

$$\begin{cases} \dot{T} = k(s)N \\ \dot{N} = -k(s)T + \tau(s)B \\ \dot{B} = -\tau(s)N \end{cases}$$

$$dT = k(s)N ds$$

$$dN = -k(s)T ds + \tau(s)B ds$$

$$dB = -\tau(s)N ds$$

τ 理解
出平面

→ ODE 问题

$$\begin{pmatrix} \dot{T} \\ \dot{N} \\ \dot{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ -k(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

反对称矩阵

$k(s)=0$ 时, N, B 不唯确定. 一般保证 $k(s) \neq 0 \Rightarrow N, B$ 唯一.

例1 C 是直线 $\Leftrightarrow k(s)=0$

直线的特征

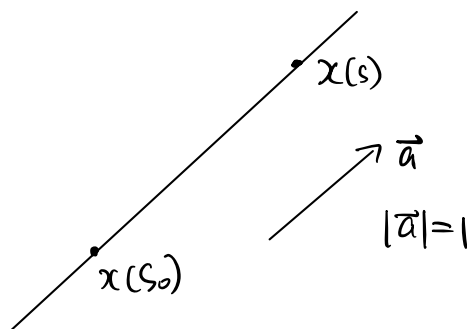
pf. (\Rightarrow)

$$x(s) - x(s_0) = s\vec{a}$$

$$\text{即 } x(s) \text{ 可写成 } s\vec{a} + \vec{b}$$

$$\dot{x} = \vec{a} \quad \text{且 } |\dot{x}| = |\vec{a}| = 1$$

$$\Rightarrow \dot{T} = \ddot{x} = \ddot{\vec{a}} = 0 \Rightarrow k(s) = 0$$



(\Leftarrow)

$$k(s)=0 \quad \ddot{x}=0$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \vec{a} \text{ 为常向量} \Rightarrow x = \vec{a}s + \vec{b} \text{ 为直线方程} \quad \square$$

只有一个点 $k(s)=0$? 避开这个点. 一段? 那这一段就为直线段.

例2 曲线 C 是 平面曲线, $\Leftrightarrow \tau = 0$

平面曲线的特征

pf. (\Rightarrow) 若 C 为平面曲线

平面的法向量用 \vec{n}_0 , $|\vec{n}_0|=1$ 为常向量



$$(C(s) - C(s_0)) \cdot \vec{n}_0 = 0$$

$$\begin{cases} \dot{C} \cdot \vec{n}_0 = 0 \\ \dot{T} \cdot \vec{n}_0 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} T \cdot \vec{n}_0 = 0 \\ \dot{T} \cdot \vec{n}_0 = 0 \end{cases} \rightarrow \text{不} \frac{2}{3}$$

let $k \neq 0 \Rightarrow N \cdot \vec{n}_0 = 0$

$$\Rightarrow B \parallel \vec{n}_0 \Rightarrow \dot{B} = 0 \Rightarrow \tau = 0$$

$$(\Leftarrow) \tau(s) = 0$$

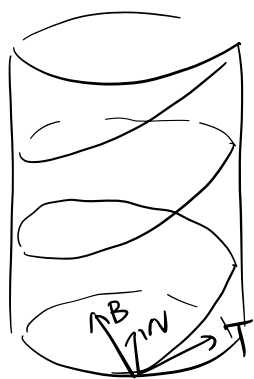
$$\Rightarrow \dot{B} = 0$$

设 $B = \vec{n}_0$ 为常向量.

$$\frac{d}{ds} (C(s) \cdot \vec{n}_0) = T(s) \cdot \vec{n}_0 = T \cdot B = 0$$

$$\Rightarrow \underline{C(s) \cdot \vec{n}_0 = \text{常数} = C(s_0) \cdot \vec{n}_0} \Rightarrow (C(s) - C(s_0)) \cdot \vec{n}_0 = 0$$

