Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Факультет комп’ютерних наук та кібернетики

Лабораторна робота №1

з курсу

«Числові методи в інформатиці»

на тему

**«Розв’язок нелінійного рівняння»**

Виконав:

студент групи ІПС-32

факультету комп’ютерних наук

та кібернетики

Гусар Андрій Сергійович

Київ 2023

# Постановка задачі

Знайти розв’язок рівняння вказаним методом з точністю .

Дати можливість користувачу ввести іншу точність. У звіті до лабораторної роботи має бути: (на парі розписував)

0) Титульна сторінка – номер роботи, автор

1) Постановка задачі (умова вашого варіанту), графік рівняння – можна фото результату сторонньої програми

2) Опис методів та теоретичне обґрунтування правильності обраного проміжку та початкового наближення.

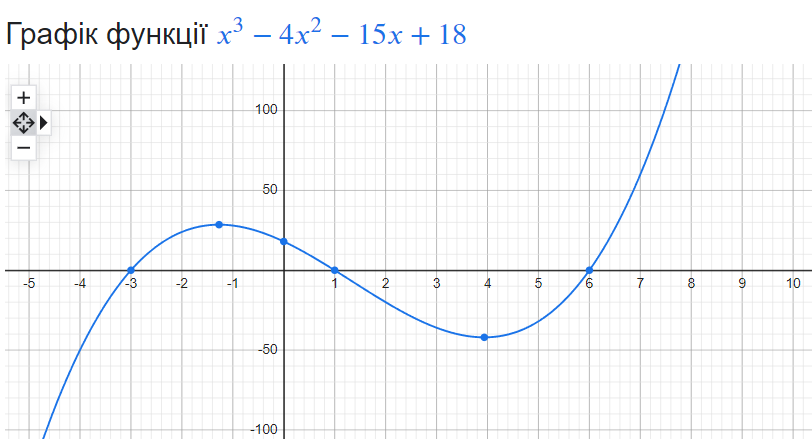
3) Розрахунок апріорної кількості ітерацій – записати для початкової точності, перераховувати програмою при зміні. Не потрібно рахувати для модифікованого методу Ньютона та методу січних але можна порівняти з оцінкою Ньютона.

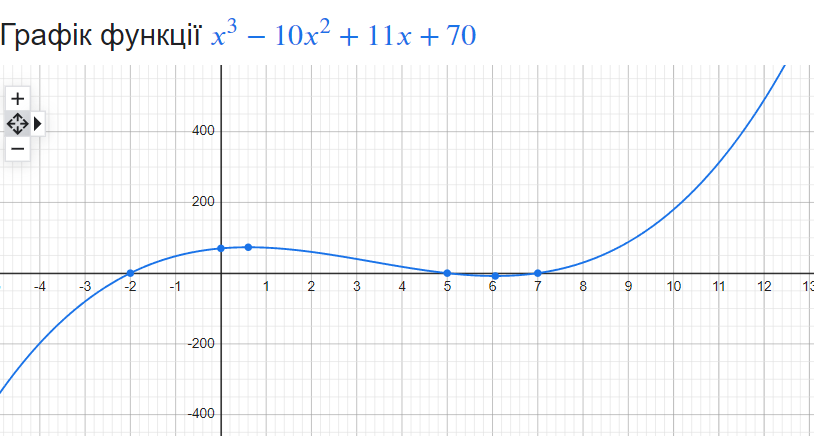
4) Таблиця результатів на кожній ітерації (або з деяким інтервалом між ними): крок, наближення, значення функції на ньому. Має бути отриманий розв’язок та значення функції в ньому.

