W1.L1. 《数值线性代数》. 1.1. done.

《矩阵计算》. Gene. Van loan.

《矩阵计算的理论与方法》 徐树方

60% 40% 作业 附加分.

数值计算 $\begin{cases} Ax=b & \text{线性} \\ f(x)=0 & \text{非线性} \end{cases}$

vector 默认 $\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$

e.g. n个未知数, n个方程.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

write as $Ax=b$

$A=(a_{ij})$ 为系数矩阵. $x=(x_1 \cdots x_n)^T$ 为解向量.

$b=(b_1 \cdots b_n)^T$. 为常向量

$\det A \neq 0$ 时. 由 Cramer 法则 解存在且唯一.

Cramer 法则

$x_i = \frac{d_i}{d}$. $d=\det A$. $d_i=\det A_i$. A_i 为系数矩阵 A 中第 i 列换为 b.

计算 n 阶行列式. 乘法: $n!(n-1)$ 次

总: $(n+1)\, n!\,(n-1) = (n+1)!\,(n-1)$

慢. 用消元法. $< 1s$

数值算法

- 线性方程组的数值求解

直接法. 经过有限次运算得到方程组的精确解. Ch 1.2

迭代法. 从初始向量出发, 按一定计算格式 构成向量序列 $\{x^{(k)}\}$.

使 $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*$. x^* 满足 $Ax=b$ Ch. 4.5

- 线性最小二乘问题 Ch 3.

- 矩阵特征值 Ch 6.7

LAPACK. C/C++

MATLAB 北大天元

直接法

Cramer's law

LU分解.

$Lx=b$ $\quad Ux=b$

上三角. 下三角. 算法 $O(n^2)$.

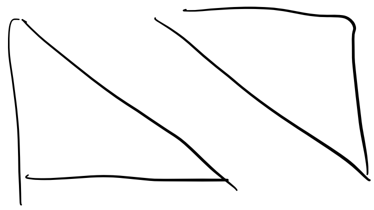
(前代法). (回代法).

Gauss. 消元法.

$Ax=b$. 增广矩阵. (A,b)

消元法. 作行的初等变换. 得 $(\tilde{A},\tilde{b})$. 则 $\tilde{A}x=\tilde{b}$ 为 $Ax=b$ 的同解方程组.

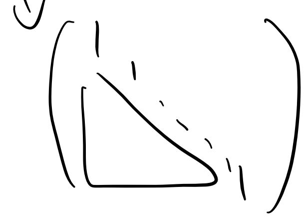
$\xrightarrow{\text{行变换}}$ 三角形矩阵



$L_k\cdots L_1 A = U$

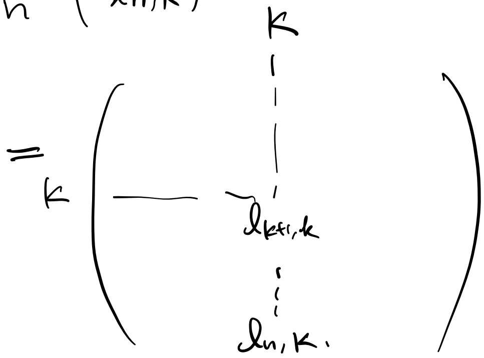
$A = L_1^{-1}L_2^{-1}\cdots L_k^{-1}U$

$= \underline{L}U$



单位下三角阵

$$l_k e_k^T \quad \begin{array}{c} \\ \\ k+1 \\ \vdots \\ n \end{array}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ l_{k+1,k} \\ \vdots \\ l_{n,k} \end{pmatrix} (0\ 0 \cdots 0\ 1\ 0 \cdots 0).$$



$$L_k = I - l_k e_k^T \qquad (\text{prop. } L_k^{-1} = I + l_k e_k^T).$$

三角分解. $O(n^3)$. 求 $Ax=b$

① Gauss 消元 $\qquad$ ②.

$A=LU$. $\quad Ax=b. \Leftrightarrow L\underbrace{Ux}_{y}=b \qquad Ly=b. \Rightarrow y$

③ $Ux=y \Rightarrow x$.

Thm. 1.1.1

主元 $a_{ii}^{(i-1)}$ $(i=1,\dots,k)$ 均不为零 iff

A 的 i 阶顺序主子式非奇异。$(i=1,\dots k)$

---

pf 对 k 作归纳法

$k=1$. $A_1=a_{11}^{(0)}$ ✓

假定 $k-1$ ✓

只需证明 若 $A_1,\dots,A_{k-1}$ 非奇异，

则 A_k 非奇异 $\Leftrightarrow$ $a_{kk}^{(k-1)}\neq 0$

$a_{ii}^{(i-1)}\neq 0$ $(i=1,\dots,k-1)$,

$\Rightarrow$ Gauss 消去过程至少进行 $k-1$ 步 → 对角元 $a_{ii}^{(i-1)}$ $(i=1,\dots,k-1)$ 的上三角阵

$$\Rightarrow A^{(k-1)}=L_{k-1}\cdots L_1 A=\begin{bmatrix} A_{11}^{(k-1)} & A_{12}^{(k-1)} \\ 0 & A_{22}^{(k-1)}\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ $A^{(k-1)}$ 的 k 阶顺序主子阵：$\begin{bmatrix} A_{11}^{(k-1)} & * \\ & a_{kk}^{(k-1)}\end{bmatrix}$

将 $L_1,\dots,L_{k-1}$ 的 k 阶顺序主子阵记为 $(L_1)_k\ \dots\ (L_{k-1})_k$.

则 $(L_{k-1})_k(L_{k-2})_k\cdots(L_1)_kA_k=\begin{bmatrix} A_{11}^{(k-1)} & * \\ & a_{kk}^{(k-1)}\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \det A_k=a_{kk}^{(k-1)}\det A_{11}^{(k-1)}$$

□

Thm 1.1.2. 若 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 的顺序主子阵 $A_k\in\mathbb{R}^{k\times k}$ $(k=1,\dots,n-1)$ 均非奇异，

则 $\exists!$ 单位下三角阵 $L\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 和上三角阵 $U\in\mathbb{R}^{n\times n}$ s.t. $A=LU$.