W1 L1.

复变函数.

Cauchy 积分理论

Weierstrass 级数理论

Riemann. 几何理论

平时 40%. 作业. 小论文

↓

中等偏上? 没小测?

1. 复数

1.1. 复数域

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$

(1). $+$. $\cdot$ 交换律.结合律 $* \in \{+, \times\}$

$a*b = b*a$. $(a*b)*c = a*(b*c)$

(2). $+$ 单位元 0. $\times$ 单位元 1.

(3) $+$ 逆元 $-a$. $\times$ 除0外逆元 $\frac{1}{a}$. a^{-1}

(4) $a(b+c) = ab+ac$ 分配律

$\mathbb{R}^2 = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ = 二维实向量空间. $e_1 = (1,0)$. $e_2 = (0,1)$

$u \in \mathbb{R}^2$ $u = (a,b) = ae_1 + be_2$

$|u| = \sqrt{a^2+b^2}$. $\pm$ ✓

$\mathbb{R}^2$ 上定义乘法 $\Rightarrow$ $(\mathbb{R}^2, +, \times)$ 成为域

$\cup$

• $\{(a,0) : a \in \mathbb{R}\} = \tilde{\mathbb{R}}$

则 $e_1 = (1,0)$ 应该为单位元. $\forall u \in \mathbb{R}^2$

$u \cdot e_1 = e_1 u = u$

• $u \cdot v \in \mathbb{R}^2$ 保持 $|u| \cdot |v| = |u \cdot v|$

$\Rightarrow$ 唯一确定 "$\times$"

Thm $\mathbb{R}^2$上存在唯一的"·"(乘法) 满足

(1) $u e_1 = e_1 u = u$

(2) $|u\cdot v| = |u|\cdot|v|$, $\forall\, u, v \in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ 成为域. $\mathbb{C}$ 复数域

Pf. $u = (a, b) = a e_1 + b e_2$

$v = (c, d) = c e_1 + d e_2$

$$u\cdot v = (a e_1 + b e_2)(c e_1 + d e_2) = ac(e_1\cdot e_1) + (ad+bc)(e_1\cdot e_2) + bd\,(e_2\cdot e_2)$$

$$= ac\, e_1 + (ad+bc) e_2 + bd\,(e_2\cdot e_2)$$

$\Rightarrow$ 乘法有交换律.

let $\begin{cases} e_2\cdot e_2 = (x, y) \\ (e_1+e_2)(e_1-e_2) = e_1 - e_2\cdot e_2 = (1-x, -y). \end{cases}$

两边求长. $\begin{cases} 2\cdot 2 = (1-x)^2 + y^2 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0. \end{cases} \Rightarrow e_2\cdot e_2 = -e_1 = (-1, 0)$

$\Rightarrow u\cdot v = (ac-bd) e_1 + (ad+bc) e_2$

$\Rightarrow (a, b)\cdot(c, d) = (ac-bd,\ ad+bc)$

$\boxed{\text{验证域}}$

求逆元? $(a, b)(c, d) = (ac-bd, ad+bc) = (1, 0)$.

$\begin{cases} ac-bd = 1 \\ ad+bc = 0 \end{cases} \Rightarrow$ 求 c, d.

$(c, d) = \dfrac{(a, -b)}{a^2+b^2}$. 要求 $a^2+b^2 \neq 0$

Q. $\mathbb{C}$上两个向量是否可以比较大小？

Def.(有序域) F 域，上有一元元关系"<"

(1). $\underbrace{a<b.\ a=b\ a>b}_{\text{之一成立}}$ $\forall a.b\in F$

(2). $a<b.\ b<c \Rightarrow a<c$. 传递性.

(3). $a<b. \Rightarrow a+c<b+c$ $\forall a.b.c\in F$. 平移不变性

(4) $a<b.\ 0<c. \Rightarrow ac<bc$. 保向性

称 F 有序域

Def 字典序: $(Y,<)$. $Y\times Y$ $(a,b),(c,d)\in Y\times Y$

$(a,b)<(c,d) \Leftrightarrow a<c$ 或 $\begin{matrix} a=c \\ b<d. \end{matrix}$

(1) ~(3) 满足.

(4). 不满足. : $0=(0,0)$ $0<e_2$

$e_2=(0,1)$ $\xRightarrow{同\cdot e_2}$ $0<e_2\cdot e_2=-e_1<0$ ※

Thm. $\mathbb{C}$ 不是有序域

Pf. 反证法. 假设 $\mathbb{C}$ 是有序域 "<"

证: (1). $\forall u\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$. 则 $0<u^2$

① $u<0 \Rightarrow 0<-u \Rightarrow 0<u^2$

② $0<u \Rightarrow 0<u^2$

(2). 由(1). $0<e_2^2=-e_1 \Rightarrow e_1<0$.

$e_1^2 = e_1 \Rightarrow e_1 > 0$ ✗

1.2. 复数的表示.

