Generadores para ciertos bimódulos de Bott Samelson.

1. Introducción

Sea R un anillo de polinomios en n variables, sobre el cual actúa el grupo simétrico S_n permutando las variables. Para (W, S) un sistema de Coxeter y $x \in W$, se define el grafo de expresiones reducidas de x que se denota por $Rex(x)$ como el grafo cuyo conjunto de vértices es el conjunto de expresiones reducidas de x, en el cual dos vértices están unidos por una arista si ellos difieren por una única relación de trenza.
En este documento trabajaremos con $W = S_n$ y generadores $S = \{s_i | i = 1, 2, \ldots, n-1\}$ donde s_i corresponde a la trasposición $(i\ i+1)$.
Cabe mencionar que el $Rex(x)$ es un grafo conexo, cualquiera sea el x elegido [2].

Se usará la siguiente convención: si M y N son dos R-bimódulos, entonces su producto está definido por $MN := M \otimes_R N$.

Para cada expresión reducida $\underline{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_k)$ tenemos asociado un bimódulo de Bott-Samelson $B_{\underline{s}}$ (que corresponde a $B_{s_1} \otimes_R B_{s_2} \otimes_R \ldots \otimes_R B_{s_k}$). Para dos bimódulos de Bott-Samelson cuyos elementos reducidos asociados difieren por una relación de trenza, se tiene un cierto morfismo $Id \otimes_R f_{sr} \otimes_R Id$ entre ellos. Por ejemplo, en S_4 tenemos al elemento σ que lleva $(1, 2, 3, 4)$ en $(4, 3, 2, 1)$ y que puede ser representado en términos de los generadores $s_1 = (12), s_2 = (23), s_3 = (34)$ como $\sigma = s_1 s_2 s_3 s_2 s_1 s_2$ y como $\sigma = s_1 s_3 s_2 s_3 s_1 s_2$. Estas expresiones son reducidas y difieren por una relación de trenzas ($s_2 s_3 s_2 = s_3 s_2 s_3$), por lo que en este caso el morfismo mencionado corresponde a

$$Id \otimes f_{s_2 s_3} \otimes Id^2 : B_{s_1}(B_{s_2} B_{s_3} B_{s_2}) B_{s_1} B_{s_2} \to B_{s_1}(B_{s_3} B_{s_2} B_{s_3}) B_{s_1} B_{s_2}.$$

Así, para cada camino p en el grafo $Rex(x)$ es posible asociar un morfismo $f(p)$ entre los correspondientes bimódulos de Bott-Samelson (mediante las correspondientes composiciones). Llamamos a $f(p)$ un morfismo de caminos.

Notamos que un morfismo queda completamente determinado por su efecto sobre algún conjunto generador del dominio. A modo de ejemplo, se presenta el siguiente caso:

- Caso 121 en S_3

$$121 \longrightarrow 212$$

$$B_{s_1} B_{s_2} B_{s_1} \xrightarrow{f_{12}} B_{s_2} B_{s_1} B_{s_2}$$

Se tiene que cualquier R-morfismo de bimódulos con dominio $B_{s_1} B_{s_2} B_{s_1}$ está completamente definido por su acción sobre $1^{\otimes} = 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1$ y sobre $1 \otimes x_1 \otimes 1 \otimes 1$, pues estos elementos generan a $B_{s_1} B_{s_2} B_{s_1}$ como bimódulo.

En efecto, gracias a los operadores de Demazure, se tiene que:

