Gamma^{x-}_{00}\cup\Gamma^{x-}_{01}}=w$, $\frac{\partial u_2}{\partial y}|_{\Gamma^{y-}_{20}}=0$.
13. $\bar\Omega=\bar\Omega_{01}\cup\bar\Omega_{11}\cup\bar\Omega_{21}\cup\bar\Omega_{22}\cup\bar\Omega_{10}\cup\bar\Omega_{20}$, $u_1|_{\Gamma^{x-}_{01}}=w$, $\frac{\partial u_2}{\partial y}|_{\Gamma^{y-}_{10}\cup\Gamma^{y-}_{20}\cup\Gamma^{y+}_{22}}=0$.
14. $\bar\Omega=\bar\Omega_{01}\cup\bar\Omega_{11}\cup\bar\Omega_{21}\cup\bar\Omega_{22}\cup\bar\Omega_{10}\cup\bar\Omega_{20}$. $u_2|_{\Gamma^{y-}_{10}\cup\Gamma^{y-}_{20}}=w$, $\frac{\partial u_2}{\partial y}|_{\Gamma^{y+}_{22}}=0$, $\frac{\partial u_1}{\partial x}|_{\Gamma^{x-}_{01}}=0$.
15. $\bar\Omega=\bar\Omega_{00}\cup\bar\Omega_{10}\cup\bar\Omega_{20}\cup\bar\Omega_{11}$, $u_1|_{\Gamma^{x-}_{00}}=w$, $u_2|_{\Gamma^{y+}_{11}}=w$, $\frac{\partial u_1}{\partial x}|_{\Gamma^{x+}_{20}}=0$.
16. $\bar\Omega=\bar\Omega_{00}\cup\bar\Omega_{01}\cup\bar\Omega_{02}\cup\bar\Omega_{11}\cup\bar\Omega_{20}\cup\bar\Omega_{21}\cup\bar\Omega_{22}$, $u_1|_{\Gamma^{x-}_{00}\cup\Gamma^{x-}_{01}\cup\Gamma^{x-}_{02}}=w$, $\frac{\partial u_1}{\partial x}|_{\Gamma^{x+}_{20}\cup\Gamma^{x+}_{21}\cup\Gamma^{x+}_{22}}=0$.
17. $\bar\Omega=\bar\Omega_{00}\cup\bar\Omega_{01}\cup\bar\Omega_{02}\cup\bar\Omega_{11}\cup\bar\Omega_{20}\cup\bar\Omega_{21}\cup\bar\Omega_{22}$, $u_1|_{\Gamma^{x-}_{00}\cup\Gamma^{x-}_{01}\cup\Gamma^{x-}_{02}}=w$, $\frac{\partial u_2}{\partial y}|_{\Gamma^{y+}_{20}}$.
18. $\bar\Omega=\bar\Omega_{00}\cup\bar\Omega_{01}\cup\bar\Omega_{02}\cup\bar\Omega_{10}\cup\bar\Omega_{12}\cup\bar\Omega_{20}\cup\bar\Omega_{21}\cup\bar\Omega_{22}$,
$u_1|_{\Gamma^{x-}_{00}\cup\Gamma^{x-}_{01}\cup\Gamma^{x-}_{02}}=w$, $\frac{\partial u_1}{\partial x}|_{\Gamma^{x+}_{20}\cup\Gamma^{x+}_{21}\cup\Gamma^{x+}_{22}}=0$.
19. $\bar\Omega=\bar\Omega_{00}\cup\bar\Omega_{01}\cup\bar\Omega_{02}\cup\bar\Omega_{10}\cup\bar\Omega_{12}\cup\bar\Omega_{20}\cup\bar\Omega_{22}$, $u_1|_{\Gamma^{x-}_{00}\cup\Gamma^{x-}_{01}\cup\Gamma^{x-}_{02}}=w$, $\frac{\partial u_1}{\partial x}|_{\Gamma^{x+}_{20}\cup\Gamma^{x+}_{21}\cup\Gamma^{x+}_{22}}=0$.
20. $\bar\Omega=\bar\Omega_{01}\cup\bar\Omega_{02}\cup\bar\Omega_{10}\cup\bar\Omega_{11}\cup\bar\Omega_{12}\cup\bar\Omega_{20}\cup\bar\Omega_{21}$, $u_1|_{\Gamma^{x-}_{01}\cup\Gamma^{x-}_{02}}=w$, $\frac{\partial u_1}{\partial x}|_{\Gamma^{x+}_{20}\cup\Gamma^{x+}_{21}}=0$.

Параметр w следует в тестах брать равным $0,1$ и 1, а ρ_γ равным 1.

18 Разностная схема ПЛОТНОСТЬ-ИМПУЛЬС

Сеточная функция $\mathbf{V}$, приближающая функцию вектора скорости $\mathbf{u}$, определяется в узлах сетки $\bar Q_{\tau\bar h}$, а значения функции H, приближающей функцию плотности ρ, ищутся в узлах сетки $Q^{1/2}_{\tau\bar h}$ по следующей схеме, аппроксимирующей систему (2.7)

$$\begin{aligned}
&H_t+(\sigma_1\{\hat H,V_{1s_2}\}V_{1s_2})_{x_1}+(\sigma_2\{\hat H,V_{2s_1}\}V_{2s_1})_{x_2}=0,\qquad \mathbf{x}\in\Omega^{1/2}_{\bar h};\\
&(H_{\bar s_1\bar s_2}V_1)_t+0,5(\sigma_1\{\hat H_{\bar s_2}\hat V_1,V_1\}V_1)_{x_1}+0,5(\sigma_1\{\hat H_{\bar s_2}\hat V_1^{(+1_1)},V_1\}V_1)_{\bar x_1}+\\
&+0,5(\sigma_2\{\hat H_{\bar s_1}\hat V_2,V_1\}V_1)_{x_2}+0,5(\sigma_2\{\hat H_{\bar s_1}\hat V_2^{(+1_2)},V_1\}V_1)_{\bar x_2}+\frac{\gamma}{\gamma-1}\hat H_{\bar s_1\bar s_2}((\hat H_{\bar s_2})^{\gamma-1})_{\bar x_1}=\\
&=\mu\left(\tfrac{4}{3}(\hat V_1)_{x_1\bar x_1}+(\hat V_1)_{x_2\bar x_2}\right)+\frac{\mu}{3}(V_2)_{\overset{0}{x}_1\overset{0}{x}_2}+\hat f_1\hat H_{\bar s_1\bar s_2},\qquad \text{при } \hat H_{\bar s_1\bar s_2}\neq 0,\\
&\hat V_1=0,\qquad \text{при } \hat H_{\bar s_1\bar s_2}=0,\qquad \mathbf{x}\in\Omega_{\bar h};\\
&(H_{\bar s_1\bar s_2}V_2)_t+0,5(\sigma_1\{\hat H_{\bar s_2}\hat V_1,V_2\}V_2)_{x_1}+0,5(\sigma_1\{\hat H_{\bar s_2}\hat V_1^{(+1_1)},V_2\}V_2)_{\bar x_1}+\\
&+0,5(\sigma_2\{\hat H_{\bar s_1}\hat V_2,V_2\}V_2)_{x_2}+0,5(\sigma_2\{\hat H_{\bar s_1}\hat V_2^{(+1_2)},V_2\}V_2)_{\bar x_2}+\frac{\gamma}{\gamma-1}\hat H_{\bar s_1\bar s_2}((\hat H_{\bar s_1})^{\gamma-1})_{\bar x_2}=\\
&=\mu\left((\hat V_2)_{x_1\bar x_1}+\tfrac{4}{3}(\hat V_2)_{x_2\bar x_2}\right)+\frac{\mu}{3}(V_1)_{\overset{0}{x}_1\overset{0}{x}_2}+\hat f_2\hat H_{\bar s_1\bar s_2},\qquad \text{при } \hat H_{\bar s_1\bar s_2}\neq 0,\\
&\hat V_2=0,\qquad \text{при } \hat H_{\bar s_1\bar s_2}=0,\qquad \mathbf{x}\in\Omega_{\bar h}.
\end{aligned}\tag{18.1}$$

В граничных узлах $\gamma_{\bar h}$ значения функции $\mathbf{V}$ считаются известными из граничных условий. В граничных узлах, где газ втекает в область, задаются значения плотности газа, которые также берутся из граничных условий.

Разностные уравнения (18.1) в индексах имеют вид

$$
\begin{gathered}
\frac{H^{n+1}_{m_1,m_2}-H^{n}_{m_1,m_2}}{\tau}+\\
+\frac{((\tilde V_2)^n_{m_1,m_2+1}-|(\tilde V_2)^n_{m_1,m_2+1}|)H^{n+1}_{m_1,m_2+1}}{2h_2}+\frac{((\tilde V_1)^n_{m_1+1,m_2}-|(\tilde V_1)^n_{m_1+1,m_2}|)H^{n+1}_{m_1+1,m_2}}{2h_1}+\\
+\left(\frac{1}{2h_1}((\tilde V_1)^n_{m_1+1,m_2}+|(\tilde V_1)^n_{m_1+1,m_2}|-(\tilde V_1)^n_{m_1,m_2}+|(\tilde V_1)^n_{m_1,m_2}|)+\right.\\
\left.+\frac{1}{2h_2}((\tilde V_2)^n_{m_1,m_2+1}+|(\tilde V_2)^n_{m_1,m_2+1}|-(\tilde V_2)^n_{m_1,m_2}+|(\tilde V_2)^n_{m_1,m_2}|)\right)H^{n+1}_{m_1,m_2}-\\
-\frac{((\tilde V_1)^n_{m_1-1,m_2}+|(\tilde V_1)^n_{m_1-1,m_2}|)H^{n+1}_{m_1-1,m_2}}{2h_1}-\frac{((\tilde V_2)^n_{m_1,m_2-1}+|(\tilde V_2)^n_{m_1,m_2-1}|)H^{n+1}_{m_1,m_2-1}}{2h_2}=0,\\
0\le m_1<M_1,\ 0\le m_2<M_2,\ n\ge 0.
\end{gathered}
\tag{18.2}
$$

$$
\begin{gathered}
\frac{(\tilde H)^{n+1}_{m_1,m_2}V1^{n+1}_{m_1,m_2}-(\tilde H)^{n}_{m_1,m_2}V1^{n}_{m_1,m_2}}{\tau}-\\
-\frac{((|V1^n_{m_1-1,m_2}|+V1^n_{m_1-1,m_2})H1^{n+1}_{m_1-2,m_2}+(|V1^n_{m_1,m_2}|+V1^n_{m_1,m_2})H1^{n+1}_{m_1-1,m_2})V1^{n+1}_{m_1-1,m_2}}{4h_1}+\\
+\frac{1}{4h_1}((|V1^n_{m_1-1,m_2}|-V1^n_{m_1-1,m_2}+|V1^n_{m_1,m_2}|+V1^n_{m_1,m_2})H1^{n+1}_{m_1-1,m_2}+\\
+(|V1^n_{m_1+1,m_2}|+V1^n_{m_1+1,m_2}+|V1^n_{m_1,m_2}|-V1^n_{m_1,m_2})H1^{n+1}_{m_1,m_2})V1^{n+1}_{m_1,m_2}-\\
-\frac{((|V1^n_{m_1,m_2}|-V1^n_{m_1,m_2})H1^{n+1}_{m_1,m_2}+(|V1^n_{m_1+1,m_2}|-V1^n_{m_1+1,m_2})H1^{n+1}_{m_1+1,m_2})V1^{n+1}_{m_1+1,m_2}}{4h_1}+\\
-\frac{((|V1^n_{m_1,m_2-1}|+V1^n_{m_1,m_2-1})H2^{n+1}_{m_1,m_2-2}+(|V1^n_{m_1,m_2}|+V1^n_{m_1,m_2})H2^{n+1}_{m_1,m_2-1})V2^{n+1}_{m_1,m_2-1}}{4h_2}+\\
+\frac{1}{4h_2}((|V1^n_{m_1,m_2-1}|-V1^n_{m_1,m_2-1}+|V1^n_{m_1,m_2}|+V1^n_{m_1,m_2})H2^{n+1}_{m_1,m_2-1}+\\
+(|V1^n_{m_1,m_2+1}|+V1^n_{m_1,m_2+1}+|V1^n_{m_1,m_2}|-V1^n_{m_1,m_2})H2^{n+1}_{m_1,m_2})V2^{n+1}_{m_1,m_2}-\\
-\frac{((|V1^n_{m_1,m_2}|-V1^n_{m_1,m_2})H2^{n+1}_{m_1,m_2}+(|V1^n_{m_1,m_2+1}|-V1^n_{m_1,m_2+1})H2^{n+1}_{m_1,m_2+1})V2^{n+1}_{m_1,m_2+1}}{4h_2}+\\
+\frac{\gamma}{\gamma-1}\tilde H^{n+1}_{m_1,m_2}\frac{(H1^{n+1}_{m_1,m_2})^{\gamma-1}-(H1^{n+1}_{m_1-1,m_2})^{\gamma-1}}{h_1}=\\
=\mu\left(\frac{4}{3}\frac{V1^{n+1}_{m_1-1,m_2}-2V1^{n+1}_{m_1,m_2}+V1^{n+1}_{m_1+1,m_2}}{h_1^2}+\frac{V1^{n+1}_{m_1,m_2-1}-2V1^{n+1}_{m_1,m_2}+V1^{n+1}_{m_1,m_2+1}}{h_2^2}\right)+\\
+\frac{\mu}{3}\frac{V2^n_{m_1-1,m_2-1}-V2^n_{m_1-1,m_2+1}-V2^n_{m_1+1,m_2-1}+V2^n_{m_1+1,m_2+1}}{4h_1h_2}+f1^{n+1}_{m_1,m_2}(\tilde H)^{n+1}_{m_1,m_2},\\
\text{при } \tilde H^{n+1}_{m_1,m_2m}\ne 0,\\
\hat V1_{m_1,m_2}=0,\qquad \text{при } \tilde H^{n+1}_{m_1,m_2}=0,\qquad \mathbf{x}\in\Omega_{\bar h};
\end{gathered}
\tag{18.3}
$$

