W1L2

Frenet 公式

$$\begin{cases} \dot{T} = k(s)N \\ \dot{N} = -k(s)T + \tau(s)B \\ \dot{B} = -\tau(s)N \end{cases}$$

$dT = k(s)N\,ds$

$dN = -k(s)T\,ds + \tau(s)B\,ds$

$dB = -\tau(s)N\,ds$

τ 理解

出　例

$\longrightarrow$ ODE 问题

$$\begin{pmatrix} \dot{T} \\ \dot{N} \\ \dot{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ -k(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

反对称矩阵

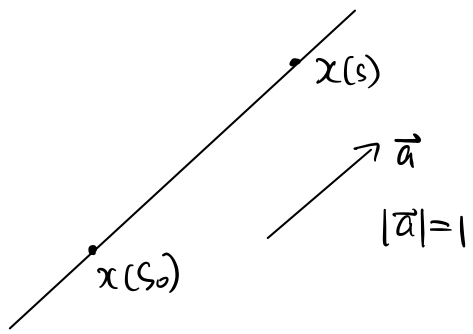
$k(s)=0$ 时，N，B 不唯确定。一般保证 $k(s)\neq 0 \Rightarrow$ N，B 唯一。

例1 C是直线 $\Leftrightarrow k(s)=0$　　　直线的特征

Pf. ($\Rightarrow$)

$x(s) - x(s_0) = s\vec{a}$

即 $x(s)$ 可写成 $s\vec{a}+\vec{b}$



$\dot{x} = \vec{a}$　且 $|\dot{x}| = |\vec{a}| = 1$

$\Rightarrow \dot{T} = \ddot{x} = \dot{\vec{a}} = 0 \Rightarrow k(s)=0$

($\Leftarrow$)

$k(s)=0$，$\ddot{x}=0$

$\Rightarrow \dot{x} = \vec{a}$ 为常向量 $\Rightarrow x = \vec{a}s + \vec{b}$，为直线方程　□

只有一个点 $k(s)=0$？避开这个点。　一段？那这一段就为直线段。

例2 曲线C是平面曲线 $\iff \tau=0$ 平面曲线的特征

Pf. ($\Rightarrow$). 若C为平面曲线

平面的法向用 $\vec{n}_0$. $|\vec{n}_0|=1$ 为常向量

$$(x(s)-x(s_0))\cdot\vec{n}_0=0$$

$$\dot{x}\cdot\vec{n}_0=0 \quad \left\{\begin{array}{l} T\cdot n_0=0 \\ \dot{T}\cdot n_0=0 \end{array}\right. \text{求导}$$

let $k\neq 0$. $\Rightarrow N\cdot n_0=0$

$$\Rightarrow B /\!/ n_0 \Rightarrow \dot{B}=0 \Rightarrow \tau=0$$

($\Leftarrow$) $\tau(s)=0$

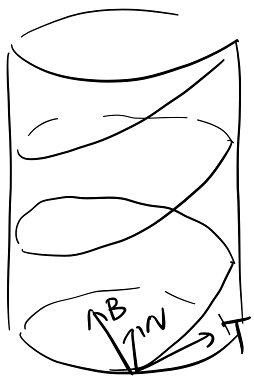
$\Rightarrow \dot{B}=0$

设 $B=n_0$ 为常向量.

$$\frac{d}{ds}(x(s)\cdot n_0)=T(s)n_0=T\cdot B=0$$

$$\Rightarrow x(s)\cdot n_0=\text{常数}=x(s_0)\cdot n_0 \Rightarrow (x(s)-x(s_0))n_0=0$$

例3. 圆柱螺线



角速度 速率.

$$x(s)=(r\cos\sigma s,\ r\sin\sigma s,\ bs)$$

$$\dot{x}(s)=(-r\sigma\sin\sigma s,\ r\sigma\cos\sigma s,\ b)$$

$$1=|\dot{x}(s)|^2=r^2\sigma^2+b^2 \Rightarrow \text{write } b \text{ as } a\sigma$$

$$\Rightarrow (r^2+a^2)\sigma^2=1 \quad \text{需满足 } \sigma=\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2}}$$

$$\ddot{x} = (-r\sigma^2\cos\sigma s, -r\sigma^2\sin\sigma s, 0)$$

$$k(s) = |\ddot{x}| = r\sigma^2$$

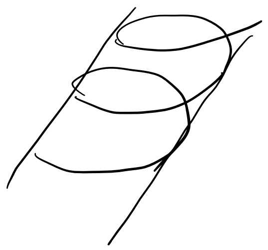
$$\dddot{x} = (r\sigma^3\sin\sigma s, -r\sigma^3\cos\sigma s, 0)$$