$$\begin{aligned}
p \otimes_{s_1} q \otimes_{s_2} r \otimes_{s_1} t \quad &= \quad p \otimes_{s_1} q \otimes_{s_2} P_{s_1}(r) \otimes_{s_1} t \\
&\quad + p \otimes_{s_1} q \otimes_{s_2} \alpha_{s_1} \partial_{s_1}(r) \otimes_{s_1} \\
\\
&= \quad p \otimes_{s_1} q \otimes_{s_2} 1 \otimes_{s_1} P_{s_1}(r) t \\
&\quad + p \otimes_{s_1} q \otimes_{s_2} \alpha_{s_1} \otimes_{s_1} \partial_{s_1}(r) t \\
\\
&= \quad p \otimes_{s_1} P_{s_1}(q) \otimes_{s_2} 1 \otimes_{s_1} P_{s_1}(r) t \\
&\quad + p \otimes_{s_1} \alpha_{s_1} \partial_{s_1}(q) \otimes_{s_2} 1 \otimes_{s_1} P_{s_1}(r) t \\
&\quad + p \otimes_{s_1} P_{s_1}(q) \otimes_{s_2} \alpha_{s_1} \otimes_{s_1} \partial_{s_1}(r) t \\
&\quad + p \otimes_{s_1} \alpha_{s_1} \partial_{s_1}(q) \otimes_{s_2} \alpha_{s_1} \otimes_{s_1} \partial_{s_1}(r) t \\
\\
&= \quad p P_{s_1}(q) (1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_2} 1 \otimes_{s_1} 1) P_{s_1}(r) t \\
&\quad + p \partial_{s_1}(q) (1 \otimes_{s_1} \alpha_{s_1} \otimes_{s_2} 1 \otimes_{s_1} 1) P_{s_1}(r) t \\
&\quad + p P_{s_1}(q) (1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_2} \alpha_{s_1} \otimes_{s_1} 1) \partial_{s_1}(r) t \\
&\quad + p \partial_{s_1}(q) (1 \otimes_{s_1} \alpha_{s_1} \otimes_{s_2} \alpha_{s_1} \otimes_{s_1} 1) \partial_{s_1}(r) t
\end{aligned}$$

por lo que los cuatro elementos entre paréntesis generan a cualquier elemento del bimódulo de Bott-Samelson.

Veremos que $1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_2} 1 \otimes_{s_1} 1$ y $1 \otimes_{s_1} x_1 \otimes_{s_2} 1 \otimes_{s_1} 1$ generan a estos cuatro elementos y podremos concluir que generan al Bott-Samelson completo.

Recordemos que $\alpha_{s_i} = x_{i+1} - x_{s_i}$.

1) El caso del elemento $1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_2} 1 \otimes_{s_1} 1$ es trivial.

2)

$$\begin{aligned}
1 \otimes_{s_1} x_2 - x_1 \otimes_{s_2} 1 \otimes_{s_1} 1 \quad &= \quad 1 \otimes_{s_1} x_2 + x_1 \otimes_{s_2} 1 \otimes_{s_1} 1 \\
&\quad -2(1 \otimes_{s_1} x_1 \otimes_{s_2} 1 \otimes_{s_1} 1) \\
\\
&= \quad (x_2 + x_1)(1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_2} 1 \otimes_{s_1} 1) \\
&\quad -2(1 \otimes_{s_1} x_1 \otimes_{s_2} 1 \otimes_{s_1} 1)
\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}
1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_2} x_2 - x_1 \otimes_{s_1} 1 \quad &= \quad 1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_2} x_2 + x_1 \otimes_{s_1} 1 \\
&\quad -2(1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_2} x_1 \otimes_{s_1} 1) \\
\\
&= \quad (1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_2} 1 \otimes_{s_1} 1)(x_2 + x_1) \\
&\quad -2(1 \otimes_{s_1} x_1 \otimes_{s_2} 1 \otimes_{s_1} 1)
\end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned}
1 \otimes_{s_1} x_2 - x_1 \otimes_{s_2} x_2 - x_1 \otimes_{s_1} 1 \quad &= \quad 1 \otimes_{s_1} x_2 - x_1 \otimes_{s_2} x_2 \otimes_{s_1} 1 \\
&\quad +1 \otimes_{s_1} x_2 - x_1 \otimes_{s_2} -x_1 \otimes_{s_1} 1 \\
\\
&= \quad 1 \otimes_{s_1} x_2 \otimes_{s_2} x_2 \otimes_{s_1} 1 \\
&\quad 1 \otimes_{s_1} -x_1 \otimes_{s_2} x_2 \otimes_{s_1} 1 \\
&\quad 1 \otimes_{s_1} x_2 \otimes_{s_2} -x_1 \otimes_{s_1} 1 \\
&\quad 1 \otimes_{s_1} -x_1 \otimes_{s_2} -x_1 \otimes_{s_1} 1
\end{aligned}$$

y entonces basta ver que es posible generar estos 4 elementos (o sus negativos).