$$
\begin{gathered}
\frac{(\tilde{H})^{n+1}_{m_1,m_2} V2^{n+1}_{m_1,m_2} - (\tilde{H})^{n}_{m_1,m_2} V2^{n}_{m_1,m_2}}{\tau} - \\
-\frac{((|V2^n_{m_1-1,m_2}| + V2^n_{m_1-1,m_2}) H1^{n+1}_{m_1-2,m_2} + (|V2^n_{m_1,m_2}| + V2^n_{m_1,m_2}) H1^{n+1}_{m_1-1,m_2}) V1^{n+1}_{m_1-1,m_2}}{4h_1} + \\
+\frac{1}{4h_1}((|V2^n_{m_1-1,m_2}| - V2^n_{m_1-1,m_2} + |V2^n_{m_1,m_2}| + V2^n_{m_1,m_2}) H1^{n+1}_{m_1-1,m_2} + \\
+(|V2^n_{m_1+1,m_2}| + V2^n_{m_1+1,m_2} + |V2^n_{m_1,m_2}| - V2^n_{m_1,m_2}) H1^{n+1}_{m_1,m_2}) V1^{n+1}_{m_1,m_2} - \\
-\frac{((|V2^n_{m_1,m_2}| - V2^n_{m_1,m_2}) H1^{n+1}_{m_1,m_2} + (|V2^n_{m_1+1,m_2}| - V2^n_{m_1+1,m_2}) H1^{n+1}_{m_1+1,m_2}) V1^{n+1}_{m_1+1,m_2}}{4h_1} + \\
-\frac{((|V2^n_{m_1,m_2-1}| + V2^n_{m_1,m_2-1}) H2^{n+1}_{m_1,m_2-2} + (|V2^n_{m_1,m_2}| + V2^n_{m_1,m_2}) H2^{n+1}_{m_1,m_2-1}) V2^{n+1}_{m_1,m_2-1}}{4h_2} + \\
+\frac{1}{4h_2}((|V2^n_{m_1,m_2-1}| - V2^n_{m_1,m_2-1} + |V2^n_{m_1,m_2}| + V2^n_{m_1,m_2}) H2^{n+1}_{m_1,m_2-1} + \\
+(|V2^n_{m_1,m_2+1}| + V2^n_{m_1,m_2+1} + |V2^n_{m_1,m_2}| - V2^n_{m_1,m_2}) H2^{n+1}_{m_1,m_2}) V2^{n+1}_{m_1,m_2} - \\
-\frac{((|V2^n_{m_1,m_2}| - V2^n_{m_1,m_2}) H2^{n+1}_{m_1,m_2} + (|V2^n_{m_1,m_2+1}| - V2^n_{m_1,m_2+1}) H2^{n+1}_{m_1,m_2+1}) V2^{n+1}_{m_1,m_2+1}}{4h_2} + \\
+\frac{\gamma}{\gamma-1} \tilde{H}^{n+1}_{m_1,m_2} \frac{(H2^{n+1}_{m_1,m_2})^{\gamma-1} - (H2^{n+1}_{m_1,m_2-1})^{\gamma-1}}{h_2} = \\
= \mu \left(\frac{V2^{n+1}_{m_1-1,m_2} - 2V2^{n+1}_{m_1,m_2} + V2^{n+1}_{m_1+1,m_2}}{h_1^2} + \frac{4}{3} \frac{V2^{n+1}_{m_1,m_2-1} - 2V2^{n+1}_{m_1,m_2} + V2^{n+1}_{m_1,m_2+1}}{h_2^2} \right) + \\
+\frac{\mu}{3} \frac{V1^n_{m_1-1,m_2-1} - V1^n_{m_1-1,m_2+1} - V1^n_{m_1+1,m_2-1} + V1^n_{m_1+1,m_2+1}}{4h_1h_2} + f2^{n+1}_{m_1,m_2} (\tilde{H})^{n+1}_{m_1,m_2}, \\
\text{при } \tilde{H}^{n+1}_{m_1,m_2m} \neq 0, \\
\hat{V}_{2 m_1,m_2} = 0, \qquad \text{при } \tilde{H}^{n+1}_{m_1,m_2} = 0, \qquad \mathbf{x} \in \Omega_{\bar{h}}.
\end{gathered}
\tag{18.4}
$$

Выше были использованы следующие обозначения

$$
(\tilde{V}_1)^n_{m_1,m_2} = \frac{(V_1)^n_{m_1,m_2} + (V_1)^n_{m_1,m_2+1}}{2}, \qquad (\tilde{V}_2)^n_{m_1,m_2} = \frac{(V_2)^n_{m_1,m_2} + (V_2)^n_{m_1+1,m_2}}{2},
$$

$$
(\tilde{H})^n_{m_1,m_2} = \frac{H^n_{m_1,m_2} + H^n_{m_1,m_2-1} + H^n_{m_1-1,m_2} + H^n_{m_1-1,m_2-1}}{4},
$$

$$
(H_1)^n_{m_1,m_2} = \frac{H^n_{m_1,m_2} + H^n_{m_1,m_2-1}}{2}, \qquad (H_2)^n_{m_1,m_2} = \frac{H^n_{m_1,m_2} + H^n_{m_1-1,m_2}}{2}. \tag{18.5}
$$

Порядок вычисленийя по разностной схеме (18.1) следующий. Сначала на очередном временном слое находится функция $\hat{H}$ из системы, задаваемой уравнениями (18.2), а затем решается система, задаваемая уравнениями (18.3) и (18.4).

Используя обозначения, введенные в параграфе 11, выпишем алгебраическое уравнение системы на $\hat{H}$, получающееся из разностного уравнения (18.2)

$$
\begin{gathered}
ah\_H00 \cdot H^{n+1}_{m_1,m_2} + ah\_HR0 \cdot H^{n+1}_{m_1+1,m_2} + ah\_HL0 \cdot H^{n+1}_{m_1-1,m_2} + \\
+ah\_H0R \cdot H^{n+1}_{m_1,m_2+1} + ah\_H0L \cdot H^{n+1}_{m_1,m_2+1} = bh,
\end{gathered}
\tag{18.6}
$$

где коэффициенты определяются по формулам

$$\begin{aligned}
&ah_H00 = 1. + \tfrac{\tau}{2h_1}(VT1R0 + |VT1R0| - VT100 + |VT100|) + \\
&+\tfrac{\tau}{2h_2}(VT20R + |VT20R| - VT200 + |VT200|), \\
&ah_HR0 = \tfrac{\tau}{2h_1}(VT1R0 - |VT1R0|), \\
&ah_H0R = \tfrac{\tau}{2h_2}(VT20R - |VT20R|), \\
&ah_HL0 = -\tfrac{\tau}{2h_1}(VT1L0 + |VT1L0|), \\
&ah_H0L = -\tfrac{\tau}{2h_2}(VT20L + |VT20L|), \\
&bh = H00.
\end{aligned} \tag{18.7}$$

В формулах (18.7) через $VT???$ обозначены значения функций $\tilde{V}_?$ в соответствующих узлах шаблона.

Отдельно требуется пояснить, как понимать эти уравнения в приграничных узлах (узлах, у которых одна из координат равна либо 0, либо $M_k - 1$). В первом возможном случае, если на на границе вблизи такого узла задано условие прилипания (т.е. скорость потока равна нулю), значение функции $\hat{H}$ в узле, выходящем за пределы сетки, умножается на коэффициент, который полагается равным нулю. Иными словами такого слагаемого в уравнении просто нет. Во втором случае, если газ втекает в область, то все необходимые для расчетов значения $\hat{H}$ и V_k, в узлах выходящих за границу сетки, считаются известными значениями из заданных граничных условий. В третьем возможном случае, когда газ вытекает из области через участок границы вблизи узла, можно заметить, что соответствующий коэффицент в уравнении также как в первом случае равен нулю.

Из разностного уравнения (18.3) получаются следующие алгебраические уравнения для всех внутренних узлов сетки Ω_h

$$\begin{aligned}
&av1_V100 \cdot V1^{n+1}_{m_1,m_2} + av1_V1R0 \cdot V1^{n+1}_{m_1+1,m_2} + av1_V1L0 \cdot V1^{n+1}_{m_1-1,m_2} + \\
&+av1_V10R \cdot V1^{n+1}_{m_1,m_2+1} + av1_V10L \cdot V1^{n+1}_{m_1,m_2-1} + av1_V200 \cdot V2^{n+1}_{m_1,m_2} + \\
&+av1_V20R \cdot V2^{n+1}_{m_1,m_2+1} + av1_V20L \cdot V2^{n+1}_{m_1,m_2-1} = bv1,
\end{aligned} \tag{18.8}$$

где

$$\begin{aligned}
&av1_V100 = HT00 + \tfrac{\tau}{4h_1}\left((-V1L0 + |V1L0| + V100 + |V100|)H1L0 + \right.\\
&\left. + (V1R0 + |V1R0| - V100 + |V100|)H100\right) + \\
&+\tfrac{\tau}{4h_2}\left((-V10L + |V10L| + V100 + |V100|)H2L0 + \right.\\
&\left. + (V10R + |V10R| - V100 + |V100|)H100\right) + \tau\mu\left(\tfrac{8}{3h_1^2} + \tfrac{2}{h_2^2}\right), \\
&av1_V1L0 = -\tfrac{\tau}{4h_1}\left((V1L0 + |V1L0|)H1D0 + (V100 + |V100|)H1L0\right) - \tfrac{4\tau\mu}{3h_1^2}, \\
&av1_V1R0 = -\tfrac{\tau}{4h_1}\left((-V100 + |V100|)H100 + (-V1R0 + |V1R0|)H1R0\right) - \tfrac{4\tau\mu}{3h_1^2}, \\
&av1_V10L = -\tfrac{\tau\mu}{h_2^2}, \\
&av1_V10R = -\tfrac{\tau\mu}{h_2^2}, \\
&av1_V200 = \tfrac{\tau}{4h_2}\left(-(V10L + |V10L| + V100 + |V100|)H20L + \right.\\
&\left. + (-V100 + |V100| + V10R + |V10R|)H200\right), \\
&av1_V20L = -\tfrac{\tau}{4h_2}\left((V10L + |V10L|)H20D + (V100 + |V100|)H10L\right), \\
&av1_V20R = -\tfrac{\tau}{4h_2}\left((-V100 + |V100|)H200 + (-V10R + |V10R|)H20R\right), \\
&bv1 = HT00_OLD * V100 - \frac{\tau\gamma}{(\gamma-1)h_1}H200((H100)^{\gamma-1} - (H1L0)^{\gamma-1}) + \\
&+\tfrac{\tau\mu}{12h_1h_2}(V2RR - V2RL - V2LR + V2LL) + \tau f_1 HT00.
\end{aligned} \tag{18.9}$$

В формулах (18.9) были использованы обозначения

$$HT00 = (\tilde{H})^{n+1}_{m_1,m_2}, \qquad HT00\_OLD = (\tilde{H})^{n}_{m_1,m_2}.$$

Идентификаторы $H1??$ и $H2??$ применяются для значений функций H_1 и H_2 в узлах шаблона. Отдельно заметим, что

$$H1D0 = (H_1)^{n+1}_{m_1-2,m_2}, \qquad H20D = (H_2)^{n+1}_{m_1,m_2-2}.$$

Коэффициенты уравнений (18.8) не используют неопределенных величин, если в пр-нinfграничных узлах трактовать их аналогично тому, как это было сделано выше для уравнений (18.6).

Из разностного уравнения (18.4) получаются алгебраические уравнения, аналогичные уравнениям (18.8).

