

# 第二天

全是数学题

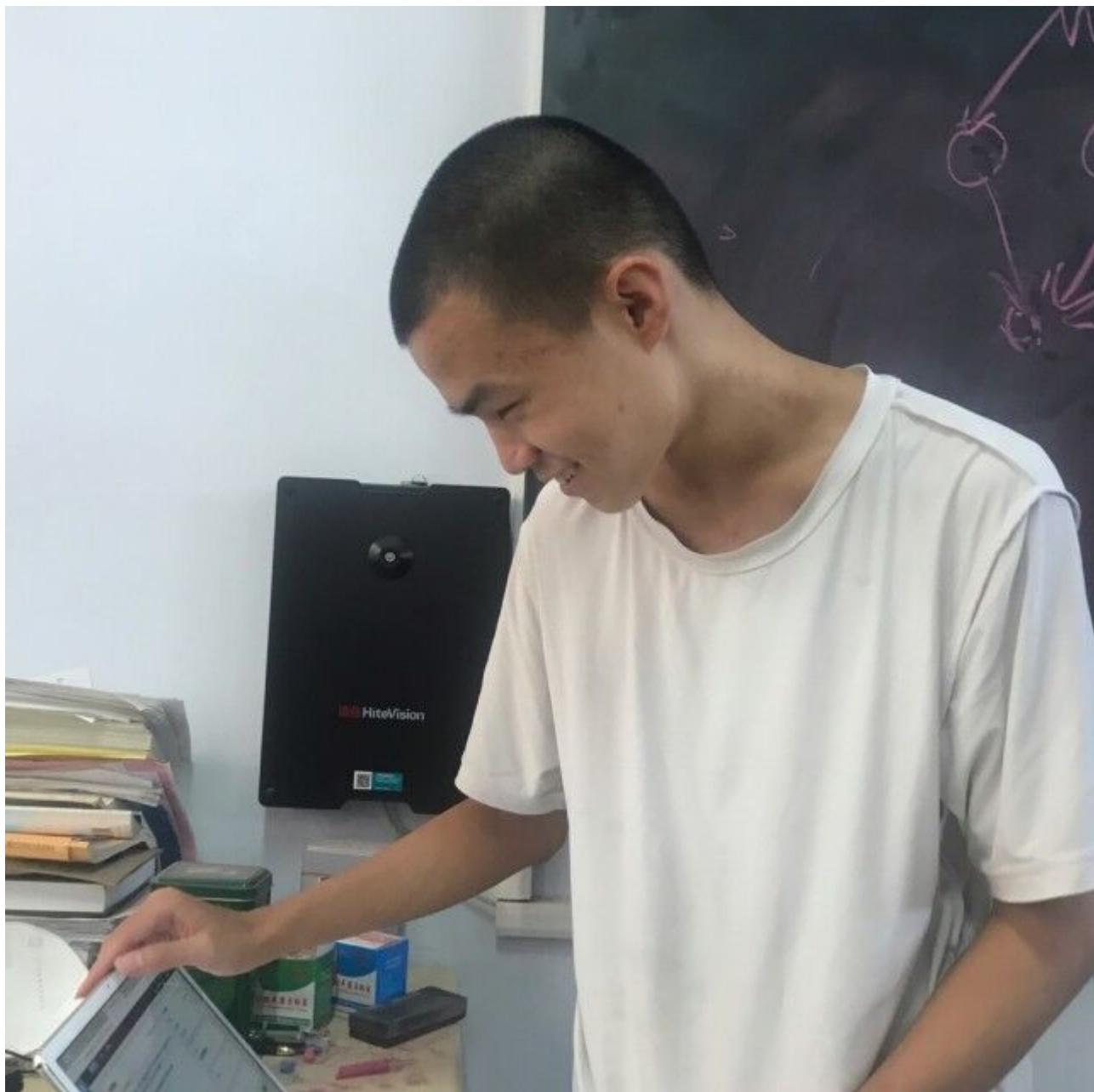
**小提示：永远不要相信 GitHub Copilot 写的代码 绝对爆零**

## 膜拜

黄子宽老师：



王廉达大佬：



# 上午

## 一、差分约束

### 例题引入

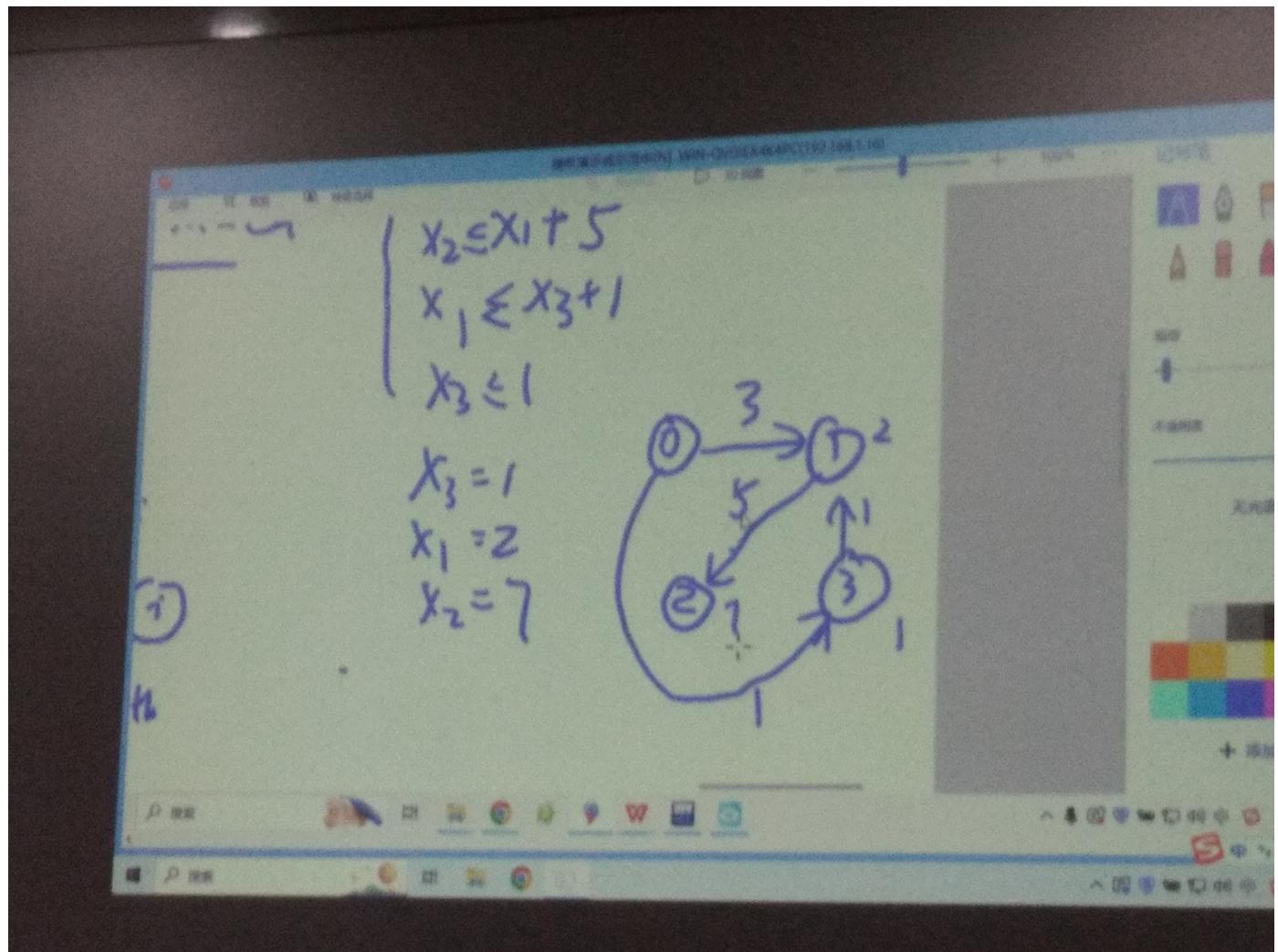
- 题目描述:
  - 给 $n$ 个变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 限制 $x_i \leq x_j + w_i$ 且 $x_i \leq G$ , 求 $\max\{x_i\}$
- 示例:

$$\begin{cases} x_1 \leq 3 \\ x_2 \leq x_1 + 5 \\ x_1 \leq x_3 + 1 \\ x_3 \leq 1 \end{cases}$$

