MC441-1 Métodos y Aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales 2012

Profesor: Gonzalo Robledo V.

Ayudantes: Christopher Maulen - Gonzalo Jiménez - Pablo Mancilla

Ayudantía 1

14 de Agosto del 2012

Definición: Se dice que un *sistema de ecuaciones diferenciales* es una ecuación de la forma:

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ x_2' = f_2(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots = \quad \vdots \\ x_n' = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

Donde $f_i : (a,b) \times \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, n)$ y $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto.

Si todas las funciones f_i son lineales con respecto a $x_1, x_2, \dots, x_n$, al sistema anterior se le dice un sistema lineal (si un sistema no es lineal entonces se dirá no lineal). Luego, el sistema anterior es lineal si:

$$f(t, x+z) = f(t,x) + f(t,z) \text{ y } f(t, \lambda x) = \lambda f(t,x)$$

para todo $t \in (a,b),\ \lambda \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n$ y $z \in \mathbb{R}^n$.

Es decir, los sistemas lineales son de la forma

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \ldots + a_{1n}(t)x_n \\ x_2' = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \ldots + a_{2n}(t)x_n \\ \vdots = \quad \vdots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ldots + a_{nn}(t)x_n \end{cases}$$

Observación 1 Algunos términos $a_{ij}(t)$ pueden ser cero (u otra constante).

Observación 2 El sistema lineal es *lineal autónomo* si $a_{ij}(t) = a_{ij}$ (es decir, $a_{ij}(t)$ no depende de t, o sea, es constante) $\forall i = 1, \dots, n$ $\forall j = 1, \dots, n$.

Ejercicio 1: Verifique que $\varphi(t) = \begin{pmatrix} Sin(e^t) \\ Cos(e^t) \end{pmatrix}$ es solución del sistema lineal

$$\begin{cases} x_1' = e^t x_2 \\ x_2' = -e^t x_1 \end{cases}$$

Sol: Primero ver que $\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Sin(e^t) \\ Cos(e^t) \end{pmatrix}$.

Observación 4: notar que el sistema es lineal, pues

$$\begin{cases} x_1' = e^t x_2 = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 \\ x_2' = -e^t x_1 = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 \end{cases} \quad \text{con} \begin{pmatrix} a_{11}(t) = 0 & a_{12}(t) = e^t \\ a_{21}(t) = -e^t & a_{22}(t) = 0 \end{pmatrix}$$

Se debe verificar que $\varphi(t)$ satisface la ecuación, es decir, debemos verificar que:

$$\begin{cases} \varphi_1'(t) = e^t \varphi_2(t) \\ \varphi_2'(t) = -e^t \varphi_1(t) \end{cases}$$

En efecto, vemos que

$\varphi_1(t) = (Sin(e^t))' = Cos(e^t)e^t = e^t Cos(e^t) = e^t \varphi_2(t)$ y que

$\varphi_2(t) = (Cos(e^t))' = -Sin(e^t)e^t = -e^t Sin(e^t) = -e^t \varphi_1(t)$ ■

Ejercicio 2: Verifique que la función $\varphi(t)$ es solución de la ecuación respectiva.

i) $\varphi(t) = Tan(t)$ es solución de $x' = 1 + x^2$.

ii) $\varphi(t) = e^{-at^2}$ es solución de $x' = -2atx$

v) $\varphi(t) = \dfrac{Kx_0 e^{rt}}{K + x_0(e^{rt} - 1)}$ es solución de la ecuación logística

$$\begin{cases} x' = rx(1 - \frac{x}{K}) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Sol:

i) Debemos ver entonces que $\varphi'(t) = 1 + \varphi(t)^2$
$\varphi'(t) = Tan'(t) = (Sec(t))^2 = 1 + (tan(t))^2$ ■

Observación 3: Lo anterior vale, pues $Tan'(t) = \left(\dfrac{Sin(t)}{Cos(t)}\right)' = \dfrac{Sin'(t)Cos(t) - (Cos(t))'Sin(t)}{(Cos(t))^2} = \dfrac{Cos(t)Cos(t) - (-Sin(t))Sin(t)}{(Cos(t))^2} = \dfrac{(Cos(t)^2) + (Sin(t))^2}{(Cos(t))^2}$

