

# 图论

张尊喆 Hs-black

# Contact me

QQ: 1607432325

Mail: [1607432325@qq.com](mailto:1607432325@qq.com)

# Content

- 并查集
- 最小生成树
- 最短路
- 负环与差分约束
- 拓扑排序
- 强连通分量
- 二分图
- 基环树

# 并查集

From OI-wiki

并查集是一种用于管理元素所属集合的数据结构，实现为一个森林，其中每棵树表示一个集合，树中的节点表示对应集合中的元素。

顾名思义，并查集支持两种操作：

- 合并 (Union)：合并两个元素所属集合（合并对应的树）
- 查询 (Find)：查询某个元素所属集合（查询对应的树的根节点），这可以用于判断两个元素是否属于同一集合

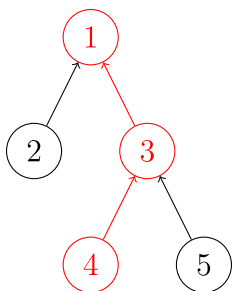
并查集在经过修改后可以支持单个元素的删除、移动；使用动态开点线段树还可以实现可持久化并查集。

并查集无法以较低复杂度实现集合的分离。

## 初始化

初始时，每个元素都位于一个单独的集合，表示为一棵只有根节点的树。方便起见，我们将根节点的父亲设为自己。

# 查询



我们需要沿着树向上移动，直至找到根节点。

```
size_t dsu::find(size_t x) { return pa[x] == x ? x : find(pa[x]); }
```

## 路径压缩

查询过程中经过的每个元素都属于该集合，我们可以将其直接连到根节点以加快后续查询。

```
size_t dsu::find(size_t x) { return pa[x] == x ? x : pa[x] = find(pa[x]); }
```

# 合并

要合并两棵树，我们只需要将一棵树的根节点连到另一棵树的根节点。

```
void dsu::unite(size_t x, size_t y) { pa[find(x)] = find(y); }
```

## 启发式合并

启发式合并 + 路径压缩  $O(m\alpha)$

不使用启发式合并、只使用路径压缩的最坏时间复杂度是  $O(m \log n)$ 。不使用启发式合并、只使用路径压缩，在平均情况下，时间复杂度依然是  $O(m\alpha(m, n))$ 。

如果只使用启发式合并，而不使用路径压缩，时间复杂度为  $O(m \log n)$ 。由于路径压缩单次合并可能造成大量修改，有时路径压缩并不适合使用。例如，在可持久化并查集、线段树分治 + 并查集中，一般使用只启发式合并的并查集。



## 带权并查集

我们还可以在并查集的边上定义某种权值、以及这种权值在路径压缩时产生的运算，从而解决更多的问题。

## [CEOI1999] Parity Game (带权并查集/种类并查集)

Alice 和 Bob 在玩一个游戏：他写一个由 0 和 1 组成的序列。Alice 选其中的一段（比如第 3 位到第 5 位），问他这段里面有奇数个 1 还是偶数个 1。Bob 回答你的问题，然后 Alice 继续问。Alice 要检查 Bob 的答案，指出在 Bob 的第几个回答一定有问题。有问题的意思就是存在一个 01 序列满足这个回答前的所有回答，而且不存在序列满足这个回答前的所有回答及这个回答。

对于 100% 的数据， $1 \leq n \leq 10^9$ ， $m \leq 5 \times 10^3$ 。

# Solution

转化为前缀和，每次询问相当于得知  $S[r]$  和  $S[l - 1]$  是否是同奇同偶。

种类并查集，或者带权并查集。

种类并查集：对于每个位置建立两个点  $i, i + n$  分别代表， $S[i]$  为奇， $S[i]$  为偶。

得知两个位置同奇同偶，那么  $i$  和  $j$  连， $i + n$  和  $j + n$  连，否则  $i$  和  $j + n$  连， $j$  和  $i + n$  连。一个集合内部的布尔变量相同，当  $i$  和  $i + n$  在同一集合时矛盾。

