Representaciones Irreducibles del Grupo Simétrico S_n Y Diagramas de Young.

Gonzalo Jiménez A.

2 de julio de 2018

En este documento se construirán algunas representaciones irreducibles del grupo simétrico S_n utilizando resultados de combinatoria. Específicamente, veremos que estas representaciones están determinadas por los *Diagramas de Young* correspondientes a las particiones del número n.

1. Particiones y Clases de Conjugación

Definición. Una *partición* de n es una tupla $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$ de enteros positivos $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_l \geq 1$ tales que $n = \lambda_1 + \cdots + \lambda_l$. Para indicar que λ es una partición de n, escribimos $\lambda \vdash n$.

Ejemplo 1.1. Son particiones de 5 las tuplas $(5), (4,1), (3,2), (3,1,1), (2,2,1), (2,1,1,1), (1,1,1,1,1)$.

Recordemos que cada permutación $\sigma \in S_n$ se puede descomponer únicamente como producto de ciclos disjuntos. Así, cada permutación determina de forma natural una partición de n.

Ejemplo 1.2. Sea $n = 5$. Entonces

$$\begin{gathered} tipo((1\ 2\ 3\ 4\ 5)) = (5),\ tipo((1\ 2\ 3\ 4)) = (4,1) \\ tipo((1\ 3)(2\ 4\ 5)) = (3,2),\ tipo((1\ 2)(2\ 3)) = tipo((1\ 2\ 3)) = tipo((1\ 2\ 3)(4)(5)) = (3,1,1) \\ tipo((1\ 2)(3\ 4)) = (2,2,1),\ tipo((1\ 2)) = (2,1,1,1),\ tipo(Id_5) = (1,1,1,1,1). \end{gathered}$$

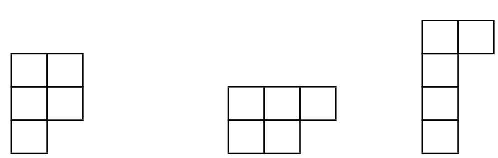
Teorema 1.1. Sean $\sigma, \tau \in S_n$. Entonces σ es conjugada a τ si y solo si $tipo(\sigma) = tipo(\tau)$.

Corolario 1.2. El número de representaciones irreducibles de S_n es el número de particiones de n.

2. Diagramas de Young

Definición. Si $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$ es una partición de n, entonces el *Diagrama de Young* (o simplemente *diagrama*) de λ consiste de n casillas distribuídas entre l filas, alineadas a la izquierda, donde la i-ésima fila tiene λ_i casillas.

Ejemplo 2.1. Estos son ejemplos de diagramas de Young para $n = 5$ y $\lambda_1 = (2,2,1)$, $\lambda_2 = (3,2)$ y $\lambda_3 = (2,1,1,1)$.



λ_1-diagrama de Young $\quad$ λ_2-diagrama $\quad$ λ_3-diagrama

Definición. Si $\lambda \vdash n$, entonces llamamos un λ-*tableaux* (o *Tableaux de Young de forma* λ) a una numeración de las casillas que componen al λ-diagrama de Young usando los números $1, 2, \ldots, n$.

Ejemplo 2.2. Considerando $\lambda = (4, 1)$, algunos λ-tableaux son los siguientes

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 3 & 1 & 2 & 5 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 5 & 3 & 2 & 4 \\ \hline 1 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

3. Construcción de Representaciones Irreducibles.

Si $X \subseteq \{1, \ldots, n\}$, identificamos S_X con aquellas permutaciones de S_n que fijan a todos los elementos que no están en X. Por ejemplo, $S_{\{2,3\}}$ está compuesto por $\{Id, (2\ 3)\}$.

Definición. Sea t un tableaux. El *estabilizador columna* de t (C_t) es el subgrupo de S_n que preserva el contenido de las columnas de t. Esto es, $\sigma \in C_t$ si y solo si $\sigma(i)$ está en la misma columna que i para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Ejemplo 3.1. Suponga que

$$t = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & 1 & 3 \\ \hline 5 & 4 \\ \cline{1-2}\end{array}$$

Entonces $C_t = S_{\{2,5\}} S_{\{1,4\}} S_{\{3\}} \cong S_{\{2,5\}} \times S_{\{1,4\}} \times S_{\{3\}}$. Así, por ejemplo, $(2\ 5),\ (2\ 5)(1\ 4) \in C_t$. Como $S_{\{3\}} = \{Id\}$, se sigue que $|C_t| = 2! \cdot 2! = 4$.