a)

$$\begin{aligned} 1 \otimes_{s_1} x_1 \otimes_{s_2} x_1 \otimes_{s_1} 1 &= 1 \otimes_{s_1} x_1^2 \otimes_{s_2} 1 \otimes_{s_1} 1 \\ &= 1 \otimes_{s_1} x_1^2 + x_1x_2 \otimes_{s_2} 1 \otimes_{s_1} 1 \\ &\quad 1 \otimes_{s_1} -x_1x_2 \otimes_{s_2} 1 \otimes_{s_1} 1 \\ &= (x_1 + x_2)(1 \otimes_{s_1} x_1 \otimes_{s_2} 1 \otimes_{s_1} 1) \\ &\quad -x_1x_2(1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_2} 1 \otimes_{s_1} 1) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 1 \otimes_{s_1} x_2 \otimes_{s_2} x_1 \otimes_{s_1} 1 &= 1 \otimes_{s_1} x_2x_1 \otimes_{s_2} 1 \otimes_{s_1} 1 \\ &= (x_1x_2)(1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_2} 1 \otimes_{s_1} 1) \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} 1 \otimes_{s_1} x_1 \otimes_{s_2} x_2 \otimes_{s_1} 1 &= 1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_2} x_2x_1 \otimes_{s_1} 1 \\ &= (1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_2} 1 \otimes_{s_1} 1)(x_1x_2) \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} 1 \otimes_{s_1} x_2 \otimes_{s_2} x_2 \otimes_{s_1} 1 &= 1 \otimes_{s_1} x_2 \otimes_{s_2} x_2 + x_1 \otimes_{s_1} 1 \\ &\quad -(1 \otimes_{s_1} x_2 \otimes_{s_2} x_1 \otimes_{s_1} 1) \\ &= (1 \otimes_{s_1} x_2 \otimes_{s_2} 1 \otimes_{s_1} 1)(x_2 + x_1) \\ &\quad -(x_1x_2)(1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_2} 1 \otimes_{s_1} 1) \\ &= ((x_1 + x_2)(1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_2} 1 \otimes_{s_1} 1) \\ &\quad -(1 \otimes_{s_1} x_1 \otimes_{s_2} 1 \otimes_{s_1} 1))(x_2 + x_1) \\ &\quad -(x_1x_2)(1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_2} 1 \otimes_{s_1} 1) \end{aligned}$$

El análisis visto vale de manera análoga para el bimódulo de Bott-Samelson $B_{s_2}B_{s_1}B_{s_2}$ y nos dice que los generadores pueden ser $1 \otimes_{s_2} 1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_2} 1$ y $1 \otimes_{s_2} x_3 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_1} 1$.

Tenemos entonces que basta estudiar los morfismos de caminos para los elementos generadores.

Hemos visto que gracias a los operadores de Demazure basta con calcular los morfismos de caminos para 4 elementos, pero luego de unos pocos cálculos, los elementos generadores se reducen a la mitad.

Lo anterior nos inspira a buscar una regla general que nos permita reducir la cantidad de elementos generadores.

2. Situación general: una primera cota.

Siguiendo la filosofía del ejemplo anterior, es sencillo notar que en general para un bimódulo de Bott-Samelson $B_{s_1} \otimes_R B_{s_2} \otimes_R \ldots \otimes_R B_{s_k}$ es posible generar sus elementos con 2^{k-1} generadores. La estrategia se describe a continuación.

