W2. L1

《实变函数》zxw. 1.4. half.

§ 无限集性质.

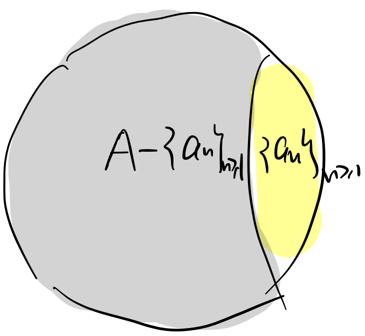
证明技术总是归结到基础结论. 例如 Thm 1.4.3 以及 Thm. 1.4.2

找点构造 / 可数集合 /

Thm. 1.4.3.
- 子集 (i) (ii)
- 并 (iii) $\overset{\text{Cor}}{\Longrightarrow}$ $\mathbb{Q}$ 可数
- 直积

(*) Cor. $\forall$ 无限集一定与一个真子集对等.

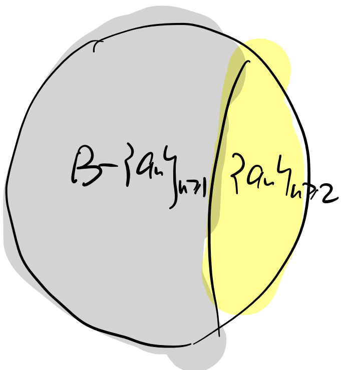
pf. A 为集合. $\exists$ 可数子集 $\{a_n\}_{n\geq 1}$. $B = A - \{a_1\}$. 由下图. $A \sim B$.



$A \longrightarrow B$

$A - \{a_n\}_{n\geq 1} = B - \{a_n\}_{n\geq 2}$

且 $\{a_n\}_{n\geq 1} \sim \{a_n\}_{n\geq 2}$



$\square$

---

application.

$\mathbb{R}^1$. 则 $[a,b] \sim (a,b)$ $\Longrightarrow$ $\langle a,b \rangle \sim \mathbb{R}$

$[a,b) \sim (a,b)$

$(a,b] \sim (a,b)$

Use the Cor(*). 构造 $a \cup \{\mathbb{Q}\}$ 为可数子集.

a 作为 a_1. 即可.

☆. 重要技巧

例1.4.1. $\mathbb{R}$ 中任一两两不相交的开区间族 $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 中的元至多可数

Pf. $\forall \lambda\in\Lambda$. 取 I_λ 中有理数 $r_\lambda\in I_\lambda\cap\mathbb{Q}$.

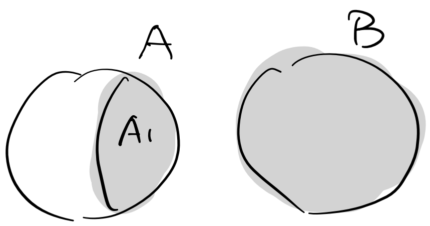
则 $\{I_\lambda\}\sim\{r_\lambda\}\subset\mathbb{Q}$. 至多可数.

Thm. 1.4.4 无限集 A 并了至多可数集 B 不改基数

Pf. ① $A\cap B\neq\emptyset$. $B_1=B-A$. 由 $B_1\cup A\sim B\cup A$.

故考虑 $A\cap B=\emptyset$.

② $A\cap B=\emptyset$



$A_1\sim B$ 且 $A_1\cup B\sim A_1$

$\Rightarrow$ $A=(A\setminus A_1)\cup A_1$

$A\cup B=(A\setminus A_1)\cup(A_1\cup B)$

$\Rightarrow A\sim A\cup B$ □

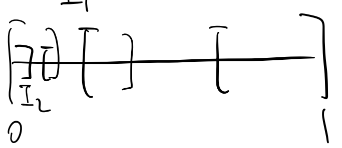
这里定义为 $[0,1]$ 的势. c

§ 连续统势　　证明不可数. 反证法

Thm. 1.4.5. 闭区间 $[0,1]$ 不可数. → 连续统势

由 $[0,1] \sim (0,1) \sim (a,b) \sim \mathbb{R}$.

