

MÈTODES NUMÈRICS

Equacions Diferencials

Mètodes d'Euler i de Runge-Kutta

GENÍS LÁINEZ MORENO 1420606
ORIOL TEIXIDÓ GARCIA 1426827

Índex

1	Introducció	2
2	Mètode numèric i implementació	3
2.1	Mètode d'Euler	3
2.2	Mètode de Runge-Kutta	3
2.3	Implementació	4
3	Resultats i discussió	6
3.1	Mètode d'Euler	6
3.2	Mètode de Runge-Kutta	8
3.3	Comparació	12
4	Conclusions	15

1 Introducció

Històricament, des del desenvolupament del càlcul diferencial desenvolupat per Newton i Leibnitz, hem necessitat d'equacions diferencials per a resoldre molts dels problemes físics. Les equacions diferencials i els sistemes d'aquestes poden ser molt complexes de solucionar analíticament i, fins i tot, impossible en alguns casos. No obstant, les eines que ens proporciona el càlcul numèric són sovint prou bones com per obtenir resultats aproximats satisfactoris.

Un exemple d'aquest problema és trobar solucions de les equacions de Lorenz-Haken (o simplement sistema de Lorenz*), que apareixen freqüentment en dinàmica de fluids i teoria làser †

$$\dot{x} = \sigma(y - x) \quad (1)$$

$$\dot{y} = x(r - z) - y \quad (2)$$

$$\dot{z} = xy - bz \quad (3)$$

El sistema d'equacions anteriors conté dos termes no lineals: un és el terme $-xz$ i l'altre el terme xy . Aquest fet provoca que les equacions presentin una dinàmica molt complexa i en alguns casos caòtica. D'ara en davant serà el nostre objectiu en aquesta pràctica trobar diferents solucions de les equacions citades i interpretar-les.

En concret estudiarem per separat els tres casos següents que es poden donar en funció de la relació entre els paràmetres fixats r , σ i b i estableiran un criteri i una previsualització dels resultats que volem obtenir‡:

♦ Per a $0 \leq r \leq 1$, la única solució estacionària serà $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Ja que a $x = 0$, no hi ha emissió làser en aquest cas. Independentment de les condicions inicials la trajectòria convergeix a la solució estacionària.

♦ Per a $1 < r \leq \sigma(\sigma + b + 3)/(\sigma - b - 1)$ existeix la solució $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ però no és estacionària. Ara apareixen dues noves solucions estables als punts:

$$C_{\pm} = \left(\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1 \right) \quad (4)$$

En aquest cas, hi ha emissió làser doncs $x \neq 0$.

♦ Per a $r > \sigma(\sigma + b + 3)/(\sigma - b - 1)$ els punts estacionaris C_{\pm} ja no són estables sinó que a pareixen solucions "estranyes" que romanen al voltant d'aquests canviant aleatoriament entre els centres C_+ i C_- . A l'espai de fases on roman la trajectòria l'anomenarem atractor de Lorenz. Per al cas esmentat també sabem que pels paràmetres fixats $\sigma = 10$, $b = 8/3$ i $r = 100.5, 161, 250, 350$ apareixen finestres de periodicitat on el comportament deixa de ser caòtic i la trajectòria convergeix a una òrbita periòdica.

*Edward Norton Lorenz, (1917-2008) matemàtic i meteoròleg americà pioner en *chaos theory*

†Per a dotar de sentit físic els resultats que obtindrem numèricament ens referirem, en els apartats posteriors, al problema concret de teoria làser, on els paràmetres σ , r i b corresponen a les pèrdues de la cavitat làser, al bombeig i a la relaxació de l'energia en el medi actiu del làser respectivament.

‡Per a entendre millor els següents casos, ja que no és el nostre objecte d'estudi la demostració d'aquests, convé deduir-los de manera empírica i intuitiva amb els casos i gràfiques que s'exposen al llarg de la pràctica.

2 Mètode numèric i implementació

2.1 Mètode d'Euler

Una manera de resoltre el sistema d'equacions diferencials que hem citat, és utilitzant el mètode d'Euler [§].

Aquest mètode consisteix en utilitzar la definició de recta tangent a un punt reiteradament simulant de manera discretitzada la solució contínua. És a dir, coneixent un punt inicial $y(t_0) \equiv y_0$ i la funció $\dot{y} = f(t, y)$, podem fer l'aproximació a partir de

$$y_1 \equiv y(t_0 + dt) = y_0 + f(t_0, y(t_0))(t_0 - t_0 + dt) \quad , \quad (5)$$

fent el canvi $dt \approx \Delta t \equiv h$,

$$y_1 \approx y_0 + f(t_0, y(t_0))h \quad . \quad (6)$$

És evident que aquest procés el podem repetir un nombre natural arbitrari, N, de vegades, utilitzant el mateix procés d'aproximacions. Per això podem escriure, ara, una nova expressió més general:

$$y_{n+1} \approx y_n + f(t_n, y(t_n))h \quad \text{on } t_n = t_0 + nh \quad . \quad (7)$$

D'aquesta manera tindrem un conjunt N+1 de punts de la funció y(t) que esdevindran la nostra solució que podrem representar i estudiar.