Un elemento cualquiera de $B_{s_1} \otimes_R B_{s_2} \otimes_R \ldots \otimes_R B_{s_k}$ es de la forma $p_1 \otimes_{s_1} p_2 \otimes_{s_2} p_3 \otimes_{s_3} \ldots \otimes_{s_{k-1}} p_k \otimes_{s_k} p_{k+1}$. Se selecciona una posición i para cualquier $i \in \{2, 3, \ldots, k\}$ y a partir de ahí se realizan sucesivas aplicaciones de operadores de Demazure ∂_{s_i} para escribir p_i como $P_{s_i}(p_i) + \alpha_{s_i}\partial_{s_i}(p_i)$. Esto nos permite mover factores hacia la izquierda.

Se tiene entonces que

$$
\begin{aligned}
p_1 \otimes_{s_1} \ldots \otimes_{s_i} p_i \otimes_{s_{i+1}} \ldots \otimes_{s_k} p_{k+1} &= p_1 \otimes_{s_1} \ldots \otimes_{s_i} P_{s_i}(p_i) + \alpha_{s_i}\partial_{s_i}(p_i) \otimes_{s_{i+1}} \ldots \otimes_{s_k} p_{k+1} \\
&= \ p_1 \otimes_{s_1} \ldots \otimes_{s_i} P_{s_i}(p_i) \otimes_{s_{i+1}} \ldots \otimes_{s_k} p_{k+1} \\
&\quad + p_1 \otimes_{s_1} \ldots \otimes_{s_i} \alpha_{s_i}\partial_{s_i}(p_i) \otimes_{s_{i+1}} \ldots \otimes_{s_k} p_{k+1} \\
&= \ p_1 \otimes_{s_1} \ldots \otimes_{s_{i-1}} p_{i-1}P_{s_i}(p_i) \otimes_{s_i} 1 \otimes_{s_{i+1}} \ldots \otimes_{s_k} p_{k+1} \\
&\quad + p_1 \otimes_{s_1} \ldots \otimes_{s_{i-1}} p_{i-1}\partial_{s_i}(p_i) \otimes_{s_i} \alpha_{s_i} \otimes_{s_{i+1}} \ldots \otimes_{s_k} p_{k+1}
\end{aligned}
$$

Considerando ahora en el sumando superior $\tilde{p}_{i-1} = p_{i-1}P_{s_i}(p_i)$ y en el sumando inferior $\hat{p}_{i-1} = p_{i-1}\partial_{s_i}(p_i)$ se repite el procedimiento, generando en cada paso 2 sumandos más por cada sumando en el paso anterior, hasta realizarlo por última vez en p_2.

Desde el factor p_{i+1} se debe usar el operador de Demazure $\partial_{s_{i+2}}$ para mover los factores hacia la derecha. Se repite el procedimiento, generando en cada paso 2 sumandos más por cada sumando en el paso anterior, hasta realizarlo por última vez en p_k.

En resumen, se comienza en una expresión (un sumando), y en cada paso se generan el doble de sumandos de la expresión anterior. Como se realizan $k-1$ pasos, tendremos entonces 2^{k-1} generadores.

Los generadores corresponden entonces a elementos de la forma $1 \otimes_{s_1} \beta_{s_1} \otimes_{s_2} \ldots \otimes_{s_i} \beta_{s_i} \otimes_{s_{i+1}} \beta_{s_{i+2}} \otimes_{s_{i+2}} \ldots \otimes_{s_{k-1}} \beta_{s_k} \otimes_{s_k} 1$, donde β_{s_i} puede ser 1 o α_{s_i} (recordar que $\alpha_{s_i} = x_{i+1} - x_i$).

3. Reduciendo la cota anterior.

Si se aplica lo descrito en la sección anterior al ejemplo $s_1s_2s_3 \in S_3$ el resultado nos dice que 4 elementos son suficientes, pero ya hemos visto que solo 2 bastan. Deseamos extender la manera de reducir la cantidad necesaria de elementos generadores. Describiremos un método para una familia específica de elementos que son de interés particular.

