第三讲：正定矩阵的平方根法及推广

To grow and to help others grow. To live and to help others live.

1. 设
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 & 2 \\ -2 & 10 & -2 & -7 \\ 4 & -2 & 8 & 4 \\ 2 & -7 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 16 \\ 6 \end{pmatrix}.$$
用平方根方法证明给出方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解。

2. 设
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 20 & 45 & 80 \\ 30 & 80 & 171 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -31 \end{pmatrix}.$$
用改进的平方根方法给出方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解。

3. 设
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 2 & -6 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}.$$
用**追赶法** 求解 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$.

4. 用 Gauss-Jordan 法求
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 7 \\ -1 & 2 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$
的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

上机习题

见教材第 39-40 页: 第 2 题, 第 3 题.

HW03.

1. 设

$$A=\begin{pmatrix}4&-2&4&2\\-2&10&-2&-7\\4&-2&8&4\\2&-7&4&7\end{pmatrix},\qquad b=\begin{pmatrix}8\\2\\16\\6\end{pmatrix}.$$

用平方根方法证明给出方程组 $Ax=b$ 的解。

$$\begin{pmatrix}4&-2&4&2\\-2&10&-2&-7\\4&-2&8&4\\2&-7&4&7\end{pmatrix}$$ 正定对称

$$\begin{pmatrix}4&-2&4&2\\-2&10&-2&-7\\4&-2&8&4\\2&-7&4&7\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}4&-2&4&2\\-\frac{1}{2}&9&0&-6\\1&0&4&2\\\frac{1}{2}&-6&2&6\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}4&-2&4&2\\-\frac{1}{2}&9&0&-6\\1&0&4&2\\\frac{1}{2}&-\frac{2}{3}&2&2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}4&-2&4&2\\-\frac{1}{2}&9&0&-6\\1&0&4&2\\\frac{1}{2}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}$$

$$\tilde{L}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-\frac{1}{2}&1&0&0\\1&0&1&0\\\frac{1}{2}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}4&&&\\&9&&\\&&4&\\&&&1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow L=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\-1&3&0&0\\2&0&2&0\\1&-2&1&1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A=LL^T$$

① $Ly=b$

$$\begin{pmatrix}2&&&\\-1&3&&\\2&0&2&\\1&-2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\2\\16\\6\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}y_1=4\\y_2=\dfrac{2+y_1}{3}=2\\y_3=\dfrac{16-2y_1}{2}=4\\y_4=6-y_3+2y_2-y_1=6-4+4-4=2\end{cases}$$

② $L^T x = y$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ & 3 & 0 & -2 \\ & & 2 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_4 = 2 \\ x_3 = \dfrac{4 - x_4}{2} = 1 \\ x_2 = \dfrac{2 + 2x_4}{3} = 2 \\ x_1 = \dfrac{4 - x_4 - 2x_3 + x_2}{2} = \dfrac{4-2-2+2}{2} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. 设

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 20 & 45 & 80 \\ 30 & 80 & 171 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -31 \end{pmatrix}.$$

用改进的平方根方法给出方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的解。

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 20 & 45 & 80 \\ 30 & 80 & 171 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 2 & 5 & 20 \\ 3 & 20 & 81 \end{pmatrix}.$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 2 & 5 & 20 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 10 & & \\ & 5 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad L^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & 1 & 4 \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ ① $Ly = b$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -31 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow y_1 = 10 \quad y_2 = 5 - 2y_1 = -15 \quad y_3 = -31 - 4y_2 - 3y_1$

$= -1$

② $Dz = y$

$$z = D^{-1}y = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & & \\ & \frac{1}{5} & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ -15 \\ 61 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

③ $L^T x = z \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & 1 & 4 \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_3 = -1 \\ x_2 = -3 - 4x_3 = 1 \\ x_1 = 1 - 3x_3 - 2x_2 = 1 + 3 - 2 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3. 设

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 2 & -6 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

用**追赶法** 求解 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$.

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 2 & -6 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 2 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 2 & \alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \beta_1 & 0 \\ 0 & 1 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -4 \\ \alpha_1\beta_1 = 4 \Rightarrow \beta_1 = -1 \\ 2\beta_1 + \alpha_2 = -6 \Rightarrow \alpha_2 = -6 - 2\beta_1 = -6 + 2 = -4 \\ \alpha_2\beta_2 = 4 \Rightarrow \beta_2 = -1 \\ 2\beta_2 + \alpha_3 = 6 \Rightarrow \alpha_3 = 6 - 2\beta_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

① $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 2 \\ y_2 = \dfrac{8 - 2y_1}{-4} = -1 \\ y_3 = \dfrac{-2 - 2y_2}{8} = 0. \end{cases}$

② $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_1 = 2 + x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. 用 Gauss-Jordan 法求