En el nostre cas, necessitarem d'una expressió lleugerament diferent ja que tenim 3 funcions lligades. No obstant, també tenim l'avantatge de que no depenen del temps explícitament. Ara, en coordenades $\{x_1, x_2, x_3\} \equiv \{x, y, z\}$ escrivim la nostra expressió final pel mètode d'Euler com:

$$\boxed{x_{i,n+1} \approx x_{i,n} + f_i(x_{1,n}, x_{2,n}, x_{3,n})h} \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad . \quad (8)$$

Les condicions inicials $x_{i,0}$ les imposarem a conveniència. Una diferent elecció d'aquestes podrà variar molt el resultat (com veurem en els posteriors apartats). És necessari, a més, tenir en compte que aquest mètode acumula error quan l'apliquem iteradament i pot arribar a ser significatiu, fet del que també en serem testimonis quan estudiem els resultats més endavant.

2.2 Mètode de Runge-Kutta

El mètode de Runge-Kutta ^{¶||} és un conjunt de mètodes genèrics iteratius que inclouen el mètode d'Euler per a resoldre, també, equacions diferencials. Si partim de l'equació pel mètode d'Euler

$$y_{n+1} \approx y_n + f(t_n, y(t_n)) \cdot h \equiv y_n + k_{1,n} \cdot h \quad , \quad (9)$$

i tenint en compte que l'error que fem és de $O[h^2]$, podem deduir que seria una expressió més ajustada, considerant un desenvolupament per Taylor:

$$y_{n+1} \approx y_n + f(t_n, y(t_n)) \cdot h + f'(t_n, y(t_n)) \cdot \frac{h^2}{2} \quad . \quad (10)$$

No obstant, ens falta conèixer l'expressió de $f'(t_n, y(t_n))$. Aquesta la traurem aillant-la de la següent:

[§]Leonhard Euler (1707-1783) matemàtic i físic suís, considerat un dels més grans matemàtics de la història

[¶]Carl David Tolmè Runge (1856, 1927) matemàtic, físic i espectroscopista alemany

^{||}Martin Wilhelm Kutta (1867, 1944) físic i matemàtic alemany

$$f(t + \frac{h}{2}, y(t + \frac{h}{2})) \approx f(t, y(t)) + \frac{h}{2} f'(t_n, y(t_n)) \quad (11)$$

$$f'(t_n, y(t_n)) \approx \frac{2}{h} \left[f(t_n + \frac{h}{2}, y(t_n + \frac{h}{2})) - f(t_n, y(t_n)) \right] \quad (12)$$

$$f'(t_n, y(t_n)) \approx \frac{2}{h} \left[f(t_n + \frac{h}{2}, y(t_n) + \frac{h}{2} \cdot k_1) - f(t_n, y(t_n)) \right] \quad (13)$$

Ara, doncs, podem escriure:

$$y_{n+1} \approx y_n + f(t_n, y(t_n)) \cdot h + \left[f(t_n + \frac{h}{2}, y(t_n) + \frac{h}{2} \cdot k_{1,n}) - f(t_n, y(t_n)) \right] \cdot h \quad . \quad (14)$$

Que simplificat resulta:

$$y_{n+1} \approx y_n + \left[f(t_n + \frac{h}{2}, y(t_n) + \frac{h}{2} \cdot k_{1,n}) \right] \cdot h \equiv y_n + k_{2,n} \cdot h \quad . \quad (15)$$

Reiterant el procés anterior, podem arribar a l'expressió

$$y_{n+1} \approx y_n + \frac{h}{6} [k_{1,n} + 2k_{2,n} + 2k_{3,n} + k_{4,n}] \quad (16)$$

on,

$$k_3 \equiv f(t_n + \frac{h}{2}, y(t_n) + \frac{h}{2} \cdot k_{2,n}) \quad \text{i} \quad k_{4,n} \equiv f(t_n + h, y(t_n) + h \cdot k_{3,n}) \quad . \quad (17)$$

Observem que per a cada k_i fa falta coneixer k_{i-1} això implica que requerirà de mètodes iteratius i costosos que resoldrem de manera computacional com explicarem a l'apartat *implementació*.