19 Разностная схема ПЛОТНОСТЬ-СКОРОСТЬ

Сеточная функция $\mathbf{V}$, приближающая функцию вектора скорости $\mathbf{u}$, определяется в узлах сетки $\bar{Q}_{\tau\bar{h}}$, а значения функции H, приближающей функцию плотности ρ, ищутся в узлах сетки $Q^{1/2}_{\tau\bar{h}}$ по следующей схеме, аппроксимирующей систему (2.5)

$$\begin{aligned}
&H_t + (\sigma_1\{\hat{H}, V_{1s_2}\}V_{1s_2})_{x_1} + (\sigma_2\{\hat{H}, V_{2s_1}\}V_{2s_1})_{x_2} = 0, \qquad \mathbf{x} \in \Omega^{1/2}_{\bar{h}};\\
&\hat{H}_{\bar{s}_1\bar{s}_2}V_{1t} + \hat{H}_{\bar{s}_1\bar{s}_2}\delta_1\{\hat{V}_1, V_1\} + \hat{H}_{\bar{s}_1\bar{s}_2}\delta_2\{\hat{V}_1, V_2\} + p(\hat{H}_{\bar{s}_2})_{\bar{x}_1} =\\
&= \mu\left(\tfrac{4}{3}(\hat{V}_1)_{x_1\bar{x}_1} + (\hat{V}_1)_{x_2\bar{x}_2}\right) + \frac{\mu}{3}(V_2)_{\overset{0}{x}_1\overset{0}{x}_2} + f_1\hat{H}_{\bar{s}_1\bar{s}_2}, \qquad \text{при } \hat{H}_{\bar{s}_1\bar{s}_2} \neq 0,\\
&\hat{V}_1 = 0, \qquad \text{при } \hat{H}_{\bar{s}_1\bar{s}_2} = 0, \qquad \mathbf{x} \in \Omega_{\bar{h}};\\
&\hat{H}_{\bar{s}_1\bar{s}_2}V_{2t} + \hat{H}_{\bar{s}_1\bar{s}_2}\delta_1\{\hat{V}_2, V_1\} + \hat{H}_{\bar{s}_1\bar{s}_2}\delta_2\{\hat{V}_2, V_2\} + p(\hat{H}_{\bar{s}_1})_{\bar{x}_2} =\\
&= \mu\left((\hat{V}_2)_{x_1\bar{x}_1} + \tfrac{4}{3}(\hat{V}_2)_{x_2\bar{x}_2}\right) + \frac{\mu}{3}(V_1)_{\overset{0}{x}_1\overset{0}{x}_2} + f_2\hat{H}_{\bar{s}_1\bar{s}_2}, \qquad \text{при } \hat{H}_{\bar{s}_1\bar{s}_2} \neq 0,\\
&\hat{V}_2 = 0, \qquad \text{при } \hat{H}_{\bar{s}_1\bar{s}_2} = 0, \qquad \mathbf{x} \in \Omega_{\bar{h}}.
\end{aligned} \tag{19.1}$$

В граничных узлах $\gamma_{\bar{h}}$ значения функции $\mathbf{V}$ считаются известными из граничных условий. В граничных узлах, где газ втекает в область, задаются значения плотности газа, которые также берутся из граничных условий.

Поскольку разностное уравнение, аппроксимирующее уравнение неразрывности, в точности совпадает с первым уравнением схемы из параграфа 18, приведем запись в индексах лишь для двух оставшихся уравнений.

$$
\begin{gathered}
(\tilde{H})^{n+1}_{m_1,m_2}\left(\frac{(V_1{}^{n+1}_{m_1,m_2}-V_1{}^{n}_{m_1,m_2}}{\tau}-\frac{|V_2{}^{n}_{m_1,m_2}|+V_2{}^{n}_{m_1,m_2}}{2h_2}V_1{}^{n+1}_{m_1,m_2-1}-\right.\\
-\frac{|V_1{}^{n}_{m_1,m_2}|+V_1{}^{n}_{m_1,m_2}}{2h_1}V_1{}^{n+1}_{m_1-1,m_2}+\left(\frac{|V_1{}^{n}_{m_1,m_2}|}{h_1}+\frac{|V_2{}^{n}_{m_1,m_2}|}{h_2}\right)V_1{}^{n+1}_{m_1,m_2}+\\
\left.+\frac{V_1{}^{n}_{m_1,m_2}-|V_1{}^{n}_{m_1,m_2}|}{2h_1}V_1{}^{n+1}_{m_1+1,m_2}+\frac{V_2{}^{n}_{m_1,m_2}-|V_2{}^{n}_{m_1,m_2}|}{2h_2}V_1{}^{n+1}_{m_1,m_2+1}\right)+\\
+\frac{p(H_1{}^{n+1}_{m_1,m_2})-p(H_1{}^{n+1}_{m_1-1,m_2})}{h_1}=\\
=\mu\left(\frac{4}{3}\frac{V_1{}^{n+1}_{m_1-1,m_2}-2V_1{}^{n+1}_{m_1,m_2}+V_1{}^{n+1}_{m_1+1,m_2}}{h_1^2}+\frac{V_1{}^{n+1}_{m_1,m_2-1}-2V_1{}^{n+1}_{m_1,m_2}+V_1{}^{n+1}_{m_1,m_2+1}}{h_2^2}\right)+\\
+\frac{\mu}{3}\frac{V_2{}^{n}_{m_1-1,m_2-1}-V_2{}^{n}_{m_1-1,m_2+1}-V_2{}^{n}_{m_1+1,m_2-1}+V_2{}^{n}_{m_1+1,m_2+1}}{4h_1h_2}+f_1{}^{n+1}_{m_1,m_2}(\tilde{H})^{n+1}_{m_1,m_2},\\
\text{при } \tilde{H}^{n+1}_{\mathbf{m}}\neq 0,\\
\hat{V}_{1_{m_1,m_2}}=0,\qquad \text{при } \tilde{H}^{n+1}_{m_1,m_2}=0;\qquad \mathbf{x}\in\Omega_h.
\end{gathered}
\tag{19.2}
$$

$$
\begin{gathered}
(\tilde{H})^{n+1}_{m_1,m_2}\left(\frac{(V_2{}^{n+1}_{m_1,m_2}-V_2{}^{n}_{m_1,m_2}}{\tau}-\frac{|V_2{}^{n}_{m_1,m_2}|+V_2{}^{n}_{m_1,m_2}}{2h_2}V_2{}^{n+1}_{m_1,m_2-1}-\right.\\
-\frac{|V_1{}^{n}_{m_1,m_2}|+V_1{}^{n}_{m_1,m_2}}{2h_1}V_2{}^{n+1}_{m_1-1,m_2}+\left(\frac{|V_1{}^{n}_{m_1,m_2}|}{h_1}+\frac{|V_2{}^{n}_{m_1,m_2}|}{h_2}\right)V_2{}^{n+1}_{m_1,m_2}+\\
\left.+\frac{V_1{}^{n}_{m_1,m_2}-|V_1{}^{n}_{m_1,m_2}|}{2h_1}V_2{}^{n+1}_{m_1+1,m_2}+\frac{V_2{}^{n}_{m_1,m_2}-|V_2{}^{n}_{m_1,m_2}|}{2h_2}V_2{}^{n+1}_{m_1,m_2+1}\right)+\\
+\frac{p(H_2{}^{n+1}_{m_1,m_2})-p(H_2{}^{n+1}_{m_1,m_2-1})}{h_2}=\\
=\mu\left(\frac{V_2{}^{n+1}_{m_1-1,m_2}-2V_2{}^{n+1}_{m_1,m_2}+V_2{}^{n+1}_{m_1+1,m_2}}{h_1^2}+\frac{4}{3}\frac{V_2{}^{n+1}_{m_1,m_2-1}-2V_2{}^{n+1}_{m_1,m_2}+V_2{}^{n+1}_{m_1,m_2+1}}{h_2^2}\right)+\\
+\frac{\mu}{3}\frac{V_1{}^{n}_{m_1-1,m_2-1}-V_1{}^{n}_{m_1-1,m_2+1}-V_1{}^{n}_{m_1+1,m_2-1}+V_1{}^{n}_{m_1+1,m_2+1}}{4h_1h_2}+f_2{}^{n+1}_{m_1,m_2}(\tilde{H})^{n+1}_{m_1,m_2},\\
\text{при } \tilde{H}^{n+1}_{\mathbf{m}}\neq 0,\\
\hat{V}_{2_{m_1,m_2}}=0,\qquad \text{при } \tilde{H}^{n+1}_{m_1,m_2}=0;\qquad \mathbf{x}\in\Omega_h.
\end{gathered}
\tag{19.3}
$$

Также как и в случае схемы из параграфа 18 по этой схеме на каждом временном слое решается СЛАУ, решением которой является сеточная функция плотности H^{n+1}, а затем в любом порядке решаются СЛАУ, которые задают функции V_1^{n+1} и V_2^{n+1}. Последние две системы можно решать независимо.

Из разностного уравнения (19.2) получаются следующие алгебраические уравнения для всех внутренних узлов сетки Ω_h

$$
\begin{aligned}
&av1\_V100\cdot V_1{}^{n+1}_{m_1,m_2}+av1\_V1R0\cdot V_1{}^{n+1}_{m_1+1,m_2}+av1\_V1L0\cdot V_1{}^{n+1}_{m_1-1,m_2}+\\
&+av1\_V10R\cdot V_1{}^{n+1}_{m_1,m_2+1}+av1\_V10L\cdot V_1{}^{n+1}_{m_1,m_2-1}=bv1,
\end{aligned}
\tag{19.4}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&av1\_V100 = HT00(1 + \tfrac{\tau}{h_1}|V100| + \tfrac{\tau}{h_2}|V200|) + \tau\mu\left(\tfrac{8}{3h_1^2} + \tfrac{2}{h_2^2}\right),\\
&av1\_V1L0 = -\tfrac{\tau}{2h_1}(V100 + |V100|)HT00 - \tfrac{4\tau\mu}{3h_1^2},\\
&av1\_V1R0 = \tfrac{\tau}{2h_1}(V100 - |V100|)HT00 - \tfrac{4\tau\mu}{3h_1^2},\\
&av1\_V10L = -\tfrac{\tau}{2h_2}(V200 + |V200|)HT00 - \tfrac{\tau\mu}{h_2^2},\\
&av1\_V10R = \tfrac{\tau}{2h_2}(V200 - |V200|)HT00 - \tfrac{\tau\mu}{h_2^2},\\
&bv1 = HT00 * V100 - \tfrac{\tau}{h_1}(p(H100) - p(H1L0)) +\\
&+ \tfrac{\tau\mu}{12h_1h_2}(V2RR - V2RL - V2LR + V2LL) + \tau f_1 HT00.
\end{aligned}
\tag{19.5}
$$

Аналогичным образом расписывается разностное уравнение (19.3).

20 Разностная схема $Ln(\rho)$-СКОРОСТЬ (несимметричная)

Для построения разностной схемы в двумерном случае с односторонними разностями, направленными против потока, и вычисляемой функцией $g = ln(\rho)$ запишем систему (2.5) в виде

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial g}{\partial t} + u_1\frac{\partial g}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial g}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0,\\
&\frac{\partial u_k}{\partial t} + u_1\frac{\partial u_k}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial u_k}{\partial x_2} + p'_\rho(\rho)\frac{\partial g}{\partial x_k} =\\
&= \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{4}{3}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k^2} + \sum_{m=1,m\neq k}^{s}\left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_m^2} + \frac{1}{3}\frac{\partial^2 u_m}{\partial x_k \partial x_m}\right)\right) + f_k, \qquad k = 1,2,\\
&p = p(\rho), \quad g = ln\rho.
\end{aligned}
\tag{20.1}
$$

Сеточную функцию, разностное приближение для плотности ρ, обозначим H. Аналогично, разностные аналоги функций g и $\mathbf{u}$ обозначим G и $\mathbf{V}$ соответственно. Функции H, G и $\mathbf{V}$ будем считать заданными на сетке $\bar{\Omega}_{\bar{h}}$. Для поиска численного решения задачи (20.1),(2.8),(2.9) предлагается использовать р.с:

$$
G_t + \delta_1\{\hat{G}, V_1\} + \delta_2\{\hat{G}, V_2\} + (\hat{V}_1)_{\overset{0}{x}_1} + (\hat{V}_2)_{\overset{0}{x}_2} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\bar{h}}; \tag{20.2}
$$

$$
G_t + \hat{V}_{k x_k} = 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_k^-, k = 1,2; \tag{20.3}
$$

$$
G_t + \hat{V}_{k \bar{x}_k} = 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_k^+, k = 1,2; \tag{20.4}
$$

$$
\begin{aligned}
&(V_k)_t + \delta_1\{\hat{V}_k, V_1\} + \delta_2\{\hat{V}_k, V_2\} + \tilde{p}'(G)\hat{G}_{\overset{0}{x}_k} = \tilde{\mu}\left(\tfrac{4}{3}(\hat{V}_k)_{x_k\bar{x}_k} + \sum_{m=1,m\neq k}^{s}(\hat{V}_k)_{x_m\bar{x}_m}\right)\\
&-(\tilde{\mu} - \mu e^{-G})\left(\tfrac{4}{3}(V_k)_{x_k\bar{x}_k} + \sum_{m=1,m\neq k}^{s}(V_k)_{x_m\bar{x}_m}\right) + \frac{\mu e^{-G}}{3}\sum_{m=1,m\neq k}^{s}(V_m)_{\overset{0}{x}_k\overset{0}{x}_m} + f_k, \qquad \mathbf{x} \in \Omega_{\bar{h}},\\
&\hat{V}_k = 0, \qquad \mathbf{x} \in \gamma_{\bar{h}}, \qquad k = 1,2.
\end{aligned}
\tag{20.5}
$$

где $\tilde{\mu} = \mu\|e^{-G}\|_C$.

