

MÈTODES NUMÈRICS

## Integració numèrica

GENÍS LÁINEZ MORENO 1420606  
ORIOL TEIXIDÓ GARCIA 1426827

# Índex

|   |  |   |
|---|--|---|
| 1 | Introducció . . . . .  | 2 |
| 2 | Mètode numèric i implementació . . . . .                       | 3 |
|   | 2.1 Resolució de l'integral pel mètode dels trapezis . . . . . | 3 |
|   | 2.2 Resolució de l'integral pel mètode de Romberg . . . . .    | 3 |
|   | 2.3 Implementació . . . . .                                    | 4 |
| 3 | Resultats i discussió . . . . .                                | 5 |
|   | 3.1 Mètode dels trapezis . . . . .                             | 5 |
|   | 3.2 Mètode de Romberg . . . . .                                | 6 |
| 4 | Conclusions . . . . .  | 7 |

# 1 Introducció

Històricament, des del desenvolupament del càlcul diferencial desenvolupat per Newton i Leibnitz, hem necessitat d'integrals complexes per a resoldre molts dels problemes físics. Aquestes integrals no sempre les podem expressar de forma simple amb les funcions conegudes o resoldre analíticament. En aquests casos, per a obtenir resultats numèrics precisos, necessitem d'entelèquies que ens permetin estimar el valor buscat per altres mètodes. En són exemples les aproximacions per sèrie de Taylor, discretitzar i aproximar sumatoris o iterar repetidament operacions.

En el cas presentat, el problema a resoldre tracta de trobar el període d'un pèndol<sup>1</sup>. Pot semblar, en un principi, una trivialitat doncs podríem aproximar el resultat que volem de manera poc erràtica amb el ben conegut valor del període,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad . \quad (1)$$

No obstant, aquesta expressió deixa de ser útil per a angles grans<sup>2</sup> quan el moviment perd substancialment el caràcter harmònic, doncs acumula un error significatiu. Ara el nostre objectiu serà trobar una fórmula pel període més precisa que ens permeti una major generalitat i, per tant, la seva utilitat abasti casos on tenim angles arbitràriament grans.

Per a tal repte necessitem de les equacions del moviment del pèndol, que trobem a partir de l'equació de l'energia mecànica del pèndol<sup>3</sup>,

$$E = \frac{1}{2}mL^2\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 + mgL(1 - \cos\phi) \quad . \quad (2)$$

On  $m$  és la massa del pèndol i  $g$  una constant gravitatòria.

La darrera equació, suposant que deixem el pèndol del repòs des de  $\phi_0$ , pot ser escrita de manera diferencial com:

$$\frac{d\phi}{dt} = \sqrt{2}\omega_0\sqrt{\cos\phi - \cos\phi_0}, \quad \text{on} \quad \omega_0^2 \equiv \frac{g}{L} \quad . \quad (3)$$

De la que en deduïm l'integral,

$$T = \frac{4}{\sqrt{2}\omega_0} \int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{\sqrt{\cos\phi - \cos\phi_0}} \quad , \quad (4)$$

que reescrivim fent un canvi de variables com,

$$\boxed{T = \frac{4}{\omega_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - \mu \sin^2\alpha}} = \frac{4}{\omega_0} K(\mu)} \quad , \quad \text{on} \quad \mu \equiv \sin^2\phi_0 \quad . \quad (5)$$

Integral que serà objecte d'estudi en la resta de l'informe doncs no es pot resoldre analíticament i urgeix saber el resultat per a resoldre el problema presentat.

<sup>1</sup>Definim el pèndol com una massa puntual que es mou en un pla tangencialment a un camp gravitatori trajectòria de la qual està restringida per una barra que la sosté per un extrem i té l'altre fix en l'espai

<sup>2</sup>Considerem angles grans aquells pels quals no podem aproximar el moviment com a harmònic. Conceptualment prenem aquests com a majors de 15°

<sup>3</sup>On prenem com origen de l'energia potencial, segon terme de l'equació, en  $\phi = 0$

## 2 Mètode numèric i implementació

### 2.1 Resolució de l'integral pel mètode dels trapezis

En aquesta part, l'objectiu és substituir les quantitats matemàtiques esmentades com diferencials per a quantitats molt petites. Aquesta entelèquia ens permetrà substituir el concepte integral pel concepte de sumatori suficientment gran. D'ara en davant anomenarem aquesta acció com a *discretitzar*.

