

题目选讲：动态规划 & 数论

清华大学 任舍予

2024 年 8 月 8 日

问题 (NOIP 2021 方差)

给定非严格递增的序列 $[a_1, \dots, a_n]$ 。每次可以进行的操作是：任意选择一个正整数 $1 < i < n$ ，将 a_i 变为 $a_{i-1} + a_{i+1} - a_i$ 。求在若干次操作之后，该数列的方差最小值。

数据范围： $1 \leq n \leq 10^4$ ， $1 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n \leq 600$ 。

问题 (NOIP 2023 天天爱打卡)

有 n 天，每天可以选择跑步或不跑，跑步会使能量 $-d$ 。连续跑步不能超过 k 天。

给定 m 个区间 $[l, r]$ ，每个区间有权值 w ，如果这个区间中的日子均选择跑步，则能量 $+w$ 。

求 n 天后能量的最大值。

数据范围： $1 \leq k \leq n \leq 10^9$ ， $1 \leq m \leq 10^5$ 。

问题 (CF1515E)

有 n 台电脑排成一行。每次可以手动开启一台。若某台电脑未开启且它两侧的电脑均开启，则它会自动开启。求开启所有电脑的方案数。两种方案不同当且仅当对应的手动开启电脑的序列不同。

数据范围： $3 \leq n \leq 400$ 。

问题 (CF1572C)

给定颜色序列 $[a_1, \dots, a_n]$ ，每次操作可以选定一个相等的同色段改为另一种颜色，求最少的操作次数使得整个序列颜色相同。

数据范围： $1 \leq n \leq 3000$ 。保证每种颜色初始时只有不超过 20 个。

问题

给定 m 组限制 (a, b) ，求满足以下条件的合法的 $1 \sim n$ 的出栈序列个数：

- 对于任意一组限制 (a, b) ， a 不能在 b 之后出栈。

数据范围： $3 \leq n \leq 300$ 。

问题

给定一棵带权无根树，点权为 $0/1/2$ 。求断掉若干条边后，点权和为 k 的连通块个数的最大值。

数据范围： $1 \leq n \leq 10^6$ 。

问题 (CF1801F)

给定 n, k 与序列 $[a_1, \dots, a_n]$, 求满足 $\prod_{i=1}^n b_i \geq k$ 的正整数序列 $[b_1, \dots, b_n]$ 的 $\prod_{i=1}^n \left\lfloor \frac{a_i}{b_i} \right\rfloor$ 的最大值。

数据范围: $1 \leq n \leq 100, 1 \leq k \leq 10^7, 1 \leq a_i \leq 10^7$ 。

问题 (CF1647F)

给定排列 $[p_1, \dots, p_n]$ ，将其恰好划分为两个单峰子序列，求两个单峰子序列的峰的组合的情况数。

数据范围： $2 \leq n \leq 5 \times 10^5$ 。

问题 (CF908E)

给定 m , 令 $M = 2^m - 1$ 。给定 $\{0, 1, \dots, M\}$ 的大小为 n 的子集 T , 定义集合 $T \subseteq S \subseteq \{0, 1, \dots, M\}$ 是好的当且仅当:

- $a \in S \implies a \text{ xor } M \in S$;
- $a, b \in S \implies a \text{ and } M \in S$ 。

求好的集合的个数。

数据范围: $1 \leq m \leq 1000, 1 \leq n \leq \min(2^m, 50)$ 。

问题 (CF1209E2)

给定 $n \times m$ 的矩阵，可以对每一列进行若干次循环移位，求操作完成后每一行的最大值之和的最大值。

数据范围： $1 \leq n \leq 12$, $1 \leq m \leq 2000$ 。

问题 (CF908G)

定义 $S(n)$ 为将 n 所有数位从小到大排序后得到的数，求 $\sum_{i=1}^n S(i)$ 。

数据范围： $1 \leq n \leq 10^{700}$ 。

问题 (洛谷 P8321)

给定序列 $[A_1, \dots, A_n], [B_1, \dots, B_n]$, 求

$$\sum_{p \in S_n} \prod_{i=1}^n \min(A_i, B_{p_i}).$$

数据范围: $1 \leq n \leq 5000$ 。

问题 (Min_25 筛)