Приведем индексную запись уравнений разностной схемы (20.2)-(20.5).

$$
\begin{aligned}
&\frac{G^{n+1}_{m_1,m_2}-G^{n}_{m_1,m_2}}{\tau}-\frac{|V_2{}^{n}_{m_1,m_2}|+V_2{}^{n}_{m_1,m_2}}{2h_2}G^{n+1}_{m_1,m_2-1}-\\
&-\frac{|V_1{}^{n}_{m_1,m_2}|+V_1{}^{n}_{m_1,m_2}}{2h_1}G^{n+1}_{m_1-1,m_2}+\left(\frac{|V_1{}^{n}_{m_1,m_2}|}{h_1}+\frac{|V_2{}^{n}_{m_1,m_2}|}{h_2}\right)G^{n+1}_{m_1,m_2}+\\
&+\frac{V_1{}^{n}_{m_1,m_2}-|V_1{}^{n}_{m_1,m_2}|}{2h_1}G^{n+1}_{m_1+1,m_2}+\frac{V_2{}^{n}_{m_1,m_2}-|V_2{}^{n}_{m_1,m_2}|}{2h_2}G^{n+1}_{m_1,m_2+1}+\\
&+\frac{V_1{}^{n+1}_{m_1+1,m_2}-V_1{}^{n+1}_{m_1-1,m_2}}{2h_1}+\frac{V_2{}^{n+1}_{m_1,m_2+1}-V_2{}^{n+1}_{m_1,m_2-1}}{2h_2}=0,\qquad \mathbf{x}\in\Omega_h,
\end{aligned}
\tag{20.6}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{G^{n+1}_{0,m_2}-G^{n}_{0,m_2}}{\tau}+\frac{V_1{}^{n+1}_{1,m_2}-V_1{}^{n+1}_{0,m_2}}{h_1}=0,\qquad 0<m_2<M_2,\\
&\frac{G^{n+1}_{m_1,0}-G^{n}_{m_1,0}}{\tau}+\frac{V_2{}^{n+1}_{m_1,1}-V_2{}^{n+1}_{m_1,0}}{h_2}=0,\qquad 0<m_1<M_1,\\
&\frac{G^{n+1}_{M_1,m_2}-G^{n}_{M_1,m_2}}{\tau}+\frac{V_1{}^{n+1}_{M_1,m_2}-V_1{}^{n+1}_{M_1-1,m_2}}{h_1}=0,\qquad 0<m_2<M_2,\\
&\frac{G^{n+1}_{m_1,M_2}-G^{n}_{m_1,M_2}}{\tau}+\frac{V_2{}^{n+1}_{m_1,M_2}-V_2{}^{n+1}_{m_1,M_2-1}}{h_2}=0,\qquad 0<m_1<M_1,
\end{aligned}
\tag{20.7}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{V_1{}^{n+1}_{m_1,m_2}-V_1{}^{n}_{m_1,m_2}}{\tau}-\frac{|V_2{}^{n}_{m_1,m_2}|+V_2{}^{n}_{m_1,m_2}}{2h_2}V_1{}^{n+1}_{m_1,m_2-1}-\\
&-\frac{|V_1{}^{n}_{m_1,m_2}|+V_1{}^{n}_{m_1,m_2}}{2h_1}V_1{}^{n+1}_{m_1-1,m_2}+\left(\frac{|V_1{}^{n}_{m_1,m_2}|}{h_1}+\frac{|V_2{}^{n}_{m_1,m_2}|}{h_2}\right)V_1{}^{n+1}_{m_1,m_2}+\\
&+\frac{V_1{}^{n}_{m_1,m_2}-|V_1{}^{n}_{m_1,m_2}|}{2h_1}V_1{}^{n+1}_{m_1+1,m_2}+\frac{V_2{}^{n}_{m_1,m_2}-|V_2{}^{n}_{m_1,m_2}|}{2h_2}V_1{}^{n+1}_{m_1,m_2+1}+\\
&+p'_\rho(e^{G^{n}_{m_1,m_2}})\frac{G^{n+1}_{m_1+1,m_2}-G^{n+1}_{m_1-1,m_2}}{2h_1}=\\
&=\tilde{\mu}\left(\frac{4}{3}\frac{V_1{}^{n+1}_{m_1-1,m_2}-2V_1{}^{n+1}_{m_1,m_2}+V_1{}^{n+1}_{m_1+1,m_2}}{h_1^2}+\frac{V_1{}^{n+1}_{m_1,m_2-1}-2V_1{}^{n+1}_{m_1,m_2}+V_1{}^{n+1}_{m_1,m_2+1}}{h_2^2}\right)-\\
&-(\tilde{\mu}-\mu e^{-G^{n}_{m_1,m_2}})\left(\frac{4}{3}\frac{V_1{}^{n}_{m_1-1,m_2}-2V_1{}^{n}_{m_1,m_2}+V_1{}^{n}_{m_1+1,m_2}}{h_1^2}+\right.\\
&\left.+\frac{V_1{}^{n}_{m_1,m_2-1}-2V_1{}^{n}_{m_1,m_2}+V_1{}^{n}_{m_1,m_2+1}}{h_2^2}\right)+\\
&+\frac{\mu}{3}e^{-G^{n}_{m_1,m_2}}\frac{V_2{}^{n}_{m_1-1,m_2-1}-V_2{}^{n}_{m_1-1,m_2+1}-V_2{}^{n}_{m_1+1,m_2-1}+V_2{}^{n}_{m_1+1,m_2+1}}{4h_1h_2}+f_1{}^{n+1}_{m_1,m_2},\qquad \mathbf{x}\in\Omega_h,
\end{aligned}
\tag{20.8}
$$

$$
\begin{gathered}
\frac{V2^{n+1}_{m_1,m_2}-V2^{n}_{m_1,m_2}}{\tau}-\frac{|V2^{n}_{m_1,m_2}|+V2^{n}_{m_1,m_2}}{2h_2}V2^{n+1}_{m_1,m_2-1}-\\
-\frac{|V1^{n}_{m_1,m_2}|+V1^{n}_{m_1,m_2}}{2h_1}V2^{n+1}_{m_1-1,m_2}+\left(\frac{|V1^{n}_{m_1,m_2}|}{h_1}+\frac{|V2^{n}_{m_1,m_2}|}{h_2}\right)V2^{n+1}_{m_1,m_2}+\\
+\frac{V1^{n}_{m_1,m_2}-|V1^{n}_{m_1,m_2}|}{2h_1}V2^{n+1}_{m_1+1,m_2}+\frac{V2^{n}_{m_1,m_2}-|V2^{n}_{m_1,m_2}|}{2h_2}V2^{n+1}_{m_1,m_2+1}+\\
+p'_\rho(e^{G^n_{m_1,m_2}})\frac{G^{n+1}_{m_1,m_2+1}-G^{n+1}_{m_1,m_2-1}}{2h_2}=\\
=\tilde{\mu}\left(\frac{V2^{n+1}_{m_1-1,m_2}-2V2^{n+1}_{m_1,m_2}+V2^{n+1}_{m_1+1,m_2}}{h_1^2}+\frac{4}{3}\frac{V2^{n+1}_{m_1,m_2-1}-2V2^{n+1}_{m_1,m_2}+V2^{n+1}_{m_1,m_2+1}}{h_2^2}\right)-\\
-(\tilde{\mu}-\mu e^{-G^n_{m_1,m_2}})\left(\frac{V2^{n}_{m_1-1,m_2}-2V2^{n}_{m_1,m_2}+V2^{n}_{m_1+1,m_2}}{h_1^2}+\right.\\
\left.+\frac{4}{3}\frac{V2^{n}_{m_1,m_2-1}-2V2^{n}_{m_1,m_2}+V2^{n}_{m_1,m_2+1}}{h_2^2}\right)+\\
+\frac{\mu}{3}e^{-G^n_{m_1,m_2}}\frac{V1^{n}_{m_1-1,m_2-1}-V1^{n}_{m_1-1,m_2+1}-V1^{n}_{m_1+1,m_2-1}+V1^{n}_{m_1+1,m_2+1}}{4h_1h_2}+f2^{n+1}_{m_1,m_2},\qquad \mathbf{x}\in\Omega_h,
\end{gathered}
\tag{20.9}
$$

Уравнения (20.6)-(20.9) образуют СЛАУ, решая которую находим сеточное решение на очередном временном слое. Эта система, как и случае схемы из параграфа 7, не распадается на независимые подсистемы, как это было в случае схем из параграфов 18 и 19.

Из разностного уравнения (20.6) получаем следующее алгебраическое уравнение для всех внутренних узлов

$$
\begin{aligned}
&ag\_G00\cdot G^{n+1}_{m_1,m_2}+ag\_GR0\cdot G^{n+1}_{m_1+1,m_2}+ag\_GL0\cdot G^{n+1}_{m_1-1,m_2}+ag\_G0R\cdot G^{n+1}_{m_1,m_2+1}+\\
&+ag\_G0L\cdot G^{n+1}_{m_1,m_2-1}+ag\_V1R0\cdot V1^{n+1}_{m_1+1,m_2}+ag\_V1L0\cdot V1^{n+1}_{m_1-1,m_2}+\\
&+ag\_V20R\cdot V2^{n+1}_{m_1,m_2+1}+ag\_V20L\cdot V2^{n+1}_{m_1,m_2-1}=bg,
\end{aligned}
\tag{20.10}
$$

где коэффициенты определяются по формулам

$$
\begin{aligned}
&ag\_G00=1+\tfrac{\tau}{h_1}|V100|+\tfrac{\tau}{h_2}|V200|,\\
&ag\_GR0=\tfrac{\tau}{2h_1}(V100-|V100|),\\
&ag\_GL0=-\tfrac{\tau}{2h_1}(V100+|V100|),\\
&ag\_G0R=\tfrac{\tau}{2h_2}(V200-|V200|),\\
&ag\_G0L=-\tfrac{\tau}{2h_2}(V200+|V200|),\\
&ag\_V1R0=\tfrac{\tau}{2h_1},\\
&ag\_V1L0=-\tfrac{\tau}{2h_1},\\
&ag\_V20R=\tfrac{\tau}{2h_2},\\
&ag\_V20L=-\tfrac{\tau}{2h_2},\\
&bg=g00.
\end{aligned}
\tag{20.11}
$$

Из разностного уравнения (20.8) получаем

$$
\begin{aligned}
&av1\_V100\cdot(V_1)^{n+1}_{m_1,m_2}+av1\_V1R0\cdot(V_1)^{n+1}_{m_1+1,m_2}+av1\_V1L0\cdot(V_1)^{n+1}_{m_1-1,m_2}+\\
&+av1\_V10R\cdot(V_1)^{n+1}_{m_1,m_2+1}++av1\_V10L\cdot(V_1)^{n+1}_{m_1,m_2-1}+\\
&+av1\_GR0\cdot G^{n+1}_{m_1+1,m_2}+av1\_GL0\cdot G^{n+1}_{m_1-1,m_2}=bv1,
\end{aligned}
\tag{20.12}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&av1\_V100 = 1 + \tfrac{\tau}{h_1}|V100| + \tfrac{\tau}{h_2}|V200| + \tau\tilde{\mu}\left(\tfrac{8}{3h_1^2} + \tfrac{2}{h_2^2}\right),\\
&av1\_V1R0 = \tfrac{\tau}{2h_1}(V100 - |V100|) - \tfrac{4\tau\tilde{\mu}}{3h_1^2},\\
&av1\_V1L0 = -\tfrac{\tau}{2h_1}(V100 + |V100|) + \tfrac{4\tau\tilde{\mu}}{3h_1^2},\\
&av1\_V10R = \tfrac{\tau}{2h_2}(V200 - |V200|) - \tfrac{\tau\tilde{\mu}}{h_2^2},\\
&av1\_V10L = -\tfrac{\tau}{2h_2}(V200 + |V200|) - \tfrac{\tau\tilde{\mu}}{h_2^2},\\
&av1\_GR0 = \tfrac{\tau p'_\rho}{2h_1},\\
&av1\_GL0 = -\tfrac{\tau p'_\rho}{2h_1},\\
&bv1 = V100 + \tau\left(\tfrac{\mu}{e^{g00}} - \tilde{\mu}\right)\left(\tfrac{4}{3h_1^2}(V1R0 - 2V100 + V1L0) + \tfrac{1}{h_2^2}(V10R - 2V100 + V10L)\right)\\
&+\tfrac{\tau\mu}{12e^{g00}h_1h_2}(V2RR - V2RL - V2LR + V2LL) + \tau f_1.
\end{aligned}
\tag{20.13}
$$

Аналогично расписывается и разностное уравнение (20.9).

21 Метод установления

Метод установления является одним из распространенных способов решения стационарных задач [6]. Рассмотрим его применение к задачам о течениях газа.

Сначала объясним идею этого метода на примере линейной дифференциальной задачи. Пусть требуется найти решение следующего стационарного уравнения (его решение не зависит от временной переменной t)

$$A\tilde{u} = f. \tag{21.1}$$

Функция $\tilde{u}$ принадлежит пространству функций U, зависящих от только от переменной $x \in \Omega$. Предположим, что уравнение (21.1) дополнено граничными условиями, при которых линейный оператор A имеет набор собственных чисел λ_k и собственных векторов u_k, а эти вектора образуют базис в пространстве U.

Рассмотрим теперь нестационарную задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Au = f \tag{21.2}$$

с начальным условием

$$u|_{t=0} = u^0,\ x \in \Omega, \tag{21.3}$$

а граничные условия оставим такими же, что и для уравнения (21.1).