例3. 圆柱螺旋线



角速度 \nearrow 速率 \nearrow

$$C(s) = (r \cos \sigma s, r \sin \sigma s, b s)$$

$$\dot{C}(s) = (-r \sigma \sin \sigma s, r \sigma \cos \sigma s, b)$$

$$1 = |\dot{C}(s)|^2 = r^2 \sigma^2 + b^2 \Rightarrow \text{write } b \text{ as } a \sigma$$

$$\Rightarrow (r^2 + a^2) \sigma^2 = 1 \quad \text{需满足 } \sigma = \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}}$$

$$\dot{x} = (-r\sigma^2 \cos \sigma s, -r\sigma^2 \sin \sigma s, 0)$$

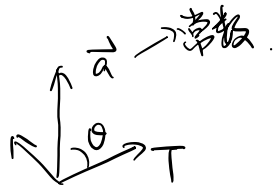
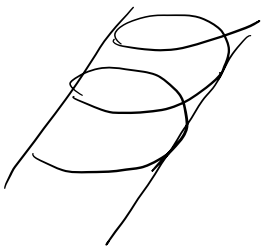
$$k(s) = |\dot{x}| = r\sigma^2$$

$$\ddot{x} = (r\sigma^3 \sin \sigma s, -r\sigma^3 \cos \sigma s, 0)$$

$$\Rightarrow \tau(s) = a\sigma^2 \quad k(s), \tau(s) \text{ 均为常数.}$$

$\Updownarrow \Delta$
圆螺线线

例 一般螺线线



曲线切向量与固定方向成固定角 则曲线为一般螺线线

非直的一般螺线线 $\Leftrightarrow \frac{\tau}{k}$ 为常数.

τ 一直转

但 τ 与 k 比为常数
"同步"

(\Rightarrow). \exists 常向量 a $|a|=1$.

$$T(s) \cdot a = \cos \theta \quad \theta \text{ 为固定角}$$

求导. 再求导.

$$kN \cdot a = T(s) \cdot a = 0$$

$$k \neq 0 \Rightarrow a = \cos \theta T + \sin \theta B$$

我们想对常向量求导!

故去表示 a .

求导

$$\Rightarrow 0 = \cos \theta (kN) + \sin \theta (-\tau N)$$

$$= (\cos \theta k - \sin \theta \tau) N \Rightarrow \frac{\tau}{k} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \cot \theta$$

$$(\Leftrightarrow) \frac{\tau}{k} = \text{常数} = \cot \theta$$

$$\text{令 } a = \cos \theta T + \sin \theta B$$

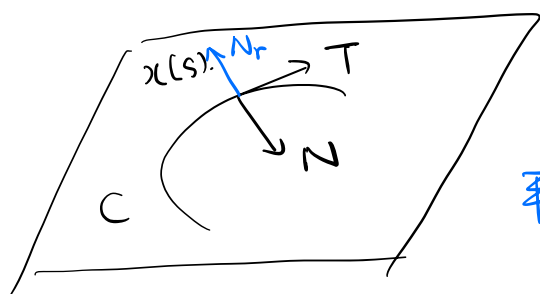
$$\dot{a} = (k \cos \theta - \tau \sin \theta) N \Rightarrow a \text{ 为常向量}$$

$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{T} = \cos \theta$ 固定夹角 \Rightarrow 一般曲线

一般参数下曲率 $k(s) = \frac{|\dot{x}' \times x''|}{|x'|^3}$ $\tau(s) = \frac{(x', x'', x''')}{|x' \times x''|^2}$ 考试. 可以记一下

注意. 换参数.

平面曲线



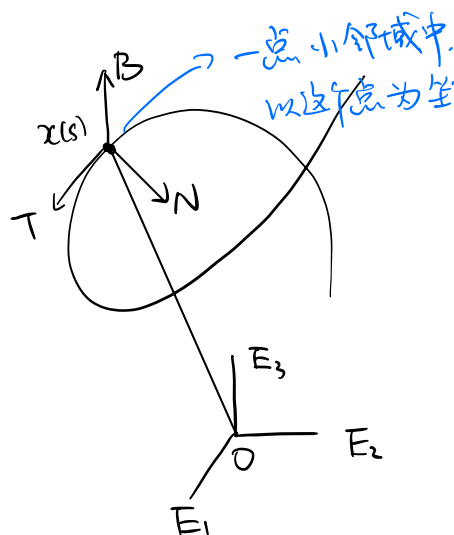
$\tau \equiv 0$

平面曲线法向习惯于选右手系

$N_r = \varepsilon N$ $\varepsilon = \pm 1$. 相对法向量

$$\begin{cases} \dot{T} = k(s)N \\ \dot{N} = -k(s)T \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{T} = \varepsilon k(s) \cdot \varepsilon N = k_r(s) N_r \\ \varepsilon \dot{N} = \dot{N}_r = -k_r(s) T \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{cases} \dot{T} = k_r(s) N_r \\ \dot{N}_r = -k_r(s) T \end{cases}$



以 (T, N, B) 为标架.