Com en l'apartat anterior, requerim d'una nova expressió ja que en el problema presentat tenim un sistema d'equacions i no una de sola i, a més, no depenen explícitament del temps. Per això escrivim una forma més general:

$$x_{i,n+1} \approx x_{i,n} + \frac{h}{6} [k_{i,1,n} + 2k_{i,2,n} + 2k_{i,3,n} + k_{i,4,n}] \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (18)$$

on ara $k_{i,j,n} = f_i(x_{1,n} + a_j, x_{2,n} + a_j, x_{3,n} + a_j)$ i a_j varia segons el subíndex j tal i com ho fa en les expresions (17), (15) i (9).

2.3 Implementació

Les diferents eines que ens proporciona el programa C ++ per fer sumatoris, nombroses iteracions i operacions matemàtiques, entre altres, ens seran de gran ajuda per a tractar i dur a terme els mètodes mencionats i trobar, per tant, solucions satisfactòries al sistema de Lorenz plantejat.**

Mètode d'Euler

Tal com hem explicat, el mètode d'Euler és un mètode iteratiu pel qual cada punt el determinem a partir de l'anterior i la funció derivada evaluada, també, en el punt anterior. Per tant necessitarem de repetir un nombre N de vegades una mateixa operació. Per a tal procés podem fer servir la funció **for** del llenguatge esmentat.

**Per tal de visualitzar la declaració de variables i el programa complet, recomanem veure'l's al fitxer adjunt

```
//MÈTODE D'EÜLER
if(o==1){

    for (i=2; i<N+1; i++){
        x[i]=x[i-1]+x1(x[i-1], y[i-1])*h;
        y[i]=y[i-1]+y1(x[i-1], y[i-1], z[i-1])*h;
        z[i]=z[i-1]+z1(x[i-1], y[i-1], z[i-1])*h; }

    for (j=1; j<N+1; j=j+15){
        cout<<x[j]<<"    "<<y[j]<<"    "<<z[j]<<endl;
        Yep<<x[j]<<"    "<<y[j]<<"    "<<z[j]<<endl; }

}
```

Figura 1: Codi implementat al programa compilador de $C++$, Dev $C++$, per a resoldre el sistema d'equacions diferencials pel mètode d'Euler

Mètode de Runge-Kutta

Pel mètode de Runge-Kutta utilitzem una propedèutica similar que ens porta a definir, també dins la funció **for**, les diferents $K_{i,j,n}$ per tal d'utilitzar l'última expressió (18).

```
for (i=2; i<N+1; i++){

    K1x=x1(x[i-1], y[i-1]);
    K1y=y1(x[i-1], y[i-1], z[i-1]);
    K1z=z1(x[i-1], y[i-1], z[i-1]);

    K2x=x1(x[i-1]+h/2*K1x, y[i-1]+h/2*K1y);
    K2y=y1(x[i-1]+h/2*K1x, y[i-1]+h/2*K1y, z[i-1]+h/2*K1z);
    K2z=z1(x[i-1]+h/2*K1x, y[i-1]+h/2*K1y, z[i-1]+h/2*K1z);

    K3x=x1(x[i-1]+h/2*K2x, y[i-1]+h/2*K2y);
    K3y=y1(x[i-1]+h/2*K2x, y[i-1]+h/2*K2y, z[i-1]+h/2*K2z);
    K3z=z1(x[i-1]+h/2*K2x, y[i-1]+h/2*K2y, z[i-1]+h/2*K2z);

    K4x=x1(x[i-1]+h*K3x, y[i-1]+h*K3y);
    K4y=y1(x[i-1]+h*K3x, y[i-1]+h*K3y, z[i-1]+h*K3z);
    K4z=z1(x[i-1]+h*K3x, y[i-1]+h*K3y, z[i-1]+h*K3z);

    mx=(K1x+2*(K2x+K3x)+K4x)*h/6;
    my=(K1y+2*(K2y+K3y)+K4y)*h/6;
    mz=(K1z+2*(K2z+K3z)+K4z)*h/6;

    x[i]=x[i-1]+mx;
    y[i]=y[i-1]+my;
    z[i]=z[i-1]+mz; }
```

Figura 2: Codi implementat al programa compilador de $C++$, Dev $C++$, per a resoldre el sistema d'equacions diferencials pel mètode de Runge-Kutta

3 Resultats i discusió

3.1 Mètode d'Euler

Sabíem d'entrada que les solucions a les equacions diferencials depenien dels paràmetres σ , r i b . Així doncs, hem provat de resoldre les equacions amb tots els casos de la relació d'aquests paràmetres explicada en la introducció. Mantindrem fix el valor de σ i b equivalents a 10 i $8/3$ respectivament^{††}. El valor de r serà canviat en cada realització de l'experiència, ja que és d'aquest paràmetre de qui en volem estudiar la dependència amb el resultat final.