Ее решением является функция

$$u(t,x) = \sum_k c_k e^{-\lambda_k t} u_k + \tilde{u}, \tag{21.4}$$

где

$$\sum_k c_k u_k + \tilde{u} = u^0.$$

Функции $u_t(x) = u(t,x)$ при увеличении t стремятся к функции $\tilde{u}$ в интегральной норме при условии, что все $\lambda_k \geq \tilde{\lambda} > 0$. Таким образом, находя решение нестационарной задачи при больших t, получаем приближение для стационарной задачи. Решение задачи (21.2)-(21.3) стремится к решению задачи (21.1) и в более общем случае, когда для всех λ_k выполняется условие, что $Re\lambda_k \geq \tilde{\lambda} > 0$, и собственному числу может соответствовать собственное подпространство размерности больше чем 1.

Время t, когда функция u_t начинает приближать функцию $\tilde{u}$ с достаточной точностью, становится меньше, если u^0 выбрать такой, чтобы c_k были равны 0 для тех λ_k, $Re\lambda_k$ которых ближе всего к величине $\tilde{\lambda}$. Такой способ ускорения расчета стационарного решения называется стабилизацией по начальным данным и является одним из методов, применяемых при асимптотической стабилизации [8, 9, 10, 11].

Для задач, описывающих течение газа, вопрос о стабилизации по начальным данным пока не исследован. Одним из первых шагов в этом деле может служить решение задачи по исследованию спектра линеаризованного разностного оператора задачи, аппроксимирующей стационарную задачу. Линеаризация осуществляется на вычисленном стационарном решении. Опишем более подробно последовательность действий, которые нужно проделать, чтобы определить линейный оператор.

Пусть для решения задачи (21.1) (оператор A может быть нелинейным) используется метод установления, в котором ищется решение задачи (21.2)-(21.3) по разностной схеме (для определенности рассматривается двухслойная схема)

$$\begin{aligned} &v_t + A_h(v, \hat{v}) = F, \\ &v^0 = u^0. \end{aligned} \tag{21.5}$$

Выше через $A_h(v, \hat{v})$ обозначена аппроксимация оператора A, которая может сложным образом зависеть от разностного решения на нижнем и верхнем слоях сетки.

Предположим, что по этой схеме найдено стационарное решение $\tilde{v}$, т.е. функция $\tilde{v}$ удовлетворяющая уравнению

$$A_h(\tilde{v}, \tilde{v}) \equiv \tilde{A}_h(\tilde{v}) = F. \tag{21.6}$$

Линеаризацией оператора $\tilde{A}_h$ на функции $\tilde{v}$ называется линейный оператор A_h^v, удовлетворяющий условию

$$\tilde{A}_h(\tilde{v} + w) = \tilde{A}_h(\tilde{v}) + A_h^v w + O(\|w\|^2). \tag{21.7}$$

Естественно элементы матрицы оператора A_h^v могут зависеть от значений функции $\tilde{v}$. Собственные числа этой матрицы и требуется найти.

Опишем способ определения оператора A_h^v на простом примере. Пусть оператор задан формулой

$$A_h(v, \hat{v}) \equiv (v\hat{v})_{\overset{\circ}{x}} + v\hat{v}_{\overset{\circ}{x}}. \tag{21.8}$$

Тогда оператор $\tilde{A}_h$ задается выражением

$$\tilde{A}_h(\tilde{v}) \equiv (\tilde{v}^2)_{\overset{\circ}{x}} + \tilde{v}\tilde{v}_{\overset{\circ}{x}}. \tag{21.9}$$

Подставив в выражение (21.9) вместо $\tilde{v}$ сумму $\tilde{v} + w$, получим

$$\begin{aligned} &((\tilde{v} + w)^2)_{\overset{\circ}{x}} + (\tilde{v} + w)(\tilde{v} + w)_{\overset{\circ}{x}} = \\ &= (\tilde{v}^2)_{\overset{\circ}{x}} + \tilde{v}\tilde{v}_{\overset{\circ}{x}} + 2(\tilde{v}w)_{\overset{\circ}{x}} + \tilde{v}w_{\overset{\circ}{x}} + w\tilde{v}_{\overset{\circ}{x}} + (w^2)_{\overset{\circ}{x}} + ww_{\overset{\circ}{x}}. \end{aligned} \tag{21.10}$$

Отбрасывая слагаемые, не зависящие от функции w и зависящие от нее нелинейным образом, получаем результат применения оператора A_h^v к w

$$A_h^v w \equiv 2(\tilde{v}w)_{\overset{\circ}{x}} + \tilde{v}w_{\overset{\circ}{x}} + w\tilde{v}_{\overset{\circ}{x}}. \tag{21.11}$$

Более общим является случай, когда слагаемое в уравнении разностной схемы определяется через известную гладкую функцию, зависящую от значений сеточного решения. В используемых в практикуме схемах примером таких слагаемых является выражение

$$p'(G)\hat{G}_{\overset{\circ}{x}}. \tag{21.12}$$

Обозначив через J возмущение функции G, подставим в выражение (21.12) функцию $G + J$, считая его независящим от временной переменной,

$$p'(G+J)(G+J)_{\overset{\circ}{x}} = p'(G)G_{\overset{\circ}{x}} + p'(G)J_{\overset{\circ}{x}} + p''(G)G_{\overset{\circ}{x}}J + \phi, \tag{21.13}$$

где

$$\phi = p''(G)J_{\overset{\circ}{x}}J + p'''(G+\eta J)(G+J)_{\overset{\circ}{x}}J^2, \qquad \eta \in [0,1].$$

При предположении о малости возмущения J и его разностной производной $J_{\overset{\circ}{x}}$ значения ϕ имеют второй порядок малости по сравнению с остальными слагаемыми в разложении (21.13). Поэтому линеаризацией выражения (21.12) являются слагаемые

$$p'(G)J_{\overset{\circ}{x}} + p''(G)G_{\overset{\circ}{x}}J.$$

Под описанную выше методику не попадают разностные схемы, использующие разности против потока, поскольку они содержат слагаемые, зависящие от значений модулей неизвестных функций. Например,

$$(V + |V|)H. \tag{21.14}$$

В этом случае "линеаризацией" этого выражения на паре $(V + W, H + R)$ будем считать

$$(V + |V|)R + 2\Xi(V)HW, \tag{21.15}$$

где

$$\Xi(V) = \begin{cases} 1, & V > 0, \\ 0, & V \le 0. \end{cases}$$

Формула (21.15) задает линейное приближение для выражения(21.14), если потребовать выполнения дополнительного поточечного условия на возмущение

$$|W| \le |V|.$$

Аналогично для выражения

$$(V - |V|)H \tag{21.16}$$

"линеаризация" задается формулой

$$(V - |V|)R + 2\Xi(-V)HW. \tag{21.17}$$

22 Линеаризация симметричной схемы для логарифма плотности

Рассмотрим линеаризацию оператора A_h в случае схемы (4.3)-(4.5). Обозначим стационарное решение этой задачи $(G, \mathbf{V})$. Эти функции являются решением нелинейной системы уравнений $\tilde{A}_h(G, V) = F$:

$$\begin{array}{l}
VG_{\overset{0}{x}} + (VG)_{\overset{0}{x}} + 2V_{\overset{0}{x}} - GV_{\overset{0}{x}} = 0, \qquad x \in \omega_h, \\
(VG)_{x,0} + 2V_{x,0} - G_0 V_{x,0} - 0.5h((GV)_{x\bar{x},1} + (2 - G_0)\, V_{x\bar{x},1}) = 0, \\
(VG)_{\bar{x},M} + 2V_{\bar{x},M} - G_M V_{\bar{x},M} + 0.5h((GV)_{x\bar{x},M-1} + (2 - G_M)\, V_{x\bar{x},M-1}) = 0, \\
\frac{1}{3}(VV_{\overset{0}{x}} + (V^2)_{\overset{0}{x}}) + \tilde{p}'(G)G_{\overset{0}{x}} = \mu e^{-G} V_{x\bar{x}} + f, \qquad x \in \omega_h, \\
V_0 = V_M = 0.
\end{array} \tag{22.1}$$

Для линеаризации оператора $\tilde{A}_h$ на решении (G, V) обозначим малое возмущение этих функций через (J, W). Подставив в систему (22.1) возмущенное решение $G + J$ и $V + W$, получим

$$\begin{array}{l}
(V+W)(G+J)_{\overset{0}{x}} + ((V+W)(G+J))_{\overset{0}{x}} + 2(V+W)_{\overset{0}{x}} - (G+J)(V+W)_{\overset{0}{x}} = 0, \qquad x \in \omega_h, \\
((V+W)(G+J))_{x,0} + 2(V+W)_{x,0} - (G_0 + J_0)(V+W)_{x,0} - \\
-0.5h(((G+J)(V+W))_{x\bar{x},1} + (2 - (G_0 + J_0))\,(V+W)_{x\bar{x},1}) = 0, \\
((V+W)(G+J))_{\bar{x},M} + 2(V+W)_{\bar{x},M} - (G_M + J_M)(V+W)_{\bar{x},M} + \\
+0.5h(((G+J)(V+W))_{x\bar{x},M-1} + (2 - (G_M + J_M))\,(V+W)_{x\bar{x},M-1}) = 0, \\
\frac{1}{3}((V+W)(V+W)_{\overset{0}{x}} + ((V+W)^2)_{\overset{0}{x}}) + \tilde{p}'((G+J))(G+J)_{\overset{0}{x}} = \\
= \mu e^{-(G+J)}(V+W)_{x\bar{x}} + f, \qquad x \in \omega_h, \\
(V_0 + W_0) = (V_M + W_M) = 0.
\end{array} \tag{22.2}$$

В дальнейших преобразованиях важную роль играют два предположения. Первое, это то, что пара (G, V) является точным решением системы (22.1). Второе, что слагаемые, нелинейно зависящие от функций (J, W), в силу малости последних являются величинами, имеющими больший порядок малости чем слагаемые, линейно зависящие от (J, W). В результате, используя технику линеаризации, описанную в выкладках (21.8)-(21.13), получаем систему линейных уравнений

$$\begin{array}{l}
VJ_{\overset{0}{x}} + WG_{\overset{0}{x}} + (VJ + WG))_{\overset{0}{x}} + 2W_{\overset{0}{x}} - GW_{\overset{0}{x}} - JV_{\overset{0}{x}} = 0, \qquad x \in \omega_h, \\
(VJ + WG)_{x,0} + 2W_{x,0} - G_0 W_{x,0} - J_0 V_{x,0} - \\
-0.5h((GW + JV)_{x\bar{x},1} + (2 - G_0)\, W_{x\bar{x},1} - J_0\, V_{x\bar{x},1}) = 0, \\
((VJ + WG))_{\bar{x},M} + 2W_{\bar{x},M} - G_M W_{\bar{x},M} - J_M V_{\bar{x},M} + \\
+0.5h(((GW + JV))_{x\bar{x},M-1} + (2 - G_M)\, W_{x\bar{x},M-1} - J_M\, V_{x\bar{x},M-1}) = 0, \\
\frac{1}{3}(VW_{\overset{0}{x}} + WV_{\overset{0}{x}} + 2(VW)_{\overset{0}{x}}) + p'(G)J_{\overset{0}{x}} + p''(G)G_{\overset{0}{x}} J = \\
= \mu e^{-G} W_{x\bar{x}} - \mu e^{-G} V_{x\bar{x}} J + f, \qquad x \in \omega_h, \\
W_0 = W_M = 0.
\end{array} \tag{22.3}$$

Матрица этой системы $A_h^{(G,V)}$ задает линейный оператор, собственные числа которого требуется найти во втором задании практикума. Ширина ленты матрицы будет наименьшей, если в качестве вектора неизвестных взять вектор, координаты которого взяты в следующем порядке

$$J_0,\ W_0,\ J_1,\ W_1,\ \cdots\ J_M,\ W_M.$$

Замечание. Одномерные задачи в случае $f \equiv 0$ имеют очень простые стационарные решения не только при задании граничного условия (2.4), но но и при ненулевой скорости в граничных точках. В этом случае, например, на левой границе задаются положительные константы, определяющие скорость и плотность газа входящего потока, а на правой границе производная по x от функции скорости считается равной нулю. Стационарное решение такой задачи состоит из функций скорости и плотности, равных константам, задающим входной поток. Вследствие этого система (22.3) сильно упрощается, но уже в случае двух пространственных переменных в рассматриваемых в заданиях практикума областях функции, составляющие решение не являются константами. Этим и объясняется причина, почему приводится более общий вид, чем по сути требуется, системы (22.3) и ее аналогов для других схем (23.3)-(23.4), (24.3)-(24.4) и (25.3), приведенных ниже: это сделано для более простого обобщения результата линеаризации на многомерный случай.

Приведем линеаризованную систему для схемы (7.2)-(7.5) в двумерном случае для параметра $\eta = 0$. Как и в одномерном случае обозначим стационарное решение этой схемы $(G, \mathbf{V})$, а его малое возмущение — $(J, \mathbf{W})$.