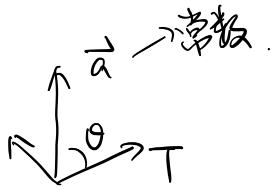
$\Rightarrow \tau(s) = a\sigma^2$　　$k(s)$, $\tau(s)$ 均为常数.

$\Updownarrow$ △

圆柱螺线

例 一般螺线





曲线切向量与固定方向成固定角 则曲线为一般螺线

非直的一般螺线 $\Longleftrightarrow$ $\frac{\tau}{k}$ 为常数.

T 一直转

但 τ 与 k 比为常数

"同步"

$(\Rightarrow)$. $\exists$ 常向量 $\vec{a}$　$|\vec{a}|=1$.

$T(s)\cdot a = \cos\theta$　θ 为固定角　　求导. 再求导 ....

$$kN\cdot a = \dot{T}(s)\cdot a = 0$$

我们想对常向量求导! 故去表示 a.

$k\neq 0 \Rightarrow \boxed{a = \cos\theta\, T + \sin\theta\, B}$

求导 $\Rightarrow 0 = \cos\theta(kN) + \sin\theta(-\tau N)$

$= (\cos\theta\, k - \sin\theta\, \tau)N \Rightarrow \frac{\tau}{k} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta$

$(\Leftarrow)$ $\frac{\tau}{k}$ = 常数 $= \cot\theta$

令 $a = \cos\theta\, T + \sin\theta\, B$

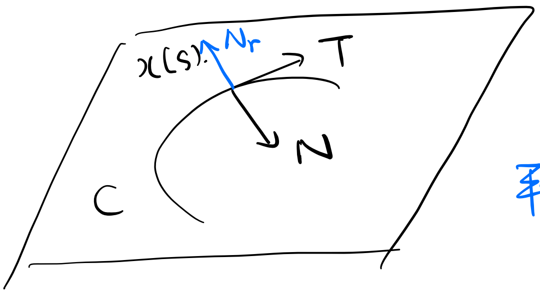
$\dot{a} = (k\cos\theta - \tau\sin\theta)N \Rightarrow \vec{a}$ 为常向量

$\Rightarrow \vec{a}\cdot T = \cos\theta$ 固定夹角 $\Rightarrow$ 一般螺线

一般参数下曲率 $k(t) = \dfrac{|x' \times x''|}{|x'|^3}$ $\tau(t) = \dfrac{(x', x'', x''')}{|x' \times x''|^2}$ 考试，可以记一下

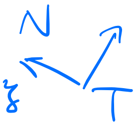
方法，换参数。

平面曲线



$\tau \equiv 0$

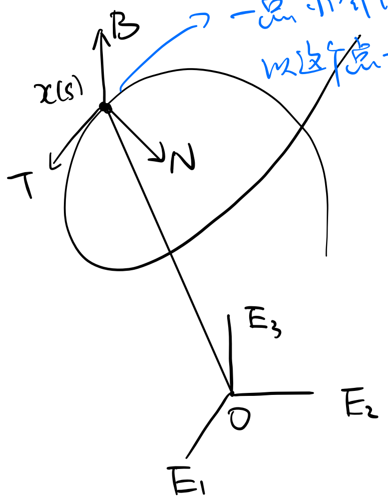
平面曲线 法向习惯于选 右手系



$N_r = \varepsilon N$ $\varepsilon = \pm 1$. 相对法向量

$$\begin{cases} \dot{T} = k(s) N \\ \dot{N} = -k(s) T \end{cases} \qquad \begin{aligned} \dot{T} &= \varepsilon k(s) \cdot (\varepsilon N) = k_r(s) N_r \\ \varepsilon \dot{N} &= \dot{N}_r = -k_r(s) T \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{T} = k_r(s) N_r \\ \dot{N}_r = -k_r(s) T. \end{cases}$$



一点小邻域中. 以这个点为坐标基点. 看看曲线情况

以 (T, N, B) 为标架.