El terme $\sigma(\sigma + b + 3)/(\sigma - b - 1)$, amb els corresponents valors de σ i b fixats, té un valor de 24,74. Per tant, les diferents r de les nostres solucions seran:

$r = 0.9$ (entre 0 i 1)

$r = 10$ (entre 1 i 24,74)

$r = 28$ (més gran de 24,74)

$r = 100.5$ per trobar una solució amb finestres de periodicitat.

També s'ha de dir que totes les coordenades inicials de les experiències d'aquest apartat són les corresponents a (1,1,1).

Un cop explicada la classificació de la recollida de dades, cal explicar la manera de representar-les. En color gris, s'han pintat els punts inicials de les trajectòries. Mentres que en color roig o blau, s'han pintat els punts finals on la trajectòria és més regular.

Pel cas de $r=0.9$, tenim la següent gràfica

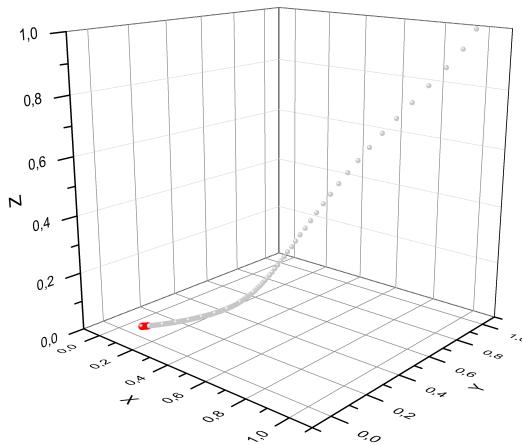


Figura 3

Veiem que la trajectòria comença al punt inicial (1, 1, 1), diferent del (0, 0, 0), i va a parar directament a un punt (0.06566, 0.06505, 0.00236), per convergir-hi.

^{††}Totes els valors amb unes unitats arbitràries corresponents. Al llarg d'aquesta pràctica evitarem posar unitats i magnituds, d'aquesta manera podem interpretar els resultats en diferents escales i extrapolar-los facilment per a altres sentits físics

No és un punt estacionari ja que el punt inicial és diferent del $(0,0,0)$ ja que sabíem que només en aquest punt (quan no hi ha emisió laser) és quan trobaríem l'única trajectòria estacionària.

Tot i així, la trajectòria per aquest punt no és caòtica i segueix un recorregut fàcilment distingible.

Pel cas de $r = 10$, sabem que el punt on la trajectòria seria estacionaria és diferent del $(1,1,1)$. Per tant, no hauria de ser una trajectòria estacionària.

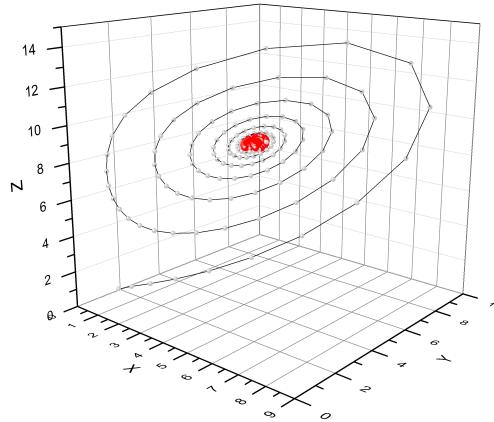


Figura 4

La trajectòria no és caòtica per aquest valor de r . A més, queda una trajectòria ben definida en forma d'espiral que convergeix en el punt $(4.24176, 4.24446, 8.99291)$.

Pel cas de $r=28$, tenim la gràfica següent:

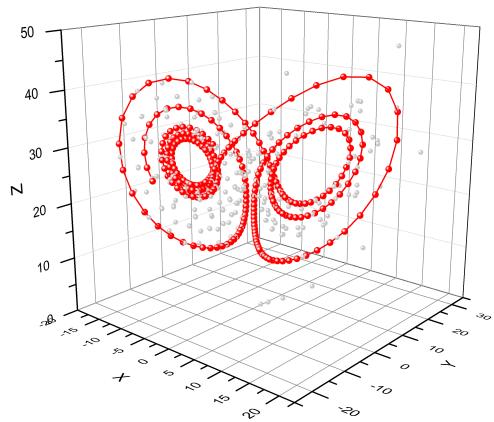


Figura 5

Apareixen solucions "extranyes" que romanen al voltant dels punts C_{\pm} . Després de donar un nombre

aleatori de voltes al voltant de C_+ la trajectòria canvia i comença a girar al voltant de C_- i viceversa.