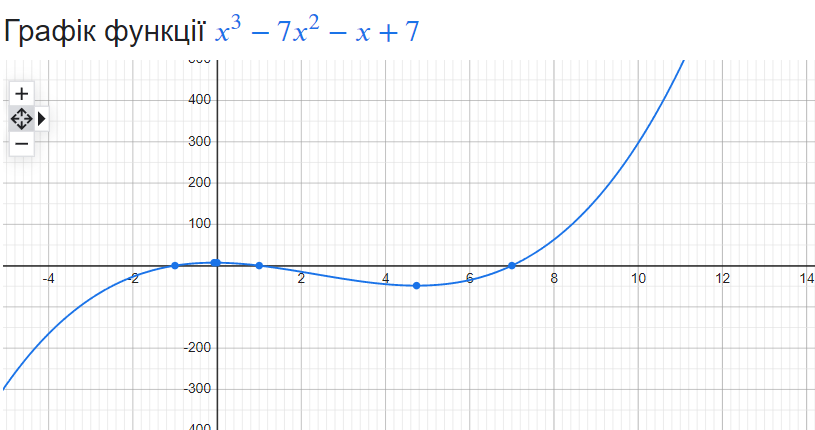
Програма має виконувати потрібну кількість ітерацій за вказаним методом, перед цим розрахувавши їх апріорно необхідну кількість, в програмі також можна додати перевірку умов теореми або допоміжні розрахунки для звіту. Мова програмування – бажано С++/С# але за потреби можна обрати іншу

Варіант 12

* Знайти розв’язок методом ділення навпіл
* Знайти розв’язок методом Ньютона
* Знайти розв’язок методом простої ітерації







# Опис методів та теорія

* Метод ділення навпіл

Метод ділення навпіл (також відомий як метод бісекції) - це простий і потужний числовий метод для знаходження коренів **неперервних** функцій. Метод ділення навпіл ґрунтується на принципі проміжкових значень: якщо функція має різні знаки на двох кінцях певного інтервалу, то вона має корінь в цьому інтервалі.

Теорія методу ділення навпіл:

1. **Початковий інтервал:** Обираємо початковий інтервал на якому функція має змінні знаки на кінцях, тобто .
2. **Обчислення середньої точки:** Знаходимо середню точку інтервалу .
3. **Перевірка умови зупинки:** Перевіряємо, чи значення функції в середній точці близьке до нуля або менше заданої точності. Якщо так, тоді c є коренем, і метод повторюється.
4. **Вибір нового інтервалу:** Вибираємо новий інтервал для наступної ітерації наступним чином:

* Якщо має той самий знак, що і , то новий інтервал буде
* Якщо має той самий знак, що то новий інтервал буде .

1. **Повторення:** Повторюємо кроки 2-4, доки не досягнемо заданої точності або кількості ітерацій.
2. **Результат:** Коли метод завершується, ми отримуємо наближене значення кореня функції.

У нас зупинкою є .

Умова збіжності – функція має бути неперервною на відрізку та мати різні знаки на кінцях, що дозволить застосувати теорему про існування кореню. Оскільки у нас поліном 3 степені, то він неперервний на всій дійсній прямій, що і підтверджує графік(справедливо для інших двох завдань).

* Метод Ньютона

Метод Ньютона (також відомий як метод дотичних) - це числовий метод для знаходження коренів неперервних функцій. Метод Ньютона базується на принципі лінійної апроксимації функції та пошуку кореня цієї апроксимації.

Теорія методу Ньютона:

1. **Початкове наближення:** Вибираємо початкове наближення .
2. **Обчислення похідної:** Обчислюємо похідну функції в точці , тобто
3. **Обчислення нового наближення:** Обчислюємо нове наближення за допомогою формули
4. **Перевірка умови зупинки:** Перевіряємо, чи менше за певний епсілон (точність). Якщо так, тоді є коренем, і метод повторюється.
5. **Повторення:** Повторюємо кроки 2-4, доки не досягнемо заданої точності або кількості ітерацій.
6. **Результат:** Коли метод завершується, ми отримуємо наближене значення кореня функції.

Цей метод також вимагає обрання початкового наближення, і точність обчислення залежить від вибору цього наближення.

У нас це просто . Тому умова зупинки .

Наведемо ряд теорем які пітрібні для перевірки збіжності методу та вибору початкових значень.