$x: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$\quad\;\; \overset{\cup}{0}$

△ check.

$$x(s) - x(0) = \dot{x}(0) s + \frac{1}{2!} \ddot{x}(0) s^2 + \frac{1}{3!} \dddot{x}(0) s^3 + R(s)$$

$$\dot{x}(0) = T(0)$$

$$\ddot{x}(0) = \dot{T}(s)\big|_{s=0} = k(0) N(0)$$

$$\dddot{x}(0) = \frac{d(k(s)N(s))}{ds}\Big|_{s=0} = k'(0)N(0) + k(0)\dot{N}(0)$$

$$= k'(0)N(0) + k(0)\left(-k(0)T(0) + \tau(0)B(0)\right)$$

$$= -k^2(0)T(0) + k'(0)N(0) + k(0)\tau(0)B(0)$$

$$\Rightarrow x(s) - x(0) = T(0)s + \frac{1}{2}k(0)s^2N(0) + \frac{1}{6}s^3\left(-k^2(0)T(0) + k'(0)N(0) + k(0)\tau(0)B(0)\right)$$

$$= \left(s - \frac{k^2(0)}{6}s^3 + R_1(s)\right)T(0) + \left(\frac{1}{2}k(0)s^2 + \frac{1}{6}k'(0)s^3 + R_2(s)\right)N(0) + \left(\frac{1}{6}k(0)\tau(0)s^3 + R_3(s)\right)B(0)$$

$$= y^1(s)T(0) + y^2(s)N(0) + y^3(s)B(0)$$

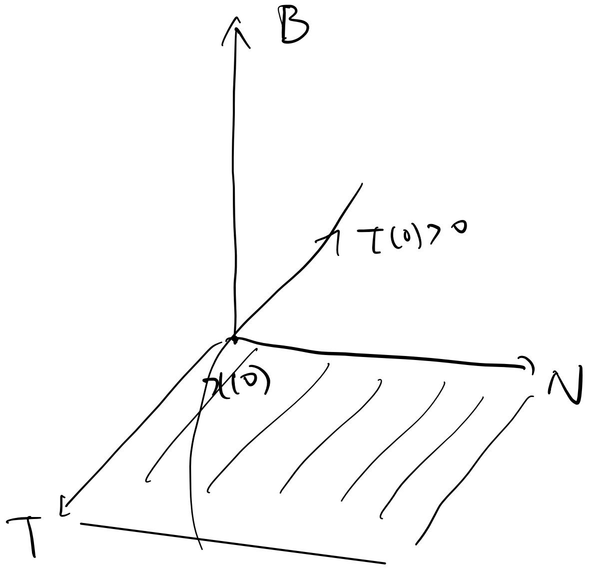
坐标

$$\begin{cases} y^1(s) = s - \frac{k^2(0)}{6}s^3 + R_1(s) \\ y^2(s) = \frac{1}{2}k(0)s^2 + \frac{1}{6}k'(0)s^3 + R_2(s) \\ y^3(s) = \frac{1}{6}k(0)\tau(0)s^3 + R_3(s) \end{cases}$$

$$\overline{y^1}(s) = s - \frac{k^2(0)}{6}s^3$$

$$\overline{y^2}(s) = \frac{1}{2}k(0)s^2 + \frac{1}{6}k'(0)s^3$$

$$\overline{y^3}(s) = \frac{1}{6}k(0)\tau(0)s^3$$



$\tau(0) > 0. \Rightarrow$ 从下往上走

曲线论的基本定理

给定可微函数 $k(s)>0$ 连续函数 $\tau(s)$

则在局部一定存在一条正则曲线 C $x: I \to E^3$
some point.

s.t. C 以 s 为参数. 以 $k(s)$ $\tau(s)$ 为曲率与挠率.

(唯一性) 且满足相同条件的曲线 最多相差一个运动

由 ODE 直接看出.

Conclusion.

Frenet 标架.

$\Downarrow$ 应用

特殊曲线特征
- 直线
- 平面直线
- 圆柱螺线
- 一般螺线

局部展开.

基本定理.