题目选讲: 动态规划 & 数论

清华大学 任舍予

2024年8月8日



数论问题选讲

问题 (CSP-S 2021 括号序列)

定义超级括号序列为所有合法括号序列中插入若干段长度不超过 k 的 * 所得到的序列。

给定 n,k 与由 (,),*,* 构成的字符串 S,求有多少种将 ? 替换为 (,),* 的方案,使得得到的序列是超级括号序列。

数据范围: $1 \le k \le n \le 500$ 。

动态规划真题选讲

0000

问题 (NOIP 2021 数列)

给定 n, m, k 与权值序列 v_0, v_1, \ldots, v_m 。

定义序列 $[a_1,\ldots,a_n]$ 合法当且仅当 $0 \le a_i \le m$ 且 $S = \sum_{i=1}^n 2^{a_i}$ 的二进制表示中 1 的个数不超过 k。

定义序列 $[a_1,\ldots,a_n]$ 的权值为 $\prod_{i=1}^n v_{a_i}$ 。

求所有合法序列的权值和。

数据范围: $1 \le k \le n \le 30$, $0 \le m \le 100$.



动态规划直题选讲

问题 (NOIP 2021 方差)

给定非严格递增的序列 $[a_1,\ldots,a_n]$ 。每次可以进行的操作是:任意选择一个正 整数 1 < i < n, 将 a_i 变为 $a_{i-1} + a_{i+1} - a_i$ 。求在若干次操作之后,该数列 的方差最小值。

数据范围: $1 < n < 10^4$, $1 < a_1 < \cdots < a_n < 600$ 。



动态规划真题选讲

0000

问题 (NOIP 2023 天天爱打卡)

有 n 天,每天可以选择跑步或不跑,跑步会使能量 -d。连续跑步不能超过 k天。

复杂动态规划模型

给定 m 个区间 [l,r], 每个区间有权值 w, 如果这个区间中的日子均选择跑步, 则能量 +w。

求 n 天后能量的最大值。

数据范围: $1 < k < n < 10^9$, $1 < m < 10^5$.



问题 (洛谷 P8564)

给定一棵 n 个点的有根树,根节点为 1。

给定权值序列 $[f_2,f_3,\ldots,f_n]$ 。一次删除操作为选择一个结点,然后删去其子树内除它以外的所有点,并产生 f_s 的代价,其中 s 为选择结点的当前子树大小。

求若干次删除操作后删去除 1 以外所有点的最小代价。

数据范围: $1 \le n \le 5000$ 。



问题 (CF1515E)

动态规划真题选讲

有 n 台电脑排成一排。每次可以手动开启一台。若某台电脑未开启且它两侧的 电脑均开启,则它会自动开启。求开启所有电脑的方案数。两种方案不同当且 仅当对应的手动开启电脑的序列不同。

数据范围: 3 < n < 400。

问题 (CF1572C)

给定颜色序列 $[a_1,\ldots,a_n]$,每次操作可以选定一个相等的同色段改为另一种颜色,求最少的操作次数使得整个序列颜色相同。

数据范围: $1 \le n \le 3000$ 。保证每种颜色初始时只有不超过 20 个。



问题

动态规划真题选讲

给定 m 组限制 (a,b),求满足以下条件的合法的 $1 \sim n$ 的出栈序列个数:

■ 对于任意一组限制 (a, b), a 不能在 b 之后出栈。

数据范围: $3 \le n \le 300$ 。



问题

动态规划真题选讲

给定一棵带权无根树,点权为 0/1/2。求断掉若干条边后,点权和为 k 的连通 块个数的最大值。

数据范围: $1 < n < 10^6$ 。



问题 (CF1801F)

动态规划真题选讲

给定 n, k 与序列 $[a_1, \ldots, a_n]$,求满足 $\prod_{i=1}^n b_i \geq k$ 的正整数序列 $[b_1, \ldots, b_n]$ 的 $\prod_{i=1}^n \left| \frac{a_i}{b_i} \right|$ 的最大值。

数据范围: $1 \le n \le 100$, $1 \le k \le 10^7$, $1 \le a_i \le 10^7$ 。



问题 (CF1647F)

给定排列 $[p_1,\ldots,p_n]$,将其恰好划分为两个单峰子序列,求两个单峰子序列的峰的组合的情况数。

数据范围: $2 \le n \le 5 \times 10^5$.