* **Теорема 1. (Про вибір початкового наближення)**

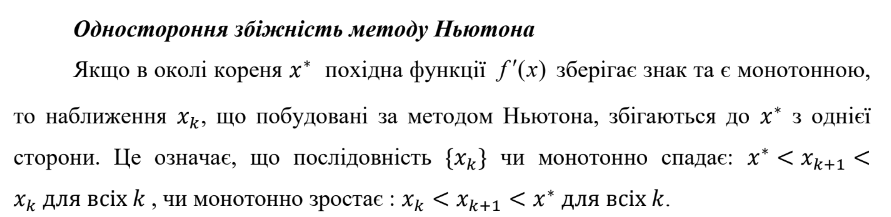
Якщо , тобто функція двічі неперервна та має різні знаки на кінцях, та початкове наближення задовільняє умові , то можна обчислити єдиний корінь рівняння методом Ньютона з будь-якою точністю. Введемо позначення:

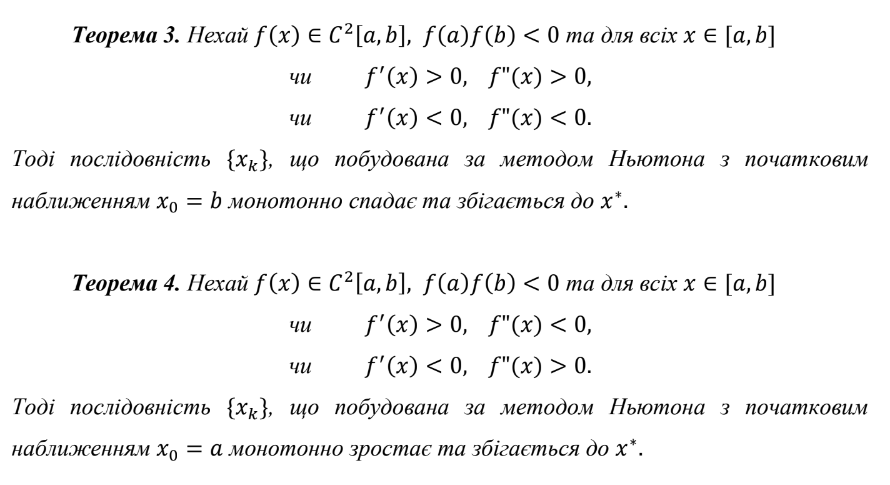
*,*

* **Теорема 2. (Про збіжність методу Ньютона)**

Нехай - простий дійсний корінь рівняння, і , , де виконується нерівність:

То метод збігається





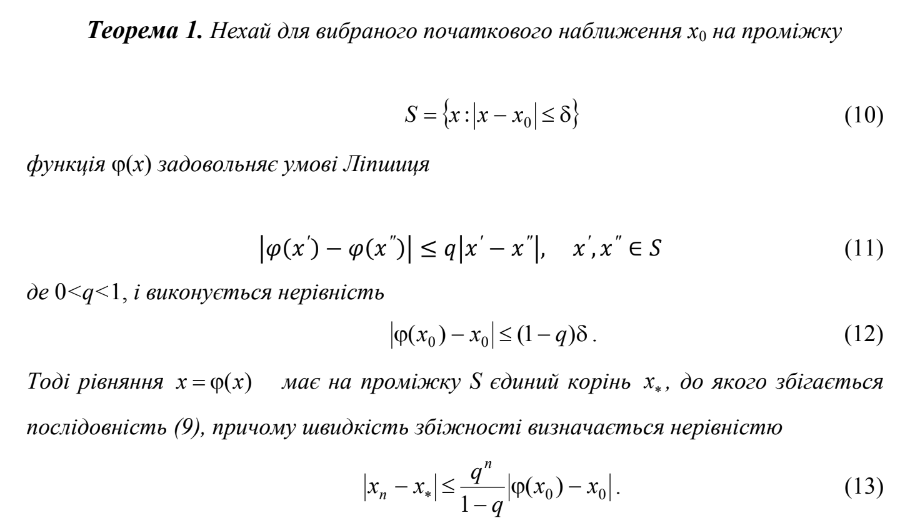
* Метод простої ітерації

Метод простої ітерації - це числовий метод для знаходження коренів функцій, який базується на перетворенні вихідного рівняння у форму, в якій легко шукати корені. Цей метод часто використовується, коли інші числові методи стають непрактичними або складними для використання.

