Préacquis

ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ DANS $\mathbb{R}$

a, b et c sont des nombres réels avec $a \neq 0$.

- $f(x) = ax^2 + bx + c$ est un polynôme du second degré. La fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ est une fonction polynôme du second degré.
- (E) : $ax^2 + bx + c = 0$ est une l'équation du second degré.
- $\Delta = b^2 - 4ac$ est le discriminant de $f(x)$ ou de (E).

Signe de Δ	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Zéro(s) de $f(x)$ ou solution(s) de (E)	$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_0 = -\frac{b}{2a}$	Pas de zéro ou Pas de solution
Factorisation de $f(x)$	$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	$f(x) = a(x - x_0)^2$	Pas de factorisation
Signe de $f(x)$	Signe de a à l'extérieur des zéros et signe de $-a$ entre les zéros	Signe de a ou nul	Signe de a

- Résoudre une inéquation du second degré du type : $ax^2 + bx + c > 0$ (resp.< 0 ; ≤ 0 ; ≥ 0) revient à étudier le signe de $ax^2 + bx + c$ et en déduire les solutions de l'inéquation.

Somme et produit des solutions

- Si x_1 et x_2 sont les solutions de (E), alors $x_1 + x_2 = -\frac{b}{2a}$ et $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$.
- Deux nombres réels ont pour somme S et pour produit P si et seulement si ils sont solutions de l'équation : $x^2 - Sx + P = 0$.

ÉQUATIONS LINÉAIRES DANS $\mathbb{R}^2$

(S) : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ est un système de deux équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$.

Déterminant d'un système d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$

- Le déterminant de (S) est le nombre réel noté Δ tel que : $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$.
- Si $\Delta = 0$, alors (S) n'admet pas de solution ou admet une infinité de solutions.

Si $\Delta \neq 0$, alors (S) admet une solution unique.

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

Comparaison de fonctions

f et g sont deux fonctions d'ensembles de définition respectifs D_f et D_g.

- Les fonctions f et g sont égales lorsque $D_f = D_g$ et, pour tout $x \in D_f$, $f(x) = g(x)$.
- Pour tout $x \in D_f \cap D_g$,

$f(x) - g(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > g(x)$ (f est supérieure à g).

$f(x) - g(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < g(x)$ (f est inférieure à g).

Somme, produit et quotient de fonctions

f et g sont deux fonctions d'ensembles de définition respectifs D_f et D_g.

- Pour tout $x \in D_f \cap D_g$, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.
- Pour tout $x \in D_f \cap D_g$, $(fg)(x) = f(x) \times g(x)$.
- Pour tout $x \in D_f \cap D_g$ tel que $g(x) \neq 0$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Composition de fonctions

f et g sont deux fonctions d'ensembles de définition respectifs D_f et D_g.

- $x \in \mathcal{D}_{g \circ f} \Leftrightarrow x \in \mathcal{D}_f$ et $f(x) \in \mathcal{D}_g$
- Pour tout $x \in \mathcal{D}_{g \circ f}$, $g \circ f(x) = g[f(x)]$

Applications injective, surjective et bijective

Soit f est une application de E vers F.

- f est une application injective si et seulement si $\forall a \in E$, $\forall b \in E$, $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$.
- f est une application surjective si et seulement si : $\forall y \in F$, $\exists\, x \in E \;/\; y = f(x)$.
- f est une application bijective si et seulement si : $\forall y \in F$, $\exists!\, x \in E \;/\; y = f(x)$.

Une application bijective est une application à la fois injective et surjective.

- f est une bijection et f^{-1} sa bijection réciproque.

On a : $\forall x \in E, \forall y \in F$, $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.

LIMITES ET CONTINUITÉ

- Limite de la somme

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

- Limite du produit

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	∞
$\lim\limits_{x\to a} (fg)(x)$	$l\times l'$	$+\infty$ si $l>0$ ou $-\infty$ si $l<0$	$-\infty$ si $l>0$ ou $+\infty$ si $l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

- Limite du quotient

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	$l>0$		$l<0$	
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	0 et $g(x)>0$	0 et $g(x)<0$	0 et $g(x)>0$	0 et $g(x)<0$
$\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{l}{l'}$	0		?	?	?	?	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Continuité

Soit f une fonction d'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ et a un élément de $\mathscr{D}_f$.
f est continue en a si f admet une limite finie en a et $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

DÉRIVATION

Nombre dérivé en un point

f est une fonction d'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ et a un élément de $\mathscr{D}_f$.
Si f est dérivable en a, alors $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Dérivée et opérations sur les fonctions

Fonction	$u+v$	ku ($k\in\mathbb{R}$)	uv	u^n	$\frac{u}{v}$	$\sqrt{u}$	$x\mapsto u(ax+b)$
Dérivée	$u'+v'$	ku'	$u'v+uv'$	$nu'u^{n-1}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$x\mapsto au'(ax+b)$

Dérivée et sens de variation

f est une fonction dérivable sur un intervalle K.

- f est croissante sur K si et seulement si f' est positive sur K.
- f est décroissante sur K si et seulement si f' est négative sur K.
- f est constante sur K si et seulement si f' est nulle sur K.

EXTENSION DE LA NOTION DE LIMITE

Limite à l'infini de fonction polynôme et rationnelle

- La limite d'une fonction polynôme à l'infini est égale à la limite de son monôme de plus haut degré.
- La limite d'une fonction rationnelle à l'infini est égale à la limite du quotient du monôme de plus haut degré du numérateur par le monôme de plus haut degré du dénominateur.

Asymptotes

- La droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à $(\mathscr{C}_f)$ lorsque $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty (\text{ou} -\infty)$, ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = +\infty$ $(\text{ou} -\infty)$, ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = +\infty$ $(\text{ou} -\infty)$.
- La droite d'équation $y = b$ est asymptote horizontale à $(\mathscr{C}_f)$ en $+\infty$ (resp. $-\infty$) lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b \left(resp \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b\right)$.

ÉTUDE ET REPRÉSENTATION GRAPHIQUE D'UNE FONCTION

Parité

- Une fonction f d'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ est paire lorsque pour tout x élément de $\mathscr{D}_f$, on a : $-x \in \mathscr{D}_f$ et $f(-x) = f(x)$.
- Une fonction f d'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ est impaire lorsque pour tout x élément de $\mathscr{D}_f$, on a : $-x \in \mathscr{D}_f$ et $f(-x) = -f(x)$.

Axe de symétrie

Le plan est muni d'un repère orthogonal.
La droite d'équation $x = a$ est axe de symétrie de la représentation graphique d'une fonction f lorsque l'une des propositions est vraie :

- $\forall x \in \mathbb{R}$ tel que $a + x \in \mathscr{D}_f$, on a : $a - x \in \mathscr{D}_f$ et $f(a + x) = f(a - x)$.
- $\forall x \in \mathscr{D}_f$, on a : $2a - x \in \mathscr{D}_f$ et : $f(2a - x) = f(x)$.
- La fonction : $x \mapsto f(a + x)$ est paire.

Centre de symétrie

Le plan est muni d'un repère orthogonal.
Le point $A(a\ ;\ b)$ est centre de symétrie de la représentation graphique d'une fonction f lorsque l'une des propositions est vraie :

- $\forall x \in \mathbb{R}$ tel que $a + x \in \mathscr{D}_f$, on a : $a - x \in \mathscr{D}_f$ et $f(a + x) + f(a - x) = 2b$.
- $\forall x \in \mathscr{D}_f$, on a : $2a - x \in \mathscr{D}_f$ et $f(2a - x) + f(x) = 2b$.
- La fonction : $x \mapsto f(a - x) + b$ est impaire.

Asymptote oblique

La droite d'équation : $y = ax + b$ est asymptote oblique à $(\mathscr{C}_f)$ en $+\infty$ (resp. $-\infty$) lorsque

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

$$\left(resp. \lim_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0\right).$$

SUITES NUMÉRIQUES

Suites arithmétiques

(u_n) est une suite arithmétique de raison r.

- Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$.
- Pour tous entiers naturels n et p, $u_n = u_p + (n - p)r$.
- Pour tous entiers naturels n et p tels que $p \leq n$,

$u_p + u_{p+1} + ... + u_n = (n - p + 1)\dfrac{u_p + u_n}{2}$.

Suites géométriques

(v_n) est une suite géométrique de raison q.

- Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = qv_n$.
- Pour tous entiers naturels n et p, $v_n = v_p q^{n-p}$.
- Pour tous entiers naturels n et p tels que $p \leq n$,

$v_p + v_{p+1} + ... + v_n = v_p\left(\dfrac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}\right)$, si $q \neq 1$.

STATISTIQUE

Soit $([a_i\ ;\ a_{i+1}[, n_i)$ une série statistique regroupée en classe.
c_i est le centre de la classe d'effectif n_i et N est l'effectif total.

Densité d'une classe

$$d = \frac{\text{effectif de la classe}}{\text{amplitude de la classe}}.$$

Moyenne de la série statistique

$$\overline{x} = \frac{c_1 \times n_1 + c_2 \times n_2 + ... + c_p \times n_p}{N}.$$

Variance et écart type

- $V = \dfrac{n_1 \times (c_1 - \overline{x})^2 + n_2 \times (c_2 - \overline{x})^2 + ... + n_p \times (c_p - \overline{x})^2}{N}$

ou

$$V = \frac{c_1^2 \times n_1 + c_2^2 \times n_2 + ... + c_p^2 \times n_p}{N} - (\overline{x})^2$$

- $\sigma = \sqrt{V}$.

DÉNOMBREMENT

Cardinal

Soit A et B deux ensembles finis.

- $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$.
- $\text{card}(A \times B) = \text{card}(A) \times \text{card}(B)$.

p-uplets

Le nombre de p-uplets d'un ensemble de n éléments est : n^p.

Arrangements

Le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble de n éléments, $1 \leq p \leq n$, est : A_n^p.

$$A_n^p = \underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1)}_{p \text{ facteurs}} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Permutations

Le nombre de permutations d'un ensemble de n éléments est : $n!$.

$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$.

NB : $0! = 1$

Combinaisons

Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble de n éléments, $0 \leq p \leq n$, est : C_n^p.

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} \text{ pour } 1 \leq p \leq n$$

PROBABILITÉ

- $P(A) = \dfrac{\text{Nombre de cas favorables à la réalisation de A}}{\text{Nombre de cas possibles}}$
  $= \dfrac{\text{card}A}{\text{card}\Omega}$ dans une situation d'équiprobabilité
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- Si $\overline{A}$ est l'évènement contraire de A, alors $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

BARYCENTRE

Barycentre

- A, B et C sont trois points du plan et a, b et c sont des réels tels que $a + b + c \neq 0$.

Si G est le barycentre des trois points pondérés (A, a) ; (B, b) ; (C, c) alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$
- $\overrightarrow{AG} = \dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$
- Pour tout point M du plan,

$a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a+b+c)\overrightarrow{MG}$

Coordonnées du barycentre

Le plan est muni du repère (O, I, J).
Si G est le barycentre des trois points pondérés (A, a) ; (B, b) ; (C, c) et si

$$A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}, B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}, C\begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}, \text{ alors } G\begin{pmatrix} \dfrac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c} \\ \dfrac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c} \end{pmatrix}$$

ANGLES ORIENTÉS ET TRIGONOMÉTRIE

Formules d'addition

- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

Formules de duplication

- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$
- $\sin 2a = 2\cos a \times \sin a$

Formules de linéarisation

- $\cos^2 a = \dfrac{1 + \cos 2a}{2}$
- $\sin^2 a = \dfrac{1 - \cos 2a}{2}$

Formule de transformation d'une somme en un produit

- $\cos a + \cos b = 2 \cos \dfrac{a+b}{2} \cos \dfrac{a-b}{2}$
- $\cos a - \cos b = -2 \sin \dfrac{a+b}{2} \sin \dfrac{a-b}{2}$
- $\sin a + \sin b = 2 \sin \dfrac{a+b}{2} \cos \dfrac{a-b}{2}$
- $\sin a - \sin b = 2 \cos \dfrac{a+b}{2} \sin \dfrac{a-b}{2}$

Formule de transformation d'un produit en une somme

- $\cos a . \cos b = \dfrac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$
- $\sin a . \sin b = -\dfrac{1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)]$
- $\sin a . \cos b = \dfrac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$
- $\cos a . \sin b = \dfrac{1}{2}[\sin(a+b) - \sin(a-b)]$

COMPOSÉES DE TRANSFORMATIONS DU PLAN

Composition

- Soient r et r' deux rotations de même centre A et d'angles orientés respectifs $\widehat{\theta}$ et $\widehat{\theta'}$.
- $r \circ r' = r' \circ r$;
- $r \circ r'$ est la rotation de centre A et d'angle orienté $\widehat{\theta} + \widehat{\theta'}$.

- Soient h et h' deux homothéties de même centre A et de rapports non nuls respectifs k et k'.
- $h \circ h' = h' \circ h$;
- $h \circ h'$ est l'homothétie de centre A et de rapport kk'.

ORTHOGONALITÉ DANS L'ESPACE

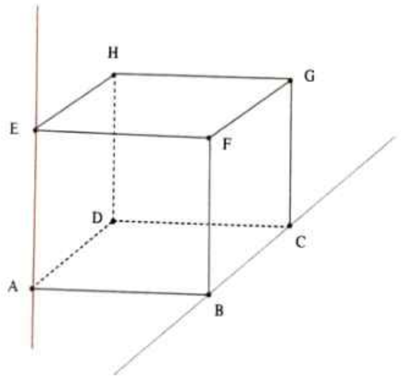
Droites orthogonales

Définition

- On dit que deux droites sont orthogonales lorsque les parallèles à chacune d'elles passant par un même point sont perpendiculaires.

Notation : (D) orthogonale à (L) se note : (D) $\perp$ (L).

Illustration



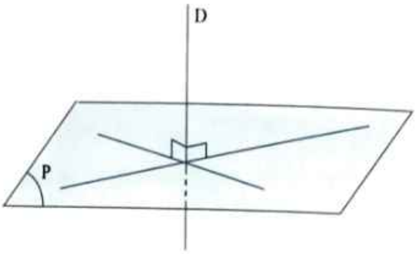
La droite (AE) est orthogonale à la droite (BC).

Remarques : Deux droites orthogonales de l'espace ne sont pas nécessairement coplanaires.
Lorsqu'elles le sont, elles sont sécantes et on dit qu'elles sont perpendiculaires.

Droite orthogonale à un plan

Définition

- On dit qu'une droite (D) est orthogonale à un plan (P) lorsque (D) est orthogonale à deux droites sécantes de (P).



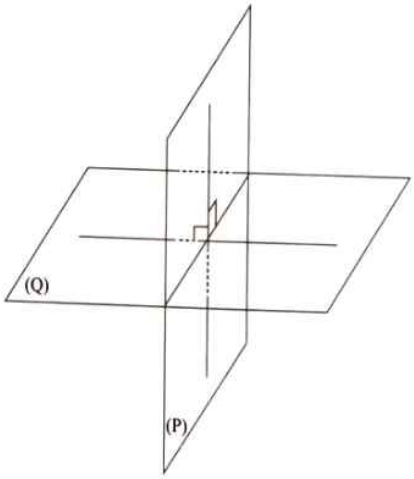
Vocabulaire et notation

On dit aussi que (D) est orthogonale à (P).
On note (D) $\perp$ (P).

Plans perpendiculaires

Définition

- On dit que deux plans sont perpendiculaires lorsque l'un contient une droite orthogonale à l'autre.



Exercice 1 Utiliser des limites de référence

Calcule les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \frac{1-4x}{x-3}$; b) $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} \frac{1-4x}{x-3}$; c) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1-\cos x}{\sin x}$.

Corrigé

a) $\frac{1-4x}{x-3} = \frac{1}{x-3} \times (1-4x)$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \frac{1}{x-3} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} 1-4x = -11$,

donc $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \frac{1-4x}{x-3} = +\infty$

b) $\frac{1-4x}{x-3} = \frac{1}{x-3} \times (1-4x)$

$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} \frac{1}{x-3} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} 1-4x = -11$,

donc $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} \frac{1-4x}{x-3} = -\infty$.

Méthode

- $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} \frac{1}{x-a} = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} \frac{1}{x-a} = +\infty$.
- Utiliser la limite d'un produit.
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1-\cos x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{\sin x}{x} = 1$

c) $\frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{1-\cos x}{x} \times \frac{x}{\sin x}$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1-\cos x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{\sin x}{x} = 1$; ainsi,

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{x}{\sin x} = 1$; donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1-\cos x}{\sin x} = 0$.

Exercice 2 Utiliser le nombre dérivé

Calcule les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$; b) $\lim\limits_{x \to -3} \frac{\sqrt{x+7}-2}{x-3}$.

Corrigé

Posons : $f(x) = \sqrt{x+7}$; $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+7}}$

et $f'(2) = \frac{1}{6}$; $f'(-3) = \frac{1}{4}$.

$\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{1}{6}$.

Méthode

On peut utiliser le nombre dérivé pour calculer les limites.

$\lim\limits_{x \to -3} \frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2} = \lim\limits_{x \to -3} \frac{f(x)-f(-3)}{x+3} = \frac{1}{4}$.

Exercice 3 Utiliser une factorisation

Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+2x-1}+4x$; b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+2x-1}-4x$.

Corrigé

a) $\sqrt{x^2+2x-1}+4x = \sqrt{x^2(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2})}+4x$

$= |x|\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+4x$

$= -x\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+4x$,

si $x \in]-\infty ; -1]$

$= x(-\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+4)$, si $x \in]-\infty ; -1]$

Méthode

On peut utiliser une factorisation pour calculer les limites.

$\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} -\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+4 = 3$.

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+2x-1}+4x = -\infty$

b) $\sqrt{x^2+2x-1}-4x = \sqrt{x^2(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2})}-4x$.

$$= |x|\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}-4x$$
$$= x\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}-4x,$$
si $x \in]1;+\infty[$

$$= x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}-4\right), \text{ si } x \in]1;+\infty[$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}-4 = -3,$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x-1}-4x = -\infty$

Exercice 4 Utiliser l'expression conjuguée et une factorisation

Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x}-x$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x}+x$; c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

Corrigé

a) $$\sqrt{x^2+2x}-x = \frac{(\sqrt{x^2+2x}-x)(\sqrt{x^2+2x}+x)}{\sqrt{x^2+2x}+x}$$
$$= \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}$$
$$= \frac{2x}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}+x}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}, \text{ si } x \in]1;+\infty[$$
$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x}-x = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1} = 1.$$

b) $$\sqrt{x^2+2x}+x = \frac{(\sqrt{x^2+2x}+x)(\sqrt{x^2+2x}-x)}{\sqrt{x^2+2x}-x}$$
$$= \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}-x}$$
$$= \frac{2x}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}-x}$$
$$= \frac{2}{-\sqrt{1+\frac{2}{x}}-1}, \text{ si } x \in]-\infty;-1]$$

Méthode

Pour calculer les limites, on peut utiliser l'expression conjuguée.

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x}+x = \frac{2}{-\sqrt{1+\frac{2}{x}}-1} = -1$$

c) $$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}$$
$$= \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$
$$= \frac{\sin^2 x}{x^2} \times \frac{1}{1+\cos x}$$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}$

donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Exercice 5 Utiliser une comparaison

Calcule la limite suivante :

$\lim\limits_{x\to 0} \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Corrigé

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \le 1$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $|\sin x|\left|\sin\frac{1}{x}\right| \le |\sin x|$

$\lim\limits_{x\to 0} |\sin x| = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} |\sin x|\left|\sin\frac{1}{x}\right| = 0$

Méthode

On peut calculer les limites en utilisant une comparaison.

$\lim\limits_{x\to 0} \left|\sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| = 0,$

donc $\lim\limits_{x\to 0} \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$

Exercice 6 Encadrement de solution de l'équation $f(x) = 0$

1. Démontre que l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ a une unique solution α dans $[0 ; 1]$.
2. Détermine un encadrement de α d'amplitude 10^{-1} par la méthode de dichotomie.

Corrigé

1. Soit f la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par $f(x) = x^3 + x - 1$.
Pour tout $x \in [0;1]$, $f'(x) = 3x^2 + 1$. Pour tout $x \in [0 ; 1]$, $f'(x) > 0$. Donc f est strictement croissante sur $[0 ; 1]$. $f(0) = -1$, $f(1) = 1$.
On a : $f(0) \times f(1) < 0$. f est continue et strictement croissante sur $[0 ; 1]$. Comme $f(0) \times f(1) < 0$; donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0 ; 1[$. On conclut que l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ a une unique solution dans $]0 ; 1[$.

2. L'équation $x^3 + x - 1 = 0$ a une unique solution dans $]0 ; 1[$.

$\frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = -0{,}37$ et $f(1) = 1$; $f(0) = -1$

$f(0{,}5) \times f(1) < 0$ donc $0{,}5 < \alpha < 1$

$\frac{0{,}5+1}{2} = 0{,}75$ on choisit 0,7 car il s'agit de déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}

$f(0{,}7) = 0{,}04$; $f(0{,}5) \times f(0{,}7) < 0$ donc $0{,}5 < \alpha < 0{,}7$

$\frac{0{,}5+0{,}7}{2} = 0{,}6$; $f(0{,}6) = -0{,}18$;

$f(0{,}6) \times f(0{,}7) < 0$ donc $0{,}6 < \alpha < 0{,}7$.

Méthode

Pour encadrer α on peut utiliser la méthode de dichotomie.

Exercice 7 Méthode de balayage

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Soit f la fonction définie sur $[-4 ; 4]$ par $f(x) = \frac{1}{4}(x^3 - 12x)$.

1. a) Détermine $f'(x)$ pour tout x élément de $[-4 ; 4]$.
   b) Dresse le tableau de variation de f.
2. Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[3 ; 4]$.
3. Détermine un encadrement de α d'amplitude 10^{-1} par la méthode de balayage.

Corrigé

1. a) Pour tout x élément de $[-4 ; 4]$,
$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3 = \frac{3}{4}(x-2)(x+2)$.

   b) Signe de la dérivée f'.
$\forall x \in [-4 ; -2] \cup [2 ; 4]$, $f'(x) \geq 0$ et $\forall x \in [-2 ; 2]$, $f'(x) \leq 0$.

$f(-3) = \frac{9}{4}$, $f(-2) = 4$, $f(2) = -4$ et $f(4) = 4$.

x	-3		-2		2		4
$f(x)$	$\frac{9}{4}$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-4	$\nearrow$	4

f est continue et strictement croissante sur $[3 ; 4]$ tel que $f([3 ; 4]) = \left[-\frac{9}{4} ; 4\right]$.

2. f est continue et strictement croissante sur $[3 ; 4]$ tel que $f([3 ; 4]) = \left[-\frac{9}{4} ; 4\right]$.
Or, $f(3) \times f(4) < 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[3 ; 4]$.

3. Déterminons un encadrement de α d'amplitude 0,1.

x	3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	...	4
Signe de $f(x)$	–	–	–	–	–	+	+	+

Comme $f(3{,}4) \times f(3{,}5) < 0$ donc $3{,}4 < \alpha < 3{,}5$.

Méthode

On peut encadrer une solution d'une équation par la méthode de balayage.

Résumé de cours

1 Calcul de limites à partir des limites de référence

1.1. Limites en $+\infty$ et en $-\infty$

n est un entier naturel non nul.

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty \text{ si } n \text{ est pair} \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases} ; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

1.2. Limites en 0

$$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x^n} = +\infty ; \quad \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty ; \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1}{x^n} = +\infty \text{ si } n \text{ est pair.} \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1}{x^n} = -\infty \text{ si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; • $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$

1.3. Limites en a, $a \in \mathbb{R}$, de $\frac{1}{(x-a)^n}$

$$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty. \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty \text{ si } n \text{ est pair.} \\ \lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} \frac{1}{(x-a)^n} = -\infty \text{ si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

1.4. Rappel des opérations sur les limites

a) Somme de fonction

Si f a pour limite en a	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si g a pour limite en a	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $f + g$ a pour limite en a	ℓ + L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	On ne peut conclure

b) Produit de fonction

Si f a pour limite en a	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Si g a pour limite en a	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
Alors $f.g$ a pour limite en a	$\ell \times$ L	$+\infty$ (si $\ell > 0$) $-\infty$ (si $\ell < 0$)	$-\infty$(si $\ell > 0$) $+\infty$(si $\ell < 0$)	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	On ne peut conclure

c) Quotient de fonction (L ≠ 0 et ℓ ≠ 0)

Si f a pour limite en a	ℓ	ℓ	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Si g a pour limite en a	L	$+\infty$	0	L	L	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $\frac{f}{g}$ a pour limite en a	$\frac{\ell}{L}$	0	On ne peut conclure	$+\infty$ (si L > 0) $-\infty$ (si L < 0)	$-\infty$(si L > 0) $+\infty$(si L < 0)	On ne peut conclure

2 Limite d'une composée de deux fonctions

Propriété Soit $v \circ u$ la composée de deux fonctions u et v, a un élément ou une borne d'un intervalle sur lequel $v \circ u$ est définie et a, b et ℓ des éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty ; +\infty\}$.
Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$ et $\lim\limits_{x \to b} v(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x \to a} v \circ u(x) = \ell$.

3 Techniques de calculs des limites

3.1. Utilisation d'une expression conjuguée

Méthode

Pour calculer une limite, on peut :

- Utiliser l'expression conjuguée.
- Simplifier ou factoriser si nécessaire.

3.2. Utilisation d'un nombre dérivé

Méthode

Pour calculer une limite, on peut :

- Utiliser le taux de variation de f en a : $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
- Calculer $f'(x)$ puis $f'(a)$.
- Conclure en utilisant $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$.

3.3. Utilisation des propriétés de comparaison

a est un nombre réel.

Pour calculer une limite par comparaison on peut utiliser les propriétés suivantes :

Si $f(x) \leq g(x)$ sur $[b\,;c]$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) \leq \lim\limits_{x \to a} g(x)$ $(a \in [b\,;c\,])$.

Si $g(x) \leq f(x)$ sur $[a\,;+\infty[$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Si $g(x) \leq f(x)$ sur $[a\,;+\infty[$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

Si $g(x) \leq f(x)$ sur$]-\infty\,;a]$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Si $g(x) \leq f(x)$ sur $]-\infty\,;a]$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$.

Si sur $[a\,;+\infty[$,$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$; $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \ell$.

Si sur $]-\infty\,;a]$,$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$; $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \ell$.

On admet les propriétés suivantes :

Propriété 1 Soit f une fonction croissante sur un intervalle ouvert $]a\,;b[$, $(a < \text{b})$.

- Si f est majorée sur $]a$; b[, alors f admet une limite finie à gauche en b.
- Si f est minorée sur $]a\,;b[$, alors f admet une limite finie à droite en a.

3.4. Limite d'une fonction monotone sur un intervalle ouvert.

Remarque

De manière analogue, pour une fonction f décroissante sur un intervalle ouvert $]a\,;b[$:

- Si f est majorée sur $]a\,;b[$, alors f admet une limite finie à gauche en b.
- Si f est minorée sur $]a\,;b[$, alors f admet une limite finie à droite en a.

Propriété 2 Soit f une fonction croissante sur un intervalle ouvert $]a\,;b[$, $(a < \text{b})$.

- Si f est non majorée sur $]a\,;b[$, alors f a pour limite $+\infty$ à gauche en b.
- Si f est non minorée sur $]a\,;b[$, alors f admet une limite $-\infty$ à droite en b.

Remarques

De manière analogue, pour une fonction f décroissante sur un intervalle ouvert $]a\,;b[$:

- Si f est non majorée sur $]a\,;b[$, alors f a pour limite $+\infty$ à droite en a.
- Si f est non minorée sur $]a\,;b[$, alors f a pour limite $-\infty$ à gauche en b.

4 Prolongement par continuité

Rappels

Définition Soit f une fonction d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ et x_0 un élément de $\mathcal{D}_f$.
On dit que f est continue en x_0 si f admet en x_0 une limite finie et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Prolongement par continuité

Définition Soit f une fonction d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ et x_0 un nombre réel n'appartenant pas à $\mathcal{D}_f$.
On dit que f admet en x_0 un prolongement par continuité lorsque f admet en x_0 une limite finie.

Remarque

Soit g le prolongement par continuité de f en x_0.

On a : $\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{si } x \in \mathcal{D}_f \\ g(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) & \end{cases}$

5 Interprétation graphique de limites

Dans cette partie, f désigne une fonction, $\mathcal{D}_f$ son ensemble de définition et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O, I, J).

Rappels

Asymptotes parallèles aux axes

Définition Soit f une fonction de courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$.
- Lorsque f a une limite b en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$), on dit que la droite d'équation $y = b$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$).
- Lorsque f a une limite infinie à droite ou à gauche en x_0, on dit que la droite d'équation $x = x_0$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

Asymptote oblique

Définition Soit f une fonction de courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$.
Lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)-(ax+b) = 0$ (respectivement $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)-(ax+b) = 0$) on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$).

Résumé de cours

Branches paraboliques

Définition Soit f une fonction de courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$.

Lorsqu'on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ ou $-\infty$ (respectivement $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

On dit que la courbe $(\mathscr{C}_f)$ admet en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de (OJ) (respectivement (OI)).

6 Continuité d'une fonction sur un intervalle

6.1. Opérations sur les fonctions continues sur un intervalle

Propriété Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle K.

- Les fonctions $f+g$, fg, kf $(k \in \mathbb{R})$ et $|f|$ sont continues sur K.
- Si g ne s'annule pas sur K, alors $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont continues sur K.

6.2. Composée de deux fonctions continues sur un intervalle

Propriété Soient K et K' deux intervalles.
Soit f une fonction continue sur K telle $f(\text{K}) \subset \text{K}'$ et g une fonction continue sur K'.
La fonction $g \circ f$ est continue sur K.

6.3. Image d'un intervalle par une fonction continue

Propriété 1 L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Propriété 2 Soit f une fonction définie sur un intervalle fermé $[a, b]$.
Si f est continue sur $[a, b]$, alors $f([a, b])$ est un intervalle fermé $[m, \text{M}]$ où m et M sont respectivement le minimum et le maximum de f sur $[a, b]$.

Remarque

L'image d'un intervalle ouvert par une fonction continue n'est pas toujours un intervalle ouvert.

6.4. Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone

Propriété Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle K.
$f(\text{K})$ est un intervalle ou un singleton.
Le tableau ci-après précise $f(\text{K})$ suivant la nature de K et le sens de variation de f.

L'intervalle K	L'intervalle $f(\text{K})$	
	f est strictement croissante sur K	f est strictement décroissante sur K
$[a, b]$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$
$]a, b[$	$]\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x), \lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} f(x)[$	$]\lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} f(x), \lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x)[$

$[a, b[$	$[f(a), \lim\limits_{x \underset{<}{\to} b} f(x)[$	$]\lim\limits_{x \underset{<}{\to} b} f(x), f(a)]$
$]a, b]$	$]\lim\limits_{x \underset{>}{\to} a} f(x), f(b)]$	$[f(b), \lim\limits_{x \underset{>}{\to} a} f(x)[$
$]-\infty, b]$	$]\lim\limits_{x \to -\infty} f(x), f(b)]$	$[f(b), \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)[$
$]a ; +\infty[$	$]\lim\limits_{x \underset{>}{\to} a} f(x), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)[$	$]\lim\limits_{x \to +\infty} f(x), \lim\limits_{x \underset{>}{\to} a} f(x)[$
$\mathbb{R}$	$]\lim\limits_{x \to -\infty} f(x), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)[$	$]\lim\limits_{x \to +\infty} f(x), \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)[$

6.5. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle K, a et b deux éléments de K.
Tout nombre réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ a au moins un antécédent par f compris entre a et b.

7 Fonctions continues et strictement monotones sur un intervalle

7.1. Bijection

Propriété Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle K, alors :

- f réalise une bijection de K sur f(K).
- Sa bijection réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone sur f(K).
- f et f^{-1} ont le même sens de variation.

7.2. Solution de l'équation $f(x) = 0$

Propriété Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle K.
Pour tout réel m de f(K), l'équation $f(x) = m$ admet une unique solution dans K.

Corollaire

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a, b]$.
Si $f(a) \times f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]a, b[$.

8 Techniques d'encadrement des zéros d'une fonction

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $[a, b]$. Si $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]a, b[$.
Déterminons un encadrement de α d'amplitude ℓ.

8.1. Méthode de balayage

Méthode

- On commence par balayer l'intervalle $[a, b]$ avec un pas de 1.

C'est-à-dire qu'on calcule $f(a), f(a+1), f(a+2)$,... On s'arrête dès qu'on a trouvé deux entiers consécutifs n et $n+1$ pour lesquels $f(n)$ et $f(n+1)$ sont de signes opposés.
On sait alors que $\alpha \in]n ; n+1[$.

- On balaie ensuite l'intervalle $[n ; n+1]$ avec un pas de 0,1. On calcule donc $f(n)$, $f(n+0{,}1)$, $f(n+0{,}2)$,... et on s'arrête dès qu'on a trouvé p de sorte que $f(n+0, p)$ et $f(n+0, p+0{,}1)$ sont de signes opposés.

- On continue en balayant l'intervalle $[n + 0,p ; n + 0,p + 0,1]$ avec un pas de 0,01.

Et ainsi de suite...

8.2. Méthode de dichotomie

Méthode

- On détermine le centre $\frac{a+b}{2}$ de l'intervalle $]a, b[$.
- On calcule $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.
- Si $f(a) \times f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$, alors $\alpha \in \left]a ; \frac{a+b}{2}\right[$ sinon $\alpha \in \left]\frac{a+b}{2} ; b\right[$.
- Si l'amplitude $\frac{a+b}{2}$ de l'intervalle $\left]a ; \frac{a+b}{2}\right[$ ou $\left]\frac{a+b}{2} ; b\right[$ est inférieure à ℓ, alors on s'arrête, sinon on répète le processus n fois jusqu'à ce que l'amplitude $\frac{b-a}{2^n}$ soit inférieure à ℓ.

9 Puissances d'exposants rationnels

9.1. Fonction racine $n^{\text{ième}}$

Définition Soit n un entier naturel non nul.
La fonction racine $n^{\text{ième}}$ est la bijection réciproque de la fonction : $\begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^n \end{array}$.

Notation

L'image de tout nombre réel positif x par la fonction racine $n^{\text{ième}}$ est notée $\sqrt[n]{x}$ ou $x^{\frac{1}{n}}$.
Si $n = 2$, alors on note $\sqrt{x}$ et on lit racine carrée de x.
Si $n = 3$, alors on note $\sqrt[3]{x}$ et on lit racine cubique de x.

Conséquences

- $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt[n]{x^n} = (\sqrt[n]{x})^n = x$.
- $\begin{cases} x \in \mathbb{R}_+, \\ y = \sqrt[n]{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \mathbb{R}_+, \\ x = y^n \end{cases}$
- La fonction racine $n^{\text{ième}}$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
- La courbe représentative de la fonction racine $n^{\text{ième}}$ et celle de la fonction $x \mapsto x^n$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ dans un repère orthonormé.

Remarque

On étend de même aux racines $n^{\text{ièmes}}$ toutes les propriétés de calculs établies pour les racines carrées.

9.2. Puissance d'exposant rationnel

Définition Soient $p \in \mathbb{Z}^*$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$.
On appelle x à la puissance $\frac{p}{q}$, le nombre réel noté $x^{\frac{p}{q}}$, défini par :
$x^{\frac{p}{q}} = (x^{\frac{1}{q}})^p$. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p} = (\sqrt[q]{x})^p$.

Remarque

On étend de même aux puissances d'exposants rationnels toutes les propriétés de calculs établies pour les puissances d'exposants entiers.

Activité 7 Inégalités des accroissements finis

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, a et b deux éléments de I tels que $a < b$, m et M deux nombres réels tels que : $\forall x \in [a, b]$, $m \leq f'(x) \leq M$.

1. On définit la fonction g sur $[a, b]$ par : $g(x) = f(x) - mx$.
   a) Détermine $g'(x)$ sur $[a, b]$ et donne son signe sur $[a, b]$.
   b) En utilisant le sens de variation de g sur $[a, b]$, compare $g(a)$ et $g(b)$ puis déduis-en l'inégalité $m(b-a) \leq f(b) - f(a)$.
2. On définit la fonction h sur $[a, b]$ par : $h(x) = Mx - f(x)$.
   a) Détermine $h'(x)$ sur $[a, b]$ et son signe sur $[a, b]$.
   b) En utilisant le sens de variation de h sur $[a, b]$, compare $h(a)$ et $h(b)$ puis déduis-en l'égalité $f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.
3. Déduis des équations 1. b) et 2. b) que : $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.
4. On suppose que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq M$. Soient a et b deux éléments de I.
   a) Trouve un encadrement de $f'(x)$ sur $[a, b]$.
   b) Déduis des questions précédentes que : $|f(b) - f(a)| \leq M\,|b-a|$.

Synthèse

Soit f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.

- Soient a et b deux éléments de I ($a < b$). S'il existe deux réels m et M tels que $\forall x \in [a, b]$, $m \leq f'(x) \leq M$, alors on a : $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.
- Si $\forall x \in I$, $|f'(x)| \leq M$ alors pour tous éléments a et b de I , on a : $|f(b) - f(a)| \leq M|b-a|$.

Exercices de fixation

7-1 Complète chacune des phrases par l'inégalité correcte.

1. Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I, a et b deux éléments de I ($a < b$). S'il existe deux réels m et M tels que : $\forall x \in [a, b]$, $m \leq f'(x) \leq M$, alors on a : ......
2. Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et s'il existe un nombre M. Tel que ....alors pour tous réels a et b de I , on a : $|f(b) - f(a)| \leq M|b-a|$.

7-2 Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $[-1, 3]$ telle que pour tout réel x de $[-1, 3]$, $2 \leq f'(x) \leq 5$.

Soit g une fonction dérivable $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x, $|g'(x)| \leq 3$.

Pour chaque inégalité, écris V si elle est vraie et F si elle ne l'est pas.

a) $8 \leq f(3) - f(-1) \leq 20$.

b) $8 \leq f(3) + f(-1) \leq 20$.

c) $|g(3) - g(-1)| \leq 3$.

d) $|g(3) - g(-1)| \leq 12$.

7-3 On rappelle que pour tout nombre réel, $|\cos x| \leq 1$.

Démontre que pour nombres réels a et b, on a : $|\sin a - \sin b| \leq |a-b|$.

APPRENTISSAGE DE LA RÉDACTION

Exercice 1 Étudier une fonction définie par intervalles

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).
On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + x^2 - 9$ si $x \leq 2$ et $f(x) = 3 + \sqrt{x^2 - 4}$ si $x \geq 2$.
On note $(\mathscr{C}_f)$ sa représentation graphique.

1. a) Étudie la dérivabilité de f en 2.
   b) Précise les tangentes à $(\mathscr{C}_f)$ au point d'abscisse 2.

2. Soit g la restriction de f à $[2, +\infty[$.

2.1. Étudie le sens de variation de g et dresse son tableau de variation.

2.2. Démontre que g réalise une bijection de $[2, +\infty[$ sur un intervalle K à préciser.

2.3. a) Calcule $g(2\sqrt{2})$.

b) Démontre que g^{-1} est dérivable en 5 et calcule $(g^{-1})'(5)$.

3. Soit h la restriction de f à $]-\infty, 2]$ et $(\mathscr{C}_h)$ sa représentation graphique.

a) Calcule les 2 premières dérivées de h.

b) Démontre que $(\mathscr{C}_h)$ admet un point d'inflexion dont tu préciseras les coordonnées.

Corrigé

1. a) - Dérivabilité de f à gauche en 2.

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{x^3+x^2-9-3}{x-2}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{x^3+x^2-12}{x-2} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{(x-2)(x^2+3x+6)}{x-2}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} (x^2+3x+6) = 17.$$

Donc f est dérivable à gauche en 2 et $f_g'(2) = 17$.

- Dérivabilité de f à droite en 2.

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{3+\sqrt{x^2-4}-3}{x-2}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \sqrt{\frac{x^2-4}{(x-2)^2}} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \sqrt{\frac{x+2}{x-2}} = +\infty.$$

Donc f n'est pas dérivable à droite en 2.

On en déduit que f n'est pas dérivable en 2.

b) Tangentes à $(\mathscr{C}_f)$ au point d'abscisse 2.

- On a $f_g'(2) = 17$, $(\mathscr{C}_f)$ admet au point d'abscisse 2 à gauche une demi-tangente (T_g) d'équation : $y = 17(x-2)+3$ soit $y = 17x - 31$.

- On a $\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = +\infty$, $(\mathscr{C}_f)$ admet au point d'abscisse 2 à droite une demi-tangente verticale.

2.1. g est dérivable sur $]2, +\infty[$ et $\forall\, x \in]2,+\infty[$,

$$g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}.$$

Pour tout $x > 2$, $\frac{x}{\sqrt{x^2-4}} > 0$ donc g est strictement croissante sur $]2,+\infty[$.

- Limite de f en $+\infty$ et en 2.

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} 3+\sqrt{x^2-4} = 3 \text{ et}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 3+\sqrt{x^2-4} = +\infty$$

car $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2-4} = +\infty$.

Méthode

Pour la dérivabilité en 2, il faut choisir la fonction qui convient. Pour chaque question, identifier l'intervalle et choisir la fonction qui convient.

Tableau de variation de g.

x	2	$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$
$g(x)$	3 ↗	$+\infty$

2.2. Démontrons que g réalise une bijection.

g est continue et strictement croissante sur $[2,+\infty[$ telle que $g([2,+\infty[) = [3, +\infty[$, donc g réalise une bijection de $[2,+\infty[$ sur $[3,+\infty[= K$.

2.3. a) Calcul de $g(2\sqrt{2})$.

$$g(2\sqrt{2}) = 3 + \sqrt{(2\sqrt{2})^2-4} = 5.$$

b) Démontrons que g^{-1} est dérivable en 5.

On a $g^{-1}(5) = 2\sqrt{2}$, or g est dérivable en $2\sqrt{2}$ et $g'(2\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ et $\sqrt{2} \neq 0$.

Donc g^{-1} est dérivable en 5.

De plus on a $(g^{-1})'(5) = \frac{1}{g'(2\sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

3. a) Calcul de h' et h''.

h est dérivable sur $]-\infty, 2]$, $h'(x) = 3x^2 + 2x$.

h' est dérivable sur $]-\infty, 2]$, $h''(x) = 6x + 2$.

b) Démontrons que $(\mathscr{C}_h)$ admet un point d'inflexion.

h est deux fois dérivable sur $]-\infty, 2]$ et $h''(x) = 6x + 2$.

$h''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$.

$h''(x) < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{3}$ et $h''(x) > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{3}$,

h'' s'annule en $-\frac{1}{3}$ en changeant de signe,

On a : $g\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 9 = -\frac{79}{27}$;

d'où $(\mathscr{C}_h)$ admet le point $A\left(-\frac{1}{3}, -\frac{79}{27}\right)$ comme point d'inflexion.

Exercice 2 Utiliser l'inégalité des accroissements finis

Soit f la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{x^2+3}$.

En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction f, démontre que pour tous réels a et b, on a : $|\sqrt{a^2+3} - \sqrt{b^2+3}| \leq |a-b|$.

Corrigé

f est dérivable sur $\mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

On a : $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$.

- $\forall x \in \mathbb{R}$,

$x^2 < x^2 + 3$

$\sqrt{x^2} < \sqrt{x^2+3}$

$|x| < \sqrt{x^2+3}$

$-\sqrt{x^2+3} < x < \sqrt{x^2+3}$

$-1 < \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}} < 1$

C'est-à-dire que $-1 \leq f'(x) \leq 1$, soit $|f'(x)| \leq 1$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leq 1$. D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tous réels a et b, on a :

$|f(a) - f(b)| \leq 1.|a-b|$

soit $|\sqrt{a^2+3} - \sqrt{b^2+3}| \leq |a-b|$.

Méthode

$M = 1$ donc il faut démontrer $|f'(x)| < 1$.

Exercice 3 Étudier une fonction du type : $x \mapsto \cos(ax+b)$, $a \neq 0$

Étudie et représente graphiquement la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \cos(2x + \frac{\pi}{3})$.

Corrigé

- L'ensemble de définition D de la fonction f est $\mathbb{R}$.
- f est périodique de période π. En effet si $x \in D$ alors $x + \pi \in D$ et $f(x+\pi) = \cos(2(x+\pi) + \frac{\pi}{3}) = \cos(2x + \frac{\pi}{3} + 2\pi) = \cos(2x + \frac{\pi}{3}) = f(x)$.
- On réduit l'ensemble d'étude à l'intervalle $[0, \pi]$.
- f est dérivable sur $[0, \pi]$ et $\forall x \in [0, \pi]$, $f'(x) = -2\sin(2x + \frac{\pi}{3})$.
- Signe de $f'(x)$ sur $[0, \pi]$.

$\sin(2x + \frac{\pi}{3}) \geq 0 \Leftrightarrow 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \pi + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + k\pi$

$\Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{5\pi}{6} \leq x \leq \pi$, car $x \in [0, \pi]$

$\text{Sin}(2x + \frac{\pi}{3}) \leq 0$

$\Leftrightarrow \pi + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq 2\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + k\pi$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$ car $x \in [0, \pi]$.

Donc $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [0, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{5\pi}{6}, \pi]$.

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}]$.

D'où f est décroissante sur $[0, \frac{\pi}{3}]$ et sur $[\frac{5\pi}{6}, \pi]$ et f est croissante sur $[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}]$.

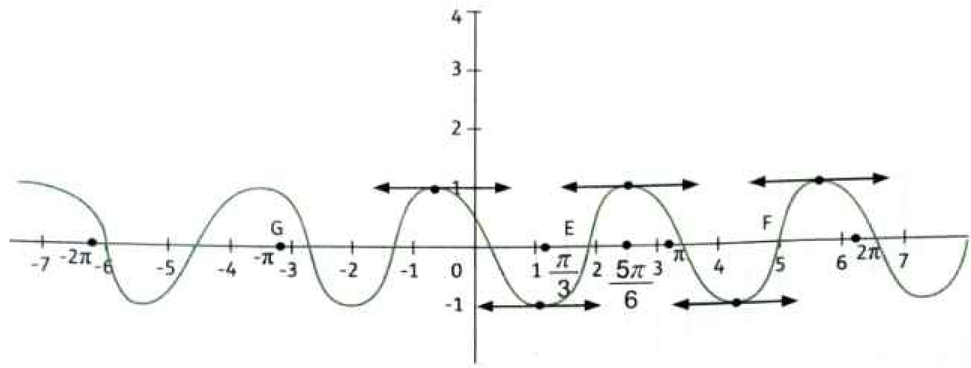
- Tableau de variation de f.

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	½	↘	-1	↗	1	↘	½

Méthode

Il faut déterminer la période de la fonction et réduire l'intervalle d'étude.

On construit $(\mathscr{C})_{[0,\pi]}$ puis par translations successives de vecteurs $\pi(\overrightarrow{OI})$ et $-\pi(\overrightarrow{OI})$.
On obtient $(\mathscr{C})$ sur $\mathbb{R}$.



Exercice 4 Étudier une fonction de type : $x \mapsto \tan(ax+b)$, $a \neq 0$

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \tan(3x+\frac{\pi}{6})$. Étudie et représente graphiquement f.

Corrigé

- Ensemble de définition D de f.

$x \in D \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $3x + \frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Donc $D = \mathbb{R}-\{\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\}$.

- f est périodique de périodique $\frac{\pi}{3}$.

En effet : si $x \in D$, alors $x + \frac{\pi}{3} \in D$ car si $x + \frac{\pi}{3} \notin D$,

alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{2\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{9} - \frac{3\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{9} + \frac{(k-1)\pi}{3}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}$ où $k \in \mathbb{Z}$

et $x \notin D$ ce qui est absurde d'où $x + \frac{\pi}{3} \in D$.

De plus : $f(x + \frac{\pi}{3}) = \tan(3(x + \frac{\pi}{3}) + \frac{\pi}{6}) =$
$\tan[(3x + \frac{\pi}{6}) + \pi] = f(x)$.

On réduit, l'ensemble d'étude à $[0, \frac{\pi}{3}]\backslash\{\frac{\pi}{9}\}$

- f est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{3}]\backslash\{\frac{\pi}{9}\}$ et

$\forall x \in [0, \frac{\pi}{3}]\backslash\{\frac{\pi}{9}\}$, $f'(x) = 3[1 + \tan^2(3x + \frac{\pi}{6})]$.

Signe de $f'(x)$ et sens de variation de f.

$\forall x \in [0, \frac{\pi}{3}]\backslash\{\frac{\pi}{9}\}$ $f'(x) > 0$ donc f est croissante

sur $[0, \frac{\pi}{9}[$ et sur $]\frac{\pi}{9}, \frac{\pi}{3}]$.

- Tableau de variation

$\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{9} \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{9} \\ <}} \tan(3x+\frac{\pi}{6}) = \lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ <}} \tan X = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{9} \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{9} \\ >}} \tan(3x+\frac{\pi}{6}) = \lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ >}} \tan X = -\infty$

Méthode

Il faut déterminer la période de la fonction et réduire l'intervalle d'étude.

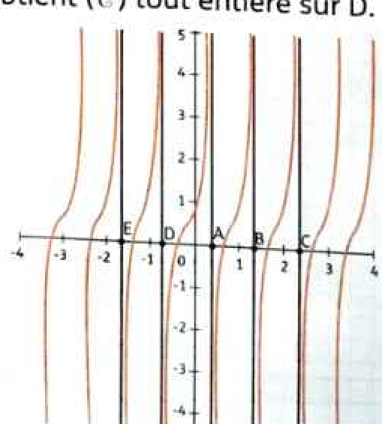
x	0		$\frac{\pi}{9}$		$\frac{\pi}{3}$
$f'(x)$		$+$	$\|$	$+$	
$f(x)$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\nearrow$	$+\infty \;\|\; -\infty$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

- Courbe de f.

$(\mathscr{C})$ admet une asymptote verticale d'équation $x = \frac{\pi}{9}$.

On construit $(\mathscr{C})$ sur $[0, \frac{\pi}{3}]\backslash\{\frac{\pi}{9}\}$ et par translations successives de vecteurs $-\frac{\pi}{3}\overrightarrow{OI}$ et $\frac{\pi}{3}\overrightarrow{OI}$.

On obtient $(\mathscr{C})$ tout entière sur D.



Exercice 5 Étudier une fonction comportant une valeur absolue

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = |x^2 + 2x - 3|$.

1. Détermine l'ensemble de définition D de f.
2. Détermine l'expression de $f(x)$ sans le symbole de valeur absolue.
3. Détermine la dérivabilité de f en -3 et en 1 et donne le sens de variation de f.
4. Étudie le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.
5. Représente la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

Corrigé

Méthode

Pour étudier une fonction avec le symbole de valeur absolue, on écrit la fonction sans le symbole de valeur absolue.

1. La fonction $x \mapsto x^2 + 2x - 3$ est définie sur $\mathbb{R}$.
Donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. $f(x) = x^2 + 2x - 3 \quad \forall x \in]-\infty, -3] \cup [1, +\infty[$

$f(x) = -x^2 - 2x + 3 \quad \forall x \in [-3, 1]$

3. Dérivabilité de f en -3 et en 1.

$$\lim_{\substack{x \to -3 \\ <}} \frac{f(x) - f(-3)}{x - (-3)} = \lim_{\substack{x \to -3 \\ <}} \frac{(x+3)(x-1)}{x+3} = \lim_{x \to -3} x - 1 = -4.$$

$$\lim_{\substack{x \to -3 \\ >}} \frac{f(x) - f(-3)}{x - (-3)} = \lim_{\substack{x \to -3 \\ >}} \frac{(x+3)(-x+1)}{x+3} = \lim_{x \to -3} -x + 1 = 4.$$

$f'_g(-3) = -4$ et $f'_d(-3) = 4$ donc f n'est pas dérivable en -3.

($\mathscr{C}$) admet au point d'abscisse -3 deux demi-tangentes d'équations respectives :
$y = -4x - 12$ et $y = 4x + 12$.

On vérifie facilement de la même manière que f n'est pas dérivable en 1 car $f'_g(1) = -4$ et $f'_d(1) = 4$ et ($\mathscr{C}$) admet deux demi-tangentes d'équation :
$y = 4x - 4$ et $y = -4x + 4$.

4. Sens de variation de f.

f est dérivable sur $]-\infty, -3[\cup]1, +\infty[$,
$\forall x \in]-\infty ; -3[\cup]1, +\infty[$, $f'(x) = 2x + 2 = 2(x + 1)$

f est dérivable sur $]-3, 1[$
$\forall x \in]-3 ; 1[$, $f'(x) = -2x - 2 = -2(x + 1)$

Signe de $f'(x)$ sur $]-\infty ; -3[\cup]1 ; +\infty[$
$\forall x \in]-\infty ; -3[$, $f'(x) < 0$ et $\forall x \in]1 ; +\infty[$, $f'(x) > 0$.

Signe de $f'(x)$ sur $]-3 ; 1[$
$\forall x \in]-3 ; -1[$, $f'(x) > 0$
$\forall x \in]-1 ; 1[$, $f'(x) < 0$.

f est strictement décroissante sur $]-\infty ; -3[$ et sur $]-1 ; 1[$.

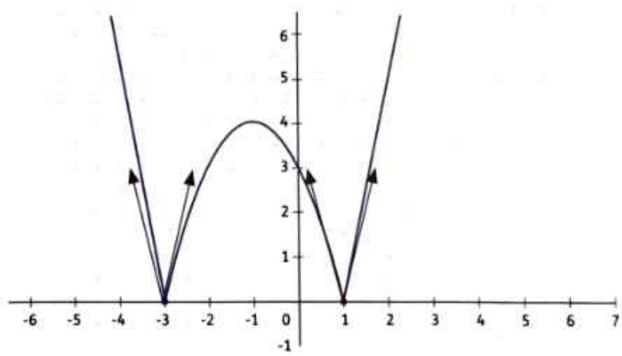
f est strictement croissante sur $]-3 ; -1[$ et sur $]1 ; +\infty[$.

Tableau de variation de f.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

5. Courbe de f.



Exercice 6 Étudier une fonction rationnelle.

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{3x+8}{4x^2-2x-12}$.

Étudie et trace la courbe représentative de f sur son ensemble de définition dans le plan muni d'un repère orthonormé.

Corrigé

a) Ensemble de définition D de f.

$x \in D \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $4x^2 - 2x - 12 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \in R$ et $x \neq 2$ et $x \neq \dfrac{-3}{2}$. Donc $D = \mathbb{R}\backslash\{\dfrac{-3}{2}, 2\}$.

b) Limites aux bornes de D.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{4x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{4x} = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{4x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{4x} = 0.$$

$(\mathscr{C}_f)$ admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$.

- On a $\forall x \in D, f(x) = \dfrac{3x+8}{4(x+\frac{3}{2})(x-2)}$

$$\lim_{\substack{x\to\frac{-3}{2}\\<}} f(x) = \frac{3x+8}{4(x-2)} \times \frac{1}{x+\frac{3}{2}} = +\infty$$

car $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{-3}{2}\\<}} \dfrac{1}{x+\frac{3}{2}} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{-3}{2}\\<}} \dfrac{3x+8}{4(x-2)} = \dfrac{-1}{4}$.

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{-3}{2}\\>}} \dfrac{1}{x+\frac{3}{2}} = +\infty$, on a $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{-3}{2}\\>}} f(x) = -\infty$.

$$\lim_{\substack{x\to 2\\<}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\<}} \frac{3x+8}{4(x-\frac{3}{2})} \times \frac{1}{x-2} = -\infty$$

car $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\<}} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\<}} \dfrac{3x+8}{4(x-\frac{3}{2})} = 1$.

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\<}} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$, on a $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\>}} f(x) = +\infty$.

On déduit de ces limites que les droites d'équations $x = \dfrac{-3}{2}$ et $x = 2$ sont des asymptotes verticales à $(\mathscr{C}_f)$.

c) Sens de variation de f.

- f est dérivable sur D et $\forall\, x \in D$, on a :

$$f'(x) = \frac{3(4x^2-2x-12)-(3x+8)(8x-2)}{(4x^2-2x-12)^2}$$

$$= \frac{-12x^2-64x-20}{(4x^2-2x-12)^2}$$

$$= \frac{-(x-5)(3x+1)}{(2x^2-x-6)^2}$$

Méthode

Il faut dresser le tableau de variation, rechercher les asymptotes avant de construire la courbe f.

- Signe de $f'(x)$ sur D.

x	$-\infty$		-5		$\frac{-3}{2}$		$\frac{-1}{3}$		2		$+\infty$
$-(x+5)(x+\frac{1}{3})$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$(2x^2-x-6)^2$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	||	$-$	

- Sens de variations

f est strictement croissante sur $]-5, \frac{-3}{2}[$ et sur $]-\frac{-3}{2}, \frac{-1}{3}[$.

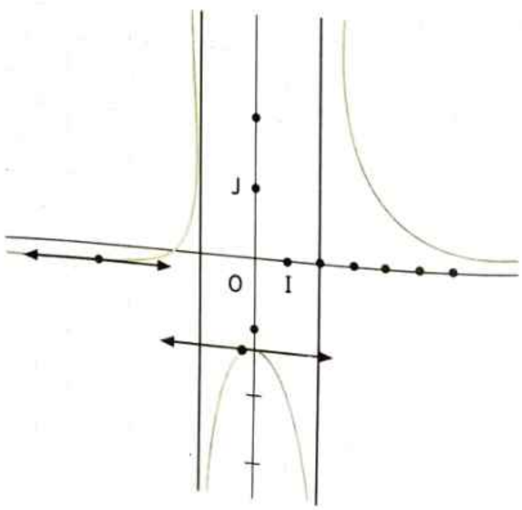
f est strictement décroissante sur $]-\infty,-5[$, sur$]\frac{-1}{3}, 2[$ et sur $]2,+\infty[$.

- Tableau de variation de f.

x	$-\infty$		-5		$\frac{-3}{2}$		$\frac{-1}{3}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	||	$-$	
$f(x)$	0	↘	$\frac{1}{4}$	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	$\frac{-9}{14}$	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	0

d) Courbe de f.

On prendra pour unités OI = 1 cm et OJ = 5 cm.



Exercice 7 Étudier une fonction irrationnelle.

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \sqrt{(x-1)(x+3)}$.

1. Détermine l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
2. Calcule les limites de f aux bornes de $\mathscr{D}_f$.
3. Justifie que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ en $+\infty$ et la droite $(\mathscr{D}')$ d'équation $y = -x - 1$ et asymptote à $(\mathscr{C})$ en $-\infty$.
4. Étudie la dérivabilité de f en 1 et en 3.
5. Étudie les variations de f puis dresse son tableau de variation.
6. Construis $(\mathscr{D})$, $(\mathscr{D}')$ et $(\mathscr{C})$.

Corrigé

1. Ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f.

$x \in \mathscr{D}_f \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $(x-1)(x+3) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $x \in]-\infty, -3] \cup [1, +\infty[$, donc $\mathscr{D}_f =]-\infty, -3] \cup [1, +\infty[$.

2. Limites aux bornes de $\mathscr{D}_f$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-1)(x+3) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} (x-1)(x+3) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

3. Asymptotes

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (x+1) = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+2x-3} - (x+1)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-4}{\sqrt{x^2+2x-3} - x - 1} = 0.$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+2x-3} - (x+1) = 0$

(D) est asymptote à $(\mathscr{C}_f)$ en $+\infty$.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) + (x+1) = \lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+2x-3} + (x+1)$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-4}{\sqrt{x^2+2x-3} - x - 1} = 0.$

donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+2x-3} + (x+1) = 0$

(D) est asymptote à $(\mathscr{C}_f)$ en $-\infty$.

4. Dérivabilité de f en 1 et en -3.

- $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ <}} \dfrac{f(x) - f(-3)}{x - (-3)} = -\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ <}} \dfrac{\sqrt{(x-1)(x+3)}}{x+3}$

$= \lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ <}} \sqrt{\dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+3)^2}} = \lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ <}} \sqrt{\dfrac{x-1}{x+3}} = +\infty.$

Car $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ <}} \dfrac{x-1}{x+3} = +\infty$ donc f n'est pas dérivable à gauche en -3 donc $(\mathscr{C}_f)$ admet au point d'abscisse -3 une demi-tangente verticale.

- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{\sqrt{(x-1)(x+3)}}{x-1}$

Méthode

Étudier la fonction en faisant attention à l'ensemble de définition pour dresser le tableau de variation.

$= \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \sqrt{\dfrac{(x-1)(x+3)}{(x-1)^2}} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \sqrt{\dfrac{x+3}{x-1}} = +\infty.$

Car $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{x+3}{x-1} = +\infty$ donc f n'est pas dérivable à droite en 1 donc $(\mathscr{C}_f)$ admet au point d'abscisse 1 une demi-tangente verticale.

5. Sens de variation de f.

- f est dérivable sur $]-\infty,-3[\cup]1,+\infty[$ et

$\forall x \in]-\infty, -3[\cup]1, +\infty[$,

$f'(x) = \dfrac{2x+2}{2\sqrt{(x-1)(x+3)}} = \dfrac{x+1}{\sqrt{(x-1)(x+3)}}$

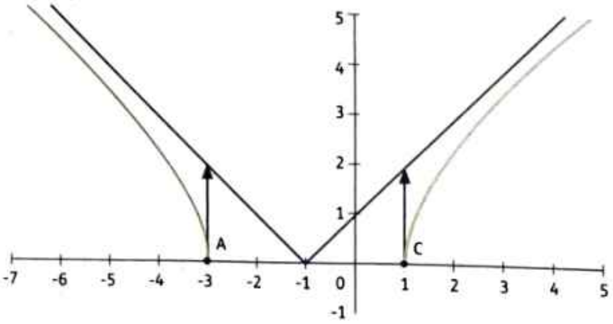
- $\forall x \in]-\infty, -3[$, $f'(x) < 0$ et $\forall x \in]1, +\infty[$, $f'(x) > 0$.

$\Rightarrow f$ est strictement décroissante sur $]-\infty,-3[$ et f est strictement croissante sur $]1, +\infty[$.

- Tableau de variation de f.

x	$-\infty$		-3	//////	1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		//////		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↘	0	//////	0	↗	$+\infty$

6. On construit (D), (D') les tangentes verticales puis $(\mathscr{C}_f)$.



Exercice 8 Étudier une fonction irrationnelle

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) : unité 2 cm.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + \sqrt{|x^2 - 1|}$.

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté au repère (O, I, J).

1. a) Écris $f(x)$ sans le symbole de valeur absolue.

   b) Justifie que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ puis interprète graphiquement le résultat.

   c) Calcule la limite de f en $+\infty$.

2. Étudie la dérivabilité de f en -1 puis interprète graphiquement le résultat de la limite.

On admet que f n'est pas dérivable en 1 et $(\mathscr{C})$ admet au point d'abscisse 1 une tangente verticale dirigée vers le haut.

3. a) Calcule $f'(x)$ pour tout x élément de $]-\infty\,;-1\,[\,\cup\,]1\,;+\infty[$.

   b) Vérifie que pour tout x élément de $]-1\,;1[$, $f'(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}$

4. Justifie que : $\forall x \in\,]-\infty\,;-1\,[\,\cup\,]\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,;1[$, $f'(x) < 0$.

$\forall x \in\,]-1\,;\dfrac{\sqrt{2}}{2}[\,\cup\,]1\,;+\infty[$, $f'(x) > 0$.

5. Dresse le tableau de variation de f.
6. Démontre que la droite d'équation $y = 2x$ est une asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$.
7. Construis $(\mathscr{C})$.

Corrigé

1. a) $\forall x \in\,]-\infty\,;-1\,[\,\cup\,]1\,;+\infty[$,

$f(x) = x + \sqrt{x^2-1}$

$\forall x \in\,]-1\,;1[$, $f(x) = x + \sqrt{1-x^2}$

$f(-1) = -1$ et $f(1) = 1$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x + \sqrt{x^2-1}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2-(x^2-1)}{x-\sqrt{x^2-1}}$

$= \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-1}} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, donc la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x + \sqrt{x^2-1} = +\infty$

car $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x + \sqrt{x^2-1} = +\infty$.

2. $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \dfrac{x+\sqrt{x^2-1}+1}{x+1}$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} 1 + \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = -\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} 1 = 1$,

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} x-1 = -2$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \sqrt{x^2-1} = 0$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \dfrac{x+\sqrt{1-x^2}+1}{x+1}$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} 1 + \dfrac{1-x}{\sqrt{x^2-1}}$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = +\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} 1 = 1$,

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} 1-x = 2$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \sqrt{1-x^2} = 0$

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = -\infty$ et

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = +\infty$

Donc f est pas dérivable en -1 et (C) admet au point d'abscisse -1 une tangente verticale.

3. a) $f'(x) = 1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}$

b) $\forall x \in\,]-1\,;1[$,

$f'(x) = 1 + \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}$

4. $\forall x \in\,]-\infty\,;-1\,[$, $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{1-x^2}}$

$\forall x \in\,]-\infty\,;-1\,[$, $x^2-1 < x^2$

$0 < \sqrt{x^2-1} < |x|$

$\sqrt{x^2-1} < -x$

$\sqrt{x^2-1} + x < 0$.

Méthode

- Écrire la fonction sans les symboles de valeur absolue.
- Étudier sur chaque intervalle le signe de la dérivée en utilisant les résultats sur les inéquations irrationnelles de la classe de 1ère D

Donc $\forall x \in]-\infty ; -1[$, $f'(x) < 0$.

$\forall x \in]1 ; +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}$

$\forall x \in]1 ; +\infty[$, $\sqrt{x^2-1}+x > 0$, donc $f'(x) > 0$

$\forall x \in]-1 ; +1[$, $f'(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}$

$\sqrt{1-x^2}-x > 0$ dans $]-1 ; 1[$.

$\sqrt{1-x^2} > x$, $\forall x \in]-1 ; +1[$.

- Si $x \in]-1 ; 0[$, $\sqrt{1-x^2} > x$ et $f'(x) > 0$.
- Si $x \in]0 ; 1[$, alors on a : $x > 0$.

$\sqrt{1-x^2}-x > 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} > x$

$\Leftrightarrow 1 - x^2 > x^2$,

$\Leftrightarrow 1 - 2x^2 > 0$, $\forall x \in]0 ; 1[$,

$\Leftrightarrow (1-x\sqrt{2})(1+x\sqrt{2}) > 0$,

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
$(1-x\sqrt{2})(1+x\sqrt{2})$	1	$+$	0	$-$	

On en déduit que $\forall x \in]-1 ; \frac{\sqrt{2}}{2}[$, $f'(x) > 0$

$\forall x \in]\frac{\sqrt{2}}{2} ; 1[$, $f'(x) < 0$.

D'où le résultat :

$\forall x \in]-\infty ; -1[\cup]\frac{\sqrt{2}}{2} ; 1[$, $f'(x) < 0$

$\forall x \in]-1 ; \frac{\sqrt{2}}{2}[\cup]1 ; +\infty[$, $f'(x) > 0$.

5. Tableau de variation de f.

x	$-\infty$		-1		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

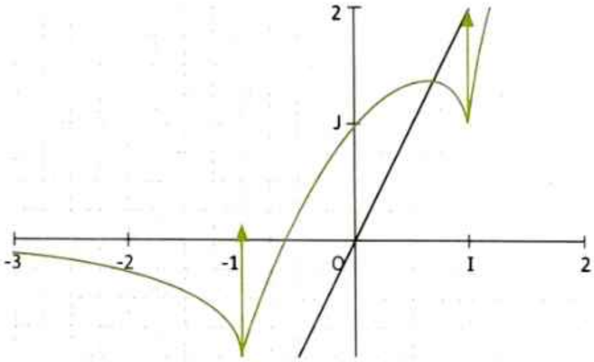
6. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - 2x = \lim\limits_{x \to +\infty} x + \sqrt{x^2-1} - 2x$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - 2x = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2-1} - x$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - 2x = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - 2x = 0$ donc la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

7. Construisons (C).



Résumé de cours

1 Dérivabilité à gauche, dérivabilité à droite d'une fonction en un point

Définitions et notation

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]x_0, a]$(resp.$[a, x_0[$). On dit que f est dérivable à gauche (resp. à droite) en a lorsque la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, $(x \neq a)$ admet une limite finie à gauche (resp. à droite). Dans ce cas, la valeur de cette limite est appelée nombre dérivé de f à gauche (resp.à droite) en a.

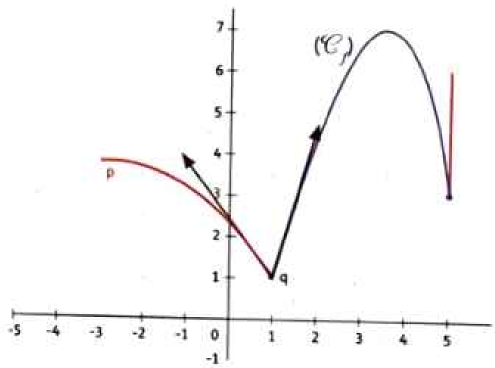
<u>Notation</u>

Si f est dérivable à gauche (resp.à droite) en a, on note : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f_g'(a)$ (resp. $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f_d'(a)$).

Interprétation graphique-tangente verticale

- Si f est dérivable à gauche (resp.à droite) en a, alors ($\mathscr{C}$) admet au point d'abscisse a à gauche (resp.à droite) une demi-tangente d'équation : $y = f_g'(a)(x-a)+f(a)$ (resp.$y = f_d'(a)(x-a)+f(a)$).

- Si la fonction : $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, $(x \neq a)$ admet en a (resp.à gauche ou à droite) une limite infinie, alors (C) admet au point d'abscisse a une demi-tangente verticale.



Propriété f est une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un élément de I. f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche en a, dérivable à droite en a et $f_g'(a) = f_d'(a)$.

2 Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle

2.1. Définition

Définition f est une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a et b deux éléments de I.
- On dit que f dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I.
- On dit que f est dérivable sur $[a, b]$ si f est dérivable sur $]a, b[$, dérivable à droite en a et dérivable à gauche en b.

2.2. Propriétés

Propriété 1
- Les fonctions suivantes sont dérivables sur tout intervalle inclus dans leurs ensembles de définition respectifs : $x \mapsto a, x \mapsto x^n$ $(x \in \mathbb{N}), x \mapsto \frac{1}{x}, x \mapsto \cos x, x \mapsto \sin x$.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur tout intervalle inclus dans l'intervalle $]0, +\infty[$.

Propriété 2 Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle K, α un nombre réel et n un entier naturel non nul.
Les fonctions $u + v$, uv, αu et u^n sont dérivables sur K. De plus si v ne s'annule pas sur K, alors les fonctions $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont dérivables sur K.

Propriété 3 Toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.

3 Dérivée d'une fonction composée

Propriétés

Propriétés Soient f une fonction définie sur un intervalle I, g une fonction définie sur un intervalle contenant $f(\mathrm{I})$ et a un élément de I.

- Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$, alors gof est dérivable en a et $(gof)'(a) = f'(a) \times (g'of)(a)$.
- Si f est dérivable sur I et g dérivable sur $f(\mathrm{I})$, alors gof est dérivable sur I et pour tout x élément de I, on a : $(gof)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$.

Conséquences

u est une fonction dérivable.

Fonction	Fonction dérivée
u^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	$nu'u^{n-1}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
u^r	$ru'u^{r-1}$
$\frac{1}{u}$	$\frac{-u'}{u^2}$
$\sin u$	$u'\cos u$
$\cos u$	$-u'\sin u$

4 Dérivée d'une bijection réciproque en un point

Propriétés Soient f une bijection d'un l'intervalle I vers l'intervalle $f(\mathrm{I})$, f^{-1} sa bijection réciproque, b un élément de $f(\mathrm{I})$ et a son antécédent par f (c'est-à-dire $f(a) = b$).

- Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en b et on a :
$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'[f^{-1}(b)]}$.
- Si f est dérivable sur I et si f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur J.
De plus pour tout élément x de J, on a : $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{(f'of^{-1})(x)}$.

<u>*Point méthode*</u> : Exprime $f'(x)$ en fonction $f(x)$ puis $(f' o f^{-1})(x)$ en fonction de x.

Résumé de cours

5 Dérivées successives

Définition et notation

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- Si f est dérivable sur I, alors sa fonction dérivée f' est appelée dérivée première (ou d'ordre 1) de f. On la note aussi $f^{(1)}$.
- Si f' est dérivable sur I, alors sa dérivée est appelée dérivée seconde (ou d'ordre 2) de f. On la note f'' ou $f^{(2)}$.
- Par dérivation successive, si $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I, alors sa dérivée est appelée dérivée $n^{\text{ième}}$ (ou d'ordre n) de f. On la note $f^{(n)}$.

Notation différentielle (ou de Leibniz)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Si elles existent , les dérivées successives : $f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(1-n)}$ et $f^{(n)}$ de f sont notées aussi successivement : $\frac{df}{dx}, \frac{d^2f}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}$ et $\frac{d^nf}{dx^n}$.

6 Point d'inflexion

Définition

Définition On suppose que f est une fonction définie sur un intervalle I et a un élément de I. On dit que le point d'abscisse a est un point d'inflexion de la représentation graphique $(\mathscr{C})$ de f si $(\mathscr{C})$ traverse la tangente au point d'abscisse a.

Propriété

Propriété Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et a un élément de I. Si f'' s'annule en a en changeant de signe, alors le point $A(a, f(a))$ est un point d'inflexion de la courbe représentative $(\mathscr{C})$ de f.

7 Inégalités des accroissements finis

Première forme

Propriété Soit f une fonction dérivable sur un intervalle, a et b deux éléments de I tels que $a < b$.
S'il existe deux nombres réels m et M tels que pour tout x élément de $[a, b]$, $m \leq f'(x) \leq M$, alors $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.

Deuxième forme

Propriété Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
S'il existe un nombre réel M tel que pour tout x élément de I, $|f'(x)| \leq M$, alors pour tous nombres réels a et b de I, $|f(a) - f(b)| \leq M|a - b|$.