Finalment pel cas $r = 100.5$, tenim la gràfica,

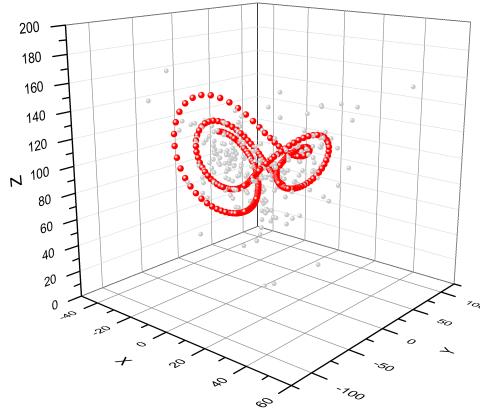


Figura 6

Veiem com comença d'una manera caòtica i acaba agafant una trajectòria regular en el lloc on els punts semblen estar molt més propers entre ells. L'efecte de observar els punts molt junts es deu a què la trajectòria passa regularment pel mateix lloc. Per tant, en aquest tram tenim una trajectòria periòdica.

3.2 Mètode de Runge-Kutta

Pel mètode de Runge-Kutta hem fet les gràfiques amb els mateixos valors. Així doncs, la discussió del seu comportament serà la mateixa que quan les hem analitzat en la part del mètode d'Euler i ens permetrà fer una valoració qualitativa dels dos mètodes.

Pel cas $r = 0.9$

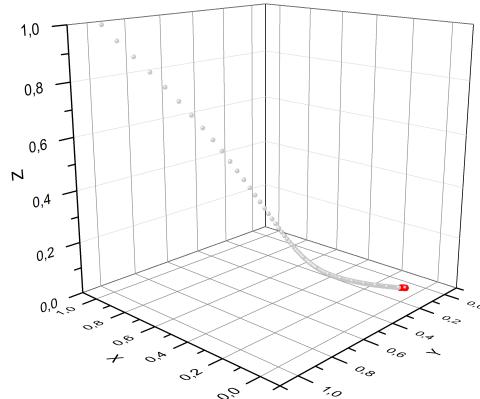


Figura 7

Passa el mateix que en el mètode d'Euler. La trajectòria avança fins convergir en un punt. Aquest és ara el $(0.0657, 0.06508, 0.00236)$.

Pel cas $r = 10$

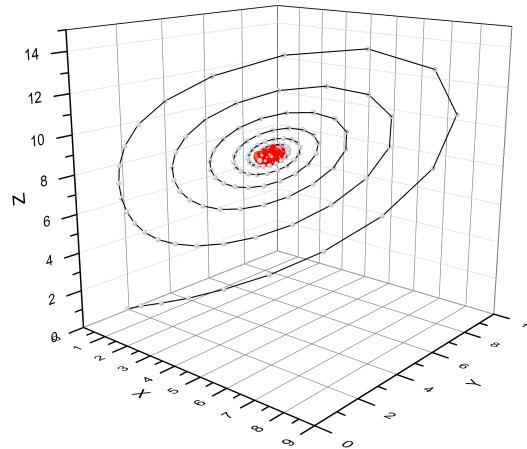


Figura 8

La trajectòria no és caòtica per aquest valor de r . A més, queda una trajectòria ben definida en forma d'espiral que convergeix ara en el punt $(4.24273, 4.24437, 8.99613)$.

Pel cas $r = 28$

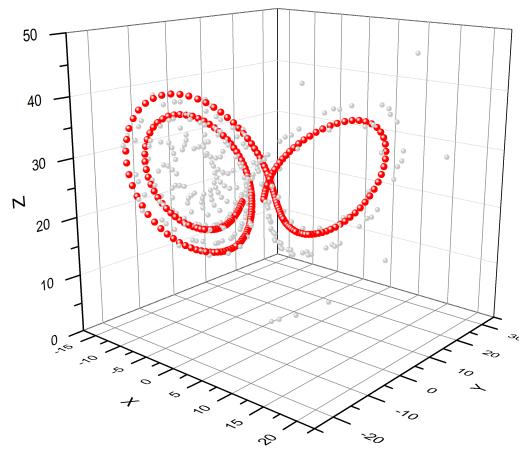


Figura 9

Novament, la trajectòria es comporta de la manera en què després de donar un nombre aleatori de voltes al voltant de C_+ la trajectòria canvia i comença a girar al voltant de C_- i viceversa.

Finalment pel cas $r = 100,5$

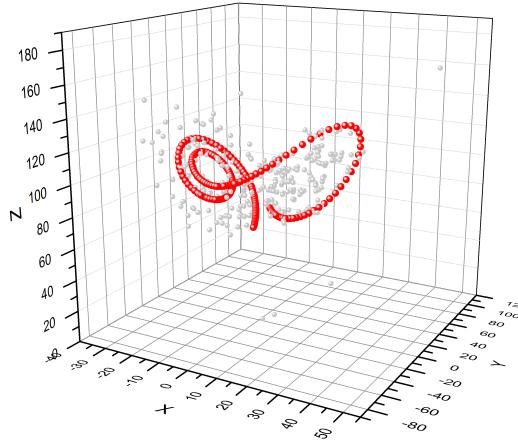


Figura 10

Es pot veure com comença d'una manera caòtica ja que ajuntar els punts grisos amb una línia, dona una trajectòria sense sentit. Finalment, acaba agafant una trajectòria regular en el lloc on els punts són rojos tal i com ens esperàvem.

