Sujet d'Examen Blanc : BTS CIEL 1 (avec Xcas)

Matériel autorisé : Calculatrice et logiciel de calcul formel (type Xcas).
Tous les résultats devront être justifiés. Si Xcas est utilisé, vous devrez connaître les commandes appropriées. ***Les exemples de commandes Xcas donnés dans ce sujet de préparation ne seront pas fournis le jour de l'examen.***

Exercice 1 : Analyse de la Puissance d'un Composant (Fonctions exponentielles) (5 points)

On modélise la puissance $P(t)$ (en Watts) dissipée par un composant électronique en fonction du temps t (en secondes) après sa mise sous tension. Cette modélisation est donnée par la fonction $P(t) = (5t + 2)\mathrm{e}^{-0.1t}$ pour $t \geq 0$.
(Pour information, avec Xcas, on peut définir la fonction par : `P(t) := (5*t + 2) * exp(-0.1*t)`*)*

1. Calculer $P(0)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de la puissance dissipée.
   (Ex. Xcas : `P(0)`*)*

2. Calculer la dérivée $P'(t)$.
   (Ex. Xcas : `deriver(P(t), t)`*)*

3. Étudier le signe de $P'(t)$ sur $[0, +\infty[$ et dresser le tableau de variation de $P(t)$.

4. Quelle est la puissance maximale dissipée par le composant et à quel instant t_{max} est-elle atteinte ? (Donner t_{max} exact et une valeur approchée de $P(t_{max})$ à 10^{-2} près).
   (Ex. Xcas pour aide à la résolution de $P'(t) = 0$: `resoudre(P_prime(t)=0, t)`*)*

5. Quelle est la puissance dissipée au bout de 10 s ? Au bout de 20 s ? (Arrondir au centième de Watt).
   (Ex. Xcas : `evalf(P(10))`*)*

6. Quelle est la limite de $P(t)$ quand t tend vers $+\infty$? Commenter ce résultat.
   (Ex. Xcas : `limite(P(t), t, +infinity)`*)*

Exercice 2 : Décharge d'une Banque de Supercondensateurs (Suites géométriques) (5 points)

Une banque de supercondensateurs est initialement chargée avec une quantité d'énergie $E_0 = 5000\,\text{J}$. À chaque cycle d'utilisation (décharge/recharge partielle), la banque perd 8% de l'énergie *qu'elle contenait au début de ce cycle*. On note E_n l'énergie restante dans la banque après n cycles. On a donc $E_0 = 5000\,\text{J}$.
(Pour information, avec Xcas, on peut définir `E0 := 5000.`*)*

1. a) Calculer E_1 et E_2.

   b) Exprimer E_{n+1} en fonction de E_n. En déduire la nature de la suite (E_n). Préciser sa raison et son premier terme.

   c) Exprimer E_n en fonction de n et de E_0.
   (Pour information, si $E_n = E_0 \cdot q^n$: `E(n) := E0 * (0.92)^n`*)*

2. Quelle est l'énergie restante après 10 cycles ? (Donner une valeur approchée au Joule près).
   (Ex. Xcas : `evalf(E(10))`*)*

3. Le système est considéré comme nécessitant une maintenance lorsque l'énergie stockée E_n devient inférieure à 20% de l'énergie initiale E_0. Après combien de cycles cela se produira-t-il ?
   (Ex. Xcas : `resoudre_numerique(E(n) = 0.2 * E0, n)`*)*

4. Soit L_n l'énergie perdue durant le n-ième cycle ($L_n = E_{n-1} - E_n$ pour $n \geq 1$).

   a) Calculer l'énergie totale perdue pendant les 5 premiers cycles.
   (Pour information, on peut montrer que $L_n = E_0 \cdot (0.92)^{n-1} \cdot 0.08$. Ex. Xcas : `definir(L(k) := E0 * (0.92)^(k-1) * 0.08); somme(L(k), k, 1, 5)`*)*

   b) Soit $S_N = \sum_{k=1}^{N} L_k$ l'énergie totale perdue pendant les N premiers cycles. Montrer que $S_N = E_0(1 - (0.92)^N)$. (On pourra observer que $S_N = E_0 - E_N$ ou utiliser la formule de la somme des N premiers termes d'une suite géométrique pour (L_n)).

   c) Quelle est la limite de S_N lorsque N tend vers $+\infty$? Interpréter ce résultat dans le contexte de la décharge des supercondensateurs.

