

A partir de la siguiente definición:

Graph = **Array**(n, **LinkedList**())

Donde **Graph** es una representación de un grafo **simple** mediante listas de adyacencia resolver los siguiente ejercicios

Ejercicio 1

Implementar la función crear grafo que dada una lista de vértices y una lista de aristas cree un grafo con la representación por Lista de Adyacencia.

def createGraph(List, List)

Descripción: Implementa la operación crear grafo

Entrada: **LinkedList** con la lista de vértices y **LinkedList** con la lista de aristas donde por cada par de elementos representa una conexión entre dos vértices.

Salida: retorna el nuevo grafo

Ejercicio 2

Implementar la función que responde a la siguiente especificación.

def existPath(Grafo, v1, v2):

Descripción: Implementa la operación existe camino que busca si existe un camino entre los vértices v1 y v2

Entrada: **Grafo** con la representación de Lista de Adyacencia, **v1** y **v2** vértices en el grafo.

Salida: retorna **True** si existe camino entre v1 y v2, **False** en caso contrario.

Ejercicio 3

Implementar la función que responde a la siguiente especificación.

def isConnected(Grafo):

Descripción: Implementa la operación es conexo

Entrada: **Grafo** con la representación de Lista de Adyacencia.

Salida: retorna **True** si existe camino entre todo par de vértices, **False** en caso contrario.

Ejercicio 4

Implementar la función que responde a la siguiente especificación.

def isTree(Grafo):

Descripción: Implementa la operación es árbol

Entrada: **Grafo** con la representación de Lista de Adyacencia.

Salida: retorna **True** si el grafo es un árbol.

Ejercicio 5

Implementar la función que responde a la siguiente especificación.

def isComplete(Grafo):

Descripción: Implementa la operación es completo

Entrada: Grafo con la representación de Lista de Adyacencia.

Salida: retorna True si el grafo es completo.

Nota: Tener en cuenta que un grafo es completo cuando existe una arista entre todo par de vértices.

Ejercicio 6

Implementar una función que dado un grafo devuelva una lista de aristas que si se eliminan el grafo se convierte en un árbol. Respetar la siguiente especificación.

def convertTree(Grafo)

Descripción: Implementa la operación es convertir a árbol

Entrada: Grafo con la representación de Lista de Adyacencia.

Salida: LinkedList de las aristas que se pueden eliminar y el grafo resultante se convierte en un árbol.

Parte 2

Ejercicio 7

Implementar la función que responde a la siguiente especificación.

def countConnections(Grafo):

Descripción: Implementa la operación cantidad de componentes conexas

Entrada: Grafo con la representación de Lista de Adyacencia.

Salida: retorna el número de componentes conexas que componen el grafo.

Ejercicio 8

Implementar la función que responde a la siguiente especificación.

def convertToBFSTree(Grafo, v):

Descripción: Convierte un grafo en un árbol BFS

Entrada: Grafo con la representación de Lista de Adyacencia, v vértice que representa la raíz del árbol

Salida: Devuelve una Lista de Adyacencia con la representación BFS del grafo recibido usando v como raíz.

Ejercicio 9

Implementar la función que responde a la siguiente especificación.

def convertToDFSTree(Grafo, v):

Descripción: Convierte un grafo en un árbol DFS

Entrada: Grafo con la representación de Lista de Adyacencia, **v** vértice que representa la raíz del árbol

Salida: Devuelve una Lista de Adyacencia con la representación DFS del grafo recibido usando **v** como raíz.

Ejercicio 10

Implementar la función que responde a la siguiente especificación.

def bestRoad(Grafo, v1, v2):

Descripción: Encuentra el camino más corto, en caso de existir, entre dos vértices.

Entrada: Grafo con la representación de Lista de Adyacencia, **v1** y **v2** vértices del grafo.

Salida: retorna la lista de vértices que representan el camino más corto entre **v1** y **v2**. La lista resultante contiene al inicio a **v1** y al final a **v2**. En caso que no exista camino se retorna la lista vacía.

Ejercicio 11 (Opcional)

Implementar la función que responde a la siguiente especificación.

def isBipartite(Grafo):

Descripción: Implementa la operación es bipartito

Entrada: Grafo con la representación de Lista de Adyacencia.

Salida: retorna **True** si el grafo es bipartito.

NOTA: Un grafo es **bipartito** si no tiene ciclos de longitud impar.

Ejercicio 12

Demuestre que si el grafo **G** es un árbol y se le agrega una arista nueva entre cualquier par de vértices se forma exactamente un ciclo y deja de ser un árbol.

Ejercicio 13

Demuestre que si la arista (u,v) no pertenece al árbol BFS, entonces los niveles de **u** y **v** difieren a lo sumo en 1.