Variació de la trajectòria segons petites variacions de les condicions inicials (x_0, y_0, z_0)

Hem vist, tant empíricament com en l'apartat de *Mètode numèric i implementació* que el mètode de Runge-Kutta ens dona un millor resultat (més pròxim al real). Per aquest motiu utilitzarem aquest mateix mètode per a fer, aquest cop, un estudi de com varien les trajectòries (x, y, z) amb condicions inicials properes.

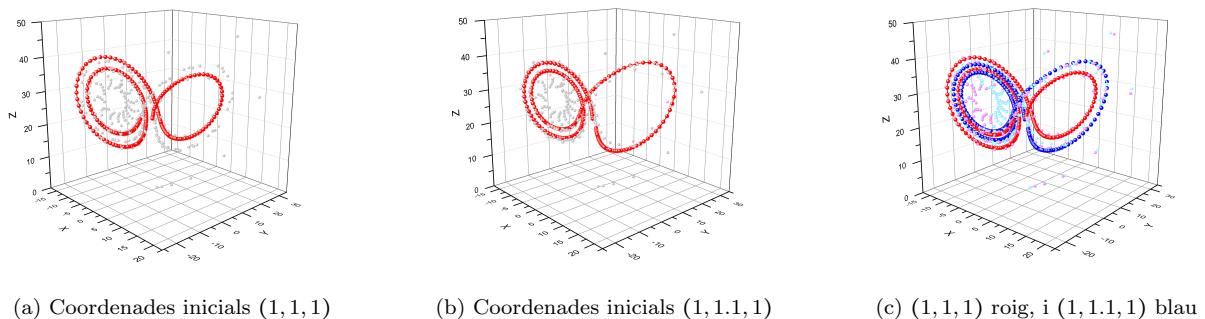


Figura 11: Gràfiques mantenint r , σ i b fixades en 28, $8/3$ i 10 respectivament, amb coordenades (x_0, y_0, z_0) i $(x_0, y_0 + 0.1, z_0)$

En les darreres gràfiques podem veure una notable diferència en el resultat variant poc les coordenades inicials. No obstant, els punts C_{\pm} d'ambdós casos són els mateixos i això fa que tot i que augmentar la diferència entre les coordenades amb el temps, obtenim solucions semblants pel que fa a la forma i els intervals que abasta.

Un altre possible estudi pot ser estudiar aquestes variacions de trajectòria, aquest cop per a punts propers als estacionaris C_{\pm} .

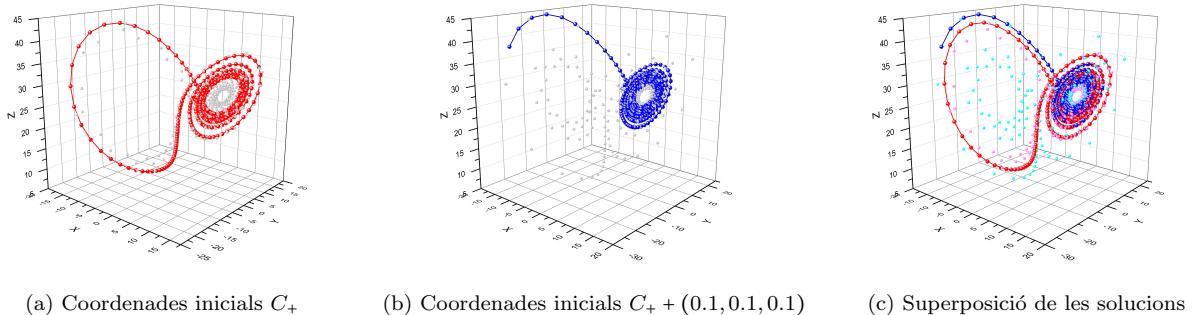


Figura 12: Gràfiques mantenint r , σ i b fixades en 28, $8/3$ i 10 respectivament, amb coordenades inicials $C_+ \approx (8.485, 8.485, 27)$ i $(8.585, 8.585, 27.1)$