带权并查集：相等连一条权值为 0 的边，否则连一条权值为 1 的边，要求两个点的路径异或和要么都为 1（奇偶性不同），要么都为 0（奇偶性相同）。

实现时维护到达集合代表点的距离即可。

## [NOI Online #1 提高组] 序列（带权并查集与二分图）

小 D 有一个长度为  $n$  的整数序列  $a_1 \dots n$ ，她想通过若干次操作把它变成序列  $b_i$ 。

小 D 有  $m$  种可选的操作，第  $i$  种操作可使用三元组  $(t_i, u_i, v_i)$  描述：若  $t_i = 1$ ，则她可以使  $a_{u_i}$  与  $a_{v_i}$  都加一或都减一；若  $t_i = 2$ ，则她可以使  $a_{u_i}$  减一、 $a_{v_i}$  加一，或是  $a_{u_i}$  加一、 $a_{v_i}$  减一，因此当  $u_i = v_i$  时，这种操作相当于没有操作。

小 D 可以以任意顺序执行操作，且每种操作都可进行无限次。现在给定序列与所有操作，请你帮她判断是否存在一种方案能将  $a_i$  变为  $b_i$ 。题目保证两个序列长度都为  $n$ 。若方案存在请输出 YES，否则输出 NO。

对于所有测试点：  $1 \leq T \leq 10$ ,  $1 \leq n, m \leq 10^5$ ,  $1 \leq a_i, b_i \leq 10^9$ ,  $t_i \in \{1, 2\}$ ,  $1 \leq u_i, v_i \leq n$ 。

# Solution

把每个位置看成一个点。

首先对于 2 操作连边。每次操作可以在一个连通块内部任选一个点加一，任选一个点减一。

再对于 1 操作连边。

如果形成的图是二分图，则可以在保证左部点总和与右部点总和的差不变的情况下任意的加减。

如果形成的图不是二分图，则可以在保证总和奇偶性不变的情况下任意的加减。

Ref *xht*

## P2391 白雪皑皑（序列并查集）

现在有  $n$  片雪花排成一行。pty 要对雪花进行  $m$  次染色操作，第  $i$  次染色操作中，把第  $((i \times p + q) \bmod n) + 1$  片雪花和第  $((i \times q + p) \bmod n) + 1$  片雪花之间的雪花（包括端点）染成颜色  $i$ 。其中  $p, q$  是给定的两个正整数。他想知道最后  $n$  片雪花被染成了什么颜色。没有被染色输出 0。

对于 100% 的数据满足： $1 \leq n \leq 10^6$ ,  $1 \leq m \leq 10^7$ 。

保证  $1 \leq m \times p + q, m \times q + p \leq 2 \times 10^9$ 。

## Solution

倒序操作，需要支持将区间没有染色的地方染色。

并查集：暴力染色，并删除染过的地方。令  $f[i]$  从  $i$  开始第一个没有染色的地方。  
染色后将  $f[i]$  设置为  $f[i] + 1$ ，利用并查集维护。

## P1640 [SCOI2010] 连续攻击游戏（建图分析）

lxhgww 最近迷上了一款游戏，在游戏里，他拥有很多的装备，每种装备都有 2 个属性，这些属性的值用  $[1, 10000]$  之间的数表示。当他使用某种装备时，他只能使用该装备的某一个属性。并且每种装备最多只能使用一次。游戏进行到最后，lxhgww 遇到了终极 boss，这个终极 boss 很奇怪，攻击他的装备所使用的属性值必须从 1 开始连续递增地攻击，才能对 boss 产生伤害。也就是说一开始的时候，lxhgww 只能使用某个属性值为 1 的装备攻击 boss，然后只能使用某个属性值为 2 的装备攻击 boss，然后只能使用某个属性值为 3 的装备攻击 boss.....以此类推。现在 lxhgww 想知道他最多能连续攻击 boss 多少次？

对于 100% 的数据，保证  $N \leq 10^6$ 。



## Solution

对于每种装备，将其两种属性连边。对于每个连通块来说，如果是一棵树，那么恰好会有一个属性选不到，那么让连通块的最大值选不到。否则至少是个基环树，所有值都可以选到。

最终答案就是选不到的属性的最小值。

# CF571D Campus (启发式并查集)

有一个长度为  $n$  的序列，初始全为 0。

有两类对下标的集合，初始时每一类各有  $n$  个集合，编号为  $i$  的集合里有下标  $i$ 。

一共有  $m$  个操作，操作有五种：

1.  $U\ x\ y$  将第一类编号为  $y$  的集合合并到编号为  $x$  的集合里。
2.  $M\ x\ y$  将第二类编号为  $y$  的集合合并到编号为  $x$  的集合里。
3.  $A\ x$  将第一类编号为  $x$  的集合中的所有下标在序列中对应的数加上  $x$  的集合大小。
4.  $Z\ x$  将第二类编号为  $x$  的集合中的所有下标在序列中对应的数设为 0。
5.  $Q\ x$  询问序列中下标为  $x$  的位置上的数。

