W1HW.

1. 4. 7. 8. 10.

1. $L=[l_{ij}]_{n\times n}$. $[L\ \ I]$ 对增广矩阵作行变换. $\Longrightarrow [I\ \ L^{-1}]$

推理: 由 L 可逆. $\Rightarrow l_{ii}\neq 0$. $i=1,2,\cdots,n$.

用第一行消元: $L_1L = (I-l_1e_1^T)L$

其中 $l_1=\left(0,\frac{l_{21}}{l_{11}},\frac{l_{31}}{l_{11}},\cdots,\frac{l_{n1}}{l_{11}}\right)$

用第二行消元: $L_2(L_1L)=(I-l_2e_2^T)L_1L$

其中 $l_2=\left(0,0,\frac{l_{32}}{l_{22}},\frac{l_{42}}{l_{22}},\cdots,\frac{l_{n2}}{l_{22}}\right)$

$\vdots$

用第 k 行消元: $L_k(L_{k-1}\cdots L_1L)=(I-l_ke_k^T)(L_{k-1}\cdots L_1L)$

其中 $l_k=\left(0,\cdots,0,\frac{l_{k+1,k}}{l_{kk}},\cdots,\frac{l_{n,k}}{l_{kk}}\right)$.

$$\Rightarrow\quad L_{n-1}\cdots L_1L=\begin{pmatrix} l_{11} & & & \\ & l_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & l_{nn}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad L_n=\begin{pmatrix} \frac{1}{l_{11}} & & & \\ & \frac{1}{l_{22}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{l_{nn}}\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad L_nL_{n-1}\cdots L_1L=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad L_nL_{n-1}\cdots L_1=L^{-1}$$

$$\Rightarrow\quad L^{-1}=L_n(I-l_{n-1}e_{n-1}^T)(I-l_{n-2}e_{n-2}^T)\cdots(I-l_1e_1^T)$$

算法:
```
for i = 1:n
    I(i,i) = 1
for i = 1:n-1
    I(i+1:n, 1:i) = I(i+1:n, 1:i) - I(i, 1:i) · L(i+1:n, i) / L(i,i)
    I(i,i) = I(i,i) / L(i,i)
```

end

4.
$$L\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\7\\8\end{bmatrix}$$

$L = I - l e_1^T$ 其中 $l=(0,-2,-2)$

$$\Rightarrow L = I-\begin{pmatrix}0\\-2\\-2\end{pmatrix}(1,0,0) = \begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$$

验证：
$$\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\7\\8\end{pmatrix}$$

7. A 对称. $a_{11}\neq 0$

A_2 中对称位置： a_{ij}' $i>1, j>1$

a_{ji}'

$$a_{ij}' = a_{ij} - a_{1j}\cdot\frac{a_{i1}}{a_{11}}$$

$$a_{ji}' = a_{ji} - a_{1i}\cdot\frac{a_{j1}}{a_{11}}$$

由 $\left.\begin{array}{l} a_{ij}=a_{ji} \\ a_{1j}=a_{j1} \\ a_{i1}=a_{1i}\end{array}\right\} \Rightarrow a_{ij}'=a_{ji}'$

$\Rightarrow A_2$ 对称.

8. A. 严格对角占优阵.

$$|a_{kk}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|$$

pf. A_2 严格对角占优 $\Longleftrightarrow A'$ 严格对角占优

check. 第一行： $a_{11}\ a_{12}\ \cdots\ a_{1n}$ 未变化. 仍有 $|a_{11}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^{n} |a_{1j}|$

Check：第k行

$0 \quad a_{k2}-a_{12}\cdot\frac{a_{k1}}{a_{11}} \quad a_{k3}-a_{13}\frac{a_{k1}}{a_{11}} \quad \cdots\cdots \quad a_{kk}-a_{1k}\frac{a_{k1}}{a_{11}} \quad \cdots \quad a_{kn}-a_{1n}\frac{a_{k1}}{a_{11}}$

$|a_{kk}'| = \left|a_{kk}-a_{1k}\frac{a_{k1}}{a_{11}}\right|.$

$$\sum_{\substack{j=2\\j\neq k}}^{n}|a_{kj}'| = \sum_{\substack{j=2\\j\neq k}}^{n}\left|a_{kj}-a_{1j}\frac{a_{k1}}{a_{11}}\right| < \sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}|a_{kj}| + \sum_{\substack{j=2\\j\neq k}}^{n}\left|\frac{a_{1j}}{a_{11}}\right||a_{k1}|$$

$$< \sum_{\substack{j=2\\j\neq k}}^{n}|a_{kj}| + |a_{k1}|\left(1-\frac{|a_{1k}|}{|a_{11}|}\right)$$

$$= \sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}|a_{kj}| - \frac{|a_{1k}|}{|a_{11}|}|a_{k1}| < |a_{kk}'|.$$

$\Rightarrow$ 仍然满足严格对角占优 $\Rightarrow A_2$ 严格对角占优 □

10、 A. 正定阵 $\Leftrightarrow$ A所有顺序主子式 >0

由 $\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{1,k}^T \\ 0 & A_{2,k}\end{bmatrix} = a_{11}\cdot\det A_{2,k} \Rightarrow A_2$ 正定 $\Leftrightarrow A'$ 正定

而 $\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{1,k}^T \\ 0 & A_{2,k}\end{bmatrix} = \det A_k > 0 \Rightarrow A'$ 正定 $\Rightarrow A_2$ 正定 □