El grupo S_n actúa transitivamente sobre el conjunto de los λ-tableaux aplicando $\sigma \in S_n$ a las entradas de las casillas. El resultado de aplicar $\sigma \in S_n$ a t es denotado por σt.

Ejemplo 3.2. Si

$$t = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 2 & 1 & 3 & 4 \\ \hline 5 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

y $\sigma = (1\ 2)(3\ 4)$, entonces

$$\sigma t = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4 & 3 \\ \hline 5 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Definimos ahora la relación $\sim$ en el conjunto de λ-tableaux. Diremos que $t_1 \sim t_2$ si tienen las mismas entradas en cada fila.

Ejemplo 3.3. Vemos que los siguientes tableaux tienen a los elementos $\{1, 3, 4\}$ en la primera fila y a $\{2, 5\}$ en la segunda.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&4\\\hline 2&5\\\cline{1-2}\end{array} \quad \sim \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 4&1&3\\\hline 5&2\\\cline{1-2}\end{array}$$

Observación. No es difícil ver que la relación $\sim$ es una relación de equivalencia.

Definición. Una $\sim$-clase de equivalencia de λ-tableaux es llamada un λ-*tabloide* o un *tabloide de forma* λ. El tabloide de un tableaux t es denotado por $[t]$. El conjunto de todos los tabloides de forma λ es denotado T^λ.

Proposición 3.1. Suponga que $t_1 \sim t_2$ y $\sigma \in S_n$. Entonces $\sigma t_1 \sim \sigma t_2$. Así, hay una acción bien definida de S_n en T^λ dada por $\sigma[t] = [\sigma t]$ para t un λ-tableau.

Para una partición λ, denotamos por M^λ a $\mathbb{C}T^\lambda$ y consideramos $\varphi^\lambda : S_n \to GL(M^\lambda)$ la representación por permutaciones asociada.

Ejemplo 3.4. Suponga que $\lambda = (n-1, 1)$. Entonces dos λ-tableaux son equivalentes si y solo si tienen la misma entrada en la segunda fila. De este modo, T^λ está en biyección con $\{1, \dots, n\}$ y φ^λ es equivalente a la representación standard o por permutaciones. Por otra parte, si $\lambda = (n)$, entonces existe un único λ-tabloide. Luego, φ^λ es la representación trivial.

Definición. Sea $\lambda, \mu \vdash n$. Sea t un λ-tableaux. Definimos el operador lineal $A_t : M^\mu \to M^\mu$ como

$$A_t = \sum_{\pi \in C_t} sgn(\pi) \varphi^\mu_\pi.$$

En el caso $\lambda = \mu$, el elemento

$$e_t = A_t[t] = \sum_{\pi \in C_t} sgn(\pi) \pi[t]$$

de M^λ es llamado el *politabloide* asociado a t.

Nuestra siguiente proposición muestra que la acción de S_n sobre λ-tableaux es compatible con la definición de λ-tabloide.

Proposición 3.2. Si $\sigma \in S_n$ y t es un λ-tableaux, entonces $\varphi^\lambda_\sigma e_t = e_{\sigma t}$.

Demostración. Primero veamos que $C_{\sigma t} = \sigma C_t \sigma^{-1}$. En efecto, si X_i es el conjunto de entradas de la columna i de t, entonces $\sigma(X_i)$ es el conjunto de entradas de la columna i de σt. Como τ estabiliza X_i si y solo si $\sigma\tau\sigma^{-1}$ estabiliza $\sigma(X_i)$, la afirmación sigue. Ahora, calculamos

$$\begin{aligned} \varphi^\lambda_\sigma A_t &= \sum_{\pi \in C_t} sgn(\pi) \varphi^\lambda_\sigma \varphi^\lambda_\pi \\ &= \sum_{\tau \in C_{\sigma t}} sgn(\sigma^{-1}\tau\sigma) \varphi^\lambda_\sigma \varphi^\lambda_{\sigma^{-1}\tau\sigma} \\ &= A_{\sigma t} \varphi^\lambda_\sigma \end{aligned}$$

donde hemos hecho la substitución $\tau = \sigma\pi\sigma^{-1}$.
Por lo tanto $\varphi^\lambda_\sigma e_t = \varphi^\lambda_\sigma A_t[t] = A_{\sigma t}\varphi^\lambda_\sigma[t] = A_{\sigma t}[\sigma t] = e_{\sigma t}$. Esto completa la demostración. □