En concret, discretitzarem la nostra integral de tal manera que cada un dels sumands sigui un trapezi del qual en podem conèixer l'àrea<sup>4</sup>.

Coneixent la fórmula general de l'àrea d'un trapezi i la funció a integrar podem fer la següent aproximació:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx \approx \sum_{j=0}^{N-1} \frac{h}{2} [f(x_j) + f(x_{j+1})] = \frac{h}{2} \left[ f(a) + f(b) + 2 \sum_{j=1}^{N-1} f(x_j) \right] \quad (6)$$

On  $N$  és el número de divisions del interval i  $h$  és l'altura dels trapezis  $h = (b - a)/N$ .

### 2.2 Resolució de l'integral pel mètode de Romberg

El mètode de Romberg, no és per ell mateix una manera de resoldre l'integral que busquem sinó que és un seguit d'operacions iterades que ens permetran reduir l'error que cometem en emprar un mètode com el dels trapezis.

Suposant que resolent una integral numèricament cometem un error que es pot escriure com:

$$T(h) = \int_a^b f(x)dx + \alpha_1 h^2 + \alpha_2 h^4 + \alpha_3 h^6 \dots \quad (7)$$

Podem utilitzar l'operació,

$$R_{2,2} = \frac{4T(\frac{h}{2}) - T(h)}{3} \quad (8)$$

La qual combina dos integrals pel mètode dels trapezis amb un error  $O[h^2]$  i  $O[(\frac{h}{2})^2]$  per tenir ara un error  $O[h^4]$ .

Podem repetir la darrera operació per reduir cada vegada l'error amb una fórmula més general,

$$R_{m,j} = \frac{4^{j-1} R_{m,j-1} - R_{m-1,j-1}}{4^{j-1} - 1} \quad \text{on} \quad R_{m,1} \equiv T\left(\frac{h}{2^{m-1}}\right) \quad (9)$$

Podem representar amb els elements  $R_{m,j}$  una matriu  $n \times n$  on  $n \equiv m_{\max} = j_{\max}$ . D'aquesta manera obtindrem una matriu escalonada de valors aproximats de la integral on a cada columna i a cada fila obtenim resultats més precisos respecte a les columnes i files anteriors, per aquest motiu el resultat més aproximat i per tant el que esmentarem *el resultat de l'integral pel mètode de Romberg* serà  $R_{n,n}$ .

<sup>4</sup>En aquesta pràctica el concepte d'integral pot ser interpretat en termes de Riemann que ens permetrà tenir una major visualització del mètode utilitzat i relacionar el valor de la integral amb l'àrea sota la funció

## 2.3 Implementació

Les diferents eines que ens proporciona el programa C++ per fer sumatoris, nombroses iteracions i operacions matemàtiques, entre altres, ens seran de gran ajuda per a tractar i dur a terme els mètodes mencionats i trobar valors prou precisos de l'integral buscada.<sup>5</sup>

### Mètode dels Trapezis

Pel mètode dels trapezis, necessitarem com hem dit discretitzar l'integral i efectuar un sumatori. El valor de l'integral serà més precís com més particions fem de l'interval a integrar.

Ara necessitem, doncs, d'implementar un sumatori amb la funció **for** que ofereix el programa.

```
T[N-1]=0;
T[N-2]=0;
T[N]=0;
while (fabs(T[N-2]-T[N-1])>=e*(T[N-1]+T[N])*0.5 and Nmax+1>=N ) {
    s=0;x=0;

    d=3.141592653589793/(2*N);
    for (j=1; j<N; j++){

        s=s+k(x,mu) ;
        x=x+d ;
    }

    T[N]=((1+k(3.141592653589793/2,mu)+2*s)/2)*d;
    N=N+1;
}

if(N-2==Nmax){cout<<"Hem arribat al nombre maxim de divisions del trapezi sense arribar a la tolerancia que has dit"<<endl;}
cout<<"El periode pel metode dels trapezis val " <<T[N-2]*4*sqrt(L/g)<<" s"<<endl<<endl<<endl;
```

Figura 1: Codi implementat al programa compilador de C++, Dev C++, per a resoldre l'integral  $K(\mu)$  pel mètode dels trapezis

A més, com es pot veure, hem implementat una tolerància  $e$  o  $\epsilon$  i un nombre màxim de particions de l'interval  $N_{\max}$  que ens permeten repetir el mètode dels trapezis fins a assolir un resultat amb l' $N_{\max}$  o bé fins a assolir un resultat amb una tolerància igual o menor a la demanada.