La familia específica es compuesta por los elementos más largos $w_{0,n}$ de cada grupo S_n.
Sabemos que las expresiones reducidas posibles para los elementos $w_{0,n}$ para S_n con $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$ pueden ser

- $w_{0,2} = s_1$
- $w_{0,3} = s_1s_2s_1$
- $w_{0,4} = s_1s_2s_1s_3s_2s_1$
- $w_{0,5} = s_1s_2s_1s_3s_2s_1s_4s_3s_2s_1$
- Etc...

de donde se aprecia claramente el patrón de formación.

3.1. Caso $s_1s_2s_1s_3$.

Hemos visto que los elementos $1^{\otimes} = 1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_2} 1 \otimes_{s_1} 1$ y $1 \otimes_{s_1} x_1 \otimes_{s_2} 1 \otimes_{s_1} 1$ son suficientes para generar al bimódulo $B_{s_1}B_{s_2}B_{s_1}$ una vez que podemos multiplicar por la izquierda y por la derecha cualquier polinomio en las variables correspondientes (en este caso x_1, x_2, x_3).

Mostraremos que $1^{\otimes} = 1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_2} 1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_3} 1$ y $1 \otimes_{s_1} x_1 \otimes_{s_2} 1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_3} 1$ son suficientes para generar $B_{s_1}B_{s_2}B_{s_1}B_{s_3}$.

Dado que cualquier polinomio está compuesto por sumas de monomios, nos preocuparemos de poder generar cualquier monomio en ciertas posiciones cruciales, las cuales nos permitiran generar polinomios arbitrarios y finalmente los elementos deseados.

Cabe destacar que en este bimódulo siguen valiendo las siguientes igualdades:
1)

$$\begin{aligned}
1 \otimes_{s_1} x_2 - x_1 \otimes_{s_2} 1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_3} 1 &= 1 \otimes_{s_1} x_2 + x_1 \otimes_{s_2} 1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_3} 1 \\
&\quad -2(1 \otimes_{s_1} x_1 \otimes_{s_2} 1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_3} 1) \\
&= (x_2 + x_1)(1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_2} 1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_3} 1) \\
&\quad -2(1 \otimes_{s_1} x_1 \otimes_{s_2} 1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_3} 1)
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_2} x_2 - x_1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_3} 1 &= 1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_2} x_2 + x_1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_3} 1 \\
&\quad -2(1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_2} x_1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_3} 1) \\
&= (1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_2} 1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_3} 1)(x_2 + x_1) \\
&\quad -2(1 \otimes_{s_1} x_1 \otimes_{s_2} 1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_3} 1)
\end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned}
1 \otimes_{s_1} x_2 - x_1 \otimes_{s_2} x_2 - x_1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_3} 1 &= 1 \otimes_{s_1} x_2 - x_1 \otimes_{s_2} x_2 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_3} 1 \\
&\quad +1 \otimes_{s_1} x_2 - x_1 \otimes_{s_2} -x_1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_3} 1 \\
&= 1 \otimes_{s_1} x_2 \otimes_{s_2} x_2 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_3} 1 \\
&\quad 1 \otimes_{s_1} -x_1 \otimes_{s_2} x_2 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_3} 1 \\
&\quad 1 \otimes_{s_1} x_2 \otimes_{s_2} -x_1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_3} 1 \\
&\quad 1 \otimes_{s_1} -x_1 \otimes_{s_2} -x_1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_3} 1
\end{aligned}$$

veremos ahora que es posible generar estos 4 elementos (o sus negativos).
a)

$$\begin{aligned}
1 \otimes_{s_1} x_1 \otimes_{s_2} x_1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_3} 1 &= 1 \otimes_{s_1} x_1^2 \otimes_{s_2} 1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_3} 1 \\
&= 1 \otimes_{s_1} x_1^2 + x_1 x_2 \otimes_{s_2} 1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_3} 1 \\
&\quad 1 \otimes_{s_1} -x_1 x_2 \otimes_{s_2} 1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_3} 1 \\
&= (x_1 + x_2)(1 \otimes_{s_1} x_1 \otimes_{s_2} 1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_3} 1) \\
&\quad -x_1 x_2(1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_2} 1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_3} 1)
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
1 \otimes_{s_1} x_2 \otimes_{s_2} x_1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_3} 1 &= 1 \otimes_{s_1} x_2 x_1 \otimes_{s_2} 1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_3} 1 \\
&= (x_1 x_2)(1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_2} 1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_3} 1)
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
1 \otimes_{s_1} x_1 \otimes_{s_2} x_2 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_3} 1 &= 1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_2} x_2 x_1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_3} 1 \\
&= (1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_2} 1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_3} 1)(x_1 x_2)
\end{aligned}$$