Теорія методу простої ітерації:

1. **Перетворення рівняння:** Вихідне рівняння перетворюється у вигляд, в якому знайдення кореня стає простим. Зазвичай це робиться шляхом переписування рівняння у вигляді x = де - нова функція.
2. **Початкове наближення:** Вибираємо початкове наближення .
3. **Обчислення нового наближення:** Обчислюємо нове наближення за допомогою формули
4. **Перевірка умови зупинки:** Перевіряємо, чи менше за певний епсилон (точність). Якщо так, тоді x1 є коренем, і метод повторюється.
5. **Повторення:** Повторюємо кроки 3-4, доки не досягнемо заданої точності або кількості ітерацій.
6. **Результат:** Коли метод завершується, ми отримуємо наближене значення кореня функції.

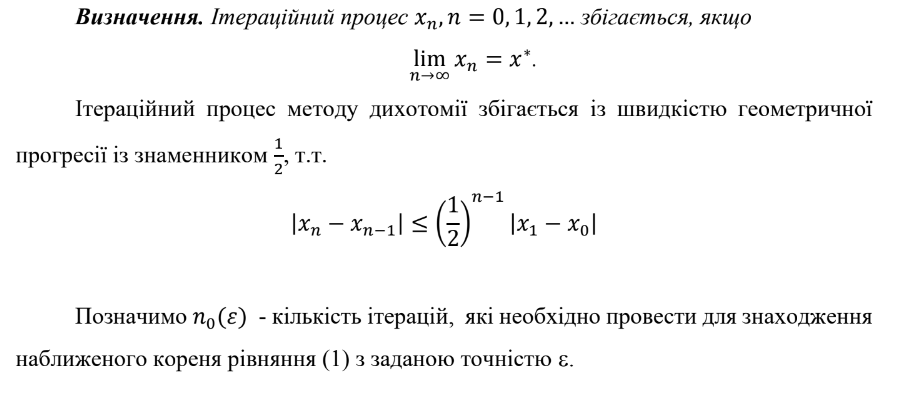
Метод простої ітерації може бути досить ефективним, але вибір перетворення та початкового наближення можуть сильно впливати на збіжність і точність методу. У нас замість виступає .

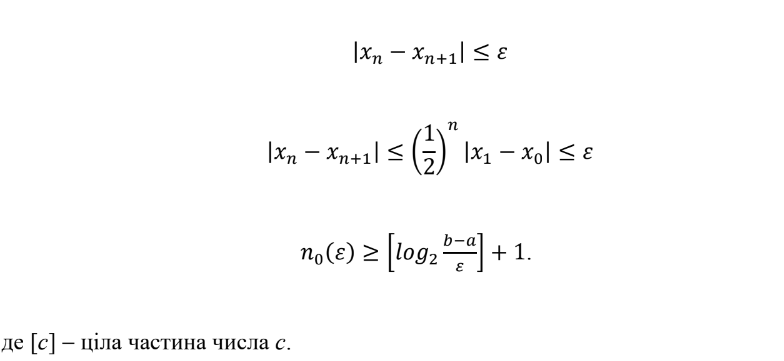


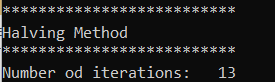
# Розрахунок апріорної кількості ітерацій та обчислення

* Метод ділення навпіл

Перед методом ми обчислюємо кількість ітерацій яка потрібна для отримання результату за формулою:





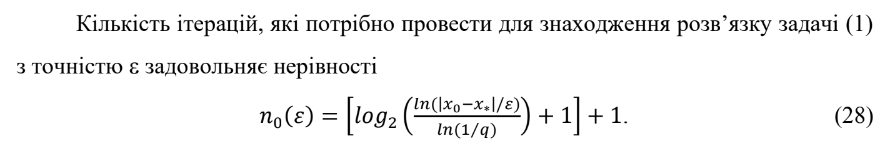


* Метод Ньютона

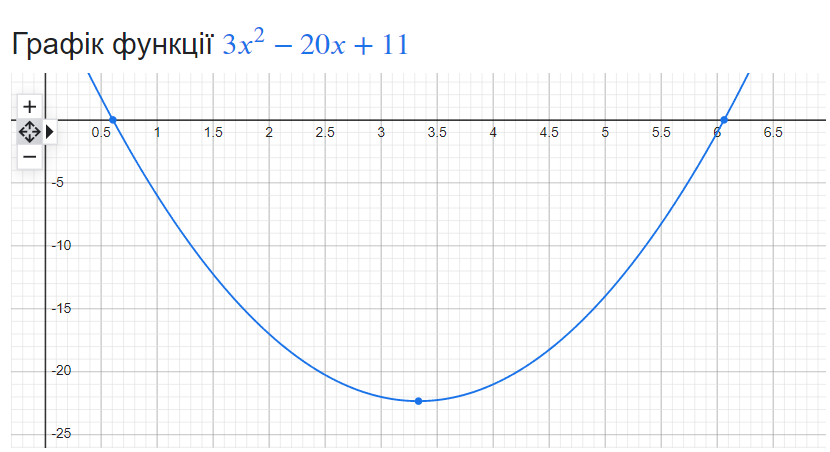
Розглянемо функцію та доведемо Для цього нам потрібно виконати три умови:

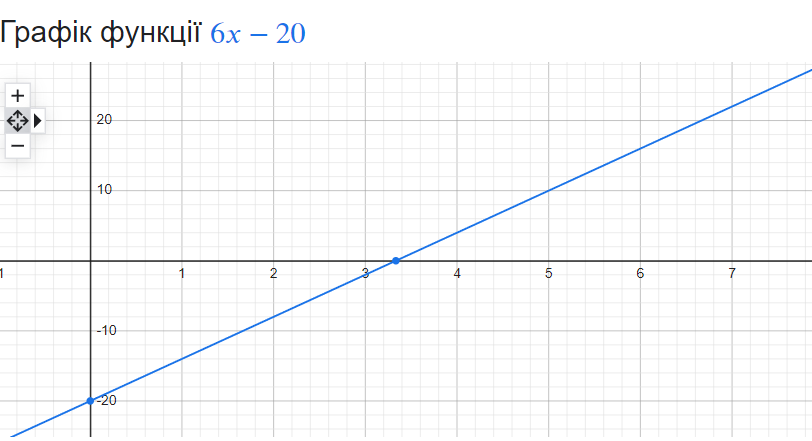
1. повинна бути неперервною на . Функція є поліномом, а поліноми неперервні на всій множині дійсних чисел, тобто вона задовольняє першій умові.
2. Похідна повинна існувати та бути неперервною на. . Ця похідна також є поліномом і існує на всій множині , тому вона відповідає другій умові.
3. Друга похідна також повинна існувати та бути неперервною на. Ця друга похідна також є поліномом і існує на всій множині.

Отже, функція задовольняє усі три умови для того, щоб бути двічі неперервно диференційованою на всьому множині