求 $1 \sim n$ 的素数个数、素数和、素数平方和。

数据范围： $2 \leq n \leq 10^{12}$ 。

问题

给定长度为 n 的小写字母串 S ，求有多少个长度为 n 的小写字母串 T 满足 $\text{LCS}(S, T) \geq n - k$ 。

数据范围： $2 \leq n \leq 5 \times 10^4$ ， $0 \leq k \leq 3$ 。

问题 (联合省选 2022 最大权独立集问题)

给定一棵 n 个点的二叉树，每个点有点权 a_i 。每次操作时选择一条边 (u, v) ，交换 a_u, a_v ，然后删去 (u, v) ，代价为 $a_u + a_v$ 。求总代价的最小值。
数据范围： $2 \leq n \leq 5000$ 。

问题 (LOJ 4081)

定义 $\text{mex}(S)$ 表示集合 S 中未出现的最小自然数。

定义 $\text{ultra}(S) = \{a \mid a \text{ xor } m \in S\}$, 其中 $m = \text{mex}(S) - 1$, xor 表示按位异或。

设 $A_0 \subseteq \{0, 1, 2, \dots, 2^k - 1\}$ 且 $0 \in A_0$ 。对于 $i \geq 1$, 令 $A_i = \text{ultra}(A_{i-1})$ 。

若存在自然数 l , 使得对于任意 $i \geq l$, 都有 $\text{mex}(A_i) = \text{mex}(A_l)$, 则称 $\text{mex}(A_l)$ 为集合 A_0 的极限。

T 组询问, 给定 k, n, p , 求满足以下要求的集合 A_0 的个数:

1. $A_0 \subseteq \{0, 1, 2, \dots, 2^k - 1\}$ 且 $0 \in A_0$;
2. $|A_0| = n$;
3. A_0 的极限为 p 。

数据范围: $1 \leq T \leq 10^5$, $1 \leq k \leq 17$, $1 \leq n < 2^k$, $1 \leq p \leq 2^k$ 。

问题 (LOJ 4080)

给定 $1 \sim n$ 的排列 p , 求将 p 划分为 q, r 后, q 的前缀最大值个数与 r 的前缀最小值个数之和的最大值。

数据范围: $2 \leq n \leq 2 \times 10^5$ 。

问题 (NOIP 2017 提高组小凯的疑惑)

给定 a, b , 求最大的不能被 a, b 的非负整数倍之和表示的正整数。

数据范围: $1 \leq a, b \leq 10^9$ 。

问题

求 $n!$ 末尾 0 的个数与最后一位非 0 数字。

数据范围： $1 \leq n \leq 10^{18}$ 。

问题 (洛谷 P8338)

给定排列 $[p_1, \dots, p_n]$, 定义 $v(p)$ 为最小的正整数 k 使得 $p^k = 1$ 。定义 $f(i, j)$ 如下:

- 若存在 k 使得 $p^k \cdot i = j$, 则 $f(i, j) = 0$;
- 否则令 q 为交换 p_i, p_j 后得到的排列, $f(i, j) = v(q)$ 。

求 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(i, j)$ 。

数据范围: $1 \leq n \leq 5 \times 10^5$ 。

问题 (CF1656H)

给定大小为 n 的集合 A 与大小为 m 的集合 B , 构造 $S_A \subseteq A$ 与 $S_B \subseteq B$ 满足 $\text{lcm}(S_A) = \text{lcm}(S_B)$ 。

数据范围: $1 \leq n, m \leq 10^3$, $1 \leq a_i, b_i \leq 4 \times 10^{36}$ 。

问题 (CF1684G)

给定函数 $Euclid(a, b)$: 在计算 $\gcd(a, b)$ 时将过程中所有 $a \bmod b$ 的值插入一个可重集中。

给定 n, m 与一个大小为 n 的可重集, 要求构造若干对值域在 $[1, m]$ 内的 (a, b) , 使得分别执行 $Euclid(a, b)$ 后恰好得到给定的可重集。

数据范围: $1 \leq n \leq 10^3, 1 \leq m \leq 10^9$ 。