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{2}\left(V_k J_{\overset{0}{x}_k} + W_k G_{\overset{0}{x}_k} + (V_k J + W_k G))_{\overset{0}{x}_k} + 2W_{k\overset{0}{x}_k} - GW_{k\overset{0}{x}_k} - JV_{k\overset{0}{x}_k}\right) = 0, \qquad \mathbf{x} \in \Omega_{\bar{h}},\\
&(V_k J + W_k G)_{x_k} + 2W_{k x_k} - GW_{k x_k} - JV_{k x_k} -\\
&-0.5h((GW_k + JV_k)^{+1_k}_{x_k\bar{x}_k} + (2-G)W_{k}{}^{+1_k}_{x_k\bar{x}_k} - JV_{k}{}^{+1_k}_{x_k\bar{x}_k}) = 0, \qquad x \in \gamma_k^-,\ k = 1, 2,\\
&((V_k J + W_k G))_{\bar{x}_k} + 2W_{k\bar{x}_k} - GW_{k\bar{x}_k} - JV_{k\bar{x}_k} +\\
&+0.5h(((GW_k + JV_k))^{-1_k}_{x_k\bar{x}_k} + (2-G)W_{k}{}^{-1_k}_{x_k\bar{x}_k} - JV_{k}{}^{-1_k}_{x_k\bar{x}_k}) = 0, \qquad x \in \gamma_k^+,\ k = 1, 2,
\end{aligned}
\tag{22.4}
$$

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{3}(V_1 W_{1\overset{0}{x}_1} + W_1 V_{1\overset{0}{x}_1} + 2(V_1 W_1)_{\overset{0}{x}_1})+\\
&+\tfrac{1}{2}(V_2 W_{1\overset{0}{x}_2} + W_2 V_{1\overset{0}{x}_2} + (V_2 W_1 + W_2 V_1)_{\overset{0}{x}_2} - V_1 W_{2\overset{0}{x}_2} - W_1 V_{2\overset{0}{x}_2})+\\
&+p'(G) J_{\overset{0}{x}_1} + p''(G) G_{\overset{0}{x}_1} J =\\
&= \mu e^{-G}\left(\frac{4}{3}\left(W_{1x_1\bar{x}_1} - V_{1x_1\bar{x}_1} J\right) + (W_{1x_2\bar{x}_2} - V_{1x_2\bar{x}_2} J) +\right.\\
&\left.+\ \frac{1}{3}(W_{2\overset{0}{x}_1\overset{0}{x}_2} - V_{2\overset{0}{x}_1\overset{0}{x}_2} J)\right) + f_1, \qquad \mathbf{x} \in \Omega_{\bar{h}},
\end{aligned}
\tag{22.5}
$$

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}(V_1 W_{2\overset{0}{x}_1} + W_1 V_{2\overset{0}{x}_1} + (V_1 W_2 + W_1 V_2)_{\overset{0}{x}_1} - V_2 W_{1\overset{0}{x}_1} - W_2 V_{1\overset{0}{x}_1})+\\
&+\tfrac{1}{3}(V_2 W_{2\overset{0}{x}_2} + W_2 V_{2\overset{0}{x}_2} + 2(V_2 W_2)_{\overset{0}{x}_2})+\\
&+p'(G) J_{\overset{0}{x}_2} + p''(G) G_{\overset{0}{x}_2} J =\\
&= \mu e^{-G}\left((W_{2x_1\bar{x}_1} - V_{2x_1\bar{x}_1} J) + \frac{4}{3}\left(W_{2x_2\bar{x}_2} - V_{2x_2\bar{x}_2} J\right) +\right.\\
&\left.+\ \frac{1}{3}(W_{1\overset{0}{x}_1\overset{0}{x}_2} - V_{1\overset{0}{x}_1\overset{0}{x}_2} J)\right) + f_2, \qquad \mathbf{x} \in \Omega_{\bar{h}},\\
&\mathbf{W} = 0, \qquad \mathbf{x} \in \gamma_{\bar{h}}.
\end{aligned}
\tag{22.6}
$$

23 Линеаризация несимметричной схемы для логарифма плотности

Пусть функции (G, V) являются стационарным решением схемы (4.6)-(4.7)

$$\frac{V_m+|V_m|}{2}\frac{G_m-G_{m-1}}{h}+\frac{V_m-|V_m|}{2}\frac{G_{m+1}-G_m}{h}+\frac{V_{m+1}-V_{m-1}}{2h}=0, \quad m=1,\dots,M-1,$$
$$V_1=V_0, \quad V_M=V_{M-1}, \tag{23.1}$$

$$\frac{V_m+|V_m|}{2}\frac{V_m-V_{m-1}}{h}+\frac{V_m-|V_m|}{2}\frac{V_{m+1}-V_m}{h}+\tilde{p}'(G_m)\frac{G_{m+1}-G_{m-1}}{2h}=$$
$$=\mu e^{-G_m}\frac{V_{m+1}-2V_m+V_{m-1}}{h^2}+f_m, \quad m=1,\dots,M-1, \tag{23.2}$$
$$V_0=0, \quad V_M=0.$$

Используя соглашения (21.15) и (21.17), получаем "линеаризованную" систему для этой схемы на паре $(V+W, G+J)$

$$\frac{V_m+|V_m|}{2}\frac{J_m-J_{m-1}}{h}+\Xi(V_m)G_{\bar{x},m}W_m+\frac{V_m-|V_m|}{2}\frac{J_{m+1}-J_m}{h}+\Xi(-V_m)G_{x,m}W_m+$$
$$+\frac{W_{m+1}-W_{m-1}}{2h}=0, \quad m=1,\dots,M-1,$$
$$W_1=W_0, \quad W_M=W_{M-1}, \tag{23.3}$$

$$\frac{V_m+|V_m|}{2}\frac{W_m-W_{m-1}}{h}+\Xi(V_m)V_{\bar{x},m}W_m+\frac{V_m-|V_m|}{2}\frac{W_{m+1}-W_m}{h}+\Xi(-V_m)V_{x,m}W_m+$$
$$+\tilde{p}'(G_m)\frac{J_{m+1}-J_{m-1}}{2h}+\tilde{p}''(G_m)G_{\overset{\circ}{x},m}J_m=$$
$$=\mu e^{-G_m}\frac{W_{m+1}-2W_m+W_{m-1}}{h^2}-\mu e^{-G_m}V_{x\bar{x},m}J_m+f_m, \quad m=1,\dots,M-1,$$
$$W_0=0, \quad W_M=0. \tag{23.4}$$

Приведем линеаризованную систему для схемы (20.2)-(20.5). Как и в одномерном случае обозначим стационарное решение этой схемы $(G, \mathbf{V})$, а его малое возмущение — $(J, \mathbf{W})$.

$$\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{V_k+|V_k|}{2}\frac{J-J^{-1_k}}{h_k}+\Xi(V_k)G_{\bar{x}_k}W_k+\frac{V_k-|V_k|}{2}\frac{J^{+1_k}-J}{h_k}+\right.$$
$$\left.+\Xi(-V_k)G_{x_k}W_k+\frac{W_k{}^{+1_k}-W_k{}^{-1_k}}{2h_k}\right)=0, \qquad \mathbf{x}\in\Omega_{\bar{h}}, \tag{23.5}$$
$$W_k^{+1_k}=W_k, \quad \mathbf{x}\in\gamma_k^-, \quad W_k^{-1_k}=W_k, \quad \mathbf{x}\in\gamma_k^+, \ k=1,2,$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{V_k+|V_k|}{2}\frac{W_q-{W_q}^{-1_k}}{h_k}+\Xi(V_k)V_{q_{\bar{x}_k}}W_k+\frac{V_k-|V_k|}{2}\frac{{W_q}^{+1}-W_k}{h_k}+\right.\\
&\left.+\Xi(-V_k)V_{q_{x_k}}W_k+\tilde{p}'(G)\frac{J^{+1_q}-J^{-1_q}}{2h_q}+\tilde{p}''(G)G_{\overset{\circ}{x}_q}J\right)=\\
&=\mu e^{-G}\left(\frac{4}{3}\frac{{W_q}^{+1_q}-2W_q+{W_q}^{-1_q}}{h_q^2}-\frac{4}{3}V_{q_{x_q\bar{x}_q}}J+\right.\\
&+\sum_{k=1,k\neq q}^{2}\left(\frac{{W_q}^{+1_k}-2W_q+{W_q}^{-1_k}}{h_k^2}-V_{q_{x_k\bar{x}_k}}J+\right.\\
&\left.\left.+\ \frac{W_{k m_1+1,m_2+1}-W_{k m_1-1,m_2+1}-W_{k m_1+1,m_2-1}+W_{k m_1-1,m_2-1}}{4h_1h_2}-V_{k\overset{0}{x}_1\overset{0}{x}_2,\mathbf{m}}J\right)\right)+f_q,\\
&\mathbf{x}\in\Omega_{\mathbf{h}},\quad q=1,2,\qquad \mathbf{W}=0,\quad \mathbf{x}\in\gamma_{\mathbf{h}}.
\end{aligned}
\tag{23.6}
$$

24 Линеаризация схемы ПЛОТНОСТЬ-ИМПУЛЬС

В случае схемы А.Г.Соколова (5.3)-(5.4) стационарное решение (H, V) удовлетворяет системе уравнений

$$
\begin{gathered}
(V_{m+1}-|V_{m+1}|)H_{m+1}+(V_{m+1}+|V_{m+1}|-V_m+|V_m|)H_m-(V_m+|V_m|)H_{m-1}=0,\\
0\le m<M.
\end{gathered}
\tag{24.1}
$$

$$
\begin{gathered}
-((|V_{m-1}|+V_{m-1})H_{m-2}+(|V_m|+V_m)H_{m-1})V_{m-1}+\\
+((|V_{m-1}|-V_{m-1}+|V_m|+V_m)H_{m-1}+(|V_{m+1}|+V_{m+1}+|V_m|-V_m)H_m)V_m-\\
-((|V_m|-V_m)H_m+(|V_{m+1}|-V_{m+1})H_{m+1})V_{m+1}+\\
+\frac{2\gamma}{\gamma-1}(H_m+H_{m-1})\left((H_m)^{\gamma-1}-(H_{m-1})^{\gamma-1}\right)=\\
=4\mu\frac{V_{m-1}-2V_m+V_{m+1}}{h}+2hf_m(H_{m-1}+H_m),\qquad \text{при } H_{m-1}+H_m\neq 0,\\
V_m=0,\qquad \text{при } H_{m-1}+H_m=0,\qquad 0<m<M,\\
V_0=V_M=0.
\end{gathered}
\tag{24.2}
$$

Используя соглашения (21.15) и (21.17), получаем "линеаризацию" этой системы на паре $(V+W, H+R)$

$$
\begin{gathered}
(V_{m+1}-|V_{m+1}|)R_{m+1}+\Xi(-V_{m+1})H_{m+1}W_{m+1}+\\
+(V_{m+1}+|V_{m+1}|-V_m+|V_m|)R_m+\Xi(V_{m+1})H_mW_{m+1}-\Xi(-V_m)H_mW_m-\\
-(V_m+|V_m|)R_{m-1}-\Xi(V_m)H_{m-1}W_m=0,\\
0\le m<M.
\end{gathered}
\tag{24.3}
$$

$$
\begin{gathered}
-((|V_{m-1}|+V_{m-1})H_{m-2}+(|V_m|+V_m)H_{m-1})W_{m-1}-\\
-((|V_{m-1}|+V_{m-1})R_{m-2}+(|V_m|+V_m)R_{m-1})V_{m-1}-\\
-2(\Xi(V_{m-1})H_{m-2}W_{m-1}+\Xi(V_m)H_{m-1}W_m)V_{m-1}+\\
+((|V_{m-1}|-V_{m-1}+|V_m|+V_m)H_{m-1}+(|V_{m+1}|+V_{m+1}+|V_m|-V_m)H_m)W_m+\\
+((|V_{m-1}|-V_{m-1}+|V_m|+V_m)R_{m-1}+(|V_{m+1}|+V_{m+1}+|V_m|-V_m)R_m)V_m+\\
+((-\Xi(-V_{m-1})W_{m-1}+\Xi(V_{m-1})W_{m-1})H_{m-1}+(\Xi(V_{m+1})W_{m+1}-\Xi(-V_m)W_m)H_m)V_m-\\
-((|V_m|-V_m)H_m+(|V_{m+1}|-V_{m+1})H_{m+1})W_{m+1}-\\
-((|V_m|-V_m)R_m+(|V_{m+1}|-V_{m+1})R_{m+1})V_{m+1}+\\
+2(\Xi(-V_m)W_mH_m+\Xi(-V_{m+1})W_{m+1}H_{m+1})V_{m+1}+\\
+\frac{2\gamma}{\gamma-1}(R_m+R_{m-1})\Big((H_m)^{\gamma-1}-(H_{m-1})^{\gamma-1}\Big)+\\
+2\gamma(H_m+H_{m-1})\left((H_m)^{\gamma-2}R_m-(H_{m-1})^{\gamma-1}R_{m-1}\right)=\\
=4\mu\frac{W_{m-1}-2W_m+W_{m+1}}{h}+2hf_m(R_{m-1}+R_m),\qquad \text{при } H_{m-1}+H_m\neq 0,\\
W_m=0,\qquad \text{при } H_{m-1}+H_m=0,\qquad 0<m<M,\\
W_0=W_M=0.
\end{gathered}
\tag{24.4}
$$

Приведем линеаризованную систему для схемы (18.1). Как и в одномерном случае обозначим стационарное решение этой схемы $(H,\mathbf{V})$, а малое возмущение — $(R,\mathbf{W})$.