La tolerància  $\epsilon$  l'hem definit tal i com es suggereix en el document *Integració\_v2017.pdf* distribuït en l'assignatura Mètodes Numèrics.

$$\epsilon > 2 \frac{|T_i - T_{i-1}|}{|T_i + T_{i+1}|} \quad , \quad (10)$$

on  $i$  és l'i-èssim pas t'iteració.

### Mètode de Romberg

Per aconseguir implementar el mètode de Romberg en el programa Dev C++, utilitzarem també una combinació de sumatoris i iteracions que fan, al cap i a la fi, el que s'ha descrit anteriorment en l'apartat *Resolució de l'integral pel mètode de Romberg*.

Per assegurar també que estem dins la tolerància que demana o que el primer trapezi no superi el nombre màxim de divisions, utilitzem el mateix nombre de particions del interval,  $N$ , que hem utilitzat en l'apartat anterior, *Mètode dels trapezis*.

<sup>5</sup>Per a veure el codi complet del programa i la declaració de variables, es convenient veure l'Anex o l'arxiu andjunt en format cpp

```

//ens definim les diferents h[i] amb les que farem el mètode dels trapezis per aconseguir T(h), T(h/2), T(h/4)...
for (i=1; i<=n; i++){
    h[i]=3.141592653589793/(pow(2,i)*N);

    S[i]=0; x=0;
    //utilitzem el mètode dels trapezis per a calcular diferents T(h[i])
    for (j=1; j<N*pow(2,i-1); j++){

        S[i]=S[i]+k(x,mu)    ;
        x=x+h[i]            ;
    }

    R[i][1]=((1+k(3.141592653589793/2,mu)+2*S[i])/2)*h[i];    }

//calculem, combinant T(h), T(h/2), T(h/4)... amb el mètode de Romberg les nostres integrals R amb un error menor
for (j=2; j<=n; j++){
    for (m=j; m<=n; m++){
        R[m][j]=(pow(4, j-1)*R[m][j-1]-R[m-1][j-1])/(pow(4, j-1)-1) ;    }}

//Donem les nostres integrals R en forma de matriu triangular per qüestions estètiques.
for (m=1; m<=n; m++){
    for (j=1; j<=m; j++){
        cout<<R[m][j]<<" ";    }
    cout<<endl;
}

cout<<endl<<endl<<"el Període pel mètode de Romberg resulta  "<<R[n][n]*4*sqrt(L/g)<<" s";

```

Figura 2: Codi implementat al programa compilador de C++, Dev C++, per a resoldre l'integral  $K(\mu)$  pel mètode de Romberg

## 3 Resultats i discussió

### 3.1 Mètode dels trapezis

#### Variació del període amb el nombre de particions del interval

Es convenient saber com varia el període amb el nombre de particions del interval. Aquest estudi ens permetrà saber si necessitem moltes particions per a arribar a un resultat prou bo i també ens permet estudiar si el valor de la integral tendeix cap a el valor esperat.