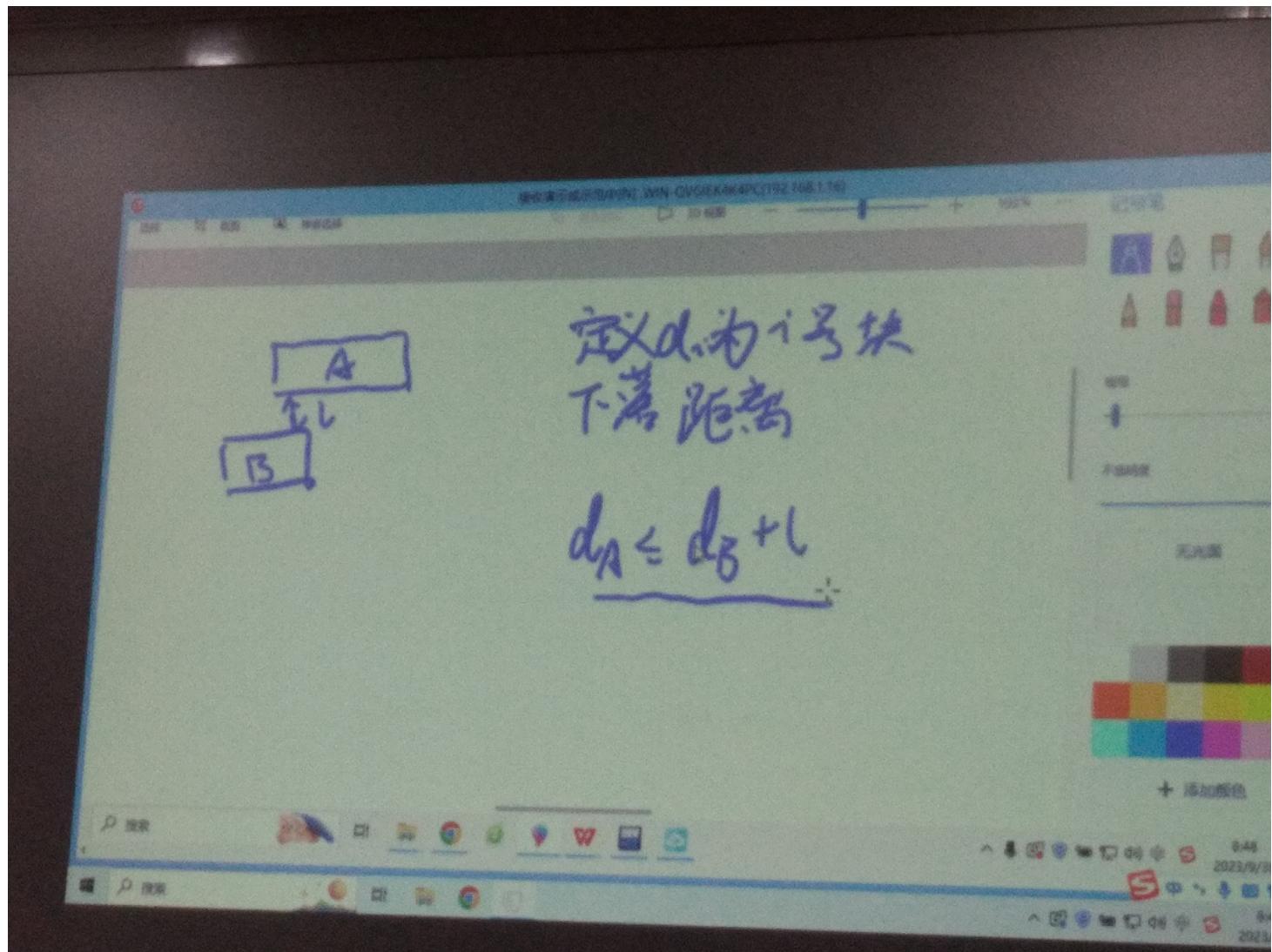
解得

$$\begin{cases} x_3 = 1 \\ x_1 = 2 \\ x_2 = 7 \end{cases}$$

建图



## 解题：俄罗斯方块 P4184



$$\exists i, \forall j, d_i < d_j + w_{ij}$$

## 二、搜索

### 剪枝

- 最先搜索可能性最少的点（可行性剪枝）