Estamos ahora en condiciones de definir la subrepresentación buscada.

Definición. Sea λ una partición de n. Defina S^λ como el subespacio de M^λ generado por los politabloides e_t con t un λ-tableaux. La Proposición 3.2 implica que S^λ es S_n-invariante. Sea $\psi^\lambda : S_n \to GL(S^\lambda)$ la correspondiente subrepresentación. Esta subrepresentación es llamada la *Representación de Sprecht asociada a* λ.

Las representaciones de Sprecht ψ^λ forman un conjunto completo de representaciones irreducibles de S_n.

Observación. Los e_t no son en general linealmente independientes. Esto se verá en el ejemplo que viene.

Ejemplo 3.5. Considere la partición $\lambda = (1, 1, \ldots, 1)$ de n. Como cada fila tiene solo un elemento, los λ-tableaux son lo mismo que los λ-tabloides. Así, φ^λ es equivalente a la representación regular de S_n. Sea t un λ-tableaux. Como t tiene solo una columna, trivialmente se tiene que $C_t = S_n$. Así

$$e_t = \sum_{\pi \in S_n} sgn(\pi)\pi[t].$$

Afirmamos que si $\sigma \in S_n$, entonces $\varphi^\lambda_\sigma e_t = sgn(\sigma)e_t$. Como sabemos que $\varphi^\lambda_\sigma e_t = e_{\sigma t}$ por la Proposición 3.2, se sigue que $S^\lambda = \mathbb{C}e_t$ y que ψ^λ es equivalente a la representación de grado uno $sgn : S_n \to \mathbb{C}^*$.

En efecto, calculamos

$$\begin{aligned} \varphi^\lambda_\sigma e_t &= \sum_{\pi \in S_n} sgn(\pi)\varphi^\lambda_\sigma \varphi^\lambda_\pi [t] \\ &= \sum_{\tau \in S_n} sgn(\sigma^{-1}\tau)\varphi^\lambda_\tau [t] \\ &= sgn(\sigma)e_t \end{aligned}$$

donde hemos usado la substitución $\tau = \sigma\pi$.

Para construir las representaciones usaremos el siguiente lema.

Lema 3.1. Sea $\lambda \vdash n$ y suponga que t^λ y s^λ son λ-tableaux tales que $A_{t^\lambda}[s^\lambda] \neq 0$. Entonces $A_{t^\lambda}[s^\lambda] = \pm e_{t^\lambda}$.

4. Aplicación: El grupo S_5.

Aplicaremos la teoría desarrollada sobre el grupo simétrico S_5 y calcularemos algunas representaciones irreducibles junto con sus caracteres.

4.1. Representación Trivial

Consideremos la partición $\lambda = (5)$ de 5. Su diagrama de Young es

Notemos que existe un único (5)-tabloide. Así, para cualquier par de tableaux distintos t_1 y t_2 tendremos que

$$e_{t_1} = A_{t_1}[t_1] = \sum_{\pi \in C_{t_1}} sgn(\pi)\pi[t_1]$$

Pero $C_t = \{Id_5\}$ para todo tableaux t. Luego

$$\sum_{\pi \in C_{t_1}} sgn(\pi)\pi[t_1] = \sum_{\pi \in C_{t_2}} sgn(\pi)\pi[t_2] = A_{t_2}[t_2] = e_{t_2}$$

Es decir, $e_{t_1} = e_{t_2}$ para cualquier par de tableaux. Tenemos entonces que $S^{(5)} = \mathbb{C}$ y $\psi^{(5)}$ corresponde a la representación trivial $\psi^{(5)} : S_5 \to \mathbb{C}$ con $\psi^{(5)}(\sigma) = 1\ \forall \sigma \in S_5$.