Exercice 1 Justifier qu'une fonction est une primitive d'une fonction

On donne F et f deux fonctions dérivables sur $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ définies par :
$F(x) = \tan^3 x$, $f(x) = \dfrac{3\sin^2 x}{\cos^4 x}$.
Justifie que F est une primitive de f sur $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

Corrigé

Justifions que F est une primitive de f sur $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.
F est dérivable sur $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

$\forall x \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $F'(x) = 3 \times \dfrac{1}{\cos^2 x} \times \tan^2 x$

$F'(x) = 3 \times \dfrac{1}{\cos^2 x} \times \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$

$F'(x) = \dfrac{3\sin^2 x}{\cos^4 x} = f(x)$

donc F est une primitive de f sur $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

Méthode

Pour justifier qu'une fonction F est une primitive d'une fonction f :
- on rappelle que F est dérivable ;
- on calcule la dérivée de F ;
- on remarque que $F'(x) = f(x)$.

Exercice 2 Déterminer l'ensemble des primitives d'une fonction

Détermine les primitives sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction h définie par :
$h(x) = (6x - 2)(3x^2 - 2x + 1)^4$.

Corrigé

Déterminons les primitives sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction h.
Posons v et u' les fonctions définies par :
$v(x) = 3x^2 - 2x + 1$; $v'(x) = 6x - 2$ et $u(x) = \dfrac{x^5}{5}$
On constate que : $h = v' \times u' \circ v$
donc une primitive de h sur $]0\,;+\infty[$ est $H = u \circ v$.

Soit $H : x \mapsto \dfrac{(3x^2 - 2x + 1)^5}{5}$.

Ainsi les primitives de h sont sous la forme

$x \mapsto \dfrac{(3x^2 - 2x + 1)^5}{5} + k\,;\, k \in \mathbb{R}$.

Méthode

Pour déterminer les primitives d'une fonction écrite sous la forme $v' \times u' \circ v$:
- on identifie u' et v ;
- on calcule la dérivée de v et la primitive de u ;
- on définit les primitives de la fonction sous la forme $u \circ v(x) + k$ avec k un réel.

Exercice 3 Déterminer la primitive d'une fonction qui prend une valeur donnée en un point donné.

On donne sur $]-\infty\,;-1[$ la fonction g définie par : $g(x) = \dfrac{2x^3 + 3x^2}{(x+1)^2}$.

1. Détermine les nombres réels a, b et c pour que $g(x) = ax + b + \dfrac{c}{(x+1)^2}$.
2. Détermine la primitive G sur $]-\infty\,;-1[$ de la fonction g qui s'annule en 0.

Corrigé

1. Déterminons les nombres réels a, b et c pour que $g(x) = ax + b + \frac{c}{(x+1)^2}$.
Faisons la division euclidienne :
On a $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$.

$$\begin{array}{r|l}
2x^3 + 3x^2 & x^2 + 2x + 1 \\ \cline{2-2}
-2x^3 - 4x^2 - 2x & 2x - 1 \\ \cline{1-1}
-x^2 - 2x & \\
x^2 + 2x + 1 & \\ \cline{1-1}
1 &
\end{array}$$

Donc $g(x) = 2x - 1 + \frac{1}{(x+1)^2}$;
Ainsi $a = 2$; $b = -1$ et $c = 1$.

2. Déterminons la primitive G sur $]-\infty\,;-1[$ de la fonction g qui s'annule en 0.
On a $g(x) = 2x - 1 + \frac{1}{(x+1)^2}$.

Les primitives de g sont sous la forme
$x \mapsto x^2 - x + \frac{-1}{x+1} + k$; $k \in \mathbb{R}$.
$G(0) = 0$ équivaut à $0^2 - 0 + \frac{-1}{0+1} + k = 0$.
$G(0) = 0$ équivaut à $k = 1$.
Ainsi $G(x) = x^2 - x + \frac{-1}{x+1} + 1$.

Méthode

Pour déterminer les nombres réels a, b et c pour que $g(x) = ax + b + \frac{c}{(x+1)^2}$:

- on détermine les coefficients a, b et c soit par division euclidienne, soit par la détermination de coefficients indéterminée ;
- on détermine l'ensemble des primitives deg ;
- on remplace x par 0 et on résout l'équation $h(0) = 0$ pour déterminer la constante k.

Résumé de cours

1 Primitive d'une fonction

1.1. Définition de la primitive d'une fonction continue

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle primitive de f sur I, toute fonction F dérivable sur I et pour tout x de I, $F'(x) = f(x)$.

Propriété admise

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Conséquence

- Les fonctions polynômes admettent toutes des primitives sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions rationnelles admettent des primitives sur chaque intervalle où elles sont définies.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ admet des primitives sur $]0 ; +\infty[$.

1.2. Ensemble des primitives d'une fonction

Propriété Soit F est une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I.
- Pour tout nombre réel k, la fonction $x \mapsto F(x) + k$ est une primitive de f sur I.
- Toute primitive de f sur I est de la forme $x \mapsto F(x) + k$ où $k \in \mathbb{R}$.

1.3. Unicité de la primitive d'une fonction qui prend une valeur donnée en un point donné

Propriété f est une fonction continue sur un intervalle I, x_0 un nombre réel de I et y_0 un nombre réel quelconque. Il existe une et une seule primitive de la fonction f sur l'intervalle I qui prend la valeur y_0 en x_0.

2 Primitives des fonctions de référence

Fonction f	Une primitive de f	Sur l'intervalle I
$x \mapsto c\ (c \in \mathbb{R})$	$x \mapsto cx$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^m ; m \in \mathbb{N}$	$x \mapsto \dfrac{x^{m+1}}{m+1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^r}\ [r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{1\}]$	$x \mapsto \dfrac{-1}{(r-1)x^{r-1}}$	$]-\infty ; 0[$ ou $]0 ; +\infty[$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x}$	$]0 ; +\infty[$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$x \mapsto \tan x$	$\left]-\dfrac{\pi}{2} + kr ; \dfrac{\pi}{2} + kr\right[, k \in \mathbb{Z}$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sin^2 x}$	$x \mapsto -\text{cotan}\, x$	$]k\pi ; \pi + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$

Remarque

$\forall x \in \left]-\dfrac{\pi}{2} + kr ; \dfrac{\pi}{2} + kr\right[, k \in \mathbb{Z} ; \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2(x)$

Résumé de cours

3 Primitives et opérations sur les fonctions

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

Fonction f	Primitives
$u' + v'$	$u + v$
$\lambda u'$	λu
$u'v + uv'$	$u \times v$
$v' \times u' \circ v$	$u \circ v$
$u' \times u^n (n \in \mathbb{Q}\setminus\{1\})$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$\frac{u'}{u^r}$ $[r \in \mathbb{Q}^*\setminus\{1\}$	$\frac{-1}{(r-1)u^{r-1}}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$u'\cos u$	$\sin u$
$u'\sin u$	$-\cos u$

Exercice 1 Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction comportant ln

Détermine l'ensemble de définition de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(2-x)$.

Corrigé

Déterminons l'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = \ln(2-x)$.

$x \Leftrightarrow D_f \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $2 - x > 0$

$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $x < 2$ donc $D_f =]-\infty\,;2[$

Méthode

$\ln u(x)$ existe si et seulement si $u(x)$ existe et $u(x) > 0$.

Exercice 2 Résoudre des équations et des inéquations

Résous dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

a) (E) : $\ln(1-x^2) = \ln(2x-1)$; b) (I_2) : $(\ln x)^2 - \ln x - 2 < 0$; c) (I_3) : $\ln\left(\dfrac{x+1}{2x+5}\right) > 0$.

Corrigé

a) (E) : $\ln(1-x^2) = \ln(2x-1)$. Soit V l'ensemble de validité de (E).

- $x \in V \Leftrightarrow 1 - x^2 > 0$ et $2x - 1 > 0$

$\Leftrightarrow (1-x)(1+x) > 0$ et $x > \dfrac{1}{2}$.

$\Leftrightarrow x \in]-1\,;1[$ et $x \in]\dfrac{1}{2}\,;+\infty[$

donc $V =]\dfrac{1}{2}\,;1[$.

$\ln(1-x^2) = \ln(2x-1) \Leftrightarrow 1 - x^2 = 2x - 1$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 2 = 0$.

$\Delta = 12$ donc $x_1 = \dfrac{-2+2\sqrt{3}}{2} = -1 + \sqrt{3}$

et $x_1 = \dfrac{-2-2\sqrt{3}}{2} = -1 - \sqrt{3}$.

- $x_1 \in V$ et $x_2 \notin V$

donc $S_{\mathbb{R}} = \{-1+\sqrt{3}\}$

b) (I_2) : $(\ln x)^2 - \ln x - 2 < 0$, soit V l'ensemble de validité de (I_2)

$x \in V \Leftrightarrow x > 0$ donc $V =]0\,;+\infty[$.

On pose $X = \ln x$ et l'inéquation (I_2) devient $X^2 - X - 2 < 0 \Leftrightarrow (X+1)(X-2) < 0$.

$X \in]-\infty\,;-1[\cup]\,2\,;+\infty[$ donc

$x \in]-\infty\,;e^{-1}[\cup]\,e^2\,;+\infty[= S$

d'où $S_{\mathbb{R}} = S \cap V =]-\infty\,;e^{-1}[\cup]\,e^2\,;+\infty[\cap]\,0\,;+\infty[$

ainsi $S_{\mathbb{R}} =]0\,;\dfrac{1}{e}[\cup]\,e^2\,;+\infty[$.

Résolvons l'inéquation $(I_1) \ln\left(\dfrac{x+1}{2x+5}\right) > 0$,

soit V l'ensemble de validité de (I_1).

- $x \in V \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{2x+5} > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty\,;-\dfrac{5}{2}[\cup]-1\,;+\infty[$

d'où $V =]-\infty\,;-\dfrac{5}{2}[\cup]-1\,;+\infty[$.

- $\ln\left(\dfrac{x+1}{2x+5}\right) > 0 \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{x+1}{2x+5}\right) > \ln 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{x+1}{2x+5} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{-x-4}{2x+5} > 0$

$\Leftrightarrow x \in]-4\,;-\dfrac{5}{2}[= S$.

- $S_{\mathbb{R}} = S \cap V =]-4\,;-\dfrac{5}{2}[\cap]-\infty\,;-\dfrac{5}{2}[\cup]-1\,;+\infty[$

$=]-4\,;-\dfrac{5}{2}[$.

Méthode

Utiliser la méthode :

- $\ln(u(x)) = \ln(v(x)) \Leftrightarrow u(x) = v(x)$;
- Il suffit de poser $X = \ln(x)$.

Exercice 3 Déterminer la dérivée d'une fonction faisant intervenir ln

Détermine les fonctions dérivées des fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies respectivement par :
$f(x) = \ln\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)$ et $g(x) = \ln|3x^2 - 2x + 7|$.

Corrigé

- $\forall x \in \forall x \in]-\infty ; -1[\cup]\frac{1}{2} ; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)}{\frac{2x-1}{x+1}} = \frac{3}{(x+1)^2} \times \frac{x+1}{2x-1}$$
$$= \frac{3}{(x+1)(2x-1)}$$

Méthode

Utiliser la formule $(\ln \circ u)' = \frac{u'}{u}$.

- $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{(3x^2 - 2x + 7)'}{3x^2 - 2x + 7}$
$$= \frac{6x - 2}{3x^2 - 2x + 7}$$

Exercice 4 Déterminer une primitive

1. Détermine les primitives F de la fonction f telle que : $f(x) = \frac{2}{3x-5}$ sur $\left]-\infty ; \frac{5}{3}\right[$.
2. Déduis-en la primitive G de f qui prend la valeur $-\frac{\ln 2}{3}$ en 1.

Corrigé

1. En posant $u(x) = 3x - 5$ on a $u'(x) = 3$.
Réécrivons $f(x)$ en fonction de $u(x)$ et $u'(x)$.
On obtient : $f(x) = \frac{2}{3} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$ donc
$F(x) = \frac{2}{3}\ln|3x - 5| + C$ soit $F(x) = \frac{2}{3}\ln(5 - 3x) + C$
sur $]-\infty ; \frac{5}{3}[$.

Méthode

Une primitive de $\frac{u'}{u}$ est $\ln \circ |u|$.

2. $G(1) = \frac{2}{3}\ln(5-3) + C = -\frac{\ln 2}{3} \Leftrightarrow C = -\frac{\ln 2}{3} - \frac{2\ln 2}{3}$
$= -\ln 2$ donc $G(x) = \frac{2}{3}\ln(5 - 3x) - \ln 2$.

Exercice 5 Étudier une fonction faisant intervenir ln

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \mapsto \frac{1 + \ln x}{1 - \ln x}$$

1. Détermine l'ensemble de définition de f.
2. Calcule les limites de f en 0, en $+\infty$ et en e, interprète graphiquement les deux derniers résultats.
3. a) On note g le prolongement par continuité de f en 0. Définis g.
   b) Étudie la dérivabilité de g en 0. Interprète graphiquement le résultat de la limite calculée.
4. Étudie les variations de f et dresse son tableau de variation.
5. Démontre que la restriction h de f à $]0 ; e[$ est une bijection sur un intervalle K que tu détermineras.
6. a) Résous l'équation $h(x) = 3$. Justifie que h^{-1} est dérivable en 3.
   b) Déduis-en la valeur exacte de $(h^{-1})'(3)$.
7. Définis l'expression explicite de la fonction h^{-1}.
8. Construis la courbe de f et celle de h^{-1} dans un repère orthonormé (O, I, J).

Corrigé

1. Ensemble de définition de f

$x \in D_f \Leftrightarrow x > 0$ et $1 - \ln x \neq 0 \Leftrightarrow x \in]0\,;+\infty[$ et $x \neq e$ donc $D_f =]0\,;e[\cup]e\,;+\infty[$.

2. Calcul des limites de f en 0, en $+\infty$ et en e.

- Limite de f en 0

En posant $X = \ln x$, quand $x \to 0$, $X \to -\infty$.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+X}{1-X} = \lim_{x\to-\infty} \frac{X}{-X} = -1.$$

Interprétation : f n'est pas définie en 0 mais elle admet une limite finie en 0 donc on peut faire un prolongement par continuité à droite en 0.

- Limite de f en $+\infty$.

En posant $X = \ln x$, quand $x \to +\infty$, $X \to +\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+X}{1-X} = \lim_{x\to+\infty} \frac{X}{-X} = -1.$$

Interprétation : On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$ donc la droite d'équation $y = -1$ est asymptote horizontale à $(\mathscr{C}_f)$ en $+\infty$.

- Limites de f en e

$$\lim_{\substack{x\to e\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to e\\ >}} (1+\ln x) \times \frac{1}{1-\ln x} = -\infty$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to e}(1+\ln x) = 2 \\ \lim\limits_{\substack{x\to e\\ >}} \dfrac{1}{1-\ln x} = -\infty \end{cases}$

$$\lim_{\substack{x\to e\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to e\\ <}} (1+\ln x) \times \frac{1}{1-\ln x} = +\infty$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to e}(1+\ln x) = 2 \\ \lim\limits_{\substack{x\to e\\ <}} \dfrac{1}{1-\ln x} = +\infty \end{cases}$

Interprétation : On a $\lim\limits_{\substack{x\to e\\ <}} f(x) = -\infty$ donc la droite d'équation $x = e$ est asymptote verticale à $(\mathscr{C}_f)$.

3. a) g le prolongement par continuité de f en 0 est définie par : $\begin{cases} g(x) = \dfrac{1+\ln x}{1-\ln x} \text{ si } x > 0 \\ g(0) = -1 \end{cases}$.

b) Dérivabilité de g en 0.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{\frac{1+\ln x}{1-\ln x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{x - x\ln x} = +\infty$$

car $\forall x \in]0, e[$, $x(1-\ln(x)) > 0$.

Donc g n'est pas dérivable à droite en 0.

Et la courbe $(\mathscr{C}_f)$ admet au point d'abscisse 0 une tangente verticale.

4. f est dérivable sur $]0, e[$ et sur $]e, +\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{2}{x(1-\ln x)^2}$.

Méthode

- Pour calculer la limite en a de $f(x) = \dfrac{P(\ln(x))}{Q(\ln(x))}$ où P et Q sont des polynômes, on peut faire un changement de variable en posant $X = \ln x$.
- On peut aussi mettre $\ln x$ en facteur.

$\forall x \in]0, e[\cup] e, +\infty[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]0, e[$ et sur $]e, +\infty[$.

Tableau de variation

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+	
$f(x)$	-1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

5. Sur $]0, e[$, f est continue et strictement croissante donc elle réalise une bijection h de $]0, e[$ dans $]-1, +\infty[= K$.

6. a) Résolvons $h(x) = 3$.

$$h(x) = 3 \Leftrightarrow \frac{1+\ln x}{1-\ln x} = 3 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{e}.$$

$$h'(\sqrt{e}) = \frac{2}{\sqrt{e}\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{8\sqrt{e}}{e} \text{ et } h'(\sqrt{e}) \neq 0$$

donc h^{-1} est dérivable en 3.

b) $(h^{-1})'(3) = \dfrac{1}{h'[h^{-1}(3)]} = \dfrac{1}{h'(\sqrt{e})} = \dfrac{\sqrt{e}}{8}$

7. Déterminons l'expression explicite de la fonction h^{-1} : On résout l'équation $h(x) = y$.

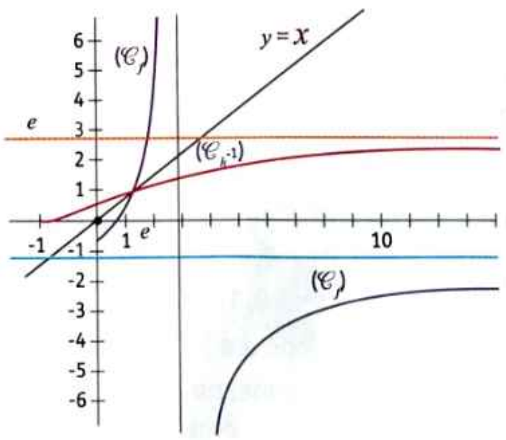
$h(x) = y \Leftrightarrow \dfrac{1+\ln x}{1-\ln x} = y \Leftrightarrow 1 + \ln x = y - y\ln x \Leftrightarrow$

$\ln x\,(1+y) = y - 1 \Leftrightarrow x = e^{\frac{y-1}{y+1}}$

donc $h^{-1} :]-1, +\infty[\longrightarrow]0, e[$.

$x \mapsto e^{\frac{x-1}{x+1}}$

8) Courbes représentatives de f et de h^{-1}



Exercice 6 Étudier une fonction faisant intervenir ln

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = -x^2 - 4\ln x + 6$.

1. Calcule $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.
2. Étudie les variations de g puis dresse son tableau de variation.
3. a) Justifie que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0, +\infty[$.
   b) Justifie que $\alpha \in]1{,}8 \,,\, 1{,}9[$ et donne un encadrement de α à 10^{-2} près.
   c) Justifie que $\forall x \in]0 \,;\, \alpha[\,,\ g(x) > 0$ et $\forall x \in]\alpha \,;\, +\infty[\,,\ g(x) < 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3 + \frac{2\ln x - 1}{x}$.

1. Calcule $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
2. a) Justifie que la droite (D) d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 3$ est asymptote oblique à $(\mathscr{C}_f)$ en $+\infty$.
   b) Justifie que la droite (D) et $(\mathscr{C}_f)$ se coupent au point $E\left(\sqrt{e}\,;-\frac{1}{2}\sqrt{e}+3\right)$.
   c) Étudie les positions relatives de (D) et $(\mathscr{C}_f)$.
3. a) Justifie que : $\forall x \in]\alpha \,;\, +\infty[\,,\ f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$.
   b) Déduis-en le sens de variation de f puis dresse son tableau de variation.
4. Détermine les coordonnées du point A de $(\mathscr{C}_f)$ tels que $(\mathscr{C}_f)$ admet en A une tangente (T) parallèle à (D).
5. Trace (D), $(\mathscr{C}_f)$ et (T) dans un repère orthonormé (O, I, J) avec OI = 2 cm.

Données : On prendra : $\alpha \approx 1{,}8$; $e \approx 2{,}7$ et $\sqrt{e} \approx 1{,}6$.

Corrigé

Partie A

1. Calcul des limites de g en 0 en et $+\infty$.

- $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \lim\limits_{x \to 0} (-x^2 - 4\ln x + 6) = +\infty$

car $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} (-x^2 + 6) = 6$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-x^2 - 4\ln x + 6) = -\infty$

car $\lim\limits_{x \to +\infty} -4\ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^2 + 6) = -\infty$.

2. g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $g'(x) = -2x - \frac{4}{x}$

$\forall x \in]0 \,;\, +\infty[,\ g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante sur $]0 \,;\, +\infty[$.

Tableau de variation de g.

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

3. a) Sur $]0 \,;\, +\infty[$, g est continue et strictement décroissante donc elle réalise une bijection de $]0 \,;\, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$. Or $0 \in \mathbb{R}$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0 \,;\, +\infty[$.

b) on a : $\left.\begin{array}{l} g(1{,}8) = 0{,}40885 \\ g(1{,}9) = -0{,}17741 \end{array}\right\}$

$g(1{,}8) \times g(1{,}9) < 0$ donc $\alpha \in]1{,}8 \,;\, 1{,}9[$.

La méthode par balayage, nous donne un encadrement de α à 10^{-2} près.

Méthode

B-2-c) Étudier le signe de $f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + 3\right)$

x	1,8	1,81	1,82	1,83	1,84	1,85
$g(x)$	+	+	+	+	+	+

1,86	1,87	1,88	1,89	1,9
+	−	−	−	−

Donc $1{,}86 < \alpha < 1{,}87$ à 10^{-2} près.

c) Déterminons les signes de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	⋮	$-$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↘	$+\infty$

$-\ \forall x \in]0 \,;\, \alpha[$, on a $x < \alpha$ et g est strictement décroissante donc $g(x) > g(\alpha)$, or $g(\alpha) = 0$ d'où $\forall x \in]0 \,;\, \alpha[\ g(x) > 0$.

$-\forall x \in]\alpha \,;\, +\infty[$,on a $x > \alpha$ et g est strictement décroissante donc $g(x) < g(\alpha)$, or $g(\alpha) = 0$ d'où $\forall x \in]\alpha \,;\, +\infty[\ g(x) < 0$.

Partie B

1. Calcul des limites de f en 0 et en $+\infty$.

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(-\frac{1}{2}x + 3 + \frac{1}{x}(2\ln x - 1)\right) = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to 0} (2\ln x - 1) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{2}x + 3 = 3$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}x+3+\frac{2\ln x}{x}-\frac{1}{x}\right) = -\infty$

car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{2}x+3=-\infty$.

2. a) Justifions que la droite (D) d'équation $y=-\frac{1}{2}x+3$ est asymptote oblique à $(\mathscr{C}_f)$ en $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\left(-\frac{1}{2}x+3\right)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x}-\frac{1}{x}=0$

car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ donc la droite (D) d'équation $y=-\frac{1}{2}x+3$ est asymptote oblique à $(\mathscr{C}_f)$en $+\infty$.

b) Résolvons l'équation : $f(x)=-\frac{1}{2}x+3$.

$-\frac{1}{2}x+3+\frac{2\ln x-1}{x}=-\frac{1}{2}x+3 \Leftrightarrow 2\ln x-1=0$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{e}$ et $f(\sqrt{e})=-\frac{1}{2}\sqrt{e}+3$ donc (D) et $(\mathscr{C}_f)$ se coupent au point E$(\sqrt{e}\ ;-\frac{1}{2}\sqrt{e}+3)$.

c) Étudions les positions relatives de (D) et $(\mathscr{C}_f)$.

On cherche le signe de $f(x)-(-\frac{1}{2}x+3)$

c'est-à-dire le signe de $\frac{2\ln x-1}{x}$.

Comme $\forall x\in]0\,;+\infty[, x>0$.

Le signe de $f(x)-(-\frac{1}{2}x+3)$ s'obtient en résolvant l'inéquation : $2\ln x-1>0$.

$2\ln x-1>0 \Leftrightarrow \ln x>\frac{1}{2} \Leftrightarrow x>\sqrt{e}$, on en déduit le tableau des signes suivant :

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f(x)-(-\frac{1}{2}x+3)$	||	$-$	$\boxed{0}$	$+$	

- $\forall x\in]0\,;\sqrt{e}\,[$ on a $f(x)-(-\frac{1}{2}x+3)<0$ donc la courbe est au-dessous de (D).
- $\forall x\in]\sqrt{e}\,;+\infty[$ on a $f(x)-(-\frac{1}{2}x+3)>0$ donc la courbe est au-dessus de (D).

$(\mathscr{C}_f)$ et (D) se coupent au point E$(\sqrt{e}\,;-\frac{1}{2}\sqrt{e}+3)$.

3. a) Justifions que $\forall x\in]0\,;+\infty[\,, f(x)=\frac{g(x)}{2x^2}$

f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et

$f'(x)=-\frac{1}{2}+\frac{2-2\ln x+1}{x^2}=\frac{-x^2-4\ln x+6}{2x^2}$.

or $g(x)=-x^2-4\ln x+6$ donc $f'(x)=\frac{g(x)}{2x^2}$.

b) Déduisons le sens de variation de f puis son tableau de variation.

$\forall x\in]0\,;+\infty[, 2x^2>0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$.

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$	||	$+$	0	$-$	

Sens de Variation de f :

- $\forall x\in]0\,;\alpha[\ f'(x)>0$ donc f est strictement croissante sur $]0\,;\alpha[$.
- $\forall x\in]\alpha\,;+\infty[\ f'(x)<0$ donc f est strictement décroissante sur $]\alpha\,;+\infty[$.

Tableau de variation de f :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$		$-$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$\boxed{f(a)}$	$\searrow$	$-\infty$

4. Déterminons les coordonnées du point A de $(\mathscr{C}_f)$ tels que $(\mathscr{C}_f)$ admet en A une tangente (T) parallèle à (D).

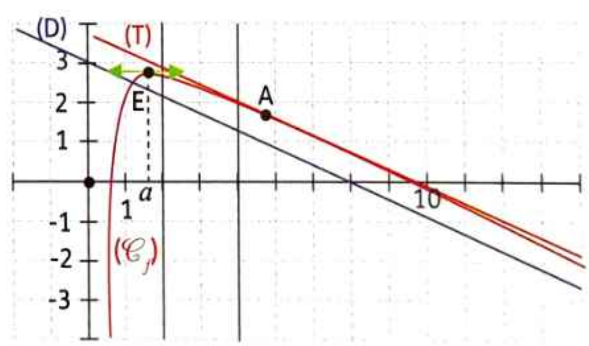
Soit A$(a, f(a))$ donc la tangente (T) :

$y=f'(a)(x-a)+f(a)$ et (D) : $y=-\frac{1}{2}x+3$.

(T) // (D) $\Leftrightarrow f'(a)=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-a^2-4\ln a+6}{2a^2}=-\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow -4\ln a=-6 \Leftrightarrow a=e^{\frac{3}{2}}$ donc A$\left(e^{\frac{3}{2}}; f(e^{\frac{3}{2}})\right)$.

4. Traçons (D), $(\mathscr{C}_f)$ et (T) dans un repère orthonormé (O, I, J).



1 Fonction logarithme népérien

1.1. Définition

Définition La fonction logarithme népérien, notée ln, est la primitive sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1.

1.2. Conséquences de la définition de la fonction ln

- L'ensemble de définition de la fonction ln est $]0\,;+\infty[$.
- La fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $\forall x \in]0\,;+\infty[$, $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$.
- $\ln(1) = 0$.

1.3. Propriétés algébriques

Pour tous nombres réels a et b strictement positifs et r un nombre réel, on a :

Propriété fondamentale

- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

Conséquences

- $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

En particulier

- $\ln(a^r) = r\ln a$
- $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$

1.4. Étude et représentation graphique

a) Limites de référence

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \ln x = -\infty \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0\,;$$

$$\lim_{x\to 0} x\ln x = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1.$$

b) Variation et représentation graphique

Sens de variation

$\forall x \in]0\,;+\infty[$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ et $\frac{1}{x} > 0$, donc la fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

Propriété Pour tous nombres réels a et b strictement positifs on a :

- $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$
- $\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b$
- $0 < a < 1 \Leftrightarrow \ln(a) < 0$
- $a > 1 \Leftrightarrow \ln(a) > 0$

Remarque

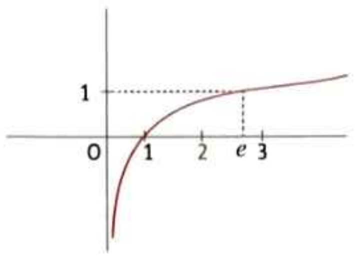
La fonction ln est une bijection de $]0\,;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$. L'antécédent de 1 est noté e.
Ainsi $\ln(e) = 1$, on a : $e \simeq 2{,}7182$.
$\forall m \in \mathbb{R}, \forall x \in]0\,;+\infty[\,;\ \ln(x) = m \Leftrightarrow x = e^m$.

Résumé de cours

Tableau de variation

x	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	‖	$+$
$\ln(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

Représentation graphique



1.5. Ensemble de définition de la composée d'une fonction numérique et de la fonction logarithme népérien

Soit u une fonction numérique.

- On note $\mathscr{D}_f$ l'ensemble de définition de la fonction f telle que : $f = \ln\circ u$.

$x \in D_f \Leftrightarrow x \in D_u$ et $u(x) > 0$.

- On note $\mathscr{D}_g$ l'ensemble de définition de la fonction g telle que : $g = \ln\circ|u|$.

  $x \in D_g \Leftrightarrow x \in D_u$ et $u(x) \neq 0$.

2 Équations - Inéquations

Équations du type, (E) : $\ln(u(x)) = \ln(v(x))$

Pour résoudre l'équation (E) :

On détermine l'ensemble de validité V de l'équation (E) : $x \in V \Leftrightarrow u(x) > 0$ et $v(x) > 0$.

Puis on utilise l'équation équivalente : (E) : $\ln(u(x)) = \ln(v(x)) \Leftrightarrow u(x) = v(x)$.

Inéquations du type, (I) : $\ln(u(x)) < \ln(v(x))$

Pour résoudre l'équation (I) :

On détermine l'ensemble de validité V de l'inéquation (I) : $x \in V \Leftrightarrow u(x) > 0$ et $v(x) > 0$.

Puis on utilise l'inéquation équivalente : (I) : $\ln(u(x)) < \ln(v(x)) \Leftrightarrow u(x) < v(x)$.

3 Dérivées et primitives

Dérivées

Propriétés

- Si u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle K, alors $\ln\circ u$ est dérivable sur K et $(\ln\circ u)' = \frac{u'}{u}$.
- Si u est une fonction dérivable sur un intervalle K sur lequel elle ne s'annule pas, alors $\ln\circ|u|$ est dérivable sur K et $(\ln\circ|u|)' = \frac{u'}{u}$.

Primitive

Propriété

u étant une fonction dérivable sur un intervalle K sur lequel elle ne s'annule pas, la fonction du type $\frac{u'}{u}$ admet pour primitives les fonctions du type $x \mapsto \ln|u(x)| + C$ où $C \in \mathbb{R}$.

4 Fonctions logarithmes de base a

4.1 Définition

Définition On appelle fonction logarithme de base a, $a \in]0\,;+\infty[- \{1\}$, la fonction notée $\log_a$ et définie sur $]0\,;+\infty[$ par $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$.

<u>Vocabulaire</u>

- La fonction logarithme de base e est la fonction logarithme népérien.
- La fonction logarithme de base 10 est la fonction logarithme décimal.

4.2 La fonction logarithme décimal

Définition On appelle fonction logarithme décimal, la fonction notée log et définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

<u>Conséquences</u>

- $\log(1) = 0$;
- $\log(10) = 1$;
- $\forall n \in \mathbb{Q}$, $\log(10^n) = n$;
- si $10^n \leq a \leq 10^{n+1}$, alors $n \leq \log(a) \leq n + 1$.

5 Étude de fonctions faisant intervenir la fonction logarithme népérien

Pour étudier une fonction faisant intervenir la fonction ln, on peut suivre les étapes pour l'étude d'une fonction dans le cas général.

Exercice 1 Calculer des limites

Calcule les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty}(2-3x)e^x$; $\lim\limits_{x\to-\infty}(2-3x)e^x$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{2-3x}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{1-2x}}{1-2x}$.

Corrigé

Calculons les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty}(2-3x)e^x$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(2-3x)e^x$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{2-3x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{1-2x}}{1-2x}$.

• $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(2-3x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty\end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(2-3x)e^x=-\infty.$

[Limite du produit] *

$\forall x\in\mathbb{R}$, $(2-3x)e^x=2e^x-3xe^x$.

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}2e^x=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}-3xe^x=0\end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}(2-3x)e^x=0.$

[Limite de la somme]

* $\forall x\in\left]\dfrac{2}{3}\,;+\infty\right[$, $\dfrac{e^x}{2-3x}=\dfrac{e^x}{x}\times\dfrac{x}{2-3x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2-3x}=-\dfrac{1}{3}$.

D'où, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{2-3x}=-\infty$

* $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{1-2x}}{2x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\dfrac{e^{1-2x}}{1-2x}$

$=-\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{e^X}{X}$ $\quad|X=1-2x,\ X\longrightarrow+\infty$

$=-\infty.$

Méthode

On utilise les limites de référence pour calculer les limites.

Exercice 2 Calculer des limites

On donne la fonction numérique f définie par : $f(x)=x^2-2x-\ln(e^x-2)$.

Calcule : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

Corrigé

$\mathscr{D}_f=]\ln 2\,;+\infty[$

* $\forall x\in]\ln 2\,;+\infty[$;

$f(x)=x^2-2x-\ln[e^x(1-2e^{-x})]$

$\quad=x^2-2x-(\ln(e^x)+\ln(1-2e^{-x})).$

$|a<0$ et $b<0:\ln(ab)=\ln a+\ln b$

$\ln(e^x)=x$

$\quad=x^2-3x-\ln(1-2e^{-x})$

$\quad=x^2(1-\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}\ln(1-2e^{-x})$

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(1-\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}\ln(1-2e^{-x}))=1\end{cases}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty.$

* $\forall x\in]\ln 2\,;+\infty[$;

$\dfrac{f(x)}{x}=x(1-\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}\ln(1-2e^{-x})$

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(1-\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}\ln(1-2e^{-x}))=1\end{cases}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty.$

Méthode

Pour lever l'indétermination, on met e^x en facteur dans e^x-2 : $e^x-2=e^x(1-2e^{-x})$.

Exercice 3 Résoudre des équations

1. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{2x} - 3e^{x} + 3 = 0$.
2. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{x} - 4e^{-x} = 0$.

Corrigé

1. Posons : $t = e^{x}$.

$(e^{x})^2 - 4e^{x} + 3 = 0$.

$\Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 = 0$

$\Leftrightarrow (t - 1)(t - 3) = 0$

$\Leftrightarrow t = 1$ ou $t = 3$

$\Leftrightarrow e^{x} = 1$ ou $e^{x} = 3$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \ln 3$

$S = \{0 ; \ln 3\}$

Méthode

- On utilise le fait que $e^{2x} = (e^{x})^2$ et on pose $t = e^{x}$.
- Si une équation ou une inéquation comporte e^{-nx}, on peut multiplier chaque membre par e^{nx}.

2. En multipliant chaque membre par e^{x}, on a :

$e^{x} - 4e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 4 = 0$

$\Leftrightarrow e^{2x} = 4$

$\Leftrightarrow 2x = 2\ln 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$

$S = \{\ln 2\}$

Exercice 4 Résoudre des inéquations

Résous, dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

a) $(I_a) : e^{2x} - 2e^{x+1} + e^{2} \leq 0$; b) $(I_b) : e^{2x} - 2e^{x} + 2 > 0$; c) $(I_c) : e^{2x} - 6e^{x} + 8 > 0$;

d) $(I_d) : \ln(e^{x} - 1) \leq 0$; e) $(I_e) : \ln|e^{x} - 1| \leq 0$; f) $(I_f) : \dfrac{e^{x} - 1}{e^{x} - 2} < 0$.

Corrigé

a) $e^{2x} - 2e^{x+1} + e^{2} \leq 0$

$\Leftrightarrow (e^{x} - e)^2 \leq 0$

$\Leftrightarrow (e^{x} - e)^2 = 0$ ou $(e^{x} - e)^2 < 0$ (impossible)

$\Leftrightarrow e^{x} - e = 0$

$\Leftrightarrow e^{x} = e$

$\Leftrightarrow x = 1$

$S_{I_a} = \{1\}$

b) $e^{2x} - 2e^{x} + 2 > 0$

Posons $X = e^{x}$.

$(I_b) \Leftrightarrow X^2 - 2X + 2 > 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 2 = -4 < 0$

$\forall X \in \mathbb{R}, X^2 - 3X + 2 > 0$ donc

$\forall x \in \mathbb{R}, (e^{x})^2 - 2e^{x} + 2 > 0$

$S_{I_b} = \mathbb{R}$

c) $e^{2x} - 6e^{x} + 8 > 0$

Posons $X = e^{x}$.

$(I_c) \Leftrightarrow X^2 - 6X + 8 > 0$

2 est un zéro évident de P, où

$P(X) = X^2 - 6X + 8 = (X - 2)(X - 4)$

donc $(Ic) \Leftrightarrow (e^{x} - 2)(e^{x} - 4) > 0$

$\Leftrightarrow e^{x} < 2$ ou $e^{x} > 4$

$\Leftrightarrow x < \ln 2$ ou $x > 2\ln 2$

$S =]-\infty ; \ln 2[\cup]2\ln 2 ; +\infty[$

d) Contrainte sur l'inconnue x ;

$e^{x} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{x} > 1$

$x > 0$

$V_d =]0 ; +\infty[$

Méthode

Lorsqu'une inéquation est de la forme $P(e^{x}) \geq 0$ (ou > 0, ou < 0, ≤ 0), où P est un polynôme de degré n, on pose $X = e^{x}$.