- 剩下的数最优情况下也不超过全局最优解则剪枝

## 一道自创题

- 题目描述

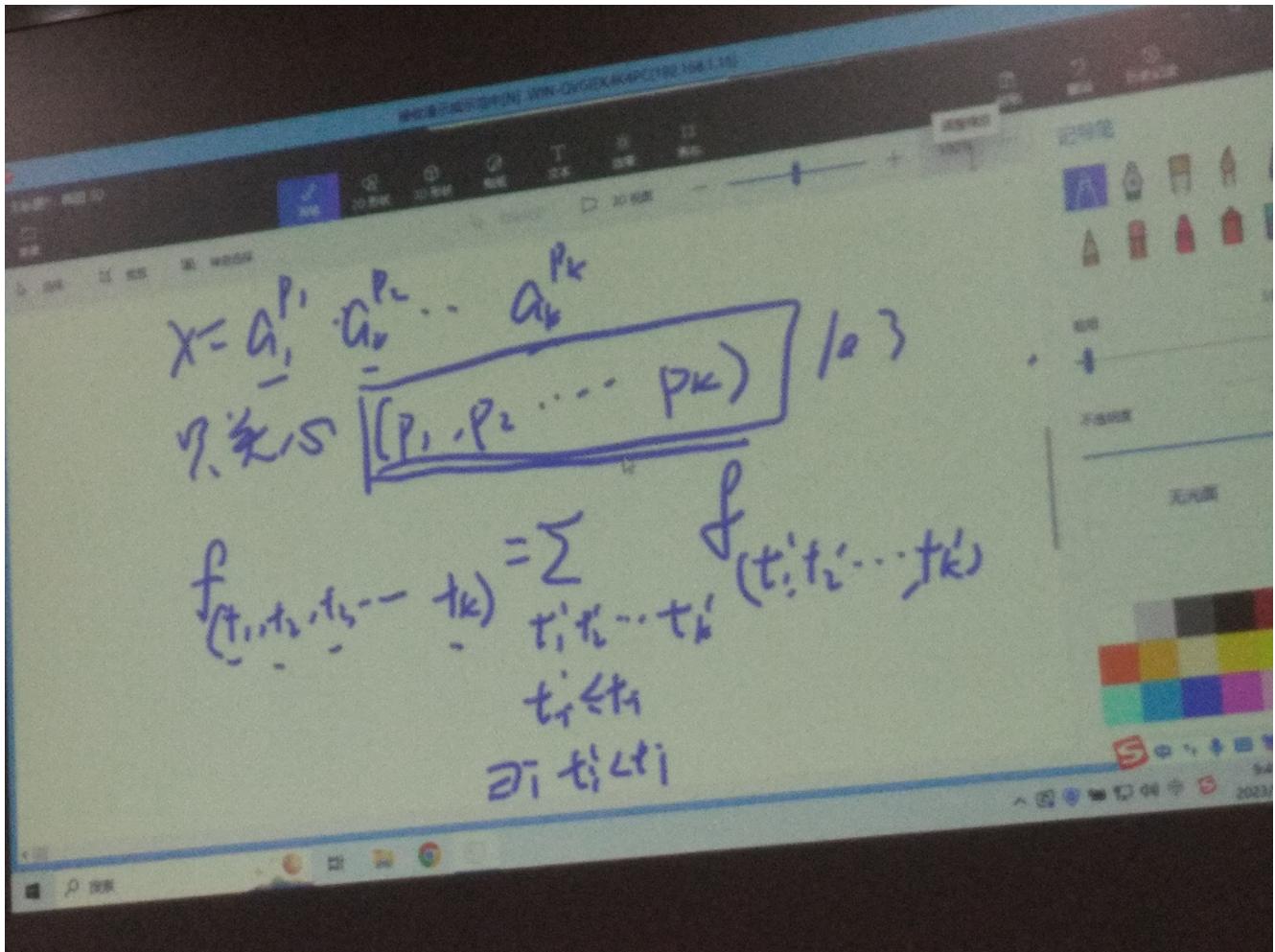
有  $q$  次询问，每次询问一个数  $x$ ，询问  $x$  每次除一个约数直到最后变为 1 有多少种方式。  
比如  $x = 6, 6 \rightarrow 1, 6 \rightarrow 3 \rightarrow 1, 6 \rightarrow 2 \rightarrow 1$  三种

