Giorgio Fornario 09.10.2025

Mathe - GFS

Abstand zweier windschiefer Geraden im Raum

Wir betrachten zwei Geraden im Raum, die sich nicht schneiden und nicht parallel sind. Ziel ist es, den **geringsten Abstand (d)** zwischen diesen Geraden zu berechnen und die Punkte zu finden, an denen dieser Abstand auftritt.

$$\boxed{d = \frac{|(\vec{p}_2 - \vec{p}_1) \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}}$$

Formel zur Berechnung …des Abstandes d.

$$\vec{g} : \vec{x} = \vec{p}_1 + s\,\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}$$

$$\vec{h} : \vec{x} = \vec{p}_2 + t\,\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$d = \frac{|(\vec{p}_2 - \vec{p}_1) \cdot (\vec{u}_1 \times \vec{u}_2)|}{|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2|}$$

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} bf - ce \\ cd - af \\ ae - bd \end{pmatrix}$$

$$d = \frac{\left| \left(\begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} bf - ce \\ cd - af \\ ae - bd \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{(bf - ce)^2 + (cd - af)^2 + (ae - bd)^2}}$$

$$d = \frac{\left| \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}$$

$$d = \frac{|\Delta x_1 \cdot n_1 + \Delta x_2 \cdot n_2 + \Delta x_3 \cdot n_3|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}$$

Wir beschreiben die Geraden **g** und **h** in Parameterform.
Dabei sind **p1** und **p2** die Punkte auf den Geraden (Stützvektoren), und **u1** sowie **u2** die zugehörigen Richtungsvektoren. Die Differenz **Δx = p2 – p1** verbindet einen Punkt der ersten Geraden mit einem Punkt der zweiten Geraden.
Zur Bestimmung des Abstands wird durch die erste Gerade eine **Hilfsebene** gelegt, die die Richtungsvektoren **u1** und **u2** als Spannvektoren besitzt: **E:x=p1+s·u1+t·u2** Der Normalenvektor dieser Hilfsebene ergibt sich als Kreuzprodukt: **n = u1 × u2** Er steht senkrecht auf beiden Geraden und zeigt somit genau in die Richtung, in der der Abstand zwischen den beiden Geraden gemessen wird. Setzt man den Punkt **p2** der zweiten Geraden in die Ebenengleichung ein, erhält man den Ausdruck **(p2 – p1) · n** Dieser Wert zeigt, wie weit der Punkt **p2** außerhalb der Hilfsebene liegt – also wie stark die Verbindung zwischen den beiden Geraden in Richtung des Normalenvektors weist.
Da der Normalenvektor **n** die Richtung vorgibt, in der der kürzeste Abstand zwischen den windschiefen Geraden verläuft, muss man nur noch durch seine Länge **|n|** teilen,
um die tatsächliche Entfernung (den senkrechten Abstand) zu erhalten: **d = |(p2 – p1) · n| / |n|**

Aufgabe 1)
Gegeben sind die Geraden g und h.
1. Zeigen Sie, dass die Geraden **windschief** zueinander sind.
2. Berechnen Sie den geringsten Abstand **d** zwischen den beiden Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R},$$

