活动标架法

固定标架（右手系）$\{O; E_1, E_2, E_3\}$

在空间任一幺正标架坐标系 $\{x; e_1, e_2, e_3\}$

$x = (x^1, x^2, x^3)$ 三个参变量

$\{e_1, e_2, e_3\}$ 三个参变量（Euler 角）

$\{x; e_1, e_2, e_3\}$ 6维标架空间

空间的运动群 G：平移、旋转

运动群 G 标架空间

$g \in G \longrightarrow g(O; E_1, E_2, E_3)$

$= \{x; e_1, e_2, e_3\}$

E^3 中连续可微地变动的幺正标架依赖于 m $(m \le 6)$ 个参数

$x = (u^1, u^2, \ldots, u^m)$

$\{x(u^1, u^2, \ldots, u^m),\ e_i = e_i(u^1, \ldots, u^m)\}$ $i = 1, 2, 3.$

称为 m 参数的活动标架场 构成标架空间 (G) 的 m 维空间

$\Rightarrow$ 几何 $\xleftrightarrow[\text{活动标架}]{1-1}$ 群.

例1.（单参数幺正标架场）

给定 E^3 中一条光滑曲线 $C: x = x(s)$ 其中 s 为弧长参数.

在曲线 C 上每点可配置一个 Frenet 标架.

$$
\begin{cases}
x = x(s) \\
e_1 = \dfrac{dx}{ds} = T(s) \\
e_2 = \dfrac{dT}{ds} \Big/ \left|\dfrac{dT}{ds}\right| = N(s) \\
e_3 = T(s) \times N(s) = B(s)
\end{cases}
$$

$\{x(s); e_1(s), e_2(s), e_3(s)\}$ 构成单参数活动标架场.

反之 一个单参数活动标架场的顶点描绘空间的一条曲线.
曲线 C 可看成运动群 G 的一维子空间

例2.(双参数幺正标架场).

给定E^3中一片正则曲面 $M: x=x(u,v)$. 其中 (u,v) 为一般坐标网

于是在M的每点 $x(u,v)$ 配置一个幺正标架.

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ e_1 = \dfrac{x_u}{|x_u|} \\ e_2 = \dfrac{x_v-(x_v\cdot e_1)e_1}{|x_v-(x_v\cdot e_1)e_1|} \\ e_3 = e_1\times e_2 = n(u,v) \end{cases}$$

$\Rightarrow \{x(u,v);\ e_1(u,v),\ e_2(u,v),\ e_3(u,v)\}$ 就构成一双参数活动标架场.

反之 一个双参数活动标架场的顶点描绘空间的一片曲面
曲线 M 可看成运动群 G 的二维子空间

双参数下的外乘法与外微分

$x=(u^1,u^2)$. du^1. du^2. $f_1(u)du^1+f_2(u)du^2$

一次微分形式(1-形式)

- 外乘($\wedge$) $du^\alpha\wedge du^\beta = -du^\beta\wedge du^\alpha$ 反交换律

$\Rightarrow du^\alpha\wedge du^\alpha=0$

$du^1\wedge du^2 \quad du^2\wedge du^1$

$f(u^1,u^2)\, du^\alpha\wedge du^\beta$ =二次微分形式 (2-形式).

$=\pm f(u^1,u^2)\,du^1\wedge du^2$

2) 在双参数下.无三次微分形式 $du^\alpha\wedge du^\beta\wedge du^\gamma=0$

3) 外乘可以线性扩展到任何外微分形式之间

$\omega^1=a_1^1du^1+a_2^1du^2$

$\omega^2=a_1^2du^1+a_2^2du^2$

$$\omega^1 \wedge \omega^2 = (a_1^1 du^1 + a_2^1 du^2) \wedge (a_1^2 du^1 + a_2^2 du^2)$$

$$= (a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2)\, du^1 \wedge du^2 = |A|\, du^1 \wedge du^2$$

故 $\omega^1 \wedge \omega^2 = 0 \iff |A| = 0 \iff \omega^1$ 与 ω^2 只相差一个因子

这时称 ω^1, ω^2 线性相关

• 外微分 d:

1) 若 f 函数. $df = \frac{\partial f}{\partial u^\alpha} du^\alpha$ (0-形式)