* $\ln(e^{x} - 1) \leq 0 \Leftrightarrow e^{x} - 1 \leq 1$

$\Leftrightarrow e^{x} \leq 2$

$\Leftrightarrow x \leq \ln(2)$, En tenant compte de V_d,

$S =]0 ; \ln 2]$

e) (I_e) * Contrainte sur l'inconnue x

$e^{x} - 1 \neq 0$

$x \neq 0$

$V_e = \mathbb{R}^*$

* $\ln|e^{x} - 1| \leq 0 \Leftrightarrow |e^{x} - 1| \leq 1$

$\Leftrightarrow -1 \leq e^{x} - 1 \leq 1$

$\Leftrightarrow 0 \leq e^{x} \leq 2$

$\Leftrightarrow e^{x} \leq 2$ ($0 \leq e^{x}$: toujours vraie)

$\Leftrightarrow x \leq \ln(2)$

En tenant compte de V_e,

$S =]-\infty ; 0[\cup]0 ; \ln 2]$

f) $\dfrac{e^{x} - 1}{e^{x} - 2} < 0 \Leftrightarrow (e^{x} - 1)(e^{x} - 2) < 0$ si $x \neq \ln 2$

$\Leftrightarrow 1 < e^{x} < 2$

$\Leftrightarrow 0 < x < \ln 2$

$S =]0 ; \ln 2[$

Exercice 5 Résoudre des inéquations

1. a) On pose : $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = 2x^3 - 7x^2 - 5x + 4$.
Vérifie que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (2x - 1)(x^2 - 3x - 4)$.
b) Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $P(x) \geq 0$.
2. Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $2e^x - 7 \geq 5e^{-x} - 4e^{-2x}$.

Corrigé

1. a) On pose : $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = 2x^3 - 7x^2 - 5x + 4$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $(2x - 1)(x^2 - 3x - 4) = 2x^3 + (-6 - 1)x^2 + (-8 + 3)x + 4 = 2x^3 - 7x^2 - 5x + 4$
$P(x) = (2x - 1)(x^2 - 3x - 4)$.

b) Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 3x - 4 = (x + 1)(x - 4)$
$P(x) = (2x - 1)(x + 1)(x - 4)$

x	$-\infty$ -1 $\frac{1}{2}$ 4 $+\infty$
$2x - 1$	$-$ $-$ 0 $+$ $+$
$x^2 - 3x - 4$	$+$ 0 $-$ $-$ 4 $+$
$P(x)$	$-$ 0 $+$ 0 $-$ 0 $+$

$P(x) \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq \frac{1}{2}$ ou $x \geq 4$
$S = [-1 ; \frac{1}{2}] \cup [4 ; +\infty[$.

Méthode

Dans la dernière question, multiplier chaque membre par e^{2x} et poser $X = e^x$.

2. En multipliant chaque membre par e^{2x}, on a :
$2e^{3x} - 7e^{2x} \geq 5e^x - 4$
$2e^{3x} - 7e^{2x} - 5e^x + 4 \geq 0$
$2(e^x)^3 - 7(e^x)^2 - 5e^x + 4 \geq 0$
$P(e^x) \geq 0$, ou en posant $X = e^x$, l'inéquation devient $P(x) \geq 0$.
$-1 \leq e^x \leq \frac{1}{2}$ ou $e^x \geq 4$, d'après 1.b)
$e^x \leq \frac{1}{2}$ ou $e^x \geq 4$ ($-1 \leq e^x$: toujours vrai)
$x \leq -\ln 2$ ou $x \geq \ln 4$
$S_{4b} =]-\infty ; -\ln 2] \cup [2\ln 2 ; +\infty[$.

Exercice 6 Étudier une fonction comportant la fonction exponentielle

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (x + 1)^2 e^{-x}$.
Soit $(\mathscr{C})$ la représentation graphique de la fonction g dans le repère orthonormal (O, I, J).
Unité graphique 2 cm.

1. Calcule la dérivée g' de g et démontre que $g'(x)$ est du signe de $(1 - x^2)$. Déduis-en les variations de g.
2. Démontre que :
a) $\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$.
b) $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$ et précise l'asymptote à $(\mathscr{C})$ correspondante.
3. Trace la courbe $(\mathscr{C})$ dans le repère (O, I, J).
Tu placeras en particulier les points de la courbe d'abscisses respectives -2 ; -1 ; 0 ; 1 et 3.

Corrigé

1. $g'(x) = 2(x + 1)e^{-x} + (x + 1)^2(-e^{-x}) = (1 - x^2)e^{-x}$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$ donc le signe de $g'(x)$ dépend du signe $1 - x^2$.
D'où g est décroissante sur $]-\infty ; -1[$ et sur $]1 ; +\infty[$.
g est croissante sur $]-1 ; 1[$.

2. a) $\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} (x+1)^2 e^{-x} = +\infty$ car
$\lim_{x \to -\infty} (x+1)^2 = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$.
b) $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{-x} + 2xe^{-x} + x^2 e^{-x} = 0$ car
$\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$, $\lim_{x \to +\infty} 2xe^{-x} = 0$; $\lim_{x \to +\infty} x^2 e^{-x} = 0$.

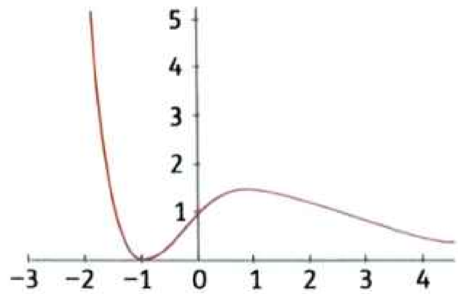
Méthode

$P(x)$ est un polynôme.
Pour calculer la limite en $+\infty$ de $P(x)\, e^{-x}$, on développe $P(x)\, e^{-x}$.
Pour calculer la limite en $-\infty$ de $P(x)\, e^{x}$, on développe $P(x)\, e^{x}$.

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote en $+\infty$.

3. Le tableau de variation

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e}$	$\searrow$	0



Exercice 7 Étudier une fonction comportant une fonction exponentielle de base a

Soit g la fonction numérique dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (1 - x).3^x$.
1. Étudie le sens de variation de la fonction g.
2. Calcule les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

Corrigé

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = -(x-1)e^{x\ln 3}$

$g'(x) = -[1 + (x-1)\ln 3]e^{x\ln 3} = -(x\ln 3 + 1 - \ln 3)e^{x\ln 3}$
$= -(x\ln 3 + 1 - \ln 3)3^x$

$3^x > 0$.

$g'(x)$ a le même signe que $-(x\ln 3 + 1 - \ln 3)$

$x\ln 3 + 1 - \ln 3 > 0 \Leftrightarrow x > 1 - \frac{1}{\ln 3}$.

- $\forall x \in]1 - \frac{1}{\ln 3} ; +\infty[$, $g'(x) < 0$.

D'où, g est strictement décroissante sur $[1 - \frac{1}{\ln 3} ; +\infty[$.

- $\forall x \in]-\infty ; 1 - \frac{1}{\ln 3}[$, $g'(x) > 0$.

D'où, g est strictement croissante sur $]-\infty ; 1 - \frac{1}{\ln 3}]$.

2. • $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (1-x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} 3^x = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$.

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 3^x - x3^x$

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} 3^x = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} -x3^x = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$.

Méthode

On pourra écrire $3^x = e^{x\ln 3}$.

Exercice 8 Étudier une fonction puissance

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). OI = 3 cm.

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = (x+1)^{3\sqrt{2}} - 1$ si $x > -1$ et, $f(-1) = -1$.
1. Détermine l'ensemble de définition de f.
2. Étudie la continuité de f à droite en -1.
Étudie la dérivabilité de f à droite en -1.
3. Étudie le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.
4. Construis la courbe représentative (C) de f dans le repère (O, I, J).

Corrigé

1. $-1 \in \mathcal{D}_f$

Et, sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $x \in \mathcal{D}_f \Rightarrow x + 1 > 0$
$\Rightarrow x > -1$

$\mathcal{D}_f = [-1 ; +\infty[$

2. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} (x+1) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} x^{3\sqrt{2}} = 0$ car $3\sqrt{2} > 0$

D'où, $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = -1$.

- $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = f(-1)$.

D'où, f est continue à droite en -1.

- $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{(x+1)^{3\sqrt{2}}}{x+1}$
$= \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} (x+1)^{3\sqrt{2}-1} = 0$ car $3\sqrt{2} - 1 > 0$.

Méthode

u étant une fonction et α un nombre de réels, la fonction u^α est définie pour tout nombre réel x tel que $u(x) > 0$.

D'où, f est dérivable à droite en -1 et $f_d'(-1) = 0$.

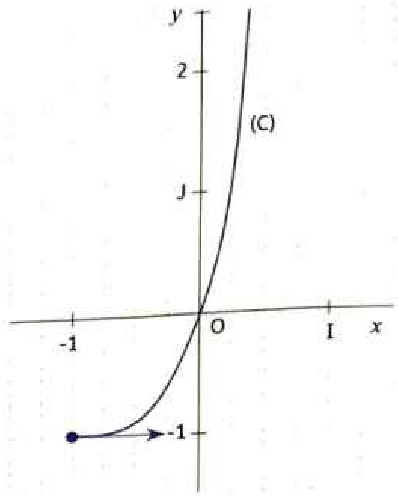
Donc, $(\mathscr{C})$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse -1.

3. $\forall x \in [-1 ; +\infty[$, $f'(x) = 3\sqrt{2}(x+1)^{3\sqrt{2}-1}$ et $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $[-1 ; +\infty[$.

x	-1	$+\infty$
$f'(x)$	0 +	
$f(x)$	-1 $\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x+1)^{3\sqrt{2}} - 1 = +\infty$

4.



Résumé de cours

1 Fonction exponentielle népérienne

1.1. Définition

Définition On appelle fonction exponentielle népérienne, et on note exp, la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien.
Et, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = e^x$.

Conséquences de la définition

- L'ensemble de définition de la fonction exp est $\mathbb{R}$.
  exp $(0) = 1$ et exp $(1) = e$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) > 0$.
- La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$ et $\forall x \in]0\,;+\infty[$, $e^{\ln x} = x$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in]0\,;+\infty[$, $e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$ (on a appliqué ln membre à membre).

1.2. Propriétés algébriques

Propriétés Pour tous réels a et b, et pour tout nombre rationnel r.

- $e^{a+b} = e^a e^b$; • $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$; • $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$; • $e^{ra} = (e^a)^r$.

1.3. Fonction dérivée de la fonction exp

Propriété La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $(\exp)'(x) = \exp x = e^x$.

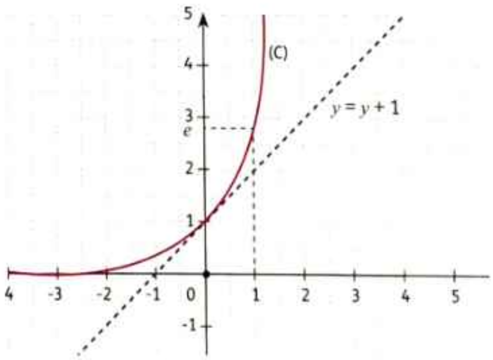
Propriété Pour tous réels a et b,
$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$; $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$; $(e^a > e^b \Leftrightarrow a > b)$.

1.4. Limites de référence

- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$; • $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$; • $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$; • $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$; • $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

1.5. Représentation graphique

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$(e^x)'$	$+$
e^x	$0 \nearrow +\infty$



Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction exp.
Soit (T) la tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.
On a (T) : $y = x + 1$.

2 Équations - Inéquations

- Pour tout nombre réel a élément de $]-\infty\,;0]$:
  - L'équation : $e^x = a$, n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
  - L'inéquation : $e^x \leq a$, n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
- Pour tout nombre réel a élément de $]0\,;+\infty[$.
  - L'équation : $e^x = a$, $\Leftrightarrow x = \ln a$.
  - Les inéquations : $e^x \leq a$, $e^x > a$, ... sont respectivement équivalentes à $x \leq \ln a$, $x > \ln a$,...
- Pour résoudre une équation du type $P(e^x) = 0$ ou une inéquation du type

$P(e^x) \leq 0$ ($P(e^x) \geq 0$, ...), on pose $e^x = X$, avec $X > 0$, et P un polynôme.

3 Dérivées et primitives

3.1. Dérivée de e^u

Propriété Soit u une fonction numérique dérivable sur un intervalle K et f la fonction définie par : $f(x) = e^{u(x)}$.
La fonction f est dérivable sur K et, $\forall x \in K, f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

3.2. Primitives de $u'e^u$

Propriété Soit u une fonction numérique dérivable sur un intervalle K et f la fonction définie par : $f(x) = u'(x)e^{u(x)}$.
La fonction f admet des primitives sur K et les primitives de f sur K sont les fonctions F telles que : $\forall x \in K$, $F(x) = e^{u(x)} + c$ ($c \in \mathbb{R}$).

4 Fonctions exponentielles de base a

4.1. Définition

Définition Soit a un nombre réel strictement positif et différent de 1.
- Pour tout nombre réel x, $a^x = e^{x\ln a}$.
- On appelle fonction exponentielle de base a, la fonction : $x \mapsto a^x$.

Exemple

La fonction exponentielle népérienne ($x \mapsto e^x$) est la fonction exponentielle de base e.

4.2. Propriétés algébriques

Propriétés Pour tous a et b éléments de $]0\,;+\infty[$ et pour tous nombres réels x et y,
$a^x \times a^y = a^{x+y}$; $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$; $\dfrac{1}{a^x} = a^{-x}$; $(a^x)^y = a^{xy}$; $a^x \times b^x = (ab)^x$;
$\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$.

4.3. Limites de référence

Propriétés Soit a un élément de $\mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$.

Si $a > 1$, alors :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a^x}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$

Si $0 < a < 1$, alors :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{a^x}{x} = -\infty$

4.4. Étude et représentation graphique

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

Soit a un nombre réel de $]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$ et f_a la fonction numérique dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_a(x) = a^x$.

On note (C_a) la courbe représentative de f_a dans le repère (O, I, J).

Pour tout réel x ; $f_a(x) = e^{x\ln a}$ et $\dfrac{f_a(x)}{x} = (\ln a)\dfrac{e^{x\ln a}}{x\ln a}$.

$0 < a < 1$	$a > 1$
Limites et branches infinies	
$\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$	$\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{a^x}{x} = -\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a^x}{x} = +\infty$
• $(\mathscr{C}_a)$ admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de la droite (OJ). • La droite (OI) est une asymptote à $(\mathscr{C}_a)$ en $+\infty$.	• La droite (OI) est une asymptote à $(\mathscr{C}_a)$ en $-\infty$. • $(\mathscr{C}_a)$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de la droite (OJ).

Dérivabilité	
• f_a est dérivable sur $\mathbb{R}$. • Pour tout nombre réel x, $f_a'(x) = (\ln a)e^{x\ln a} = (\ln a)a^x$.	
Sens de variation	
$\forall x \in \mathbb{R}, f_a'(x) < 0$ D'où, f_a est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.	$\forall x \in \mathbb{R}, f_x'(x) > 0$. D'où, f_x est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Tableau de variation	

x	$-\infty$		$+\infty$
$f_a'(x)$		$-$	
$f_a(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

x	$-\infty$		$+\infty$
$f_a'(x)$		$+$	
$f_a(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Exemples

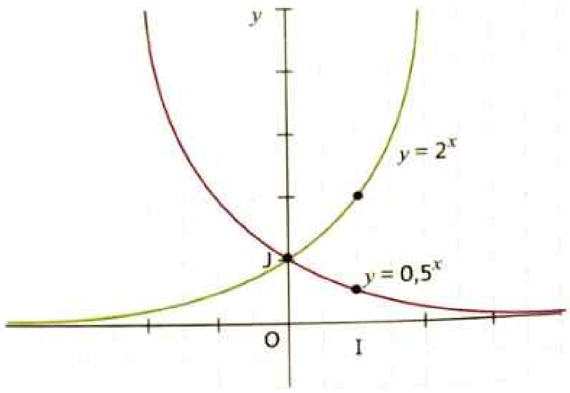
Pour tout nombre réel x,

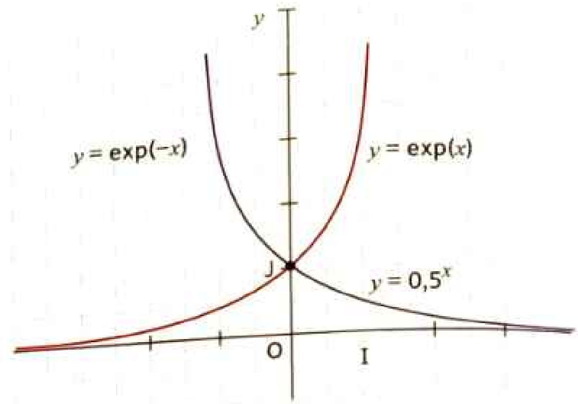
$2^{-x} = \frac{1}{2^x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x = (0{,}5)^x$

$2 > 1$ et $0 < 0{,}5 < 1$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} = \left(\frac{1}{e}\right)^x$

$e > 1$ et $0 < \frac{1}{e} < 1$





5 Étude d'une fonction faisant intervenir la fonction exponentielle népérienne

Pour étudier une fonction faisant intervenir la fonction exponentielle, on peut suivre les étapes de l'étude d'une fonction dans le cas général.

6 Fonctions puissances

6.1. Notion de fonction puissance

Définition Soit a un nombre réel.
On appelle fonction puissance d'exposant α, la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui à tout x associe x^α.
Et, $\forall x \in]0\,;+\infty[,\ x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.

Ensemble de définition

Soit α un nombre réel de $\mathbb{R}$ et f_α la fonction numérique définie par $f_\alpha(x) = x^\alpha$ est $]0\,;+\infty[$.

6.2. Étude et représentation graphique

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Soit α un nombre réel de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ et f_α la fonction numérique définie sur $]0\,;+\infty[$, par : $f_\alpha(x) = x^\alpha$.
On note $(\mathscr{C}_{f\alpha})$ la courbe représentative de f_α dans le repère (O, I, J).

$\alpha < 0$	$\alpha > 0$
Ensemble de définition et calcul	
• $\mathscr{D}_f =]0\,;+\infty[$ • $\forall x \in]0\,;+\infty[,\ x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$	

Limites et branches infinies	
• $\lim\limits_{x \to 0} x^{\alpha} = +\infty$ • $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha} = 0$ • La droite (OJ) est une asymptote à $(\mathscr{C}_{\alpha})$. • La droite (OI) est une asymptote à $(\mathscr{C}_{\alpha})$ en $+\infty$.	• $\lim\limits_{x \to 0} x^{\alpha} = 0$ • $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha} = +\infty$ Si $0 < \alpha < 1$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^{\alpha}}{x} = 0$ Si $\alpha > 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^{\alpha}}{x} = +\infty$ • $(\mathscr{C}_{\alpha})$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de la droite (OI) lorsque $0 < \alpha < 1$. • $(\mathscr{C}_{\alpha})$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de la droite (OJ) lorsque $\alpha > 1$.

Dérivabilité et fonction dérivée	
• f_{α} est dérivable en tout point de $]0\,;+\infty[$. • $\forall x \in]0\,;+\infty[$, $(f_{\alpha})'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$.	
Sens de variation	
$f_{\alpha}'(x)$ a le même signe que α.	
$\forall x \in]0\,;+\infty[$, $f_{\alpha}'(x) < 0$ f_{α} est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.	$\forall x \in]0\,;+\infty[$, $f_{\alpha}'(x) > 0$ f_{α} est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

Tableau de variation

x	0		$+\infty$
$f_{a}'(x)$		$-$	
$f_{a}(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

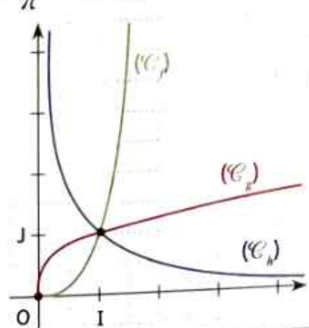
x	$-\infty$		$+\infty$
$f_{a}'(x)$		$+$	
$f_{a}(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Exemples de représentations graphiques

Courbes représentatives $(\mathscr{C}_f)$, $(\mathscr{C}_g)$ et $(\mathscr{C}_h)$ des fonctions numériques f, g et h définies respectivement par :

$f(x) = x^{e}$, $g(x) = x^{\frac{1}{\pi}}$ et $h(x) = x^{-\ln 3}$

$e > 1$, $0 < \frac{1}{\pi} < 1$ et $-\ln 3 < 0$



Méthode

Identification de l'allure à l'aide d'une fonction élémentaire :

$\underline{\alpha > 1}$:

L'allure de $(\mathscr{C}_{\alpha})$ sur $]0\,;+\infty[$ est celle de la courbe de la fonction : $x \to x^2$.

$\underline{0 < \alpha < 1}$:

L'allure de $(\mathscr{C}_{\alpha})$ sur $]0\,;+\infty[$ est celle de la courbe de la fonction : $x \to \sqrt{x}$.

$\alpha < 0$:

L'allure de $(\mathscr{C}_{\alpha})$ sur $]0\,;+\infty[$ est celle de la courbe de la fonction : $x \to \frac{1}{x}$.

6.3. Croissance comparée

Propriétés Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \ ; \ \lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0,$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{e^x} = 0 \ ; \ \lim_{x \to 0} x^\alpha \ln x = 0,$$

$$\lim_{x \to -\infty} |x|^\alpha e^x = 0$$

6.4. Fonction u^α

Soit u une fonction définitive sur un intervalle K et α.

- La fonction $x \mapsto (u(x))^\alpha$ est définie pour tout x tel que $u(x) > 0$.
- Si u est dérivable et strictement positive sur K, alors :

- la fonction u^α est dérivable sur K et $(u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha - 1}$;
- les primitives sur K de la fonction $u'u^\alpha$ sont les fonctions $\frac{1}{\alpha+1} u^{\alpha+1} + c$, $c \in \mathbb{R}$ et $\alpha \neq -1$.

Synthèse

On admet que :
Si une fonction f est continue sur un intervalle K et a un élément de K alors la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ de K vers $\mathbb{R}$, est l'unique primitive de f qui s'annule en a.
Cette fonction est dérivable sur K et sa dérivée est la fonction f c'est-à-dire que :
si $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ alors $\forall x \in K$, $F'(x) = f(x)$.

Exercices de fixation

4-1 Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par
$h(x) = \int_a^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$.
Étudie le sens de variation de h.

4-2 Soit α un nombre réel strictement positif et la fonction F définie sur $[0\,;+\infty[$ par :
$F(x) = \int_a^x \alpha e^{\alpha t}\,dt$.
Sans calculer $F(x)$, détermine $F'(x)$.

APPRENTISSAGE DE LA RÉDACTION

Exercice 1 Calculer des intégrales

Calcule les intégrales suivantes :

$$I = \int_1^{\ln 3} \frac{dt}{1+e^{-3t}}\,dt \quad \text{et} \quad J = \int_5^2 \left(\frac{\ln x}{x}\right) dx.$$

Corrigé

$$I = \int_1^{\ln 3} \frac{dt}{1+e^{-3t}} = \int_1^{\ln 3} \frac{e^{3t}}{1+e^{3t}}\,dt$$
$$= \frac{1}{3}\int_1^{\ln 3} \frac{3e^{3t}}{1+e^{3t}}\,dt$$
$$= \frac{1}{3}\left[\ln\left|1+e^{3t}\right|\right]_1^{\ln 3}$$
$$= \frac{1}{3}\left[28 - \ln(1+e^3)\right]$$

$$J = \int_5^2 \left(\frac{1}{x} \times \ln x\right) dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_5^2 = \frac{(\ln 2)^2}{2} - \frac{(\ln 5)^2}{2}$$

Méthode

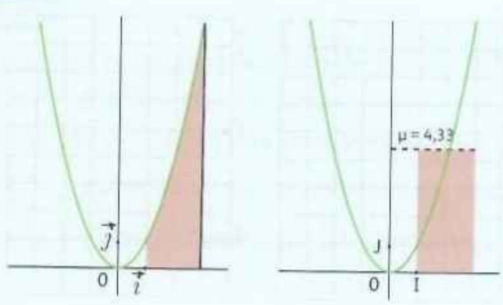
- On multiplie l'expression $\frac{dt}{1+e^{-3t}}$ par $\frac{e^{3t}}{e^{3t}}$ pour avoir l'expression $\frac{e^{3t}}{1+e^{3t}}$.
Posons $u(x) = e^{3t} + 1$, on a $u'(t) = 3e^{3t}$ donc l'expression $\frac{e^{3t}}{1+e^{3t}}$ est de la forme $\frac{1}{3} \times \frac{u'(t)}{u(t)}$.
- Posons $u(x) = \ln x$, on a $u'(x) = \frac{1}{x}$ donc $(\frac{1}{x} \times \ln x)$ a la forme $u'(x)\,u^{\alpha}(x)$.

Exercice 2 Déterminer la valeur moyenne d'une fonction

1. Détermine graphiquement la valeur moyenne de la fonction carrée sur l'intervalle [1 ; 3].
2. Calcule cette valeur.

Corrigé

1.



Méthode

1. Les domaines coloriés ont la même aire.
2. Utilise la formule de la valeur moyenne.

2. $\mu = \frac{1}{3-1}\int_1^3 x^2\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3$
$= \frac{3^3}{6} - \frac{1^3}{6} = \frac{26}{6} = \frac{13}{3}$ donc $\mu \approx 4{,}33$.

Exercice 3 Calculer une intégrale en utilisant une intégration par parties

Calcule l'intégrale P à l'aide d'une intégration par parties.

$P = \int_1^1 (x+1)e^{-3x}\,dx$

Corrigé

Posons : $u(x) = x + 1$ et $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^{-3x}$

alors $v(x) = \frac{-1}{3}e^{-3x}$

$P = \int_1^2 (x+1)e^{-3x}\,dx$

$= \left[\frac{-1}{3}e^{-3x}(x+1)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{-1}{3}e^{-3x}\,dx$

$= \left[-e^{-6} + \frac{2}{3}e^{-3}\right] - \left[\frac{1}{9}e^{-3x}\right]_1^2$

$= -e^{-6} + \frac{2}{3}e^{-3} - [\frac{1}{9}e^{-6} - \frac{1}{9}e^{-3}]$

$= -\frac{10}{9}e^{-6} + \frac{7}{9}e^{-3}.$

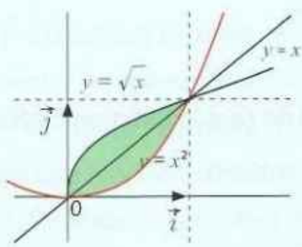
Méthode

$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$

Exercice 4 Calcule l'aire d'une partie du plan comprise entre deux courbes

Soient les fonctions f et g définies par $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$. On désigne par $(\mathscr{C}_f)$, $(\mathscr{C}_g)$, leurs courbes représentatives dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Unité graphique 3 cm.
Colorie la partie (Δ) du plan délimitée par $(\mathscr{C}_f)$, $(\mathscr{C}_g)$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ puis calcule en cm², l'aire A(Δ) de cette partie.

Corrigé



Méthode

On utilise la formule
$\mathscr{A}(\Delta) = (\int_b^a [f(x) - g(x)]\,dx)ua$, $0 \leq g - f$ sur $[a\,;b]$.

L'aire $\mathscr{A}(\Delta)$ en cm², de la partie Δ du plan délimitée par $(\mathscr{C}_f)$, $(\mathscr{C}_g)$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ est : $\mathscr{A}(\Delta) = \left(\int_0^1 [\sqrt{x} - x^2]\,dx\right) \times 9 = 9\,[2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^3}{3}]_0^1 = 9[(2 \times \frac{1^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{1^3}{3}) - (2 \times \frac{0^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{0^3}{3})]$

$\mathscr{A}(\Delta) = 3$ cm².

Exercice 5 Déterminer le sens de variation d'une fonction définie à l'aide d'une intégrale

On considère la fonction F définie par : $F(x) = \int_2^x \frac{e^t}{1+t^4}\,dt.$
Détermine le sens de variation de F.

Corrigé

Soit la fonction F définie par : $F(x) = \int_2^x \frac{e^t}{1+t^4}\,dt$
et la fonction f définie par : $f(x) = \frac{e^t}{1+t^4}$.
F est l'unique primitive de f qui s'annule en 2 ;
F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,
$F'(x) = f(x) = \frac{e^x}{1+x^4}$ et comme $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) >$ 0, alors F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Méthode

On utilise le théorème.
Si une fonction f est continue sur un intervalle K et a un élément de K alors la fonction $x \mapsto \int_b^a f(t)\,dt$ de K vers $\mathbb{R}$, est l'unique primitive de f qui s'annule en a. Cette fonction est dérivable sur K et sa dérivée est la fonction f c'est-à-dire que : si $F(x) = \int_b^a f(t)\,dt$, alors $\forall x \in K$, $F'(x) = f(x)$.

Résumé de cours

1 Intégrale d'une fonction continue

1.1. Notion d'intégrale

Définition f est une fonction continue sur un intervalle K, a et b sont deux éléments de K et F est une primitive de f sur K.
On appelle intégrale de a et b de f le nombre réel $F(b)-F(a)$.
On la note : $\int_a^b f(x)dx$ ou $[F(x)]_a^b$.
On a : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Vocabulaire

- $\int_a^b f(x)dx$ se lit : intégrale (ou somme) de a à b de $f(x)dx$.
- $[F(x)]_a^b$ se lit : "F(x) pris entre a et b".
- a et b sont les bornes de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$.
- La lettre x n'intervient pas dans le résultat de $\int_a^b f(x)dx$. On peut donc la remplacer par toute autre lettre différente de a et b. On l'appelle variable muette.

On a : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz = \ldots = F(b) - F(a)$.

Exemple

Considérons la fonction f définie par $f(x) = x^4$. Une primitive de f est la fonction F définie par $F(x) = \frac{1}{5}x^5$. Donc $\int_0^1 x^4 dx = \left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = F(1) - F(0) = \frac{1}{5} \times 1^5 - 0$.

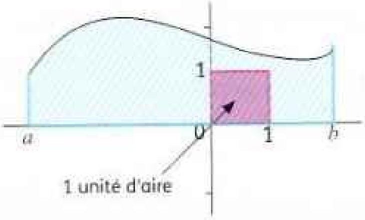
$= \frac{1}{5}$.

1. 2. Interprétation graphique de l'intégrale d'une fonction continue et positive

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ et $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

$\int_a^b f(x)dx$ est l'aire (en unités d'aire) de la partie (Δ) du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C}_f)$, l'axe (OI), les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

N.B : $1u.a = OI \times OJ$.



N.B.

- Soit $\Omega(\Delta)$ l'aire de (Δ). On a : $\Omega(\Delta) = \int_b^a f(x)dx\ u.a.$
- (Δ) est aussi l'ensemble des points M(x ; y) du plan tels que : $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$
- Si f est une fonction continue et négative sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$.

Alors, $\Omega(\Delta) = \int_b^a [-f(x)]dx\ u.a.$

Résumé de cours

1. 3. Propriétés de l'intégrale

Conséquences de la définition

$\int_a^a f(x)dx = 0$ et $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Égalité de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle K ; a, b et c trois éléments de K.
On a : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Linéarité

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle K ; a et b sont deux éléments de K et $\propto$ un nombre réel. On a :

- $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.
- $\int_a^b \propto f(x)dx = \propto \int_a^b f(x)dx$.

Comparaison

- Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$.
  Si $f \geq 0$ sur $[a ; b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
  Si $f \leq 0$ sur $[a ; b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.
- Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a ; b]$.
  Si $f \leq g$ sur $[a ; b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.
- f est une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$, m et M sont deux nombres réels.

Si $m \leq f \leq$ M sur $[a ; b]$, alors $m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$.

Si $|f| \leq$ M sur $[a ; b]$, alors $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq M(b - a)$.

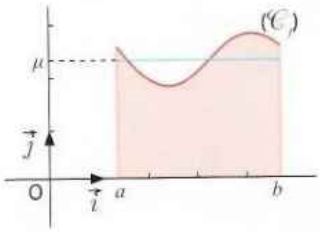
N.B.

- Les calculs exacts d'intégrales sont faits avec les primitives ou en utilisant les différentes propriétés du cours (linéarité, relation de Chasles...).
- Pour encadrer une intégrale, on utilise les propriétés de comparaison (positivité, respect d'ordre, les inégalités de la moyenne).

1. 4. Valeur moyenne d'une fonction

Définition f est une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$; $(a < b)$.
On appelle valeur moyenne de f sur $[a ; b]$, le nombre réel μ tel que :
$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$.

NB : Si $(f[a , b]) = [m , M]$, alors $m \leq \mu \leq M$.
La valeur moyenne μ d'une fonction positive f sur $[a ; b]$, est la hauteur du rectangle de base $(b - a)$ ayant la même aire (en unités d'aire) que la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathscr{C}_f)$, l'axe (OI), les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



Exemple

Soit la fonction f définie par $f(x) = \cos x$.
La valeur moyenne de f sur $[0 ; \pi]$ est :

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{1}{\pi - 0}\int_0^{\pi} \cos x \, dx \\ &= \frac{1}{\pi}[\sin x]_0^{\pi} \\ &= 0.\end{aligned}$$

2 Techniques de calcul d'une intégrale

Utilisation d'une primitive :

$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur $[a ; b]$.

Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a ; b]$.
Si les dérivées u' et v' sont continues sur $[a ; b]$, alors :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Changement de variable affine

Pour calculer $\int_a^b f(\propto x + \beta)dx$, on peut procéder comme suit :

- Faire le changement de variable : $t = \propto x + \beta$. avec $\propto \neq 0$.
  On a : $dt = \propto dx$. D'où $dx = \frac{1}{\propto} dt$.
- Utiliser l'égalité : $\int_a^b f(\propto x + \beta)dx = \int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} \frac{f(t)}{\alpha} dt$.

Intégration des fonctions paires, impaires, périodiques

- **Parité**

Soit f une fonction continue sur un intervalle K symétrique par rapport à 0.
Pour tout élément a de K, on a :

- Si f est paire, alors : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.
- Si f est impaire, alors : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

- **Périodicité**

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique, de période T.
Pour tous nombres réels a et b, on a :

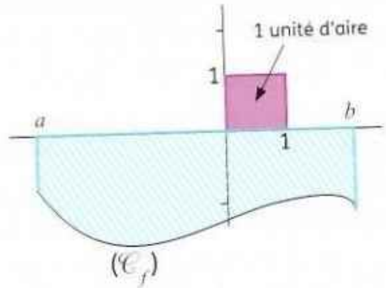
$$\int_{a+T}^{b+T} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \quad ; \quad \int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

Résumé de cours

3 Calculs d'aires

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

1. Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$, $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative, (Δ) est la partie du plan limitée par $(\mathscr{C}_f)$, l'axe des abscisses (OI), les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



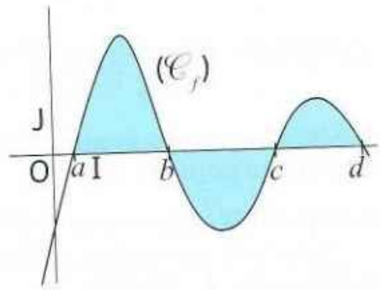
a) Si f est positive sur $[a\,;b]$, alors on a :

$\mathscr{A}(\Delta)= \int_a^b f(x)dx\ .ua$

b) Si f est négative sur $[a\,;b]$, alors on a :

$\mathscr{A}(\Delta)= -\int_a^b f(x)dx\ .ua$

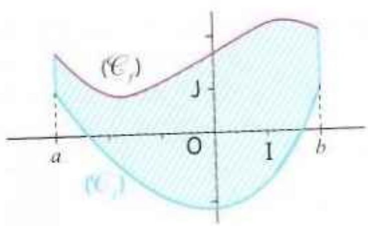
c) Soit la figure ci-contre :



$\mathscr{A}(\Delta)=\left(\int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx\right)ua$

2. Soit f et g deux fonctions continues sur $[a\,;b]$, $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ leurs courbes représentatives respectives.
Δ est la partie du plan délimitée par $(\mathscr{C}_f)$, $(\mathscr{C}_g)$, les droites d'équations : $x = a$ et $x = b$.

Soit la figure ci-dessous où on a : $g \leq f$ sur $[a\,;b]$, c'est-à-dire que $f - g$ est positive sur $[a\,;b]$ donc $\mathscr{A}(\Delta) = \int_a^b [\,f(x) - g(x)]dx\ ua.$



4 Fonction du type : $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$

Théorème

Si une fonction f est continue sur un intervalle K et a un élément de K, alors la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ de K vers $\mathbb{R}$, est l'unique primitive sur K de f qui s'annule en a.

Cette fonction est dérivable sur K et sa dérivée est la fonction f c'est-à-dire que :

si $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, alors $\forall\, x \in K$, $F'(x) = f(x)$.

Exercices de fixation

4-2-1 Reproduis le tableau ci-dessous et mets une croix dans la case qui convient.

