W2L2

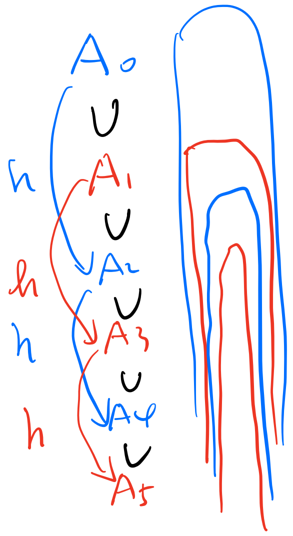
《实变函数》ZXW. 1.4

§基数比较

Thm. 1.4.10.

$A_0 \supset A_1 \supset A_2$. $A_0 \sim A_2 \Rightarrow A_0 \sim A_1$

证. 我们希望有 $A_0 \sim A_1$ 的一一对应. (证明中用到的 Thm. 1.4.2 实际为一种对称)



$$A_{-1} = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_{2n} = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_{2n+1}.$$

$$A_0 = A_{-1} \cup \left[\bigcup_{n=0}^{\infty} (A_{2n} - A_{2n+2}) \right]$$

$$A_1 = A_{-1} \cup \left[\bigcup_{n=0}^{\infty} (A_{2n+1} - A_{2n+3}) \right]$$

有 $A_{2n+2} - A_{2n+3} = h(A_{2n} - A_{2n+1})$

$\Rightarrow A_{2n+2} - A_{2n+3} \sim A_{2n} - A_{2n+1}$

又由 $A_{2n+1} - A_{2n+2} \sim A_{2n+1} - A_{2n+2}$.

$\Rightarrow A_{2n+1} - A_{2n+3} \sim A_{2n} - A_{2n+2}$

□

Lemma. $f: A \to C$ injective. $B \subset A$

则 $f(A-B) = f(A) - f(B)$

5. 无限基数的运算

在无限集合中，基数的运算有一些特殊性质：

(1) 加法

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0, \quad \aleph_0 + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$$

任何有限基数加上 $\aleph_0$ 仍然是 $\aleph_0$。

(2) 乘法

$$\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0, \quad \aleph_0 \times \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$$

即使无限基数相乘，仍然保持较大的那个基数。

(3) 幂运算

$$2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$$

更一般地，如果 κ 是任意无穷基数，则：

$$2^{\kappa} > \kappa$$

- **康托尔定理（Cantor's Theorem）**：
  - 对于任何集合 S，其幂集 $\mathcal{P}(S)$ 的基数严格大于 S 的基数：
  $$|\mathcal{P}(S)| > |S|$$
  - 这意味着无穷集合也有不同层次的无穷大。
- **施罗德–伯恩斯坦定理（Schröder–Bernstein Theorem）**：
  - 如果 $|A| \leq |B|$ 且 $|B| \leq |A|$，则 $|A| = |B|$。
- **连续统假设（CH）**：
  - 假设 $\mathfrak{c} = \aleph_1$，即 $2^{\aleph_0}$ 是最小的不可数基数。

Def.

- A与B的子集等价 $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$
- $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$ 且 A不与B等价 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$

$\mathbb{N} \ni n < a < c$

a：可数基数 $= \aleph_0$

c：连续统势 $\overset{?}{=} \aleph_1$

Prop (Thm 1.4.11)

(i) $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{A}}$

(ii) $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$. $\overline{\overline{B}} \leqslant \overline{\overline{C}} \Rightarrow \overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{C}}$

(iii) $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$. $\overline{\overline{B}} \leqslant \overline{\overline{A}} \Rightarrow \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ (Bernstein 定理)

给了一种证明等价的方法.
双向的单射即可. 见例

Pf of (iii).

$A \sim B_1 \subset B$

$B \sim A_1 \subset A$

$\Rightarrow B_1 \sim A_2 \subset A$

$A \supset A_1 \supset A_2$

$\Rightarrow A \sim A_1 \sim B$ $\square$

例. $\overline{\overline{C[0,1]}} = c$.

Pf. $\mathcal{F} = C[0,1]$

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. $f_\lambda : [0,1] \to \{\lambda\}$. $f_\lambda \in \mathcal{F}$

$\Rightarrow c \leqslant \overline{\overline{\mathcal{F}}}$

- 令$\{r_n\}_{n\geq 1}$ 为$[0,1]$中有理数全体

单射由f连续得到

对每个$f \in \mathcal{F}$. 构造 $\{f(r_1), f(r_2), \dots, f(r_n), \dots\} \subset \mathbb{R}^\omega$

$\Rightarrow \overline{\overline{\mathcal{F}}} \leq c$

$\Rightarrow \overline{\overline{\mathcal{F}}} = c$ $\square$

已有 $2^a = c$.

Thm. 1.4.12. $\underset{(A)}{\mu} < 2^{\underset{(\mathcal{A})}{\mu}}$.

Pf. ① $\mu \leq 2^{\mu}$ clearly

② 假设 $A \sim \mathcal{A}$. 有在完全一一映射.

$$f: A \sim \mathcal{A}$$
$$x \mapsto f(x) \subset A$$

令 $A^* = \{x \in A : x \notin f(x)\}$.

由于 f 完全 (on)

则 对于 A^*. $\exists x^* \in A$, $f(x^*) = A^*$

若 $x^* \in f(x^*) \Rightarrow x^* \in A^*$ 与 A^* 定义 $\rightarrow\leftarrow$

若 $x^* \notin f(x^*)$ 应该有 $x^* \in A^*$. $\rightarrow\leftarrow$

§. 拓扑