2) 若 ω (1-形式)

$$\omega = a_\alpha du^\alpha$$

$$d\omega = da_\alpha \wedge du^\alpha$$

$$= \frac{\partial a_\alpha}{\partial u^\beta} du^\beta \wedge du^\alpha$$

3). $\omega = f\, du^\alpha \wedge du^\beta$ (2-形式).

$$d\omega = \frac{\partial f}{\partial u^\gamma} du^\alpha \wedge du^\beta \wedge du^\gamma = 0$$

$$d^2 f = d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial u^\alpha} du^\alpha\right) = d\left(\frac{\partial f}{\partial u^\alpha}\right) \wedge du^\alpha = \frac{\partial^2 f}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} du^\beta \wedge du^\alpha$$

$$= \sum_{\beta<\alpha} \frac{\partial^2 f}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} du^\beta \wedge du^\alpha + \sum_{\beta>\alpha} \frac{\partial^2 f}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} du^\beta \wedge du^\alpha$$

先将 β 换为 γ

再把 α 换为 β

再把 γ 换成 α

$$= \sum_{\beta<\alpha} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} - \frac{\partial^2 f}{\partial u^\beta \partial u^\alpha}\right) du^\alpha \wedge du^\beta$$

$$= 0$$

$$\omega = f_\alpha du^\alpha \qquad d\omega = \frac{\partial f_\alpha}{du^\beta} du^\beta \wedge du^\alpha$$

$$d^2\omega = d\left(\frac{\partial f_\alpha}{du^\beta}\right) \wedge du^\beta \wedge du^\alpha$$

$$= \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial u^\beta \partial u^\gamma} du^\gamma \wedge du^\beta \wedge du^\alpha \ \underline{\underline{\text{对称}}} \ 0$$

$$= \left(\sum_{\gamma<\beta} \left(\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial u^\beta \partial u^\gamma} - \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial u^\gamma \partial u^\beta} \right) du^\gamma du^\beta \right) \wedge du^\alpha = 0.$$

$$\underset{0.}{\parallel}$$

外微分 d.

$d^2=0$. Poincaré 引理. de Rham 上同调群.

$$d(f\omega) = d(f a_\alpha du^\alpha) = d(f a_\alpha) \wedge du^\alpha$$

$$= (a_\alpha df + f da_\alpha) \wedge du^\alpha$$

$$= df \wedge \omega + f(da_\alpha \wedge du^\alpha)$$

$$= df \wedge \omega + f\, d\omega$$

$f\omega = \omega f$

$$d(\omega f) = df \wedge \omega + f d\omega$$

$$= d\omega f \underset{\Delta}{-} \omega \wedge df$$

幺正标架的运动方程.

$\{x(u); e_i(u)\}$ $\quad u=(u^1,\dots,u^m)\ m\le 6.$

关于固定标架 $\{O, E_1, E_2, E_3\}$

$$(e_1\ e_2\ e_3) = (E_1\ E_2\ E_3)\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (e_1\ e_2\ e_3)B = (E_1\ E_2\ E_3).$$

① $\begin{cases} x = x_i(u) E_i \\ e_i(u) = a_i^j E_j \end{cases}$ $\quad \{a_i^j(u)\}$ 正交矩阵.

$\{b_i^j(u)\}$ 为 $\{a_i^j(u)\}$ 的逆. $\quad b_j^k a_i^j = \delta_i^k$

$$E_i = b_i^j e_j$$

对① 外微分 $dx = dx^i E_i$

$de_i = da_i^j E_j$

$x(u+du)$ 处 标架为 $\{x(u+du), e_i(u+du)\}$

忽略二阶无穷小量. (对一个形式作外微分即)

$\{x+dx, e_i+de_i\}$

$$dx = dx^i E_i = \boxed{dx^i b_i^j} e_j = \omega^j e_j \qquad \omega^j = dx^i b_i^j$$

$$de_i = da_i^j E_j = \boxed{da_i^j b_j^k} e_k = \omega_i^k e_k \qquad \omega_i^k = da_i^j b_j^k$$

"全微分"?