Pf. 反证. 假设可数 $[0,1] = \{a_1, a_2, \cdots\}$.



一直三分: $a_1 \notin I_1$

$a_2 \notin I_2$　　$\Rightarrow$ 闭区间套.

$\vdots$　　$\exists \xi \in [0,1]$. and $\xi \in \bigcap I_n$. ✗

$[0,1]$　$a_i \notin I_i$

$\vdots$

---

① 无穷小数的基础

② 用于构造映射. 证明连续统势. (连续统势证明重要对象) ⇒ Thm 1.4.8. 1.4.9.

n元数列

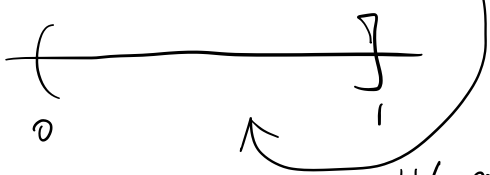
Prop. 1°. 有限 n元数列全体 为可数集

2° Thm. 1.4.7 n元数列全体为不可数集.(连续统势)

Pf of 2°　n元数列全体 = 有限n元 $\cup$ 无限n元.

$$A_n = B_n \cup \tilde{A}_n$$

下证 $\tilde{A}_n \sim [0,1] \ni x$



n等分 n等分 ---- . 找位置. $\{a_n\}$. n元无限数列.

$x=0.5$

$n=10$

$$\frac{4}{10} < 0.5 \leq \frac{5}{10}$$

$$\frac{4}{10}+\frac{9}{100} < 0.5 \leq \frac{4}{10}+\frac{10}{100}$$

$$\Rightarrow \quad 0.5 = 4.999\ldots\ldots$$

取小的位置，s.t. 无穷逼近。

故为 n 元无限

不含有限项后 $=0$.

---

n元数列构造

Thm 1.4.8 可数集的子集全体有连续统势

Pf. $A \subseteq \mathbb{N}$

$$a_n = \begin{cases} 1, & n \in A \\ 0, & n \in \mathbb{N}-A \end{cases}$$

Construct map. $f(A) = \{a_1, a_2, \ldots\}$ $\Rightarrow$ $f(P(\mathbb{N})) = $ 2元数列全体.

$f(\phi) = \{0, 0, \ldots\}$

$P(\mathbb{N}) \sim f(P(\mathbb{N})) \sim$ 2元数列全体.

$\square$

Thm. 1.4.9. 至多可数连续统势 $\Rightarrow$ 连续统势 $\Rightarrow$ $\mathbb{R}^k$. $\mathbb{R}^\infty$ 有连续统势.

Pf. 可数个 X_n 直积. 用对角线构造新的二元数列. $\sim X_n$

2元数列全体

即证了. $S_n^{\mathbb{N}} \sim S_n$

2元数列全体

§ 基数比较

$\overline{\overline{A}} \le \overline{\overline{B}}$ 定义 ?

Conclusion

- 可数的证明
  - 构造 $\sim \mathbb{N}$
  - 用可数 & 等价的性质
- 不可数的证明
  - 构造 $\sim \langle a,b \rangle$ or n元数列全体
  - 反证法

$A \sim \mathbb{N}$. 记 $\overline{\overline{A}} = \aleph_0$. $A = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$.

$A \sim \mathbb{R}$ 记 $\overline{\overline{A}} = c$. $A = [0,1]$, n元数列全体

$$\begin{cases} \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \\ \aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0 \\ c = 2^{\aleph_0} \\ c^2 = c \end{cases}$$

阿列夫数. $\aleph_1, \aleph_2$ 表示比 $\aleph_0$ 更大的无穷基数

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \cdots$$

连续统假设 CH : 假设 $c = \aleph_1$. 即不存在一个集合的基数严格介于 $\aleph_0$ 和 c 之间.(在标准ZFC系统中无法证明也无法证伪.)