Que por una parte (usando $(Cos(t))^2 + (Sin(t))^2 = 1$) es $\dfrac{1}{(Cos(t))^2} = (Sec(t))^2$

y por otra parte es $\dfrac{(Cos(t)^2) + (Sin(t))^2}{(Cos(t))^2} = \dfrac{(Cos(t))^2}{(Cos(t))^2} + \dfrac{(Sin(t))^2}{(Cos(t))^2} = 1 + \left(\dfrac{Sin(t)}{Cos(t)}\right)^2 = 1 + (Tan(t))^2$

ii) Debemos verificar entonces que $\varphi'(t) = -2at\varphi(t)$
Derivamos $\varphi(t)$:

$$\varphi'(t) = (e^{-at^2})' = e^{-at^2}(-at^2)' = e^{-at^2}(-2at)$$
$$\varphi'(t) = -2at\,\underbrace{e^{-at^2}}_{\varphi(t)} = -2at\varphi(t)$$
$$\varphi'(t) = -2at\varphi(t) \blacksquare$$

v) Derivamos

$$\varphi'(t) = \frac{(Kx_0e^{rt})'\{K + x_0(e^{rt}-1)\} - (Kx_0e^{rt})\{K + x_0(e^{rt}-1)\}'}{\{K + x_0(e^{rt}-1)\}^2}$$
$$\varphi'(t) = \frac{Kx_0e^{rt}(rt)'\{K + x_0(e^{rt}-1)\} - (Kx_0e^{rt})\{K' + x_0e^{rt}(rt)'\}}{\{K + x_0(e^{rt}-1)\}^2}$$
$$\varphi'(t) = \frac{Kx_0e^{rt}r\{K + x_0(e^{rt}-1)\} - (Kx_0e^{rt})\{x_0e^{rt}r\}}{\{K + x_0(e^{rt}-1)\}^2}$$

Factorizamos por $Kx_0e^{rt}r$

$$\varphi'(t) = \frac{Kx_0e^{rt}r[K + x_0(e^{rt}-1) - x_0e^{rt}]}{\{K + x_0(e^{rt}-1)\}^2}$$
$$\varphi'(t) = r\,\underbrace{\frac{Kx_0e^{rt}}{\{K + x_0(e^{rt}-1)\}}}_{\varphi(t)}\frac{[K - x_0]}{\{K + x_0(e^{rt}-1)\}}$$

.

Sumando y restando x_0e^{rt}

$$\varphi'(t) = r\varphi(t)\frac{[K + x_0e^{rt} - x_0e^{rt} - x_0]}{\{K + x_0(e^{rt}-1)\}}$$
$$\varphi'(t) = r\varphi(t)\left[\frac{K + x_0(e^{rt}-1)}{K + x_0(e^{rt}-1)} - \frac{x_0e^{rt}}{K + x_0(e^{rt}-1)}\right]$$

.

Multiplicando y dividiendo por K en la fracción que se esta restando

$$\varphi'(t) = r\varphi(t)\left[1 - \frac{Kx_0e^{rt}}{K\{K + x_0(e^{rt}-1)\}}\right]$$
$$\varphi'(t) = r\varphi(t)\left(1 - \frac{\varphi(t)}{K}\right) \blacksquare$$

MC441-1 Métodos y Aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales 2012

Profesor: Gonzalo Robledo V.

Ayudantes: Christopher Maulén - Gonzalo Jiménez - Pablo Mancilla

Ayudantía 2

4 de Septiembre del 2012

P1: Resuelva:

$$x'(t) - \frac{1}{t}x(t) = 1$$

P2: Resuelva:

$$x'(t) + \frac{1}{t}x(t) = e^t$$

P3: Resuelva:

$$\begin{cases} tx'(t) + x(t) = t \cdot sin(t) \\ x(2) = 1 \end{cases}$$

P4: Resuelva:

$$x(t)' - x(t) = 2te^{t+t^2}$$

Soluciones:

P1: Calculamos el factor integrante :

$$e^{-\int \frac{1}{t}dt} = e^{-ln(t)} = e^{ln(t^{-1})} = e^{ln\left(\frac{1}{t}\right)} = \frac{1}{t}$$