$$
\begin{gathered}
\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{h_k}\Big(({V_k}^{+1_k}-|{V_k}^{+1_k}|)R^{+1_k}+\Xi(-{V_k}^{+1_k})H^{+1_k}{W_k}^{+1_k}+\\
+({V_k}^{+1_k}-|{V_k}^{+1_k}|-V_k+|V_k|)R+\Xi({V_k}^{+1_k})H{W_k}^{+1_k}-\Xi(-V_k)HW_k-\\
-(V_k+|V_k||)R^{-1_k}-\Xi(V_k)H^{-1_k}V_k\Big)=0,\qquad \mathbf{x}\in\Omega_{\bar h}^{1/2}.
\end{gathered}
\tag{24.5}
$$

$$
\begin{gathered}
-\frac{((|V_{1m_1-1,m_2}|+V_{1m_1-1,m_2})H_{1m_1-2,m_2}+(|V_{1m_1,m_2}|+V_{1m_1,m_2})H_{1m_1-1,m_2})W_{1m_1-1,m_2}}{4h_1}-\\
-\frac{((|V_{1m_1-1,m_2}|+V_{1m_1-1,m_2})R_{1m_1-2,m_2}+(|V_{1m_1,m_2}|+V_{1m_1,m_2})R_{1m_1-1,m_2})V_{1m_1-1,m_2}}{4h_1}-\\
-\frac{1}{2h_1}(\Xi(V_{1m_1-1,m_2})H_{1m_1-2,m_2}W_{1m_1-1,m_2}+\Xi(V_{1m_1,m_2})H_{1m_1-1,m_2}W_{1m_1,m_2})V_{1m_1-1,m_2}+\\
+\frac{1}{4h_1}((|V_{1m_1-1,m_2}|-V_{1m_1-1,m_2}+|V_{1m_1,m_2}|+V_{1m_1,m_2})H_{1m_1-1,m_2}+\\
+(|V_{1m_1+1,m_2}|+V_{1m_1+1,m_2}+|V_{1m_1,m_2}|-V_{1m_1,m_2})H_{1m_1,m_2})W_{1m_1,m_2}+\\
+\frac{1}{4h_1}((|V_{1m_1-1,m_2}|-V_{1m_1-1,m_2}+|V_{1m_1,m_2}|+V_{1m_1,m_2})R_{1m_1-1,m_2}+\\
+(|V_{1m_1+1,m_2}|+V_{1m_1+1,m_2}+|V_{1m_1,m_2}|-V_{1m_1,m_2})R_{1m_1,m_2})V_{1m_1,m_2}+\\
+\frac{1}{2h_1}((-\Xi(-V_{1m_1-1,m_2})W_{1m_1-1,m_2}+\Xi(V_{1m_1,m_2})W_{1m_1,m_2})H_{1m_1-1,m_2}+\\
+(\Xi(V_{1m_1+1,m_2})W_{1m_1+1,m_2}-\Xi(-V_{1m_1,m_2})W_{1m_1,m_2})H_{1m_1,m_2})V_{1m_1,m_2}-\\
-\frac{((|V_{1m_1,m_2}|-V_{1m_1,m_2})H_{1m_1,m_2}+(|V_{1m_1+1,m_2}|-V_{1m_1+1,m_2})H_{1m_1+1,m_2})W_{1m_1+1,m_2}}{4h_1}-\\
-\frac{((|V_{1m_1,m_2}|-V_{1m_1,m_2})R_{1m_1,m_2}+(|V_{1m_1+1,m_2}|-V_{1m_1+1,m_2})R_{1m_1+1,m_2})V_{1m_1+1,m_2}}{4h_1}+\\
+\frac{1}{2h_1}(\Xi(-V_{1m_1,m_2})H_{1m_1,m_2}W_{1m_1,m_2}+\Xi(-V_{1m_1+1,m_2})H_{1m_1+1,m_2}W_{1m_1+1,m_2})V_{1m_1+1,m_2}-
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
-\frac{((|V_{1m_1,m_2-1}|+V_{1m_1,m_2-1})H_{2m_1,m_2-2}+(|V_{1m_1,m_2}|+V_{1m_1,m_2})H_{2m_1,m_2-1})W_{2m_1,m_2-1}}{4h_2}-\\
-\frac{((|V_{1m_1,m_2-1}|+V_{1m_1,m_2-1})R_{2m_1,m_2-2}+(|V_{1m_1,m_2}|+V_{1m_1,m_2})R_{2m_1,m_2-1})V_{2m_1,m_2-1}}{4h_2}-\\
-\frac{1}{2h_2}(\Xi(V_{1m_1,m_2-1})H_{2m_1,m_2-2}W_{1m_1,m_2-1}+\Xi(V_{1m_1,m_2})H_{2m_1,m_2-1}W_{1m_1,m_2})V_{2m_1,m_2-1}+\\
+\frac{1}{4h_2}((|V_{1m_1,m_2-1}|-V_{1m_1,m_2-1}+|V_{1m_1,m_2}|+V_{1m_1,m_2})H_{2m_1,m_2-1}+\\
+(|V_{1m_1,m_2+1}|+V_{1m_1,m_2+1}+|V_{1m_1,m_2}|-V_{1m_1,m_2})H_{2m_1,m_2})W_{2m_1,m_2}+\\
+\frac{1}{4h_2}((|V_{1m_1,m_2-1}|-V_{1m_1,m_2-1}+|V_{1m_1,m_2}|+V_{1m_1,m_2})R_{2m_1,m_2-1}+\\
+(|V_{1m_1,m_2+1}|+V_{1m_1,m_2+1}+|V_{1m_1,m_2}|-V_{1m_1,m_2})R_{2m_1,m_2})V_{2m_1,m_2}+\\
+\frac{1}{2h_2}((-\Xi(-V_{1m_1,m_2-1})W_{1m_1,m_2-1}+\Xi(V_{1m_1,m_2})W_{1m_1,m_2})H_{2m_1,m_2-1}+\\
+(\Xi(V_{1m_1,m_2+1})W_{1m_1,m_2+1}-\Xi(-V_{1m_1,m_2})W_{1m_1,m_2})H_{2m_1,m_2})V_{2m_1,m_2}-\\
-\frac{((|V_{1m_1,m_2}|-V_{1m_1,m_2})H_{2m_1,m_2}+(|V_{1m_1,m_2+1}|-V_{1m_1,m_2+1})H_{2m_1,m_2+1})W_{2m_1,m_2+1}}{4h_2}-\\
-\frac{((|V_{1m_1,m_2}|-V_{1m_1,m_2})R_{2m_1,m_2}+(|V_{1m_1,m_2+1}|-V_{1m_1,m_2+1})R_{2m_1,m_2+1})V_{2m_1,m_2+1}}{4h_2}+\\
+\frac{1}{2h_2}(\Xi(-V_{1m_1,m_2})H_{2m_1,m_2}W_{1m_1,m_2}+\Xi(-V_{1m_1,m_2+1})H_{2m_1,m_2+1}W_{1m_1,m_2+1})V_{2m_1,m_2+1}+\\
+\frac{\gamma}{\gamma-1}\tilde{R}_{m_1,m_2}\frac{(H_{1m_1,m_2})^{\gamma-1}-(H_{1m_1-1,m_2})^{\gamma-1}}{h_1}+\\
+\gamma\tilde{H}_{m_1,m_2}\frac{(H_{1m_1,m_2})^{\gamma-2}R_{1m_1,m_2}-(H_{1m_1-1,m_2})^{\gamma-2}R_{1m_1-1,m_2}}{h_1}=\\
=\mu\left(\frac{4}{3}\frac{W_{1m_1-1,m_2}^{n+1}-2W_{1m_1,m_2}^{n+1}+W_{1m_1+1,m_2}^{n+1}}{h_1^2}+\frac{W_{1m_1,m_2-1}^{n+1}-2W_{1m_1,m_2}^{n+1}+W_{1m_1,m_2+1}^{n+1}}{h_2^2}\right)+\\
+\frac{\mu}{3}\frac{W_{2m_1-1,m_2-1}^{n}-W_{2m_1-1,m_2+1}^{n}-W_{2m_1+1,m_2-1}^{n}+W_{2m_1+1,m_2+1}^{n}}{4h_1h_2}+f_{1m_1,m_2}^{n+1}\tilde{R}_{m_1,m_2}^{n+1},\\
\text{при } \tilde{H}^{n+1}\neq 0,\\
\hat{W}_1=0,\qquad \text{при } \tilde{H}^{n+1}=0,\qquad \mathbf{x}\in\Omega_{\bar{h}},\\
\hat{W}_1=0,\qquad \mathbf{x}\in\gamma_{\bar{h}}.
\end{gathered}
\tag{24.6}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{((|V_{2m_1-1,m_2}|+V_{2m_1-1,m_2})H_{1m_1-2,m_2}+(|V_{2m_1,m_2}|+V_{2m_1,m_2})H_{1m_1-1,m_2})W_{1m_1-1,m_2}}{4h_1}-\\
&-\frac{((|V_{2m_1-1,m_2}|+V_{2m_1-1,m_2})R_{1m_1-2,m_2}+(|V_{2m_1,m_2}|+V_{2m_1,m_2})R_{1m_1-1,m_2})V_{1m_1-1,m_2}}{4h_1}-\\
&-\frac{1}{2h_1}(\Xi(V_{2m_1-1,m_2})H_{1m_1-2,m_2}W_{2m_1-1,m_2}+\Xi(V_{2m_1,m_2})H_{1m_1-1,m_2}W_{2m_1,m_2})V_{1m_1-1,m_2}+\\
&+\frac{1}{4h_1}((|V_{2m_1-1,m_2}|-V_{2m_1-1,m_2}+|V_{2m_1,m_2}|+V_{2m_1,m_2})H_{1m_1-1,m_2}+\\
&+(|V_{2m_1+1,m_2}|+V_{2m_1+1,m_2}+|V_{2m_1,m_2}|-V_{2m_1,m_2})H_{1m_1,m_2})W_{1m_1,m_2}+\\
&+\frac{1}{4h_1}((|V_{2m_1-1,m_2}|-V_{2m_1-1,m_2}+|V_{2m_1,m_2}|+V_{2m_1,m_2})R_{1m_1-1,m_2}+\\
&+(|V_{2m_1+1,m_2}|+V_{2m_1+1,m_2}+|V_{2m_1,m_2}|-V_{2m_1,m_2})R_{1m_1,m_2})V_{1m_1,m_2}+\\
&+\frac{1}{2h_1}((-\Xi(-V_{2m_1-1,m_2})W_{2m_1-1,m_2}+\Xi(V_{2m_1,m_2})W_{2m_1,m_2})H_{1m_1-1,m_2}+\\
&+(\Xi(V_{2m_1+1,m_2})W_{2m_1+1,m_2}-\Xi(-V_{2m_1,m_2})W_{2m_1,m_2})H_{1m_1,m_2})V_{1m_1,m_2}-\\
&-\frac{((|V_{2m_1,m_2}|-V_{2m_1,m_2})H_{1m_1,m_2}+(|V_{2m_1+1,m_2}|-V_{2m_1+1,m_2})H_{1m_1+1,m_2})W_{1m_1+1,m_2}}{4h_1}-\\
&-\frac{((|V_{2m_1,m_2}|-V_{2m_1,m_2})R_{1m_1,m_2}+(|V_{2m_1+1,m_2}|-V_{2m_1+1,m_2})R_{1m_1+1,m_2})V_{1m_1+1,m_2}}{4h_1}+\\
&+\frac{1}{2h_1}(\Xi(-V_{2m_1,m_2})H_{1m_1,m_2}W_{2m_1,m_2}+\Xi(-V_{2m_1+1,m_2})H_{1m_1+1,m_2}W_{2m_1+1,m_2})V_{1m_1+1,m_2}-
\end{aligned}
$$