La tabla del caracter es

S_5	$(\cdot)$	$(\cdot\ \cdot)$	$(\cdot\ \cdot\ \cdot)$	$(\cdot\ \cdot)(\cdot\ \cdot)$	$(\cdot\ \cdot\ \cdot)(\cdot\ \cdot)$	$(\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot)$	$(\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot)$
$\chi_{\psi^{(1,1,1,1,1)}}$	1	1	1	1	1	1	1

4.2. Una Representación de Grado 4

Consideramos la partición $\lambda = (4,1)$. Notemos que podemos indexar los tabloides de esta partición según la entrada en la segunda fila de los tableaux. Tenemos entonces que existirán 5 tabloides, a saber

$$[t_i] = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & & \\ \hline i \\ \cline{1-1}\end{array}$$

con $i \in \{1,2,3,4,5\}$.

Nuestra intención es generar el espacio $S^{(4,1)}$. Necesitamos entonces calcular los politabloides e_t y determinar una base para $S^{(4,1)}$. No sabemos la dimensión de este espacio (en principio, podría ser hasta 120, pues cada tableaux genera un politabloide y podrían todos formar un conjunto linealmente independiente), pero ciertamente será menor o igual que 5, pues esta es la cantidad de tabloides distintos que existen para esta partición.

Consideramos los 120 posibles tableaux y los indexamos por familias vía

$$t_{a,b} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline b & & & \\ \hline a \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Con $a \neq b$, ambos pertenecientes al conjunto $\{1,2,3,4,5\}$. Notar que hay 20 familias.

Procedemos a calcular los $e_{t_{a,b}}$. Notemos que

$$e_{t_{a,b}} = A_{t_{a,b}}[t_{a,b}] = (Id_5)[t_{a,b}] - (a\ b)[t_{a,b}] = [t_{a,b}] - [t_{b,a}] = [t_a] - [t_b].$$

Luego, las 20 posibles combinaciones posibles entre a y b se reducen a 10, pues $e_{t_{a,b}} = -e_{t_{b,a}}$.

Los generadores de $S^{(4,1)}$ ahora se han reducido a los politabloides

$$\begin{array}{llll} [t_1]-[t_2] & [t_2]-[t_3] & [t_3]-[t_4] & [t_4]-[t_5] \\ [t_1]-[t_3] & [t_2]-[t_4] & [t_3]-[t_5] & \\ [t_1]-[t_4] & [t_2]-[t_5] & & \\ [t_1]-[t_5] & & & \end{array}$$

De donde es evidente que si tomamos el primer elemento de cada columna, tenemos un conjunto linealmente independiente que genera a los otros elementos.

Tenemos entonces nuestra base $\{[t_1]-[t_2],[t_2]-[t_3],[t_3]-[t_4],[t_4]-[t_5]\} = \{e_{t_{1,2}}, e_{t_{2,3}}, e_{t_{3,4}}, e_{t_{4,5}}\}$.

Calculamos entonces el caracter de la correspondiente representación de Sprecht.

Usando la Proposición 3.2 aplicamos un representante de una clase de conjugación del grupo S_5 a los elementos de la base.

Clase de la Identidad

Para la clase de conjugación de la identidad, como la dimensión de $S^{(4,1)}$ es 4, tenemos que el valor del caracter de $\psi^{(4,1)}_{(1\ 2)}$ en el elemento identidad es 4.

Clase de la permutación (1 2)

Para la clase de conjugación de $\sigma = (1\ 2)$, tenemos $\psi^{(4,1)}_{(1\ 2)} e_{t_{1,2}} = e_{t_{2,1}} = -e_{t_{1,2}}$. Por lo que la primera entrada de la diagonal de la matriz de $\psi^{(4,1)}_{(1\ 2)}$ es -1.

$\psi^{(4,1)}_{(1\ 2)} e_{t_{2,3}} = e_{t_{1,3}} = [t_1] - [t_3] = e_{t_{1,2}} + e_{t_{2,3}}$. Por lo que la segunda entrada en la diagonal de la matriz es 1.