Multiplicando por $\frac{1}{t}$ la ecuación inicial, se tiene que

$$\frac{1}{t}x'(t) - \frac{1}{t^2}x(t) = \frac{1}{t}$$

Luego

$$\left(\frac{x(t)}{t}\right)' = \frac{1}{t}$$

Integrando

$$\frac{x(t)}{t} = ln(t) + C \Longrightarrow x(t) = t \cdot ln(t) + t \cdot C \blacksquare$$

P2: Calculamos el factor integrante :

$$e^{\int \frac{1}{t}dt} = e^{ln(t)} = t$$

Multiplicando por t la ecuación inicial, se tiene que

$$tx'(t) + 1 \cdot x(t) = te^t$$

Luego

$$(x(t) \cdot t)' = te^t$$

Integrando

$$x(t) \cdot t = \int \underbrace{t}_{u} \underbrace{e^t}_{dv} dt = te^t - \int e^t dt = (t-1)e^t \Longrightarrow x(t) = e^t - \frac{1}{t}e^t \blacksquare$$

P3: Observamos que tenemos inmediatamente la derivada de un producto, es decir :

$$tx'(t) + x(t) = (t \cdot x(t))'$$

Entonces

$$(t \cdot x(t))' = t \sin(t)$$

Integrando :

$$\int_2^t \frac{d}{dr} (x(r) \cdot r) = \int_2^t r \sin(r) dr$$

Por lo que se tiene

$$x(t)t - 2x(2) = \int_2^t r \sin(r) dr$$

Resolvemos la integral :

$$\int \underbrace{r}_{u} \underbrace{\sin(r)}_{dv} dr = r \cdot -\cos(r) - \int -\cos(r) dr = -\cos(r) r + \int \cos(r) dr = -r\cos(r) + \sin(r)$$

Evaluando en t y 2 se tiene entonces que :

$$\int_2^t r \sin(r) dr = \sin(t) - t\cos(t) - \sin(2) + 2\cos(2)$$

Por lo que

$$x(t) = \frac{\sin(t) - t\cos(t) + 2\cos(2) - \sin(2) + 2x(2)}{t}$$

Reemplazando $x(2) = 1$ se tiene lo pedido $\blacksquare$

P4: Calculamos el factor integrante :

$$e^{\int -1 dt} = e^{-t}$$

Multiplicando por e^{-t} tenemos que

$$x'(t)e^{-t} - x(t)e^{-t} = 2te^{t+t^2}e^{-t}$$

Observamos que tenemos la siguiente derivada

$$(x(t)e^{-t})' = 2te^{t^2} = \left(e^{t^2}\right)'$$

Integrando

$$x(t)e^{-t} = e^{t^2} + C$$

Por lo que, multiplicando por e^t, tenemos que

$$x(t) = e^{t+t^2} + Ce^t \ \blacksquare$$

MC441-1 Métodos y Aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales 2012
Profesor: Gonzalo Robledo V.
Ayudantes: Christopher Maulén - Gonzalo Jiménez - Pablo Mancilla

Ayudantía 3

10 de Septiembre del 2012

P1: Resuelva:

$$\begin{cases} x'(t) = x^2(t) - 9 \\ x(0) = \dfrac{16}{5} \end{cases}$$

P2: Resuelva:

$$\begin{cases} x'(t) = x^2(t) + x(t) - 2 \\ x(0) = 2 \end{cases}$$

P3: Encuentre la ecuación lineal asociada a

$$x'(t) = x^2(t) - tx + 1$$

P4: Encuentre la ecuación lineal asociada a

$$x'(t) = x^2(t) - (1 + t^2)x(t) + t(2 + t)$$

Soluciones:

P1: Buscamos una solución al sistema propuesto. Observamos que si proponemos como solución una función constante, entonces debemos ver si se puede resolver la ecuación cuadrática $\lambda^2 - 9 = 0$.

Observación : Igualamos a cero porque la derivada de una eventual solución constante seria cero.

Tenemos entonces las soluciones ± 3.

Escogemos una solución (en este caso escogeremos la solución $x_1(t) = 3$) y hacemos el cambio de variable $x(t) = x_1(t) + \dfrac{1}{v(t)}$.