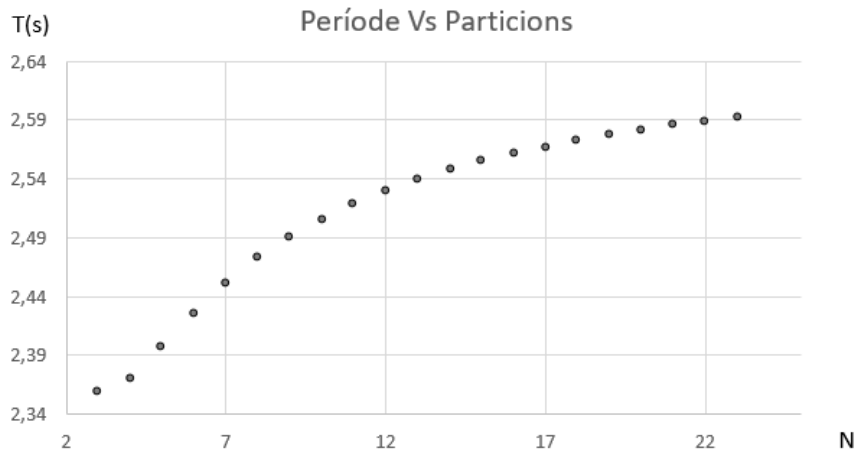


Figura 3: Gràfica del valor de l'integral, període, en funció de les divisions del interval. Aquesta gràfica està feta tenint en compte que la constant gravitatòria és  $9,81 \text{ m/s}^2$ , la longitud  $L$  del pèndol  $1 \text{ m}$  i l'angle inicial  $2 \text{ rad}$ .

En el nostre cas l'últim valor, i per tant el més exacte, del període en l'anterior gràfica és de 2,59257 s<sup>6</sup>. El valor esperat<sup>7</sup>, en canvi, és de 2,66587 s. Aquesta petita discrepància entre els resultats és deguda a les poques divisions del trapezi que hem emprat, una prova d'això és que en observar la gràfica podem veure una tendència a augmentar el valor del període cada cop que subdividim l'interval. A més, també hi juga un paper important l'angle escollit com a inicial, 2 rad, doncs aquest és suficientment gran com per crear una geometria de la funció a integrar prou abrupta en l'interval estudiat com per acumular molt error utilitzant el mètode emprat.

### 3.2 Mètode de Romberg

#### Variació del període segons el nombre d'iteracions

En aquest apartat estudiarem com varia el valor de l'integral segons el nombre de vegades,  $n$ , que utilitzem el mètode de Romberg per a reduir l'error.

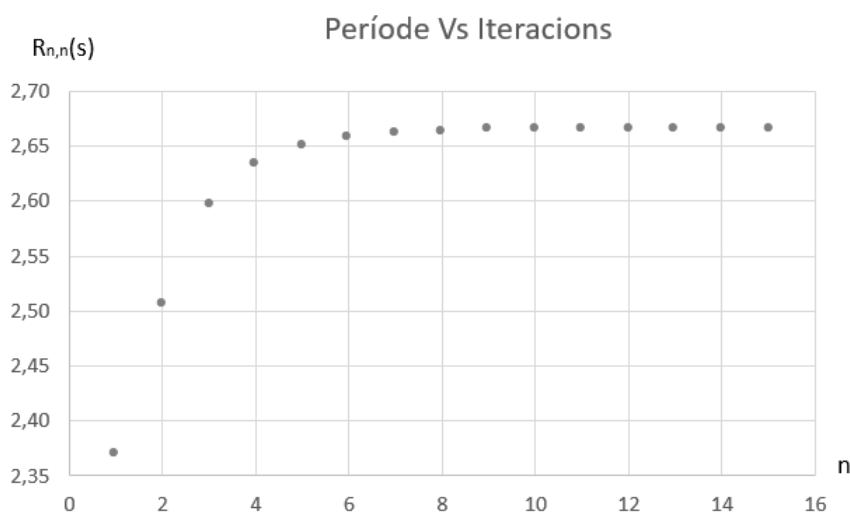


Figura 4: Gràfica del valor de l'integral, període, en funció de les iteracions fetes pel mètode de Romberg. Aquesta gràfica està feta tenint en compte que la constant gravitatòria és  $9,81m/s^2$ , la longitud  $L$  del pèndol 1m, l'angle inicial 2 rad i el nombre de particions del trapezi  $R_{1,1}$  es 4

En la gràfica anterior notem com d'útil ens resulta el mètode de Romberg per a resoldre integrals. En 5 iteracions estem ja molt propers al valor de l'integral esperat. El cas concret més exacte de la gràfica és  $R_{15,15} = 2.66586s$  que és notablement semblat al esperat abans esmentat 2.66587s.

#### Variació del període respecte l'angle inicial $\phi_0$

Veient l'efectivitat del programa creat, és la següent pregunta natural, ara tenint d'objecte d'estudi el propi període i no el valor de la integral, estudiar com varia aquest respecte l'angle inicial des del qual parteix el pèndol<sup>8</sup>. Per a tal estudi farem servir el mètode de Romberg, doncs hem vist que ens dona resultats més satisfactoris, amb 15 iteracions.