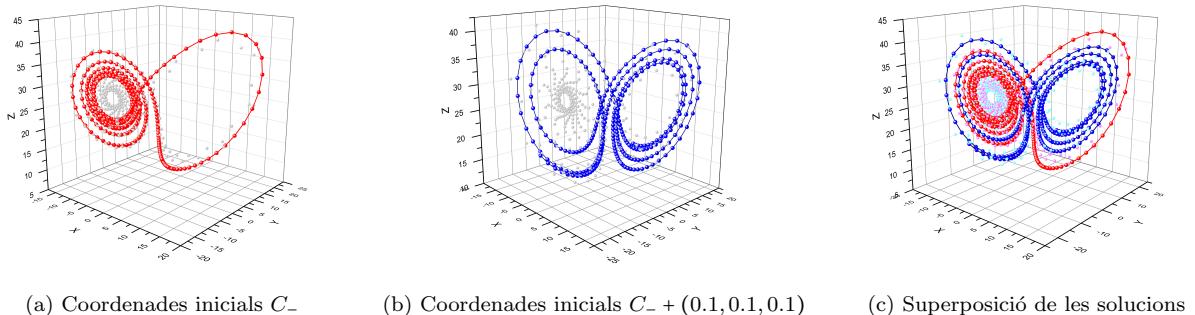


Figura 13: Gràfiques mantenint r , σ i b fixades en 28, $8/3$ i 10 respectivament, amb coordenades inicials $C_- \approx (-8.485, -8.485, 27)$ i $(-8.385, -8.385, 27.1)$

En les darreres figures 12 i 13, es fa notable altra vegada que tot i tenir unes condicions inicials diferents, les solucions obtenim són semblants si tenen els mateixos punts estacionaris C_{\pm} . Les diferències que observem són degudes al temps de diferència entre les trajectòries i no pas en la diferència entre aquestes directament, doncs és molt petita.

3.3 Comparació

Tal com hem enunciat diverses vegades al llarg de la pràctica, el mètode de Runge-Kutta és més precís que el d'Euler, ja que el primer utilitza el segon i altres tècniques iterades que en permet reduir l'error. És necessari doncs, comparar ambdós mètodes per veure com de notable es fa la diferència entre les trajectòries, estudiar la validesa i concloure quin mètode és més pràctic (relació entre resultats i temps emprat) numèricament.

En aquesta part compararem les trajectòries de les solucions pels dos mètodes. Es compararà la part en que es mantenien els valors de σ i b constants i es variava el valor de r . La posició inicial torna a ser la del punt $(1, 1, 1)$.

Per diferenciar els dos mètodes en una mateixa gràfica, cal aclarir el mecanisme per la representació de dades i, posteriorment, es podrà començar la comparació.

Mitjançant tonalitats de roig, s'ha dibuixat la trajectòria de les solucions pel mètode d'Euler. Concretament, en color roig s'han pintat els punts finals de la trajectòria i amb magenta els punts inicials. Amb tonalitats de blau, s'han pintat les trajectòries de les solucions pel mètode de Runge-Kutta. Concretament, amb blau fort s'han dibuixat els punts finals mentre que amb cian s'han pintat els punts inicials.

Pel valor $r = 0.9$, tenim la gràfica que compara les dos solucions:

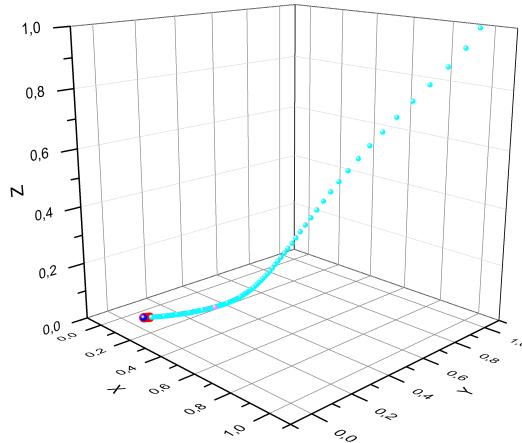


Figura 14

Sembla que les dos passen exactament pels mateixos punts. En aquest cas, no ha importat molt la millor eficàcia d'un mètode sobre l'altre.

El punt on convergeix la gràfica per Euler és el $(0.06566, 0.06505, 0.00236)$ i per Runge-Kutta convergeix en $(0.0657, 0.06508, 0.00236)$. És substancialment el mateix.

Per tant, per un valor de r entre 0 i 1, no influeix molt el mètode emprat per a calcular les solucions.

Pel valor $r = 10$, tenim la següent gràfica:

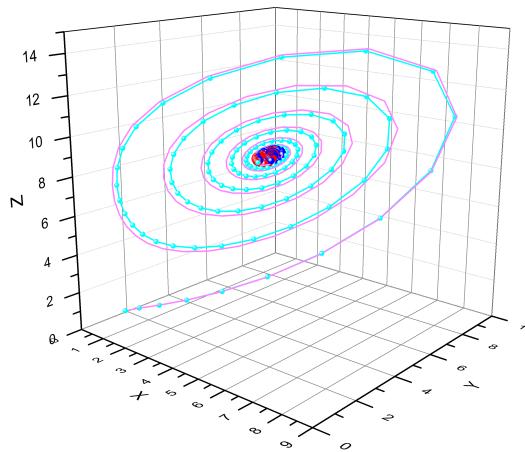


Figura 15

S'hi pot veure que, pel mètode de Runge-Kutta, la solució sempre queda lleugerament més tancada. Això demostra que el mètode de Runge-kutta ens minimitza l'error de fer només la recta tangent.