Se tendrá entonces que $x(t) = 3 + \dfrac{1}{v(t)}$ y entonces $x'(t) = \dfrac{-v'(t)}{v^2(t)}$

Reemplazando $x(t)$ y $x'(t)$ en la ecuación original :

$$\frac{-v'(t)}{v^2(t)} = \left(3 + \frac{1}{v(t)}\right)^2 - 9$$

$$\frac{-v'(t)}{v^2(t)} = 9 + \frac{6}{v(t)} + \frac{1}{v^2(t)} - 9 = \frac{6}{v(t)} + \frac{1}{v^2(t)}$$

Multiplicando por $v^2(t)$ se obtiene

$$-v'(t) = 6v(t) + 1$$

Que es lo mismo que

$$v'(t) + 6v(t) = -1$$

Resolvemos entonces el sistema lineal. Calculamos el factor integrante :

$$e^{\int 6dt} = e^{6t}$$

Multiplicando por e^{6t} la ecuación anterior, se tiene que

$$e^{6t}v'(t) + 6e^{6t}v(t) = -e^{6t}$$

Armamos la integral :

$$\left(e^{6t}v(t)\right)' = -e^{6t}$$

Integrando :

$$e^{6t}v(t) = -\frac{1}{6}e^{6t} + C$$

Multiplicando por e^{-6t} :

$$v(t) = -\frac{1}{6} + Ce^{-6t}$$

Luego

$$x(t) = 3 + \frac{1}{-\frac{1}{6} + Ce^{-6t}}.$$

Pero recordamos que $\frac{16}{5} = x(0) = 3 + \frac{1}{-\frac{1}{6} + Ce^{0}} = \frac{15}{5} + \frac{1}{-\frac{1}{6} + C}$ Que es equivalente a decir

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{-\frac{1}{6} + C} \Longrightarrow 5 = -\frac{1}{6} + C \Longrightarrow C = \frac{31}{6}$$

Por lo que concluimos que una solución es

$$x(t) = 3 + \frac{1}{-\frac{1}{6} + \frac{31}{6}e^{-6t}} \blacksquare$$

P2: Nuevamente buscamos una solución al sistema propuesto. Observamos que si proponemos como solución una función constante, entonces debemos ver si se puede resolver la ecuación cuadrática $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$.

Tenemos entonces las soluciones 1 y -2.

Escogemos una solución (en este caso escogeremos la solución $x_1(t) = 1$) y hacemos el cambio de variable $x(t) = x_1(t) + \dfrac{1}{v(t)}$.

Se tendrá entonces que $x(t) = 1 + \dfrac{1}{v(t)}$ y entonces $x'(t) = \dfrac{-v'(t)}{v^2(t)}$

Reemplazando $x(t)$ y $x'(t)$ en la ecuación original :

$$\frac{-v'(t)}{v^2(t)} = \left(1 + \frac{1}{v(t)}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{v(t)}\right) - 2$$

$$\frac{-v'(t)}{v^2(t)} = 1 + \frac{2}{v(t)} + \frac{1}{v^2(t)} + 1 + \frac{1}{v(t)} - 2 = \frac{3}{v(t)} + \frac{1}{v^2(t)}$$

Multiplicando por $v^2(t)$ se obtiene

$$-v'(t) = 3v(t) + 1$$

Que es lo mismo que

$$v'(t) + 3v(t) = -1$$

Resolvemos entonces el sistema lineal. Calculamos el factor integrante :

$$e^{\int 3dt} = e^{3t}$$

Multiplicando por e^{3t} la ecuación anterior, se tiene que

$$e^{3t}v'(t) + 3e^{3t}v(t) = -e^{3t}$$

Armamos la integral :

$$(e^{3t}v(t))' = -e^{3t}$$

Integrando :

$$e^{3t}v(t) = -\frac{1}{3}e^{3t} + C$$

Multiplicando por e^{-3t} :

$$v(t) = -\frac{1}{3} + Ce^{-3t}$$

Luego

$$x(t) = 1 + \frac{1}{-\frac{1}{3} + Ce^{-3t}}.$$

Pero recordamos que $2 = x(0) = 1 + \frac{1}{-\frac{1}{3} + Ce^{0}}$, que es equivalente a decir

$$1 = \frac{1}{-\frac{1}{3} + C} \Longrightarrow 1 = -\frac{1}{3} + C \Longrightarrow C = \frac{4}{5}$$

Por lo que concluimos que una solución es

$$x(t) = 1 + \frac{1}{-\frac{1}{3} + \frac{4}{3}e^{-3t}} \blacksquare$$

P3: Buscamos una solución al sistema propuesto. Observamos que si proponemos ahora como solución una función constante, entonces tendremos una ecuación que en la parte izquierda de la igualdad (la derivada) tendria un cero, mientras que en la parte derecha tendria una recta que depende de t, luego existe t tal que la igualdad no se cumple (no es 0=0) y entonces vemos que nuestra función candidata a solución no debe ser una constante.