$\psi^{(4,1)}_{(1\ 2)} e_{t_{3,4}} = e_{t_{3,4}}$. Por lo que la tercera entrada en la diagonal de la matriz es 1.

$\psi^{(4,1)}_{(1\ 2)} e_{t_{4,5}} = e_{t_{4,5}}$. Por lo que la cuarta entrada en la diagonal de la matriz es 1.

Concluímos que el valor del caracter de $\psi^{(4,1)}$ en esta clase de conjugación es 2.

Clase de la permutación (1 2 3)

Para la clase de conjugación de $\sigma = (1\ 2\ 3)$, tenemos $\psi^{(4,1)}_{(1\ 2\ 3)} e_{t_{1,2}} = e_{t_{2,3}}$. Por lo que la primera entrada de la diagonal de la matriz de $\psi^{(4,1)}_{(1\ 2\ 3)}$ es 0.

$\psi^{(4,1)}_{(1\ 2\ 3)} e_{t_{2,3}} = e_{t_{3,1}} = [t_3] - [t_1] = -e_{t_{1,2}} - e_{t_{2,3}}$. Por lo que la segunda entrada en la diagonal de la matriz es -1.

$\psi^{(4,1)}_{(1\ 2\ 3)} e_{t_{3,4}} = e_{t_{1,4}} = [t_1] - [t_4] = e_{t_{1,2}} + e_{t_{2,3}} + e_{t_{3,4}}$. Por lo que la tercera entrada en la diagonal de la matriz es 1.

$\psi^{(4,1)}_{(1\ 2\ 3)} e_{t_{4,5}} = e_{t_{4,5}}$. Por lo que la cuarta entrada en la diagonal de la matriz es 1.

Concluímos que el valor del caracter de $\psi^{(4,1)}$ en esta clase de conjugación es 1.

Clase de la permutación (1 2)(3 4)

Para la clase de conjugación de $\sigma = (1\ 2)(3\ 4)$, tenemos $\psi^{(4,1)}_{(1\ 2)(3\ 4)} e_{t_{1,2}} = e_{t_{2,1}} = -e_{t_{1,2}}$. Por lo que la primera entrada de la diagonal de la matriz de $\psi^{(4,1)}_{(1\ 2)(3\ 4)}$ es -1.

$\psi^{(4,1)}_{(1\ 2)(3\ 4)} e_{t_{2,3}} = e_{t_{1,4}} = [t_1] - [t_4] = e_{t_{1,2}} + e_{t_{2,3}} + e_{t_{3,4}}$. Por lo que la segunda entrada en la diagonal de la matriz es 1.

$\psi^{(4,1)}_{(1\ 2)(3\ 4)} e_{t_{3,4}} = e_{t_{4,3}} = [t_4] - [t_3] = -e_{t_{3,4}}$. Por lo que la tercera entrada en la diagonal de la matriz es -1.

$\psi^{(4,1)}_{(1\ 2)(3\ 4)} e_{t_{4,5}} = e_{t_{3,5}} = [t_3] - [t_5] = e_{t_{3,4}} + e_{t_{4,5}}$. Por lo que la cuarta entrada en la diagonal de la matriz es 1.

Concluímos que el valor del caracter de $\psi^{(4,1)}$ en esta clase de conjugación es 0.

Clase de la permutación (1 2 3)(4 5)

Para la clase de conjugación de $\sigma = (1\ 2\ 3)(4\ 5)$, tenemos $\psi^{(4,1)}_{(1\ 2\ 3)(4\ 5)} e_{t_{1,2}} = e_{t_{2,3}}$. Por lo que la primera entrada de la diagonal de la matriz de $\psi^{(4,1)}_{(1\ 2\ 3)(4\ 5)}$ es 0.

$\psi^{(4,1)}_{(1\ 2\ 3)(4\ 5)} e_{t_{2,3}} = e_{t_{3,1}} = [t_3] - [t_1] = -e_{t_{1,2}} - e_{t_{2,3}}$. Por lo que la segunda entrada en la diagonal de la matriz es -1.

$\psi^{(4,1)}_{(1\ 2\ 3)(4\ 5)} e_{t_{3,4}} = e_{t_{1,5}} = [t_1] - [t_5] = e_{t_{1,2}} + e_{t_{2,3}} + e_{t_{3,4}} + e_{t_{4,5}}$. Por lo que la tercera entrada en la diagonal de la matriz es 1.