$x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$

\bigcup_0

\triangle check.

$x(s) - x(0) = \dot{x}(0)s + \frac{1}{2!} \ddot{x}(0)s^2 + \frac{1}{3!} \dddot{x}(0)s^3 + R(s)$

$\dot{x}(0) = T(0)$

$\ddot{x}(0) = \dot{T}(s)|_{s=0} = k(0)N(0)$

$$\begin{aligned}
 \ddot{\chi}(0) &= \left. \frac{d(k(s)N(s))}{ds} \right|_{s=0} = k'(0)N(0) + k(0)\dot{N}(0) \\
 &= k'(0)N(0) + k(0)(-k(0)T(0) + T(0)B(0)) \\
 &= -k^2(0)T(0) + k(0)N(0) + k(0)T(0)B(0)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \chi(s) - \chi(0) &= T(0)s + \frac{1}{2}k(0)s^2N(0) + \frac{1}{6}s^3(-k^2(0)T(0) + k(0)N(0) + k(0)T(0)B(0)) \\
 &= \left(s - \frac{k^2(0)}{6}s^3 + R_1(s)\right)T(0) + \left(\frac{1}{2}k(0)s^2 + \frac{1}{6}k(0)s^3 + R_2(s)\right)N(0) + \left(\frac{1}{6}k(0)T(0)s^3 + R_3(s)\right)B(0)
 \end{aligned}$$

$$= y^1(s)T(0) + y^2(s)N(0) + y^3(s)B(0)$$

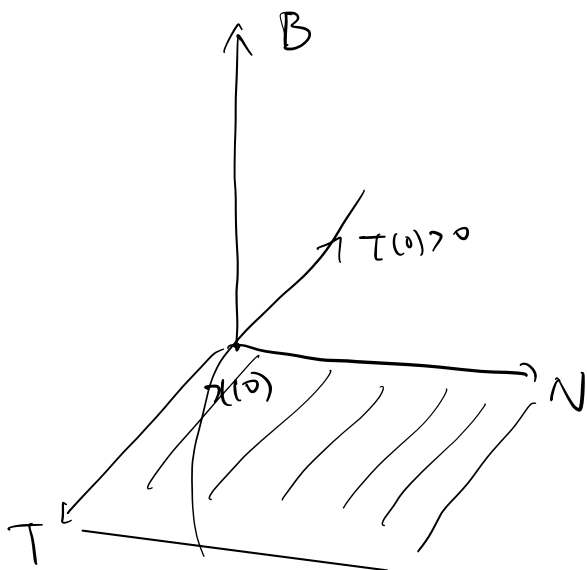
↓
坐標

$$\begin{cases}
 y^1(s) = s - \frac{k^2(0)}{6}s^3 + R_1(s) \\
 y^2(s) = \frac{1}{2}k(0)s^2 + \frac{1}{6}k(0)s^3 + R_2(s) \\
 y^3(s) = \frac{1}{6}k(0)T(0)s^3 + R_3(s)
 \end{cases}$$

$$\overline{y^1(s)} = s - \frac{k^2(0)}{6}s^3$$

$$\overline{y^2(s)} = \frac{1}{2}k(0)s^2 + \frac{1}{6}k(0)s^3$$

$$\overline{y^3(s)} = \frac{1}{6}k(0)T(0)s^3$$



$T(0) > 0 \Rightarrow$ 以下往上走

曲线论的基本定理

给定可微函数 $k(s) > 0$ 连续函数 $\tau(s)$

则在局部一定存在一条正则曲线 $C: I \rightarrow E^3$
Some point.

s.t. C 以 s 为参数, 以 $k(s)$ $\tau(s)$ 为曲率与挠率.

(唯一性) 且满足相同条件的曲线最多相差一个运动

由 ODE 直接看出.

Conclusion.

Frenet 标架.

↓ 应用

特殊曲线特征

- 直线
- 平面曲线
- 圆柱螺线
- 一般螺线

局部展开.

基本定理.