Probamos entonces con una función que realmente dependa de t por ejemplo con $x_1(t) = t$. Tendremos entonces que $x_1'(t) = 1$ y reemplazando en la ecuación original tendriamos

$$1 = t^2 - t \cdot t + 1 \Longrightarrow 1 = 1$$

Y la igualdad se cumple

Tenemos entonces la solución $x_1(t) = t$. Hacemos el cambio de variable $x(t) = x_1(t) + \frac{1}{v(t)}$.

Se tendrá entonces que $x(t) = t + \frac{1}{v(t)}$ y entonces $x'(t) = 1 + \frac{-v'(t)}{v^2(t)}$

Reemplazando $x(t)$ y $x'(t)$ en la ecuación original :

$$1 + \frac{-v'(t)}{v^2(t)} = \left(t + \frac{1}{v(t)}\right)^2 - t\left(t + \frac{1}{v(t)}\right) + 1$$

$$1 + \frac{-v'(t)}{v^2(t)} = t^2 + \frac{2t}{v(t)} + \frac{1}{v^2(t)} - t^2 - \frac{t}{v(t)} + 1 = \frac{t}{v(t)} + \frac{1}{v^2(t)} + 1$$

Multiplicando por $v^2(t)$ se obtiene

$$-v'(t) = tv(t) + 1$$

Que es lo mismo que

$$v'(t) + tv(t) = -1 \blacksquare$$

P4: Nuevamente buscamos una solución al sistema propuesto y se tiene la misma observación anterior.

Probamos entonces con una función que dependa de t por ejemplo con $x_1(t) = t^2$. Tendremos entonces que $x_1'(t) = 2t$ y reemplazando en la ecuación original tendriamos

$$2t = (t^2)^2 - (1+t^2)t^2 + t(2+t) \Longrightarrow 2t = t^4 - t^2 - t^4 + 2t + t^2 \Longrightarrow 2t = 2t$$

Y la igualdad se cumple.

Tenemos entonces la solución $x_1(t) = t^2$. Hacemos el cambio de variable $x(t) = x_1(t) + \dfrac{1}{v(t)}$.

Se tendrá entonces que $x(t) = t^2 + \dfrac{1}{v(t)}$ y entonces $x'(t) = 2t + \dfrac{-v'(t)}{v^2(t)}$

Reemplazando $x(t)$ y $x'(t)$ en la ecuación original :

$$2t + \frac{-v'(t)}{v^2(t)} = \left(t^2 + \frac{1}{v(t)}\right)^2 - (1+t^2)\left(t^2 + \frac{1}{v(t)}\right) + t(2+t)$$

$$2t + \frac{-v'(t)}{v^2(t)} = t^4 + \frac{2t^2}{v(t)} + \frac{1}{v^2(t)} - t^2 - \frac{1}{v(t)} - t^4 - \frac{t^2}{v(t)} + 2t + t^2 = \frac{t^2-1}{v(t)} + \frac{1}{v^2(t)} + 2t$$

Multiplicando por $v^2(t)$ se obtiene

$$-v'(t) = (1-t^2)v(t) + 1$$

Que es lo mismo que

$$v'(t) + (t^2+1)v(t) = -1 \blacksquare$$

MC441-1 Métodos y Aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales 2012

Profesor: Gonzalo Robledo V.

Ayudantes: Christopher Maulén - Gonzalo Jiménez - Pablo Mancilla

Ayudantía 4

26 de Octubre del 2012

P1: Resuelva:

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

P2: Resuelva:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Soluciones:

P1: Buscamos los valores propios. Tendremos entonces que al calcular $det(A - \lambda I) = 0$ obtendremos $\lambda^2 - 4 = 0$

Es decir $(\lambda + 2)(\lambda - 2) = 0$ por lo que los valores propios son 2 y -2.

