W3L1

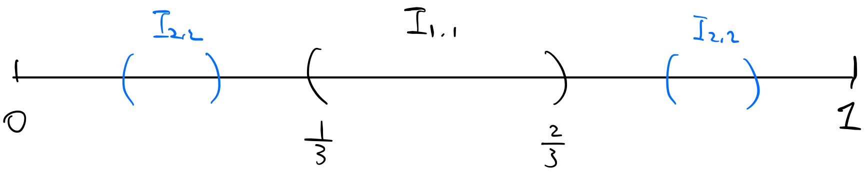
下周习题课　助教徐超

《实变函数》ZXW.　1.5　(七) Cantor完备集、与Cantor函数

(八) $\mathbb{R}^n$中长方体

(九). $\mathbb{R}^n$上的连续函数. 点与集的距离

§ Cantor集构造



	取走开区间长度	个数	剩余闭区间个数	定义 $f(x)$
Step 1	$I_{1,1}=(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ 去掉区间长度 $\frac{1}{3}$	2^0	2^1	$f(x)=\frac{1}{2},\ x\in I_{1,1}$
Step 2	$I_{2,1}=(\frac{1}{9},\frac{2}{9})$ $I_{2,2}=(\frac{7}{9},\frac{8}{9})$ 去掉区间长度 $\frac{2}{3^2}$ ← 区间个数 2^{n-1} 区间长度	2^1	2^2	$f(x)=\frac{2k-1}{2^2},\ k=1,2$ ($I_{2,1}$, $I_{2,2}$)
Step 3.	$I_{3,1},\dots,I_{3,4}$ 去掉区间长度 $\frac{2^2}{3^3}$	2^2	2^3	$f(x)=\frac{2k-1}{2^3},\ 1\le k\le 4=2^2$
Step n.	$I_{n,1},\dots,I_{n,2^{n-1}}$ 去掉区间长度 $\frac{2^{n-1}}{3^n}$	2^{n-1}	2^n	$f(x)=\frac{2k-1}{2^n},\ 1\le k\le 2^{n-1}$

Sum?

$$\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{3}$$

$$S=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2^2}{3^3}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=1$$

$$G=\bigcup\{I_{n,k}: 1\le k\le 2^{n-1}, n\ge 1\}.$$

定义. $C=[0,1]-G$. 为 Cantor 完备集

Prop. (Cantor 完备集)

1° 完备　由 Thm 1.5.11. 由于 G 为可数不交的开区间的并. $\Rightarrow$ C 完备

2° 无内点

3° 疏朗　即 $G=[0,1]-C$ 稠密.

$\forall (a,b)\subset[0,1]$. (a,b) 中有 G 的点. why?

因为 G 中所有区间长总和为 1.

若有 $(a,b)\cap G=\varnothing$. 则长度过多了

4° 连续统势.　每次三分. 类似做了三进制小数

由于 G 将中间区间都删掉了 故只有 0 与 2, 1 都挖掉了.

故. 等价于仅由 0,2 表示的 无限二元数列 $\{a_n\}$

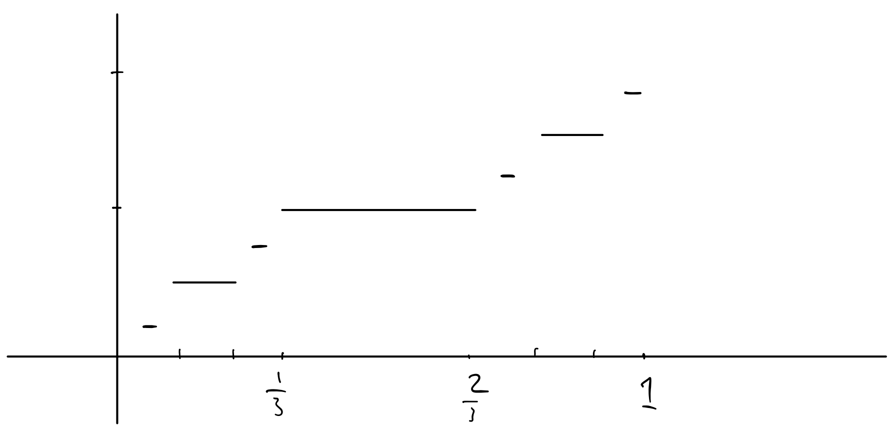
why? 有 1. 则表示某一步

取了中间. 则在 G 中

$\overline{\overline{\{a_n\}}}=\aleph$ (由 Thm 1.4.7).

$\Rightarrow$ $\overline{\overline{C}}=\aleph$.

5° $f(x)$. 单调 定义在 G 上.. 现在想延拓到 $[0,1]$. "连续延拓"



Define: $g(x)$: $g(1)=1$

$g(x)=\inf\{f(y): y>x, y\in G\},\ 0\le x<1.$

$\Rightarrow$ g 单增

且 $g(G)=\left\{\frac{2k-1}{2^n}: 1\le k\le 2^{n-1}, n\ge 1\right\}$ 稠密

习题 10. 10. 设 f 是 $[a,b]$ 上单增实值函数, $f([a,b])$ 是区间 $[f(a),f(b)]$ 的稠子集, 求证: f 连续.