$$n, m \leq 5 \times 10^5。$$

# Solution

集合可以想到并查集，但是并查集会破坏合并结构，我们考虑使用启发式合并。

如果得到某个位置最后一次清 0 是什么时刻，那么只考虑这个时刻之后的加法操作即可。

我们用启发式合并维护信息，第二类集合维护上一次清零的时间，清零就在根结点处打 tag，需要记录连接的时间。

然后可以离线下来，变成前缀和相减。

加法操作可以记录自己连上来时候父亲的 tag，查询时拿父亲的 tag 减去记录的值即为正确的答案。

# 最小生成树

求连通图中边权和/边权最大值最小的一个生成树

## P1396 营救（最小生成树思想）

妈妈下班回家，街坊邻居说小明被一群陌生人强行押上了警车！妈妈丰富的经验告诉她小明被带到了  $t$  区，而自己在  $s$  区。

该市有  $m$  条大道连接  $n$  个区，一条大道将两个区相连接，每个大道有一个拥挤度。小明的妈妈虽然很着急，但是不愿意拥挤的人潮冲乱了她优雅的步伐。所以请你帮她规划一条从  $s$  至  $t$  的路线，使得经过道路的拥挤度最大值最小。

- 对于 100% 的数据，保证  $1 \leq n \leq 10^4$ ,  $1 \leq m \leq 2 \times 10^4$ ,  $w \leq 10^4$ ,  $1 \leq s, t \leq n$ 。且从  $s$  出发一定能到达  $t$  区。

## Solution

将边从小到大排序, 然后克鲁斯卡尔最小生成树连边, 这样当 S 和 T 第一次联通时, 当前边的权值就是答案了.

## CF1245D Shichikuji and Power Grid (建图)

已知一个平面上有  $n$  个城市，需要个  $n$  个城市均通上电

一个城市有电，必须在这个城市有发电站或者和一个有电的城市用电缆相连

在一个城市建造发电站的代价是  $c[i]$

$i$  和  $j$  两个城市相连的代价是  $k[i] + k[j]$  乘上两者的曼哈顿距离

求最小代价的方案

## Solution

新建一个虚点，和其相连表示新建电厂，跑最小生成树。



## P8074 [COCI2009-2010#7] SVEMIR (去除冗边)

太空帝国要通过建造隧道来联通它的  $N$  个星球。

每个星球用三维坐标  $(x_i, y_i, z_i)$  来表示, 而在两个星球  $A, B$  之间建造隧道的价格为  $\min\{|x_A - x_B|, |y_A - y_B|, |z_A - z_B|\}$ 。

现要建造  $N - 1$  条隧道使得所有的星球都能直接或间接相连。求完成该任务所需的最小总价。

- 对于 100% 的数据,  $1 \leq N \leq 10^5$ ,  $-10^9 \leq x_i, y_i, z_i \leq 10^9$ 。

## Solution

最小生成树，但代价比较特殊。

不妨设两个点的距离由  $x$  决定，代价为  $|x_A - x_B|$ ,

我们发现在数轴上  $x_A$  和  $x_B$  必定是相邻的，否则不如把邻居加进来。

所以我们只需  $3n$  条边，只考虑  $x, y, z$  相邻权值连边，跑最小生成树即可。

## P8207 [THUPC2022 初赛] 最小公倍树（去除冗边）

对于任意  $V \subset \mathbb{N}^*$ ,  $|V| < +\infty$ , 构造一张无向完全图  $G = (V, E)$ , 其中  $(u, v)$  的边权为  $u, v$  的最小公倍数  $\text{lcm}(u, v)$ 。称  $G$  的最小生成树为  $V$  的最小公倍树 (LCT, Lowest Common Tree)。

现在给出  $L, R$ , 请你求出  $V = L, L + 1, \dots, R$  的最小公倍树  $LCT(V)$ 。

对于 100 的数据, 保证  $1 \leq L \leq R \leq 10^6$ , 且  $R - L \leq 10^5$ 。

## P5994 [PA2014] Kuglarz (思维题)

魔术师的桌子上有  $n$  个杯子排成一行，编号为  $1, 2, \dots, n$ ，其中某些杯子底下藏有一个小球，如果你准确地猜出是哪些杯子，你就可以获得奖品。