问题 (CF908E)

动态规划直题洗讲

给定 m, 令 $M=2^m-1$ 。给定 $\{0,1,\ldots,M\}$ 的大小为 n 的子集 T,定义集 合 $T \subset S \subset \{0,1,\ldots,M\}$ 是好的当且仅当:

复杂动态规划模型

- $a \in S \implies a \operatorname{xor} M \in S$:
- $a, b \in S \implies a \text{ and } M \in S_{\circ}$

求好的集合的个数。

数据范围: 1 < m < 1000, $1 < n < \min(2^m, 50)$ 。



问题 (CF1209E2)

给定 $n \times m$ 的矩阵,可以对每一列进行若干次循环移位,求操作完成后每一 行的最大值之和的最大值。

数据范围: $1 \le n \le 12$, $1 \le m \le 2000$ 。



问题 (CF908G)

定义 S(n) 为将 n 所有数位从小到大排序后得到的数,求 $\sum_{i=1}^{n} S(i)$ 。

数据范围: $1 < n < 10^{700}$ 。



问题 (洛谷 P8321)

给定序列 $[A_1, \ldots, A_n], [B_1, \ldots, B_n]$, 求

$$\sum_{p \in S_n} \prod_{i=1}^n \min(A_i, B_{p_i}).$$

复杂动态规划模型

数据范围: $1 \le n \le 5000$ 。

问题 (CF1415F)

动态规划直题选讲

数轴上有一个人,每个时刻可以让自己的位置 ± 1 或不动。

当他位于整点上时,他可以放置一个无法移动的分身,同时摧毁已经存在的分 身(如果存在),放置分身不消耗时间。

有 n 个任务,第 i 个任务要求他或者他的分身 t_i 时刻在 x_i 处。判断是否存在 完成所有任务的方案。

数据范围: 1 < n < 5000。



复杂动态规划模型

00000

问题 (Min_25 筛)

求 $1 \sim n$ 的素数个数、素数和、素数平方和。

数据范围: $2 < n < 10^{12}$ 。

问题

动态规划真题选讲

给定长度为 n 的小写字母串 S, 求有多少个长度为 n 的小写字母串 T 满足 $LCS(S,T) \ge n - k$.

复杂动态规划模型

00000

数据范围: $2 < n < 5 \times 10^4$, 0 < k < 3。

问题 (联合省选 2022 最大权独立集问题)

给定一棵 n 个点的二叉树,每个点有点权 a_i 。每次操作时选择一条边 (u,v),

交换 a_u, a_v ,然后删去 (u, v),代价为 $a_u + a_v$ 。求总代价的最小值。

数据范围: 2 < n < 5000。

动态规划直题选讲

定义 mex(S) 表示集合 S 中未出现的最小自然数。

定义 $ultra(S) = \{a \mid a \text{ xor } m \in S\}$, 其中 m = mex(S) - 1, xor 表示按位异 或。

设 $A_0 \subseteq \{0, 1, 2, \dots, 2^k - 1\}$ 且 $0 \in A_0$ 。对于 $i \ge 1$,令 $A_i = \text{ultra}(A_{i-1})$ 。 若存在自然数 l, 使得对于任意 $i \ge l$, 都有 $\max(A_i) = \max(A_l)$, 则称 $mex(A_l)$ 为集合 A_0 的极限。

T 组询问,给定 k, n, p,求满足以下要求的集合 A_0 的个数:

- **1.** $A_0 \subseteq \{0, 1, 2, \dots, 2^k 1\} \not\exists 0 \in A_0$;
- **2.** $|A_0| = n$;
- 3. A_0 的极限为 p_0

数据范围: $1 < T < 10^5$, 1 < k < 17, $1 < n < 2^k$, 1 .