Parte 3

Ejercicio 14

Implementar la función que responde a la siguiente especificación.

def PRIM(Grafo):

Descripción: Implementa el algoritmo de PRIM

Entrada: Grafo con la representación de Matriz de Adyacencia.

Salida: retorna el árbol abarcador de costo mínimo

Ejercicio 15

Implementar la función que responde a la siguiente especificación.

def KRUSKAL(Grafo):

Descripción: Implementa el algoritmo de KRUSKAL

Entrada: Grafo con la representación de Matriz de Adyacencia.

Salida: retorna el árbol abarcador de costo mínimo

Ejercicio 16

Demostrar que si la arista (u,v) de costo mínimo tiene un nodo en U y otro en $V - U$, entonces la arista (u,v) pertenece a un árbol abarcador de costo mínimo.

Parte 4

Ejercicio 17

Sea e la arista de mayor costo de algún ciclo de $\mathbf{G(V,A)}$. Demuestre que existe un árbol abarcador de costo mínimo $\mathbf{AACM(V,A-e)}$ que también lo es de \mathbf{G} .

Ejercicio 18

Demuestre que si unimos dos \mathbf{AACM} por un arco (arista) de costo mínimo el resultado es un nuevo \mathbf{AACM} . (Base del funcionamiento del algoritmo de **Kruskal**)

Ejercicio 19

Explique qué modificaciones habría que hacer en el algoritmo de Prim sobre el grafo no dirigido y conexo $\mathbf{G(V,A)}$, o sobre la función de costo $\mathbf{c(v1,v2) \rightarrow R}$ para lograr:

1. Obtener un árbol de recubrimiento de costo máximo.
2. Obtener un árbol de recubrimiento cualquiera.
3. Dado un conjunto de aristas $E \in A$, que no forman un ciclo, encontrar el árbol de recubrimiento mínimo $G^c(V, A^c)$ tal que $E \in A^c$.

Ejercicio 20

Sea $G(V, A)$ un grafo conexo, no dirigido y ponderado, donde todas las aristas tienen el mismo costo. Suponiendo que G está implementado usando matriz de adyacencia, haga en pseudocódigo un algoritmo $O(V^2)$ que devuelva una matriz M de $V \times V$ donde: $M[u, v] = 1$ si $(u, v) \in A$ y (u, v) estará obligatoriamente en todo árbol abarcador de costo mínimo de G , y cero en caso contrario.

Parte 5

Ejercicio 21

Implementar el Algoritmo de Dijkstra que responde a la siguiente especificación

def shortestPath(Grafo, s, v):

Descripción: Implementa el algoritmo de Dijkstra

Entrada: Grafo con la representación de Matriz de Adyacencia, vértice de inicio s y destino v .

Salida: retorna la lista de los vértices que conforman el camino iniciando por s y terminando en v . Devolver NONE en caso que no exista camino entre s y v .

Ejercicio 22 (Opcional)

Sea $G = (V, A)$ un grafo dirigido y ponderado con la función de costos $C: A \rightarrow \mathbb{R}$ de forma tal que $C(v, w) > 0$ para todo arco $\langle v, w \rangle \in A$. Se define el costo $C(p)$ de todo camino $p = \langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$ como $C(v_0, v_1) * C(v_1, v_2) * \dots * C(v_{k-1}, v_k)$.

- a) Demuestre que si $p = \langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$ es el camino de menor costo con respecto a C en ir de v_0 hacia v_k , entonces $\langle v_i, v_{i+1}, \dots, v_j \rangle$ es el camino de menor costo (también con respecto a C) en ir de v_i a v_j para todo $0 \leq i < j \leq k$.
- b) ¿Bajo qué condición o condiciones se puede afirmar que con respecto a C existe camino de costo mínimo entre dos vértices $a, b \in V$? Justifique su respuesta.
- c) Demuestre que, usando la función de costos C tal y como la dan, no se puede aplicar el algoritmo de Dijkstra para hallar los costos de los caminos de costo mínimo desde un vértice de origen s hacia el resto.
- d) Plantee un algoritmo, lo más eficiente en tiempo que usted pueda, que determine los costos de los caminos de costo mínimo desde un vértice de origen s hacia el resto usando la función de costos C .
- e) Suponiendo que $C(v, w) > 1$ para todo $\langle v, w \rangle \in A$, proponga una función de costos $C': A \rightarrow \mathbb{R}$ y además la forma de calcular el costo $C'(p)$ de todo camino $p = \langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$ de forma tal que: aplicando el algoritmo de Dijkstra usando C' , se puedan obtener los

costos (con respecto a la función original C) de los caminos de costo mínimo desde un vértice de origen s hacia el resto. Justifique su respuesta.

A tener en cuenta:

1. Usen lápiz y papel primero
2. ~~No se puede utilizar otra Biblioteca más allá de algo1.py y las bibliotecas desarrolladas durante Algoritmos y Estructuras de Datos I.~~