Observación : Esta era el lugar de confusion, pues se podia pensar que $\lambda^2 = 4$ y entonces no se sabrian las multiplicidades de las raices (por esta via podria tratarse de 2 y 2 ó -2 y -2 ó 2 y -2).

Se sigue entonces como siempre.

P2: Obtenemos entonces el polinomio $(-2 - \lambda)(2 - \lambda) + 4 = \lambda^2 + 4 - 4$
Es decir $\lambda^2 = 0$, por lo que los valores propios son 0 con multiplicidad algebraica 2.

Calculamos entonces los vectores propios:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lo que nos dice : $-2x + y = 0$ y $-4x + 2y = 0$. Vemos que una ecuacion es multiplo de otra y entonces nos quedamos con una (pues me entregan la misma informacion).

Tendremos que $y = 2x$ y entonces el vector propio que originalmente era $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ahora sera $\begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Que es un espacio de dimension uno. Comparando las multiplicidades concluimos.

MC441-1 Métodos y Aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales 2012
Profesor: Gonzalo Robledo V.
Ayudantes: Christopher Maulén - Gonzalo Jiménez - Pablo Mancilla

Ayudantía 5

15 de Noviembre del 2012

P1: Encontrar la matriz fundamental y la solución general para el siguiente sistema:

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \vec{x}$$

Solución:
Dado que con la matriz fundamental construimos la solución general, buscamos entonces los valores y vectores propios que nos permiten construir la matriz fundamental. Tendremos entonces que al calcular las raices de la ecuación $det(A - \lambda I) = 0$
Obtendremos

$$(4-\lambda)(2-\lambda) - 5 \cdot (-2) = 0$$
$$\lambda^2 - 6\lambda + 18 = 0$$

Y entonces, de la conocida fórmula para los ceros de un polinomio cuadrático, tenemos que las raíces son $\lambda_1 = 3 + 3i$ y $\lambda_2 = 3 - 3i$.
Calculamos entonces los vectores propios:

Para $3 + 3i$:
$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3+3i)x \\ (3+3i)y \end{pmatrix}$$

Lo que nos dice : $4x - 2y = (3 + 3i)x$ y $5x + 2y = (3 + 3i)y$. (Verificar que una ecuación es múltiplo de otra) y entonces nos quedamos con una (pues entregan la misma información).

De la primera ecuación tendremos que $(1 - 3i)x = 2y$ y entonces tenemos que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ahora será $\begin{pmatrix} 2x \\ (1-3i)x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 2 \\ (1-3i) \end{pmatrix}$.
Luego el vector propio asociado a $3 + 3i$ es $\begin{pmatrix} 2 \\ 1-3i \end{pmatrix}$

Analogamente, para $3 - 3i$:
$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3-3i)x \\ (3-3i)y \end{pmatrix}$$

Lo que nos dice : $4x - 2y = (3-3i)x$ y $5x + 2y = (3-3i)y$. (Verificar que una ecuación es múltiplo de otra) y entonces nos quedamos con una (pues entregan la misma información).

De la primera ecuación tendremos que $(1+3i)x = 2y$ y entonces tenemos que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ahora será $\begin{pmatrix} 2x \\ (1+3i)x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 2 \\ 1+3i \end{pmatrix}$.

Luego el vector propio asociado a $3-3i$ es $\begin{pmatrix} 2 \\ 1+3i \end{pmatrix}$

De esta forma, tendremos que $\Phi_1(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1+3i \end{pmatrix} e^{(3+3i)t}$

Desarrollando y luego expresando $e^{(3+3i)t}$ en su forma $a+bi$, se tiene que $\Phi_1(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1+3i \end{pmatrix} e^{3t}e^{3ti} = \begin{pmatrix} 2e^{3t} \\ (1+3i)e^{3t} \end{pmatrix} (\cos(3t) + i\sin(3t)) = \begin{pmatrix} 2e^{3t}\cos(3t) \\ e^{3t}\cos(3t) + 3e^{3t}\sin(3t) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 2e^{3t}\sin(3t) \\ e^{3t}\sin(3t) - 3e^{3t}\cos(3t) \end{pmatrix}$

Análogamente con $\Phi_2(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-3i \end{pmatrix} e^{(3-3i)t}$ se tiene finalmente que