花费  $c_{ij}$  元，魔术师就会告诉你杯子  $i, i + 1, \dots, j$  底下藏有球的总数的奇偶性。

采取最优的询问策略，你至少需要花费多少元，才能保证猜出哪些杯子底下藏着球？

对于 100% 的数据， $1 \leq n \leq 2 \times 10^3$ ， $1 \leq c_{ij} \leq 10^9$ 。

## Solution

第一步要做前缀和  $S_i$ ，那么每次询问相当于求  $S_j - S_{i-1}$  的奇偶性，我们可以连一条边。

也就是求出  $S_j$  和  $S_{i-1}$  的奇偶关系。

假设我们得到了最终答案，相当于我们知道了所有  $S_i$  的奇偶性。而我们知道所有  $S_i$  的奇偶性后，我们可以通过  $S_i - S_{i-1}$  求出第  $i$  个位置的答案。

所以说原问题等价于求出所有  $S_i$  的奇偶性，因为我们知道  $S_0$  是偶数，所以就是求最小生成树！

## P1967 [NOIP2013 提高组] 货车运输（经典题）

A 国有  $n$  座城市，编号从 1 到  $n$ ，城市之间有  $m$  条双向道路。每一条道路对车辆都有重量限制，简称限重。

现在有  $q$  辆货车在运输货物，司机们想知道每辆车在不超过车辆限重的情况下，最多能运多重的货物。

对于 100% 的数据， $1 \leq n < 10^4$ ， $1 \leq m < 5 \times 10^4$ ， $1 \leq q < 3 \times 10^4$ ， $0 \leq z \leq 10^5$ 。

## Solution

最优情况下一定是走最大生成树，所以相当于询问最大生成树上两点之间的最小边权，我们用倍增维护即可。

## P4180 [BJWC2010] 严格次小生成树

小 C 最近学了很多最小生成树的算法，Prim 算法、Kruskal 算法、消圈算法等等。正当小 C 洋洋得意之时，小 P 又来泼小 C 冷水了。小 P 说，让小 C 求出一个无向图的次小生成树，而且这个次小生成树还得是严格次小的，也就是说：如果最小生成树选择的边集是  $E_M$ ，严格次小生成树选择的边集是  $E_S$ ，那么需要满足： $(value(e)$  表示边  $e$  的权值)  $\sum_{e \in E_M} value(e) < \sum_{e \in E_S} value(e)$ 。

这下小 C 蒙了，他找到了你，希望你帮他解决这个问题。

对于 100% 的数据， $N \leq 10^5$ ， $M \leq 3 \times 10^5$ ，边权  $\in [0, 10^9]$ ，数据保证必定存在严格次小生成树。



## Solution

次小生成树一定是将某个非树边代替换上的一条边形成的。

那么一定代替最大值或严格次大值，倍增记录即可。

## CF827D Best Edge Weight

给定一个点数为  $n$ ，边数为  $m$ ，权值不超过  $10^9$  的带权连通图，没有自环与重边。  
现在要求对于每一条边求出，这条边的边权最大为多少时，它还能出现在所有可能的最小生成树上，如果对于任意边权都出现，则输出  $-1$ 。  
( $2 \leq n \leq 2 \times 10^5, n - 1 \leq m \leq 2 \times 10^5$ )