问题 (LOJ 4080)

给定 $1 \sim n$ 的排列 p, 求将 p 划分为 q, r 后, q 的前缀最大值个数与 r 的前缀 最小值个数之和的最大值。

复杂动态规划模型

00000

数据范围: $2 \le n \le 2 \times 10^5$.

问题 (NOIP 2017 提高组小凯的疑惑)

给定 a,b,求最大的不能被 a,b 的非负整数倍之和表示的正整数。

数据范围: $1 < a, b < 10^9$ 。

问题 (NOI 2018 屠龙勇士)

有 n 条龙,每条龙的初始生命为 a_i ,使用恢复能力时每次恢复 p_i 。初始有 m 柄剑。玩家选定一个攻击次数 x。

玩家按照 $1 \sim n$ 的顺序分别屠龙:

- 每次会选择当前拥有的,攻击力不高于巨龙初始生命值中攻击力最大的一把剑作为武器。如果没有这样的剑,则选择攻击力最低的一把剑作为武器。玩家将使用这柄剑攻击 x 次。
- 攻击后,巨龙会不断使用恢复能力。若恢复过程中生命值为 0,巨龙死亡。 否则游戏失败。
- 攻击结束后,这柄剑消失,玩家获得一柄新的剑。

求最小的 x, 使得能够屠掉所有巨龙。

数据范围: $1 \le n, m \le 10^5$, $lcm\{p_i\} \le 10^{12}$, $a_i \le p_i$.



动态规划直题洗讲

问题

动态规划真题选讲

求 n! 末尾 0 的个数与最后一位非 0 数字。

数据范围: $1 \le n \le 10^{18}$ 。

问题 (CF623B)

动态规划直题洗讲

给定序列 $[a_1,\ldots,a_n]$, 有两种操作:

- 删除一个长度为 m 的区间,代价为 $m \times b$,总共只能操作一次。
- 对于每一个元素,可以将其 +1 或 -1,代价为 c,每个元素只能操作一次。

复杂动态规划模型

求让剩下的数的 gcd > 1 的最小花费。

数据范围: $1 \le n \le 10^6$, $2 \le a_i \le 10^9$.



问题 (洛谷 P8338)

给定排列 $[p_1,\ldots,p_n]$,定义 v(p) 为最小的正整数 k 使得 $p^k=1$ 。定义 f(i,j) 如下:

复杂动态规划模型

- 若存在 k 使得 $p^k \cdot i = j$,则 f(i, j) = 0;
- 否则令 q 为交换 p_i, p_j 后得到的排列, f(i,j) = v(q)。

求
$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(i,j)$$
。

数据范围: $1 \le n \le 5 \times 10^5$ 。

动态规划直题洗讲

问题 (LOJ 563)

动态规划直题洗讲

给定 2m-2 个点的二分图 G(m), 左侧第 个点和右侧第 j 个点有连边当且 仅当 i=j 或 $ij\equiv 1\pmod m$ 。

复杂动态规划模型

设 f(m) 表示 G(m) 的本质不同的最大匹配的个数,求 $f(1) \sim f(n)$ 。

数据范围: $1 \le n \le 10^7$ 。

问题 (CF1656H)

给定大小为 n 的集合 A 与大小为 m 的集合 B,构造 $S_A \subseteq A$ 与 $S_B \subseteq B$ 满足 $\operatorname{lcm}(S_A) = \operatorname{lcm}(S_B)$ 。

复杂动态规划模型

数据范围: $1 \le n, m \le 10^3$, $1 \le a_i, b_i \le 4 \times 10^{36}$ 。



问题 (CF1684G)

动态规划直题洗讲

给定函数 Euclid(a, b): 在计算 gcd(a, b) 时将过程中所有 $a \mod b$ 的值插入 一个可重集中。

给定 n, m 与一个大小为 n 的可重集,要求构造若干对值域在 [1, m] 内的 (a,b), 使得分别执行 Euclid(a,b) 后恰好得到给定的可重集。

数据范围: $1 < n < 10^3$, $1 < m < 10^9$ 。