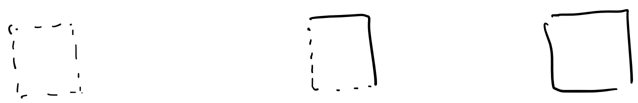
$g(x)$ 为 Cantor 函数 $\xrightarrow{\text{will see}}$ Chap 5. 几乎处处可导, 为 0

---

§ $\mathbb{R}^n$ 中的开集. 重点为 Thm 1.5.14、描述开集的构成

1° 长方体. $\mathbb{R}^n$ 中. $1\le k\le n$, $a_k<b_k$ 则.

$$\prod_{k=1}^{n}(a_k,b_k) \qquad \prod_{k=1}^{n}(a_k,b_k] \qquad \prod_{k=1}^{n}[a_k,b_k]$$



开长方体　　半开长方体　　闭长方体

体积: $V=\prod_{k=1}^{n}(b_k-a_k)$

想去研究 $\mathbb{R}^n$ 中开集是什么样的 就如 Thm 1.5.5 那样.

故首先要研究 长方体这种基本元素.

Thm 1.5.13 描述长方体可无穷切割

Thm 1.5.14 描述了 $\mathbb{R}^n$ 中开集的样子.

Thm 1.5.13 设 I 为 $\mathbb{R}^n$ 中的方体, 边长为 λ, 则 I 可以表示为有限个边长为 $\frac{\lambda}{2}$ 的方体的并

直接切就行

Thm. 1.5.14. $\mathbb{R}^n$ 中任一开集可数个两两不相交的半开方体的并

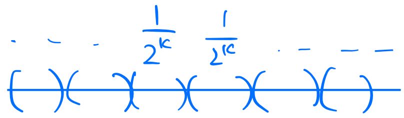
思路就是构造一个"基"，可以并出所有开集，同时希望这该"基"是可数的，故可以看到下面的 A_k 构造为离散化构造。

任意取

Pf. 定义 $A_k = \left\{ \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{s_i - 1}{2^k}, \frac{s_i}{2^k} \right] : s_i \in \mathbb{Z} \right\} \quad k \geq 1$

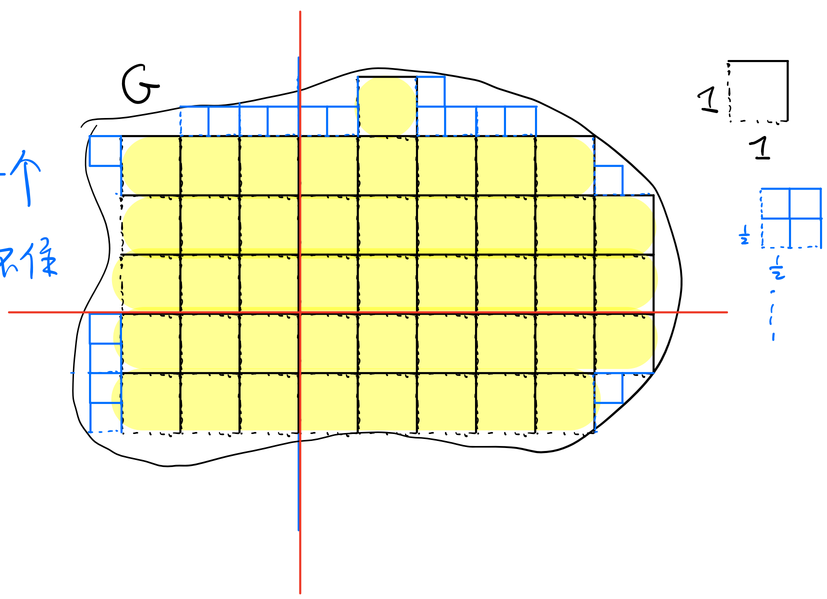
固定一个 k 的时候 就是以 $\frac{1}{2^k}$ 的长度，将整个 $\mathbb{R}^n$ 切成了一个个小方体。

例如看其中一个维度，由于 $S_i \in \mathbb{Z}$。



随着 $k\uparrow$，切得越细。

有了这样的切割后，对于一个开集 G，先用大方体去覆盖，盖不住的部分再用更小的方体去覆盖。



严格表述 G 为 $\mathbb{R}^n$ 中的开集。

用 A_1' 表示 A_1 中所有含于 G 中的半开方体的全体

A_2' 表示 A_2 中所有含于 $G - \cup A_1'$ 中的半开方体的全体

其中 $\cup A_1'$ 表示 A_1' 中所有半开方体的并

⋮

A_k' 表示 A_k 中所有含于 $G - \bigcup_{m=1}^{k-1} (\cup A_m')$ 中的半开方体的全体

现在 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k'$ 为一族可数个两两不相交的半开方体

且 $G' = \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k' \right) \subset G$

下面希望证 $G'=G$. 故要证 $G'\supset G$

$\forall x\in G$. 由 G 开集 $\Rightarrow$ $\exists V(x,\varepsilon)\subset G$.

