W1L2

《实变函数》 ZXW 1.3 1.4 half

§. 集合序列极限 例子 用集序列极限翻译一些 ∃. ∀. 数列极限叙述

e.g. 设 $f_k: E \to \mathbb{R}$.

$f_1(x) \le \cdots \le f_k(x) \le \cdots \quad x \in E$

定义 $A_k = \{x \mid f_k(x) > c\}$

且 $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$.

$A_k \uparrow$

则 $\{x \mid f(x) > c\} \overset{(*)}{=} \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \mid f_k(x) > c\}$

$\underset{\text{(by prop.)}}{=} \lim_{k\to\infty} \{x \mid f_k(x) > c\}$

pf. of (*). $\subset$]. $f(x) > c$. $\exists k \ge 1$. $f_k(x) > c$ (反证).

$\Rightarrow x \in A_k \Rightarrow x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$

$\supset$]. $\exists k \ge 1$. $f_k(x) > c \Rightarrow f(x) \ge f_k(x) > c \Rightarrow x \in \{x \mid f(x) > c\}$

$\square$

e.g. f_k. f $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. 实函数

$D = \{x \mid f_k(x) \not\to f(x)\}$.

$f_k(x) \to f(x) \iff \forall n.\ \exists N.\ \forall k \ge N$ $|f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{n}$

$\Downarrow$

$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{k \ge N} \{x : |f_k(x) - f(x)| \ge \frac{1}{n}\}$

$f_k(x) \not\to f(x) \iff \exists n$. s.t. $\forall N.\ \exists k \ge N$ $|f_k(x) - f(x)| \ge \frac{1}{n}$

$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \limsup_{k} \{x : |f_k(x) - f(x)| \ge \frac{1}{n}\}$

§. 映射　$f\cdot f^{-1}$

映射本质可以看成关系，即 $X\times Y$ 的子集。
$f\cdot f^{-1}$ 都定义了一组关系，同时诱导出 $P(X)$ 与 $P(Y)$ 的关系

Thm. $f: X\to Y$ 映射.　　Γ. Λ 指标

则 (1) $f\left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in\Gamma} f(A_\alpha)$

(2) $f\left(\bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha\right) \subset \bigcap_{\alpha\in\Gamma} f(A_\alpha)$　　可能多对一.

(3) 若 $B_1\subset B_2$ 则 $f^{-1}(B_1)\subset f^{-1}(B_2)$

(4) $f^{-1}\left(\bigcup_{\beta\in\Lambda} B_\beta\right) = \bigcup_{\beta\in\Lambda} f^{-1}(B_\beta)$

(5). $f^{-1}(B^c) = \left(f^{-1}(B)\right)^c$

特征函数.　$\chi_A(x)$　$\Longrightarrow$ 将集合关系转化为函数

$$D(x) = \chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}$$

Prop. (1). ① $A=B \iff \chi_A=\chi_B$

② $A\neq B \iff \chi_A\neq\chi_B$

③ $\{x \mid x\in A\triangle B\} = \{x \mid \chi_A(x)\neq\chi_B(x)\}$

(2) $A\subset B \iff \chi_A(x)\le\chi_B(x)\quad \forall x\in X$.

(3) $\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x)+\chi_B(x)-\chi_{A\cap B}(x)$

(4). $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x)\cdot\chi_B(x)$

(5). $\chi_{A-B}(x) = \chi_A(x)\left(1-\chi_B(x)\right)$

(6). $\chi_{A\triangle B}(x) = |\chi_A(x)-\chi_B(x)|$.

证明，分块去验证

例如 $A\triangle B$. 分 $\begin{cases}(A\cup B)^c\\ A\cap B\\ A-B\\ B-A\end{cases}$

e.g. ex. 6、设 $\{A_n\}$ 为一列集合 $\subset X$.

prove: (i). $\chi_{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n}(x) = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \chi_{A_n}(x)$.

(ii) $\chi_{\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n}(x) = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \chi_{A_n}(x)$

☆ 两种上下极限的关系.

pf (i) LHS=1. 则 $x \in \overline{\lim} A_n \xLeftrightarrow{\text{无穷个 } A_n \text{ 包含 } x} \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \chi_{A_n}(x) = 1$

(ii) RHS=1 则 $x \in \underline{\lim} A_n \xLeftrightarrow{\text{有限项后恒在}} \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \chi_{A_n}(x) = 1$

§ 集合等价. 基数

证明等价 $\Rightarrow$ 构造性证明. f: 1-1 & on