d)

$$
\begin{aligned}
1\otimes_{s_1} x_2 \otimes_{s_2} x_2 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_3} 1 &= 1\otimes_{s_1} x_2 \otimes_{s_2} x_2 + x_1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_3} 1 \\
&\quad -(1\otimes_{s_1} x_2 \otimes_{s_2} x_1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_3} 1) \\
&= (1\otimes_{s_1} x_2 \otimes_{s_2} 1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_3} 1)(x_2+x_1) \\
&\quad -(x_1x_2)(1\otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_2} 1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_3} 1) \\
&= ((x_1+x_2)(1\otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_2} 1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_3} 1) \\
&\quad -(1\otimes_{s_1} x_1 \otimes_{s_2} 1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_3} 1))(x_2+x_1) \\
&\quad -(x_1x_2)(1\otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_2} 1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_3} 1)
\end{aligned}
$$

de donde se tiene con 2 elementos es posible generar 4 de los 8 generadores necesarios (cota anterior).

Veremos ahora que con estos 4 es posible generar los 4 restantes.

Se tienen los elementos de la forma $1 \otimes_{s_1} \beta_{s_1} \otimes_{s_2} \beta_{s_1} \otimes_{s_1} \underline{1} \otimes_{s_3} 1$, donde β_{s_1} puede ser 1 o α_{s_1}.
Resta ver que es posible generar el elemento α_{s_3} en la posición de $\underline{1}$.

En efecto,

$$
\begin{aligned}
1\otimes_{s_1} \beta_{s_1} \otimes_{s_2} \beta_{s_1} \otimes_{s_1} x_4 - x_3 \otimes_{s_3} 1 &= (1\otimes_{s_1} \beta_{s_1} \otimes_{s_2} \beta_{s_1} \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_3} 1)(x_4+x_3) \\
&\quad -2(1\otimes_{s_1} \beta_{s_1} \otimes_{s_2} \beta_{s_1} \otimes_{s_1} x_3 \otimes_{s_3} 1) \\
&= (1\otimes_{s_1} \beta_{s_1} \otimes_{s_2} \beta_{s_1} \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_3} 1)(x_4+x_3) \\
&\quad -2((1\otimes_{s_1} \beta_{s_1} \otimes_{s_2} \beta_{s_1} \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_3} 1)(x_4+x_3) \\
&\quad -x_4(1\otimes_{s_1} \beta_{s_1} \otimes_{s_2} \beta_{s_1} \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_3} 1))
\end{aligned}
$$

3.2. Caso $s_1s_2s_1s_3s_2$.

Realizamos un nuevo estudio para determinar qué elementos generan a este bimódulo.
Hasta ahora tenemos que los elementos $1\otimes_{s_1} 1\otimes_{s_2} 1\otimes_{s_1} 1\otimes_{s_3} \underline{1}\otimes_{s_2} 1$ y $1\otimes_{s_1} x_1\otimes_{s_2} 1\otimes_{s_1} 1\otimes_{s_3} \underline{1}\otimes_{s_2} 1$ pueden generar a todos los elementos $1 \otimes_{s_1} p_2 \otimes_{s_2} p_3 \otimes_{s_1} p_4 \otimes_{s_3} \underline{1} \otimes_{s_2} 1$ siempre que seamos capaces de escribir cualquier polinomio en la posición de $\underline{1}$. De ser así, es fácil notar que de paso estaríamos en condiciones de generar cualquier elemento del bimódulo.