$\Phi_2(t) = \begin{pmatrix} 2e^{3t}\cos(3t) \\ e^{3t}\cos(3t) + 3e^{3t}\sin(3t) \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 2e^{3t}\sin(3t) \\ e^{3t}\sin(3t) - 3e^{3t}\cos(3t) \end{pmatrix}$

Obs: Hay que usar el hecho que $\cos(-t) = \cos(t)$ y que $\sin(-t) = -\sin(t)$

Sabemos que la matriz fundamental es la que tiene por columnas a $\Phi_1(t)$ y a $\Phi_2(t)$, luego $\Phi_A(t) = \begin{pmatrix} 2e^{(3+3i)t} & 2e^{(3-3i)t} \\ (1+3i)e^{(3+3i)t} & (1-3i)e^{(3-3i)t} \end{pmatrix}$

Haciendo los cambios $U_1(t) = \dfrac{\Phi_1(t) + \Phi_2(t)}{2}$ y $U_2(t) = \dfrac{\Phi_1(t) - \Phi_2(t)}{2i}$, tendremos que la solución general esta dada por $\vec{x(t)} = C_1U_1(t) + C_2U_2(t) = C_1 \begin{pmatrix} 2e^{3t}\cos(3t) \\ e^{3t}\cos(3t) + 3e^{3t}\sin(3t) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2e^{3t}\sin(3t) \\ e^{3t}\sin(3t) - 3e^{3t}\cos(3t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2\cos(3t) \\ \cos(3t) + 3\sin(3t) \end{pmatrix} e^{3t} + C_2 \begin{pmatrix} 2\sin(3t) \\ \sin(3t) - 3\cos(3t) \end{pmatrix} e^{3t}$

MC441-1 Métodos y Aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales 2012

Profesor: Gonzalo Robledo V.

Ayudantes: Christopher Maulén - Gonzalo Jiménez - Pablo Mancilla

Control 1

4 de Septiembre del 2012

P1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales :

$$\begin{cases} x_1' = nt^{n-1}x_2 \\ x_2' = -nt^{n-1}x_1. \end{cases}$$

a)[2pts.] Determine si es lineal o no lineal y si es autónomo o no autónomo.

Sol: Vemos que $x_1' = f_1(t, x_1, x_2) = nt^{n-1}x_2$ y entonces $f_1(t, x_1 + z_1, x_2 + z_2) = nt^{n-1}(x_2 + z_2) = nt^{n-1}x_2 + nt^{n-1}z_2 = f_1(t, x_1, x_2) + f_1(t, z_1, z_2)$ y $f_1(t, \lambda x_1, \lambda x_2) = nt^{n-1}\lambda x_2 = \lambda nt^{n-1}x_2 = \lambda f_1(t, x_1, x_2)$.

Analogo para $x_2' = f_2(t, x_1, x_2)$. Concluimos que el sistema es lineal.

Observación 1: Puede tambien plantearse el sistema como la igualdad entre un vector derivado y la multiplicación de una matriz por tal vector. i.e.:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & nt^{n-1} \\ nt^{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

y el mismo razonamiento anterior se puede realizar. (Propuesto)

Claramente no es autónomo (i.e. es no autónomo) pues al compararlo con la forma $x_1' = a(t)x_2$ vemos que $a(t) = nt^{n-1}$ y esto depende efectivamente de t.

b)[2pts.] Determine si $\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(t^n) \\ \cos(t^n) \end{pmatrix}$ es solución.

Sol: Vemos que $\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(t^n) \\ \cos(t^n) \end{pmatrix}$ cumple que $\varphi_1(t)' = \sin(t^n)' = nt^{n-1}\cos(t^n) = nt^{n-1}\varphi_2(t)$ y que $\varphi_2(t)' = \cos(t^n)' = -nt^{n-1}\sin(t) = -nt^{n-1}\varphi_1(t)$. Luego es solución

c)[2pts.] Verificar si $\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(t^n) \\ \cos(t^n) \end{pmatrix}$ es solución del problema de Cauchy :

$$\begin{cases} x_1' = nt^{n-1}x_2 \\ x_2' = -nt^{n-1}x_1 \\ x_1(0) = 1 \ , \ x_2(0) = 0. \end{cases}$$

Sol: No es solución pues $x_1(0) = \sin(0^n) = \sin(0) = 0 \neq 1$. (incluso $x_2(0) = \cos(0^n) = \cos(0) = 1 \neq 0$).