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 7 \\ -1 & 2 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{9}{2} & \frac{17}{2} & -\frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{11}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 3 & 8 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & -17 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 40 & -7 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{16}{5} & -\frac{4}{25} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{25} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{13}{5} & \frac{12}{25} & -\frac{1}{5} & \frac{9}{25} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{5} & -\frac{7}{25} & \frac{1}{5} & \frac{1}{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{17}{5} & \frac{-3}{25} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{25} & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-4}{85} & \frac{10}{17} & \frac{-23}{85} & \frac{-16}{17} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{33}{85} & \frac{-6}{17} & \frac{41}{85} & \frac{13}{17} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-19}{85} & \frac{5}{17} & \frac{-3}{85} & \frac{-8}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-3}{85} & \frac{-1}{17} & \frac{4}{85} & \frac{5}{17} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-4}{85} & \frac{10}{17} & \frac{-23}{85} & \frac{-16}{17} \\ \frac{33}{85} & \frac{-6}{17} & \frac{41}{85} & \frac{13}{17} \\ \frac{-19}{85} & \frac{5}{17} & \frac{-3}{85} & \frac{-8}{17} \\ \frac{-3}{85} & \frac{-1}{17} & \frac{4}{85} & \frac{5}{17} \end{pmatrix}$$

补　直接比较系数.

1.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 & 2 \\ -2 & 10 & -2 & -7 \\ 4 & -2 & 8 & 4 \\ 2 & -7 & 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} & l_{41} \\ & l_{22} & l_{32} & l_{42} \\ & & l_{33} & l_{43} \\ & & & l_{44} \end{pmatrix}$$

first col. $4 = l_{11}^2 \Rightarrow l_{11} = 2$

$-2 = l_{11} l_{21} \Rightarrow l_{21} = -1$

$4 = l_{11} l_{31} \Rightarrow l_{31} = 2$

$2 = l_{11} l_{41} \Rightarrow l_{41} = 1$

second col. $10 = l_{21}^2 + l_{22}^2 \Rightarrow l_{22} = \sqrt{10-1} = 3$

$-2 = l_{31} l_{21} + l_{32} l_{22} \Rightarrow l_{32} = \frac{-2-2\times(-1)}{l_{22}} = \frac{-2+2}{3} = 0$

$-7 = l_{41} l_{21} + l_{42} \cdot l_{22} \Rightarrow l_{42} = \frac{-7-(-1)}{l_{22}} = \frac{-6}{3} = -2$

third col. $8 = l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 \Rightarrow l_{33} = \sqrt{8-4-0} = 2$

$4 = l_{41} \cdot l_{31} + l_{42} \cdot l_{32} + l_{43} \cdot l_{33} \Rightarrow l_{43} = \frac{4-2}{l_{33}} = 1$

fourth col: $7 = l_{41}^2 + l_{42}^2 + l_{43}^2 + l_{44}^2 \Rightarrow l_{44} = \sqrt{7-1-4-1} = 1$

$$\Rightarrow \quad L = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ -1 & 3 & & \\ 2 & 0 & 2 & \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 20 & 45 & 80 \\ 30 & 80 & 171 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ l_{21} & 1 & \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & d_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_{21} & l_{31} \\ & 1 & l_{32} \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & \\ l_{21} & 1 & \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & d_1 l_{21} & d_1 l_{31} \\ & d_2 & d_2 l_{32} \\ & & d_3 \end{pmatrix}$$

first col. $10 = d_1 \Rightarrow d_1 = 10$

$20 = l_{21} \cdot d_1 \Rightarrow l_{21} = 2$

$30 = l_{31} \cdot d_1 \Rightarrow l_{31} = 3$

Second col. $45 = d_1 l_{21}^2 + d_2 \Rightarrow d_2 = 45 - 10 \times 4 = 5$

$$80 = d_1 l_{21} l_{31} + l_{32} d_2 \Rightarrow l_{32} = \frac{80 - 10 \times 2 \times 3}{d_2} = 4$$

third col. $171 = d_1 l_{31} l_{31} + d_2 l_{32} l_{32} + d_3 \Rightarrow d_3 = 171 - 10 \times 9 - 5 \times 16 = 1$

$$\Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & & \\ & 5 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & 1 & 4 \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

1 程序设计

本次实验继续在上次的 `Matrix<T>` 的类中加入了成员函数
`std::pair<Matrix<T>, std::vector<T>> LDLTDecomposition() const`
与函数 `Matrix<T> CholeskyDecomposition() const` 分别为改进的平方根分解法和平方根分解法.
第一个函数返回 L 与 D 矩阵，第二个函数直接返回 L 矩阵，在用平方根分解解矩阵的过程中，用到回代法.