<sup>6</sup>Quan ens referim a valors que resulten directament del programa que hem creat, no donarem el valor de l'incertesa ja que no ens referim en cap moment a un experiment real o una magnitud sinó que citem el valor numèric directament

<sup>7</sup>Prenem com a valor esperat aquell que resulta al fer la mateixa integral al programa online de tractament numèric *WolframAlpha*

<sup>8</sup>En aquest informe no hem considerat rellevant fer un estudi amb la variació de la constant gravitatòria  $g$  o bé la longitud del pèndol  $L$ , doncs es pot apreciar clarament la relació en la fórmula (5)

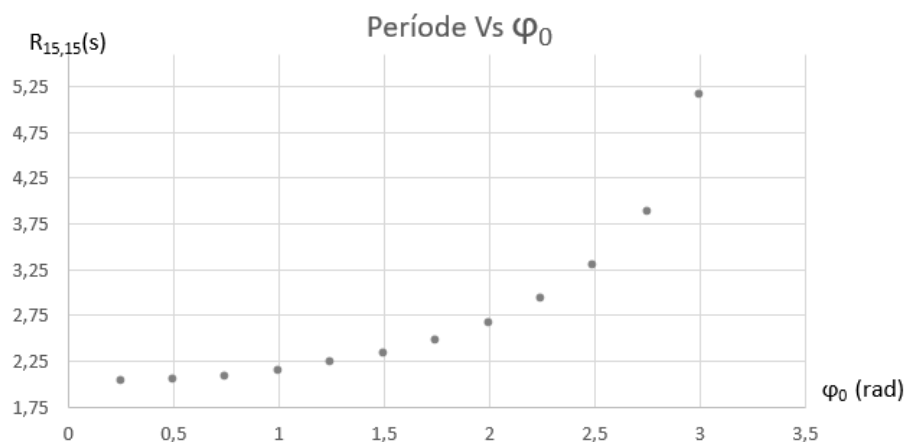


Figura 5: Gràfica de la variació del període respecte l'angle inicial utilitzant el mètode de Romberg on  $R_{1,1}$  és un trapezi amb 4 particions

La darrera gràfica mostra com augmenta el període al augmentar l'angle des del qual deixem anar el pèndol. Aquesta tendència mostra també perquè l'error que cometem emprant el mètode clàssic, formula (1), per calcular el període augmenta amb l'angle. Podem, també, deduir que el període tendeix a infinit quan l'angle inicial s'acosta a  $\pi$ . A la darrera afirmació podem donar-li un sentit físic doncs és evident que si l'angle inicial és exactament  $\pi$ , el pèndol, tal i com l'hem descrit, es mantindrà horitzontal i no acabarà mai de fer una oscil·lació completa.

La tendència a infinit de la integral al augmentar l'angle, també dota de sentit al fet que augmenti la diferència entre el valor obtingut numèricament i l'esperat quan ens acostem a valors molt grans. Aquest fet es degut a que l'àrea sota la corba es fa molt gran en un interval molt petit i, per tant, qualsevol intent d'aproximar aquesta geometria amb una suma de trapezis finita, acumularà un error significatiu.



## 4 Conclusions

Com a conclusió, hem pogut veure que els mètodes usats per a resoldre el nostre problema és capaç de trobar el valor de la integral, i aconseguir el resultat desitjat.

♦ Hem vist que el mètode dels trapezis pot donar un resultat prou bo. Però, per aconseguir-ho, hem de fer un gran nombre de particions si la funció té una geometria molt abrupta en l'interval estudiat.

♦ En canvi, quan hi afegim el mètode de Romberg, mitjançant menys particions de l'interval que en el mètode dels trapezis, podem aconseguir un resultat molt més proper al valor esperat.

♦ També hem pogut observar la ineffectivitat de l'expressió clàssica (1) del període per a angles grans. Per tant, hem vist la necessitat d'aquest mètode per a angles majors. Per contra, hem pogut comprovar que per a angles petits, l'expressió clàssica sí que ens dona un resultat suficientment bo per al valor del període i, en aquest cas, no resulta necessari emprar mètodes numèrics complexos.