Exercice 3 : Contrôle Qualité de Puces Électroniques (Probabilités Conditionnelles) (5 points)

Une usine fabrique des puces électroniques. On admet que :

— 3% des puces produites sont défectueuses.

— Si une puce est défectueuse, un test de contrôle la détecte comme défectueuse avec une probabilité de 0.98.

— Si une puce n'est pas défectueuse, le test la signale incorrectement comme défectueuse (faux positif) avec une probabilité de 0.04.

On choisit une puce au hasard dans la production pour la soumettre au test. On considère les événements :

— F : "La puce est défectueuse."

— T : "Le test déclare la puce comme défectueuse."

1. Donner les probabilités $P(F)$, $P_F(T)$ et $P_{\overline{F}}(T)$ d'après l'énoncé.
2. Construire un arbre pondéré illustrant la situation.
3. a) Calculer la probabilité que la puce soit défectueuse ET que le test la déclare défectueuse ($P(F \cap T)$).

   b) Calculer la probabilité que la puce ne soit pas défectueuse ET que le test la déclare quand même défectueuse ($P(\overline{F} \cap T)$).
4. En déduire la probabilité $P(T)$ que le test déclare une puce comme défectueuse.
5. Le test a déclaré une puce comme défectueuse. Quelle est la probabilité que cette puce soit réellement défectueuse ($P_T(F)$) ? Arrondir au millième. Que pensez-vous de ce résultat par rapport à la fiabilité de la déclaration du test ?

Exercice 4 : Étude d'un Filtre RLC Série à Argument Spécifique (Nombres Complexes) (5 points)

On étudie l'impédance complexe d'un circuit RLC série. On donne j tel que $j^2 = -1$. Les impédances de la résistance R, de la bobine L et du condensateur C sont respectivement :

$Z_R = R$, $Z_L = \mathrm{j}L\omega$, $Z_C = \frac{1}{\mathrm{j}C\omega}$. L'impédance totale du circuit série est $Z_{tot} = Z_R + Z_L + Z_C$.

On donne les valeurs suivantes pour les composants : $R = 20\,\Omega$, $L = 40 \times 10^{-3}\,\mathrm{H}$ ($40\,\mathrm{mH}$), $C = 50 \times 10^{-6}\,\mathrm{F}$ ($50\,\mathrm{\mu F}$).
(Pour information, avec Xcas, on peut définir les valeurs : `R_val := 20; L_val := 40E-3; C_val := 50E-6;`*)*

1. Rappeler l'expression de Z_{tot} en fonction de R, L, C, ω. Écrire Z_C sous la forme $\frac{-\mathrm{j}}{C\omega}$.

2. On s'intéresse à la pulsation $\omega_0 = 1000\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Calculer les formes algébriques des impédances Z_R, Z_L et Z_C pour cette pulsation ω_0.
   (Ex. Xcas : `omega0_val := 1000;` `Z_L_val := i * L_val * omega0_val;` `evalc(Z_L_val)`; `Z_C_val := -i / (C_val * omega0_val)`; `evalc(Z_C_val)`*)*

3. Déterminer la forme algébrique de Z_{tot} pour $\omega_0 = 1000\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.
   (Ex. Xcas : `Z_tot_val := R_val + Z_L_val + Z_C_val`; `evalc(Z_tot_val)`*)*

4. a) Calculer le module $|Z_{tot}|$ de l'impédance totale calculée à la question 3. Donner la valeur exacte.
   (Ex. Xcas : `abs(Z_tot_val)`*)*

   b) Montrer que l'argument θ de Z_{tot} (calculée à la question 3) est égal à $\frac{\pi}{4}$ radians.
   (Ex. Xcas : `arg(Z_tot_val)`*)*

   c) En déduire la forme exponentielle de Z_{tot} (calculée à la question 3).

5. Pour quelle(s) valeur(s) de la pulsation ω (strictement positive) l'impédance Z_{tot} serait-elle un nombre réel pur (c'est-à-dire sa partie imaginaire nulle) ? Comment appelle-t-on ce phénomène ?