$\psi^{(4,1)}_{(1\ 2\ 3)(4\ 5)} e_{t_{4,5}} = e_{t_{5,4}} = [t_5] - [t_4] = -e_{t_{4,5}}$. Por lo que la cuarta entrada en la diagonal de la matriz es -1.

Concluímos que el valor del caracter de $\psi^{(4,1)}$ en esta clase de conjugación es -1.

Clase de la permutación (1 2 3 4)

Para la clase de conjugación de $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4)$, tenemos $\psi^{(4,1)}_{(1\ 2\ 3\ 4)} e_{t_{1,2}} = e_{t_{2,3}}$. Por lo que la primera entrada de la diagonal de la matriz de $\psi^{(4,1)}_{(1\ 2\ 3\ 4)}$ es 0.

$\psi^{(4,1)}_{(1\ 2\ 3\ 4)} e_{t_{2,3}} = e_{t_{3,4}}$. Por lo que la segunda entrada en la diagonal de la matriz es 0.

$\psi^{(4,1)}_{(1\ 2\ 3\ 4)} e_{t_{3,4}} = e_{t_{4,1}} = [t_4] - [t_1] = -e_{t_{1,2}} - e_{t_{2,3}} - e_{t_{3,4}}$. Por lo que la tercera entrada en la diagonal de la matriz es -1.

$\psi^{(4,1)}_{(1\ 2\ 3\ 4)} e_{t_{4,5}} = e_{t_{1,5}} = [t_1] - [t_5] = e_{t_{1,2}} + e_{t_{2,3}} + e_{t_{3,4}} + e_{t_{4,5}}$. Por lo que la cuarta entrada en la diagonal de la matriz es 1.

Concluímos que el valor del caracter de $\psi^{(4,1)}$ en esta clase de conjugación es 0.

Clase de la permutación (1 2 3 4 5)

Finalmente, para la clase de conjugación de $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$, tenemos $\psi^{(4,1)}_{(1\ 2\ 3\ 4\ 5)} e_{t_{1,2}} = e_{t_{2,3}}$. Por lo que la primera entrada de la diagonal de la matriz de $\psi^{(4,1)}_{(1\ 2\ 3\ 4\ 5)}$ es 0.

$\psi^{(4,1)}_{(1\ 2\ 3\ 4\ 5)} e_{t_{2,3}} = e_{t_{3,4}}$. Por lo que la segunda entrada en la diagonal de la matriz es 0.

$\psi^{(4,1)}_{(1\ 2\ 3\ 4\ 5)} e_{t_{3,4}} = e_{t_{4,5}}$. Por lo que la tercera entrada en la diagonal de la matriz es 0.

$\psi^{(4,1)}_{(1\ 2\ 3\ 4\ 5)} e_{t_{4,5}} = e_{t_{5,1}} = [t_5] - [t_1] = -e_{t_{1,2}} - e_{t_{2,3}} - e_{t_{3,4}} - e_{t_{4,5}}$. Por lo que la cuarta entrada en la diagonal de la matriz es -1.

Concluímos que el valor del caracter de $\psi^{(4,1)}$ en esta clase de conjugación es -1.

En resumen, la tabla del caracter de $\psi^{(4,1)}$ queda así

S_5	$(\cdot)$	$(\cdot\ \cdot)$	$(\cdot\ \cdot\ \cdot)$	$(\cdot\ \cdot)(\cdot\ \cdot)$	$(\cdot\ \cdot\ \cdot)(\cdot\ \cdot)$	$(\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot)$	$(\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot)$
$\chi_{\psi^{(4,1)}}$	4	2	1	0	-1	0	-1

Referencias

[1] J. Gordon, M. W. Liebeck. *Representations and characters of groups.* Cambridge University Press (2001).

[2] B. E. Sagan. *The symmetric group - Representations, combinatorial, algorithms, and symmetric functions* Springer GTM 203 (2001).

[3] B. Steinberg. *Representation theory of finite groups - An introductory approach.* Springer Universitext. (2012), 117–129.