N°	La limite de la suite de terme général	est nulle	est infinie	n'existe pas
1	$u_n = \dfrac{n^3}{2^n}$			
2	$u_n = \dfrac{0,4^n}{n^2}$			
3	$u_n = \dfrac{\ln(n)}{n^{\frac{2}{7}}}$			
4	$u_n = \dfrac{n^{-5}}{3^n}$			

4-2-2 Calcule la limite de chaque suite (u_n), $n \in \mathbb{N}^*$ définie ci-dessous :

a) $u_n = \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{3^n}$; b) $u_n = 2^n - 3^n$; c) $u_n = \dfrac{2^n . n^5}{3^n}$; d) $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n^{0.3}}$; e) $u_n = \dfrac{n^{-3}}{5^n}$;

f) $u_n = \dfrac{n^{\frac{1}{2}}}{\ln n}$; g) $u_n = \dfrac{2^n - 5^n}{5^n + 4^n}$.

APPRENTISSAGE DE LA RÉDACTION

Exercice 1 Utiliser le raisonnement par récurrence

Démontre par récurrence que :

- La suite (u_n) définie par $u_0 = -1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{9}{6 - u_n}$ est majorée par 3.
- Pour tout entier naturel n, le nombre $5^{2n} - 3^n$ est un multiple de 22.

Corrigé

- Soit P_n la propriété « $u_n \leq 3$ ».

Initialisation

Pour $n = 0$, $u_0 = -1 < 3$ donc P_0 est vraie.

Hérédité

Supposons que, pour un entier naturel k, $k > 0$, la propriété P_k est vraie c'est-à-dire $u_k \leq 3$ puis démontrons que P_{k+1} est vraie c'est-à-dire $u_{k+1} \leq 3$.

$$\begin{aligned} u_k \leq 3 &\Leftrightarrow -u_k \geq -3 \\ &\Leftrightarrow 6 - u_k \geq 3 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{6-u_k} \leq \frac{1}{3} \\ &\Leftrightarrow \frac{9}{6-u_k} \leq 3 \\ &\Leftrightarrow u_{k+1} \leq 3 \end{aligned}$$

Ainsi P_{n+1} est vraie.

Conclusion

Donc pour tout entier naturel n, la suite (u_n) est majorée par 3.

- Soit Q_n la propriété « $5^{2n} - 3^n$ est un multiple de 22. »

Méthode

Le raisonnement par récurrence comporte trois étapes : l'initialisation, l'hérédité et la conclusion.

Initialisation

Pour $n = 0$, $5^0 - 3^0 = 1 - 1 = 0$ or 0 est un multiple de 22, donc Q_0 est vraie.

Hérédité

Supposons que, pour un entier naturel n, $n > 0$, la propriété Q_n est vraie puis montrons que Q_{n+1} est vraie.

$5^{2(n+1)} - 3^{(n+1)} = 5^{2n+2} - 3^{n+1} = 5^{2n} \times 5^2 - 3^n \times 3$
$= (22 + 3) \times 5^{2n} - 3 \times 3^n = 22 \times 5^{2n} + 3(5^{2n} - 3^n)$.

On sait que d'après l'hypothèse de récurrence Q_n est vraie c'est-à-dire que $5^{2n} - 3^n$ est un multiple de 22 donc $3(5^{2n} - 3^n)$ est un multiple de 22 ; aussi 22×5^{2n} est un multiple de 22.

Par conséquent $5^{2(n+1)} - 3^{(n+1)}$ étant la somme de deux multiples de 22 est un multiple de 22.

Donc Q_{n+1} est vraie.

Conclusion

Donc pour tout entier naturel n, le nombre $5^{2n} - 3^n$ est un multiple de 22.

Exercice 2 Étudier le sens de variation d'une suite

On considère les suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies respectivement par : $u_n = \dfrac{-2}{\ln(3+n)}$ et $v_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

Étudie la monotonie de ces suites.

Corrigé

• Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = -\dfrac{2}{\ln(4+n)}$

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{-2}{\ln(4+n)} + \dfrac{2}{\ln(3+n)}$

Pour tout entier naturel n, $4 + n > 3 + n$ donc $\ln(4 + n) > \ln(3 + n)$.

$\dfrac{1}{\ln(4+n)} < \dfrac{1}{\ln(3+n)}$

$\dfrac{-2}{\ln(4+n)} > \dfrac{-2}{\ln(3+n)}$

Ainsi pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} - u_n > 0$.

La suite (u_n) est croissante.

• $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $n^n > 0$ et $n! > 0$ donc tous les u_n sont strictement positifs donc on peut comparer le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)! \times n^n}{(n+1)^{n+1} \times n!}$$

$$\frac{(n+1) \times n! \times n^n}{(n+1)(n+1)^n \times n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

On sait que $n < n + 1$ donc $\dfrac{n}{n+1} < 1$ or la fonction $x \mapsto x^n$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n < 1$ et par conséquent $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.

On conclut que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{N}^*$.

Méthode

Pour étudier le sens d'une suite (u_n), on peut :
- étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$;
- comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1, lorsque $u_n > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 Étudier la convergence d'une suite récurrente

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = 4 - \dfrac{1}{4}\ln(x)$.

1. Démontre que l'équation (E) : $f(x) = x$ admet dans $]0\,;+\infty[$ une solution unique α appartenant à $I =]3\,;4[$.

2. a) Démontre que $f(I) \subset I$.

   b) Démontre que $\forall x \in I$, $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{12}$.

3. Soit w_n la suite définie par : $w_0 = \dfrac{7}{2}$ et $w_{n+1} = f(w_n)$.

   a) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontre que :
   $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|w_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{12^n}\,|w_0 - \alpha|$.

   b) Déduis-en que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|w_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{12^n}\right)$, puis que $\lim w_n = \alpha$.

   c) Détermine une valeur approchée à 10^{-5} près de α.

Corrigé

1. Soit la fonction $h : x \mapsto x - f(x)$.

h est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et on a : $\forall x \in]0\,;+\infty[$, $h'(x) = 1 + \dfrac{1}{4x}$.

$\forall x \in]0\,;+\infty[$, $h'(x) > 0$ donc h est strictement croissante de $]0\,;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$, $0 \in \mathbb{R}$ par conséquent l'équation $h(x) = 0$ possède une unique solution dans $]0\,;+\infty[$.

On a $h(3) \approx -0{,}725$ et $h(4) \approx 0{,}366$;

$h(3) \times h(4) < 0$ donc $3 < \alpha < 4$.

2. a) La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et on a : $\forall x \in]0\,;+\infty[$, $f'(x) = -\dfrac{1}{4x}$.

$\forall\, x \in]0\,;+\infty[$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$;

Méthode

3. b) Utiliser une démonstration par récurrence ou un produit membre à membre.

On a : $f(3) \approx 3{,}725$ et $f(4) \approx 3{,}65$;
$f(4) > 3$ et $f(3) < 4$ donc si $x \in]3\,;4[$,
$3 < f(4) < f(x) < f(3) < 4$ d'où $f(I) \subset I$.

b) La fonction f est deux fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et on a : $f''(x) = \frac{1}{4x^2}$ donc f' est croissante sur $]0\,;+\infty[$.

On a : $f'(3) = -\frac{1}{12}$ et $f'(4) = -\frac{1}{16}$
Donc : $\forall x \in I$, $-\frac{1}{12} < f'(x) < -\frac{1}{16}$.
On en déduit que $|f'(x)| < \frac{1}{12}$.

3. Soit (w_n) la suite définie par :
$w_0 = \frac{7}{2}$ et $w_{n+1} = f(w_n)$.

a) On a : $w_0 \in I$ et $f(I) \subset I$ donc si $u_k \in I$, alors $u_{k+1} \in I$. On en déduit par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.

On sait que $|f'(x)| < \frac{1}{12}$ et en appliquant l'inégalité des accroissements finis à f sur I, on a :
$|f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{12}\,|x - \alpha|$.
Puisque $w_{n+1} = f(w_n)$ et on a :
$|f(w_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{12}\,|w_n - \alpha|$.
Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|w_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{12}\,|w_n - \alpha|$.

On a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $|w_{k+1} - \alpha| \leq \frac{1}{12}\,|w_k - \alpha|$;
Pour $k = 0$, on a : $|w_1 - \alpha| \leq \frac{1}{12}\,|w_0 - \alpha|$;
Pour $k = 1$, on a : $|w_2 - \alpha| \leq \frac{1}{12}\,|w_1 - \alpha|$;
Pour $k = 2$, on a : $|w_3 - \alpha| \leq \frac{1}{12}\,|w_2 - \alpha|$.
....
Pour $k = n-1$, on a : $|w_n - \alpha| \leq \frac{1}{12}\,|w_{n-1} - \alpha|$
On fait le produit membre à membre et on simplifie, on aura : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|w_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{12}\right)^n |w_0 - \alpha|$.

b) On a : $w_0 = \frac{7}{2} = 3{,}5$ et $3 < \alpha < 4$ donc
$|w - \alpha| < \frac{1}{2}$ et par conséquent $\forall n \in \mathbb{N}$,
$|w_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12^n}\right)$
On a : $\lim \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12^n}\right) = 0$ donc $\lim w_n = \alpha$.

c) Pour que $|w_n - \alpha| \leq 10^{-3}$, il suffit que
$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{12^n}\right) \leq 10^{-3}$.
$12^n \geq 50000$.
$n\ln 12 \geq \ln 50000$
$n \geq 4{,}35$
La plus petite valeur qui convient est $n = 5$ et $w_5 \approx 3{,}674637$.

Exercice 4 Utiliser une suite arithmétique pour résoudre un problème

Pendant les vacances scolaires, Kaelly se trouve un petit emploi. Cet emploi lui rapporte 18 000 F CFA la première semaine et 4 500 F CFA de plus chacune des semaines qui suivent.

Kaelly désire dépenser 10000 F CFA par semaine (transport et nourriture) et faire des économies pour ses courses de la nouvelle rentrée scolaire (ordinateur, fournitures scolaires, tenue, chaussures, ...) qu'elle évalue à 315 000 FCFA.
Après trois mois de vacances scolaires, penses-tu que Kaelly pourra arriver à ses fins ?
En utilisant tes connaissances sur les suites numériques, propose une réponse à Kaelly.

Corrigé

Méthode

Il faut calculer le salaire de Kaelly sur les 12 semaines puis retrancher les dépenses totales.

Soit u_n le gain de Kaelly au bout de n semaines.
Le salaire de Kaelly :
la première semaine est $u_1 = 18\,000$;
la deuxième semaine est $u_2 = u_1 + 4500 = 22\,500$;
la troisième semaine est $u_3 = u_2 + 4500 = 27\,000$.
On voit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 4500$ donc (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 4500$ et de premier terme 18000.
$\forall n \geq 1$, $u_n = 18000 + (n-1) \times 4500$
$= 13500 + 4500n$.
Les trois mois de vacances font 12 semaines donc le gain total (sans dépenses) de Kaelly est :
$S = u_1 + u_2 + ... + u_{12} = \frac{12}{2}(u_1 + u_{12})$

On a $\forall n \geq 1$, $u_n = 13500 + 4500n$
donc $u_{12} = 13500 + 4500 \times 12 = 67\,500$.
Ainsi $S = \frac{12}{2}(13500 + 67500) = 486\,000$.
Ses dépenses étant de $10000 \times 12 = 120000$ ses économies seront $486000 - 120000 = 366000$ FCFA
$366000 > 315000$ donc Kaelly, peut, à la fin des vacances scolaires, préparer sa rentrée scolaire.

Exercice 5 **Utiliser une suite géométrique pour résoudre un problème**

Tano et Bosson ont été embauchés au premier janvier 2020 dans deux entreprises différentes, sous deux contrats différents à durée indéterminée.

Bosson débute avec un salaire annuel de 4,5 millions de francs CFA net et une augmentation de 4% par an, au premier janvier de chaque année.

Tano débute avec un salaire annuel de 5 millions de francs CFA net et une augmentation de 3% par an, au premier janvier de chaque année.

Avec une telle différence dans les contrats, Bosson veut savoir en quelle année son salaire deviendra-t-il supérieur à celui de Tano.

Corrigé

On désigne respectivement par u_n et v_n les salaires annuels de Bosson et de Tano au premier janvier de l'année $2020 + n$.

Le salaire de Bosson :

- au premier janvier 2020 est $u_0 = 4\,500\,000$;
- au premier janvier 2021 sera $u_1 = u_0 + \frac{4}{100} u_0 = 1{,}04\, u_0 = 4\,680\,000$;
- au premier janvier 2022 sera $u_2 = u_1 + \frac{4}{100} u_1 = 1{,}04\, u_1 + \frac{4}{100} u_1 = 4\,867\,200$;

On voit que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1{,}04\, u_n$ donc la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 1,04 et on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1{,}04^n\, u_0$.

Le salaire de Tano :

- au premier janvier 2020 est $v_0 = 5\,000\,000$;
- au premier janvier 2021 sera $v_1 = v_0 + \frac{3}{100} v_0 = 1{,}03 v_0 = 5\,150\,000$;
- au premier janvier 2022 sera $v_2 = v_1 + \frac{3}{100} v_1 = 1{,}03 v_1 = 5\,304\,500$;

On voit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 1{,}03 v_n$ donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 1,03 et on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1{,}03^n\, v_0$.

Le salaire de Bosson sera supérieur à celui de Tano si $u_n > v_n$.

$u_n > v_n \Leftrightarrow 1{,}04^n\, u_0 > 1{,}03^n\, v_0$.

$\Leftrightarrow \left(\frac{1{,}04}{1{,}03}\right) > \frac{v_0}{u_0}$

$\Leftrightarrow n\ln\left(\frac{1{,}04}{1{,}03}\right) > \ln\frac{v_0}{u_0}$

$\Leftrightarrow n > \dfrac{\ln\frac{v_0}{u_0}}{\ln\left(\frac{1{,}04}{1{,}03}\right)}$

$\Leftrightarrow n > 11$.

Le salaire de Bosson sera supérieur à celui de Tano en 2020 + 11 donc en 2031.

Méthode

Faire attention au signe du logarithme dans la résolution des inéquations.

Résumé de cours

Dans ce résumé de cours, e désigne une partie de $\mathbb{N}$.

1 Généralités sur les suites numériques et raisonnement par récurrence

1.1. Définition

Définition Une suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.
Une suite peut être définie par :

- la donnée de son terme général en fonction de n ; on dit alors que la suite est définie par une formule explicite ;
- la donnée d'un terme et une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$; on dit que la suite est définie par une formule de récurrence.

1.2. Raisonnement par récurrence

Définition En mathématique, le raisonnement par récurrence est une forme de raisonnement visant à démontrer une propriété dépendant de n où n est un entier naturel.

<u>Principe du raisonnement par récurrence</u>

Lorsque la propriété dépend d'un entier naturel n, on peut la noter P(n).
Principe : Soit P(n) une propriété dépendant de l'entier naturel n. Pour démontrer que P(n) est vraie pour tout n supérieur ou égal à un entier n_0 donné, on procède comme suit :

- **Initialisation** : On vérifie que P(n_0) est vraie.
- **Hérédité** : On établit que : « Si pour un entier $k \geq n_0$, P(k) est vraie » alors « P($k + 1$) est vraie ».
- **Conclusion** : On conclut que : P(n) est vraie pour tout $n \geq n_0$.

1.3. Sens de variation d'une suite

Propriété 1 Soit $(u_n)_{n \in E}$ une suite numérique. On dit que :

- La suite (u_n) est **croissante** lorsque $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$.
- La suite (u_n) est **décroissante** lorsque $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_{n+1}$.
- La suite (u_n) est **constante** lorsque $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_{n+1}$.

<u>Remarque</u>

Avec des inégalités strictes, on dira que la suite est strictement croissante ou strictement décroissante.

<u>Comment étudier le sens de variation d'une suite ?</u>

- Points méthodes

- Pour une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par une formule explicite, on peut :

Méthode 1 : Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.

Méthode 2 : Comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 (si les termes de la suite sont strictement positifs).

Méthode 3 : Étudier le sens de variation sur [0 ; +∞[de la fonction f telle que : $u_n = f(n)$.

- Pour une suite définie par une formule de récurrence, on peut :

Méthode 1 : Utiliser la méthode 1 précédente si possible.

Méthode 2 : Utiliser le raisonnement par récurrence.

Résumé de cours

Définition
- Une suite est dite **monotone** lorsqu'elle est soit croissante, soit décroissante.
- Une suite est dite **stationnaire** lorsqu'elle est constante à partir d'un certain rang.

Propriété 2 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique dont le terme général est du type $u_n = f(n)$ où f est une fonction numérique. Alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a le même sens de variation que la fonction f sur $[0 ; +\infty[$.

1.4. Suites majorées - suites minorées

Définition Soit $(u_n)_{n \in E}$ une suite numérique. On dit que :
1. La suite $(u_n)_{n \in E}$ est minorée s'il existe un nombre réel m tel que : $\forall n \in E, u_n \geq m$.
2. La suite $(u_n)_{n \in E}$ est majorée s'il existe un nombre réel M tel que : $\forall n \in E, u_n \leq M$.
3. La suite $(u_n)_{n \in E}$ est bornée si elle est à la fois minorée et majorée.
$(\exists\, m \in \mathbb{R}, \exists\, M \in \mathbb{R} / \forall n \in E, m \leq u_n \leq M)$.

Remarques
- Toute suite (u_n) croissante est minorée par son premier terme et on a : $u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \cdots$
- Toute suite (v_n) décroissante est majorée par son premier terme et on a : $v_0 \geq v_1 \geq v_2 \geq \cdots$

2 Convergence d'une suite numérique

2.1. Notion de convergence

Définition Soit $(u_n)_{n \in E}$ une suite numérique.
1. La suite $(u_n)_{n \in E}$ est converge si elle admet une limite finie.
2. La suite $(u_n)_{n \in E}$ est divergente si elle n'est pas convergente (ou si elle n'admet pas de limite finie).

La limite de la suite $(u_n)_{n \in E}$ est notée : $\lim\limits_{x \to +\infty} (u_n)$ ou simplement $\lim(u_n)$.

Remarques
- On ne calcule la limite d'une suite que pour n tendant vers $+\infty$.
- On admet que si une suite admet une limite, alors cette limite est unique.

2.2. Suite définie par une formule explicite

2.2.1. Limite d'une suite définie par une formule explicite

Propriété ℓ est soit un nombre réel, soit $-\infty$, soit $+\infty$. Si f est une fonction telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, alors la suite (u_n) définie par $u_n = f(n)$ admet pour limite ℓ.

Remarques

La réciproque est fausse. Prenons $f(x) = \sin(\pi x)$ et $u_n = \sin(\pi n)$.
$\lim u_n = 0$ alors que f n'admet pas de limite en $+\infty$.

- Pour certaines suites numériques (u_n) tous les termes à partir d'un certain rang sont aussi proches que l'on veut d'un nombre réel ℓ. Dans ce cas, on dit que la suite (u_n) a pour limite ℓ et on écrit : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ ou simplement $\lim(u_n) = \ell$.

Résumé de cours

- Pour certaines suites numériques (u_n), tous les termes à partir d'un certain rang sont aussi grands (resp. petit) que l'on veut. Dans ce cas, on dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) et on écrit : $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (resp. $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$) ou simplement $\lim(u_n) = +\infty$ (resp. $\lim(u_n) = -\infty$).

2.2.2. Propriétés de comparaison

Dans les propriétés ci-dessous, (u_n), (v_n) et (w_n) sont trois suites et l et l' des nombres réels.

Propriété 1
- Si, à partir d'un certain rang, on a : $u_n \geq v_n$ et $\lim v_n = +\infty$ alors $\lim u_n = +\infty$.
- Si, à partir d'un certain rang, on a : $u_n \leq v_n$ et $\lim v_n = -\infty$ alors $\lim u_n = -\infty$.

Propriété 2
- Si, à partir d'un certain rang, on a : $v_n \leq u_n \leq w_n$ et $\lim v_n = \lim w_n = \ell$ alors $\lim u_n = \ell$.
- Si, à partir d'un certain rang, on a : $|u_n - \ell| \leq v_n$ et $\lim v_n = 0$ alors $\lim u_n = \ell$.

Propriété 3 Soit $\lim u_n = \ell$ et $\lim v_n = \ell'$. Si, à partir d'un certain rang on a : $u_n \leq v_n$ alors $\ell \leq \ell'$.

2.3. Suites récurrentes

Propriété 1 $(u_n)_{n\in E}$ est une suite qui converge vers a et f une fonction continue en a, alors la suite $(v_n)_{n\in E}$ définie par : $v_n = f(u_n)$ converge vers $f(a)$.

Propriété 2 Soit $(u_n)_{n\in E}$ une suite dont le terme général est du type : $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
Si $(u_n)_{n\in E}$ converge vers ℓ et si f est continue en ℓ, alors ℓ est solution de l'équation $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$

Remarques

- Une solution ℓ de l'équation $f(x) = x$ est appelé point fixe de f.
- L'existence d'un point fixe n'implique pas la convergence d'une suite récurrente.
- Cette propriété est utilisée pour calculer la limite après avoir prouvé la convergence.
- Elle peut aussi prouver la divergence par un raisonnement par l'absurde (si l'équation n'a pas de solution la suite est divergente).

2.4. Suites monotones

Propriété 1
- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et minorée est convergente.

Propriété 2
- Toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.
- Toute suite décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.

3 Suite arithmétique - Suite géométrique

3.1. Suite arithmétique

3.1.1. Généralités

Définition Soit $(u_n)_{n \in E}$ une suite numérique.
$(u_n)_{n \in E}$ est une suite arithmétique s'il existe un nombre réel r tel que :
$\forall n \in E, u_{n+1} = u_n + r$.
Le nombre réel r est appelé la raison de la suite $(u_n)_{n \in E}$.

Soit $(u_n)_{n \in E}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.

Formule explicite : $\forall n \in E, u_n = u_0 + nr$.
$\forall n \in E$ et $p \in E, u_n = u_p + (n - p) \times r$.

Sens de variation

Si $r < 0$ alors (u_n) est décroissante; si $r = 0$ alors (u_n) est constante; si $r > 0$ alors (u_n) est croissante.

Somme de termes consécutifs

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ...+ u_{n-1} = \frac{n(u_0 + u_{n-1})}{2} = \frac{n}{2}(2u_0 + (n-1)r).$$

Exemples

a) Somme des entiers naturels inférieurs ou égaux à n : $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
b) Somme des nombres pairs : $2 + 4 + 6 + ...+ (2p) = p(p + 1)$.
c) Somme des nombres impairs : $1 + 3 + 5 + ... + (2p + 1) = (p + 1)^2$.

3.1.2. Convergence d'une suite arithmétique

Propriété Soit $(u_n)_{n \in E}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.
- Si $r = 0$ alors (u_n) converge et $\lim u_n = u_0$.
- Si $r \neq 0$ alors (u_n) diverge et $\lim u_n = -\infty$, ($r < 0$) ; $\lim u_n = +\infty$ ($r > 0$).

3.2. Suites géométriques

3.2.1. Généralités

Définition Soit $(v_n)_{n \in E}$ une suite numérique.
$(v_n)_{n \in E}$ est une suite géométrique s'il existe un nombre réel q tel que :
$\forall n \in E, v_{n+1} = qv_n$.
Le nombre réel q est appelé la raison de la suite $(v_n)_{n \in E}$.

Soit $(v_n)_{n \in E}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme v_0.

Formule explicite : $\forall n \in E, v_n = v_0 \times q^n$.
$\forall n \in E$ et $p \in E, v_n = v_p \times q^{n-p}$.

Sens de variation

Pour $v_0 < 0$, (v_n) est décroissante si $q > 1$ et croissante si $0 < q < 1$.
Pour $v_0 > 0$, (v_n) est croissante si $q > 1$ et décroissante si $0 < q < 1$.

Résumé de cours

Somme de termes consécutifs

- $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ...+ v_{n-1} = v_0 \times \left(\dfrac{1-q^n}{1-q}\right)$ si $q \neq 1$.
- $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ...+ v_{n-1} = n \times v_0$ si $q = 1$.

Exemples

- La somme de puissances d'un nombre réel x, ($x \neq 1$), pour $n \geq 1$ est :

$1 + x + x^2 + ...+ x^n = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

En particulier, une factorisation de $1 - x^n$ est : $(1 - x)(1 + x + \cdots ... + x^{n-1})$.

- Un capital C_0, placé à intérêts composés pendant n années au taux annuel i, produit C_n capital où $C_n = (1 + i)^n C_0$.

3.2.2. Convergence d'une suite géométrique

Propriété Soit (v_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme v_0, avec $q \neq 0$ et $v_0 \neq 0$.

$-1 < q \leq 1$	(v_n) est convergente	$\lim v_n = 0$ si $-1 < q < 1$
		$\lim v_n = v_0$ si $q = 1$
$q \leq -1$ ou $q > 1$	(v_n) est divergente	$\lim v_n = +\infty$ si $q > 1$ et $v_0 > 0$
		$\lim v_n = -\infty$ si $q > 1$ et $v_0 < 0$
		$\lim v_n$ n'existe pas si $q \leq -1$

4 Suite n^α, b^n, $\ln(n)$ et croissance comparée

4.1. Convergence des suites $(b^n)_n$, $(n^\alpha)_n$ $b \in \mathbb{R}_+^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Propriété 1 La suite $(b^n)_n$ est convergente si et seulement si $0 < b \leq 1$ et on a :
$\lim b^n = 0$ (pour $0 < b < 1$) et $\lim(b^n) = 1$ (pour $b = 1$).

Propriété 2 La suite $(n^\alpha)_n$ est convergente si et seulement si $\alpha \leq 0$ et on a :
$\lim n^\alpha = 0$ (pour $\alpha < 0$) et $\lim(n^\alpha) = 1$ (pour $\alpha = 0$).

4.2. Croissances comparées

Propriété

1. Si $\alpha > 0$, alors $\lim \dfrac{\ln(n)}{n^\alpha} = 0$;
2. Si $b > 1$ et α est quelconque, alors $\lim \dfrac{n^\alpha}{b^n} = 0$;
3. Si $0 < b < 1$ et $\alpha < 0$, alors $\lim \dfrac{n^\alpha}{b^n} = +\infty$.

Exercices de fixation

3-2-1 On donne l'équation différentielle (E) : $y'' = 4y$ dont les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $y_{ab}(x) = ae^{2x} + be^{-2x}$; a et b des nombres réels. On donne les conditions $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.
Détermine parmi les fonctions suivantes : $f(x) = -3e^{2x} + 3e^{-2x}$; $h(x) = \frac{1}{4}e^{x} - \frac{1}{4}e^{-x}$; $g(x) = \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}$, la solution de (E) qui vérifie les conditions données.

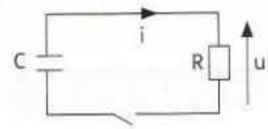
3-2-2 On considère l'équation différentielle (E) : $f'' = -9f$ dont les solutions sont les fonctions de la forme $f_{ab}(x) = a\cos 3x + b\sin 3x$, « où a et b sont des nombres réels ».
1. Détermine les nombres réels a et b tels $f_{ab}\left(\frac{\pi}{9}\right) = 0$ et $f'_{ab}\left(\frac{\pi}{9}\right) = 1$.
2. Détermine alors la fonction f solution de (E) telle que $f\left(\frac{\pi}{9}\right) = 0$ et $f'\left(\frac{\pi}{9}\right) = 1$.

3-2-3 Détermine dans chaque cas la solution de l'équation différentielle vérifiant les conditions données :
a) $y'' = y$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
b) $y'' = -y$; $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.
c) $y'' = 0$; $y(1) = 2$, $y'(1) = -1$.
d) $y'' - 4y = 0$; $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$.

APPRENTISSAGE DE LA RÉDACTION

Exercice 1 Décharger un condensateur

Un condensateur de capacité C, initialement chargé à une tension $u_0 = 10$ volts, se décharge à partir de l'instant $t_0 = 0$ à travers un circuit de résistance R.
La tension u est une fonction du temps t, (t en secondes), et vérifie l'équation différentielle (E) : $RCu'(t) + u(t) = 0$.



1. En prenant $C = 15 \times 10^{-5}$ farads et $R = 2 \times 10^{4}$ ohms, justifie que la tension u vérifie l'équation différentielle (E) : $3u' + u = 0$.
2. Résous (E).
3. Détermine la fonction u solution de (E) et telle que $u(t_0) = u_0$.
4. À partir de quel instant t_1 la tension u devient-elle inférieure au dixième de sa valeur initiale ? On donnera la valeur exacte, puis une valeur approchée au dixième de seconde.
5. Calcule la valeur moyenne de u entre les instants t_0 et t_1.
6. L'énergie emmagasinée dans le condensateur à l'instant t est, en joules, $W(t) = \frac{1}{2}C[u(t)]^2$.
Calcule la valeur moyenne W_m de cette fonction entre t_0 et t_1.

Corrigé

1. La tension u vérifie l'équation différentielle (E) : $RCu' + u = 0$; en remplaçant R et C par leurs valeurs respectives, on obtient l'équation différentielle (E) : $3u' + u = 0$.

Méthode

On utilise les équations différentielles pour résoudre les problèmes de RLC, en physique.

2. L'équation (E) : $3u' + u = 0$ est équivalente à l'équation différentielle $u' = -\frac{1}{3}u$.
Les solutions de l'équation (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme : $u_k(t) = ke^{-\frac{1}{3}t}$ où k est un nombre réel.
3. On a $u(t_0) = u_0$ équivaut à $u(0) = 10$ ce qui équivaut à : $ke^{-\frac{1}{3}\times 0} = 10$; et donc $k = 10$.
La fonction u solution de (E) telle que $u(t_0) = u_0$ est : $u(t) = 10e^{-\frac{1}{3}t}$.
4. La valeur initiale de u est $u_0 = 10$ volts donc le dixième est 1 volt.
Donc $u(t) \leq 1$ équivaut à $10e^{-\frac{1}{3}t} \leq 1$ ce qui équivaut à $t \geq 3\ln 10$; donc $t_1 = 3\ln 10$.
$t_1 = 6.9$s

5. La valeur moyenne de u entre t_0 et t_1 est :

$$u_m = \frac{1}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1} u(t)dt = \frac{1}{6,9}\int_0^{6,9} 10e^{-\frac{1}{3}t}dt = \frac{10}{6,9}\left[-3e^{-\frac{1}{3}t}\right]_0^{6,9} = \frac{10}{2,3}(1 - e^{-2,3})\text{volts}.$$

6. La valeur moyenne de w_m entre t_0 et t_1 est :

$$w_m = \frac{1}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1} w(t)dt = \frac{1}{6,9}\int_0^{6,9} \times\frac{1}{2}\times 15\times 10^{-5}\times(10e^{-\frac{1}{3}t})^2 dt = \frac{15}{2\times 6,9}\times 10^{-3}\int_0^{6,9} e^{-\frac{2t}{3}}dt$$

$$= \frac{45}{27,6}\times 10^{-3}(1 - e^{-4,6}).$$

Exercice 2 Résoudre une équation différentielle du type : $y'' + my = g$(E)

Soit l'équation différentielle (A) : $y'' - 9y = 5t + 1$.

1. Détermine un polynôme p de degré 1, solution de (A).
2. Démontre qu'une fonction f est solution de (A) si et seulement si $f - p$ est solution de l'équation différentielle (A') : $y'' - 9y = 0$.
3. Résous (A') et déduis-en les solutions de (A).
4. Détermine la solution de (A) qui s'annule en 0 et dont la dérivée s'annule en 0.

Méthode

Utiliser la méthode de résolution d'une équation différentielle du type $f'' = 10^2 f$, puis celle vérifiant les conditions initiales.

Corrigé

1. p étant un polynôme de degré 1 alors $p(t)$ est de la forme $p(t) = at+b$ où a et b sont des nombres réels.

On a : p solution de (A) équivaut à :

$p''(t) - 9p(t) = 5t + 1$;

soit $-9(at + b) = 5t + 1$.

Ce qui donne $-9at - 9b = 5t + 1$ et donc $\begin{cases} -9a = 5 \\ -9b = 1 \end{cases}$; d'où $\begin{cases} a = -\frac{5}{9} \\ b = -\frac{1}{9} \end{cases}$ et donc $p(t) = -\frac{5}{9}t - \frac{1}{9}$.

2. f est solution de (A) si et seulement si $f'' - 9f = 5t + 1$. Or $p'' - 9p = 5t + 1$, donc f est solution de (A) si et seulement si $f'' - 9f = p'' - 9p$, ce qui équivaut à $(f - p)'' - 9(f - p) = 0$. Ce qui équivaut à $f - p$ est solution de l'équation différentielle (A') : $y'' - 9y = 0$.

3. On a : (A') : $y'' - 9y = 0$ équivaut à $y'' = 3^2 y$. Donc les solutions de l'équation différentielle (A') sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et de la forme $y_{ab}(t) = ae^{3t} + be^{-3t}$.

f est solution de (A) équivaut à $f - p$ est solution de (A'), ce qui équivaut à $(f - p)(t) = ae^{3t} + be^{-3t}$; ce qui équivaut à $f(t) = ae^{3t} + be^{-3t} + p(t)$.

Donc les solutions de l'équation différentielle (A) sont les fonctions f de la forme $f(t) = ae^{3t} + be^{-3t} - \frac{5}{9}t - \frac{1}{9}$.

4. On a $f(t) = ae^{3t} + be^{-3t} - \frac{5}{9}t - \frac{1}{9}$ et donc $f'(t) = 3ae^{3t} - 3be^{-3t} - \frac{5}{9}$.

$f(0) = 0$ équivaut à $a + b - \frac{1}{9} = 0$ et $f'(0) = 0$ équivaut à $3a - 3b - \frac{5}{9} = 0$.

On obtient donc le système : $\begin{cases} a + b - \frac{1}{9} = 0 \\ 3a - 3b - \frac{5}{9} = 0 \end{cases}$; qui a pour solution $\begin{cases} a = \frac{4}{27} \\ b = -\frac{1}{27} \end{cases}$.

La fonction f, solution de l'équation différentielle (A) qui s'annule et dont la dérivée s'annule en 0, est : $f(t) = \frac{4}{27}e^{3t} - \frac{1}{27}e^{-3t} - \frac{5}{9}t - \frac{1}{9}$.

Résumé de cours

1 Définition d'une équation différentielle

Définition On appelle équation différentielle, toute équation ayant pour inconnue une fonction f et dans laquelle figure au moins une dérivée successive f', f'', f'''..., de la fonction inconnue.

NB :
- L'ordre d'une équation différentielle est le plus grand ordre des dérivées intervenant dans celle-ci.
- Résoudre une équation différentielle sur un intervalle I, c'est déterminer l'ensemble de toutes les fonctions définies sur I et qui vérifient l'équation (dans ce cours, généralement $I = \mathbb{R}$).

2 Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants

Définition Une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants est une équation différentielle pouvant se mettre sous la forme : $f' = af + b$ avec a et b des nombres réels.

2.1. Équations du type : $f' = af$ $(a \in \mathbb{R})$

a) Définition

Définition On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants sans second membre, toute équation différentielle qui peut se mettre sous la forme : $f' = af$ où a est un nombre réel.

b) Propriété

Propriété Soit l'équation différentielle (E) : $f' = af$ $(a \in \mathbb{R})$. L'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions f_k définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, par $f_k(x) = ke^{ax}$; où k est un nombre réel quelconque.

<u>Remarque :</u>

On dit que l'ensemble des fonctions f_k est une famille de fonctions.

2.2. Équations du type : $f' = af + b$ avec a et b des nombres réels et $a \neq 0$

Propriété Soit l'équation différentielle (E) : $f' = af + b$ (a et b réels avec $a \neq 0$). Les solutions de (E) sont les fonctions définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par $f_k(x) = ke^{ax} - \dfrac{b}{a}$; où k est un nombre réel quelconque.

2.3. Les solutions d'une équation différentielle du type $f' = af + b$ et vérifiant une condition

Propriété Soit x_0 et y_0 des nombres réels. Il existe une unique solution h de l'équation (E) : $f' = af + b$ (a et b réels) telle que $h(x_0) = y_0$.

3 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

3.1. Définition et propriété

Définition On appelle équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants toute équation différentielle pouvant s'écrire sous la forme (E) : $f'' = af' + bf + c$ où a, b et c sont des nombres réels.

NB : Dans ce cours, on ne traitera que le cas (E) : $f'' = mf$, où $m \in \mathbb{R}$.

Propriété L'équation différentielle (E) : $f'' = mf$, où $m \in \mathbb{R}$ a pour solutions :
a) les fonctions $x \mapsto ax + b$, où a et b sont des nombres réels quelconques, si $m = 0$.
b) les fonctions $x \mapsto ae^{\omega x} + be^{-\omega x}$, si $m = \omega^2$ où $\omega \in \mathbb{R}^*$.
c) les fonctions $x \mapsto a\cos\omega x + b\sin\omega x$, si $m = -\omega^2$ où $\omega \in \mathbb{R}^*$.

3.2. La solution d'une équation différentielle du type : $f'' = mf$ avec conditions initiales

Propriété Soient x_0, y_0 et z_0 des nombres réels. L'équation différentielle (E) : $f'' = mf$ où $m \in \mathbb{R}$ admet une unique solution f telle que $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = z_0$.