$$x \leq 1e15, q \leq 1e4$$

- 题解

- 先用Pollard-Rho分解质因数
- 发现 假设我们得到  $x = a_1^{p_1} * a_2^{p_2} \dots * a_k^{p_k}$
- 那么只有  $(p_1, p_2, \dots, p_k)$  的无序元组有意义
- 这样本质不同的元组数量的一个粗略上线是考虑  $2^{50^{1e15}}$ ，而 50 的拆分数只有  $2e5$  级别
  - 拆分数：一个数的所有拆分方式的数量
    - 拆分数的求法： $f(n) = \sum_{i=1}^n f(n-i)$
    - 例：
      - 3: 1+1+1 / 1+2 / 3
      - 4: 1+1+1+1 / 1+1+2 / 1+3 / 2+2 / 4

- 图解：



## 又一道自创题

$i$  交换两个  $2^{i-1}$

### 三、二分

#### 例题：最大平均子段和

给  $k$  和一个长度为  $n$  的序列  $a_1, a_2, \dots, a_n$ 。每次询问一个长度大于  $k$  区间  $[l, r]$ ，使得  $(a_l + \dots + a_r)/(r - l + 1)$  最大。

$n \leq 10^5$ , 输出小数, 精度  $1e - 6$  即可

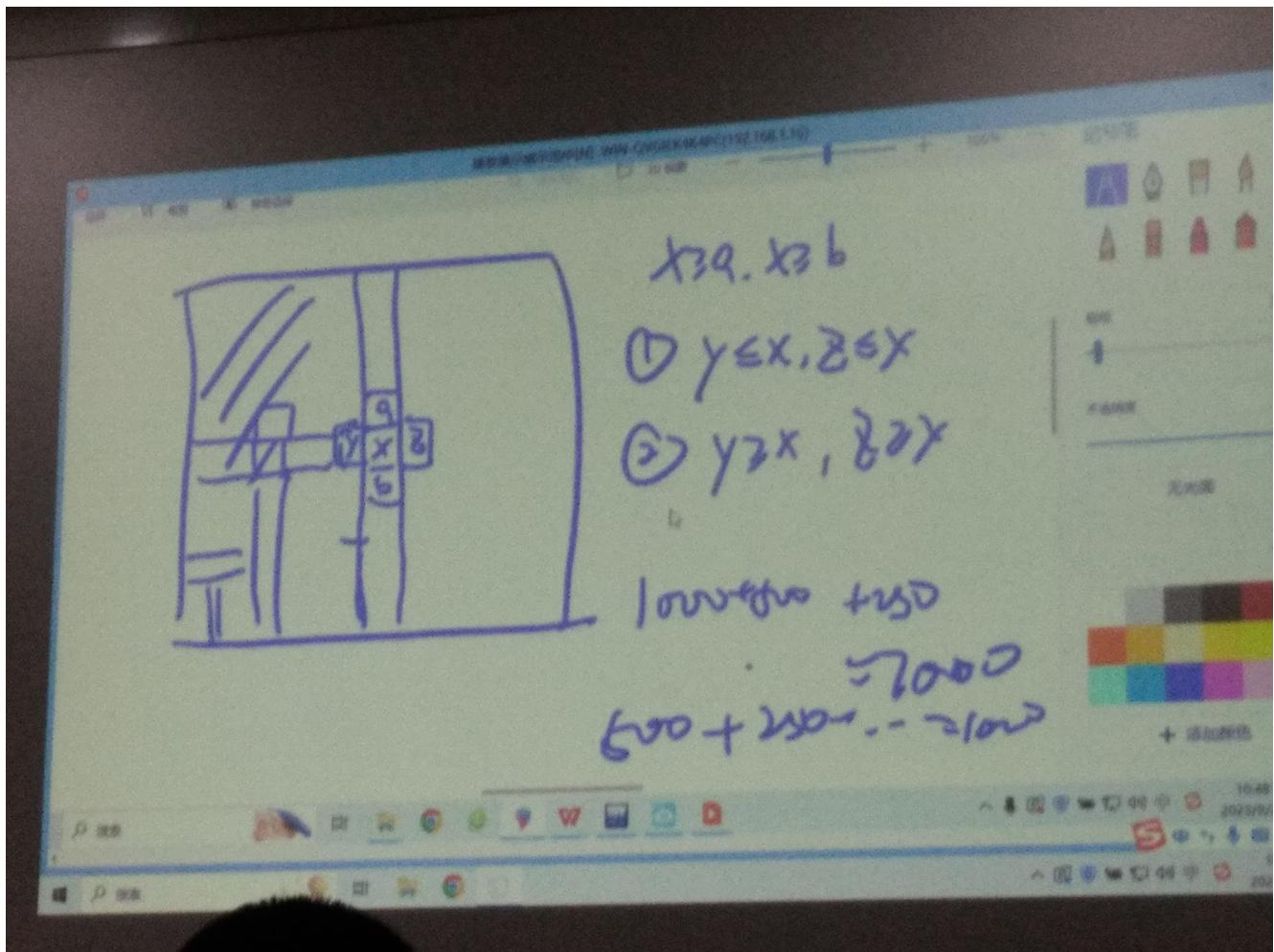
例题：

BalticOI2018

#### 蠕虫之忧

- 任务一:  $M=K=1, N=1000000, Q=35$  (一维)
  - 做法: 二分+黄金分割 (优化询问次数)
- 任务二:  $K=1, N=M=1000, Q=3500$  (二维)
  - 做法: 二分 (横切+竖切) + 黄金分割 (优化询问次数)

如图:



- 任务三:  $N=M=K=500, Q=150000$  (三维)

- 做法: ...