2 测试与实验结果

对于第一个矩阵，由 `Matrix<T>` 类中内置的设置三对角矩阵函数
`static Matrix<T> TridiagonalMatrix(size_t n, T subVal, T diagVal, T supVal)` 设置
$Hilbert$ 矩阵由内置的 `static Matrix<T> HilbertMatrix(size_t n)` 设置，

2.1 三对角矩阵测试与结果

在三对角矩阵测试中，分别设置了 b 为随机向量以及 b 为使得理论解均为 1 的向量进行测试，测试结果如下：

表 1: 三对角 (100 阶)，随机 **b**，LU 分解：部分解向量示例

Index i	$x[i]$	解的绝对误差值
0	-0.47789794	0.00000000
1	6.42029912	0.00000000
2	10.61363734	0.00000000
⋮	⋮	⋮
97	11.55189785	0.00000000
98	10.25040401	0.00000000
99	13.16587475	0.00000000

表 2: 三对角 (100 阶)，随机 **b**，列主元分解：部分解向量示例

Index i	$x[i]$	解的绝对误差值
0	-0.29071664	0.00000000
1	12.79312675	0.00000000
2	3.75417163	0.00000000
⋮	⋮	⋮
97	-1.19680859	0.00000000
98	8.45954290	0.00000000
99	5.63816236	0.00000000

可以看到四个算法都得到了非常精确的解，在这个矩阵的求解中，四个算法的精确度被拉平了.

表 3: 三对角 (100 阶)，随机 **b**，Cholesky 分解：部分解向量示例

Index i	$x[i]$	解的绝对误差值
0	5.23611518	0.00000000
1	2.00788784	0.00000000
2	9.69269693	0.00000000
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
97	1.88352355	0.00000000
98	10.64939405	0.00000000
99	0.58921333	0.00000000

表 4: 三对角 (100 阶)，随机 **b**，LDL^T 分解：部分解向量示例

Index i	$x[i]$	解的绝对误差值
0	6.24026860	0.00000000
1	-0.09503936	0.00000000
2	8.05134473	0.00000000
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
97	13.52248286	0.00000000
98	2.27357061	0.00000000
99	13.88956532	0.00000000

表 5: 三对角 (100 阶)，**b** 使真解为 1，LU 分解：部分解向量示例

Index i	$x[i]$
0	1.00000000
1	1.00000000
2	1.00000000
$\vdots$	$\vdots$
97	1.00000000
98	1.00000000
99	1.00000000

表 6: 三对角 (100 阶)，**b** 使真解为 1，列主元分解：部分解向量示例

Index i	$x[i]$
0	1.00000000
1	1.00000000
2	1.00000000
$\vdots$	$\vdots$
97	1.00000000
98	1.00000000
99	1.00000000

表 7: 三对角 (100 阶)，$\mathbf{b}$ 使真解为 1，Cholesky 分解：部分解向量示例

Index i	$x[i]$
0	1.00000000
1	1.00000000
2	1.00000000
$\vdots$	$\vdots$
97	1.00000000
98	1.00000000
99	1.00000000

表 8: 三对角 (100 阶)，$\mathbf{b}$ 使真解为 1，LDL^T 分解：部分解向量示例

Index i	$x[i]$
0	1.00000000
1	1.00000000
2	1.00000000
$\vdots$	$\vdots$
97	1.00000000
98	1.00000000
99	1.00000000

2.2 Hilbert 矩阵测试与结果

在 Hilber 矩阵测试中，用平方根分解的过程中，发现待开根号的值非常接近 0，同时会出现很小的负数的情况，导致完全无法算出结果，故得到了 nan 的结果；同时，在列主元方法和改进的平方根分解中，实际上已经出现了主元小于 $tolerance$ 的情况，列表中是不管主元的大小继续运算得到的结果；四个算法在 $Hilber$ 矩阵的情况下都无法很好地求解，这与 $Hilbert$ 矩阵的条件数过大有关系。下面还给出了用平方根分解求解 13 阶 $Hilbert$ 矩阵的结果，可以看到在阶数较小的情况下，还是可以一定程度地求解。

表 9: Hilbert(40 阶)，LU 分解：部分解向量示例

Index i	$x[i]$
0	0.99999980
1	1.00003876
2	0.99818251
$\vdots$	$\vdots$
37	-26.65544669
38	34.07261564
39	-12.43474932

表 10: Hilbert(40 阶)，列主元分解：部分解向量示例

Index i	$x[i]$
0	0.99999991
1	1.00001928
2	0.99902559
$\vdots$	$\vdots$
37	-6.14223246
38	-1.65589767
39	2.81407370

表 11: Hilbert(40 阶)，Cholesky 分解：部分解向量示例

Index i	$x[i]$
0	nan
1	nan
2	nan
$\vdots$	$\vdots$
37	nan
38	nan
39	nan

表 12: Hilbert(40 阶)，LDL^T 分解：部分解向量示例

Index i	$x[i]$
0	1.00000015
1	0.99997161
2	1.00130808
$\vdots$	$\vdots$
37	-46.42889503
38	73.83362397
39	-22.08116251

表 13: Hilbert(13 阶)，Cholesky 分解：部分解向量示例

Index i	$x[i]$
0	1.00000014
1	0.99997737
2	1.00087297
$\vdots$	$\vdots$
37	7.07570132
38	-1.30294173
39	1.38273717