W1L1.

《实变函数》2xW 1.1. ; 1.2. done.

§. Lp. lp. 无穷维 v.s.

$\prod_{i=1}^{\infty} X_i = \{ (x_1, \dots, x_n, \dots) \mid x_i \in X_i,\ i \geq 1 \}$ $\left\{ \begin{array}{l} x+y \\ \lambda x \end{array} \right.$ v.s.

$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty$ 1范数.

$$l^1 \triangleq \{ (x_1, \dots, x_n, \dots) \mid \|x\|_1 < \infty \}$$

$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \right)^{1/2} < \infty$ 2范数.

$$l^2 \triangleq \{ (x_1, \dots, x_n, \dots) \mid \|x\|_2 < \infty \} \longleftrightarrow \text{Hilbert space.}$$

$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$ p范数 $p \geq 1$.

$$l^p \triangleq \{ (x_1, \dots, x_n, \dots) \mid \|x\|_p < \infty \} \longrightarrow \text{Banach space}$$

l^p 之间关系. ?

e.g. $x = \left(\frac{1}{1^{3/4}}, \frac{1}{2^{3/4}}, \frac{1}{3^{3/4}}, \dots \right) \notin l_1$

$\in l_2$.

(l^p 与 L^p 性质有对应)

§. 集合序列的极限.

例 $A_n=\begin{cases} A, & n \text{ even} \\ B, & n \text{ odd}\end{cases}$ B A B A B A. ...

$$\begin{cases}\limsup A_n = A\cup B \\ \liminf A_n = A\cap B.\end{cases}$$

例 $A_n=\{\frac{m}{n} : m\in\mathbb{Z}.\}$. $n\in\mathbb{N}$. $n\geq 1$.

$A_1=\mathbb{Z}$

$A_2=\{\frac{m}{2}:m\in\mathbb{Z}\}$

$\vdots$

则. $\limsup A_n = \mathbb{Q}$ ← 总会出现

$\liminf A_n = \mathbb{Z}$ ← 总是在

证. ① $\mathbb{Z}\subset A_n\subset\mathbb{Q}$. $n\geq 1$.

$$\Rightarrow \begin{cases}\mathbb{Z}\subset\liminf A_n \\ \limsup A_n\subset\mathbb{Q}\end{cases}$$

② $\forall x\in \liminf A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k$, $\exists n$. s.t. $x\in A_n\cap A_{n+1}$

无限项的开始.

$\Rightarrow \exists m_n, m_{n+1}$ s.t. $x=\frac{m_n}{n}=\frac{m_{n+1}}{n+1}$

$\Rightarrow \begin{cases} m_n=nx \\ m_{n+1}=nx+x\end{cases} \Rightarrow x=m_{n+1}-m_n\in\mathbb{Z}$.

$\Rightarrow \liminf A_n\subset\mathbb{Z}$.

③ $\forall \frac{q}{p} \in \mathbb{Q}$. $p \in \mathbb{N}$.

$\to$ 总存在之后会出现

$\forall n \geq 1$. 有 $\frac{q}{p} = \frac{nq}{np} \in \bigcup_{k \geq n}^{\infty} A_k \Rightarrow \frac{q}{p} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \limsup A_n$

$\Rightarrow \mathbb{Q} \subset \limsup A_n$. $\square$

怎么记 $\limsup = \cap\cup$?

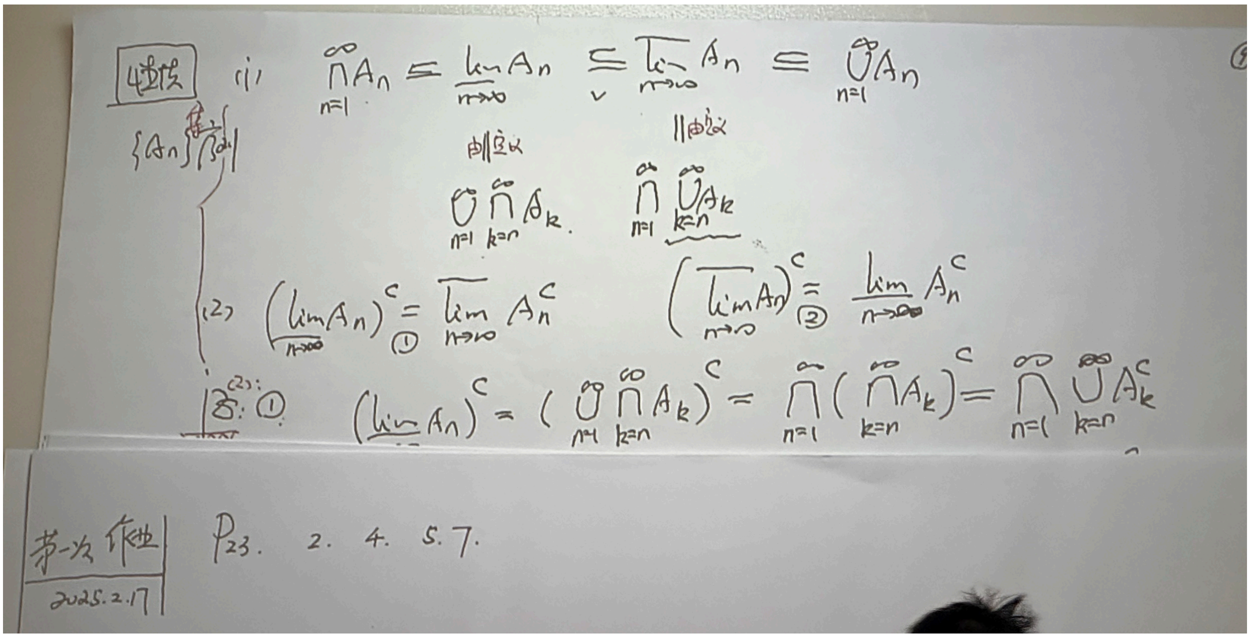
<u>无穷项出现</u>. 故后面直接并起来.

sup $\to$ $\cup$先

$\liminf = \cup\cap$

<u>除有限项出现</u>. 故后面直接交起来.

inf $\to$ $\cap$先.



$\boxed{\text{性质}}$ (1) $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \varliminf_{n\to\infty} A_n \subseteq \varlimsup_{n\to\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

$\{A_n\}$ 集列

由定义 $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$. 由定义 $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$

(2) $(\varliminf_{n\to\infty} A_n)^c \overset{①}{=} \varlimsup_{n\to\infty} A_n^c$ $\qquad$ $(\varlimsup_{n\to\infty} A_n)^c \overset{②}{=} \varliminf_{n\to\infty} A_n^c$

证(2): ① $(\varliminf A_n)^c = (\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k^c$

第一次作业 2025.2.17 $\quad$ P23. 2. 4. 5. 7.

Conclusion.

① Set : 定义.语言 $\Rightarrow$ 关系.运算 . <u>直积</u> $\Rightarrow$ 关系

relation $\begin{cases} \text{等价关系} \\ \text{ordering} \\ \text{mapping} \end{cases}$

mapping $\downarrow$ function.

d . norm. $\langle\ \rangle$ 关系?

② Euclidean 空间. 内积 v.s.

Hilbert 空间 l_p L_p

Banach 空间

③. 集合序列极限. why 定义 like this.

下极限的定义是直觉的. 我们要得到那些有限项后一直在的元素

要求 limsup = liminf ?

不能有那些出现无限次但总会消失的点