W3L1

《实变函数》ZXW. 1.5

§ 开集

- 构成区间. $G \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}$

  (a,b) 为开区间, 若 $(a,b) \subset G$ 但 $a \notin G$, $b \notin G$.

  则 (a,b) 为 G 的一个构成区间

  a, b 可为 $-\infty$, $+\infty$.

<u>Lemma</u> 1.5.1 设 G 为 $\mathbb{R}$ 中开集, G 中每一点必属于 G 的一个构成区间

Pf. $x \in G$. because of G is open..

$\exists \delta > 0$, $(x-\delta, x+\delta) \subset G$.

let $\begin{cases} b = \sup\{b' > x : (x, b') \subset G\} \\ a = \inf\{a' < x : (a', x) \subset G\} \end{cases}$

$\Rightarrow (a,b)$ 为 G 的构成区间且 $x \in (a,b)$

<u>Thm. 1.5.5</u> $G \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}$. 则 G 为至多可数个两两不相交的开区间的并

Pf. 由例 1.4.1. ✓

§. $\mathbb{R}^n$中 内点、内核(内部)、附着点、闭包

聚点、导集、孤立点、完备集、疏集、稠集

Thm. 1.5.6. $x \in \bar{E} \iff \exists$ E中的点列 $\{x_k\}$ s.t. $x_k \to x$.

Thm. 1.5.7. (i). $E^\circ \subset E$, E°为开集而且为E中最大开集.

(ii). $\bar{E} \supset E$. $\bar{E}$为闭集而且为包含E的最小闭集.

Thm. 1.5.8. $x \in E' \iff \exists \{x_k\} \subset E$, $x_k \neq x$. $x_k \to x$

Thm 1.5.9. $\forall E \subset \mathbb{R}^n$. $\bar{E} = E \cup E'$.

且 E为完备集 $\iff E = E'$

这里 ≠ complete

多加了无孤立点的条件. confused.

分开集

- 疏(闭)集 $E \subset \mathbb{R}^n$, 在$\mathbb{R}^n$中任何非空开集必有非空开子集与E不相交.
- 稠密集. $E \subset \mathbb{R}^n$. 在$\mathbb{R}^n$中任何非空开集与E有非空交.

Thm 1.5.10 设$E \subset \mathbb{R}^n$

(i). E为疏集. $\iff (\bar{E})^\circ = \phi$

(ii). E为稠集 $\iff \bar{E} = \mathbb{R}^n$

Pf $\Rightarrow$| argue by contradiction

assume $(\bar{E})^\circ \ni x$

$\exists V(x,\varepsilon) \subset \bar{E}$

取$V(x,\varepsilon)$为 与疏集矛盾. contradiction

$\Leftarrow$| $(\bar{E})^\circ = \phi$

$\Rightarrow \bar{E}$无内点 $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\forall \varepsilon > 0$. $V(x,\varepsilon) \cap (\bar{E})^c \neq \phi$

且 $(\bar{E})^c$ is open

$\Rightarrow$ 令 $V(x,\varepsilon)\cap(\bar{E})^c = V'$

V' is open.

$\Rightarrow V' \subset V(x,\varepsilon)$ 且 $V\cap E=\phi$

§ Cantor 完备集. Cantor 函数.

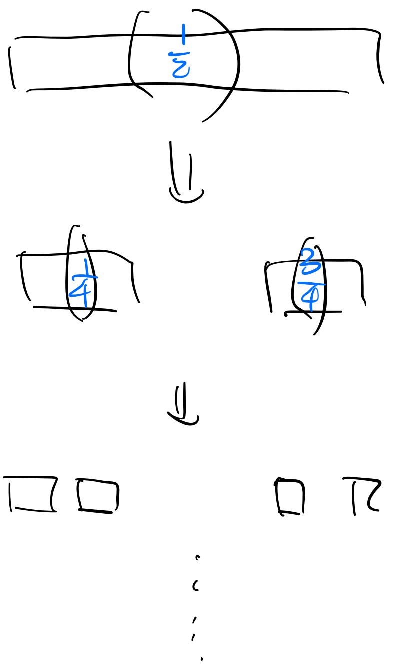
由上面的诸多结果,

首先, a thm.

Thm 1.5.11

$F\subset\mathbb{R}$ 为完备集、$\Longleftrightarrow$ $F^c=\mathbb{R}-F$ 为至多可数个两两不相交且无公共端点的开区间的并.

Cantor.



疏朗集. 且完备.

且有连续统势.

Fractal 分形 自相似.