$$\omega^j = \boxed{\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} b_i^j} du^\alpha = T_\alpha^j(u)\, du^\alpha$$

$$\omega_i^k = \boxed{\frac{\partial a_i^j}{\partial u^\alpha} b_j^k} du^\alpha = T_{i\alpha}^k(u)\, du^\alpha$$

(一形式)

$$d(e_i e_j) = d(\delta_{ij}) = 0$$

$$= de_i\, e_j + e_i\, de_j = \omega_i^k e_k e_j + \omega_j^k e_k e_i$$

$$= \omega_i^k \delta_{kj} + \omega_j^k \delta_{ik} = \omega_i^j + \omega_j^i \quad \text{反对称矩阵.}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega_2^1 & \omega_3^1 \\ -\omega_2^1 & 0 & \omega_3^2 \\ -\omega_3^1 & -\omega_3^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$(\omega_i^j + \omega_j^i = 0.)$

活动标架的无穷小运动方程分量

$$(ds)^2 = I = |dx|^2 = (\omega^i e_i)(\omega^j e_j) = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2$$

反问题 给定六个 1-形式 ω^i, ω_j^i $(\omega_j^i + \omega_i^j = 0)$ 是否存在活动标架 $\{x, e_i\}$?

是否唯一?

Thm (唯一性)

已给 m 参数的两个活动标架场 $\{x;e_i\}$ 和 $\{\bar{x};\bar{e}_i\}$.
它们的无穷小运动分量分别为 $\{\omega^i,\omega_i^j\}$ $\{\bar{\omega}^i,\bar{\omega}_i^j\}$ 则
若 $\bar{\omega}^i=\omega^i$, $\bar{\omega}_i^j=\omega_i^j$ $\Rightarrow$ 两个活动标架场可通过 E^3 一个运动相重合.

Pf.
固定一点 $u_0=(u_0^1,\dots,u_0^m)$ 通过 E^3 一个运动使

$$\{x(u_0);e(u_0)\}=\{\bar{x}(u_0);\bar{e}_i(u_0)\}. \quad i,j=1,2,3$$

设 $\{e_i\}$ 和 $\{\bar{e}_i\}$ 关于固定的正标架 $\{O;E_1,E_2,E_3\}$ 的表示为

$$e_i=a_i^jE_j,\quad \bar{e}_i=\bar{a}_i^jE_j \qquad a_i^j\ \bar{a}_i^j \text{ 正交矩阵}$$

$$de_i=\omega_i^j(u)e_j=da_i^j(u)E_j$$

$$\omega_i^j a_j^k E_k \quad\Rightarrow\quad da_i^k=\omega_i^j a_j^k \quad \xRightarrow{hope} \quad a_i^k=\bar{a}_i^k \quad \forall u.$$

同理 $d\bar{a}_j^k=\bar{\omega}_i^j\bar{a}_j^k$ 已知 $a_i^k(u_0)=\bar{a}_i^k(u_0)$

$$d\left(\sum_i a_i^j\bar{a}_i^k\right)=\sum_i\left(\omega_i^l a_l^j\bar{a}_i^k+a_i^j\,\bar{\omega}_i^l\,\bar{a}_l^k\right)$$

交换 i与 l
活动标架总可以交换

$$=\sum_i(\omega_i^l+\bar{\omega}_l^i)a_l^j a_i^k$$

$$=0$$

$$\sum_i a_i^j(u)\bar{a}_i^k(u)=\text{常数}=\sum_i a_i^j(u_0)a_i^k(u_0)=\delta^{kj}$$

$$\sum_i\left(a_i^j(u)-\bar{a}_i^j(u)\right)\bar{a}_i^k(u)=\delta^{kj}-\delta^{kj}=0$$

看这样是行与行内积 你做一个转置就是矩阵乘法了 $\Rightarrow$ $a_i^j(u)=\bar{a}_i^j(u)$. $\Rightarrow e_i(u)=\bar{e}_i(u)$

可逆矩阵.

$$d(x-\bar{x}) = \omega^i e_i - \bar{\omega}^i \bar{e}_i$$

$$= (\omega^i - \bar{\omega}^i) e_i = 0$$

$$x - \bar{x} = (x-\bar{x})(u_0) = 0$$