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

$\tilde{\mathbb{R}} = \{(a,0): a \in \mathbb{R}\}$. 关于 $\mathbb{R}^2$ 的 $+, \cdot$ 封闭. $(\tilde{\mathbb{R}}, +, \cdot)$ 子域 $\cong (\mathbb{R}, +, \cdot)$

$(a,0) \longmapsto a$,

$e_2^2 = -e_1 \Rightarrow (0,1)(0,1) = -(1,0) \xrightarrow{\text{写成}} = -1$

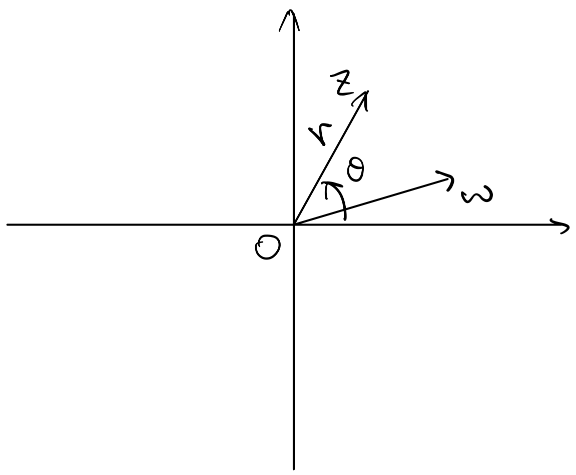
$\Downarrow$

简写成 $(i)^2 = -1$.

$u = (a,b) = a + bi \quad i^2 = -1$

$\Rightarrow \mathbb{C} = \{a+bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. $\ni z = a+bi$. $\quad z+w = (a+c)+(b+d)i$

$w = c+di \quad z \cdot w = (ac-bd)+(ad+bc)i$



a: 实部. $\mathrm{Re}(z)$

b: 虚部. $\mathrm{Im}(z)$.

共轭 $\bar{z} = a - bi$

$|z| = \sqrt{a^2+b^2} = r$

$z\bar{z} = a^2+b^2 \quad |\mathrm{Re}(z)| \leq |z| \quad |\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$.

$\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$. $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

θ. 辐角. (多值函数). 取一个.

$z = r\cos\theta + r\sin\theta i \quad$ 极坐标表示.

A. 数学对象.（实数. 复数. 矩阵. 算子...）

$$e^{A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

let $A = i\theta$. $\theta \in \mathbb{R}$

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= \cos\theta + i\sin\theta$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)$$

$$= \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$$

$$= e^{i(\alpha+\beta)}.$$

$e^{i\alpha} \cdot e^{-i\alpha} = 1.$

$\Rightarrow (e^{i\alpha})^{-1} = e^{-i\alpha}$

设. $z = re^{i\theta}$. $w = \rho e^{i\alpha}$

$$\Rightarrow z \cdot w = r\rho \cdot e^{i(\theta+\alpha)}$$

$$z/w = z \cdot w^{-1} = re^{i\theta} \cdot \frac{1}{\rho} e^{-i\alpha} = \frac{r}{\rho} e^{i(\theta-\alpha)}$$

例. 求三角和. $\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \sin(k\theta)}_{S(\theta)}$. $\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta)}_{C(\theta)}$. $\theta \in \mathbb{R}$.

解: $C(\theta) + iS(\theta) = \sum_{k=1}^{n} (e^{i\theta})^k := A$

$$\sum_{k=2}^{n+1} (e^{i\theta})^k = A \cdot e^{i\theta}$$

$$\Rightarrow A(1-e^{i\theta}) = e^{i\theta} - e^{i\theta(n+1)}$$

$(e^{i\theta} \neq 0)$ $$A = \frac{e^{i\theta} - e^{i\theta(n+1)}}{1-e^{i\theta}} = \frac{e^{i\theta}\left(e^{-\frac{n\theta}{2}i} - e^{\frac{n\theta}{2}i}\right) e^{\frac{n\theta}{2}i}}{\left(e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}\right) e^{\frac{i\theta}{2}}}$$

$$= e^{\frac{n+1}{2}\theta i} \frac{\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad C(\theta) = \frac{\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \cos\frac{n+1}{2}\theta$$

$$S(\theta) = \frac{\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \sin\frac{(n+1)}{2}\theta$$

三角不等式.

Prop. 设 $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, 则

$$\left|\sum_{k=1}^n z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^n |z_k|$$

Pf. 设 $\left|\sum_{k=1}^n z_k\right| \neq 0$. 设 θ 是辐角.

$$\left|\sum_{k=1}^n z_k\right| e^{i\theta} = \sum_{k=1}^n z_k.$$

$$\left|\sum_{k=1}^n z_k\right| = \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n z_k\right)\left(e^{-i\theta}\right)}_{\Uparrow\ \mathbb{R}} = \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}\sum_{k=1}^n z_k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^n \mathrm{Re}(e^{-i\theta} z_k)$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^n |e^{-i\theta} z_k|$$

$$= \sum_{k=1}^n |z_k|.$$

"$=$" $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Re}(e^{-i\theta} z_k) = |e^{-i\theta} z_k| \quad \forall k$

$z_k \neq 0 \Longleftrightarrow \theta$ 为 z_k 一个辐角. 全部同向

Prop (Cauchy 不等式) $a_k, b_k \in \mathbb{R}$.

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2\right)$$

Pf $\quad 0 \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k - \lambda \bar{b}_k|^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$

$$= \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 - 2\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} \bar{\lambda} a_k b_k\right) + |\lambda|^2 \sum_{k=1}^{n} |b_k|^2$$

$$\lambda = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k}{\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2} \text{ 代入} \Rightarrow \sum |a_k|^2 - \frac{|\sum a_k b_k|^2}{\sum |b_k|^2} \geq 0$$

在 $|b_k|$ 至少一项 $\neq 0$. 时

Conclusion. • 由 $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. 考虑 $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$. 引入 $\mathbb{C}$ 中乘法 $\Rightarrow$ 构成域

• 证明了 $\mathbb{C}$ 不是有序域

• 简化 $\mathbb{C}$ 中 z 表示. 三角表示. $e^{i\theta}$

• 应用. 例子

• 两个不等式