点集拓扑

定义. (X,τ)、τ 为一集族、描述了 X 中的开集结构、

- ϕ. $X \in \tau$
- 任意并封闭
- 有限交封闭

开集结构

- 开集描述.
  - 内部. 内点. 邻域
  - 闭集. 闭包. 极限点. 收敛.
  - 稠密. 可分.
- 子结构
  - 拓扑基描述. $\mathcal{B} \Rightarrow \overline{\mathcal{B}}$
    - $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B = X$；$B_1, B_2 \in \mathcal{B}$. $B_1 \cap B_2 \in \overline{\mathcal{B}}$ $\Longleftrightarrow$ $\overline{\mathcal{B}}$ is a τ
    - $\mathcal{B} \subset \tau$；$\tau \subset \overline{\mathcal{B}}$ $\Longleftrightarrow$ $\overline{\mathcal{B}}$ is the τ
- 附加结构
  - 度量空间 $d(x,y)$. $B(x,\varepsilon)$
    - 诱导拓扑
- "态射"
  - 连续映射. 开映射. 同胚. $\Rightarrow$ 不变量
    - 等价关系、开集一一对应
  - 空间变化
    - 子空间
    - 乘积空间
    - 紧致化
    - 商空间

证明技术. 找点. 找开集. 拓扑语言描述.

- 证明集合为开：$\forall x \in A$. $\exists$ x 的邻域 U. $U \subseteq A$.

拓扑不变量

分离公理 $T_1 \sim T_4$

- $T_2 \Rightarrow T_1$
- $T_1 \Rightarrow$ 有限子集是闭集
- T_1 空间 $\Rightarrow$ $T_4 > T_3 > T_2$
- 度量空间 $\Rightarrow T_1 \sim T_4$

可数公理 C_1. C_2

C_1：可数邻域基　C_2：可数拓扑基.

- 度量空间 $\Rightarrow C_1$
- 可分度量空间 $\Rightarrow C_2$

紧性. 列紧

$\forall \{x_n\}$ $\exists$ 收敛子列

- 度量空间：紧 $\Longleftrightarrow$ 列紧
- T_2 + 紧：
  - A 紧. $x \notin A$. $\Rightarrow$ x. A 有不相交邻域
  - A 紧 $\Rightarrow$ A 闭
- $f: X \to Y$ 连续. X 紧. Y T_2. f 双射 $\Rightarrow$ f 同胚
- X、Y 紧. $\Rightarrow$ $X \times Y$ 紧

△ 局部紧. 仿紧

局部紧：局部紧邻域　仿紧：$\exists$ 局部有限开加细

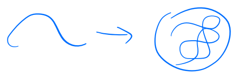
- 局部紧 + C_2 + T_2 $\Rightarrow$ 仿紧

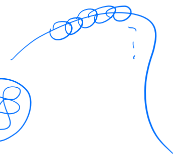
- 紧 ⇒ 仿紧 ✓
- 仿紧 + T_2 ⇒ T_4
- 度量空间 ⇒ 仿紧
- T_2: 仿紧 ⇔ 单位分解 △

连通 局部连通.

局部连通邻域基

- 连通判据
  - (1) X 有连通覆盖 ($X=\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$, U_α 连通子集). 且有 $A\subset X$. 连通.
    $A\cap U_\alpha\neq\phi$, $\forall\alpha\in A$. ⇒ X 连通.
  - (2) 连通 X 的连续像 连通.
  - (3) $A\subseteq Y\subseteq\bar{A}^{\subset X}$. 则 A 连通 ⇒ Y 连通 ($\bar{A}$ 连通)
    闭包连通.
  - (4). X, Y 连通. $X\times Y$ 连通





- 任一非空连通子集 ⊂ 一个连通分支
- 连通分支 ⇒ 闭
- X 局部连通 ⇒ 连通分支开

道路连通.
局部道路连通

局部道路连通基

- 道路连通 ⇒ 连通
- 道路连通 连续像 ⇒ 道路连通.
- 道路连通分支 ⇒ 连通
- X 局部道路连通 ⇒
  - 道路连通分支 开且闭
  - 连通分支 ⇔ 道路分支.

重要定理

Urysohn 引理. X 满足 T_4. 则 $\forall A,B$ 闭. $A\cap B=\phi$. ∃连续映射 $f: X\to\mathbb{R}$.
s.t. $f(A)=0$. $f(B)=1$.

Tietze 扩张. X 满足 T_4. 则 X 上闭子集 F 上定义的连续函数.
总可扩张到 X 上.
i.e. $\forall f: F\longrightarrow\mathbb{R}$ $\exists\ \tilde{f}: X\to\mathbb{R}$, $\tilde{f}|_F=f$.

Urysohn 度量化引理.

定理 $C_2 + T_1 + T_4 \Rightarrow$ 嵌入 Hilbert 空间

无穷维带内积的线性空间

定理 C_2 + 紧 + $T_2 \Rightarrow$ 度量化.

Stone–Čech 紧化

Tychonoff 定理. 紧空间的任意乘积在积拓扑下也是紧的.

i.e. $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A} \Rightarrow \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$，赋予积拓扑

$$\begin{array}{c} T_1 + T_4 \text{ (稍加强一点)} \\ \Downarrow \\ T_{3.5} \end{array}$$

Stone–Čech 紧化 X 是一个 "Completely regular"，则存在一个 X 的紧化 βX. Hausdorff，且满足泛性质.

∀ 紧 Hausdorff Y

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[d, "\text{嵌}"'] & Y \\ \beta X \arrow[ur, dashed, "\exists ! \varphi_Y"'] & \end{tikzcd}$$