De totes maneres, aquí també es veu que els mètodes són bastant semblants. El punt on convergeix l'espiral per Euler és $(4.24176, 4.24446, 8.99291)$ i pel mètode de Runge-Kutta convergeix en el punt $(4.24273, 4.24437, 8.99613)$. També es veu reflexat que per aquest valor de r , els dos mètodes són suficientment bons pel que fa a la representació de la trajectòria.

Per $r = 28$, tenim la gràfica següent que ens compara les trajectòries:

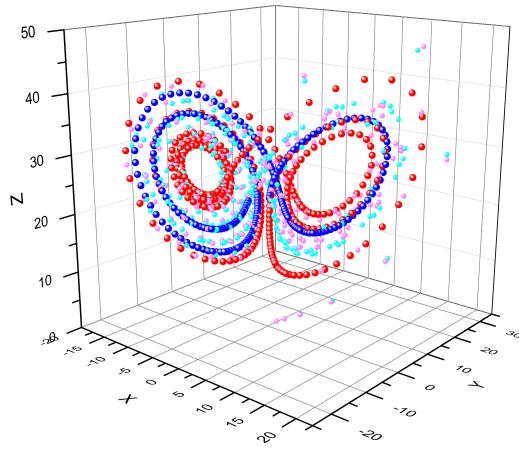


Figura 16

En aquest cas també podem apreciar que els punts pel mètode de Runge-Kutta queden més al mig. Una altra observació és que, per aquest valor de r , les gràfiques no són tan properes. Tot i així, segueixen la mateixa forma de trajectòria. Això ens indica que en aquest cas necessitem del mètode de Runge-Kutta

si volem solucions prou exactes. No obstant, podriem fer servir ambdós si l'objectiu és estudiar el rang i la forma de la trajectòria.

Per $r = 100.5$, tenim l'última gràfica que ens compara les solucions dependent del valor de r .

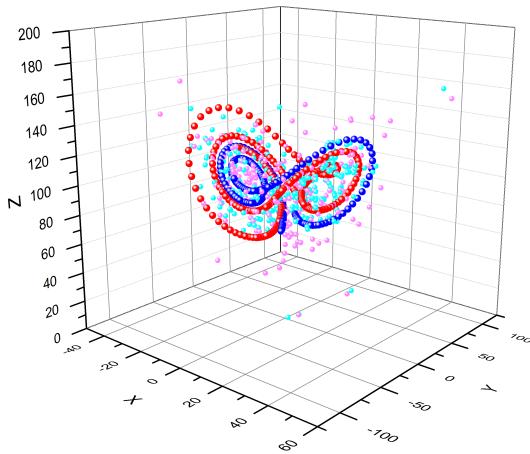


Figura 17

També s'hi pot veure que el mètode de Runge-Kutta té el valor localitzat més apropiat del centre que les solucions pel mètode d'Euler. És a dir, la trajectòria d'Euler sempre es queda per fora. Les dos solucions són regulars en el mateix lloc. Però per aquest valor de r , si que es veuen més diferenciades les dues gràfiques.

4 Conclusions

Pel que fa a la part en que les gràfiques només difereixen entre elles del valor de r , se'n poden extreure les següents conclusions:

- ◆ S'ha comprovat empíricament que les diferents solucions s'ajusten a les esperades esmentades en la introducció.

Pel que fa a l'evaluació de l'eficàcia i comparació d'ambdós mètodes, observem:

- ◆ Quan es superposa la trajectòria calculada pels dos mètodes, s'observa que la trajectòria calculada per Runge-Kutta sempre queda per dins. Per tant, Runge-Kutta minimitza l'error d'utilitzar rectes tangents per calcular la trajectòria com fa el mètode d'Euler.
- ◆ S'ha vist que pels valors de r menors de 10, el mètode d'Euler no difereix molt del de Runge-Kutta. En canvi, pels valors més grans de 28, s'observen unes diferències significatives.

Pel que fa a la variació de les trajectòries en variar les coordenades inicials (x_0, y_0, z_0) deduïm:

- ◆ Observem que les trajectòries (trobades pel mètode de Runge-Kutta) varien poc pel que fa la forma en variar també poc les coordenades inicials (x_0, y_0, z_0) . No obstant, poden variar molt pel que fa a la les coordenades (x, y, z) respecte el temps t .