APPRENTISSAGE DE LA RÉDACTION

Exercice 1 Résoudre une équation

Résous dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes d'inconnue z. On écrira les solutions sous forme algébrique.

a) $2z - 3i + 1 = 1 + z$; b) $\frac{2z - i}{iz + 1} = 2i$; c) $2i - \overline{z} + 1 = -2i\overline{z}$; d) $(2 + 5i)z - 3 = i + 2i\overline{z} + 1$.

Corrigé

a) $2z - 3i + 1 = 1 + z$

$2z - z = 1 + 3i - 1$

$z = 3i$

$S = \{3i\}$.

b) $\frac{2z - i}{iz + 1} = 2i, z \neq i$

$2z - i = 2i(iz + 1)$

$2z - i = -2z + 2i$

$4z = 3i$

$z = \frac{3}{4}i$; $S = \left\{\frac{3}{4}i\right\}$.

c) $2i - \overline{z} + 1 = -2i\,\overline{z}$

$(1 - 2i)\,\overline{z} = 1 + 2i$

$\overline{z} = \frac{1 + 2i}{1 - 2i}$

$\overline{z} = \frac{(1 + 2i)(1 + 2i)}{1 + 4}$

$\overline{z} = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$

$z = -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$

$S = \left\{-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i\right\}$

d) On pose $z = x + iy$. Alors $\overline{z} = x - iy$

$(2 + 5i)(x + yi) - 3 = i + 2i(x - yi) + 1$

$2x + 2yi + 5xi - 5y - 3 = i + 2xi + 2y + 1$

$(2x - 5y - 3 - 2y - 1) + (2y + 5x - 2x - 1)i = 0$

$(2x - 7y - 4) + (3x + 2y - 1)i = 0$

$$\begin{cases} 2x - 7y = 4 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$$

Par résolution du système, on trouve :

$x = \frac{3}{5}$ et $y = \frac{-2}{5}$

$S = \left\{\frac{3}{5} - \frac{2}{5}i\right\}$

Méthode

Lorsque dans une équation figurent à la fois z et $\overline{z}$, il faut écrire z sous forme algébrique.

Exercice 2 Déterminer un lieu géométrique

Détermine dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J), l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

a) $|z| = 2$ et $\arg(z) = \frac{2\pi}{3}$; b) $|z - 1 + i| = |iz + 2|$; c) $z - \frac{9}{z} \in \mathbb{R}$.

Corrigé

a) $|z| = 2$ et $\arg(z) = \frac{2\pi}{3}$.

$|z| = 2 \Leftrightarrow$ M appartient au cercle (C) de centre O et de rayon 2 et $\arg(z) = \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow$ M appartient à la demi-droite [OK) telle que Mes$\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OK}\right) = \frac{2\pi}{3}$.

M est le point du cercle (C) et de la demi-droite [OK) telle que Mes $\frac{2\pi}{3}$.

b) $|z - 1 + i| = |iz + 2|$

$|z - 1 + i| = |i(z - 2i)|$

$|z - 1 + i| = |z - 2i|$

Soit $A(1 - i)$ et $B(2i)$ et $M(z)$

$|z - 1 + i| = |z - 2i| \Leftrightarrow AM = BM$

L'ensemble solution est la médiatrice du segment [AB] où A et B ont pour affixes respectives $1 - i$ et $2i$.

c) En posant $z = x + iy$

$z - \frac{9}{z} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y + \frac{9y}{x^2 + y^2} = 0$

$\Leftrightarrow y(x^2 + y^2 + 9) = 0$

$\Leftrightarrow y = 0$ ou $x^2 + y^2 + 9 = 0$ (pas de solutions)

$\Leftrightarrow y = 0$

L'ensemble cherché est la droite d'équation $y = 0$ privée du point 0 (o, o).

Méthode

Pour rechercher un ensemble de points on peut utiliser une interprétation géométrique ou remplacer le nombre complexe z par $x + yi$.

Exercice 3 Résoudre une équation de degré 3 dans $\mathbb{C}$; Déterminer la nature d'un triangle

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).

1. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4 = 0$.
   a) Démontre que l'équation (E) admet une solution réelle que tu détermineras.
   b) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).
2. a) Représente les points A, B et C d'affixes respectives 1 ; $2+2i$ et $1-i$.
   b) Détermine le module et l'argument principal de $\frac{1-i}{2+2i}$. Déduis-en la nature du triangle OBC.
   c) Que représente la droite (OA) pour le triangle OBC ?

Corrigé

1. a) Soit α un nombre réel.

$\alpha^3 - (4+i\alpha^2 + (7+i)\alpha - 4 = 0$

$\Leftrightarrow \alpha$ est solution de (E)

$\alpha^3 - 4\alpha^2 + 7\alpha - 4 + i(-\alpha^2 + \alpha) = 0$

$\alpha^3 - 4\alpha^2 + 7\alpha - 4 + i(-\alpha^2 + \alpha) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^3 - 4\alpha^2 + 7\alpha - 4 = 0 & (E_1) \\ -\alpha^2 + \alpha = 0 & (E_2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^3 - 4\alpha^2 + 7\alpha - 4 \\ \alpha_1 = 0 \text{ ou } \alpha_2 = 1 \end{cases}$

α_1 ne vérifie pas (E_1), α_2 vérifie (E_2) donc le réel α cherché est $\alpha = 1$.

b) Résolution de (E)

$z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4 = 0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2 - (3+i)z + 4)$

$\Leftrightarrow z = 1$ ou $z^2 - (3+i)z + 4 = 0$

Résolution de l'équation $z^2 - (3+i)z + 4 = 0$

$\Delta = -8 + 6i$

Déterminons les racines carrées de Δ.

Soit $\delta = x + iy$ tel que $\delta^2 = \Delta$.

On a :

$\begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ x^2 + y^2 = 10 \\ 2xy = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 9 \\ xy = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ ou } x = 1 \\ y = 3 \text{ ou } y = -3 \\ xy = 3 \end{cases}$

On a : $\delta_1 = -1 - 3i$ et $\delta_2 = 1 + 3i$

$z_1 = 2 + 2i$; $z_2 = -1 - i$

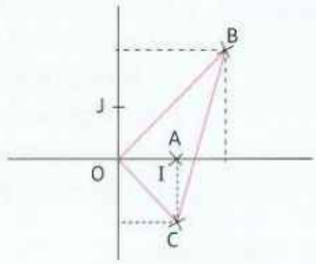
$S_{\mathbb{C}} = \{1 ; 2+2i ; 1-i\}$

Méthode

Pour démontrer qu'une équation complexe $P(z) = 0$ admet une solution réelle α il faut écrire sous forme algébrique : $P(\alpha) = P_1(\alpha) + P_2(\alpha)i$ puis résoudre le système $\begin{cases} P_1(\alpha) = 0 \\ P_2(\alpha) = 0 \end{cases}$

On résout l'équation qui est la plus facile à résoudre et on vérifie les résultats dans l'autre.

2. a)



b) $\left|\frac{1-i}{2+2i}\right| = \left|\frac{1-i}{2+2i}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$

$\text{Arg}\left(\frac{1-i}{2+2i}\right) = \text{Arg}(1-i) - \text{Arg}(2-2i)$

$= -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$

Donc $\left|\frac{1-i}{2+2i}\right| = \frac{1}{2}$ et $\text{Arg}\left(\frac{1-i}{2+2i}\right) = -\frac{\pi}{2}$

Le triangle OBC est rectangle en O.

c) $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = \text{Arg}\left(\frac{z_B}{z_A}\right) = \text{Arg}(2-2i) = \frac{\pi}{4}$

Donc la droite (OA) est la bissectrice de l'angle $\widehat{COB}$ du triangle OBC.

Exercice 4 Linéariser

Linéariser $\sin^5 x$.

Corrigé

En utilisant une formule d'Euler, on obtient $\sin^5 x = \frac{1}{(2i)^5}(e^{ix} - e^{-ix})^5$. On a :

$(e^{ix} - e^{-ix})^5 = (e^{5ix} - e^{-5ix}) - 5(e^{3ix} - e^{-3ix}) + 10(e^{ix} - e^{-ix})$.

$\frac{1}{(2i)^5}(e^{ix} - e^{-ix})^5 = \frac{1}{16}\frac{1}{(2i)}[(e^{5ix} - e^{-5ix}) - 5(3^{3ix} - e^{-3ix}) + 10(e^{ix} - e^{-ix})]$

Il en résulte que $\sin^5 x = \frac{1}{16}[\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x]$.

Méthode

Pour linéariser $\sin^p x$ ou $\cos^p x$, on utilise les formules d'Euler, de Moivre et du binôme de Newton.

Résumé de cours

1 Forme algébrique d'un nombre complexe

1.1. Ensemble des nombres complexes

Définition On appelle nombre complexe tout nombre z de la forme : $z = a + bi$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $i^2 = -1$.
Le nombre réel a s'appelle la partie réelle de z et se note : $\mathrm{Re}(z)$.
Le nombre réel b s'appelle la partie imaginaire de z et se note : $\mathrm{Im}(z)$.
Cette écriture $z = a + ib$ est appelée forme algébrique de z.
L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

Remarque

- Tout nombre réel appartient à $\mathbb{C}$ (il suffit que $\mathrm{Im}(z) = 0$).
- Si $\mathrm{Re}(z) = 0$ le nombre complexe z est appelé imaginaire pur.

L'ensemble des imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.

Propriétés a, b, a', b' sont des nombres réels, z et z' sont des nombres complexes tels que $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$:

- $z = 0$ signifie que $a = b = 0$.
- $z = z'$ signifie que $a = a'$ et $b = b'$.
- z est élément de $\mathbb{R}$ signifie que $b = 0$.
- z est élément de $i\mathbb{R}$ signifie que $a = 0$.

1.2. Calculs dans $\mathbb{C}$

Dans l'ensemble des nombres complexes, on a :

a) Addition

- Si $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ alors $z + z' = (a + a') + i(b + b')$.

Méthode

$z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ étant deux nombres complexes :

- on a : $(z - z') = z +$ (opposé de z') $= z + (-z')$. Où opposé de z' égal à $-z' = -a' - ib'$

b) Produit

Si $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ alors $z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$
$z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ étant deux nombres complexes et $z \neq 0$.

c) Inverse d'un nombre complexe non nul. Pour $z \neq 0$, $z = a + bi$.

On a $\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = (a-ib)\times\frac{1}{a^2+b^2}$.

On a aussi : $\frac{z'}{z} = z' \times \frac{1}{z}$.

d) Produit nul

Propriété Pour tous nombres complexes z et z', $z \times z' = 0$ signifie que $z = 0$ ou $z' = 0$.

e) Puissance entière d'un nombre complexe

- Puissance entière d'un nombre complexe quelconque

Définition z étant un nombre complexe non nul, n un nombre entier naturel non nul,
(1) $z^0 = 1$; (2) $0^n = 0$; (3) $z^{n+1} = z^n \times z$; (4) $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$.

- Puissance entière de i

Propriété Pour tout nombre entier naturel n, on a :
$i^{4n} = 1$; $i^{4n+1} = i$; $i^{4n+2} = -1$; $i^{4n+3} = -i$

1.3. Conjugué d'un nombre complexe

Définition Soit z un nombre complexe dont la forme algébrique est $z = a + ib$.
On appelle le nombre conjugué de z, le nombre noté $\overline{z}$ tel que : $\overline{z} = a - ib$.

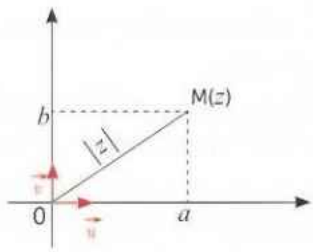
1.4. Propriétés

Propriétés Pour tout nombre complexe z :
- $\overline{\overline{z}} = z$, on dit que « les complexes z et $\overline{z}$ sont conjugués ».
- $z + \overline{z} = 2\text{Re}(z)$.
- $z - \overline{z} = 2i\text{Im}(z)$.
- $z \times \overline{z} = [\text{Re}(z)]^2 + [\text{Im}(z)]^2$.
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z$.
- $\overline{z} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = -z$.

Propriétés Pour tous nombres complexes z et z', on a :
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z}'$.
- $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z}'$.
- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$ et $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$ (avec z non nul).

1.5. Module d'un nombre complexe

Définition Soit z un nombre complexe dont la forme algébrique est $z = a + ib$. On appelle « module de z », noté $|z|$, le réel positif : $\sqrt{a^2 + b^2}$.
On a : $|z| = \sqrt{z \times \overline{z}}$



1.6. Propriétés

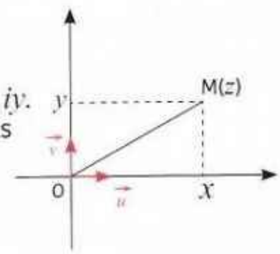
Propriété Pour tous nombres complexes z et z'.

$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$;
$|\overline{z}| = |-\overline{z}| = |-z| = |z|$;
$|\text{Re}(z)| \leq |z|$;
$|\text{Im}(z)| \leq |z|$;
$|z + z'| \leq |z| + |z'|$;
$|z \times z'| = |z| \times |z'|$;
Lorsque $z \neq 0$, on a $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$; et $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$

Résumé de cours

1.7. Représentation géométrique d'un nombre complexe

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$)



a) Affixe, Point image

x et y sont des nombres réels.
À tout point M (x ; y) du plan est associé le nombre complexe $z = x + iy$.
Ainsi l'axe des abscisses est tout simplement l'axe des nombres réels tandis que l'axe des ordonnées est celui des imaginaires purs.

- z_M est l'affixe du point M(z).
- M(z) est le point image de z.

b) Vecteur image

x et y sont des nombres réels.
À tout vecteur $\vec{w}$ (x ; y) du plan est associé le nombre complexe $x + iy$.

- $x + iy$ est l'affixe du vecteur $\vec{w}$.
- $\vec{w}$ est le vecteur image du nombre complexe $x + iy$.

c) Propriété

Propriété Soient A et B deux points du plan d'affixes respectives z_A et z_B.
L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le nombre complexe $z_B - z_A$.

d) Interprétation graphique du module

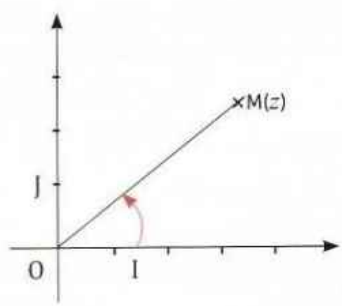
Dans un repère orthonormé (O, I, J).
Si M est Le point d'affixe z, $|z|$ est la distance du point O au point M et c'est donc aussi la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

$|z| = d(\text{OM}) = \|\overrightarrow{OM}\|$

2 Forme trigonométrique - Forme exponentielle

2.1. Argument d'un nombre complexe non reel

a) Définition



z est un nombre complexe non nul, M le point-image de z dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).

- La mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}})$ est appelée l'argument principal de z, noté : ARG(z).
- Toute mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}})$ est appelée un argument de z noté : arg(z).
- θ étant un argument d'un nombre complexe non nul z, tout autre argument de z est de la forme $\theta + k2\pi$ [$k \in \mathbb{Z}$].

2.2. Propriétés

Propriété Pour tous nombres complexes non nuls z et z', pour tout nombre entier relatif n,

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $\arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg(z') - \arg(z) + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $\arg(z^n) = n\arg(z) + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Résumé de cours

Propriété Pour tous A, B, C et D tels que (A $\neq$ B) et (C $\neq$ D), on a :

- mes $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AB}}) = \arg(z_B - z_A) + 2k\pi$ [$k \in \mathbb{Z}$].
- mes $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

2.3. Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul.

Propriété - Définition

Propriétés

- Soit z un nombre complexe non nul de forme algébrique $z = a + ib$. On peut alors mettre z sous la forme : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ où $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$
- On appelle forme trigonométrique du nombre complexe non nul z l'écriture : $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ où $r \in \mathbb{R}^*_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos\theta = \frac{a}{|z|}$; $\sin\theta = \frac{b}{|z|}$ et $r = \sqrt{a^2+b^2}$.

2.4. Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul.

Propriété - Définition

Propriétés

- Tout nombre complexe non nul z, de module r et d'argument θ peut s'écrire : $z = re^{i\theta}$.
- On appelle forme exponentielle du nombre complexe non nul z de module r et d'argument θ l'écriture $re^{i\theta}$.

Remarque

Tout nombre complexe de module 1 et d'argument θ s'écrit $e^{i\theta}$.

2.5. Formule de Moivre - Formules de Euler

Formule de Moivre

Propriété Pour tout nombre réel θ, pour tout nombre entier relatif n,
$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$.

Formules d'Euler

Propriétés $\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$ et $\sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$.
$\cos n\theta = \frac{1}{2}(e^{in\theta} + e^{-in\theta})$ et $\sin n\theta = \frac{1}{2i}(e^{in\theta} - e^{-in\theta})$.

3 Résolution d'équations

3.1. Équations du second degré dans $\mathbb{C}$

Définition On appelle équation du second degré dans $\mathbb{C}$, l'équation d'inconnue z définie par $az^2 + bz + c = 0$, où a, b et c sont des nombres complexes.

Résumé de cours

a) Détermination des racines carrées d'un nombre complexe

L'équation $z^2 = a$ admet deux solutions dans $\mathbb{C}$.

- Pour $a \in \mathbb{R}$, les solutions :

  $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ si $a > 0$

  $i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{-a}$ si $a < 0$

- Pour $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, on pose : $z = x + iy$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = Re(a) \\ x^2 + y^2 = |a| \\ 2xy = Jm(a) \end{cases}$$

b) Résolution d'une équation du second degré dans $\mathbb{C}$

Pour résoudre une équation du second degré $az^2 + bz + c$ dans $\mathbb{C}$ (avec $a \neq 0$), on peut procéder comme suit.

- On calcule le discriminant noté généralement Δ, ($\Delta = b^2 - 4ac$).
- On détermine les racines carrées du discriminant Δ selon que celui-ci est un nombre réel ou non.
- On détermine les solutions de cette équation.

- Si cette équation à un discriminant $\Delta \in \mathbb{R}$ alors :
  - Si $\Delta > 0$, deux solutions réelles : $z_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.
  - Si $\Delta = 0$, une solution réelle double : $z_0 = \dfrac{-b}{2a}$.
  - Si $\Delta < 0$, deux solutions complexes en posant $\Delta = i^2|\Delta|$, $z_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.
- Si cette équation à un discriminant $\Delta \notin \mathbb{R}$ alors :
  - détermine les racines carrées de Δ notées : δ et $-\delta$.
  - les deux solutions $z_1 = \dfrac{-b + \delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b - \delta}{2a}$.
- Si z_1 et z_2 sont les solutions de $az^2 + bz + c = 0$ (où $a \neq 0$), alors $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$,

  $z_1 + z_2 = \dfrac{-b}{a}$ et $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$.

3.2. Racines $n^{ième}$ d'un nombre complexe non nul

a) Définition

Définition n étant un nombre entier naturel non nul et Z un nombre complexe non nul, on appelle racine $n^{\text{ième}}$ de Z, tout nombre complexe z tel que : $z^n = Z$.

b) Propriétés

Propriétés

- L'équation complexe $z^n = Z$. admet n racines distinctes. Son ensemble solution est donné par $S_n = \left\{\rho^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{k2\pi}{n}\right)}, k \in \{0,\dots, n-1\}\right\}$ où $\theta = \arg(Z)$ et $\rho = |Z|$}.
- Le plan étant muni du repère orthonormé direct (O, I, J), les points-images des n racines $n^{\text{ième}}$ sont sur le cercle (C) de centre O et de rayon $\rho^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\rho}$.
  - Lorsque $n = 2$, les points-images des deux racines carrées sont diamétralement opposés sur (C).
  - Lorsque $n > 2$, les points images des n racines $n^{\text{ième}}$ sont les sommets d'un polygone régulier de n côtés, inscrit dans un cercle (C).

c) Racines n$^{\text{ième}}$ de l'unité

- n étant un nombre entier non nul, on appelle racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité, les solutions de l'équation : $z^n = 1$.
- Les racines cubiques de 1 sont 1, j et $\overline{j}$ où $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

On a : $\overline{j} = j^2$ et $1 + j + j^2 = 0$.
- L'ensemble des solutions est donné par : $\{e^{i\left(\frac{k2\pi}{n}\right)}, k \in \{0, \dots, n-1\}\}$.
- La somme des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité est égale à 0.

4 Cercle, droite, demi-droite et nombres complexes

Le plan complexe muni du repère orthonormé direct (O, I, J).

Propriétés

On considère, dans le plan complexe les points A, B, C et D distincts d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D. On a les propriétés suivantes :

- Les points A, B et C sont alignés signifie que $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$.
- Le triangle ABC est rectangle en A signifie que $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\,\mathbb{R}^*$.
- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles signifie que $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$.
- $(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0 \Leftrightarrow \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\,\mathbb{R}^*$.
- Le point M, différent de A et B, d'affixe z appartient au cercle (C) de diamètre [AB] si, et seulement si le complexe $\frac{z - z_B}{z - z_A}$ est imaginaire pur.

Exercices de fixation

3-2-1 On donne les expériences ci-dessous. Justifie que la variable X suit une loi binomiale et détermine ses paramètres.

Exp 1 : On jette un dé équilibré 10 fois de suite et on considère la variable aléatoire X qui compte le nombre de réalisations de l'évènement A : "Obtenir 5 ou 6".

Exp 2 : Un QCM est composé de 5 questions et chacune d'elle comporte 3 réponses au choix A, B ou C dont une seule est correcte. Poka décide de répondre au hasard à toutes les questions.
On considère la variable aléatoire X donnant le nombre de bonnes réponses de Poka.

Exp 3 : Une entreprise fabrique en grande quantité des médailles circulaires en argent. Un contrôle de qualité consiste à vérifier que le diamètre et l'épaisseur sont conformes. On suppose que la probabilité pour qu'une pièce prélevée au hasard soit conforme est égale à 0,9. Soit X la variable aléatoire, qui à tout échantillon de 10 pièces associe le nombre de pièces conformes.

3-2-2 Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0{,}32$.
1. Quelles sont les valeurs prises par X ?
2. Calcule $P(X = 0)$ et $P(X = 2)$.
3. Calcule l'espérance $E(X)$, la variance $V(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$ de la variable X.

3-2-3 On lance 10 fois un dé bien équilibré. Quelle est la probabilité d'obtenir 4 fois le chiffre 1 au cours des 10 lancers ?

3-2-4 La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}15$.
Calcule $P(X = 16)$, $P(X \leq 16)$ et $P(X > 16)$.

APPRENTISSAGE DE LA RÉDACTION

Exercice 1 Calculer des probabilités conditionnelles

Au Lycée de Garçons de Bingerville, on repartit les élèves candidats au baccalauréat série A2 en trois langues vivantes 1 (LV1) : Anglais, Allemand et Espagnol. Nous savons de plus que :

- 37% des candidats ont choisi l'anglais ;
- 25% des candidats ont choisi l'espagnol ;
- 21% des candidats ont choisi l'anglais et ont obtenu le baccalauréat ;
- 32,5% des candidats ont choisi l'allemand et ont obtenu le baccalauréat ;
- De plus, parmi les candidats ayant choisi l'espagnol, 72,5% ont obtenu le baccalauréat.

On interroge un candidat pris au hasard. On note :
A l'événement « Le candidat a choisi l'anglais » ;
D l'événement « Le candidat a choisi l'allemand » ;
E l'événement « Le candidat a choisi l'espagnol » ;
B l'événement « Le candidat a obtenu le baccalauréat ».

1. Traduis en termes de probabilités les informations numériques données ci-dessus.
2. a) Justifie que la probabilité pour que ce candidat ait choisi l'allemand est 0,38.
   b) Justifie que la probabilité pour que ce candidat ait choisi l'espagnol et ait obtenu le baccalauréat est 0,181.
3. Quelle est la probabilité pour que ce candidat ait choisi l'espagnol et ait échoué au baccalauréat ?
4. Supposons que le candidat a choisi l'anglais. Quelle est la probabilité qu'il n'ait pas obtenu le baccalauréat ?
5. Justifie que le taux de réussite au baccalauréat pour les candidats de la série A_2 du Lycée Garçons de Bingerville est 71,6%.

Corrigé

1. Traduction en probabilités :
37% des candidats ont choisi l'anglais c'est-à-dire 37 personnes sur 100 interrogées d'où $P(A) = 0{,}37$;
25% des candidats ont choisi l'espagnol c'est-à-dire 25 personnes sur 100 d'où $P(E) = 0{,}25$;

Méthode

$P(E \cap B) = P_E(B) \times P(E)$

$P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$

$P(B) = P(A \cap B) + P(D \cap B) + P(E \cap B)$

21% des candidats ont choisi l'anglais et ont obtenu le baccalauréat d'où $P(A \cap B) = 0{,}21$;
32,5% des candidats ont choisi l'allemand et ont obtenu le baccalauréat d'où $P(D \cap B) = 0{,}325$.
Parmi les candidats ayant choisi l'espagnol, 72,5% ont obtenu le baccalauréat d'où $P_E(B) = 0{,}725$.

2. a) Justifions que la probabilité pour que ce candidat ait choisi l'allemand est 0,38.

$P(A) + P(D) + P(E) = 1$ donc
$P(D) = 1 - [P(A) + P(E)] = 1 - 0{,}62 = 0{,}38$.

b) Justifions que la probabilité pour que ce candidat ait choisi l'espagnol et ait obtenu le baccalauréat est 0,181.

L'évènement : « Le candidat a choisi l'espagnol et a obtenu le baccalauréat » est l'intersection des évènements E et B. On sait que :

$$P_E(B) = \frac{P(E \cap B)}{P(E)}$$

donc $P(E \cap B) = P(E) \times P_E(B)$.

Ainsi $P(E) = 0{,}25 \times 0{,}725 = 0{,}181$.

3. Calculons la probabilité pour que ce candidat ait à choisir l'espagnol et à échouer au baccalauréat.

L'évènement : « Le candidat a choisi l'espagnol et a échoué le baccalauréat » est l'intersection des évènements E et $\overline{B}$.

Ainsi : $P(E \cap \overline{B}) = P(E) \times P_E(\overline{B}) = P(E) \times (1 - P_E(B))$
$= 0{,}25 \times (1 - 0{,}725) = 0{,}069$.

4. Calculons la probabilité qu'il n'ait pas obtenu le baccalauréat sachant qu'il a choisi l'anglais.

On sait que $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$ et $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ et

donc : $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B) = 1 - \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

$P_A(\overline{B}) = 1 - \dfrac{0{,}27}{0{,}37} = 0{,}432$.

5. Justifions que le taux de réussite au baccalauréat pour les candidats de la série A_2 du lycée garçons de Bingerville est 71,6%.

Les évènements A, D et E forment une partition Ω donc d'après la formule des probabilités totales :

$P(B) = P(A \cap B) + P(D \cap B) + P(E \cap B)$

$P(B) = 0{,}181 + 0{,}325 + 0{,}21 = 0{,}716$.

Exercice 2 Déterminer et construire une fonction de répartition

Un ranch possède 17 chevaux (5 blancs , 4 noirs et 8 gris) et une calèche. Le cochet choisit au hasard pour une journée de travail les 2 chevaux de l'attelage parmi ces 17 chevaux.

1. Calcule la probabilité de chacun des événements suivants :
   A : « Les 2 chevaux sont gris ».
   B : « L'un des chevaux au moins est gris ».
   C : « Les 2 chevaux ont la même couleur ».
2. Pour des raisons climatiques, la durée de travail quotidien d'un cheval est 2 heures s'il est noir, 1 heure s'il est blanc et 3 heures s'il est gris et le cochet arrête l'attelage lorsque au moins l'un des 2 chevaux atteint sa durée de travail.
   On désigne par X la durée de travail quotidien des 2 chevaux choisis.
   a) Détermine la loi de probabilité de X.
   b) Calcule la durée moyenne de travail quotidien des 2 chevaux.
   c) Détermine et construis la fonction de répartition de X.

Corrigé

Méthode

- La durée moyenne de travail E(X).
- Utiliser la loi de probabilité pour définir et construire la fonction de répétition.

Soit U l'univers associé à cette expérience aléatoire. Le choix des deux chevaux au hasard de ce ranch correspond à une combinaison de 2 éléments parmi 17.

card $(U) = C_{17}^{2} = 136$.

Le choix étant fait au hasard, nous sommes dans une situation d'équiprobabilité.

1. Calcul de probabilité

• A : « Les 2 chevaux sont gris »

Les deux chevaux étant gris alors on choisit les deux chevaux parmi 8 chevaux gris.

$\text{card}(A) = C_8^2 = 28$

Ainsi $P(A) = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(U)} = \dfrac{28}{136} = \dfrac{7}{34}$.

• B : « L'un des chevaux au moins est gris ».

L'un des deux chevaux au moins étant gris alors on choisit soit exactement un cheval parmi les chevaux gris et un cheval parmi les 9 autres chevaux soit deux chevaux parmi 8 chevaux gris.

$\text{card}(B) = C_8^1 \times C_9^2 + C_8^2 = 100$.

Ainsi P(B)= $\frac{card(B)}{card(U)} = \frac{100}{136} = \frac{25}{34}$

• C : « Les 2 chevaux ont la même couleur »

Choisir deux chevaux de même couleur revient à choisir deux chevaux parmi les chevaux blancs ou deux chevaux parmi les chevaux noirs ou deux chevaux parmi les chevaux gris.

$card(C) = C_5^2 + C_4^2 + C_8^2 = 44.$

Ainsi P(C)= $\frac{card(C)}{card(U)} = \frac{44}{136} = \frac{11}{34}$

2. Soit X la variable aléatoire donnant la durée de travail quotidien des 2 chevaux choisis.

a) Loi de probabilité de X : X ∈ {1 ; 2 ; 3}

• X = 1 si l'un au moins des deux chevaux est blanc

donc $P(X = 1) = \frac{C_5^1 \times C_{12}^1 + C_5^2}{C_{17}^2} = \frac{70}{136}$.

• X = 2 si l'un des deux chevaux est noir et l'autre gris ou les deux sont noirs donc

$P(X = 2) = \frac{C_4^1 \times C_8^1 + C_4^2}{C_{17}^2} = \frac{38}{136}$.

• X = 3 si les deux chevaux sont gris

donc $P(X = 3) = \frac{C_8^2}{C_{17}^2} = \frac{28}{136}$.

x	1	2	3	Total
P(X)	$\frac{70}{136}$	$\frac{38}{136}$	$\frac{28}{136}$	1

b) La durée moyenne de travail quotidien

$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i P(X = x_i) = 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2) + 3 \times P(X = 3) = 1{,}70.$

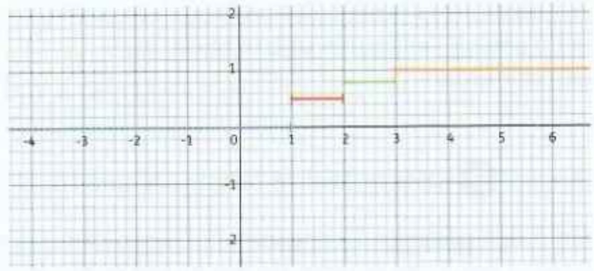
La durée moyenne de travail quotidien est 1h42min.

c) Fonction de répartition

Soit F la fonction de répartition de X

$$\begin{cases} x < 1, F(x) = 0 \\ 1 \le x < 2, F(x) = P(X = 1) = \frac{70}{136} \\ 2 \le x < 3, F(x) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{108}{136} \\ 3 \le x, F(x) = 1 \end{cases}$$

Construction de F



Exercice **3** **Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire**

Une loterie comporte 20 billets, parmi eux il y a 1 billet gagnant 100 F ; 2 billets gagnant 50 F ; 3 billets gagnant 20 F, les autres billets ne gagnent rien. Abi achète 2 billets. La probabilité de chacun des 20 billets de sortir au tirage est la même.

Soit X la variable aléatoire correspondant à la somme obtenue par Abi.

1. Détermine toutes les valeurs prises par X.
2. Détermine la loi de probabilité de X.
3. Calcule la probabilité pour que Abi gagne :
   a) au moins 100 F.
   b) une somme comprise entre 50 F et 120 F.

Corrigé

Soit Ω l'univers associé à cette expérience aléatoire. L'achat des deux billets de loterie correspond à une combinaison de 2 éléments parmi 20.

card $(\Omega) = C_{20}^2$

Le choix étant fait au hasard donc nous sommes dans une situation d'équiprobabilité.

1. Déterminons les valeurs prises par X.

Les éventualités de Ω sont :

(100 ; 50) ; (100 ; 20), (100 ; 0), (50 ; 50) (50 ; 20), (50 ; 0) , (20 ; 20) (20 ; 0) et (0 ; 0).

Méthode

X est la somme des gains possibles.
Gagner au moins 100 f c'est calculer.
$P(X \ge 100) = P(X = 100) + P(X = 120) + P(P(X = 150)$.

Les valeurs pises par :

$X(\Omega) = \{0 ; 20 ; 40 ; 50 ; 70 ; 100 ; 120 ; 150\}$.

2. Loi de probabilité

• X = 0 lorsque Abi achète deux billets sans valeur donc $card(X = 0) = C_{14}^2$ et on a :

$P(X = 0) = \frac{card(X = 0)}{card(\Omega)} = \frac{91}{190}$;

X = 20 lorsque Abi achète un billet sans valeur et un billet de 20F donc card(X = 20) = $C_{14}^1 \times C_3^1$ et $P(X = 20) = \frac{card(X = 20)}{card(\Omega)} = \frac{42}{190}$;

• X = 40 lorsque Abi achète deux billets gagnants 20 F donc card(X = 40) = C_3^2 et :

$P(X = 40) = \frac{card(X = 40)}{card(\Omega)} = \frac{3}{190}$;

• X = 50 lorsque Abi achète un billet sans valeur et un billet gagnant 50F donc card(X = 50) = $C_{14}^1 \times C_2^1$ et $P(X = 50) = \frac{card(X = 50)}{card(\Omega)} = \frac{28}{190}$;

• X = 70 lorsque Abi achète un billet gagnant 50F et un billet gagnant 20F donc card(X = 70) = $C_2^1 \times C_3^1$ et $P(X = 70) = \frac{card(X = 70)}{card(\Omega)} = \frac{6}{190}$;

• X = 100 lorsque Abi achète soit un billet sans valeur et un billet gagnant 100F soit deux billets gagnant 50F donc card(X = 100) = $C_{14}^1 \times C_1^1 + C_2^2$ et

$P(X = 100) = \frac{card(X = 100)}{card(\Omega)} = \frac{15}{190}$;

• X = 120 lorsque Abi achète un billet gagnant 100F et un billet de 20 F donc card(X = 120) = $C_1^1 \times C_3^1$ et $P(X = 120) = \frac{card(X = 120)}{card(\Omega)} = \frac{3}{190}$;

• X = 150 lorsque Abi achète un billet gagnant 100 F et un billet gagnant 50F donc card(X = 150) = $C_1^1 \times C_2^1$ et $P(X = 150) = (\frac{card(X = 150)}{card(\Omega)} = \frac{2}{190}$;

Ainsi, on a :

x	0	20	40	50	70	100	120	150	Total
P(X)	$\frac{91}{190}$	$\frac{42}{190}$	$\frac{3}{190}$	$\frac{28}{190}$	$\frac{6}{190}$	$\frac{15}{190}$	$\frac{3}{190}$	$\frac{2}{190}$	1

3. Probabilités pour que Abi gagne :

a) Au moins 100 F.

Abi gagne au moins 100F signifie qu'il peut gagner soit 100 F, soit 120 F soit 150 F.

$P(X \geq 100) = P(X = 100) + P(X = 120) + P(X = 150)$

$P(X \geq 100) = \frac{15}{190} + \frac{3}{190} + \frac{2}{190} = \frac{20}{190} = \frac{2}{19}$.

b)Une somme comprise entre 50 F et 120 F.

Abi gagne une somme comprise entre 50F et 120 F s'il gagne soit 50 F, soit 70 F, soit 100, soit 120 F.

$P(50 \leq X \leq 120) = P(X = 50) + P(X = 70) + P(X = 100) + P(X = 120)$

$P(50 \leq X \leq 100) = \frac{28}{190} + \frac{6}{190} + \frac{15}{190} + \frac{3}{190} = \frac{52}{190}$

Exercice 4 Justifie qu'une variable aléatoire suit une loi binomiale

Sur une route deux carrefours sont munis de deux feux tricolores F_1 et F_2. On supposera que ces deux feux ne sont pas synchronisés et que pour un automobiliste circulant sur cette route, l'apparition d'une couleur est un pur hasard. On admet que la probabilité pour que le feu F_1 soit vert est $\frac{3}{4}$ et la probabilité pour le feu F_2 soit vert est $\frac{1}{2}$.

Les deux feux F_1 et F_2 fonctionnent de manière indépendante.

1. Un automobiliste passe successivement aux deux carrefours.
   a) Calcule la probabilité pour qu'il rencontre deux feux verts.
   b) Calcule la probabilité pour qu'il rencontre au moins un feu vert.
2. Un automobiliste passe 5 fois au carrefour muni du feu F_1. Soit X la variable aléatoire désignant le nombre de fois où l'automobiliste rencontre le feu vert.
   a) Justifie que X suit une loi binomiale dont tu préciseras les paramètres.
   b) Calcule la probabilité pour que l'automobiliste rencontre exactement 3 fois le feu vert.
   c) Calcule l'espérance mathématique et donne une interprétation du résultat.
   d) Calcule la variance V(X) et l'écart-type σ(X) de la variable X.