P2: [6pts.] Resuelva el siguiente problema de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = -2x(t) + sin(t) \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Sol: Calculamos el factor integrante: $e^{\int 2dt} = e^{2t}$. Luego, multiplicando la ecuación por este factor se tiene :

$$x'e^{2t} + 2e^{2t}x = \sin(t)e^{2t}$$
$$(e^{2t}x)' = \sin(t)e^{2t}$$

Integrando :

$$e^{2t}x(t) = \int \underbrace{e^{2t}}_{u} \underbrace{\sin(t)}_{dv} dt = -e^{2t}\cos(t) + 2\int e^{2t}\cos(t)dt + c_1$$

Observación 2: La constante c_1 aparece a causa de nuestra integración.

Resolvemos la nueva integral

$$\int \underbrace{e^{2t}}_{u} \underbrace{\cos(t)}_{dv} dt = e^{2t}\sin(t) - \int 2e^{2t}\sin(t) + c_2$$

Observación 3: La constante c_2 aparece a causa de nuestra nueva integración.

Reemplazando en la igualdad anterior, tendremos que :

$$e^{2t}x = \int e^{2t}\sin(t)dt = -e^{2t}\cos(t) + 2\left(e^{2t}\sin(t) - \int 2e^{2t}\sin(t)\right) + c_3$$

Observación 4: La constante c_3 no es más que $c_2 + c_1$

Definimos $I = \int e^{2t}\sin(t)dt$ y se tendrá :

$$I = -e^{2t}\cos(t) + 2e^{2t}\sin(t) - 4I + c_3$$
$$5I = -e^{2t}\cos(t) + 2e^{2t}\sin(t) + c_3$$
$$I = \frac{-e^{2t}\cos(t) + 2e^{2t}\sin(t)}{5} + C$$

Observación 5: La constante C no es más que $\frac{c_3}{5}$
Luego

$$e^{2t}x(t) = I = \frac{-e^{2t}\cos(t) + 2e^{2t}\sin(t)}{5} + C$$

Y multiplicando por e^{-2t} concluimos que

$$x(t) = \frac{2\sin(t) - \cos(t)}{5} + Ce^{-2t}$$

Recordando que $x(0) = 1$ vemos que :

$$x(0) = \frac{2\sin(0) - \cos(0)}{5} + Ce^{-2\cdot 0} = \frac{2\cdot 0 - 1}{5} + Ce^{0} = \frac{-1}{5} + C = 1$$

Y entonces $C = \dfrac{6}{5}$ ■

MC441-1 Métodos y Aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales 2012
Profesor: Gonzalo Robledo V.
Ayudantes: Christopher Maulén - Gonzalo Jiménez - Pablo Mancilla

Control 1

4 de Septiembre del 2012

P1: [6pts.] Resolver el siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{cases} x' = (1+x^2)e^{2t} \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Sol: Se tendrá

$$\frac{1}{1+x^2}dx = e^{2t}dt$$

Integrando

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \int e^{2t}dt$$
$$\arctan(x) = \frac{e^{2t}}{2} + C$$
$$x = \tan(\frac{e^{2t}}{2} + C)$$

Recordamos que $x(0) = 1$, luego

$$\tan(\frac{e^{2\cdot 0}}{2} + C) = \tan(\frac{1}{2} + C) \Longrightarrow \frac{1}{2} + C = \frac{\pi}{4} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$$

y entonces $C = \dfrac{\pi - 2}{4} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$.

Obs: Acá bastaba exhibir solo un valor de C.

P2: [6pts.] Encuentre el inverso del conjugado de:

$$z = (\sqrt{3} + i)\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$$

.

Sol: Se tiene que el primer factor es $\sqrt{3^2+1}e^{i\phi}$ donde $\phi = \arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \arctan\left(\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) =$ $\arctan\left(\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right) = \arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\pi}{6}$.
Luego z es

$$2e^{i\frac{\pi}{6}} \cdot \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Entonces su conjugado será $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ y finalmente su inverso será $e^{i\frac{\pi}{3}}$ que es $\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.