Una posibilidad de conseguir la condición es considerando como conjunto de generadores a los elementos

- $1^{\otimes}$
- $1 \otimes_{s_1} x \otimes_{s_2} 1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_3} 1 \otimes_{s_2} 1$
- $1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_2} 1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_3} z \otimes_{s_2} 1$
- $1 \otimes_{s_1} x \otimes_{s_2} 1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_3} z \otimes_{s_2} 1$

Existen otras posibilidades (como cambiar z por y) pero nos apegaremos a esta elección arbitraria.
Mostramos ahora por qué es suficiente con esto.

Por lo visto en la sección anterior, se tiene que los elementos $p \otimes_{s_1} x \otimes_{s_2} 1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_3} q \otimes_{s_2} 1$ y $r \otimes_{s_1} x \otimes_{s_2} 1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_3} t \otimes_{s_2} 1$ generan a todos los elementos $p_1 \otimes_{s_1} p_2 \otimes_{s_2} p_3 \otimes_{s_1} p_4 \otimes_{s_3} p_5 \otimes_{s_2} 1$ y en consecuencia, todos los elementos de $B_{s_1}B_{s_2}B_{s_1}B_{s_3}B_{s_2}$.

Nos enfocamos en mostrar que con el conjunto mencionado es posible generar tales polinomios q y t en las posiciones correspondientes (generar p y r en sus posiciones es trivial).

En efecto, un polinomio cualquiera t será suma de monomios $ax_1^{i_1}x_2^{i_2}x_3^{i_3}x_4^{i_4}, a \in \mathbb{R}$. Dado que al multiplicar por la derecha los factores $ax_1^{i_1}x_2^{i_2}$ pueden ubicarse sin problema en la posición deseada, nos enfocamos en ver cómo ubicar a los factores $x_3^{i_3}x_4^{i_4}$.

Notemos que al contar con los nuevos elementos mencionados ya es posible escribir en tal posición a las potencias de z. En efecto, $z^2 = z(z+y) - zy$ e inductivamente, si podemos construir las potencias de z hasta z^k, entonces $z^{k+1} = z^k(z+y) - z^{k-1}zy$. Ahora, dado que se tienen las potencias de z, es fácil ver que también se tienen las potencias de y. En efecto, $y = (z+y) - z$, $y^2 = y(z+y) - zy$ y en general, si podemos construir las potencias de y hasta y^k, entonces $y^{k+1} = y^k(z+y) - y^{k-1}zy$. De esta forma, para un factor cualquiera $x_3^{i_3}x_4^{i_4}$, basta determinar el mayor exponente, restarle el menor exponente, y considerar la base de ese mayor exponente en la posición deseada, multiplicado por el producto x_3x_4 elevado al menor exponente. Por ejemplo, $x_3^8x_4^5 = x_3^3 \cdot x_3^5x_4^5$.

Así, es posible generar cualquier monomio en la posición deseada y en consecuencia cualquier elemento del bimódulo, dados los generadores mencionados.

3.3. Caso $s_1s_2s_1s_3s_2s_1$.

Las consecuencias de contar con cualquier polinomio en la posición de $\underline{1}$ en $1 \otimes_{s_1} x \otimes_{s_2} 1 \otimes_{s_1} 1 \otimes_{s_3} 1 \otimes_{s_2} \underline{1} \otimes_{s_1} 1$ y su correspondientes en los otros generadores ya vistos, son las mismas: como ya se ha visto, con ellos es posible generar cualquier elemento $p_1 \otimes_{s_1} p_2 \otimes_{s_2} p_3 \otimes_{s_1} p_4 \otimes_{s_3} p_5 \otimes_{s_2} p_6 \otimes_{s_1} 1$ y en consecuencia cualquier elemento del bimódulo.

Nuevamente, para asegurar esta construcción, es necesario considerar como conjunto de generadores a los correspondientes con los que ya contábamos y a estos mismos con x en la posición de $\underline{1}$.