Corrigé

1. a) Calculons la probabilité pour qu'il rencontre deux feux verts.

Soit A l'évènement : « L'automobiliste rencontre feu vert au feu F_1 » et B l'évènement : « L'automobiliste rencontre feu vert au feu F_2 ».

Méthode

1. Utiliser les évènements A∩B et A∪B.
2. Utiliser la loi Binomiale de paramètres 5 et $p = \frac{3}{4}$.

L'évènement : « L'automobiliste rencontre deux feux verts » est l'intersection des évènements A et B. Comme les évènements A et B sont indépendants, on a donc : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$.

b) Soit l'évènement C : « L'automobiliste rencontre au moins un feu vert » et $\overline{C}$ son évènement contraire. On a donc : $\overline{C} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
Puisque A et B sont indépendants alors $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants. Par conséquent :

$P(\overline{C}) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \times P(\overline{B}) = [1 - P(A)] \times [1 - P(B)]$

$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

2. a) Lorsque L'automobiliste se présente au feu F_1, il rencontre le feu vert ou non. Cette expérience est une épreuve de Bernoulli et puisqu'elle est répétée 5 fois de façon indépendante, nous avons un schéma de Bernoulli. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{3}{4}$.

b) Calculons la probabilité pour que l'automobiliste rencontre exactement 3 fois le feu vert :

X suit une loi binomiale donc la loi de probabilité de X est : $P(X = k) = C_n^k \, p^k \, (1-p)^{n-k}$.

Pour $k = 3$, on a : $P(X = 3)$

$= C_5^3 \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(1 - \frac{3}{4}\right)^{5-3} = \frac{135}{512}$.

c) Calculons l'espérance mathématique E(X) :
X suit une loi Binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{3}{4}$ donc $E(X) = np$.

$E(X) = 5 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4} = 3{,}75 \approx 4$

E(X) = 4 donc l'automobiliste peut espérer rencontrer le feu vert F_1 quatre fois en 5 passages.

d) Calculons la variance V(X) :

$V(X) = np(1-p) = 5 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{15}{16}$.

e) Calculons l'écart-type (X) :

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{15}{16}} = 0{,}968$.

Exercice 5 Traiter une situation complexe

Une pandémie a été détectée dans une ville. Les autorités sanitaires disent qu'elle touche 5 personnes sur 100. Ton père, Monsieur SIDIBE, responsable d'un grand laboratoire pharmaceutique vient vous vanter son nouveau test de dépistage qui selon lui :
- Si une personne est malade, le test est positif à 98%.
- Si une personne n'est pas malade, le test est positif à 0,1%.

Toutefois, avant d'autoriser la commercialisation de ce test, Monsieur Sidibé doit présenter les chiffres de son test au ministère : la rencontre a lieu demain à 8H00.
Pour que le test de votre père ne soit pas refoulé au cours de la réunion, il faut qu'une personne testée positive, soit malade à plus de 60%. Vous décidez de calculer la probabilité qu'une personne soit malade si le test est positif.
Votre père doit-il présenter son test aux autorités sanitaires ?

Corrigé

Méthode

Utiliser un arbre de choix pour faire les calculs.

Soit les évènements :
M : « La personne est malade » et
T : « Le test est positif ».
Pour répondre à la question. Nous allons :
- utiliser la formule des probabilités totales ;
- calculer P(T) et $P_T(M)$;
- comparer le résultat de $P_T(M)$ à 60% ;
- puis conclure.

On a : $P(M) = \frac{5}{100} = 0{,}05$

donc $P((\overline{M})) = \frac{95}{100} = 0{,}95$.

Aussi $P_M(T) = 0{,}98$ et $P_{\overline{M}}(T) = 0{,}001$.

On veut calculer la probabilité qu'une personne soit malade si le test est positif c'est-à-dire $P_T(M)$.

On sait que $P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)}$ et

$P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T)$ d'où $P_T(M) = \frac{P(M) \times P_M(T)}{P(T)}$.

D'après la formule des probabilités totales,

$P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T)$

$P(T) = P(M) \times P_M(T) + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T)$

Par conséquent :

$P_T(M) = \frac{P(M) \times P_M(T)}{P(M) \times P_M(T) + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T)}$

$P_T(M) = \frac{0{,}05 \times 0{,}98}{0{,}05 \times 0{,}98 + 0{,}95 \times 0{,}001}$

$= \frac{0{,}049}{0{,}049 + 0{,}00095} = 0{,}98098$.

Il y a donc 98% de chances qu'une personne positive soit malade. Mon père peut présenter son test aux autorités sanitaires.

Résumé de cours

1 Probabilités conditionnelles

1.1. Définition d'une probabilité conditionnelle

Définition Soit Ω l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire.
Soient A et B deux évènements de Ω, tels que $P(B) \neq 0$.
On définit la probabilité de A sachant que B est réalisé, notée $P_B(A)$ ou encore $P(A/B)$, par la relation $P_B(A)=\dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$
Cette probabilité est appelée la probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé ou plus simplement la probabilité de A sachant B.

__Conséquence :__

Pour deux évènements A et B de Ω de probabilités non nulles, on a :

$P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$	$P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ (On sait que $A \cap B = B \cap A$)
$P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$ $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$	$P_B(B) = \dfrac{P(B \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$

1.2. Évènements indépendants

Définition Soient A et B deux évènements d'un même univers Ω et P une probabilité sur Ω.
On dit que A et B sont indépendants lorsque la réalisation de l'un n'influence pas (ne modifie pas) la réalisation de l'autre.
Autrement dit : A et B sont indépendants signifie que $P_B(A) = P(A)$ et $P_A(B) = P(B)$.

__Conséquence :__

Deux évènements A et B de Ω sont indépendants lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

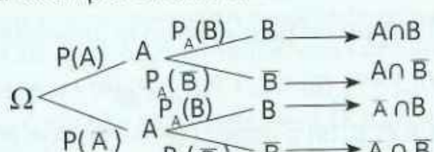
__Remarques :__

1. La conséquence ci-dessus signifie que la probabilité de l'intersection de deux évènements indépendants est égale au produit de leurs probabilités respectives.
2. Dans la pratique, c'est cette conséquence qu'on utilise pour démontrer que deux évènements sont indépendants.
3. Ne pas confondre des évènements indépendants et des évènements incompatibles, dont l'intersection est vide.

Propriété A et B sont des évènements d'un même univers Ω de probabilités non nulles.
- Si A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et B (resp. A et $\overline{B}$) sont indépendants.
- Si A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

1.3. Arbre de probabilité

Définition Un arbre de probabilité (ou arbre pondéré) est un schéma permettant de résumer une expérience aléatoire connaissant des probabilités conditionnelles.
Il se présente par exemple comme suit :



L'arbre pondéré s'apparente à un arbre de choix.

Résumé de cours

Règles et vocabulaire sur les arbres de probabilité

- L'origine de l'arbre est Ω (ensemble des issues possibles de l'expérience aléatoire).
- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.
- La probabilité inscrite sur une branche entre deux événements A et B est la probabilité conditionnelle de B sachant A.

$$A \xrightarrow{p_A(B)} B$$

- Une succession de plusieurs branches avec leurs événements est un chemin. Au bout d'un chemin se trouve un évènement, qui correspond à l'intersection des événements rencontrés sur ce chemin.
- La probabilité d'un événement correspondant à un chemin est égale au produit des probabilités inscrites sur chaque branche de ce chemin.

$$\bullet \xrightarrow{p(A)} A \xrightarrow{p_A(B)} B$$

Ainsi la probabilité de l'évènement $A \cap B$ est $P(A\cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

Tableau de probabilités

L'arbre précèdent correspond au tableau ci-dessous :

	B	$\overline{B}$	Total
A	$P(A\cap B)$	$P(A\cap \overline{B})$	$P(A)$
$\overline{A}$	$P(\overline{A}\cap B)$	$P(\overline{A}\cap \overline{B})$	$P(\overline{A})$
Total	$P(B)$	$P(\overline{B})$	1

Règles de calcul dans un tableau de probabilités

- Dans une case du tableau qui se trouve à l'intersection d'une ligne et d'une colonne, on écrit la probabilité de l'intersection des événements correspondants.
- La somme des probabilités d'une ligne est dans la colonne de droite.
- La somme des probabilités d'une colonne est dans la ligne du bas.
- La somme des probabilités est à l'intersection de la colonne de droite et de la ligne du bas.

1.4. Formule des probabilités totales

Définition $A_1, A_2, ..., A_n$ forment une partition de l'univers Ω signifie que $A_1, A_2, ..., A_n$ sont disjoints deux à deux et $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \Omega$.

Remarque

A et B d'un univers Ω forment une partition de Ω signifie $A\cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \Omega$.

Propriété Soient $A_1, A_2, ..., A_n$ des évènements d'un l'univers Ω formant une partition de Ω.
Pour tout évènement B de Ω, on a : $P(B) = P(B\cap A_1)+P(B\cap A_2)+ ... + P(B\cap A_n)$.

Remarque

Comme $P(B\cap A_i) = P(A_i) \times P_{A_i}(B)$ on peut réécrire la propriété ci-dessus sous la forme

$P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + ... + P(A_n)\times P_{A_n}(B)$ ou encore $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \times P_{A_i}(B)$.

Pour deux événements A et B, on a donc : $P(B) = P(B\cap A)+ P(B\cap \overline{A})$.

Résumé de cours

2 Variable aléatoire

2.1. Variable aléatoire et loi de probabilité

2.1.1. Variable aléatoire

Définition Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire.
On appelle variable aléatoire X sur Ω toute application de Ω vers $\mathbb{R}$.
Définir une variable aléatoire X sur Ω, c'est associer à chaque résultat de l'expérience un nombre réel x_i.

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$
$$\Omega \mapsto X(\Omega)$$

Notation et Vocabulaire

- L'ensemble des valeurs prises par X se note $X(\Omega)$.
- $(X = x_i)$ désigne l'évènement : « X prend la valeur x_i ». Il est constitué de tous les résultats pour lesquels la variable aléatoire X prend la valeur x_i.
- $(X < a)$ désigne l'évènement : « X prend une valeur strictement inférieure à a ».

2.1.2. Loi de probabilité

Définition Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω lié à une expérience aléatoire. On appelle **loi de probabilité** de X (ou distribution de X), l'application de $\mathbb{R}$ vers [0 ; 1] qui à chaque valeur x_i prise par X associe la probabilité de l'évènement $(X = x_i)$.
La loi de probabilité d'une variable aléatoire X peut être présentée par un tableau (il est préférable de ranger les valeurs prises par X dans l'ordre croissant) ou représentée par un diagramme en bâtons.

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	x_n

Il est recommandé de vérifier que : $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.

2.2. Fonction de répartition

Définition Soit X une variable aléatoire définie sur l'univers Ω d'une expérience aléatoire. Soit $\{x_1 ; x_2 ; ... ; x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par X.
On appelle **fonction de répartition** de X, l'application F de $\mathbb{R}$ vers [0 ; 1] définie par : $F(x) = P(X \leq x)$. On a :
Pour $x < x_1$, $F(x) = 0$.
Pour $x_i \leq x < x_{i+1}$, $F(x) = F(x_{i+1}) + P(x = x_i)$, 1 « i « $n - 1$.
Pour $x \geq x_n$, $F(x) = 1$.

Remarques

- La fonction de répartition d'une variable aléatoire est une fonction en escalier, croissante, constante par intervalle dont la représentation graphique présente des « sauts ».
- La fonction de répartition correspond aux fréquences cumulées croissantes d'une variable aléatoire discrète.
- L'évènement $(X > x)$ est le contraire de l'évènement $(X \leq x)$ donc :
$P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F(x)$.
- Pour tous réels a et b tels que $a < b$ on a : $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$.

2.3. Espérance mathématique d'une variable aléatoire

Définition Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs x_1 ; x_2 ;...; x_n,
avec les probabilités respectives p_1 ; p_2 ;...; p_n.
On appelle espérance mathématique de X, le nombre réel noté E(X) défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n.$$

Remarques

- L'Espérance E(X) est la moyenne des valeurs x_i de la variable aléatoire X, pondérées par leurs probabilités p_i. On la note souvent $\overline{X}$.
- Dans les jeux, lorsque X désigne le gain du joueur, l'espérance mathématique E(X) représente le gain moyen que peut espérer le joueur sur un « très grand nombre de parties ».
  - Lorsque E(X) > 0, le jeu est **avantageux pour le joueur.**
  - Lorsque E (X) < 0, le jeu est **désavantageux pour le joueur (profitable à l'organisateur).**
  - Lorsque E(X) = 0, le jeu est **équitable.**

2.4. Variance et écart-type

Définition Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs x_1 ; x_2 ;...; x_n, avec les probabilités respectives p_1 ; p_2 ;...; p_n et E(X) l'espérance mathématique de X.

- On appelle **variance** de X, le nombre réel positif noté V(X) défini par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 p_i = (x_1 - E(X))^2 p_1 + (x_2 - E(X))^2 p_2 + ... + (x_n - E(X))^2 p_n$$

Autre expression de la variance

$V(X) = (p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + ... + p_n x_n^2) - [E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$.

- On appelle **écart-type** de X, le nombre réel positif noté σ(X) défini par :
$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Remarques

- La variance est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne ; on a donc introduit sa racine carrée, l'écart-type, pour mieux rendre compte de la dispersion.
- L'écart-type σ(X) mesure donc la dispersion des valeurs de X autour de sa moyenne E(X).
- La variance et l'écart type sont des nombres réels positifs qui traduisent la façon dont sont dispersées les valeurs d'une variable aléatoire autour de son espérance ; plus la variance et l'écart type seront grands, plus les valeurs seront dispersées. Ce sont des caractéristiques de dispersions. La définition de la variance n'est pas très pratique pour les calculs.

Résumé de cours

3 Loi binomiale

3.1. Épreuve et schéma de Bernoulli

Définition On appelle **épreuve de Bernoulli**, toute expérience aléatoire ne conduisant qu'à deux éventualités. L'une appelée « succès » et l'autre « échec ».
On appelle **schéma de Bernoulli** une suite de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Le nombre n d'épreuves et la probabilité p du succès sont appelés **paramètres** du schéma de Bernoulli.

Remarque

Les termes « succès » et « échec » ne sont porteurs d'aucune valeur. Ils désignent simplement, de manière générique, les deux issues possibles. Le choix de ces termes est historiquement issu de la théorie des jeux.

Exemples :

- Les expériences suivantes sont des épreuves de Bernoulli.
  - Le sexe d'un bébé à sa naissance.
  - Le résultat d'un examen.
- Les expériences suivantes sont des schémas de Bernoulli.
  - Le lancer 10 fois de suite une pièce de monnaie équilibrée.
  - Présenter 3 fois de suite un même concours.

3.2. Loi binomiale

Définition Soit E un schéma de Bernoulli à n épreuves.
Pour une épreuve, on note p la probabilité du succès et $q = 1 - p$ celle de l'échec.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque éventualité de E, associe le nombre k de succès $(0 \leq k \leq n)$. On a :
- L'ensemble des valeurs prises par X est : $\{0 ; 1 ; ... ; n\}$.
- La probabilité d'obtenir exactement k succès au cours des n épreuves est : $P(X = k) = C_n^k \times p^k \times q^{n-k}$.

La loi de probabilité de X est appelée loi binomiale de paramètres n et p.
On la note $B(n ; p)$.

Remarque

C_n^k est un coefficient binomial. Il correspond au nombre de possibilités de placer k succès sur n expériences.

Propriété Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est la loi binomiale de paramètres n et p. On a :
- $E(X) = np$.
- $V(X) = np(1 - p) = npq$.

Synthèse

S'il y a une forte corrélation entre les variables X et Y, alors, à partir de l'équation de la droite de régression, on peut estimer la valeur d'une variable si on connaît la valeur correspondante de l'autre.

Exercices de fixation

Le tableau suivant indique l'évolution du paquet de chocolat vendu de 2013 à 2020.

Année	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Rang (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8
Prix en Euro (y_i)	5,98	6,30	6,70	7	7	7	7,05	7,88

On sait que le coefficient de corrélation linéaire de x et y est 0,94 et l'équation de la droite de régression est : $y = 0{,}22\,x + 5{,}84$.

1. Détermine le prix du paquet de chocolat en 2025.
2. Détermine en quelle année le prix atteindra 9,8 Euros ?

APPRENTISSAGE DE LA RÉDACTION

Exercice Faire une prévision à partir d'un ajustement linéaire

Le tableau ci-dessous donne la charge maximale Y en tonnes, qu'une grue peut lever pour une longueur X en mètre, de la flèche.

Longueur (x_i)	16,5	18	19,8	22	25	27	29	32	35	39	41,7
Charge (y_i)	10	9	8	7	6	5,5	5	4,5	4	3,5	3,2

Les réponses numériques à cette question seront données à 10^{-2} près.

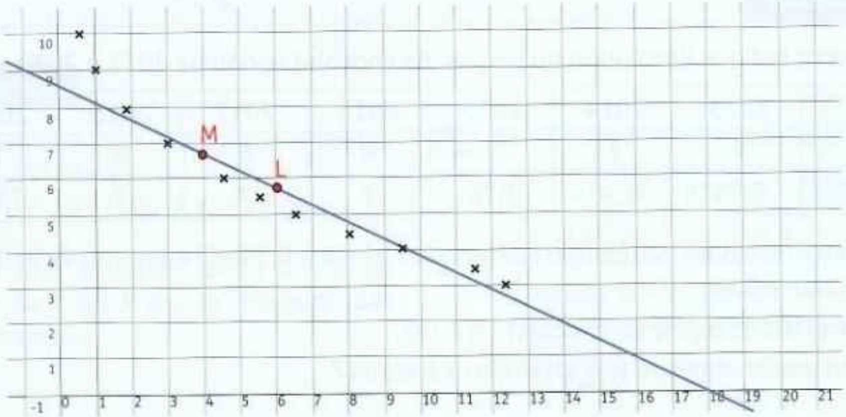
1. Représente le nuage de points $M(x_i\,;\,y_i)$ à l'aide d'un repère orthogonal.
Unités : 1 cm pour 2 mètres en abscisses et 1 cm pour 1 tonne en ordonnées.
2. Un ajustement affine par la méthode des moindres carrés de Y en X est-il satisfaisant ? Pourquoi ?
3. Détermine une équation de la droite de régression de Y en X par la méthode des moindres carrés. Trace cette droite sur le graphique précédent.
4. Utilise cette équation pour déterminer la charge maximale que peut lever la grue avec une flèche de 26 mètres. Que peut-on dire ?

Corrigé

1. Le nuage de points

Méthode

S'il y a une forte corrélation linéaire, on peut estimer une variable connaissant l'autre.



2. $\overline{x} = \dfrac{16,5 + 18 + 19,8 + 22 + 25 + 27 + 29 + 32 + 35 + 39 + 41,7}{11} = \dfrac{305}{11} \simeq 27,73$.

$\overline{y} = \dfrac{10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5,5 + 5 + 4,5 + 4 + 3,5 + 3,2}{11} = \dfrac{65,7}{11} \simeq 5,97.$

$$V(x) = \frac{16,5^2 + 18^2 + 19,8^2 + 22^2 + 25^2 + 27^2 + 29^2 + 32^2 + 35^2 + 39^2 + 41,7^2}{11} - \left(\frac{305}{11}\right)^2 = \frac{395649}{6050} \simeq 65,4$$

$$V(y) = \frac{10^2 + 9^2 + 8^2 + 7^2 + 6^2 + 5,5^2 + 5^2 + 4,5^2 + 4^2 + 3,5^2 + 3,2^2}{11} - \left(\frac{657}{110}\right)^2 = \frac{2837}{605} \simeq 4,69$$

$$\mathrm{Cov}(x;y) = \frac{16,5(10) + 18(9) + 19,8(8) + 22(7) + 25(6) + 27(5,5) + 29(5) + 32(4,5) + 35(4) + 39(3,5) + 41,7(3,2)}{11}$$

$$- \frac{305}{11} \times \frac{657}{110} = \frac{-101663}{6050} \simeq -16,80$$

$$r = \frac{\mathrm{Cov}(x;y)}{\sqrt{V(x) \times V(y)}} = \frac{-16,80}{\sqrt{65,4 \times 4,69}} \simeq -0,96$$

On a $0,87 < |r| < 1$, donc un ajustement affine est satisfaisant.

3. Une équation de la droite de régression (D) de Y en X.

$a = \dfrac{\mathrm{Cov}(X;Y)}{V(X)} = \dfrac{-16,8}{65,4} = -0,26$ et (D) : $y - \overline{y} = a(x - \overline{x})$

(D) : $y - 5,97 = -0,26(x - 27,73)$ soit (D) : $y = -0,26x + 13,18$.

4. Pour $x = 26$, on a $y = -0,26 \times 26 + 13,18 = 6,42$.

On peut dire que la charge maximale que peut lever la grue avec une flèche de 26 mètres est de 6,42T.

2.2. Droites de régression

Principe de la méthode des moindres carrés

Étant donné une série statistique double $(x_i\,;\,y_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ où (x_i) est une série non constante et telle que le nuage des points $M_i\,(x_i\,;\,y_i)$ soit relativement allongé. On cherche une droite (D) d'équation réduite $y = ax + b$ qui passe le plus près possible des points du nuage.

Pour cela :

- On calcule, pour tout, $i = 1, 2, \dots, n$ la distance M_iP_i entre le point M_i du nuage et le point P_i de la droite (D) ayant la même abscisse que M_i.
- On cherche les réels a et b pour lesquels la somme $S = M_1P_1^2 + M_1P_2^2 + M_3P_3^2 + \dots + M_nP_n^2$ des carrés de ces distances est minimale.

La somme $S = M_1P_1^2 + M_1P_2^2 + M_3P_3^2 + \dots + M_nP_n^2$ est appelée somme des carrées des résidus.

Définition

- Une équation de la droite de régression (D) de Y en X est : $y - \overline{y} = a(x - \overline{x})$,

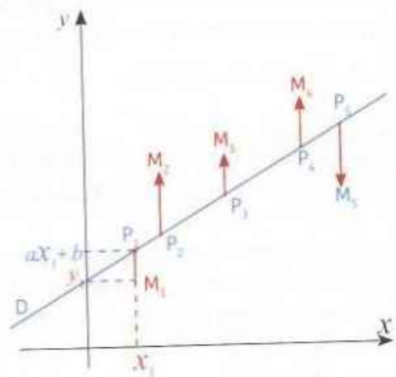
où $a = \dfrac{\mathrm{Cov}(X\,;Y)}{V(X)} = \dfrac{\sigma_{XY}}{(\sigma_X)^2}$.

- Une équation de la droite de régression (D') de X en Y est :

$x - \overline{x} = a'(y - \overline{y})$,

où $a' = \dfrac{\mathrm{Cov}(X\,;Y)}{V(Y)} = \dfrac{\sigma_{XY}}{(\sigma_Y)^2}$.

- Les droites de régression (D) et (D') passent par le point moyen $G(\overline{x}\,;\overline{y})$.



2.3. Coefficient de corrélation linéaire

Définition On appelle coefficient de corrélation linéaire d'une série statistique double (X ; Y), le nombre réel noté r tel que : $r = \dfrac{\mathrm{Cov}(X\,;Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \dfrac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \times \sigma_Y}$.

Propriété

- Si $r^2 = 1$, les droites de régression (D) et (D') sont alors confondues. On dit que l'ajustement est parfait.
- Si $0{,}87 \leq |\,r\,| \leq 1$, on dit qu'il y a une bonne corrélation ou une forte corrélation.
- $r^2 = aa'$ d'où $|r| = \sqrt{aa'}$

2.4. Estimation

S'il existe une forte corrélation entre deux variables X et Y, alors on peut estimer la valeur d'une variable si l'on connait la valeur correspondante de l'autre.

APPRENTISSAGE DE LA RÉDACTION

Exercice 1 Démontrer que deux droites sont perpendiculaires, trois points sont alignés

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé (O, I, J), on considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives $-2i$; $3+i$; $1+i$; $3-i$ et 2.

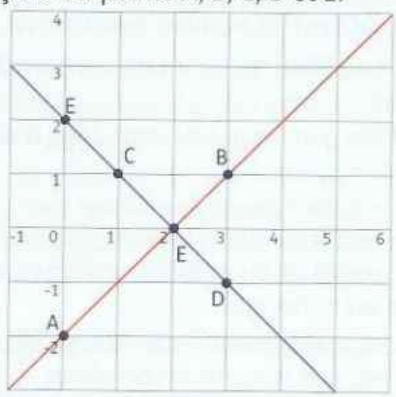
a) Place les points A, B, C, D et E dans le repère.

b) Démontre que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

c) Démontre que les points A, E et B sont alignés.

Corrigé

a) Plaçons les points A, B, C, D et E.



b) On a D $\neq$ C et B $\neq$ A car $z_D \neq z_C$ et $z_B \neq z_A$.

Calculons $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$.

$\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \frac{3-i-1-i}{3+i+2i} = -\frac{2}{3}i$. Or $-\frac{2}{3}i \in i\mathbb{R}^*$,

donc les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

c) Calculons : $\frac{z_B - z_A}{z_E - z_A}$.

$\frac{z_B - z_A}{z_E - z_A} = \frac{3+i+2i}{2+2i} = \frac{3(1+i)}{2(1+i)} = \frac{3}{2}$.

$\frac{3}{2} \in \mathbb{R}^*$, donc les points A, E et B sont alignés.

Méthode

- Pour démontrer que deux droites déterminées chacune d'elle par deux points sont perpendiculaires :
  - On vérifie que les points sont deux à deux distincts.
  - On calcule le rapport des affixes des vecteurs associés aux points identifiant chacune de ces droites.
  - Les deux droites sont perpendiculaires si ce rapport est un nombre imaginaire pur non nul.
- Pour démontrer que trois points sont alignés :
  - On vérifie que les points sont deux à deux distincts.
  - On calcule le rapport des affixes des vecteurs associés des différents couples de points.
  - Les trois points sont alignés si ce rapport est un nombre réel non nul.

Exercice 2 Démontrer que quatre points sont cocycliques et qu'un triangle est rectangle isocèle

On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives

$2+5i$; $1-2i$; $9-2i$; $10+i$ et $7+2i$.

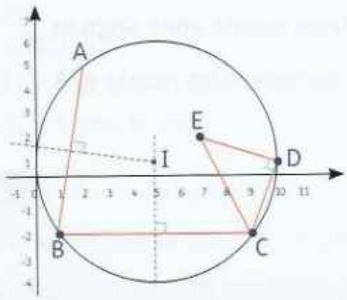
a) Place les points A, B, C, D et E.

b) Démontre que les points A, B, C et D sont cocycliques.

c) Démontre que le triangle CDE est isocèle et rectangle en D.

Corrigé

a) Plaçons les points A, B, C, D et E.



b) Les points sont tous distincts, donc on a $z_C \neq z_A$ et $z_C \neq z_B$.

Calculons $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A}$ et $\frac{z_D - z_B}{z_C - z_B}$.

$\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = \frac{10 + i - (2 + 5i)}{9 - 2i - (2 + 5i)} = \frac{8 - 4i}{7 - 7i} = \frac{2(3 + i)}{7}$.

$\frac{z_D - z_B}{z_C - z_B} = \frac{10 + i - (1 - 2i)}{9 - 2i - (1 - 2i)} = \frac{9 + 3i}{8} = \frac{3(3 + i)}{8}$

$\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} : \frac{z_D - z_B}{z_C - z_B} = \frac{21}{16}$

$\frac{21}{16} \in \mathbb{R}^*$.

Conclusion

$\frac{z_D - z_B}{z_C - z_B} = \frac{9 + 3i}{8}$, donc les points B, D et C sont non alignés et $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} : \frac{z_D - z_B}{z_C - z_B} = \in \mathbb{R}^*$.

Donc les points A, B, C et D sont cocycliques.

c) On a : $z_C \neq z_D$ et $z_D \neq z_E$ donc C ≠ E et D ≠ E.

Calculons : $\frac{z_E - z_D}{z_C - z_D}$.

$\frac{z_E - z_D}{z_C - z_D} = \frac{7 + 2i - (10 + i)}{9 - 2i - (10 + i)} = \frac{-3 + i}{-1 - 3i}$

$= \frac{(-3 + i)(-1 + 3i)}{10} = -\frac{10}{10} i = -i$.

Donc le triangle CDE est isocèle et rectangle en D.

Méthode

- Il s'agit de démontrer que des points A, B, C et D appartiennent à un cercle dont le centre n'est pas connu.
  - On vérifie que les points sont distincts deux à deux.
  - On calcule les rapports $\frac{z_C - z_B}{z_C - z_A}$ et $\frac{z_D - z_B}{z_C - z_A}$.
  - On vérifie que les points A, B, C et D sont non alignés. C'est le cas lorsque ces rapports ne sont pas des nombres réels.
  - On effectue le rapport des rapports obtenus.
  - Les points sont cocycliques si le rapport de ces rapports est un nombre réel non nul.
- Pour démontrer qu'un triangle est isocèle et rectangle :
  - On vérifie que les points sont deux à deux distincts.
  - On calcule le rapport des affixes des vecteurs associés des différents couples de points constitués du probable sommet où le triangle est rectangle.
  - Le triangle est isocèle et rectangle si ce rapport est soit le nombre complexe $-i$ ou i.

Exercice 3 Déterminer l'écriture complexe, la nature et les éléments caractéristiques d'une similitude directe

a) Détermine l'écriture complexe de l'homothétie de centre A d'affixe $3 + i$ et de rapport -2.

b) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de la transformation complexe dont l'écriture est :

$z' = (1 + i\sqrt{3})z + 1 + i$.

c) Détermine la similitude directe de centre A d'affixe $1 - 2i$ qui transforme le point B d'affixe $1 - i$ en C d'affixe $-2i$.

Corrigé

a) On a : $z' - z_A = -2(z - z_A)$.

C'est-à-dire $z' - (3 + i) = -2[z - (3 + i)]$.

D'où $z' = -2z + 9 + 3i$.

b) La transformation complexe est sous la forme $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ avec $a = 1 + i\sqrt{3}$ et $b = 1 + i$; $a \in \mathbb{C}$ et $|a| \neq 1$.

Donc c'est une similitude directe de rapport $|1 + i\sqrt{3}| = 2$, d'angle $\text{Arg}(1 + i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$ et de centre Ω d'affixe $\frac{b}{1-a} = \frac{1+i}{1-(1+i\sqrt{3})}$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{3} + i\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

c) Comme la transformation complexe est celle d'une similitude directe, elle est sous la forme $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

On a : $\begin{cases} z_A = az_A + b \\ z_C = az_B + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2i = a(1-2i)+b \\ -2i = a(1-i)+b \end{cases}$

D'où $a = i$ et $b = -1 - 3i$.

L'écriture complexe de cette similitude est donc $z' = iz - 1 - 3i$.

On a : $a = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Cette similitude est donc la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ de centre A d'affixe $1 + 2i$.

Méthode

- Pour déterminer l'écriture complexe d'une homothétie de centre Ω et de rapport k, on applique la relation $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$ et on remplace les vecteurs par leurs affixes.
- Pour déterminer l'écriture complexe $z' = az + b$ d'une similitude directe dont on connaît deux points et leurs et leurs images, on remplace dans l'écriture complexe les affixes des deux points et les affixes de leurs images, puis on résout un système pour trouver a et b.
- La nature de la similitude directe dépend de a.

Exercice 4 Déterminer les images de droites et cercles, les lieux géométriques

1. On considère la similitude directe d'écriture complexe : $z' = 2iz + 1$.
   a) Détermine l'image de la droite (D) d'équation $y = x + 1$ par S.
   b) Détermine l'image du cercle $(\mathscr{C})$ de centre A d'affixe $1 + i$ et de rayon 3 par S.
2. Détermine l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que : $|z' + 1 - 4i| = 4$.

Corrigé

1. a) Posons $z = x + iy$ l'affixe d'un point M appartenant à (D) et $z' = x' + iy'$ l'affixe de M' image du point M.

En remplaçant z et z' par leurs expressions on obtient :

$z' = 2i(x + iy) + 1$.

D'où $z' = -2y + 1 + i2x$.

On a le système suivant : $\begin{cases} x' = -2y + 1 \\ y' = 2x \end{cases}$

Comme $y = x + 1$, ce système devient :

$$\begin{cases} x' = -2(x+1)+1 \\ y' = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -2x - 1 \\ y' = 2x \end{cases}$$

On déduit que : $x' = -y' - 1 \Leftrightarrow y' = -x' - 1$.

Ainsi l'image de (D) est la droite d'équation $y = -x - 1$.

b) La transformation complexe est une similitude directe de rapport $|2i| = 2$.

Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de centre $A(1 + i)$ et de rayon 3. On note A' l'image de A par la similitude S.

$S(A) = A' \Leftrightarrow z_{A'} = 2i(1 + i) + 1$

$\Leftrightarrow z_{A'} = -1 + 2i$

Donc l'image $(\mathscr{C}')$ du cercle $(\mathscr{C})$ est le cercle de centre $A'(-1 + 2i)$ et de rayon $2 \times 3 = 6$.

Méthode

a) Dans l'écriture complexe de la similitude directe, on remplace z' par l'affixe de M' et z par l'affixe de M puis on exprime y' en fonction de x'.

b) L'image du cercle $(\mathscr{C})$ par S est le cercle $(\mathscr{C}')$ de centre S(A) et de rayon $|2i| \times 3$.

c) Il s'agit d'écrire l'égalité sous la forme $|z - z_A| = r \Leftrightarrow AM = r$.

L'ensemble des points cherché est un cercle.

L'image du cercle $(\mathscr{C})$ de centre A et de rayon r par la similitude directe S est le cercle $(\mathscr{C}')$ de centre A' et de rayon kr où A' est l'image de A par S et k le rapport de S.

2. Soient M d'affixe z et A un point d'affixe $2 + i$.

$$\begin{aligned}|z' + 1 - 4i| = 4 &\Leftrightarrow |2i\,z + 2 - 4i| = 4\\ &\Leftrightarrow |2i|\left|z + \frac{2-4i}{2i}\right| = 4\\ &\Leftrightarrow |z - 2 - i| = 2\\ &\Leftrightarrow |z - z_A| = 2\\ &\Leftrightarrow \text{AM} = 2.\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des points recherchés est le cercle $(\mathscr{C})$ de centre A et de rayon 2.

Résumé de cours

1 Nombres complexes et configurations du plan

1.1. Vecteurs du plan et angles orientés

Propriété Si A, B, C et D sont des points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D, tels que $A \neq B$ et $C \neq D$, alors $\arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D}\right)$ est une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{BA}})$.

Autrement dit : mes $(\widehat{\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{BA}}) = \arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Propriété Si A, B, C et D sont des points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D tels que $C \neq D$, alors : $\left|\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D}\right| = \frac{AB}{CD}$.

1.2. Caractérisations complexes de points alignés, de droites parallèles et de droites perpendiculaires

1.2.1. Caractérisations complexes de points alignés

Propriété A, B et C sont des points tels que $A \neq B$ et $B \neq C$ d'affixes respectives z_A, z_B et z_C.
Les points distincts A, B, et C sont alignés si et seulement si $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} \in \mathbb{R}^*$.

1.2.2. Caractérisations complexes de droites parallèles

Propriété A, B, C et D sont des points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D, tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.
Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D} \in \mathbb{R}^*$.

1.2.3. Caractérisations complexes de droites perpendiculaires

Propriété A, B, C et D sont des points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D, tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.
Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D} \in i\mathbb{R}^*$.

1.2.4. Caractérisations complexes de points cocycliques

Propriété A, B, C et D sont des points deux à deux distincts et non alignés d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D.
A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} : \frac{z_C - z_B}{z_D - z_B} \in \mathbb{R}^*$.

1.3. Caractérisations complexes des triangles particuliers

Propriété A, B et C sont des points non alignés d'affixes respectives z_A, z_B et z_C.

- Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in i\mathbb{R}^*$.
- Le triangle ABC est isocèle en A si et seulement si $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\alpha}$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$.
- Le triangle ABC est rectangle et isocèle en A si et seulement si $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = i$ ou $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = -i$.
- Le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

2 Nombres complexes et transformations du plan

2.1. Définition de transformation du plan et d'écriture complexe

Définition Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).

- Une transformation du plan est une application bijective du plan dans le plan.
- Soit F une transformation du plan qui à tout point M associe le point M'.

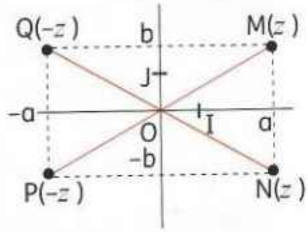
L'application bijective f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à l'affixe z de M, associe l'affixe z' de M' s'appelle la transformation complexe associée à F.
L'application F s'appelle la transformation ponctuelle associée à l'application f.
L'expression de $z' = f(z)$ s'appelle l'écriture complexe de F.

2.2. Transformations élémentaires du plan

2.2.1. Symétries

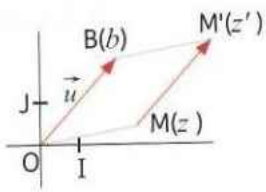
Propriétés Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).