$$
\begin{gathered}
-\frac{((|V_{2m_1,m_2-1}|+V_{2m_1,m_2-1})H_{2m_1,m_2-2}+(|V_{2m_1,m_2}|+V_{2m_1,m_2})H_{2m_1,m_2-1})W_{2m_1,m_2-1}}{4h_2}-\\
-\frac{((|V_{2m_1,m_2-1}|+V_{2m_1,m_2-1})R_{2m_1,m_2-2}+(|V_{2m_1,m_2}|+V_{2m_1,m_2})R_{2m_1,m_2-1})V_{2m_1,m_2-1}}{4h_2}-\\
-\frac{1}{2h_2}(\Xi(V_{2m_1,m_2-1})H_{2m_1,m_2-2}W_{2m_1,m_2-1}+\Xi(V_{2m_1,m_2})H_{2m_1,m_2-1}W_{2m_1,m_2})V_{2m_1,m_2-1}+\\
+\frac{1}{4h_2}((|V_{2m_1,m_2-1}|-V_{2m_1,m_2-1}+|V_{2m_1,m_2}|+V_{2m_1,m_2})H_{2m_1,m_2-1}+\\
+(|V_{2m_1,m_2+1}|+V_{2m_1,m_2+1}+|V_{2m_1,m_2}|-V_{2m_1,m_2})H_{2m_1,m_2})W_{2m_1,m_2}+\\
+\frac{1}{4h_2}((|V_{2m_1,m_2-1}|-V_{2m_1,m_2-1}+|V_{2m_1,m_2}|+V_{2m_1,m_2})R_{2m_1,m_2-1}+\\
+(|V_{2m_1,m_2+1}|+V_{2m_1,m_2+1}+|V_{2m_1,m_2}|-V_{2m_1,m_2})R_{2m_1,m_2})V_{2m_1,m_2}+\\
+\frac{1}{2h_2}((-\Xi(-V_{2m_1,m_2-1})W_{2m_1,m_2-1}+\Xi(V_{2m_1,m_2})W_{2m_1,m_2})H_{2m_1,m_2-1}+\\
+(\Xi(V_{2m_1,m_2+1})W_{2m_1,m_2+1}-\Xi(-V_{2m_1,m_2})W_{2m_1,m_2})H_{2m_1,m_2})V_{2m_1,m_2}-\\
-\frac{((|V_{2m_1,m_2}|-V_{2m_1,m_2})H_{2m_1,m_2}+(|V_{2m_1,m_2+1}|-V_{2m_1,m_2+1})H_{2m_1,m_2+1})W_{2m_1,m_2+1}}{4h_2}-\\
-\frac{((|V_{2m_1,m_2}|-V_{2m_1,m_2})R_{2m_1,m_2}+(|V_{2m_1,m_2+1}|-V_{2m_1,m_2+1})R_{2m_1,m_2+1})V_{2m_1,m_2+1}}{4h_2}+\\
+\frac{1}{2h_2}(\Xi(-V_{2m_1,m_2})H_{2m_1,m_2}W_{2m_1,m_2}+\Xi(-V_{2m_1,m_2+1})H_{2m_1,m_2+1}W_{2m_1,m_2+1})V_{2m_1,m_2+1}+\\
+\frac{\gamma}{\gamma-1}\tilde{R}_{m_1,m_2}\frac{(H_{2m_1,m_2})^{\gamma-1}-(H_{2m_1,m_2-1})^{\gamma-1}}{h_2}+\\
+\gamma\tilde{H}_{m_1,m_2}\frac{(H_{2m_1,m_2})^{\gamma-2}R_{2m_1,m_2}-(H_{2m_1,m_2-1})^{\gamma-2}R_{2m_1,m_2-1}}{h_2}=\\
=\mu\left(\frac{W_{2m_1-1,m_2}^{n+1}-2W_{2m_1,m_2}^{n+1}+W_{2m_1+1,m_2}^{n+1}}{h_1^2}+\frac{4}{3}\frac{W_{2m_1,m_2-1}^{n+1}-2W_{2m_1,m_2}^{n+1}+W_{2m_1,m_2+1}^{n+1}}{h_2^2}\right)+\\
+\frac{\mu}{3}\frac{W_{1m_1-1,m_2-1}^{n}-W_{1m_1-1,m_2+1}^{n}-W_{1m_1+1,m_2-1}^{n}+W_{1m_1+1,m_2+1}^{n}}{4h_1h_2}+f_{2m_1,m_2}^{n+1}\tilde{R}_{m_1,m_2}^{n+1},\\
\text{при } \tilde{H}^{n+1}\neq 0,\\
\hat{W}_2=0,\qquad \text{при } \tilde{H}^{n+1}=0,\qquad \mathbf{x}\in\Omega_{\bar{h}},\\
\hat{W}_2=0,\qquad \mathbf{x}\in\gamma_{\bar{h}}.
\end{gathered}
\tag{24.7}
$$

В уравнениях (24.6)-(24.7) через функции R_1, R_2 и $\tilde{R}$ по аналогии с формулами (18.5) были обозначены выражения

$$
(\tilde{R})_{m_1,m_2}^{n}=\frac{R_{m_1,m_2}^{n}+R_{m_1,m_2-1}^{n}+R_{m_1-1,m_2}^{n}+R_{m_1-1,m_2-1}^{n}}{4},
$$

$$
(R_1)_{m_1,m_2}^{n}=\frac{R_{m_1,m_2}^{n}+R_{m_1,m_2-1}^{n}}{2},\qquad (R_2)_{m_1,m_2}^{n}=\frac{R_{m_1,m_2}^{n}+R_{m_1-1,m_2}^{n}}{2}. \tag{24.8}
$$

25 Линеаризация схемы ПЛОТНОСТЬ-СКОРОСТЬ

В случае схемы (5.5)-(5.6) стационарное решение (H,V) удовлетворяет системе уравнений

$$
(\sigma\{H,V\}V)_x=0,\qquad 0\le m<M, \tag{25.1}
$$

$$
\begin{aligned}
&H_{\bar{s}}\delta\{V,V\}+\frac{\gamma}{\gamma-1}H_{\bar{s}}((H)^{\gamma-1})_{\bar{x}}=\mu V_{x\bar{x}}+H_{\bar{s}}f, \qquad \text{при } H_{\bar{s}}\neq 0,\\
&V=0, \qquad \text{при } H_{\bar{s}}=0, \qquad 0<m<M,\\
&V_0=V_M=0.
\end{aligned}
\tag{25.2}
$$

Первая часть "линеаризованной"системы для уравнений (25.1) полностью совпадают с уравнениями (24.3), а для уравнений (25.2) получаем

$$
\begin{aligned}
&H_{\bar{s}}\left(\frac{V+|V|}{2}W_{\bar{x}}+\Xi(V)V_{\bar{x}}W+\frac{V-|V|}{2}W_x+\Xi(-V)V_xW\right)+\\
&+R_{\bar{s}}\delta\{V,V\}+\frac{\gamma}{\gamma-1}R_{\bar{s}}((H)^{\gamma-1})_{\bar{x}}+\gamma H_{\bar{s}}((H)^{\gamma-2}R)_{\bar{x}}=\mu W_{x\bar{x}}+R_{\bar{s}}f, \qquad \text{при } H_{\bar{s}}\neq 0,\\
&W=0, \qquad \text{при } H_{\bar{s}}=0, \qquad 0<m<M,\\
&W_0=W_M=0.
\end{aligned}
\tag{25.3}
$$

Аналогично в двумерном случае первая часть "линеаризованной" системы совпадает с уравнениями (24.5), а для второго и третьего уравнений схемы (19.1) получаем

$$
\begin{aligned}
&\tilde{H}\left(\frac{V_1+|V_1|}{2}W_{1\bar{x}_1}+\Xi(V_1)V_{1\bar{x}_1}W_1+\frac{V_1-|V_1|}{2}W_{1x_1}+\Xi(-V_1)V_{1x_1}W_1+\right.\\
&\left.+\frac{V_2+|V_2|}{2}W_{1\bar{x}_2}+\Xi(V_2)V_{1\bar{x}_2}W_2+\frac{V_2-|V_2|}{2}W_{1x_2}+\Xi(-V_2)V_{1x_2}W_2\right)+\\
&+\tilde{R}\left(\delta_1\{V_1,V_1\}+\delta_2\{V_1,V_2\}\right)+\frac{\gamma}{\gamma-1}\tilde{R}((H_{\bar{s}_2})^{\gamma-1})_{\bar{x}_1}+\gamma\tilde{H}((H_{\bar{s}_2})^{\gamma-2}R_{\bar{s}_2})_{\bar{x}_1}=\\
&=\mu\left(\frac{4}{3}W_{1x_1\bar{x}_1}+W_{1x_2\bar{x}_2}+\frac{1}{3}W_{2\overset{0}{x}_1\overset{0}{x}_2}\right)+\tilde{R}f, \qquad \text{при } \tilde{H}\neq 0,\\
&W_1=0, \qquad \text{при } \tilde{H}=0, \qquad \mathbf{x}\in\Omega_{\bar{h}},\\
&W_1=0, \qquad \mathbf{x}\in\gamma_{\bar{h}}.
\end{aligned}
\tag{25.4}
$$

$$
\begin{aligned}
&\tilde{H}\left(\frac{V_1+|V_1|}{2}W_{2\bar{x}_1}+\Xi(V_1)V_{2\bar{x}_1}W_1+\frac{V_1-|V_1|}{2}W_{2x_1}+\Xi(-V_1)V_{2x_1}W_1+\right.\\
&\left.+\frac{V_2+|V_2|}{2}W_{2\bar{x}_2}+\Xi(V_2)V_{2\bar{x}_2}W_2+\frac{V_2-|V_2|}{2}W_{2x_2}+\Xi(-V_2)V_{2x_2}W_2\right)+\\
&+\tilde{R}\left(\delta_1\{V_2,V_1\}+\delta_2\{V_2,V_2\}\right)+\frac{\gamma}{\gamma-1}\tilde{R}((H_{\bar{s}_1})^{\gamma-1})_{\bar{x}_2}+\gamma\tilde{H}((H_{\bar{s}_1})^{\gamma-2}R_{\bar{s}_1})_{\bar{x}_2}=\\
&=\mu\left(W_{2x_1\bar{x}_1}+\frac{4}{3}W_{2x_2\bar{x}_2}+\frac{1}{3}W_{1\overset{0}{x}_1\overset{0}{x}_2}\right)+\tilde{R}f, \qquad \text{при } \tilde{H}\neq 0,\\
&W_2=0, \qquad \text{при } \tilde{H}=0, \qquad \mathbf{x}\in\Omega_{\bar{h}},\\
&W_2=0, \qquad \mathbf{x}\in\gamma_{\bar{h}}.
\end{aligned}
\tag{25.5}
$$

26 Задания практикума 2016 г.

Первое задание

Написать программу на языке Си, которая по определенной разностной схеме методом установления находит стационарное решение краевой задачи протекания газа через указанную область. В программе использовать логическую основу и обозначения программы, разобранной в пособии.

Для решения СЛАУ должна использоваться подпрограмма пакета Laspack, реализующая однин из методов CGS или BiCGSTAR. Разностная схема, область и тип итерационного процесса определяются номером задания.

В отчет о выполнении задания должны быть включены следующие пункты.

1. Постановки решенных дифференциальных задач.

2. Подробное описание алгоритма разностной схемы. В том числе обязательно должны быть приведены поточечная запись разностных уравнений и элементов матриц и правых частей алгебраических задач, которые требуется решить (см. 8).

3. Описание тестовых расчетов и полученных результатов:

а) расчет точного гладкого решения (см. 13);

б) результаты расчета задачи протекания, снабженные графическими иллюстрациями.

4. Отчет должен содержать выводы о точности расчетов по применяемой разностной схеме и характере течения в зависимости от значений параметров μ и p_ρ. Значения этих параметров следует брать из диапазонов $[0,001;\ 0,1]$ и $[1.0;\ 100]$ соответственно.

Второе задание

Найти спектр линеаризованного разностного оператора схемы из первого задания на найденном стационарном решении.

Третье задание

Написать подпрограмму для решения СЛАУ итерационным методом с предобуславливателем, использованным в первом задании и учитывающем структуру матрицы решаемой системы. Критерием правильности работы подпрограммы является получение таблиц погрешностей, аналогичных таблицам параграфа 13 и сокращение требуемого времени счета для тестов. Отдельно провести исследование эффективности использования предобуславливателя. Критерием эффективности служит время расчета тестов при одном порядке точности получаемых результатов. По результатам расчетных тестов сделать вывод об оптимальном значении параметра предобуславливателя.

Таблица вариантов заданий

номер задания	схема	область	итерационный метод	предобуславливатель
1	18	1	CGS	SSOR
2	18	2	CGS	Якоби
3	18	3	BiCGtab	SSOR
4	18	4	BiCGtab	Якоби
5	19	5	CGS	SSOR
6	19	6	CGS	Якоби
7	19	7	BiCGtab	SSOR
8	19	8	BiCGtab	Якоби
9	20	9	CGS	SSOR
10	20	10	CGS	Якоби
11	20	11	BiCGtab	SSOR
12	20	12	BiCGtab	Якоби
13	8	13	CGS	SSOR
14	8	14	CGS	Якоби
15	8	15	BiCGtab	SSOR
16	8	16	BiCGtab	Якоби

Список литературы

[1] Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983.

[2] Ф.Б.Имранов, Г.М.Кобельков, А.Г.Соколов Разностная схема для баротропного газа с энергетическим неравенством и ее применение к задаче мелкой воды. /в печати/

[3] Попов А.В., Жуков К.А. Неявная разностная схема для нестационарного движения вязкого баротропного газа. //Вычислительные методы и программирование. т.14, 2013 г. N 2. с. 516-523.

[4] Saad Y. Iterative methods for sparse linear systems. SIAM, 2ed., 2003.

[5] Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики жидкостей и газов. Новосибирск: Наука, 1983, 320 с.

[6] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2000 г. - 624 с.

[7] Попов А.В. Gnuplot и его приложения. М.: Изд-во попечительского совета механико-математического факультета МГУ, 2015. graphics/gnuplot/docs/gdoc.pdf

[8] Chizhonkov E.V. Numerical aspects of one stabilization method. //Russ.J.Numer.Anal.Math.Modelling. 2003. V.18, N.5, P. 363-376.

[9] Ведерникова Э.Ю., Корнев А.А. К задаче о нагреве стержня. // Вест. Моск. ун-та, Сер. 1, Математика и механика, 2014, N. 6, с. 10-15.

[10] Иванчиков А.А., Корнев А.А., Озерицкий А.В. О новом подходе к решению задач асимптотической стабилизации. // ЖВМиМФ, 2009, Т.49, N.12, с. 2167-2181.

[11] Корнев А.А. Численное моделирование процесса асимптотической стабилизации по краевым условиям квазидвумерного течения четырехвихревой структуры. // Математическое моделирование, 2016 (в печати).