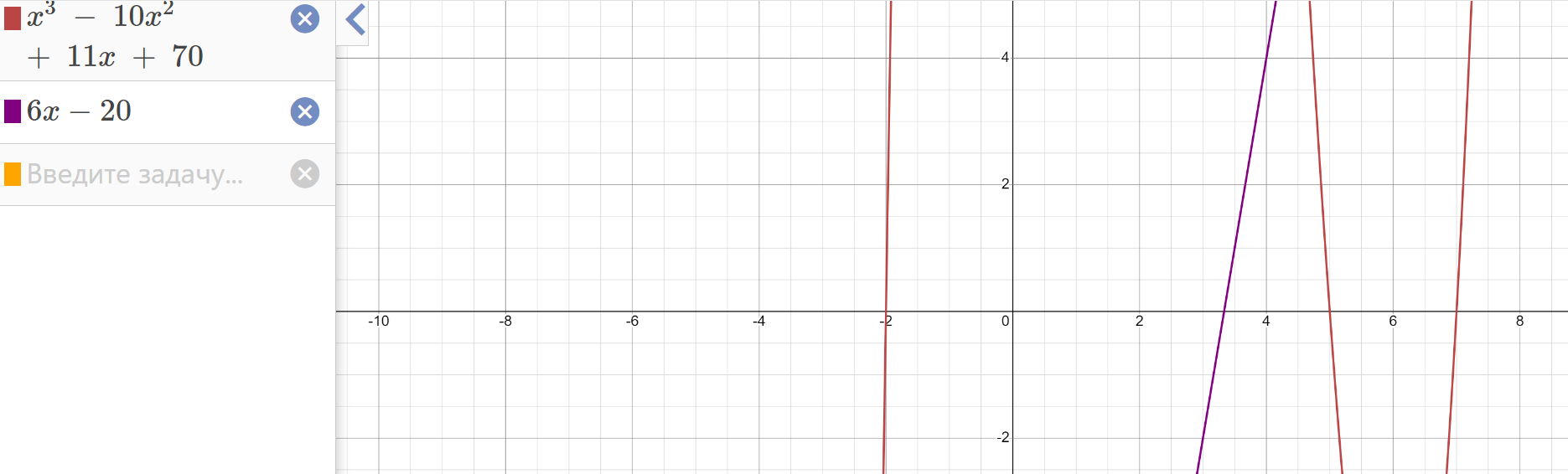
Перш за все подивимося на графіки перших двох похідних:





Оскільки ми попередньо з графіка функції побачили, що корінь приблизно дорівнює 5, а з графіку другої похідної, маючи умову, що вона не змінює знаку на інтервалі , візьмемо проміжок .

Користуючись [Mathway](https://www.mathway.com/) зобразимо графіки функції і її 2 похідної разом



Бачимо, що обидві функції > 0 десь 3.7 до 5. Тому вибираємо наприклад значення 4.5 як .

Робимо додаткові обчислення:

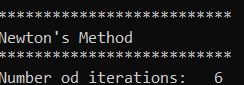
*,*

За [Теоремою 4](#_Опис_методів_та) послідовність монотонно зростає, а знаючи знаки функції на проміжку, робимо висновок, що і мінімум і максимум за модулем будуть досягатися в точці .

*,*

*,*

Умова: *,*  виконується.



* Метод простої ітерації

Графічне дослідження показало що існує корінь на проміжку

Методом багатьох спроб було підібрано функцію яка задовільняє усі умови:

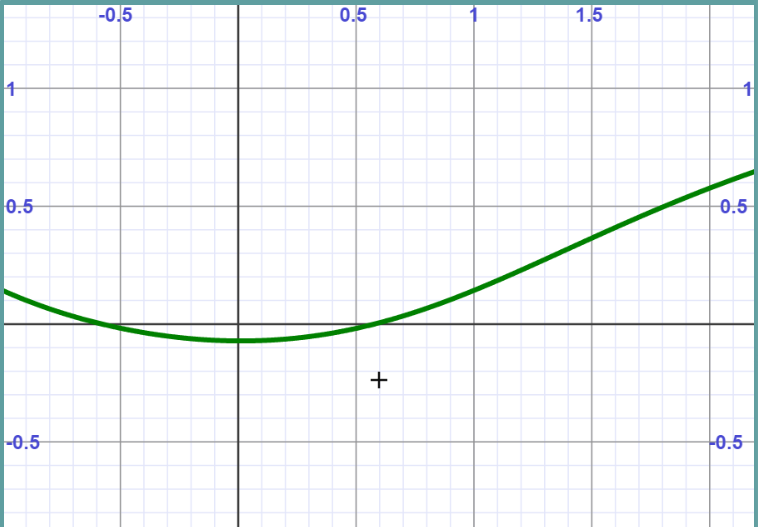
,

*,*

*,*

, (не забуваємо про умову звідки наш проміжок ніяк не постраждав він цієї умови) далі перевіряємо умови. Виберемо , тоді

Далі знайдемо , де (за умовою). Глянемо на графік цієї функції

**

Бачимо, що зростає на нашому проміжку а отже

=

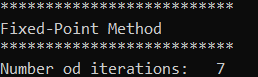
Перевіряємо умову:

,

,

отжe умова виконана.

Далі за формулою:

**

# Таблиця результатів на кожній ітерації