# Solution

分别考虑树边和非树边

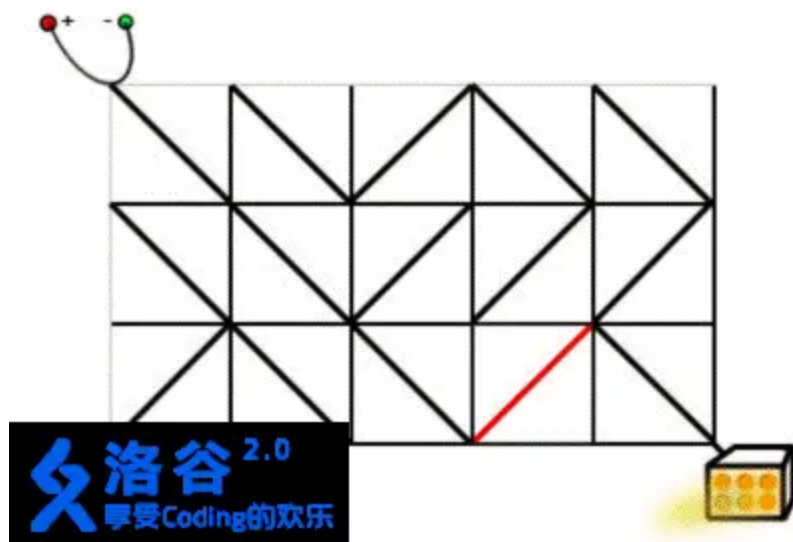
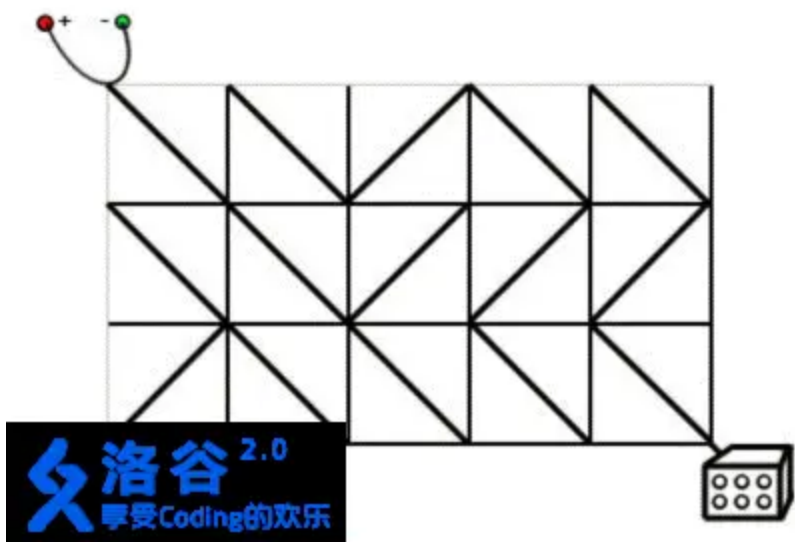
非树边：只需比环上最大的边小即可，倍增维护即可

树边：需要小于所有跨过这个树边的非树边中的最小值，倍增打 tag

# 最短路

## P4667 [BalticOI 2011 Day1] Switch the Lamp On (01 最短路)

Casper 正在设计电路。有一种正方形的电路元件，在它的两组相对顶点中，有一组会用导线连接起来，另一组则不会。有  $N \times M$  个这样的元件，你想将其排列成  $N$  行，每行  $M$  个。电源连接到板的左上角。灯连接到板的右下角。只有在电源和灯之间有一条电线连接的情况下，灯才会亮着。为了打开灯，任何数量的电路元件都可以转动  $90^\circ$ （两个方向）。



在上面的图片中，灯是关着的。如果右边的第二列的任何一个电路元件被旋转  $90^\circ$ ，电源和灯都会连接，灯被打开。现在请你编写一个程序，求出最小需要多少旋转多少电路元件。

对于所有数据， $1 \leq N, M \leq 500$ 。

**更优的复杂度：** $O(NM)$

# Solution

每个格子看作点。

如果当前电线是左上到右下：

左上到右下建边权为 0 的边。

右上到左下建边权为 1 的边表示需要改变。

反之亦然。

01 最短路，用队列维护。

# Extend

0,1,2,... k 最短路?

$$O(m + nk)$$



# P1462 通往奥格瑞玛的道路

在艾泽拉斯，有  $n$  个城市。编号为  $1, 2, 3, \dots, n$ 。

城市之间有  $m$  条双向的公路，连接着两个城市，从某个城市到另一个城市，会遭到联盟的攻击，进而损失一定的血量。

每次经过一个城市，都会被收取一定的过路费（包括起点和终点）。路上并没有收费站。

假设 1 为暴风城， $n$  为奥格瑞玛，而他的血量最多为  $b$ ，出发时他的血量是满的。如果他的血量降低至负数，则他就无法到达奥格瑞玛。

歪嘴哦不希望花很多钱，他想知道，在可以到达奥格瑞玛的情况下，他所经过的所有城市中最多的一次收取的费用的最小值是多少。

对于 100% 的数据，满足  $1 \leq c_i \leq 10^9$ ， $1 \leq f_i \leq 10^9$ ，可能有两条边连接着相同的城市。

# Solution

最大值最小？二分！

保留二分值以下的边，跑最短路，检查是否能活着到达  $n$  号点。