Como ya hemos visto, esto es todo lo necesario para construir sucesivamente un elemento cualquiera del bimódulo.

Vemos que hasta ahora son necesarios 8 elementos. La primera cota nos indicaba 32 elementos.

3.4. Caso $s_1s_2s_1s_3s_2s_1s_4$.

Para este caso solo mencionaremos que entra una nueva variable en juego. Siguiendo los pasos descritos, debemos asegurar la posibilidad de construir un polinomio arbitrario en la penultima posición. Multiplicando por x_5 por la izquierda se tiene lo deseado. La cantidad necesaria para generar este bimódulo siguen siendo 8 elementos.

3.5. Construcción general: Una nueva cota.

El procedimiento descrito muestra una construcción que nos permite establecer una nueva cota.
Se resume lo observado en el siguiente párrafo, para un elemento específico w_0:

Dado un $n \in \mathbb{N}$, el elemento más largo en S_n, $w_{0,n}$, tiene como una expresión reducida $s_1s_2s_1s_3\dots s_{n-1}s_{n-2}\dots s_1$.
La cantidad de elementos necesarios para generar al bimódulo de Bott-Samelson $B_{s_1}B_{s_2}B_{s_1}B_{s_3}\dots B_{s_{n-1}}B_{s_{n-2}}\dots B_{s_1}$ será a lo más 2 elevado a $\dfrac{(n-2)(n-1)}{2}$ (la cota anterior nos decía que se necesitaban 2 elevado a $\dfrac{(n-1)n}{2} - 1$ elementos).

Veremos ahora una manera general para encontrar la cota de generadores necesarios.

Sea x un elemento arbitrario de un grupo S_n y $s_{a_1}s_{a_2}\dots s_{a_k}$ una expresión reducida de él. Por lo visto anteriormente, una cantidad suficiente de generadores para el bimódulo $B_{s_{a_1}}B_{s_{a_2}}\dots B_{s_{a_k}}$ será 2^m donde m es el número que aparece al hacer el siguiente conteo:

1. Se listan todos los generadores s_{a_i} que sean distintos. Digamos que son j. Los renombramos de manera que queden listados $s_{a_i},\ i = 1, 2, \ldots j$.

2. Para los generadores s_{a_i}, se cuentan la cantidad de ellos en la expresión. Se tiene un número m_i para cada s_{a_i}.

3. el número m será $\sum_{i=1}^{j}(m_i - 1)$.

Ejemplo: Para $x = s_3 s_2 s_3 s_4 s_3 s_7 s_9 s_1 s_2 s_1 s_3 s_4$ los s_{a_i} distintos son s_i con $i = 1, 2, 3, 4, 7, 9$.
Las cantidades de ellos son $2\ s_1, 2\ s_2, 4\ s_3, 2\ s_4, 1\ s_7, 1\ s_9$. Luego el número m es $1 + 1 + 3 + 1 + 0 + 0 = 6$ y en consecuencia es posible generar el bimódulo correspondiente con 2^6 generadores.

Notemos que este conteo es invariante bajo relaciones de trenzas en la expresión de x. En efecto, para relaciones de elementos distantes $s_i s_j \leftrightarrow s_j s_i$, m_i y m_j se mantienen inalterados. Para relaciones $s_{i+1} s_i s_{i+1} \leftrightarrow s_i s_{i+1} s_i$, el número m_i aumenta en 1 mientras que m_{i+1} disminuye en 1 o al revés. Así, no importa la expresión reducida que se considere para buscar la cota.

Referencias

[1] B. Elias. *Thick Soergel calculus in type A*. Proceedings of the London Mathematical Society 112 (5): 924–978, 2016.

[2] H. Matsumoto. *Générateurs et relations des groupes de Weyl généralisés*. Comptes Rendus Hebdomadaires des Seances de lÁcademie des Sciences, 258 (13): 3419-, 1964.

[3] W. Soergel. *Kazhdan-Lusztig polynomials and indecomposable bimodules over polynomial rings*. J. Inst. Math. Jussieu, 6 (3): 501-525, 2007.