设 $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. 对充分大的 k. 对应地就有一列整数 $(s_1,s_2,\ldots,s_n)$

s.t.
$$x=(x_1,\ldots,x_n)\in\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{s_i-1}{2^k},\frac{s_i}{2^k}\right]\subset V(x,\varepsilon)\subset G$$

故. x 必是 $\in G'$ $\Rightarrow$ $G\subset G'$ ∎

---

§ $\mathbb{R}^n$ 上函数.

"f 沿 D 连续" 即在 D 上连续. 类似子空间拓扑那种定义方式

在孤立点上 f 总连续.

对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$,

使
$$|f(y)-f(x)|<\varepsilon,\quad \forall y\in V(x,\delta)\bigcap D.$$

若 f 沿 D 在 D 的每一点连续, 则称 **f 沿 D 连续.**

Thm. 1.5.15

定理 1.5.15 设 f 是 $\mathbf{R}^n$ 上的实值函数. 则为使 f 在 $\mathbf{R}^n$ 上连续, 充要条件是对任何实数 α, 集 $\{x:f(x)>\alpha\},\{x:f(x)<\alpha\}$ 都是开集.

"$\Rightarrow$"

Pf. 设 $A_\alpha=\{x:f(x)>\alpha\}$.

$x\in A_\alpha \Leftrightarrow f(x)-\alpha>0$

取 $\varepsilon=f(x)-\alpha$ $\exists\delta>0$. $\forall y\in V(x,\varepsilon)$

$|f(y)-f(x)|<\varepsilon=f(x)-\alpha$

$\alpha-f(x)<f(y)-f(x)<f(x)-\alpha$ $\Rightarrow f(y)>\alpha$ $\Rightarrow V(x,\varepsilon)\subset A_\alpha$

由此 A_α 为开集.

同理 B_α 为开集

"$\Leftarrow$" $\forall x\in\mathbb{R}^n$ $\forall \varepsilon>0$. $A=\{y: f(y)>f(x)-\varepsilon\}$

$B=\{y: f(y)<f(x)+\varepsilon\}$

$\Rightarrow A\cap B$ 为开集 且 $x\in A\cap B$

则取 $\exists V(x,\delta)$. s.t. $V(x,\delta)\subset A\cap B$

则 $\forall y\in V(x,\delta)$ 有 $f(x)-\varepsilon<f(y)<f(x)+\varepsilon$

i.e. $|f(y)-f(x)|<\varepsilon \Rightarrow x$ 处连续

---

§ 距离函数. 本节主要要证明 Thm 1.5.18.

Thm 1.5.16 描述距离函数性质

Thm 1.5.17 (Bolzano-Weierstrass). 为有收敛子列作准备.

$D\subset\mathbb{R}^n$. $x\in\mathbb{R}^n$.

定义 $d(x,D)=\inf\{d(x,y): y\in D\}$

称为 x 与 D 的距离

for Thm 1.5.16

Lemma 1.5.2. 设 $D\subset\mathbb{R}^n$. 则对任何 $x,y\in\mathbb{R}^n$. 有

$$|d(x,D)-d(y,D)|\leq d(x,y)$$

Pf. $\forall z\in D$

$$d(x,D)\overset{\text{由 inf}}{\leq} d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$$

$\Rightarrow d(x,D)\leq d(x,y)+d(y,D)$.

同理. $d(y,D)\leq d(x,y)+d(x,D)$

$\Rightarrow |d(x,D)-d(y,D)|\leq d(x,y)$. ∎

由此. 对于固定的 $D\subset\mathbb{R}^n$. 只要 $d(x,y)$ 足够小. $|d(x,D)-d(y,D)|$ 就足够小.

⇒ Thm. 1.5.16.

定理 1.5.16 设 $D \subset \mathbf{R}^n$, 则 $d(x, D)$ 是 $x \in \mathbf{R}^n$ 的一致连续函数.

定理 1.5.17 (Bolzano-Weierstrass) $\mathbf{R}^n$ 中任一有界点列有收敛子列. 特别地, $\mathbf{R}^n$ 中任一有界无限点集至少有一个聚点.

数分3已讲

证明 设 $\{x_k\}_{k\geqslant 1}$ 是一个有界点列, 其中

$$x_k = (x_k(1), x_k(2), \cdots, x_k(n)), \quad k = 1, 2, \cdots.$$

此时对每一 $s, 1 \leqslant s \leqslant n, \{x_k(s)\}_{k\geqslant 1}$ 是 $\mathbf{R}$ 中的有界点列. 于是利用 $\mathbf{R}$ 中的 Bolzano-Weierstrass 定理, 有正整数子列 $\{k_p\}_{p\geqslant 1}$, 使对每一 $s, 1 \leqslant s \leqslant n, x_{k_p}(s)$ 收敛于一个实数 $x(s)$. 此时易知 $x_{k_p} \to x(p \to \infty)$, 其中 $x = (x(1), x(2), \cdots, x(n))$. 定理证毕.

未讲到 Thm. 1.5.18. . 下周应该第2章了.

习题 49. 52. 55. 56.