## 总结

能不能别讲数学题了 (恼 😠)

## 下午

### 一、二分 (续上午)

#### Random (原创题)

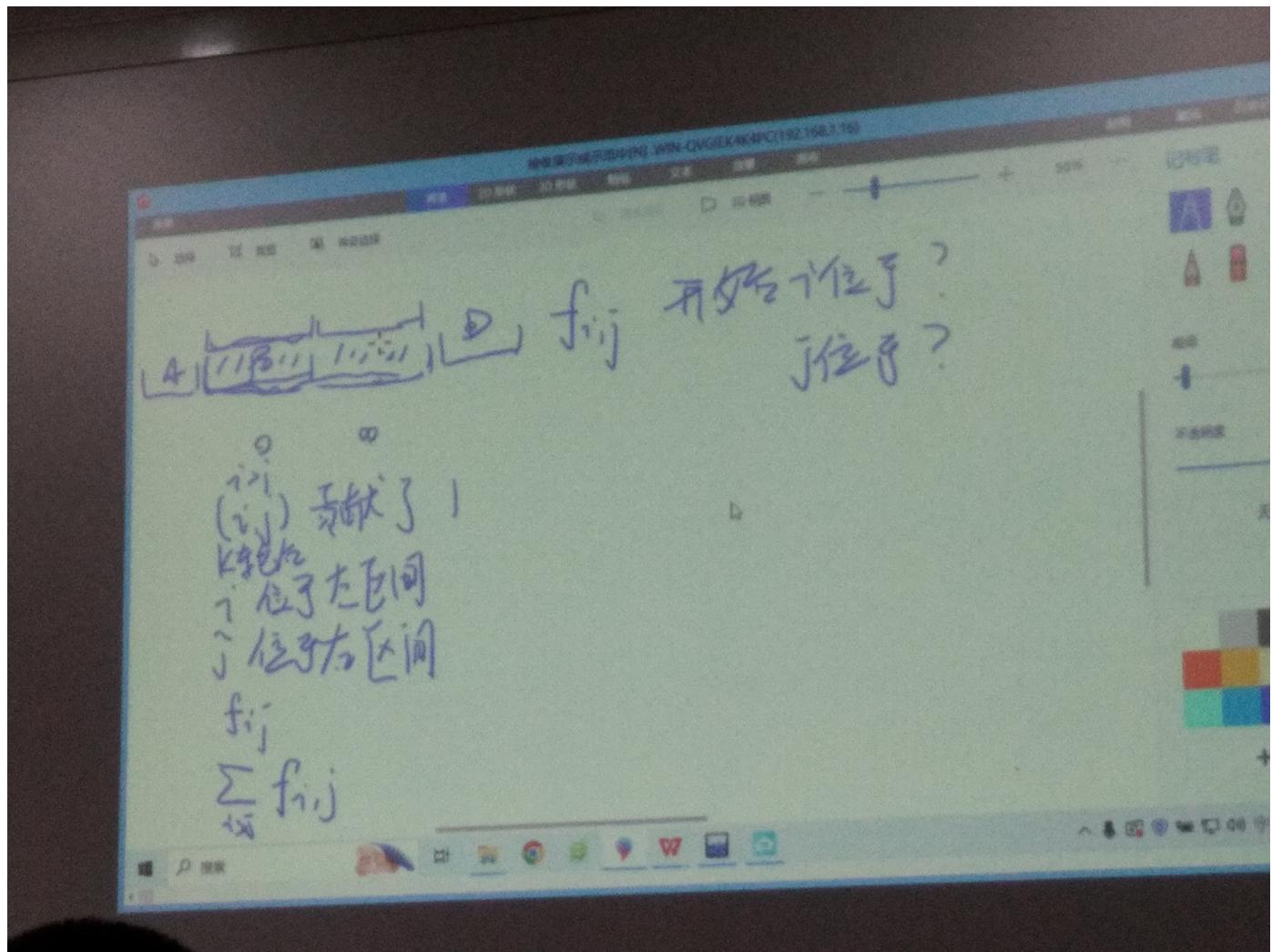
- 题目描述:

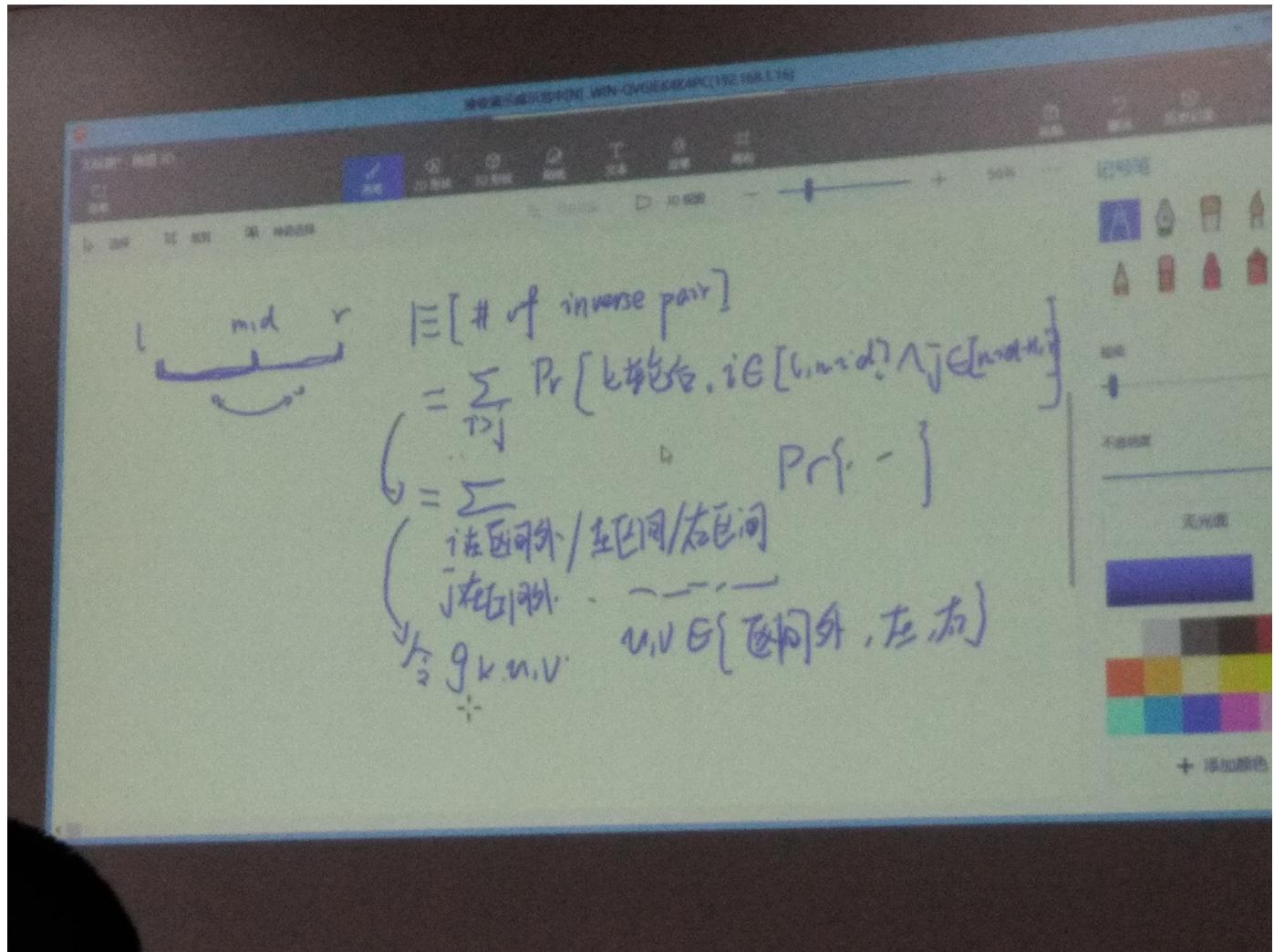
给定一个排列，随机做 $k$ 次交换，求最后的排列的期望

- 期望:  $\sum_{i=1}^n p_i * x_i$

如果一个 $x$ 有 $a_1$ 的概率取值为1,  $a_2$ 的概率取值为2, ...,  $a_k$ 的概率取值为 $k$ , 那么这个 $x$ 的期望就是  $\frac{a_1+a_2+\dots+a_k}{k}$

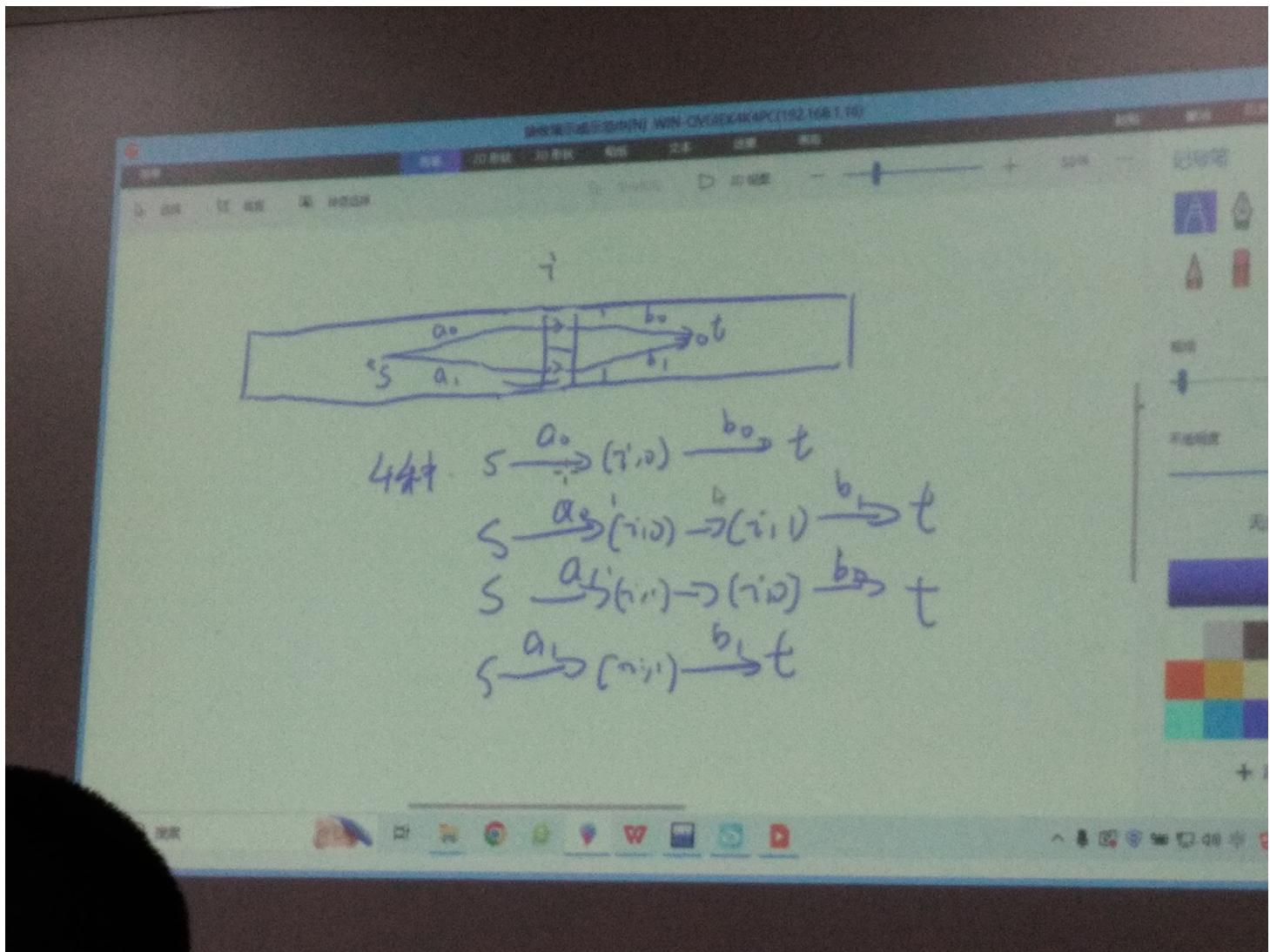
- 图解:





## 旅行者 (ZJOI 2016)

图解：



## CDQ分治

## 二、贪心

### 经典问题

- 题目描述:

有 $n$ 个怪物，每个怪物有 $a_i$ 和 $b_i$ 两个属性，当你打一个怪物时会先减 $a_i$ 血再加 $b_i$ 血，中途血量不能小于0，问最少需要多少血量才能打完所有怪物。

- GitHub Copilot 给出的解释:

这道题目可以使用贪心算法来解决。具体做法是，我们可以按照怪物的 $b_i$ 属性从小到大排序，然后依次遍历每个怪物，记录当前需要的最小血量和当前已经需要的血量。对于每个怪物，我们可以计算出打败它所需要的最小血量，并将其加到当前需要的血量中。最后，当前需要的血量就是打败所有怪物所需要的最小血量。

以下是 C++ 的实现代码：

```

#include <iostream>
#include <algorithm>
#include <vector>
using namespace std;

int main() {
    int n;
    cin >> n;
    vector<pair<int, int>> monsters(n);
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        cin >> monsters[i].first >> monsters[i].second;
    }
    sort(monsters.begin(), monsters.end(), [] (const auto& a, const auto& b) {
        return a.second < b.second;
    });

    int health = 0;
    int current_health = 0;
    for (const auto& monster : monsters) {
        current_health += monster.first;
        health = max(health, current_health);
        current_health -= monster.second;
    }

    cout << health << endl;
    return 0;
}

```

这段代码使用了 `vector` 存储怪物的属性，使用 `sort` 函数按照  $b_i$  属性从小到大排序，然后依次遍历每个怪物，记录当前需要的最小血量和当前已经需要的血量。对于每个怪物，我们可以计算出打败它所需要的最小血量，并将其加到当前需要的血量中。最后，当前需要的血量就是打败所有怪物所需要的最小血量。

## 排列鞋子 (IOI 2019)

### 三、Floyd矩阵

## 美食家 (NOI 2020)

### 四、二维RMQ

#### 例题

- 题目描述：

给定一个 $n \times m$ 的矩阵，每次询问一个矩形区域的最小值

$n, m \leq 300, q \leq 10^7$

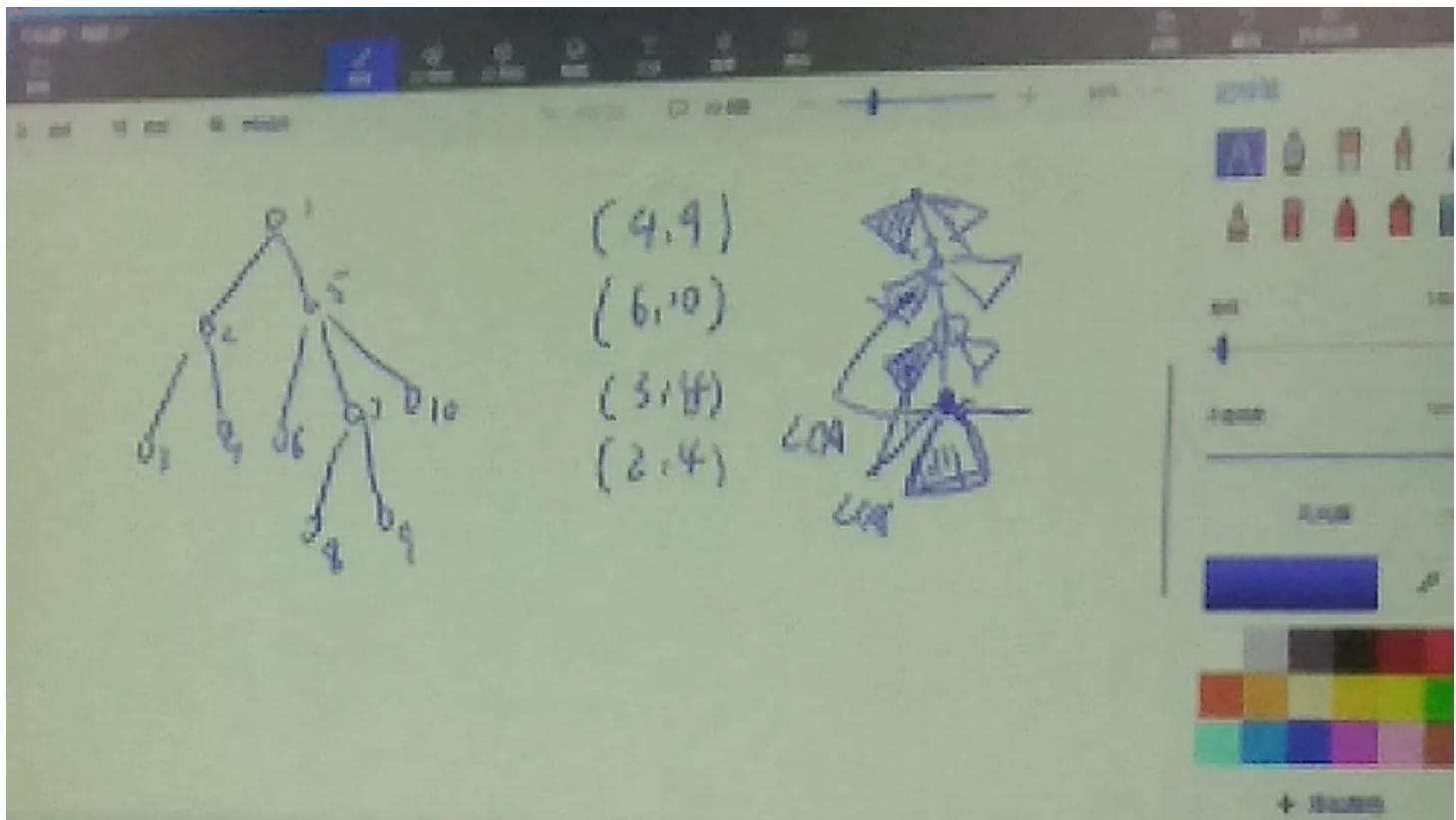
- GitHub Copilot :