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

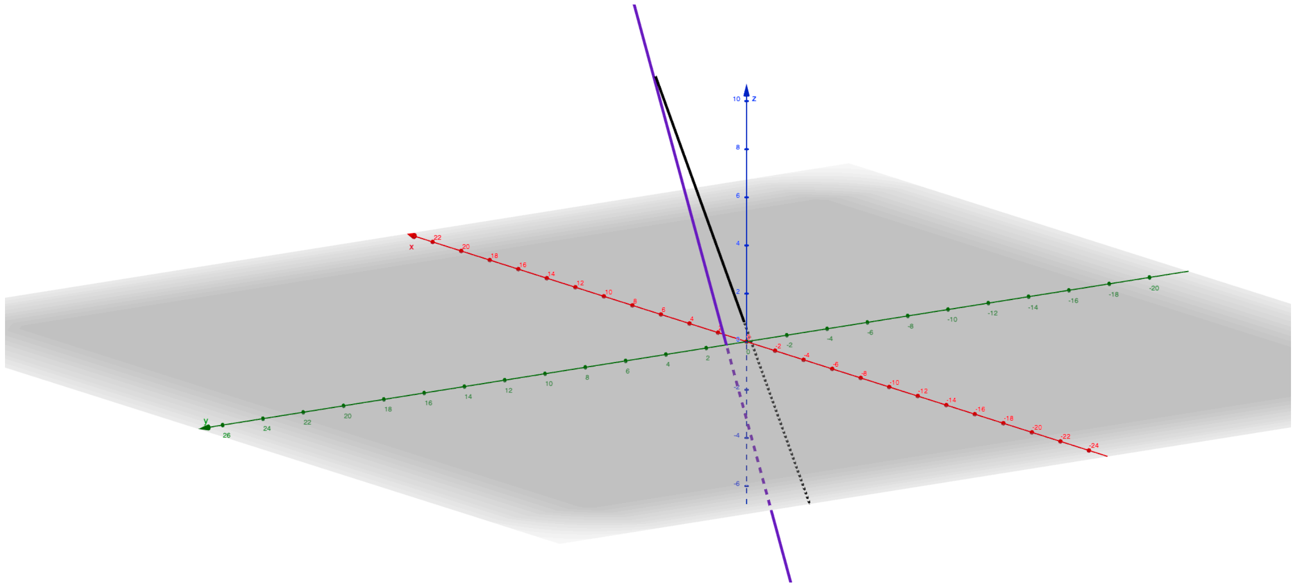
Aufgabe 2)
Zwei Flugzeuge bewegen sich auf Flugbahnen im Raum, die durch die **Geraden g** und **h** beschrieben werden. Die Flugverkehrskontrolle (ATC) verlangt einen Mindestabstand von **5 Seemeilen (NM)** zwischen den Flugzeugen.
Berechnen Sie den **geringsten Abstand d zwischen den beiden Flugzeugen.**

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R},$$

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

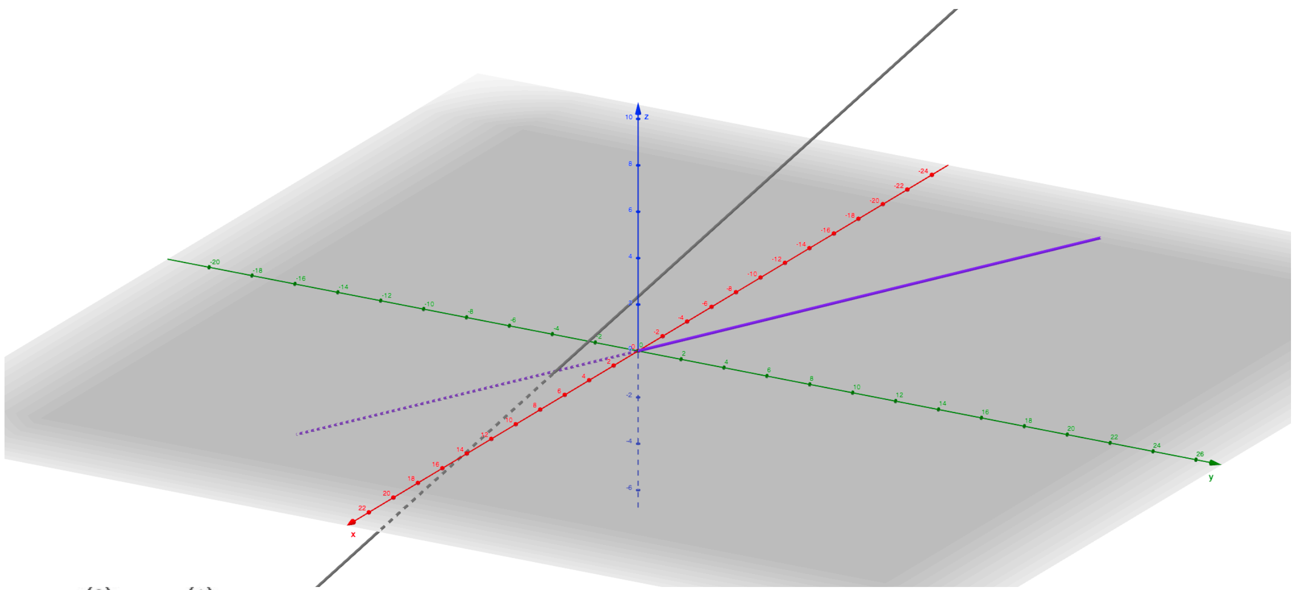
Stuttgart den 09.10.2025
Mathematik GFS bei Herr Langenbacher

Anhang:



$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R},$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$



$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R},$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix}-4\\1\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Stuttgart den 09.10.2025
Mathematik GFS bei Herr Langenbacher