- La symétrie orthogonale d'axe (OI) a pour écriture complexe : $z' = \overline{z}$.
- La symétrie centrale de centre O a pour écriture complexe : $z' = -z$.
- La symétrie orthogonale d'axe (OJ) a pour écriture complexe : $z' = -\overline{z}$.

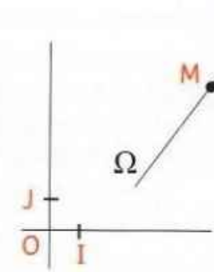


2.2.2. Translation

Propriété $t_{\vec{u}}$ est la translation de vecteur d'affixe b.
La translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b a pour écriture complexe : $z' = z + b$.

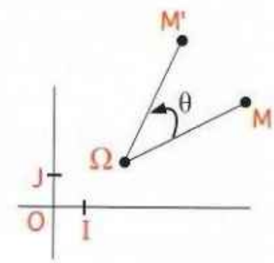


2.2.3. Homothétie



Propriété H est l'homothétie de centre Ω d'affixe z_Ω et de rapport k, $k \in \mathbb{R}^*$.
L'homothétie de centre Ω d'affixe z_Ω et de rapport k a pour écriture complexe : $z' = k(z - z_\Omega) + z_\Omega$.

2.2.4. Rotation



Propriété r est la rotation de centre Ω d'affixe z_Ω et d'angle orienté de mesure principale θ.
La rotation de centre Ω d'affixe z_Ω et d'angle orienté de mesure principale θ a pour écriture complexe :
$z' = e^{i\theta}(z - z_\Omega) + z_\Omega$.

2.3. Similitudes directes

a) Définition

Définition Une similitude directe est une transformation du plan dont l'écriture complexe est de la forme : $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Exemple

Toute translation, toute homothétie et toute rotation sont une similitude directe.

Propriétés Soit s une similitude directe d'écriture complexe :
$z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.
- Si $a = 1$, alors s est la translation de vecteur d'affixe b.
- Si $a \neq 1$, alors s est la similitude directe de centre d'affixe $\dfrac{b}{1-a}$, de rapport $|a|$, d'angle $\text{Arg}(a)$.

Vocabulaire

Le centre, le rapport et l'angle d'une similitude directe sont appelés ses éléments caractéristiques.

Remarque

- Toute rotation d'angle α est une similitude directe de rapport 1 et d'angle α.
- Toute homothétie de rapport k ($k > 0$) est une similitude directe de rapport k et d'angle nul.
- Toute homothétie de rapport k ($k < 0$) est une similitude directe de rapport $-k$ et d'angle π.

Résumé de cours

b) Propriétés

Propriétés

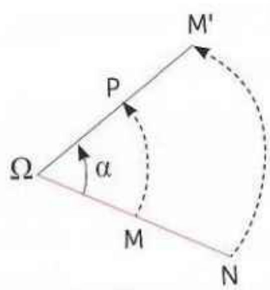
- Toute écriture complexe de la forme : $z' = az + b$, avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$, est celle d'une similitude directe.
- Toute similitude directe est parfaitement déterminée par ses éléments caractéristiques : son centre, son rapport et son angle.

On note $s_{(\Omega, k, \alpha)}$ la similitude directe de centre Ω, de rapport $k (k \in \mathbb{R}_+^*)$ et d'angle α.

- L'écriture complexe de la similitude directe de centre Ω d'affixe ω, de rapport $k (k \in \mathbb{R}_+^*)$ et d'angle α est : $z' - \omega = ke^{i\alpha}(z - \omega)$.
- Soit $s = s_{(\Omega, k, \alpha)}$. Pour tout point M, on a :

$$s(\mathrm{M}) = \mathrm{M}' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega\mathrm{M}' = k\Omega\mathrm{M} \\ \mathrm{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}}, \overrightarrow{\Omega\mathrm{M}'}}\right) = \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Point méthode



Pour construire l'image M' d'un point M par $s_{(\Omega, k, \alpha)}$, on peut :

- soit construire d'abord le point N tel que $\Omega\mathrm{N} = k\Omega\mathrm{M}$, et ensuite M' tel que $\Omega\mathrm{M}' = \Omega\mathrm{N}$ et $\mathrm{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega\mathrm{N}}, \overrightarrow{\Omega\mathrm{M}'}}\right) = \alpha$;
- soit construire d'abord le point P tel que $\Omega\mathrm{P} = \Omega\mathrm{M}$, et $\mathrm{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}}, \overrightarrow{\Omega\mathrm{P}}}\right) = \alpha$, et ensuite M' tel que $\Omega\mathrm{M}' = k\Omega\mathrm{P}$.

2.4. Reconnaître une similitude directe définie par son écriture complexe

Propriété Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct, on considère la similitude directe S d'écriture complexe : $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

	Conditions vérifiées par a		Nature et éléments caractéristiques de S
Similitude directe S d'écriture complexe $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$	Si $a \in \mathbb{R}^*$	$a = 1$	S est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b.
		$a \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$	S est l'homothétie de centre Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$ et de rapport a.
	Si $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$	$\lvert a \rvert = 1$	S est la rotation de centre Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$ et d'angle $\mathrm{Arg}(a)$.
		$\lvert a \rvert \neq 1$	S est la similitude directe de centre Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$ de rapport $\lvert a \rvert$ de d'angle $\mathrm{Arg}(a)$.

Session 2021	Série D	Durée : 4H	Coefficient : 4

Exercice 1

Pour chaque énoncé, écris Vrai si l'énoncé est vrai ou bien Faux si l'énoncé est faux.
Aucune justification n'est demandée.

N°	Énoncé
1	La fonction ln est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.
2	La fonction ln est une primitive sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1.
3	On considère la suite u définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n \end{cases}$. La suite u est une suite arithmétique.
4	Soit f est une fonction numérique dérivable sur un intervalle K. a et b sont deux éléments de K tels que : $a < b$. S'il existe deux nombres réels m et M tels que pour tout x élément de $[a\,,b]$, $m \leq f'(x) \leq M$, alors $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.

Exercice 2

Pour chacun des énoncés incomplets du tableau ci-dessous, quatre réponses A, B, C et D sont proposées dont une seule permet d'avoir l'énoncé juste.
Écris sur ta feuille le numéro de chaque énoncé incomplet suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	Énoncé incomplet	Réponses	
1	Soit u la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$ La suite u a pour limite ...	A	$-\infty$
		B	0
		C	2
		D	$+\infty$
2	L'équation (E) : $x \in \mathbb{N}$, $\ln x \leq 1$ a pour ensemble de solutions ...	A	$]\infty\,;e]$
		B	$]0\,;e]$
		C	$[e\,;+\infty[$
		D	$\emptyset$
3	On pose : $z = -\sqrt{3} + i$. On note r le module de z et l'argument principal de z. r et θ vérifient ...	A	$r = 2$ et $\theta = \frac{5\pi}{6}$
		B	$r = 2$ et $\theta = \frac{-5\pi}{6}$
		C	$r = 2$ et $\theta = \frac{2\pi}{3}$
		D	$r = 1$ et $\theta = \frac{5\pi}{6}$
4	*Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct* $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$. Soit I et J les points d'affixes respectives 1 et i. On note (Γ) l'ensemble des points M du plan d'affixe z vérifiant : $\lvert z - 1 \rvert = \lvert z - i \rvert$ (Γ) est ...	A	la droite (IJ) privée du segment [IJ]
		B	la droite (IJ)
		C	la médiatrice du segment [IJ]
		D	le cercle de centre I et de rayon 1

5	La somme $u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{121}$ des termes consécutifs d'une suite arithmétique $(u)_{n \in \mathbb{N}}$ est égale à ...	A	$121\frac{(u_0 + u_{121})}{2}$
		B	$122\frac{(u_0 + u_{121})}{2}$
		C	$121\frac{(u_0 + u_{122})}{2}$

Exercice 3

Dans une ville, 30% de la population a un âge supérieur ou égal à 65 ans.
60% des personnes ayant un âge supérieur ou égal à 65 ans sont atteintes de la Covid-19.
0,1% de personnes de moins de 65 ans sont atteintes de la Covid-19.

1. On prend une personne au hasard et on donne les événements :
   S : "La personne a un âge supérieur ou égal à 65 ans".
   C : "La personne est atteinte de la Covid-19".
   a) Dresse un arbre pondéré qui présente la situation.
   b) Donne la valeur de $P_S(C)$ des personnes atteintes de la Covid-19 sachant qu'elles ont plus de 65 ans.
   c) Calcule la probabilité pour que la personne ait au moins de 65 ans et la covid-19.
2. Justifie que la probabilité de l'événement C est 0,1807.
3. On prend au hasard $n(n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\})$ personnes dans la ville et on note P_n la probabilité d'avoir au moins une personne atteinte de la covid-19.
   a) Justifie que : $\forall_n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $P_n = 1 - (0{,}8193)^n$.
   b) Détermine le nombre minimum de personnes à prendre pour que la probabilité d'avoir au moins une personne atteinte de la covid-19 dépasse 99,99%.

Exercice 4

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x + 1)e^{1-x} - x + 1$.
On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère (O, I, J).
L'unité graphique est le centimètre.

1. On admet que : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

Interprète graphiquement ces résultats.

2. a) Calcule la limite de f en $+\infty$.
   b) Justifie que la droite (D) d'équation $y = -x + 1$ est une asymptote à (C) en $+\infty$.
3. Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = xe^{1-x} + 1$.

On admet qu'il existe un nombre réel α élément de [−0,4 ; −0,2] tel que : $g(\alpha) = 0$ et
$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; \alpha[, g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0 \end{cases}$.

On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   a) Justifie que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -g(x)$.
   b) Étudie le sens de variation de f.
   c) Dresse le tableau de variation de f.
4. On admet que (C) est au-dessus de (D) sur [−1 ; +∞[et au-dessous de (D) sur]−∞ ; −1].
Construis (C), (tu prendras : $\alpha = -0{,}3$ et $f(\alpha) = 3{,}9$).
5. a) Interprète graphiquement l'intégrale K telle que : $K = \int_0^1 (f(x) - (-x + 1))\,dx$.
   b) Justifie, à l'aide d'une intégration par parties, que : $K = 2e - 3$.

Exercice 5

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) d'unité graphique le centimètre.
On réalisera une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.
On note A et B les points d'affixes respectives 8 et $4 + 4i$.

1. On considère la similitude directe s de centre O telle que : $s(A) = B$.
   a) Justifie que la similitude directe s a pour écriture complexe : $z' = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)z$.
   b) Détermine le rapport et l'angle de s.
2. On considère les points A_n tels que : $\begin{cases} A_0 = A \\ \forall n \in \mathbb{N},\ A_{n+1} = S(A_n) \end{cases}$

On désigne par z_n l'affixe du point A_n.
   a) Démontre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = 8(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)^n$
   b) Justifie que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle isocèle en A_{n+1}.
3. a) Place successivement les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4.
   b) Justifie que l'aire a_1, en cm², du triangle OA_0A_1 est 16.
   c) Déduis du résultat précédent l'aire a, en cm², du polygone $A_0A_1A_2A_3A_4$.

Exercice 6

Une société fabrique et commercialise des produits cosmétiques. Les relevés, en millions de francs CFA, des frais publicitaires mensuels de la société et de son chiffre d'affaires mensuel sont consignés dans le tableau suivant :

Frais publicitaires	1	2	3	4	5
Chiffre d'affaires	60	66	69	75	81

Le directeur commercial veut investir davantage dans la publicité pour que le chiffre d'affaires mensuel dépasse constamment 100 millions de francs CFA.
Fais une proposition argumentée.

Session 2022 — Série D — Durée : 4H — Coefficient : 4

Exercice 1

On donne le groupe de mots (la droite de régression, des primitives, une bijection, fonction dérivable, extremum relatif) et les phrases incomplètes dans le tableau ci-dessous :

N°	Phrases incomplètes
1	Toute fonction f continue et strictement croissante sur un intervalle K définie ...... de K sur f(K).
2	Soit (X, Y) une série statistique double ayant une forte corrélation entre X et Y et telle que V(X) ≠ 0. Une équation de ...... de Y en X est $y = ax + b$ où $a = \frac{\text{cov}(X,Y)}{V(X)}$ et $b = \overline{Y} - a\overline{X}$, $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ étant les moyennes respectives de X et Y.
3	Toute fonction continue sur un intervalle I admet ...... sur I.
4	Toute ...... en un point a est continue en a.

Écris, sur ta feuille de copie, le numéro de chaque phrase incomplète suivi du groupe de mots à écrire à la place de pointillés pour que la phrase soit vraie.

Exercice 2

Pour chacun des énoncés du tableau ci-dessous, les informations des colonnes A, B et C permettent d'obtenir trois affirmations dont une seule est vraie.

Écris, sur ta feuille de copie, le numéro de l'énoncé suivi de la lettre de la colonne qui donne l'affirmation vraie.

N°	Énoncé	A	B	C
1	Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto -e^{-2x+5}$ est ...	$x \mapsto -2e^{-2x+5}$	$x \mapsto \frac{1}{2}e^{-2x+5}$	$x \mapsto -\frac{1}{2}e^{-2x+5}$
2	Les solutions de l'équation différentielle $y'' - 4y = 0$ sont de la forme ...	$x \mapsto ke^{-2x} + k'e^{-2x}$ $(k, k') \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$	$x \mapsto k\cos(2x) + k'\sin(2x)$ $(k, k') \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$	$x \mapsto ke^{4x} + k'e^{-4x}$ $(k, k') \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$
3	$\lim\limits_{x\to+\infty}(x - e^x)$ est égale à ...	$-\infty$	$+\infty$	0
4	La forme exponentielle du nombre complexe $-1 + i$ est ...	$2e^{i\frac{\pi}{4}}$	$\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$	$\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

Exercice 3

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

A, B, C, D et I sont les points du plan complexe d'affixes respectives : $-\sqrt{2}$; $1+i$; $1-i$; $3+i$ et 1.

1. Justifie que le triangle ABC est isocèle en A.
2. Soit S la similitude directe du plan d'écriture complexe : $z' = (1+i)z + 1 - 3i$.
   a) Justifie que : S(D) = D et S(B) = C.
   b) Détermine les éléments caractéristiques de S.
   c) Détermine l'image (C') du cercle (C) de diamètre [BD] par S.

Exercice 4

On donne la fonction numérique f définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{5x+2}{4x+7}$.

(C) est sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

1. Sur la feuille annexe à rendre avec la copie, construis à l'aide de (C) et de la droite (D) d'équation $y = x$, les quatre premiers termes u_0, u_1, u_2 et u_3 de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses.
2. On admet que la fonction f est dérivable et strictement croissant sur $]0\,;+\infty[$.
   a) Démontre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > \frac{1}{2}$.
   b) Démontre que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \dfrac{2(u_n+1)(-2u_n+1)}{4u_n+7}$.
   c) Déduis de 2.a) et 2.b) que la suite (u_n) est décroissante.
3. a) Déduis de 2.a) et 2.c) que la suite (u_n) est convergente.
   b) Justifie que la limite de la suite (u_n) est égale à $\frac{1}{2}$.

Exercice 5

Soit f la fonction numérique définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x\ln x - 2x, \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

On note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
L'unité graphique est 2 cm.

1. a) Justifie que f est continue en 0.

   b) Justifie que : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty$.

   c) Interprète graphiquement le résultat de 1.b).

2. On admet que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

Interprète graphiquement ces résultats.

3. a) On suppose que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.
   Justifie que : $\forall n \in]0\,;+\infty[, f'(x) = -1 + \ln x$.

   b) Étudie les variations de f.

   c) Dresse le tableau de variation de f.

4. Trace la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

(Tu pourras tracer l'axe des abscisses dans le sens de la longueur du papier millimétré).

5. a) À l'aide d'une intégration par parties, justifie que l'intégrale K telle que $K = \int_1^2 x\ln x dx$ est égale à $2\ln 2 - \dfrac{3}{4}$.

   b) On admet que, sur $[1\,;2]$, $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de l'axe des abscisses (OI).
   Calcule l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par la courbe de $(\mathcal{C}_f)$, la droite (OI) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

Exercice 6

Lors de la kermesse en fin d'année dans ton lycée, le comité d'organisation a initié un jeu d'adresse.
Le jeu comprend quatre épreuves.
Le joueur reçoit 4 boules après une mise de 100 F CFA.
Une épreuve consiste à lancer une boule dans un trou situé à 10 m.
Le jeu est terminé lorsque le joueur a lancé les quatre boules.
On suppose que les 4 boules lancées sont indépendantes.
À chaque épreuve :
- si le joueur réussit à loger la boule dans le trou, le comité d'organisation lui remet 2 tickets.
- s'il ne réussit pas à loger la boule dans le trou, il ne gagne aucun ticket.

On admet que le joueur a 25% de chance de loger une boule dans le trou.
Le comité d'organisation récompense à hauteur de 2 500 F CFA le joueur qui possède à la fin du jeu au moins 4 tickets.
Un élève affirme qu'un joueur a moins de 20% de chance de gagner les 2 500 F CFA.
À l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances mathématiques, dis si l'affirmation de cet élève est justifiée ou non.

Logique et raisonnement

I- Proposition

Une proposition est un énoncé auquel on peut répondre sans ambiguïté par vrai ou par faux.

On dit alors que les deux valeurs de vérité d'une proposition sont « vrai » ou « faux ».

II- Implication et équivalence

La proposition « si P, alors Q » ou « P implique Q » est appelée implication. Elle est symbolisée par $\Longrightarrow$.

On dit que P est l'hypothèse et que Q est la conclusion.

La proposition « P si, et seulement si Q » ou « P équivaut à Q » est la proposition « (Si P, alors Q) et (si Q, alors P) ». Elle est symbolisée par $\Leftrightarrow$.

III- Les quantificateurs

▪ **Quantificateur universel**

Pour énoncer une propriété vraie dans tous les cas, on utilise le quantificateur « pour tout », noté $\forall$.

Remarque : Il signifie « Quel que soit » ou encore « Pour tous ».

« $\forall x \in E$, $P(x)$ » signifie : Pour tout élément x appartenant à l'ensemble E, la proposition $P(x)$ est vraie.

Exemple : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$: Quel que soit x élément de $\mathbb{R}$, x^2 est positif ou nul.

▪ **Quantificateur existentiel**

Pour énoncer une propriété vraie sur des exemples mais qui n'est pas dans tous les cas, on utilise le quantificateur « il existe », noté $\exists$.

« $\exists x \in E \,/\, P(x)$ » ou « $\exists x \in E$, $P(x)$ » signifie : Il existe au moins un élément x de l'ensemble E tel que la proposition $P(x)$ soit vraie.

Exemple : $\exists x \in \mathbb{R} \,/ x^2 > 100$: Il existe des réels x tels que : $x^2 > 100$.

« $\exists! x \in E \,/\, P(x)$ » signifie : Il existe un et un seul élément x de l'ensemble E tel que la proposition $P(x)$ soit vraie.

Exemple : $\exists! x \in \mathbb{N} \,/ n^2 = 100$: Il existe un unique entier naturel n tel que : $n^2 = 100$.

IV- Les différents types de raisonnement

On peut définir le raisonnement comme un ensemble de propositions organisées pour aboutir à une conclusion.

▪ **Le raisonnement inductif :** de l'étude de plusieurs exemples concordants (et si possible représentatifs) on déduit, par présomption, une propriété générale.

Exemple : Deux points A et B étant donnés, détermine l'ensemble de tous les points C tels que le triangle ABC soit un triangle rectangle.

▪ **Le raisonnement déductif :** à partir de propriétés reconnues comme vraies, par enchaînement logique, on déduit une propriété.

▪ **Raisonnement par l'absurde :** consiste à démontrer la vérité d'une proposition en prouvant l'absurdité de la proposition contraire.

Exemple : Démontre que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

▪ **La disjonction des cas :** pour démontrer une propriété, il est parfois nécessaire de l'étudier cas par cas.

Exemple : Démontre par disjonction des cas que pour tout entier n, $\frac{n(n+1)}{2}$ est un entier.

▪ **Le contre-exemple :** un contre-exemple ou

contre-exemple est un exemple particulier et concret qui contredit une affirmation.

Exemple : Démontre que l'affirmation « Tout entier positif est somme de trois carrés » est fausse.

Mémento

LIMITES ET CONTINUITÉ

- Si $\forall x \in]a, +\infty[, f(x) \geq g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
- Si $\forall x \in]-\infty, a[, f(x) \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Théorème des gendarmes

- Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = l$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

Limite de la composée de deux fonctions

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x \to b} g(x) = l$, alors $\lim\limits_{x \to a} g \circ f(x) = l$.

Branches paraboliques

- $(\mathscr{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction (OI) en $+\infty$ lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$) et

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

- $(\mathscr{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction (OJ) en $+\infty$ lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$) et

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \text{ (ou } -\infty).$$

On définit de même les branches paraboliques en $-\infty$.

Théorème des valeurs intermédiaires (conséquence)

f est une fonction continue et strictement monotone sur $[a ; b]$.

Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle ouvert $]a ; b[$.

DÉRIVABILITÉ ET ÉTUDE DE FONCTION

Dérivabilité à droite, dérivabilité à gauche

- $f'_d(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ et

$f'_g(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x0 \\ <}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

- Une fonction f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche en a, dérivable à droite en a et $f'_g(a) = f'_d(a)$.

Point d'inflexion

Le point $A(a ; f(a))$ est un point d'inflexion de $(\mathscr{C}_f)$ lorsque $f''(x)$ s'annule en a en changeant de signe.

Dérivée d'une fonction composée

$(gof)' = f'(g'of)$.

Nombre dérivé de la réciproque d'une fonction bijective en un point

$$[f^{-1}]'(a) = \frac{1}{f'[f^{-1}(a)]}$$

Inégalités des accroissements finis

- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. a et b deux éléments de I tels que $a < b$.
S'il existe des nombres réels M et m tels que pour tout x élément de $[a, b]$, $m \leq f'(x) \leq M$,
alors $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$.
- f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. S'il existe un nombre réel M tel que pour tout x élément de I, $|f'(x)| \leq M$, alors pour tous nombres réels a et b de I, $|f(a) - f(b)| \leq M|a - b|$.

PRIMITIVES

Primitives de fonctions de référence

Fonction : $f(x) = ...$	Primitives de f : $F(x) = ...$
$a, a \in \mathbb{R}$	$ax + c, c \in \mathbb{R}$
$x^n, n \in \mathbb{N}$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c, c \in \mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$	$\dfrac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + c, c \in \mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c, c \in \mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x^r}$, $r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{1\}$	$\dfrac{-1}{(r-1)x^{r-1}} + c, c \in \mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$1 + \tan^2 x$	$\tan x + c, c \in \mathbb{R}$

Calcul de primitives

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

Fonction	Primitives
$u' + v'$	$u + v + c, c \in \mathbb{R}$
$\lambda u', \lambda \in \mathbb{R}$	$\lambda u + c, c \in \mathbb{R}$
$u'v + uv'$	$u \times v + c, c \in \mathbb{R}$

$u'u^n (n \in \mathbb{Q}\backslash\{-1\})$	$\frac{u^{n+1}}{n+1} + c, c \in \mathbb{R}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}, u > 0$	$2\sqrt{u} + c, c \in \mathbb{R}$
$\frac{v'}{v^2}, v \neq 0$	$-\frac{1}{v} + c, c \in \mathbb{R}$
$\frac{u'}{u^n}, u \neq 0$ et $n \in \mathbb{Q}\backslash\{1\}$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}} + c, c \in \mathbb{R}$
$\frac{u'v - uv'}{v^2}, v \neq 0$	$\frac{u}{v} + c, c \in \mathbb{R}$
$u'\sin u$	$-\cos u + c, c \in \mathbb{R}$
$u'\cos u$	$+\sin u + c, c \in \mathbb{R}$

FONCTIONS LOGARITHMES

- $\forall x \in]0 ; +\infty[, \ln'(x) = \frac{1}{x}$.
- $\ln 1 = 0$
- $\ln e = 1$, avec $e \simeq 2,7182$

Propriétés algébriques

Pour tous nombres réels a et b strictement positifs, on a :

- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$;
- $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$;
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$;
- $\ln(a^r) = r\ln a, \forall r \in \mathbb{Q}$;
- $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$.

Sens de variation

- La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0 , +\infty[$.

- Conséquences :

Pour tous nombres réels a et b strictement positifs, on a :

- $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$;
- $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$;
- $\ln a = 0 \Leftrightarrow a = 1$;
- $a \geq 1 \Leftrightarrow \ln a \geq 0$;
- $0 < a \leq 1 \Leftrightarrow \ln a \leq 0$.

Limites

- $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0} x\ln x = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Dérivées

$(\ln\circ u)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

$(\ln\circ|u|)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Primitives

Fonction	Primitives
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto \ln\|x\| + c, c \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$	$x \mapsto \ln\|u(x)\| + c, c \in \mathbb{R}$

La fonction logarithme décimal

$\forall x \in]0 ; +\infty[$, $\log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$.

FONCTIONS EXPONENTIELLES ET FONCTIONS PUISSANCES

- $e^0 = 1$; $e^1 = e$
- $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x$
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, e^{\ln x} = x$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}_+^*, e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$

Propriétés algébriques

Pour tous nombres réels a et b, pour tout nombre rationnel r, on a :

- $e^{a+b} = e^a \times e^b$
- $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$
- $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$
- $(e^a)^r = e^{ra}$

Limites

Pour tous nombres réels a et b, pour tout nombre rationnel r, on a :

- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Sens de variation

- $\forall x \in \mathbb{R}, (e^x)' = e^x$

- La fonction exponentielle népérienne est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- Conséquences

Pour tous nombres réels a et b,

- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
- $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$
- $a < 0 \Leftrightarrow 0 < e^a < 1$
- $a > 0 \Leftrightarrow e^a > 1$.

Dérivées

$(e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)}$

Primitives

Fonction	Primitives
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x + c, c \in \mathbb{R}$
$x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$	$x \mapsto e^{u(x)} + c, c \in \mathbb{R}$

Croissances comparées

$\alpha \in \mathbb{R}_+^*$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$;
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{e^x} = 0$;
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x^\alpha}{e^x} = 0$;
- $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha \ln x = 0$;
- $\lim\limits_{x\to-\infty} |x|^\alpha e^x = 0$.

SUITES NUMÉRIQUES

Convergence

- Toute suite décroissante et minorée est convergente.
- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- (u_n) est une suite telle que : $u_{n+1} = f(u_n)$.

Si la suite (u_n) est convergente, alors sa limite est une solution de l'équation : $f(x) = x$.

Convergence de suites arithmétiques

(u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0

- Si $r = 0$, alors (u_n) converge et $\lim u_n = u_0$.
- Si $r \neq 0$, alors (u_n) diverge et $\lim u_n = +\infty$, si $r > 0$ et $\lim u_n = -\infty$ si $r < 0$.

Convergence de suites géométriques

(v_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme v_0

	$v_0 < 0$	$v_0 = 0$	$v_0 > 0$
$q \leq -1$	$\lim v_n$ n'existe	$\lim v_n = 0$	$\lim v_n$ n'existe
$-1 < q < 1$	$\lim v_n = 0$	$\lim v_n = 0$	$\lim v_n = 0$
$q = 1$	$\lim v_n = v_0$	$\lim v_n = 0$	$\lim v_n = v_0$
$q > 1$	$\lim v_n = -\infty$	$\lim v_n = 0$	$\lim v_n = +\infty$

Croissances comparées des suites $(\ln(n))$, (n^α), (a^n) avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$

Suite	Conditions	Limite
$(\ln n)_{n\in\mathbb{N}^*}$		$+\infty$
$(n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}^*}, \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha < 0$	0
	$\alpha = 0$	1
	$\alpha > 0$	$+\infty$
$(a^n)_{n\in\mathbb{N}^*}, \alpha \in \mathbb{R}$	$a \leq -1$	n'existe pas
	$-1 < a < 1$	0
	$a = 1$	1
	$a > 1$	$+\infty$

- Si $\alpha > 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n^\alpha} = 0$.
- Si $a > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{a^n} = 0$.
- Si $a > 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^\alpha}{a^n} = 0$.
- Si $\alpha < 0$ et $-1 < a < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n^\alpha} = 0$.

CALCUL INTÉGRAL

Intégrale d'une fonction continue

- $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.
- $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Relation de Chasles

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Linéarité

- $\int_a^b [f(t) + g(t)]dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$.
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \int_a^b \alpha f(t)dt = \alpha \int_a^b f(t)dt$.

Inégalité et intégrale

Si $\forall x \in [a ; b]$, $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Si $\forall x \in [a ; b]$, $f(x) \geq g(x)$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

Inégalités de la moyenne

Soient m et M des nombres réels.

Si $\forall x \in [a ; b]$, $m \leq f(x) \leq M$, alors

$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

Si $\forall x \in [a ; b]$, $|f(x)| \leq M$, alors $\int_a^b |f(x)|dx \leq M(b-a)$.

Valeur moyenne d'une fonction continue

Valeur moyenne de f sur $[a ; b]$: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

Intégration par parties

$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$.

Calcul d'aire

Le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

- f est une fonction dérivable sur $[a, b]$ de courbe représentative (C_f) :

- Si f est positive sur $[a, b]$, l'aire de la partie du plan limitée par (C_f), (OI), les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est $\int_a^b f(x)dx \times u.a$;

- Si f est négative sur $[a, b]$, l'aire de la partie du plan limitée par (C_f), (OI), les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est $-\int_a^b f(x)dx \times u.a$;

- Si f ne garde pas de signe constant sur $[a, b]$, l'aire de la partie du plan limitée par (C_f), (OI), les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est $\int_a^b |f(x)|dx \times u.a$;

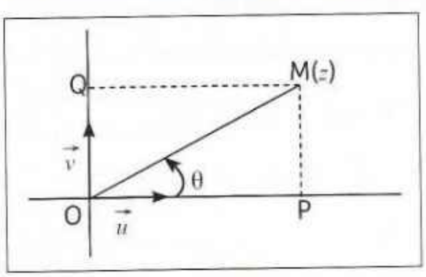
- f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ telles que $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \geq g(x)$. (C_f) et (C_g) sont les courbes représentatives respectives de f et g.

L'aire de la partie du plan limitée par (C_f), (C_g), les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx \times u.a$.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Types d'équations différentielles	Solutions
$y' + ay = 0$, $a \in \mathbb{R}$	$f : x \mapsto ke^{-ax}$, $k \in \mathbb{R}$
$y' + ay = b$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$	$f : x \mapsto ke^{-ax} + \frac{b}{a}$, $k \in \mathbb{R}$
$y'' = 0$	$f(x) = ax + b$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$
$y'' - \omega^2 y = 0$, $\omega \in \mathbb{R}^*$	$f(x) = ae^{-\omega x} + be^{\omega x}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$
$y'' + \omega^2 y = 0$, $\omega \in \mathbb{R}^*$	$f(x) = a\cos\omega x + b\sin\omega x$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$

NOMBRES COMPLEXES



z est un nombre complexe de points image $M(x,y)$

Partie réelle de z : $\mathrm{Re}(z) = x = \overline{OP} = r\cos\theta$

Partie imaginaire de z : $\mathrm{Im}(z) = y = \overline{OQ} = r\sin\theta$.

$z \neq 0$ et $\theta = \arg(z)$

Forme algébrique : $z = x + iy$, avec $i^2 = -1$.

Forme trigonométrique : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

Forme exponentielle : $z = re^{i\theta}$

Conjugué

Si $z = x + iy = re^{i\theta}$;

$\bar{z} = x - iy = re^{-i\theta}$;

$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$; $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$;

$\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$; $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z'}$;

$z\bar{z} = x^2 + y^2$.

Module et argument

Module de z : $|z| = r = OM = \sqrt{x^2+y^2}$

Argument de z $(z \neq 0)$: $\mathrm{Arg}(z) = \theta = \mathrm{Mes}(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}})$

Tout nombre de la forme $\theta + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$, est un argument de z et est noté $\arg(z)$

$z = re^{i\theta}$; $z' = r'e^{i\theta'}$

$zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$; $z^n = r^n e^{in\theta}$

$\frac{1}{z'} = \frac{1}{r'}e^{-i\theta'}$; $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$

$-z = re^{i(\pi+\theta)}$; $\bar{z} = re^{-i\theta}$

Formules de Moivre

- $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$
- $(\cos\theta - i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) - i\sin(n\theta)$

Formules d'Euler

- $\cos n\theta = \dfrac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2}$
- $\sin n\theta = \dfrac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i}$

Équation du second degré dans $\mathbb{C}$

(E): $z \in \mathbb{C}$, $az^2 + bz + c = 0$, ($a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}$)

- Discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$.
- Si $\Delta = 0$, alors (E) admet une solution unique : $-\dfrac{b}{2a}$.

Si $\Delta \neq 0$, alors (E) admet deux solutions distinctes :

$\dfrac{-b-\delta}{2a}$ et $\dfrac{-b+\delta}{2a}$, où δ est une racine carrée de Δ.

PROBABILITÉ CONDITIONNELLE ET VARIABLE ALÉATOIRE

Probabilité conditionnelle

- $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$
- A et B sont indépendants lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Espérance mathématique, variance et écart type d'une variable aléatoire

- Espérance mathématique

$$E(X) = x_1 \times P(X = x_1) + x_2 \times P(X = x_2) + \dots + x_n \times P(X = x_n)$$

- Variance

$$V(X) = (x_1 - E(X))^2 \times P(X = x_1) + (x_2 - E(X))^2 \times P(X = x_2) + \dots + (x_n - E(X))^2 \times P(X = x_n)$$

Ou bien :

$$V(X) = x_1^2 \times P(X = x_1) + x_2^2 \times P(X = x_2) + \dots + x_n^2 \times P(X = x_n) - (E(X))^2$$

- Écart type : $\sigma = \sqrt{V(X)}$

STATISTIQUE À DEUX VARIABLES

Point moyen

$G(\overline{X}; \overline{Y})$ avec $\overline{X} = \dfrac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{N}$ et

$\overline{Y} = \dfrac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{N}$

Ajustement linéaire par la méthode de moindres carrées

- Variance

$$V(X) = \frac{1}{N}[(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \dots + (x_n - \overline{x})^n]$$

ou $V(X) = \dfrac{1}{N}(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - \overline{X}^2$

- Covariance

$$COV(X, Y) = \frac{1}{N}[(x_1 - \overline{x})(y_1 - \overline{y}) + (x_2 - \overline{y})(y_2 - \overline{y}) + \dots + (x_n - \overline{x})(x_n - \overline{y})]$$

ou

$$V(X, Y) = \frac{1}{N}(x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n) - \overline{x}.\overline{y}$$

- Coefficient de corrélation linéaire

$$r = \frac{COV(X, Y)}{\sqrt{(X)}\sqrt{(Y)}}$$

Remarques

- $-1 \leq r \leq 1$
- Si $0{,}87 \leq r < 1$ ou $-1 < r \leq -0{,}87$, alors il y a une bonne corrélation linéaire ou une forte corrélation linéaire entre les deux caractères.

- **Droite de régression de Y en X**

(D) : $y = ax + b$ avec $a = \dfrac{Cov(X, Y)}{V(X)}$

et $b = \overline{Y} - a\overline{X}$

- **Droite de régression de X en Y**

(D') : $x = a'y + b'$ avec $a' = \dfrac{Cov(X, Y)}{V(Y)}$

et $b' = \overline{X} - a'\overline{Y}$

NOMBRES COMPLEXES ET GÉOMÉTRIE DU PLAN

Soit A, B, C et D les points d'affixes respectives

z_A, z_B, z_C et z_D.

- L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est : $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.
- L'affixe du milieu du segment [AB] est : $\frac{1}{2}(z_A + z_B)$.
- $AB = |z_{\overrightarrow{AB}}| = |z_B - z_A|$
- $\text{Mes}(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AB}}) = \text{Arg}(z_B - z_A)$
- $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}) = \text{Arg}\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$

Similitude directe

	Conditions vérifiées par a		Nature et élément(s) caractéristique(s) de S
Similitude directe S d'écriture complexe $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in$ C.	Si $a \in \mathbb{R}^*$	$a = 1$	S est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b.
		$a \in \mathbb{R}^*\setminus\{1\}$	S est l'homothétie de centre Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$ et de rapport a.
	Si $a \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$	$\lvert a\rvert = 1$	S est la rotation de centre Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$ et d'angle $\mathrm{Arg}(a)$.
		$\lvert a\rvert \neq 1$	S est la similitude directe de centre Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$, de rapport $\lvert a\rvert$ de d'angle $\mathrm{Arg}(a)$.

- Les points distincts A, B, et C sont alignés si et seulement si $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} \in \mathbb{R}^*$.
- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D} \in \mathbb{R}^*$.
- Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D} \in i\mathbb{R}^*$.
- Les points A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} : \frac{z_C - z_B}{z_D - z_B} \in \mathbb{R}^*$.
- Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in i\mathbb{R}^*$.
- Le triangle ABC est isocèle en A si et seulement si $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\alpha}$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$.
- Le triangle ABC est rectangle et isocèle en A si et seulement si $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = i$ ou $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = -i$.
- Le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

Mise en page : Vallesse Éditions
Tel : 22410821/01916125
Maquette couverture : Igraph
Achevé d'imprimer en Côte d'Ivoire
2ème trimestre 2022
Dépôt légal : N° 18583 du 21 Avril 2022