你可以使用二维线段树或者二维树状数组来解决这个问题。这两种数据结构都可以支持区间查询和单点修改。其中，二维线段树的时间复杂度为  $O(q \log^2 n)$ ，空间复杂度为  $O(nm \log^2 n)$ ；二维树状数组的时间复杂度为  $O(q \log n)$ ，空间复杂度为  $O(nm)$ 。你可以根据具体情况选择使用哪种数据结构。

### 五、LCA

#### Tarjan离线 O(1)

利用并查集，图解如下



## LCA加强版

- 题目描述:

给定一颗 $n$ 个点的树，有 $q$ 次询问，每次给定三个点 $u, v, w$ ，求以 $w$ 为根的情况下， $u$ 和 $v$ 的LCA

$$n, q \leq 10^5$$

晚上

## 一、交互式证明

农夫山泉打钱

## 二、Miller-Rabin素数测试

GitHub Copilot :

- Miller-Rabin素数测试是一种用于确定给定数字是否为素数的概率性算法。它通过将一个数字与一组随机选择的基数进行测试来工作。测试的基数越多，测试的准确性就越高。以下是Python的一个示例实现。

```

import random

def is_prime(n, k=5):
    if n < 2:
        return False
    for _ in range(k):
        a = random.randint(2, n - 1)
        if pow(a, n - 1, n) != 1:
            return False
    return True

```

这个实现接受一个数字  $n$  和一个可选参数  $k$ ，它指定要测试的基数数量。 $k$  的默认值为 5，这通常对于大多数用例来说已经足够了。该函数返回 `True` 如果  $n$  可能是素数，否则返回 `False`。

- Miller-Rabin素数测试的基本思想是利用费马小定理，对于一个素数  $p$ ，对于任意整数  $a$ ，都有  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ 。但是对于合数，这个等式并不一定成立。Miller-Rabin素数测试通过多次随机选择  $a$ ，来验证这个等式是否成立，从而判断一个数是否为素数。Miller-Rabin素数测试的时间复杂度为  $O(k \log^3 n)$ ，其中  $k$  为测试次数， $n$  为待测试的数。Miller-Rabin素数测试的正确性为 99.999999999996%。在实际应用中，通常会进行多次测试来提高正确性。Miller-Rabin素数测试是一种常用的素数测试算法，被广泛应用于密码学、计算机安全等领域。
- Miller-Rabin素数测试的实现中，随机选择的基数数量  $k$  越大，测试的正确性就越高，但是时间复杂度也会相应增加。在实际应用中，通常会根据需要进行权衡，选择一个合适的  $k$  值来进行测试。另外，Miller-Rabin素数测试也可以用于生成大素数，只需要不断随机生成大数，然后进行Miller-Rabin素数测试，直到找到一个素数为止。
- 如果你想要测试一个数是否为素数，可以调用 `is_prime(n)` 函数，其中  $n$  为待测试的数。如果你想要增加测试的次数，可以传入第二个参数  $k$ ，例如 `is_prime(n, 10)` 表示进行 10 次测试。在实际应用中，通常会根据需要进行权衡，选择一个合适的  $k$  值来进行测试。
- 如果你想要使用Miller-Rabin素数测试来生成大素数，可以使用以下代码：

```

import random

def generate_prime(n):
    while True:
        p = random.randint(2 ** (n-1), 2 ** n - 1)
        if is_prime(p):
            return p

```

这个函数接受一个参数  $n$ ，表示要生成的素数的位数。函数会不断随机生成一个  $n$  位的数，然后使用Miller-Rabin素数测试来判断这个数是否为素数，直到找到一个素数为止。这个函数的时间复杂度取决于生成的素数的大小和Miller-Rabin素数测试的次数，通常需要进行多次测试才能得到一个足够大的素数。